

И. В. САВЕЛЬЕВ

СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.3

С 12

УДК 53 (075.8)

Рецензент

кафедра физики Московского электротехнического института связи

САВЕЛЬЕВ И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике: Учеб. пособие.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 288 с.— ISBN 5-02-013851-7

Составлен применительно к трехтомному «Курсу общей физики» автора (М.: Наука, 1986—1987) и служит дополнением к нему. Содержит около 1250 вопросов и задач, большинство которых являются оригинальными. Имеются задачи разной степени трудности, наиболее трудные из них снабжены указаниями или решениями. Отдано предпочтение не абстрактным, а реальным задачам из повседневной жизни, науки и техники. В новом издании большинство задач имеют не только числовые ответы, но и ответы в общем виде.

Для студентов высших технических заведений; может быть полезен преподавателям высшей и средней школы.

Табл. 19, Ил. 203

Савельев Игорь Владимирович

СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

Редактор Н. А. Михалина

Художественный редактор Т. Н. Кольченко

Технический редактор И. Ш. Аксельрод

Корректоры Т. С. Родионова, О. М. Березина, М. Н. Дронова

ИБ № 12939

Сдано в набор 30.07.87. Подписано к печати 24.03.88. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,44. Уч.-изд. л. 17,77. Тираж 135 000 экз. Заказ № 8311. Цена 80 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

113054, Москва М-54, Валовая, 28.

Отпечатано в типографии издательства «Коммуна»,
394000, г. Воронеж, проспект Революции, 39

С $\frac{170401000-097}{053(02)-88}$ 131-88.

ISBN 5-02-013851-7

© Издательство «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1982, 1988

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Часть 1. Физические основы механики	14
1.1. Кинематика	15
1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения тела. Работа и мощность	22
1.3. Энергия	28
1.4. Импульс	32
1.5. Момент импульса	35
1.6. Неинерциальные системы отсчета	38
1.7. Механика твердого тела	40
1.8. Всемирное тяготение	52
1.9. Колебательное движение	57
1.10. Релятивистская механика	63
1.11. Гидродинамика	68
Часть 2. Молекулярная физика и термодинамика	71
2.1. Молекулярно-кинетические представления. Первое начало термодинамики	72
2.2. Идеальный газ	74
2.3. Кинетическая теория	80
2.4. Распределения	81
2.5. Энтропия	84
2.6. Циклы	91
2.7. Уравнение Ван-дер-Ваальса	93
2.8. Жидкости и кристаллы	96
2.9. Фазовые равновесия и превращения	98
2.10. Физическая кинетика	99
Часть 3. Электричество и магнетизм	103
3.1. Электрическое поле в вакууме	104
3.2. Электрическое поле в диэлектриках	114
3.3. Проводники в электрическом поле	117
3.4. Энергия электрического поля	120
3.5. Электрический ток	122
3.6. Магнитное поле в вакууме	128
3.7. Магнитное поле в веществе	133
3.8. Электромагнитная индукция	135
3.9. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях	141
3.10. Электрические колебания	143

Часть 4. Волны	147
4.1. Упругие волны	147
4.2. Акустика	150
4.3. Электромагнитные волны	154
Часть 5. Оптика	157
5.1. Геометрическая оптика. Фотометрия	158
5.2. Интерференция света	163
5.3. Дифракция света	169
5.4. Поляризация света	181
5.5. Взаимодействие световых волн с веществом.	186
5.6. Оптика движущихся сред	189
Часть 6. Атомная физика	191
6.1. Тепловое излучение	192
6.2. Фотоны	194
6.3. Формула Резерфорда. Атом Бора	197
6.4. Спектры атомов и молекул	199
6.5. Квантовая механика	203
6.6. Квантовомеханическое описание состояний атомов	207
6.7. Физика твердого тела	209
6.8. Энергия связи ядра. Радиоактивность	215
Ответы	217
Указания к решению задач	264
Приложения	271
1. Основные физические постоянные	271
2. Единицы и размерности физических величин в СИ	272
3. Астрономические величины	284
4. Плотность веществ	284
5. Постоянные газов	284
6. Постоянные Ван-дер-Ваальса	285
7. Постоянные воды и льда	285
8. Поверхностное натяжение	285
9. Интервалы длин волн, соответствующие различным цветам спектра	285
10. Работа выхода электрона из металла	286
11. Атомный номер и масса некоторых элементарных частиц и изотопов.	286
12. Формулы для приближенных вычислений	286
13. Вычисление сумм при помощи интегралов	287
14. Некоторые математические формулы	287
15. Некоторые числа	288
16. Десятичные приставки к названиям единиц	288

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный сборник является дополнением к трехтомному «Курсу общей физики» И. В. Савельева (М.: Наука, 1986—1988). Он содержит около 1250 вопросов и задач разной степени трудности. Поэтому сборник с равным успехом может быть использован во втузах как с обычной, так и с расширенной программой по физике.

При подготовке второго издания было добавлено около 50 задач. В отличие от первого издания почти все задачи, кроме числовых ответов, снабжены также ответами в общем (буквенном) виде.

При составлении сборника отдавалось предпочтение не абстрактным, а реальным задачам, заимствованным из повседневной жизни, науки и техники. Кроме того, мы стремились включить побольше таких задач, решая которые, учащийся испытывал бы нетерпеливое любопытство, каким же окажется искомый результат.

Где это было возможно, задачи расположены в логической последовательности и в порядке возрастающей трудности. Поэтому работа над предшествующими задачами подготавливает учащегося к решению последующих задач.

Сборник состоит из трех разделов. В первом приведены вопросы и условия задач, во втором — ответы, в третьем — указания к решению более трудных задач. Указания отделены от ответов, чтобы дать возможность учащимся после получения неправильного ответа продолжать попытки решить задачу самостоятельно. В помещенных в конце книги приложениях, кроме таблиц физических величин, даны некоторые материалы, которые могут помочь при работе над задачами (значения некоторых интегралов и т. п.).

Исходные данные и ответы к задачам даны с учетом точности соответствующих величин и правил действий над приближенными числами.

Следует иметь в виду, что работа над задачами принесет максимальную пользу при соблюдении рекомендаций, которые содержатся во Введении к данному сборнику, поэтому надо начать с внимательного прочтения этого Введения и время от времени перечитывать его вновь.

Москва, май 1987 г.

И. В. Савельев

Прежде чем приступить к решению задач, прочтите внимательно это Введение и ознакомьтесь с Приложениями в конце книги!

ВВЕДЕНИЕ

I. Очень кратко о психологии творчества

Решение задач принесет наибольшую пользу только в том случае, если учащийся решает задачи *самостоятельно*. Решить задачу без помощи, без подсказки часто бывает нелегко и не всегда удается. Но даже не увенчавшиеся успехом попытки найти решение, если они предпринимались достаточно настойчиво, приносят ощутимую пользу, так как развивают мышление и укрепляют волю. Следует иметь в виду, что решающую роль в работе над задачами, как и вообще в учении, играют сила воли и трудолюбие.

Не следует смущаться тем, что некоторые задачи не решаются «с ходу». Достоверно установлено, что процесс творчества в области точных наук (а решение задач есть вид творчества) протекает по следующей схеме ¹⁾. Сначала идет подготовительная стадия, в ходе которой ученый настойчиво ищет решение проблемы. Если решение найти не удастся и проблема оставлена, наступает вторая стадия (стадия инкубации) — ученый не думает о проблеме и занимается другими вопросами. Однако в подсознании продолжается скрытая работа мысли, которая часто приводит в конечном итоге к третьей стадии — внезапному озарению и получению требуемого решения. Нужно иметь в виду, что стадия инкубации не возникает сама собой — для того чтобы пустить в ход машину бессознательного, необходима настойчивая интенсивная работа в ходе подготовительной стадии.

Решение задач, как мы уже отмечали, есть также вид творчества и подчиняется тем же закономерностям, что и работа ученого над научной проблемой. Правда, в некото-

¹⁾ См. книгу: Жак Адамар. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — М.: Сов. радио, 1970.

рых случаях вторая стадия — стадия инкубации — может быть выражена настолько слабо, что остается незамеченной.

Из сказанного вытекает, что решение задач ни в коем случае не следует откладывать на последний вечер перед занятиями, как, к сожалению, нередко поступают студенты. В этом случае более сложные и притом наиболее содержательные и полезные задачи заведомо не могут быть решены. Над заданными «на дом» задачами надо начинать думать как можно раньше, создавая условия для реализации стадии инкубации.

Если в условии задачи имеются числовые данные, не ленитесь доводить решение до числового ответа. Чтобы получить правильный числовой ответ, необходимо хорошо знать единицы физических величин и уметь производить аккуратно и надежно расчеты. И то, и другое может быть достигнуто только длительной практикой. Особое внимание нужно обращать на правильное определение порядка искомой величины. Среди учащихся часто встречается удивительное заблуждение — они считают, что ошибка в порядке величины (даже на несколько порядков) менее существенна, чем ошибка в значащих цифрах. Необоснованность такого мнения легко обнаруживается на следующем примере. Ошибка, заключающаяся в том, что вместо 5 получено 7, составляет 40 %, в то время как ошибка всего на один порядок (скажем, вместо 10^4 получено 10^5) составляет 900 %.

В разделе, который следует за ответами, содержатся указания к решению более трудных задач. Обращаться к ним нужно лишь после того, как несколько попыток решить задачу не приведут к успеху.

Наконец, надо иметь в виду, что в ряде случаев задачи расположены в логической последовательности и в порядке возрастающей трудности. Поэтому толчком к решению данной задачи может послужить ознакомление с несколькими предшествующими задачами.

II. Методические указания к решению задач

При решении задач целесообразно руководствоваться следующими правилами.

1. Прежде всего нужно хорошо вникнуть в условие задачи. Если позволяет характер задачи, обязательно сделайте рисунок, поясняющий ее сущность.

2. За редкими исключениями, каждая задача должна

быть сначала решена в общем виде (т. е. в буквенных обозначениях, а не в числах), причем искомая величина должна быть выражена через заданные величины. Получив решение в общем виде, нужно проверить, правильную ли оно имеет размерность. Если это возможно, исследовать поведение решения в предельных случаях. Например, при рассмотрении движения тела, брошенного под углом к горизонту (задача 1.32), заданы модуль начальной скорости v_0 и угол α , под которым брошено тело; известно также ускорение g . Для высоты подъема h и дальности полета l получаются значения

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Обратите внимание на то, что в оба выражения входят только заданные величины v_0 , α и g . Выражение для l можно написать в виде $l = v_0 \cos \alpha \cdot \tau$, где τ — время полета. Однако это выражение не может считаться решением, так как τ не принадлежит к числу заданных величин, оно само является функцией v_0 и α . Проверка дает, что оба выражения, как и должно быть, имеют размерность длины. При $\alpha = \pi/2$ получается $h = v_0^2/2g$, что совпадает с известным выражением для высоты подъема тела, брошенного по вертикали. Для l получается правильное значение — нуль.

В тех случаях, когда в процессе нахождения искомых величин приходится решать систему нескольких громоздких уравнений (как, например, часто бывает при нахождении токов, текущих в сложных разветвленных цепях), целесообразно сначала подставлять в эти уравнения числовые значения коэффициентов и лишь затем определять значения искомых величин.

3. Убедившись в правильности общего решения, подставляют в него вместо каждой из букв числовые значения обозначенных ими величин, беря, разумеется, все эти значения в одной и той же системе единиц. Чтобы облегчить определение порядка вычисляемой величины, полезно представить исходные величины в виде чисел, близких к единице, умноженных на 10 в соответствующей степени (например, вместо 247 подставить $2,47 \cdot 10^2$, вместо 0,086 — число $0,86 \cdot 10^{-1}$ и т. д.). Подставив в формулу числа, прежде чем начать вычисления, проверьте, нельзя ли воспользоваться формулами для приближенных вычислений, приведенными в Приложении 11 (см. также задачу 1.41).

4. Надо помнить, что числовые значения физических величин всегда являются приближенными. Поэтому при

расчетах необходимо руководствоваться правилами действий с приближенными числами. В частности, в полученном значении вычисленной величины нужно сохранить последним тот знак, единица которого превышает погрешность этой величины. Все остальные значащие цифры надо отбросить.

5. Получив числовой ответ, нужно оценить его правдоподобность. Такая оценка может в ряде случаев обнаружить ошибочность полученного результата. Например, скорость тела не может быть больше скорости света в вакууме, дальность полета камня, брошенного человеком, не может быть порядка 1000 м, масса молекулы — порядка 1 мг и т. п.

III. Некоторые сведения о вычислениях с приближенными числами

1. В физике полагается, помимо числового значения величины, указывать погрешность, с которой эта величина определена. Например, запись $l=356\pm 2$ м означает, что истинное значение длины l заключено в пределах от 354 до 358 м. Строго говоря, должна еще быть указана вероятность того, что высказанное утверждение имеет место (доверительная вероятность). Часто, однако, при записи значений физической величины погрешность ее (доверительный интервал) не указывается и приводится лишь одно число, например $l=467$ м. В этом случае следует считать, что погрешность величины не превосходит одной единицы последней значащей цифры (в нашем примере это 1 м). Следовательно, все значащие цифры числа, выражающего значение физической величины, кроме последней, нужно считать верными; последнюю же цифру надо считать сомнительной (истинное значение этой цифры может отличаться от указанного на единицу).

Напомним, что значащими цифрами называются все цифры в десятичном изображении числа, кроме нулей, стоящих в начале числа. Например, в числе 0,03040 первые два нуля не являются значащими. Они служат только для установления десятичных разрядов остальных цифр. Нули после 3 и 4 являются значащими цифрами.

В случае больших целых чисел с нулями на конце (например, 123 000) возникает вопрос о том, для чего служат нули — для обозначения значащих цифр или для определения разряда остальных цифр. Чтобы избежать такой неопределенности, следует писать подобные числа в виде

$1,23 \cdot 10^5$, если они имеют три значащие цифры, или в виде $1,230 \cdot 10^5$, если они имеют четыре значащие цифры и т. д.

2. Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется величина

$$\Delta a = |A - a|,$$

где A — точное значение того же числа.

3. Относительной погрешностью приближенного числа a называется величина

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

В физике при вычислениях мы обычно имеем дело с такими числами, точные значения которых остаются неизвестными. Поэтому на практике относительную погрешность приходится определять по формуле

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

Вносимая при этом ошибка невелика, так как обычно $A \approx a$.

4. Если величина u является функцией величин $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то предельная абсолютная погрешность величины u определяется по формуле

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta x_i,$$

где Δx_i — абсолютные погрешности величин x_i .

5. Разделив Δu на $|u|$, получим предельную относительную погрешность величины u :

$$\delta u = \frac{\Delta u}{|u|} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln u \right| \Delta x_i.$$

6. В табл. 1 приведены выражения предельных абсолютной Δu и относительной δu погрешностей некоторых функций. Под Δx_i и δx_i подразумеваются абсолютная и относительная погрешности величины x_i .

7. Рассмотрим пример на определение погрешности результата вычислений. Возьмем уже упоминавшуюся задачу о движении тела, брошенного под углом к горизонту. Высота подъема тела дается формулой

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Таблица 1

Вид функции	Предельная абсолютная погрешность Δu	Предельная относительная погрешность δu
$u = \sum_{i=1}^n x_i$	$\Delta u = \sum_{i=1}^n \Delta x_i$	—
$u = x_1 - x_2$	$\Delta u = \Delta x_1 + \Delta x_2$	$\delta u = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{ x_1 - x_2 }$
$u = x_1 x_2 \dots x_n$	$\Delta u = u \delta u$	$\delta u = \sum_{i=1}^n \delta x_i$
$u = \frac{x}{y}$	—	$\delta u = \delta x + \delta y$
$u = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{y_1 y_2 \dots y_m}$	—	$\delta u = \sum_{i=1}^n \delta x_i + \sum_{i=1}^m \delta y_i$
$u = x^m$	$\Delta u = m x^{m-1} \Delta x$	$\delta u = m \delta x$
$u = \sqrt[m]{x}$	—	$\delta u = \frac{1}{m} \delta x$
$u = \ln x$	$\Delta u = \frac{\Delta x}{x} = \delta x$	$\delta u = \frac{\delta x}{ \ln x }$
$u = \lg x$	$\Delta u = \frac{1}{2,30} \frac{\Delta x}{x} = \frac{\delta x}{2,30}$	$\delta u = \frac{1}{2,30} \frac{\delta x}{ \lg x }$
$u = e^{\pm \alpha x} (\alpha > 0)$	$\Delta u = \alpha e^{\pm \alpha x} \Delta x$	$\delta u = \alpha \Delta x$
$u = e^{f(x)}$	$\Delta u = e^{f(x)} \left \frac{df}{dx} \right \Delta x$	$\delta u = \left \frac{df}{dx} \right \Delta x$
$u = \sin mx$	$\Delta u = m \cos mx \Delta x$	$\delta u = m \operatorname{ctg} mx \Delta x$
$u = \cos mx$	$\Delta u = m \sin mx \Delta x$	$\delta u = m \operatorname{tg} mx \Delta x$
$u = \operatorname{tg} mx$	$\Delta u = \frac{m}{\cos^2 mx} \Delta x$	$\delta u = \frac{2m}{ \sin 2mx } \Delta x$

Воспользовавшись формулами табл. 1, найдем для предельной относительной погрешности h выражение

$$\delta h = 2\delta v_0 + 2\delta(\sin \alpha) + \delta g = 2\delta v_0 + 2|\operatorname{ctg} \alpha| \Delta \alpha + \delta g$$

(число 2 в знаменателе является точным, его погрешность равна нулю).

Пусть $v_0 = 95$ м/с, $\alpha = 45^\circ$; для g примем значение $9,81$ м/с². Тогда $\Delta v_0 = 1$ м/с (единица последней значащей цифры), $\delta v_0 = 1/95$, $\Delta \alpha = 1^\circ = 1/57$ рад, $\delta g = 1/981 \approx 0,001$. Подставим эти значения в формулу для δh ($\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$):

$$\delta h = \frac{2}{95} + \frac{2}{57} + 0,001 \approx \frac{1}{20} \sim 5\%.$$

Заметим, что ускорение g не было надобности брать с точностью до третьего знака. Если принять $g = 9,8$ м/с² и тем самым увеличить относительную погрешность δg до $2/980$, относительная точность результата практически не изменится, но зато вычисления станут проще.

Теперь вычислим h :

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{95^2 \cdot 0,707^2}{2 \cdot 9,8} = 2,3 \cdot 10^2 \text{ м.}$$

Мы не имеем права записать результат в виде 230 м, потому что такая запись означала бы, что погрешность найденного значения h не превышает 1 м. На самом же деле, как мы выяснили, при заданной точности v_0 и α высоту h нельзя вычислить с относительной точностью, превышающей 5 %, т. е. с абсолютной погрешностью, меньшей 10 м.

IV. Разъяснения по поводу числовых коэффициентов в условиях задач

Выражения вида $\mathbf{r} = 1\mathbf{e}_x + 2t\mathbf{e}_y + 3t^2\mathbf{e}_z$ либо $U = 1x + 2y^2 + 3z^3$ и т. п. следует рассматривать как сокращенную условную запись выражений $\mathbf{r} = (1 \text{ м})\mathbf{e}_x + (2 \text{ м/с})t\mathbf{e}_y + (3 \text{ м/с}^2)t^2\mathbf{e}_z$, либо $U = (1 \text{ Дж/м})x + (2 \text{ Дж/м}^2)y^2 + (3 \text{ Дж/м}^3)z^3$ и т. п., т. е. приписывать числовым коэффициентам надлежащие размерности.

Часть 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Обозначения:

A — работа	R — радиус, радиус кривизны, расстояние
a — амплитуда	Re — число Рейнольдса
B — магнитная индукция	r — радиус-вектор
C — центр масс	r — радиус, расстояние
c — скорость света в вакууме	S — площадь, поверхность
d — диаметр	s — путь
E — единичный тензор	T — тензор
E — энергия	T — кинетическая энергия, период колебаний
e_x, e_y, e_z — орты координатных осей	t — время
e — основание натуральных логарифмов, элементарный заряд	U — потенциальная энергия
F — сила	u, v — скорость
g — ускорение свободного падения	V — объем, скорость
h — высота	w — ускорение
I — момент инерции	α — поверхностное натяжение, угол
K — система отсчета	β — угловое ускорение
k — жесткость, коэффициент трения	β — коэффициент затухания колебаний, угол
l — длина, расстояние	γ — гравитационная постоянная, угол
M — момент импульса	η — вязкость
M, m — масса	λ — линейная плотность (масса единицы длины), логарифмический декремент затухания
N — момент силы	μ — приведенная масса
N — вращающий момент	ρ — плотность
N_z — момент силы относительно оси z	σ — поверхностная плотность (масса единицы поверхности)
n — частота вращения	τ — время
P — мощность	φ — угол, широта местности
p — импульс	Ω — телесный угол
p — давление	ω — угловая скорость
Q — добротность колебательной системы, поток жидкости	ω — круговая частота
q — электрический заряд	
R — радиус-вектор	

1.1. Кинематика

1.1. Частица движется с постоянной скоростью v . Что определяет выражение: а) $v(t_2 - t_1)$, б) $v(t_2 - t_1)$, в) $v_x(t_2 - t_1)$?

1.2. Частица движется с постоянным ускорением w . В начальный момент времени она находилась в точке с радиус-вектором r_0 и имела скорость v_0 . Написать выражение для: а) приращения скорости частицы Δv за время t , б) проекции скорости частицы на ось y в момент времени t , в) перемещения частицы Δr за время t , г) приращения координаты z частицы за время t .

1.3. В каком случае векторы a и b могут быть связаны соотношением $a = \alpha b$, где α — скаляр? Как соотносятся их орты, если $\alpha < 0$?

1.4. Может ли приращение модуля вектора Δa оказаться равным модулю приращения вектора $|\Delta a|$?

1.5. В каком соотношении находятся приращение модуля вектора Δa и модуль приращения вектора $|\Delta a|$, если векторы a и Δa направлены в противоположные стороны?

1.6. Вектор a изменил направление на обратное. Найти: Δa , $|\Delta a|$, Δa .

1.7. Вектор a повернулся без изменения «длины» на малый угол $d\phi$. а) Написать приближенное выражение для $|\Delta a|$. б) Чему равно Δa ?

1.8. Начальное значение скорости равно $v_1 = 1e_x + 3e_y + 5e_z$ (м/с), конечное $v_2 = 2e_x + 4e_y + 6e_z$ (м/с). Найти: а) приращение скорости Δv , б) модуль приращения скорости $|\Delta v|$, в) приращение модуля скорости Δv .

1.9. Написать выражение для косинуса угла α между векторами с компонентами a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z .

1.10. Компоненты одного вектора равны (1, 3, 5), другого — (6, 4, 2). Найти угол α между векторами.

1.11. Преобразовать к виду, содержащему только модули векторов и угол α , выражение $a [bc]$, в котором векторы a и c взаимно перпендикулярны, а вектор b образует с нормалью к плоскости, в которой лежат векторы a и c , угол α .

1.12. Заданы функции $v_x(t)$, $v_y(t)$ и $v_z(t)$, определяющие в некоторой системе координат скорость частицы v . Написать выражение для: а) перемещения частицы Δr за промежуток времени от t_1 до t_2 , б) пути s , пройденного частицей за тот же промежуток времени, в) приращения Δx координаты x частицы за время от t_1 до t_2 , г) среднего значения ускорения частицы $\langle w \rangle$ за то же время.

1.13. Частица 1 движется со скоростью $v_1 = ae_x$, частица 2 — со скоростью $v_2 = be_y$ (a и b — константы). Найти скорость $\mathbf{v}$ второй частицы относительно первой и модуль v этой скорости.

1.14. Исходя из определения среднего значения функции, доказать, что:

а) среднее за время τ значение скорости точки $\langle v \rangle$ равно перемещению точки $\Delta \mathbf{r}$ за это время, деленному на τ ,

б) среднее за время τ значение ускорения точки $\langle \mathbf{w} \rangle$ равно приращению скорости $\Delta \mathbf{v}$ за это время, деленному на τ .

1.15. Частица движется равномерно по часовой стрелке по окружности радиуса R , делая за время τ один оборот. Окружность лежит в координатной плоскости x, y , причем центр окружности совпадает с началом координат. В момент $t=0$ частица находится в точке с координатами $x=0, y=R$. Найти среднее значение скорости точки за промежуток времени: а) от 0 до $\tau/4$, б) от 0 до $\tau/2$, в) от 0 до $3\tau/4$, г) от 0 до τ , д) от $\tau/4$ до $3\tau/4$.

1.16. Частица прошла за некоторое время $3/4$ окружности со средним значением модуля скорости $\langle v \rangle$. Найти модуль средней скорости частицы $|\langle \mathbf{v} \rangle|$ за то же время.

1.17. Первоначально покоившаяся частица прошла за время $\tau=10,0$ с полторы окружности радиуса $R=5,00$ м с постоянным тангенциальным ускорением. Вычислить соответствующие этому промежутку времени значения: а) среднего модуля скорости $\langle v \rangle$, б) модуля средней скорости $|\langle \mathbf{v} \rangle|$, в) модуля среднего ускорения $|\langle \mathbf{w} \rangle|$.

1.18. Постоянный по модулю вектор $\mathbf{a}$, равномерно поворачиваясь против часовой стрелки в плоскости x, y , переходит за время t из положения, при котором он совпадает по направлению с осью x , в положение, при котором он совпадает по направлению с осью y . Найти среднее за время t значение вектора $\mathbf{a}$ и модуль этого среднего.

1.19. Радиус-вектор точки $\mathbf{r}$ изменяется: а) только по модулю, б) только по направлению. Что можно сказать о траектории?

1.20. Радиус-вектор частицы определяется выражением: $\mathbf{r} = 3t^2 \mathbf{e}_x + 4t^2 \mathbf{e}_y + 7\mathbf{e}_z$ (м). Вычислить:

а) путь s , пройденный частицей за первые 10 секунд движения,

б) модуль перемещения $|\Delta \mathbf{r}|$ за то же время,

в) объяснить полученные результаты.

1.21. Радиус-вектор частицы изменяется со временем по закону: $\mathbf{r} = 3t^2 \mathbf{e}_x + 2t \mathbf{e}_y + t \mathbf{e}_z$ (м). Найти:

- а) скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ частицы,
- б) модуль скорости v в момент $t=1$ с,
- в) приближенное значение пути s , пройденного частицей за 11-ю секунду движения.

1.22. Частица движется со скоростью $\mathbf{v}=1\mathbf{e}_x+2t\mathbf{e}_y+3t^2\mathbf{e}_z$ (м/с). Найти:

а) перемещение $\Delta\mathbf{r}$ частицы за первые 2 секунды ее движения,

б) модуль скорости v в момент $t=2$ с.

1.23. Частица движется со скоростью $\mathbf{v}=at(2\mathbf{e}_x+3\mathbf{e}_y+4\mathbf{e}_z)$ ($a=1,00$ м/с²). Найти:

- а) модуль скорости v частицы в момент времени $t=1,00$ с,
- б) ускорение частицы $\mathbf{w}$ и его модуль w ,
- в) путь s , пройденный частицей с момента $t_1=2,00$ с до момента $t_2=3,00$ с,
- г) какой характер имеет движение частицы.

1.24. Лифт начал подниматься с постоянным ускорением $w=1,00$ м/с². Спустя время $t=1,00$ с от потолка кабины лифта отделился и стал падать шуруп. Определить:

- а) время Δt падения шурупа до удара о пол кабины,
- б) путь s , пройденный шурупом за время Δt в системе отсчета, связанной с Землей. Высота кабины лифта $h=2,75$ м.

1.25. Известна функция $\mathbf{v}(t)$ для частицы, движущейся по криволинейной траектории. Написать выражение для радиуса кривизны R траектории в той точке, в которой частица находится в момент t .

1.26. Частица движется равномерно по криволинейной траектории. Модуль ее скорости равен v . Найти радиус кривизны R траектории в той точке, где модуль ускорения частицы равен w .

1.27. По какой траектории движется частица в случае, если $w_\tau=0$, $w_n=\text{const}$?

1.28. В некоторый момент времени t компоненты скорости $\mathbf{v}$ частицы имеют значения (1,00, 2,00, -3,00) (м/с), а компоненты ускорения $\mathbf{w}$ — (-3,00, 2,00, 1,00) (м/с²). Найти:

- а) значение выражения dv/dt в момент t ,
- б) радиус кривизны R траектории в той точке, в которой частица находится в момент t .

1.29. Точка движется вдоль оси x , причем координата x изменяется по закону $x=a \cos(2\pi/T)t$. Найти:

- а) выражения для проекций на ось x скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{w}$ точки,
- б) путь s_1 , пройденный точкой за промежуток времени от $t=0$ до $t=T/8$,

в) путь s_2 , пройденный точкой за промежуток времени от $t=T/8$ до $t=T/4$,

г) путь s , пройденный точкой за промежуток времени от $t=0$ до $t=T$.

1.30. Компоненты скорости частицы изменяются со временем по законам: $v_x=a \cos \omega t$, $v_y=a \sin \omega t$, $v_z=0$, где a и ω — константы. Найти модули скорости v и ускорения w , а также угол α между векторами v и w . На основании полученных результатов сделать заключение о характере движения частицы.

1.31. Зависимость координат движения частицы от времени имеет вид $x=a \cos \omega t$, $y=a \sin \omega t$, $z=0$ (a и ω — константы).

а) Определить радиус-вектор r , скорость v и ускорение w частицы, а также их модули.

б) Вычислить скалярное произведение векторов r и v . Что означает полученный результат?

в) Вычислить скалярное произведение векторов r и w . Что означает полученный результат?

г) Найти уравнение траектории частицы.

д) В каком направлении движется по траектории частица?

е) Охарактеризовать движение частицы.

ж) Как изменится движение частицы, если в выражении для y изменить знак на обратный?

1.32. Небольшое тело (материальная точка) брошено из точки O под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 (рис. 1.1). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

- а) время полета τ ,
- б) дальность полета l ,
- в) наибольшую высоту поднятия тела h ,
- г) уравнение траектории тела в координатах x' , y' ,
- д) значения $|dv/dt|$ и $d|v|/dt$ в вершине траектории,

е) радиус кривизны R траектории в точках O и O' . Точки бросания и падения считать лежащими на одном уровне.

1.33. Тело брошено под углом к горизонту с начальной скоростью v_0 . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти среднее значение скорости $\langle v \rangle$ за первые τ секунд полета.

1.34. Под каким углом α к горизонту нужно установить ствол орудия, чтобы поразить цель, находящуюся на рас-

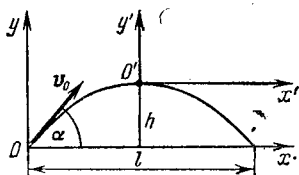


Рис. 1.1

стоянии $l=10,0$ км, если начальная скорость снаряда $v_0=500$ м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.35. Известны: функция $f(s)$, определяющая зависимость производной dv/dt от пройденного частицей пути s , модуль скорости v_0 в начале пути. Написать выражение для $v(s)$ — модуля скорости, которую имеет частица, пройдя путь s .

1.36. Дана функция $v(s)$, определяющая зависимость модуля скорости частицы от пройденного частицей пути s . Написать выражение для времени t , затрачиваемого частицей на прохождение пути s .

1.37. Зависимость модуля скорости частицы v от пройденного частицей пути s определяется функцией $v(s)=v_0-bs$.

а) Найти зависимость s от времени t .

б) Определить зависимость v от t .

в) Написать приближенные выражения для $s(t)$ и $v(t)$, справедливые для $t \ll 1/b$.

1.38. Модуль скорости частицы изменяется со временем по закону $v=v_0e^{-bt}$. Каков физический смысл константы b ?

1.39. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды, перпендикулярной к берегам скоростью $v=0,300$ м/с. Ширина реки равна $b=63,0$ м. Скорость течения изменяется по параболическому закону

$$u = u_0 - 4 \frac{u_0}{b^2} \left(x - \frac{b}{2} \right)^2,$$

где x — расстояние от берега, u_0 — константа, равная 5,00 м/с. Найти снос с лодки вниз по течению от пункта ее отправления до места причала на противоположном берегу реки.

1.40. Ось x на рис. 1.2 служит границей между участком, поросшим травой, и участком, покрытым рыхлым песком. Пешеходу нужно попасть из пункта A в пункт B . По траве пешеход может идти со скоростью $v_1=5,00$ км/ч, по песку — со скоростью $v_2=3,00$ км/ч. Чтобы совершить переход за самое короткое время, пешеход выбирает ломаный путь AOB . При каком соотношении между синусами углов α_1 и α_2 время движения пешехода из A в B будет минимальным?

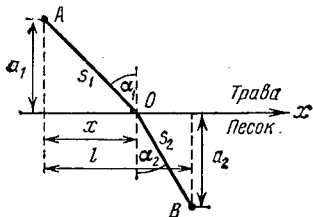


Рис. 1.2

1.41. Ниже приводятся приближенные выражения для некоторых функций, справедливые при $x \ll 1$:

- а) $\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$, б) $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$, в) $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$,
 г) $\ln(1 \pm x) \approx \pm x$, д) $\sin x \approx x$, е) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

Определить для $x=0,1$ относительную погрешность значений этих функций, найденных по формулам для приближенных вычислений.

1.42. По прямой дороге AB движется с постоянной скоростью $u=20,0$ м/с автомобиль. Из точки C , которая находится от AB на расстоянии $l=2000$ м, в момент, когда автомобиль и точка C оказываются на одном перпендикуляре к AB , производится выстрел из пушки (рис. 1.3). Предполагая, что снаряд летит прямолинейно с постоянной скоростью $v=200$ м/с, определить:

- а) угол α , на который нужно повернуть ствол пушки, чтобы поразить автомобиль,
 б) время t полета снаряда,
 в) путь s , который пройдет автомобиль за время t .

1.43. Имеются две моторные лодки, развивающие относительно воды скорость $v=5,00$ м/с. Вода течет с одинаковой по всей ширине реки скоростью $u=0,500$ м/с. Ширина

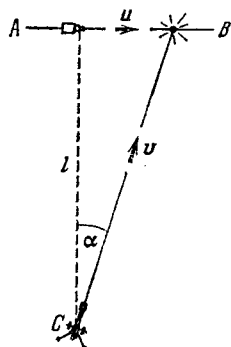


Рис. 1.3

реки $l=1,000$ км. На середине реки вбиты две сваи C и D , отстоящие друг от друга на расстояние, равное ширине реки l (рис. 1.4). Одной лодке нужно пересечь реку строго в поперечном направлении

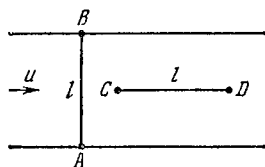


Рис. 1.4

из точки A в точку B и обратно. Второй лодке нужно проделать путь от сваи C до сваи D и обратно.

- а) Как должна двигаться первая лодка относительно воды, чтобы относительно берегов перемещаться вдоль прямой AB ?

б) Найти времена t_1 и t_2 , затрачиваемые на прохождение пути $2l$ первой и второй лодками.

в) Получить для t_1 и t_2 приближенные выражения, справедливые для $u \ll v$. Найти с помощью этих выражений значения t_1 и t_2 ; сравнить их с точными значениями.

1.44. На высоте $h=5000$ м летит прямолинейно самолет с постоянной скоростью $u=100,0$ м/с. В момент, когда он находится над зенитной батареей, производится выстрел (рис. 1.5). Начальная скорость снаряда $v_0=500,0$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

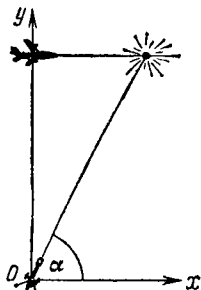


Рис. 1.5

а) под каким углом α к горизонту нужно установить ствол орудия, чтобы снаряд и самолет достигли одновременно точки пересечения их траекторий,

б) на какую продолжительность полета t нужно установить взрыватель, чтобы снаряд разорвался в точке встречи с целью,

в) на какое расстояние s по горизонтали отстоит от батареи точка встречи.

1.45. Известно, что Луна все время обращена к Земле одной и той же стороной и обращается вокруг Земли за 27,3 суток. Определить угловую скорость ω_L вращения Луны вокруг ее оси. Сравнить эту скорость с угловой скоростью ω_Z суточного вращения Земли.

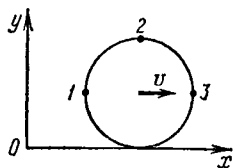


Рис. 1.6

1.46. Часы каждые сутки отстают на 2 минуты. Чему равно угловое ускорение β минутной стрелки?

1.47. Постоянный по модулю вектор $\mathbf{a}$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг фиксированной перпендикулярной к нему оси. Выразить производные $\dot{\mathbf{a}}$ и $\ddot{\mathbf{a}}$ через векторы $\mathbf{a}$ и ω .

1.48. Цилиндр катится без скольжения со скоростью v (рис. 1.6). Найти скорости точек 1, 2 и 3, выразить их через орты координатных осей.

1.49. Шар вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, которая поворачивается в плоскости x, y с угловой скоростью $\omega' = \omega' \mathbf{e}_z$ (рис. 1.7). Найти:

а) угловую скорость Ω и угловое ускорение β шара, а также модули этих векторов,

б) угол α между векторами Ω и ω ,

в) угол φ между векторами β и Ω . Считать, что в начальный момент времени вектор ω направлен по оси x .

1.50. Тело участвует в двух вращениях, происходящих со скоростями $\omega_1 = at^2 e_x$ и $\omega_2 = 2at^2 e_y$ ($a = 1,00$ рад/с³).

а) На какой угол φ повернется тело за первые 3,00 с?

б) Вокруг какой оси произойдет этот поворот?

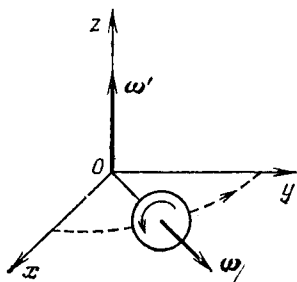


Рис. 1.7

1.51. Якорь электромотора, вращавшийся с частотой $n = 50$ с⁻¹, двигаясь после выключения тока равнозамедленно, остановился, сделав полное число оборотов $N = 1680$. Найти угловое ускорение β якоря.

1.52. До начала торможения автомобиль имел скорость $v_0 = 60$ км/ч. После начала торможения автомобиль двигался прямолинейно с непостоянным ускорением и остановился спустя время $t = 3,00$ с. За это время он прошел путь $s = 20,0$ м. Определить среднюю угловую скорость $\langle \omega \rangle$ и среднее угловое ускорение $\langle \beta \rangle$ колеса автомобиля за время торможения. Радиус колеса $R = 0,23$ м.

1.53. Частица движется по радиусу вращающегося диска со скоростью $v = 3,00$ м/с. В начальный момент времени частица находится в центре диска. Угловая скорость вращения диска $\omega = 20,0$ рад/с. Найти приближенное значение пути s , пройденного частицей в неподвижной системе отсчета за время с момента $t_1 = 9,00$ с до момента $t_2 = 10,00$ с.

1.2. Динамика материальной точки

и поступательного движения тела. Работа и мощность

У к а з а н и е. При решении задач на динамику надо поступать следующим образом.

1. Выяснить, с какими телами взаимодействует рассматриваемое тело. Соответственно установить силы, действующие на это тело.

2. Написать уравнение движения тела в векторном виде. Если система, движение которой рассматривается, состоит из нескольких связанных друг с другом тел, такое уравнение пишется для каждого из тел в отдельности.

3. Перейти в каждом уравнении от векторов к их проекциям на соответствующим образом выбранное направление.

Может случиться, что для уравнений, относящихся к разным телам, эти направления окажутся различными. Если направление какого-либо вектора заранее известно, его проекцию надо выражать через модуль вектора, взятый с надлежащим знаком.

4. Решить систему получившихся скалярных уравнений.

Поясним сказанное следующим примером. Система состоит из тел 1 и 2, связанных невесомой¹⁾ нерастяжимой нитью (рис. 1.8). Масса тела 1 равна m_1 , тела 2 — m_2 . Нить может скользить без трения по направляющему желобу. Трения между телом 1 и наклонной плоскостью, на которой оно лежит, нет. Плоскость образует с горизонтом угол α . Найти ускорения тел 1 и 2.

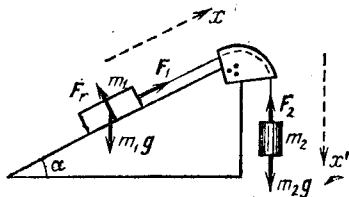


Рис. 1.8

1. Система, движение которой рассматривается, состоит из тел 1 и 2 и связывающей их нити. Тело 1 взаимодействует с нитью, с плоскостью и с Землей. Соответственно на него действуют: сила натяжения нити F_1 , сила реакции плоскости F_r и сила тяжести m_1g . Тело 2 взаимодействует с нитью и с Землей. Соответственно на него действуют: сила натяжения нити F_2 и сила тяжести m_2g . Нить невесома, поэтому она взаимодействует только с телами 1 и 2, а также с желобом. Соответствующие силы равны $-F_1$ и $-F_2$ (эти силы на рисунке не показаны; они противоположны по направлению силам F_1 и F_2), кроме того, имеется сила, распределенная по всей длине желоба. Все элементы этой силы перпендикулярны к нити и влияния на ее движение в продольном направлении не оказывают.

2. Уравнения движения тел 1 и 2 имеют вид

$$m_1 w_1 = F_1 + F_r + m_1 g, \quad m_2 w_2 = F_2 + m_2 g.$$

Масса нити равна нулю. Поэтому уравнение движения для нити имеет вид: $0=0$. Писать его нет смысла.

Из невесомости нити вытекает, что модули сил F_1 и F_2 одинаковы. Обозначим этот одинаковый модуль буквой F ($F_1 = F_2 = F$). Из нерастяжимости нити следует, что смеще-

¹⁾ Под невесомой нитью здесь и в дальнейшем подразумевается нить с пренебрежимо малой массой.

ния, а следовательно, скорости и ускорения тел 1 и 2 одинаковы по модулю.

3. Уравнение для тела 1 целесообразно «спроектировать» на ось x , уравнение для тела 2 — на ось x' (см. рис. 1.8). При проектировании следует учесть, что а) проекция силы F_7 на ось x равна нулю, б) проекция силы m_1g на ось x равна $-m_1g \sin \alpha$, в) проекция силы F_1 на ось x равна $F_1=F$, г) проекция силы F_2 на ось x' равна $-F_2=-F$, д) проекция силы m_2g на ось x' равна m_2g , е) проекция ускорения w_1 тела 1 на ось x (т. е. w_{1x}) и проекция ускорения w_2 тела 2 на ось x' (т. е. $w_{2x'}$) одинаковы и по модулю, и по знаку. Поэтому введем обозначение $w_{1x}=w_{2x'}=w_x$.

4. С учетом всего сказанного выше уравнения движения в проекциях можно написать следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 w_{1x} &= F_1 - m_1 g \sin \alpha, & \text{или} & & m_1 w_x &= F - m_1 g \sin \alpha, \\ m_2 w_{2x'} &= m_2 g - F_2, & & & m_2 w_x &= m_2 g - F. \end{aligned}$$

Решив совместно эти два уравнения, получим для w_x значение

$$w_x = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g.$$

В зависимости от соотношения между массами m_1 и m_2 , а также от значения угла α проекция ускорения w_x может оказаться либо положительной, либо отрицательной, либо равной нулю. В случае $w_x > 0$ ускорение тела 1 направлено вдоль оси x вправо, ускорение тела 2 направлено вниз. В случае $w_x < 0$ направления ускорений противоположны. Наконец, в случае $w_x = 0$ система либо покоится, либо движется равномерно в ту сторону, в какую ей сообщат скорость.

1.54. Чтобы определить коэффициент трения k между деревянными поверхностями, брусок положили на доску и стали поднимать один конец доски до тех пор, пока брусок не начал по ней скользить. Это произошло при угле наклона доски $\alpha = 14^\circ$. Чему равен k ?

1.55. Два соприкасающихся бруска лежат на горизонтальном столе, по которому они могут скользить без трения. Масса первого бруска $m_1 = 2,00$ кг, масса второго бруска $m_2 = 3,00$ кг. Один из брусков толкают с силой $F_0 = 10,0$ Н (рис. 1.9).

1. Найти силу F , с которой бруски давят друг на друга в случае, если сила F_0 приложена к бруску 1 (а), к бруску 2 (б).

2. Что примечательного в полученных результатах?

1.56. Решить задачу 1.55 в предположении, что коэффициент трения между бруском и столом равен $k_1=0,100$ для бруска 1 и $k_2=0,200$ для бруска 2.

1.57. Решить задачу 1.56, положив $k_1=0,200$ и $k_2=0,100$. Сопоставить результаты задач 1.55, 1.56 и данной задачи.

1.58. Два соприкасающихся бруска скользят по наклонной доске (рис. 1.10). Масса первого бруска $m_1=2,00$ кг, масса второго бруска $m_2=3,00$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской равен $k_1=0,100$ для бруска 1 и $k_2=0,200$ для бруска 2. Угол наклона доски $\alpha=45^\circ$.

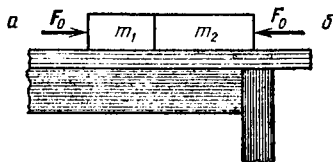


Рис. 1.9

1. Определить: а) ускорение w , с которым движутся бруски, б) силу F , с которой бруски давят друг на друга.

2. Что происходило бы в случае $k_1 > k_2$?

1.59. На горизонтальном столе лежат два тела массы $M=1,000$ кг каждое. Тела связаны невесомой нерастяжимой нитью (рис. 1.11). Такая же нить связывает тело 2 с

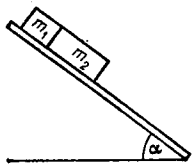


Рис. 1.10

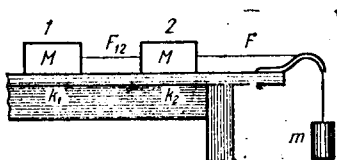


Рис. 1.11

грузом массы $m=0,500$ кг. Нить может скользить без трения по изогнутому желобу, укрепленному на краю стола. Коэффициент трения первого тела со столом $k_1=0,100$, второго тела $k_2=0,150$. Найти:

- ускорение w , с которым движутся тела,
- натяжение F_{12} нити, связывающей тела 1 и 2,
- натяжение F нити, на которой висит груз.

1.60. Эстакада на пересечении улиц имеет радиус кривизны $R=1000$ м. В верхней части эстакады в дорожное покрытие вмонтированы датчики, регистрирующие силу давления на эстакаду. Отмечающий эту силу прибор проградуирован в кгс ($1 \text{ кгс}=9,81 \text{ Н}$). Какую силу давления F показывает прибор в момент, когда по эстакаде проезжает со скоростью $v=60,0$ км/ч автомобиль массы $m=1,000$ т?

1.61. На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует магнитная сила $\mathbf{F}=q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ (q — заряд частицы, $\mathbf{v}$ — ее скорость, $\mathbf{B}$ — характеристика поля, называемая магнитной индукцией). Найти уравнение траектории, по которой будет двигаться частица в однородном магнитном поле (т. е. поле, во всех точках которого $\mathbf{B}$ одинакова по модулю и направлению) в случае, если в начальный момент вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярен к $\mathbf{B}$. Никаких сил, кроме магнитной, нет. Известными считать массу m , заряд q и скорость v частицы, а также магнитную индукцию поля B . В качестве координатной плоскости x, y взять плоскость, в которой движется частица.

1.62. Шарик массы $m=0,200$ кг, привязанный к закрепленной одним концом нити длины $l=3,00$ м, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса $R=1,00$ м. Найти:

- а) число оборотов n шарика в минуту,
- б) натяжение нити F .

1.63. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг проходящей через его центр вертикальной оси с частотой $n=10,0$ об/мин. На каком расстоянии r от центра диска может удержаться лежащее на диске небольшое тело, если коэффициент трения $k=0,200$?

1.64. Небольшому телу сообщают начальный импульс, в результате чего оно начинает двигаться поступательно без трения вверх по наклонной плоскости со скоростью $v_0=3,00$ м/с. Плоскость образует с горизонтом угол $\alpha=20,0^\circ$. Определить:

- а) на какую высоту h поднимется тело,
- б) сколько времени t_1 тело будет двигаться вверх до остановки,
- в) сколько времени t_2 тело затратит на скольжение вниз до исходного положения,
- г) какую скорость v имеет тело в момент возвращения в исходное положение.

1.65. Решить задачу 1.64 в предположении, что коэффициент трения между телом и плоскостью $k=0,100$. Масса тела $m=1,00$ кг. Помимо указанных в предыдущей задаче величин, определить:

- д) какую работу A совершает сила трения на всем пути снизу вверх и обратно.

Сравнить результаты задачи 1.64 и данной задачи.

1.66. Шарик массы m помещен в высокий сосуд с некоторой жидкостью и отпущен без толчка. Плотность жидкости в η раз меньше плотности шарика. При движении

шарика возникает сила сопротивления среды, пропорциональная скорости движения: $F = -kv$.

- а) Описать качественно характер движения шарика.
- б) Найти зависимость скорости шарика v от времени t .

1.67. Тонкая стальная цепочка с очень мелкими звеньями, имеющая длину $l = 1,000$ м и массу $m = 10,0$ г, лежит на горизонтальном столе. Цепочка вытянута в прямую линию, перпендикулярную к краю стола. Конец цепочки свешивается с края стола. Когда длина свешивающейся части составляет $\eta = 0,275$ длины l , цепочка начинает соскальзывать со стола вниз. Считая цепочку однородной по длине, найти:

- а) коэффициент трения k между цепочкой и столом,
- б) работу A сил трения цепочки о стол за время соскальзывания,
- в) скорость v цепочки в конце соскальзывания.

1.68. Тонкая стальная цепочка с очень мелкими звеньями висит вертикально, касаясь нижним концом стола. Масса цепочки m , длина l . В момент $t = 0$ цепочку отпускают. Считая цепочку однородной по длине, найти:

- а) мгновенное значение $F(t)$ силы, с которой цепочка действует на стол,

- б) среднее значение $\langle F \rangle$ этой силы за время падения.

1.69. Сила, действующая на частицу, имеет вид $F = ae_x$ (Н), где a — константа. Вычислить работу A , совершаемую над частицей этой силой на пути от точки с координатами (1, 2, 3) (м) до точки с координатами (7, 8, 9) (м).

1.70. Частица движется равномерно по окружности. Чему равна работа A результирующей всех сил, действующих на частицу: а) за один оборот, б) за пол оборота, в) за четверть оборота?

1.71. Частица перемещается по окружности радиуса r под действием центральной силы F . Центр окружности совпадает с силовым центром. Какую работу A совершает сила F на пути s ?

1.72. Тангенциальное ускорение w_t частицы массы m , движущейся по некоторой криволинейной траектории, изменяется с расстоянием s , отсчитанным вдоль траектории от некоторого начального положения частицы, по закону $w_t = w_t(s)$. Написать выражение для работы A , совершаемой над частицей всеми действующими на нее силами, на участке траектории от s_1 до s_2 .

1.73. Тело массы $m = 1,00$ кг падает с высоты $h = 20,0$ м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

- а) среднюю по времени мощность $\langle P \rangle$, развиваемую силой тяжести на пути h ,

б) мгновенную мощность P на высоте $h/2$.

1.74. Брошенный камень массы m поднимается над уровнем, на котором находится точка бросания, на высоту h . В верхней точке траектории скорость камня равна v . Сила сопротивления воздуха совершает над камнем на пути от точки бросания до вершины траектории работу $A_{\text{сопр}}$. Чему равна работа A бросания камня?

1.75. Тело массы m брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

а) мгновенную мощность $P(t)$, развиваемую при полете тела приложенной к нему силой,

б) значение мощности P в вершине траектории,

в) среднее значение мощности $\langle P \rangle_{\text{пол}}$ за время подъема тела,

г) среднее значение мощности $\langle P \rangle_{\text{пол}}$ за все время полета (точка бросания и точка падения находятся на одном уровне).

1.76. Тело массы m начинает двигаться под действием силы $\mathbf{F} = 2te_x + 3t^2e_y$. Найти мощность $P(t)$, развиваемую силой в момент времени t .

1.3. Энергия

1.77. Найти приращение энергии ΔE , если: а) $E_1 = 2$ Дж, $E_2 = 5$ Дж, б) $E_1 = 10$ Дж, $E_2 = 8$ Дж.

1.78. Для указанных в задаче 1.77 начальной E_1 и конечной E_2 энергий найти убыль энергии $-\Delta E$.

1.79. Первоначально покоившаяся частица, находясь под действием силы $\mathbf{F} = 1e_x + 2e_y + 3e_z$ (Н), переместилась из точки (2, 4, 6) (м) в точку (3, 6, 9) (м). Найти кинетическую энергию T частицы в конечной точке.

1.80. Находясь под действием постоянной силы с компонентами (3, 10, 8) (Н), частица переместилась из точки 1 с координатами (1, 2, 3) (м) в точку 2 с координатами (3, 2, 1) (м).

а) Какая при этом совершается работа A ?

б) Как изменилась кинетическая энергия частицы?

1.81. Доказать соотношение

$$T_d = T_u + mV_c^2/2,$$

где T_d — кинетическая энергия системы материальных точек, определяемая в лабораторной системе отсчета (л-системе), T_u — кинетическая энергия, определяемая в си-

стеме центра масс (ц-системе), m — суммарная масса системы, V_c — скорость центра масс в л-системе.

1.82. Потенциальная энергия частицы в некотором силовом поле определяется выражением $U = 1,00x + 2,00y^2 + 3,00z^3$ (U в Дж, координаты в м). Найти работу A , совершаемую над частицей силами поля при переходе из точки с координатами (1,00; 1,00; 1,00) в точку с координатами (2,00; 2,00; 2,00).

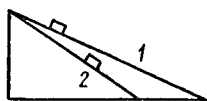


Рис. 1.12

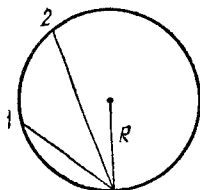


Рис. 1.13

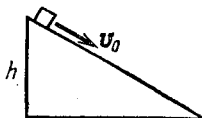


Рис. 1.14

1.83. Потенциальная энергия частицы определяется выражением $U = a(x^2 + y^2 + z^2)$, где a — положительная константа. Частица начинает двигаться из точки с координатами (3,00; 3,00; 3,00) (м). Найти ее кинетическую энергию T в момент, когда частица находится в точке с координатами (1,00; 1,00; 1,00) (м).

1.84. Два тела соскальзывают без трения и без начальной скорости с наклонных плоскостей 1 и 2 (рис. 1.12).

а) Сравнить скорости тел v_1 и v_2 в конце соскальзывания.

б) Одинаковы ли времена соскальзывания t_1 и t_2 ?

1.85. Имеются две наклонные плоскости, совпадающие с хордами одной и той же окружности радиуса R (рис. 1.13). С каждой из них соскальзывает без трения и без начальной скорости небольшое тело. Для какой из плоскостей время соскальзывания больше?

1.86. Небольшое тело массы m устанавливают в верхней точке наклонной плоскости высоты h и сообщают ему начальную скорость v_0 , в результате чего оно начинает сползать по плоскости вниз (рис. 1.14). Поверхность плоскости неоднородна, поэтому скорость сползания изменяется некоторым произвольным образом. Однако в нижней точке плоскости скорость имеет первоначальное значение v_0 . Какую работу A совершают силы трения на всем пути движения тела?

1.87. Небольшое тело начинает скользить без трения с вершины сферы радиуса R вниз (рис. 1.15). На какой

высоте h над центром сферы тело отделится от поверхности сферы и полетит свободно?

1.88. По желобу, имеющему форму, показанную на рис. 1.16 (горизонтальный участок желоба сдвинут относительно наклонного в направлении, перпендикулярном к рисунку), с высоты h начинает скользить без трения небольшое тело (материальная точка).

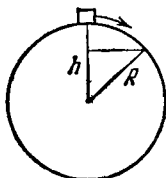


Рис. 1.15

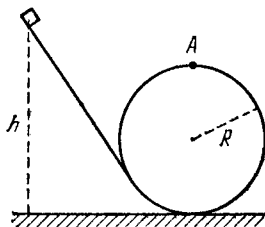


Рис. 1.16

а) При каком минимальном значении высоты h тело опишет полную петлю, не отделяясь от желоба?

б) Чему равна при таком значении h сила F давления тела на желоб в точке A ?

1.89. Градиент скалярной функции φ в некоторой точке P представляет собой вектор, направление которого совпадает с направлением l , вдоль которого функция φ , возрастающая по величине, изменяется в точке P с наибольшей скоростью. Модуль этого вектора равен значению $d\varphi/dl$ в точке P . Аналитически это можно записать следующим образом:

$$\nabla\varphi = \frac{d\varphi}{dl} \mathbf{e}_l.$$

1. Исходя из этого определения, найти выражения для: а) ∇r , б) $\nabla(1/r)$, в) $\nabla f(r)$, где r — модуль радиус-вектора точки P .

2. Убедиться в том, что такие же выражения получаются с помощью формулы

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

1.90. Потенциальная энергия частицы имеет вид: а) $U = \alpha/r$, б) $U = kr^2/2$, где r — модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$ частицы; α и k — константы ($k > 0$). Найти силу $\mathbf{F}$, действующую на частицу, и работу A , совершаемую над частицей при переходе ее из точки (1, 2, 3) в точку (2, 3, 4).

1.91. Потенциальная энергия частицы имеет вид

$$U = a(x/y - y/z),$$

где a — константа. Найти:

а) силу F , действующую на частицу,

б) работу A , совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки $(1, 1, 1)$ в точку $(2, 2, 3)$.

1.92. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном силовом поле, имеет вид

$$U = a/r^3 - b/r^2,$$

где a и b — положительные константы.

а) Имеется ли у этой частицы положение устойчивого равновесия по отношению к смещениям в радиальном направлении?

б) Нарисовать примерную кривую зависимости U от r .

1.93. Частица движется по окружности в поле центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от силового центра. В каком соотношении находятся в этом случае кинетическая T , потенциальная U и полная E энергии частицы?

1.94. Частица массы m находится в силовом поле вида $F = -(\alpha/r^2)e_r$ (α — положительная константа, r — модуль, а e_r — орт радиус-вектора частицы). Частицу поместили в точку с радиус-вектором r_0 и сообщили ей начальную скорость v_0 , перпендикулярную к r_0 . По какой траектории будет двигаться частица?

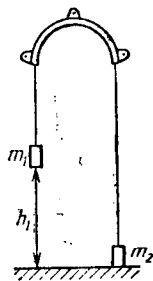


Рис. 1.17

1.95. При каком условии траекторией частицы из предыдущей задачи будет окружность?

1.96. Невесомая нерастяжимая нить может скользить без трения по изогнутому желобу (рис. 1.17). К концам нити прикреплены грузы массами $m_1 = 3,00$ кг и $m_2 = 1,00$ кг. Груз массы m_1 поднимают настолько, чтобы груз массы m_2 коснулся пола, и отпускают. Высота $h_1 = 1,00$ м. На какую высоту h_2 над полом поднимется груз массы m_2 после того, как груз массы m_1 ударится о пол?

1.97. Автомобиль массы $m = 1,00$ т ехал некоторое время по горизонтальному участку дороги с постоянной скоростью $v = 80$ км/ч. При въезде на подъем, образующий с горизонтом угол $\alpha = 10,0^\circ$, для того чтобы сохранить прежнюю скорость, пришлось, «прибавив газ», увеличить вращающий момент, приложенный к ведущим колесам,

в $\eta=6,20$ раза. Считая силу F сопротивления воздуха движению автомобиля пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент k в формуле $F=kv^2$. Трением в шинах пренебречь.

1.98. По резиновому шнуру, подвешенному одним концом к кронштейну (рис. 1.18), может скользить с независимым от скорости трением муфта массы $m=0,300$ кг. Трение характеризуется силой $F=0,294$ Н. Длина недеформированного шнура $l_0=1,00$ м, коэффициент пропорциональности между упругой силой и удлинением шнура $k=560$ Н/м. На нижнем конце шнура имеется упор. Муфту поднимают в крайнее верхнее положение и отпускают. Пренебрегая внутренним трением в шнуре, размерами муфты, а также массами шнура и упора, определить:



Рис. 1.18

а) удлинение шнура Δl в момент достижения муфтой упора,

б) скорость муфты v в этот момент,

в) максимальное удлинение шнура $\Delta l_{\max}$.

1.4. Импульс

1.99. Система состоит из частицы 1 массы $0,100$ г, частицы 2 массы $0,200$ г и частицы 3 массы $0,300$ г. Частица 1 помещается в точке с координатами $(1,00; 2,00; 3,00)$, частица 2 — в точке с координатами $(2,00; 3,00; 1,00)$, частица 3 — в точке с координатами $(3,00; 1,00; 2,00)$ (значения координат даны в метрах). Найти радиус-вектор $\mathbf{r}_C$ центра масс системы и его модуль.

1.100. Из астрономических наблюдений установлено, что называемый барицентром центр масс системы Земля — Луна расположен внутри земного шара на расстоянии ηR_3 от центра Земли ($\eta=0,730$, R_3 — радиус Земли). Считая известными массу Земли m_3 , радиус Земли R_3 и средний радиус лунной орбиты R , вычислить массу Луны m_L . Сравнить полученное значение с табличным.

1.101. Однородный круглый конус имеет высоту h . На каком расстоянии l от вершины находится его центр масс?

1.102. Чему равен импульс $\mathbf{p}$ системы частиц в системе их центра масс?

1.103. Как ведет себя центр масс, если суммарный импульс системы частиц равен нулю?

1.104. Система взаимодействующих тел находится в поле сил тяжести вблизи поверхности Земли. Как ведет себя

центр масс системы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.105. Тело массы m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью v_0 . Спустя время τ тело упало на Землю. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

- приращение импульса тела Δp за время полета,
- среднее значение импульса $\langle p \rangle$ за время τ .

1.106. Частица массы m движется в плоскости x, y под действием постоянной по модулю силы F , поворачивающейся в этой плоскости по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью ω . В начальный момент времени сила направлена по оси x , скорость частицы равна v_0 . Найти импульс частицы p в момент времени t .

1.107. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры. Масса и скорость первого шара равны 4,00 кг и 8,00 м/с, второго шара — 6,00 кг и 2,00 м/с. Как будут двигаться шары после абсолютно неупругого соударения?

1.108. Два шара претерпевают центральный абсолютно неупругий удар. До удара шар массы m_2 неподвижен, шар массы m_1 движется с некоторой скоростью. Какая часть η первоначальной кинетической энергии теряется при ударе, если: а) $m_1 = m_2$, б) $m_1 = 0,1 m_2$, в) $m_1 = 10 m_2$?

1.109. Шар массы m_1 совершает центральный абсолютно упругий удар о покоящийся шар массы m_2 .

а) При каком соотношении масс m_1 и m_2 первый шар полетит после удара в обратном направлении?

б) Что происходит с первым шаром, если массы шаров одинаковы?

в) Что происходит с первым шаром, если $m_1 \ll m_2$?

1.110. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль оси x . Масса первого шара $m_1 = 0,200$ кг, масса второго шара $m_2 = 0,300$ кг. До столкновения проекции скоростей шаров на ось равны: $v_{10} = 1,00$ м/с, $v_{20} = -1,00$ м/с. Найти проекции скоростей шаров v_{1x} и v_{2x} после их центрального абсолютно упругого соударения.

1.111. Шар массы m_1 , движущийся со скоростью v_0 , ударяет о неподвижный шар массы m_2 . После абсолютно упругого соударения шары летят со скоростями v_1 и v_2 в направлениях, указанных на рис. 1.19.

1. При каком соотношении масс m_1 и m_2 возможны случаи: а) $\alpha = \pi/2$, б) $\alpha = \beta \neq 0$, в) $\alpha = \beta = 0$, г) $\alpha = \pi$, $\beta = 0$?

2. Возможен ли случай $\beta = \pi/2$?

3. Чему равно при $\alpha = \pi/2$ предельное возможное значение угла β ?

4. Какую относительную долю η своей кинетической энергии передает первый шар второму в случаях: а) $\alpha=\pi/2$, б) $\alpha=\beta\neq 0$, в) $\alpha=\beta=0$, г) $\alpha=\pi$, $\beta=0$?

5. Сравнить результаты п. 4а — г.

6. Чему равно предельное значение η в случае 4б?

7. При каких значениях m_1 , m_2 и β первый шар после удара покоится?

8. Найти угол β в случае, если: а) $\alpha=\pi/2$ и $m_1=0,99 m_2$, б) $\alpha=\beta\neq 0$ и $m_1=m_2$.

9. Сравнить угол разлета шаров (т. е. $\alpha+\beta$) в случаях 8а и 8б.

10. Доказать, что в случае $m_1=m_2$ при любом значении α (в пределах $0<\alpha<\pi/2$) угол разлета шаров равен $\pi/2$.

1.112. Два одинаковых шара претерпевают центральный удар. До удара второй шар неподвижен, первый движется

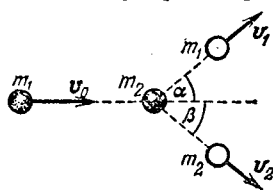


Рис. 1.19

со скоростью v_0 . Характер удара таков, что потеря энергии составляет η -ю часть той, которая имела бы место при абсолютно неупругом ударе.

1. Определить скорости шаров v_1 и v_2 после удара.

2. Исследовать случаи: а) $\eta=1$, б) $\eta=0$.

1.113. Вычислить скорости шаров из задачи 1.112 для значений η , равных: а) 0,1, б) 0,5, в) 0,9. Сравнить полученные результаты.

1.114. Расшалившиеся дети бросили мяч вслед проехавшему мимо грузовому автомобилю. С какой скоростью v отскочит мяч от заднего борта грузовика, если скорость автомобиля $u=7,0$ м/с, скорость v_0 мяча непосредственно перед ударом равна 15,0 м/с и направлена по нормали к поверхности борта. Удар считать абсолютно упругим.

1.115. Протон начинает двигаться по направлению к свободной покоящейся альфа-частице «из бесконечности» (т. е. с расстояния, при котором взаимодействие между протоном и альфа-частицей пренебрежимо мало) со скоростью $v_0=1,00\cdot 10^8$ м/с. Считая «соударение» центральным, определить, на какое минимальное расстояние $r_{\min}$ сблизятся частицы.

При решении задачи учесть, что взаимная потенциальная энергия двух точечных зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга, равна $U=kq_1q_2/r$ (ср. с выражением $U=-\gamma m_1m_2/r$ для взаимной потенциальной энергии двух тяготеющих друг к другу точечных масс).

В СИ числовое значение коэффициента пропорциональности k равно $9 \cdot 10^9$. Заряд протона равен $+e$, заряд альфа-частицы равен $+2e$, где e — элементарный заряд. Масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, масса альфа-частицы $m_\alpha = 6,64 \cdot 10^{-27}$ кг.

1.116. Водометный двигатель катера забирает воду из реки и выбрасывает ее со скоростью $u = 10,0$ м/с относительно катера назад. Масса катера $M = 1000$ кг. Масса ежесекундно выбрасываемой воды постоянна и равна $m = 10,0$ кг/с. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определить:

а) скорость катера v спустя время $t = 1,00$ мин после начала движения,

б) какой предельной скорости $v_{\max}$ может достичь катер.

1.5. Момент импульса

1.117. Сила с компонентами (3, 4, 5) (Н) приложена к точке с координатами (4, 2, 3) (м). Найти:

а) момент силы N относительно начала координат,

б) модуль вектора N ,

в) момент силы N_z относительно оси z .

1.118. Вращение от двигателя к ведущим колесам автомобиля передается через ряд устройств, одно из которых, называемое сцеплением, позволяет в случае надобности отключить двигатель от остальных устройств. Сцепление в принципе состоит из двух одинаковых фрикционных накладок, прижимаемых друг к другу сильными пружинами. В автомобиле «Жигули» фрикционные накладки имеют форму колец с внутренним диаметром $d_1 = 142$ мм и наружным диаметром $d_2 = 203$ мм. Коэффициент трения накладки по накладке $k = 0,35$. Найти наименьшую силу F , с которой нужно прижимать накладки, чтобы передать вращающий момент $N = 100$ Н·м.

1.119. Тело массы $m = 1,00$ кг брошено из точки с координатами (0, 2, 0) (м) вверх по вертикали с начальной скоростью $v_0 = 10,0$ м/с. Найти приращение момента импульса ΔM относительно начала координат за все время полета тела (до возвращения в исходную точку). Ось z направлена вверх. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.120. Тело массы m брошено с начальной скоростью v_0 , образующей угол α с горизонтом. Приняв плоскость, в которой движется тело, за плоскость x, y и направив ось y вверх, а ось x — по направлению движения, найти

вектор момента импульса тела $\mathbf{M}$ относительно точки бросания в момент, когда тело находится в верхней точке траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.121. Две частицы движутся равномерно в противоположных направлениях вдоль параллельных прямолинейных траекторий (рис. 1.20). Расстояние между траекториями равно l . На рисунке $\mathbf{n}$ обозначает направленную за чертеж нормаль к плоскости, в которой лежат траектории частиц. Найти:

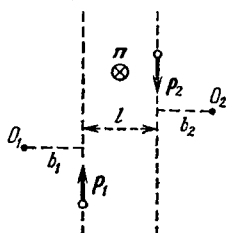


Рис. 1.20

- суммарный импульс частиц $\mathbf{p}$,
- суммарные моменты $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ импульса частиц, взятые относительно указанных на рисунке точек O_1 и O_2 .

Рассмотреть два случая: 1. Импульсы частиц различны по модулю. 2. Модули

импульсов частиц одинаковы: $p_1 = p_2 = p$.

1.122. Имеется замкнутая система, состоящая из n взаимодействующих частиц. Вследствие взаимодействия между частицами их импульсы $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ являются функциями времени: $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i(t)$. Однако в силу замкнутости системы $\sum \mathbf{p}_i = \text{const}$. Доказать, что в случае, когда суммарный импульс системы равен нулю, момент импульса системы не зависит от выбора точки, относительно которой он берется.

1.123. Доказать соотношение

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C + [\mathbf{R}_C \mathbf{p}],$$

где $\mathbf{M}_O$ — момент импульса системы материальных точек относительно начала O лабораторной системы отсчета (л-системы), $\mathbf{M}_C$ — момент импульса относительно центра масс C (собственный момент импульса), $\mathbf{R}_C$ — радиус-вектор центра масс в л-системе, $\mathbf{p}$ — суммарный импульс системы точек, определенный в л-системе.

1.124. Небольшое тело (материальная точка) массы m начинает скользить без трения с вершины наклонной плоскости (рис. 1.21). Буквой $\mathbf{n}$ обозначена на рисунке нормаль, направленная за чертеж. Найти выражения для:

а) момента N результирующей силы, действующей на тело, относительно точки O ,

б) момента импульса $\mathbf{M}(t)$ тела относительно точки O .

1.125. Материальная точка (частица) массы m брошена под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Траектория полета частицы лежит в плоскости x, y (рис. 1.22;

ось z направлена «на нас»). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти зависимость от времени:

- момента N силы, действующей на частицу,
- момента импульса частицы M .

Оба момента берутся относительно точки бросания.

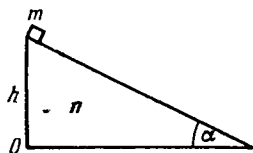


Рис. 1.21

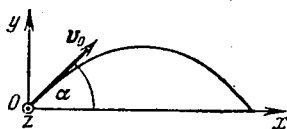


Рис. 1.22

1.126. Тело массы $m=0,100$ кг брошено с некоторой высоты в горизонтальном направлении со скоростью $v_0=20,0$ м/с. Найти модуль приращения момента импульса тела $|\Delta M|$ относительно точки бросания за первые $\tau=5,00$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.127. Четыре одинаковых шара массы $m=0,300$ кг каждый объединены попарно с помощью невесовых стержней длины $l=1,000$ м в две гантели. Размеры шаров много меньше l , поэтому их можно считать материальными точками. Гантели движутся поступательно навстречу друг другу с одинаковой скоростью $v=1,000$ м/с (рис. 1.23). Считая удар шаров мгновенным и абсолютно упругим,

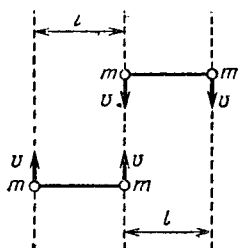


Рис. 1.23

- охарактеризовать движение гантелей после соударения,
- найти угловую скорость ω вращения гантелей,

в) определить время τ , в течение которого происходит это вращение,

г) охарактеризовать движение гантелей по истечении времени.

1.128. Решить задачу 1.127, считая удар абсолютно неупругим.

- Охарактеризовать движение гантелей после удара.
- Найти скорость v_c , с которой движутся центры гантелей.
- Вычислить угловую скорость ω вращения гантелей.
- Определить, как изменяется механическая энергия E системы.

1.129. Имеется система из двух гантелей, аналогичная описанной в задаче 1.127. Первоначально левая гантель покоится, а правая движется поступательно со скоростью $2v$ (рис. 1.24). Ответить на вопросы, сформулированные в задаче 1.127.

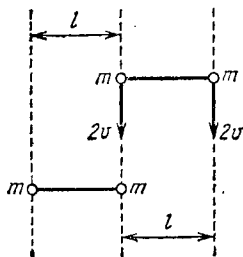


Рис. 1.24

1.130. Решить задачу, аналогичную задаче 1.128, с тем лишь отличием, что первоначально левая гантель покоится, а правая движется поступательно со скоростью $2v$.

1.131. Наибольшее расстояние от Солнца до Земли $R_{\max} = 1,52 \cdot 10^{11}$ м, наименьшее $R_{\min} = 1,47 \cdot 10^{11}$ м, среднее расстояние $R = 1,495 \cdot 10^{11}$ м. Исходя из этих данных, найти среднюю $\langle v \rangle$, максимальную $v_{\max}$ и минимальную $v_{\min}$ скорости движения Земли по ее орбите. Сравнить максимальную и минимальную скорости со средней.

1.132. Чему равна приведенная масса μ системы из двух частиц одинаковой массы m ?

1.133. Найти приближенное значение приведенной массы μ частиц с массами m и M для случая, когда $m \ll M$.

1.6. Неинерциальные системы отсчета

1.134. Относительно горизонтально расположенного диска, вращающегося с угловой скоростью ω_0 , тело, лежащее на диске, находится в покое. Масса тела равна m , расстояние от оси вращения r .

а) Какие силы действуют на тело в неподвижной системе отсчета?

б) В какой системе отсчета к предыдущим силам добавится только центробежная сила инерции?

в) В какой системе отсчета появится еще и сила Кориолиса?

1.135. Какую мощность P развивает сила Кориолиса?

1.136. Какую работу A совершает над частицей кориолисова сила при перемещении частицы относительно вращающейся системы отсчета из точки 1 в точку 2?

1.137. Движение частицы массы $m = 10,0$ г рассматривается в системе отсчета, вращающейся относительно инерциальной системы с угловой скоростью $\omega = 10,0$ рад/с. Какую работу A совершают над частицей силы инерции при перемещении ее из точки, отстоящей от оси вращения на

расстояние $R_1=1,00$ м, в точку, отстоящую на расстояние $R_2=2,00$ м?

1.138. Небольшое тело падает без начальной скорости на Землю на экваторе с высоты $h=10,0$ м. В какую сторону и на какое расстояние x отклонится тело от вертикали за время падения τ ? Сопротивлением воздуха пренебречь. Сравнить найденное значение x с разностью Δs путей, которые пройдут вследствие вращения Земли за время τ точка, находящаяся на высоте h , и точка, находящаяся на земной поверхности.

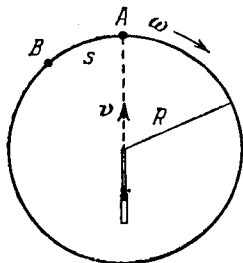


Рис. 1.25

1.139. Имеется горизонтально расположенное ружье, дуло которого совпадает с осью вертикального цилиндра (рис. 1.25). Цилиндр вращается с угловой скоростью ω .

а) Считая, что пуля, выпущенная из ружья, летит горизонтально с постоянной скоростью v , найти смещение s точки B цилиндра, в которую попадет пуля, относительно точки A , которая находится против дула в момент выстрела. Решить задачу двумя способами: в неподвижной, системе отсчета и в системе отсчета, связанной с цилиндром.

б) Зависит ли результат от того, вращается ружье вместе с цилиндром или неподвижно?

1.140. На широте $\varphi=45^\circ$ из ружья, закрепленного горизонтально в плоскости меридиана, произведен выстрел по мишени, установленной на расстоянии $l=100,0$ м от дула ружья. Центр мишени находится на оси ружейного ствола. Считая, что пуля летит горизонтально с постоянной скоростью $v=500$ м/с, определить, на какое расстояние и в какую сторону отклонится пуля от центра мишени, если выстрел произведен в направлении: а) на север, б) на юг.

1.141. Электровоз массы $m=184 \cdot 10^3$ кг движется вдоль меридиана со скоростью $v=20,0$ м/с (72 км/ч) на широте $\varphi=45^\circ$. Определить горизонтальную составляющую F силы, с которой электровоз давит на рельсы.

1.142. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω . По диску движется равномерно на неизменном расстоянии от оси вращения частица. Найти мгновенное значение:

а) скорости частицы v' относительно диска, при которой сила Кориолиса будет уравновешиваться центробежной

силой инерции. Выразить v' через мгновенное значение радиус-вектора $\mathbf{r}$, проведенного к частице из центра диска,

б) скорости частицы $\mathbf{v}$ относительно неподвижной системы отсчета при тех же условиях.

1.143. Горизонтально расположенный стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец, с угловой скоростью $\omega = 1,00$ рад/с. Расстояние от оси до другого конца стержня $l = 1,00$ м. На стержень надета муфта массы $m = 0,100$ кг. Муфта закреплена с помощью нити на расстоянии $l_0 = 0,100$ м от оси вращения. В момент $t = 0$ нить пережигают и муфта начинает скользить по стержню практически без трения. Найти:

а) время τ , спустя которое муфта слетит со стержня,

б) силу F , с которой стержень действует на муфту в момент τ ,

в) работу A , которая совершается над муфтой за время τ в неподвижной системе отсчета.

1.144. Горизонтально расположенный диск вращается с угловой скоростью ω . Вдоль радиуса диска движется частица массы m , расстояние которой от центра диска изменяется со временем по закону $r = at$ (a — константа). Найти результирующий момент $\mathbf{N}$ сил, действующих на частицу в системе отсчета, связанной с диском. Имеется в виду момент относительно центра диска.

1.145. Имеется система отсчета, вращающаяся относительно инерциальной системы вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω . Из точки O , находящейся на оси z , вылетает в перпендикулярном к оси направлении частица массы m и летит относительно инерциальной системы прямолинейно с постоянной скоростью v . Найти наблюдаемый во вращающейся системе отсчета момент импульса $\mathbf{M}(t)$ частицы относительно точки O . Показать, что возникновение $\mathbf{M}(t)$ обусловлено действием силы Кориолиса.

1.7. Механика твердого тела

1.146. Тело произвольной формы вращается вокруг оси OO с угловой скоростью ω . Доказать, что угловая скорость вращения тела вокруг любой другой оси $O'O'$, параллельной оси OO , также равна ω .

1.147. Точка 1 тела, вращающегося с угловой скоростью ω , имеет в некоторый момент времени скорость v_1 . Найти для того же момента времени скорость v_2 точки 2, смещенной относительно точки 1 на $\mathbf{r}_{12}$.

1.148. Тело совершает плоское движение в плоскости x, y . Центр масс тела C перемещается вдоль оси x с постоянной скоростью v_0 . В момент $t=0$ центр масс совпадал с началом координат O . Одновременно тело вращается в указанном на рис. 1.26 направлении со скоростью ω .

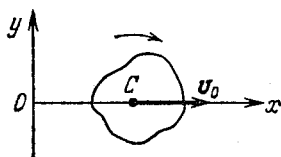


Рис. 1.26

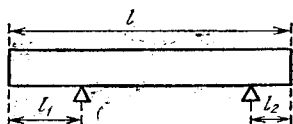


Рис. 1.27

Написать выражение для радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки пересечения мгновенной оси вращения тела с плоскостью x, y .

1.149. Балка массы $m=300$ кг и длины $l=8,00$ м лежит на двух опорах (рис. 1.27). Расстояния от концов балки до опор: $l_1=2,00$ м, $l_2=1,00$ м. Найти силы F_1 и F_2 , с которыми балка давит на опоры.

1.150. Лестница длины $l=5,00$ м и массы $m=11,2$ кг прислонена к гладкой стене под углом $\alpha=70^\circ$ к полу (рис. 1.28). Коэффициент трения между лестницей и полом $k=0,29$. Найти:

а) силу F_1 , с которой лестница давит на стену,

б) предельное значение угла α_0 , при котором лестница начинает скользить.

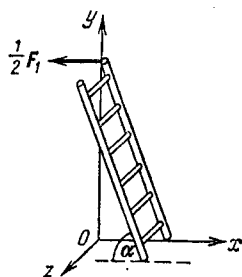


Рис. 1.28

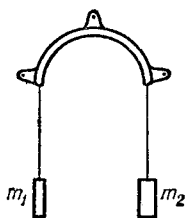


Рис. 1.29

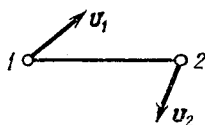


Рис. 1.30

1.151. Протяженное тело произвольной формы брошено под некоторым углом к горизонту. Как движется центр масс тела в случае, если сопротивлением воздуха можно пренебречь?

1.152. Невесомая нерастяжимая нить скользит без трения по прикрепленному к стене желобу (рис. 1.29) под действием грузов, массы которых $m_1=1,00$ кг и $m_2=2,00$ кг. С каким ускорением w_c движется при этом центр масс грузов?

1.153. На рис. 1.30 изображены две частицы 1 и 2, соединенные жестким стержнем. Могут ли скорости частиц быть такими, как на рисунке? Частицы и скорости лежат в плоскости рисунка.

1.154. Две частицы (материальные точки) с массами m_1 и m_2 соединены жестким невесомым стержнем длины l . Найти момент инерции I этой системы относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через центр масс.

1.155. Найти момент инерции I однородного круглого прямого цилиндра массы m и радиуса R относительно оси цилиндра.

1.156. Плотность цилиндра длины $l=0,100$ м и радиуса $R=0,0500$ м изменяется с расстоянием от оси линейно от значения $\rho_1=500$ кг/м³ до значения $\rho_2=3\rho_1=1500$ кг/м³. Найти:

а) среднюю по объему плотность $\langle \rho \rangle_V$ цилиндра; сравнить ее со средней по радиусу плотностью $\langle \rho \rangle_r$,

б) момент инерции I цилиндра относительно оси; сравнить его с моментом инерции I' однородного цилиндра такой же массы и размеров.

1.157. Найти момент инерции I однородного шара радиуса R и массы m относительно оси, проходящей через центр шара.

1.158. Прямой круглый однородный конус имеет массу m и радиус основания R . Найти момент инерции I конуса относительно его оси.

1.159. Найти момент инерции тонкого однородного стержня длины l и массы m относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через: а) центр масс стержня, б) конец стержня.

1.160. Найти момент инерции однородной прямоугольной пластинки массы m , длины a и ширины b относительно перпендикулярной к ней оси, проходящей через: а) центр пластинки, б) одну из вершин пластинки.

Сравнить полученные результаты с ответом к предыдущей задаче.

1.161. Найти момент инерции I однородного куба относительно оси, проходящей через центры противоположных граней. Масса куба m , длина ребра a .

1.162. Можно доказать, что момент инерции всякого тела, вычисленный относительно любой оси, проходящей через центр масс тела, связан с главными моментами инерции I_x , I_y , I_z (т. е. моментами инерции относительно главных осей) соотношением

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma,$$

где α , β , γ — углы, образованные данной осью с осями x , y , z . Основываясь на этом, показать, что момент инерции однородного куба относительно любой оси, проходящей через его центр, одинаков (как и у шара!).

1.163. Найти момент инерции однородной пирамиды, основанием которой служит квадрат со стороной a , относительно оси, проходящей через вершину и центр основания. Масса пирамиды равна m .

1.164. Найти отношение моментов инерции:

а) пирамиды (с квадратным основанием) и конуса одинаковой высоты, плотности и массы,

б) куба и шара одинаковой плотности и массы (у куба, как и у шара, момент инерции относительно любой проходящей через центр оси одинаков; см. задачу 1.162).

Имеются в виду оси, проходящие через вершину и центр основания в случае а) и проходящие через центр в случае б).

1.165. Найти главные моменты инерции тонкого однородного диска массы m и радиуса R . Иметь в виду, что вычисление целесообразно производить в полярных координатах r и φ .

1.166. Вычислить момент инерции однородного круглого прямого цилиндра относительно оси, перпендикулярной к оси симметрии цилиндра и проходящей через его центр. Масса цилиндра m , радиус R , высота h . Сравнить полученный результат с ответами к задачам 1.159 и 1.165. Рассмотреть предельные случаи: $R \ll h$ и $h \ll R$.

1.167. Имеется однородный прямой круглый цилиндр. При каком отношении высоты цилиндра h к его радиусу R все три главных момента инерции будут одинаковыми?

1.168. Найти момент инерции однородного тела, имеющего форму диска, в котором сделан квадратный вырез. Одна из вершин выреза совпадает с центром диска. Радиус диска $R=20,0$ см, сторона квадрата $a=10,0$ см, масса тела $m=5,00$ кг. Имеется в виду момент относительно оси, перпендикулярной к диску и проходящей через его центр.

1.169. Имеется однородная тонкая пластинка, ограниченная контуром произвольной формы. Через одну из точек пластинки проведены три взаимно перпендикуляр-

ные оси, две из которых — x и y — лежат в плоскости пластинки, а ось z перпендикулярна к этой плоскости. Найти соотношение между моментами инерции I_x , I_y и I_z пластинки относительно этих осей.

1.170. Использовать ответ предыдущей задачи для нахождения момента инерции I тонкого однородного диска относительно оси, лежащей в плоскости диска и проходящей через его центр. Масса и радиус диска равны соответственно m и R . Момент инерции относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска, считать известным. Сравнить полученный результат с ответом к задаче 1.165.

1.171. Однородная пластина имеет длину $a=20,0$ см, ширину $b=10,0$ см и толщину $c=5,00$ см. Масса пластины $m=2,70$ кг. Начало координат помещено в центр пластины, ось x направлена параллельно стороне a , ось y — параллельно стороне b , ось z — параллельно стороне c . Найти относительно этой системы координат компоненты тензора инерции пластины и написать сам тензор.

1.172. Имеются вектор $\mathbf{a}$ с компонентами $a_x=1$, $a_y=2$, $a_z=3$ и тензор второго ранга $\mathbf{T}$, все компоненты которого одинаковы и равны $T_{ih}=1$. Найти компоненты вектора $\mathbf{b}$, получающегося в результате умножения вектора $\mathbf{a}$ на тензор $\mathbf{T}$ ($\mathbf{b}=\mathbf{T}\mathbf{a}$).

1.173. Имеются произвольный вектор $\mathbf{a}$ с компонентами a_x , a_y , a_z и тензор второго ранга $\mathbf{E}$, определяемый таблицей

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(такой тензор называют единичным). Найти вектор $\mathbf{b}$, получающийся в результате умножения вектора $\mathbf{a}$ на тензор $\mathbf{E}$ ($\mathbf{b}=\mathbf{E}\mathbf{a}$).

1.174. Вычислить компоненты тензора инерции и написать сам тензор для однородного шара радиуса $R=10,0$ см и массы $m=25,0$ кг для случая, когда начало координат помещается в центре шара.

1.175. В каких случаях момент импульса $\mathbf{M}$ и угловая скорость ω вращающегося тела коллинеарны?

1.176. В каких случаях уравнение динамики вращательного движения может быть представлено в виде $I\omega=\mathbf{N}$?

1.177. В каких случаях кинетическая энергия вращающегося тела определяется выражением $T=I\omega^2/2$?

1.178. Пластина из задачи 1.171 вращается вокруг оси, проходящей через ее центр. Компоненты угловой скорости $\omega_x=\omega_y=\omega_z=1,00$ рад/с. Найти:

а) модуль момента импульса пластины M и угол α между векторами ω и M ,

б) кинетическую энергию T пластины.

1.179. Две частицы одинаковой массы m , находящиеся все время на противоположных концах диаметра (рис. 1.31), движутся по окружности радиуса r с одинаковыми по модулю скоростями v_1 и v_2 [$v_1 = v_2 = v(t)$].

а) Определить суммарный момент импульса M частиц относительно произвольной точки O (не обязательно лежащей в плоскости окружности). Выразить M через угловую скорость $\omega(t)$, с которой поворачивается диаметр, соединяющий частицы.

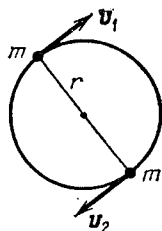


Рис. 1.31

б) Зависит ли M от выбора точки O ?

1.180. Однородный шар радиуса R и массы m вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр. Найти момент импульса M шара относительно произвольной точки O (рис. 1.32).

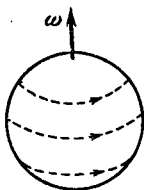


Рис. 1.32

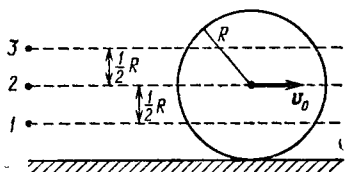


Рис. 1.33

1.181. Тело произвольной формы падает, вращаясь, в однородном поле сил тяжести. Сопротивление среды отсутствует. Как ведет себя собственный момент импульса тела? (См. задачу 1.123.)

1.182. Однородный цилиндр массы m и радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Центр цилиндра движется со скоростью v_0 (рис. 1.33). Найти модуль момента импульса цилиндра относительно точек 1, 2 и 3, которые лежат в перпендикулярной к цилиндру плоскости, проходящей через его центр.

1.183. Вычислить момент импульса Земли M_0 , обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Сравнить этот момент с моментом импульса M , обусловленным движением Земли вокруг Солнца. Землю считать однородным шаром, а орбиту Земли — окружностью.

1.184. Горизонтально расположенный однородный цилиндр радиуса R вращается без трения вокруг оси, совпадающей с одной из его образующих.

а) Указать положения цилиндра, в которых модуль углового ускорения цилиндра β максимален и минимален.

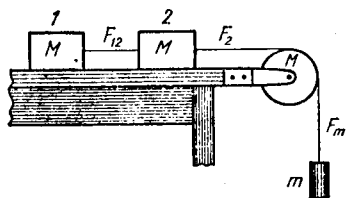


Рис. 1.34

б) Найти максимальное и минимальное значения β .

1.185. На горизонтальном столе лежат два тела, которые могут скользить по столу без трения. Тела связаны невесомой нерастяжимой нитью (рис. 1.34). Такая же нить,

переброшенная через блок, связывает тело 2 с грузом массы $m=0,500$ кг. Блок представляет собой однородный сплошной цилиндр. Масса тел и блока одинакова и равна $M=1,00$ кг.

а) Считая, что блок вращается без трения, а нить не проскальзывает по блоку, найти ускорение тел w , натяжение F_{12} нити, связывающей оба тела, натяжение нити F_2 на участке от тела 2 до блока, натяжение нити F_m на участке от блока до груза m .

б) Определить те же величины, предполагая, что блок не вращается, а нить скользит по нему без трения. Сравнить полученные результаты.

1.186. Доказать, что потенциальная энергия тела произвольной формы, находящегося вблизи поверхности Земли, равна mgh , где m — масса тела, h — высота центра масс тела над уровнем, принятым за нулевой.

1.187. Тонкий стержень длины $l=1,00$ м и массы $m=0,600$ кг может вращаться без трения вокруг перпендикулярной к нему горизонтальной оси, отстоящей от центра стержня на расстояние $a=0,100$ м. Стержень приводится в горизонтальное положение и отпускается без толчка с нулевой начальной скоростью. Определить:

а) угловое ускорение стержня β_0 и силу давления F_0 на ось в начальный момент времени,

б) угловую скорость ω и силу давления F на ось в момент прохождения стержнем положения равновесия.

1.188. Тонкий стержень массы $m=0,200$ кг и длины $l=1,00$ м может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Трение в оси создает постоянный по модулю вращающий момент N . Выберем в качестве координаты, определяющей

положение стержня, угол φ между стержнем и вертикалью, отсчитываемый от верхнего положения стержня. При значении этого угла, равном $\varphi_0 = 10,0^\circ$, стержень начинает самопроизвольно поворачиваться. Найти:

а) угловую скорость ω стержня в момент, когда стержень проходит через нижнее положение,

б) модуль момента импульса M стержня в этот момент.

1.189. Столб высоты $h = 3,00$ м и массы $m = 50,0$ кг падает из вертикального положения на Землю. Определить модуль момента импульса M столба относительно точки опоры и скорость v верхнего конца столба в момент удара о Землю.

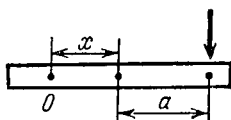


Рис. 1.35

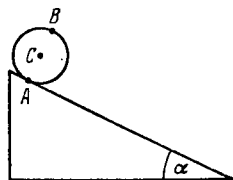


Рис. 1.36

1.190. Линейка массы $m = 0,1200$ кг и длины $l = 1,000$ м лежит на гладком столе. По точке, отстоящей от центра линейки на расстояние $a = 40,0$ см (рис. 1.35), наносится удар, при котором линейке сообщается импульс $p = 7,50 \cdot 10^{-2}$ кг·м/с. Считая удар «мгновенным» и пренебрегая трением,

а) найти расстояние x от центра линейки до точки O , которая не «почувствует» удара,

б) определить, как движется линейка непосредственно после удара.

1.191. Однородный шарик помещен на плоскость, образующую угол $\alpha = 30,0^\circ$ с горизонтом (рис. 1.36).

1. При каких значениях коэффициента трения k шарик будет скатываться с плоскости без скольжения?

2. Полагая $k = 0,100$, а) определить характер движения шарика, б) найти значения скоростей точек A , B и C шарика спустя $t = 1,00$ с после начала движения.

1.192. Однородному цилиндру сообщают начальный импульс, в результате чего он начинает катиться без скольжения вверх по наклонной плоскости со скоростью $v_0 = 3,00$ м/с. Плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 20,0^\circ$.

а) Сколько времени t_1 будет двигаться цилиндр до остановки?

- б) На какую высоту h поднимется цилиндр?
 в) Сколько времени t_2 затратит цилиндр на скатывание вниз до исходного положения?
 г) Какую скорость v имеет цилиндр в момент возвращения в исходное положение?

Сравнить полученные результаты с ответом к задаче 1.64.

1.193. Решать задачу 1.192 в предположении, что на цилиндр действует постоянный по модулю момент силы трения качения $N_{\text{тр}} = 0,100 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Масса цилиндра $m = 1,00 \text{ кг}$, радиус $R = 0,100 \text{ м}$. Помимо указанных в предыдущей задаче величин, определить:

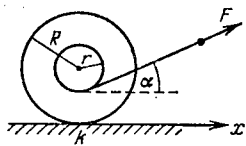


Рис. 1.37

- д) какую работу A совершает сила трения качения на всем пути снизу вверх и обратно.

Сравнить полученные результаты с ответами к предыдущей задаче и к задаче 1.65.

1.194. На горизонтальной плоскости лежит катушка, масса которой $m = 50,0 \text{ г}$, а момент инерции относительно ее оси $I = 5,00 \cdot 10^{-6} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. На катушку намотана практически невесомая и нерастяжимая нить (рис. 1.37). Радиус внешнего слоя витков $r = 2,00 \text{ см}$, радиус торцов катушки $R = 3,00 \text{ см}$. Коэффициент трения между катушкой и плоскостью $k = 0,200$. За нить тянут с силой F .

1. Найти условие для силы F , при котором катушка катится по плоскости без скольжения.

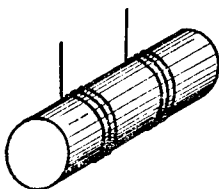


Рис. 1.38

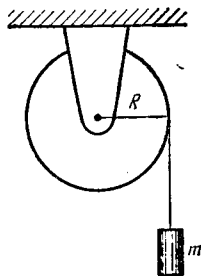


Рис. 1.39

2. Как ведет себя катушка, если сила F и угол α имеют значения: а) $F = 0,128 \text{ Н}$, $\alpha = 30,0^\circ$, б) $F = 0,100 \text{ Н}$, $\alpha = 48,2^\circ$, в) $F = 0,100 \text{ Н}$, $\alpha = 30,0^\circ$, г) $F = 0,100 \text{ Н}$, $\alpha = 60,0^\circ$?

Для всех случаев определить ω_x — проекцию на ось x ускорения оси катушки.

1.195. Однородный сплошной цилиндр массы $m=1,00$ кг висит в горизонтальном положении на двух намотанных на него невесомых нитях (рис. 1.38). Цилиндр отпускают без толчка.

а) За сколько времени t цилиндр опустится на расстояние $h=50,0$ см?

б) Какое натяжение F испытывает при опускании цилиндра каждая из нитей?

1.196. Блок радиуса R может вращаться вокруг своей оси с трением, характеризуемым вращающим моментом $N_{\text{тр}}$, который не зависит от скорости вращения блока. На блок намотана прикрепленная к нему одним концом практически невесомая нерастяжимая нить, к другому концу которой подвешен груз массы m (рис. 1.39). Груз отпускают без толчка и он начинает опускаться, раскручивая блок. Найти момент импульса $M(t)$ этой системы тел относительно оси блока спустя время t после начала ее движения.

1.197. Найти момент импульса M относительно оси блока и кинетическую энергию T системы из предыдущей задачи в момент, когда скорость груза массы m равна v . Момент инерции блока принять равным I .

1.198. Имеются два одинаковых однородных диска. Один из них может вращаться без трения вокруг вертикальной фиксированной оси, проходящей через его центр. Этот диск первоначально неподвижен. Второй диск раскручивают, сообщив ему угловую скорость ω_0 , и роняют в горизонтальном положении на первый диск так, что край одного из дисков совпадает с центром другого. Придя в соприкосновение, диски мгновенно склеиваются. Определить:

а) угловую скорость ω , с которой будет вращаться образовавшаяся система,

б) как изменится кинетическая энергия дисков.

1.199. Горизонтально расположенный деревянный стержень массы $m=0,800$ кг и длины $l=1,80$ м может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает и застревает в нем пуля массы $m'=3,00$ г, летящая перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью $v=50,0$ м/с. Определить угловую скорость ω , с которой начинает вращаться стержень.

1.200. Решить задачу 1.199, заменив пулю пластмассовым шариком такой же массы и движущимся с той же скоростью. Удар считать абсолютно упругим. Определить:

а) угловую скорость ω стержня,

б) скорость v' шарика после удара.

Результат, полученный для ω , сравнить с ответом к задаче 1.199.

1.201. Горизонтальный диск массы m и радиуса R может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На краю диска стоит человек массы m' . Вначале диск и человек неподвижны. Затем человек начинает идти по краю диска со скоростью v' относительно диска. С какой скоростью ω вращается при этом диск относительно неподвижной системы отсчета? Размерами человека по сравнению с R можно пренебречь.

1.202. Тело вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = \omega(t)$. На тело действует момент сил $N_z = N_z(t)$. Написать выражение для работы, совершенной приложенными к телу силами за промежуток времени от t_1 до t_2 .

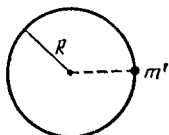


Рис. 1.40

1.203. Расположенный горизонтально однородный круглый цилиндр массы $m = 10,00$ кг вращается без трения вокруг своей оси под действием груза массы $m' = 1,000$ кг, прикрепленного к легкой нерастяжимой нити, намотанной на цилиндр.

Найти кинетическую энергию T системы спустя $t = 3,53$ с после начала движения.

1.204. Вытащенное из колодца ведро с водой уронили, и оно стало опускаться вниз, раскручивая ворот. Трение в подшипниках ворота создает постоянный вращающий момент $N = 0,170$ Н·м. Масса ведра с водой $m = 13,2$ кг. Масса ворота $m' = 43,1$ кг, радиус ворота $r = 12,8$ см. Расстояние от края сруба до поверхности воды в колодце $h = 7,0$ м. Определить:

а) по какому закону изменяется со временем угловая скорость ω вращения ворота,

б) натяжение веревки F во время опускания ведра,

в) через сколько времени t ведро коснется воды в колодце,

г) какую скорость v будет иметь ведро в конце падения,

д) какую работу A совершают силы трения за время падения ведра.

Ворот считать сплошным однородным цилиндром. Массой и толщиной веревки, массой рукоятки ворота, а также сопротивлением воздуха пренебречь.

1.205. Расположенный горизонтально однородный цилиндр радиуса R может вращаться вокруг оси, совпадающей с его геометрической осью. Трение в оси создает не зависящий от скорости вращения момент $N_{тр}$. К цилиндру

прикреплена точечная масса m' (рис. 1.40). Цилиндр устанавливают так, чтобы масса оказалась на уровне оси, и отпускают без толчка. Определить, при каком значении m' :

- а) цилиндр придет во вращение,
- б) сделав $1/4$ оборота, цилиндр остановится.

1.206. Диск массы m и радиуса R первоначально вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Под действием внешних сил диск останавливается. Чему равна работа A внешних сил?

1.207. Однородный цилиндр массы m и радиуса R вращается вокруг своей оси. Угловая скорость цилиндра изменяется за время t от значения ω_1 до значения ω_2 . Какую среднюю мощность $\langle P \rangle$ развивают силы, действующие на цилиндр?

1.208. Ротор некоторого агрегата снабжен дисковым тормозом. Этот тормоз состоит из двух дисков радиуса $R = 150$ мм, один из которых закреплен на конце оси ротора, а другой, лишенный возможности вращаться, может прижиматься к первому с силой $F = 100$ Н. Тормоз включают в момент, когда ротор вращается по инерции со скоростью $\omega = 50,0$ рад/с (трением в подшипниках можно пренебречь). Момент инерции ротора вместе с укрепленным на нем диском тормоза $I = 0,628$ кг·м². Коэффициент трения между поверхностями дисков не зависит от их относительной скорости и равен $k = 0,250$. Считая, что сила F равномерно распределяется по поверхности дисков, определить, сколько оборотов N успеет сделать ротор до остановки.

1.209. Гироскоп в виде однородного диска радиуса $R = 8,00$ см вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 3,00 \cdot 10^2$ рад/с. Угловая скорость прецессии гироскопа $\omega' = 1,00$ рад/с. Определить расстояние l от точки опоры до центра масс гироскопа. Моментом инерции оси гироскопа пренебречь.

1.210. Гироскоп массы $m = 1,000$ кг, имеющий момент инерции $I = 4,905 \cdot 10^{-3}$ кг·м², вращается с угловой скоростью $\omega = 100,0$ рад/с. Расстояние от точки опоры до центра масс $l = 5,00$ см. Угол между вертикалью и осью гироскопа $\alpha = 30,0^\circ$. Найти:

- а) модуль угловой скорости прецессии ω' ,
- б) модуль углового ускорения гироскопа β .

1.211. Поместив начало координат в точку опоры гироскопа и направив ось z вверх по вертикали,

а) найти угловое ускорение β гироскопа из предыдущей задачи; считать, что в начальный момент ось гироскопа находилась в плоскости x, z ;

б) вычислив скалярное произведение $\omega\beta$, определить, как направлен вектор β .

1.212. Гироскоп, вращающийся вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\omega=100$ рад/с, прецессирует в поле земного тяготения с угловой скоростью $\omega'=1,00$ рад/с. Угол между вертикалью и осью гироскопа $\alpha=30,0^\circ$. Определить угол ϕ между осью симметрии и направлением угловой скорости гироскопа Ω (см. задачу 1.49). Решить задачу методом последовательных приближений, положив ϕ в нулевом приближении равным нулю.

1.8. Всемирное тяготение

1.213. В опыте, аналогичном тому, с помощью которого Кавендиш определил в 1798 г. гравитационную постоянную γ , массы малых и больших свинцовых шаров были равны соответственно $m=0,729$ кг и $M=158$ кг. Малые шары были укреплены на легком, подвешенном на стальной проволоке коромысле, длина которого, измеренная между центрами шаров, $l=216$ см. Диаметр проволоки равнялся 0,6 мм, длина была около метра. При расстоянии r между центрами малого и соответствующего большого шаров, равном 300 мм, проволока, несущая коромысло с малыми шарами, закручивалась на угол $\alpha=39,6''$. Определенный экспериментально коэффициент пропорциональности k между углом закручивания проволоки и приложенным вращающим моментом равен $1,04 \cdot 10^3$ рад/(Н·м). Найти значение γ .

1.214. С какой силой F притягивают друг друга два одинаковых однородных шара массы $m=1,000$ кг каждый, если их центры отстоят друг от друга на расстояние $r=1,00$ м?

1.215. Два одинаковых однородных шара, соприкасаясь, притягивают друг друга с силой F . Как изменится сила, если увеличить массу шаров в n раз? Материал, из которого изготовлены шары, предполагается одним и тем же.

1.216. Имеется очень тонкий однородный прямой стержень длины l и массы M . На прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его центр, находится на расстоянии b частица массы m .

а) Найти модуль F силы, с которой стержень действует на частицу, если $b=l=2a$.

б) Исследовать случай $b \gg l$.

в) Сравнить F с силой F' , с которой взаимодействовали бы материальные точки массами M и m , находящиеся на расстоянии $b=2a$ друг от друга.

1.217. Решить задачу 1.216, считая, что частица находится на оси стержня, на расстоянии $b=l=2a$ от его центра.

1.218. Имеется очень тонкое однородное кольцо массы M и радиуса R . На прямой, перпендикулярной к плоскости кольца и проходящей через его центр, находится на расстоянии x от центра частица массы m . Найти:

а) взаимную потенциальную энергию $U(x)$ частицы и кольца,

б) силу F_x , действующую на частицу со стороны кольца. Силу вычислить двумя способами: 1) путем суммирования элементарных сил, 2) используя выражение для $U(x)$.

в) Исследовать случай $x \gg R$.

1.219. Имеется очень тонкий однородный диск радиуса R . Поверхностная плотность (масса единицы площади) диска равна σ . На прямой, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр, находится на расстоянии b от диска частица массы m . Определить:

а) силу F , с которой диск действует на частицу,

б) при каком условии сила F отличается от своего предельного значения F_∞ , получающегося при $R \rightarrow \infty$, не более чем на 1%.

1.220. Имеется бесконечная очень тонкая однородная пластинка с поверхностной плотностью σ . На расстоянии b от нее находится частица массы m .

а) Найти модуль F силы, с которой пластинка действует на частицу.

б) Чем примечательно выражение для F ?

в) Как изменится результат, если пластинку с пренебрежимо малой толщиной заменить пластиной конечной толщины d , изготовленной из вещества с объемной плотностью ρ ?

1.221. Имеется бесконечная однородная пластина толщины $d=0,100$ м, плотность которой $\rho=10,0$ г/см³. С какой силой F действует эта пластина на находящееся вблизи от нее тело массы $m=1,00$ кг?

1.222. С какой силой F (в расчете на единицу площади) притягивают друг друга две параллельные бесконечные однородные пластины плотности $\rho=10,0$ г/см³ и толщины $d=0,100$ м каждая?

1.223. Имеется бесконечный очень тонкий однородный прямой стержень с линейной плотностью (массой, прихо-

дящейся на единицу длины), равной λ . На расстоянии b от его оси находится частица массы m .

а) Найти модуль F силы, с которой стержень действует на частицу.

б) Частица какой массы M , находясь от частицы массы m на расстоянии b , действовала бы на нее с такой же силой?

1.224. Как связаны телесный угол $d\Omega$ и поверхность dS , вырезаемая им на сфере радиуса R , центр которой совпадает с вершиной телесного угла?

1.225. Выразить в сферических координатах элемент поверхности dS сферы радиуса R , центр которой находится в начале координат.

1.226. Выразить в сферических координатах элементарный телесный угол $d\Omega$, вершина которого помещается в начале координат.

1.227. Определить гравитационную силу F , которую будет испытывать материальная точка, находящаяся внутри однородного шарового слоя.

1.228. Внутри однородного шарового слоя находится однородный шаровой слой меньшего размера. Центры слоев не совпадают. Чему равна сила F взаимодействия между слоями?

1.229. Имеется очень тонкий однородный слой в виде полусферы радиуса R и массы M . В центре полусферы находится частица массы m . Найти модуль F силы, с которой слой действует на частицу.

1.230. Найти взаимную потенциальную энергию $U(r)$ очень тонкого однородного шарового слоя и частицы массы m , находящейся на расстоянии r от центра слоя. Масса слоя равна M , радиус R . Рассмотреть случаи: а) $r < R$, б) $r > R$.

1.231. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, найти взаимную потенциальную энергию $U(r)$ толстого шарового слоя и частицы массы m , находящейся на расстоянии r от центра слоя. Масса слоя равна M , внутренний радиус R_1 , внешний радиус R_2 .

1. Рассмотреть случаи: а) $r < R_1$, б) $r > R_2$.

2. Какое заключение о силе F , действующей на частицу со стороны слоя, можно сделать на основании ответа на п. 1 а?

1.232. С помощью каких данных можно определить массу: а) Земли, б) Солнца?

1.233. Воспользовавшись значениями астрономических величин и физических констант, вычислить массу m и среднюю плотность $\langle \rho \rangle$: а) Земли, б) Солнца.

1.234. Найти силу F , с которой притягиваются друг к другу: а) Земля и Солнце, б) Луна и Земля. Сравнить эти силы.

1.235. Считая, что Земля движется по круговой орбите, найти ускорение ω , сообщаемое Земле Солнцем. Сравнить ω с g .

1.236. Найти первую космическую скорость v_1 для Земли, т. е. скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно стало спутником Земли.

1.237. Найти вторую космическую скорость v_2 для Земли, т. е. наименьшую скорость, которую надо сообщить телу для того, чтобы оно могло преодолеть действие земного притяжения и навсегда покинуть Землю. Сравнить v_2 с первой космической скоростью v_1 .

1.238. В каком случае тело удалится на большее расстояние от Земли: а) при запуске вверх по вертикали со скоростью 10 км/с или б) при запуске под углом к горизонту, равным 5° , со скоростью 12 км/с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.239. Определить, при каком радиусе орбиты R (в метрах) спутник может двигаться в плоскости экватора так, чтобы все время находиться над одной и той же точкой поверхности Земли. Сравнить R с радиусом Земли R_3 .

1.240. Планета движется по круговой орбите. Найти связь между радиусом орбиты R и периодом T обращения планеты вокруг Солнца.

1.241. Исходя из того, что радиус земной орбиты $R_3 = 149,6 \cdot 10^6$ км, а радиус орбиты Марса $R_M = 227,8 \cdot 10^6$ км, найти период T_M обращения Марса вокруг Солнца (выразить его в годах).

1.242. Считая Землю однородным шаром и пренебрегая вращением Земли, найти:

а) ускорение свободного падения $g(h)$ как функцию расстояния h от земной поверхности,

б) значения этого ускорения для h , равных: 100, 1000, 10 000 км. Выразить найденные значения через g — ускорение вблизи поверхности Земли.

1.243. а) Найти потенциальную энергию U тела массы m , находящегося на расстоянии h от земной поверхности. Потенциальную энергию на высоте $h=0$ считать равной нулю.

б) Получить приближенное выражение для U , справедливое при $h \ll R_3$ (R_3 — радиус Земли).

1.244. Тело запущено с поверхности Земли под углом $\alpha = 45,0^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 5,20 \cdot 10^3$ м/с. Пре-

небрегая сопротивлением воздуха и вращением Земли, определить:

а) высоту h , на которую поднимется тело над поверхностью Земли,

б) скорость v тела в верхней точке траектории,

в) радиус кривизны $R_{кр}$ траектории в верхней точке.

1.245. Считая Землю однородным шаром и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, как будет двигаться небольшое тело, если его уронить в узкий канал, просверленный вдоль земной оси.

1.246. В условиях предыдущей задачи найти:

а) модуль ускорения тела $w(r)$ как функцию расстояния r от центра земного шара,

б) модуль скорости тела $v(r)$ как функцию r ,

в) скорость тела $v(0)$ в момент, когда оно достигает центра Земли; сравнить $v(0)$ с первой космической скоростью v_1 (см. задачу 1.236),

г) время τ , спустя которое тело вернется в исходную точку; сравнить τ с временем t_1 , за которое тело, движущееся с первой космической скоростью, облетает вокруг Земли,

д) среднюю (по времени) скорость тела $\langle v \rangle$; сравнить ее с $v(0)$.

1.247. Для тела из задачи 1.245 найти:

а) потенциальную энергию $U(r)$ как функцию расстояния r от центра земного шара (положить потенциальную энергию тела на бесконечно большом удалении от Земли равной нулю),

б) потенциальную энергию $U(0)$, которой обладает тело в центре Земли; сравнить $U(0)$ с потенциальной энергией тела вблизи земной поверхности $U(R)$.

1.248. Введем вращающуюся систему отсчета, ось которой проходит через центр Солнца и перпендикулярна к плоскости земной орбиты. Система вращается в ту же сторону, что и Земля, с угловой скоростью, в два раза большей, чем скорость вращения Земли.

а) Какие силы нужно учесть, рассматривая в этой системе движение Земли относительно Солнца?

б) Вычислить значение и указать направление этих сил. Сравнить их с силой F_g гравитационного притяжения Земли к Солнцу.

1.249. Определить силу F , с которой притягивает к себе Землю небольшое тело массы m , находящееся на экваторе недалеко от поверхности Земли. Ускорение свободного падения на экваторе считать известным и равным $g_{эkv}$.

1.9. Колебательное движение

1.250. Частица колеблется вдоль оси x по закону $x = a \cos \omega t$. Построить графики:

а) функций x , $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в зависимости от t ,

б) функций $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в зависимости от x .

1.251. Частица совершает гармоническое колебание с амплитудой a и периодом T . Найти:

а) время t_1 , за которое смещение частицы изменяется от 0 до $a/2$,

б) время t_2 , за которое смещение изменяется от $a/2$ до a .

1.252. Частица колеблется вдоль оси x по закону $x = 0,100 \sin 6,28t$ (м). Найти среднее значение модуля скорости частицы $\langle v \rangle$: а) за период колебания T , б) за первую $1/8$ часть T , в) за вторую $1/8$ часть T . Сопоставить полученные значения.

1.253. Для частицы из задачи 1.252 найти среднее значение вектора скорости $\langle v \rangle$: а) за период колебания T , б) за первую четверть T , в) за вторую четверть T .

1.254. Как, зная амплитуду смещения a и амплитуду скорости v_m , найти частоту гармонического колебания ω ?

1.255. Как, зная амплитуду скорости v_m и амплитуду ускорения w_m , найти амплитуду a и частоту ω гармонического колебания?

1.256. Горизонтальная платформа совершает в вертикальном направлении гармоническое колебание $x = a \cos \omega t$. На платформе лежит шайба из абсолютно неупругого материала.

а) При каком условии шайба будет отделяться от платформы?

б) В каком положении находится и в каком направлении движется платформа в момент отрыва от нее шайбы?

в) На какую высоту h будет подниматься шайба над ее положением, отвечающем среднему положению платформы, в случае, если $a = 20,0$ см, $\omega = 10,0$ с⁻¹?

1.257. Найти средние значения $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ на промежутке от α до $\alpha + n\pi$ (α — произвольный угол, n — целое число).

1.258. Чему равна при гармоническом колебании работа A квазиупругой силы за время, равное периоду колебаний?

1.259. а) Найти уравнение, связывающее значения импульса $p_x = m\dot{x}$ со значениями координаты x одномерного гармонического осциллятора. Масса осциллятора m , частота ω , амплитуда колебания a .

б) Нарисовать кривую, описываемую этим уравнением.

в) Выразить площадь S , ограниченную этой кривой, через энергию осциллятора E .

1.260. Определить частоту ω малых колебаний частицы из задачи 1.92, возникающих в том случае, если частицу сместить в радиальном направлении из положения устойчивого равновесия. Массу частицы принять равной m .

1.261. а) При какой длине l период колебаний математического маятника будет равен 1 с?

б) Чему равен период колебаний T математического маятника длины $l=1$ м?

1.262. Роль физического маятника выполняет тонкий стержень, подвешенный за один из его концов.

а) При какой длине l стержня период колебаний этого маятника будет равен 1 с?

б) Чему равен период колебаний T при длине стержня в 1 м?

1.263. На каком расстоянии x от центра нужно подвесить тонкий стержень заданной длины l , чтобы получить физический маятник, колеблющийся с максимальной частотой? Чему равно значение $\omega_{\max}$ этой частоты?

1.264. Найти закон, по которому изменяется со временем натяжение F нити математического маятника, совершающего колебание $\varphi = \varphi_m \cos \omega t$. Масса маятника равна m , длина l .

1.265. В неподвижной кабине лифта качается маятник. Вследствие обрыва троса кабина начинает падать с ускорением g . Как ведет себя маятник относительно кабины лифта, если в момент обрыва троса он

а) находился в одном из крайних положений,

б) проходил через положение равновесия?

1.266. В кабине лифта подвешен маятник, период колебаний которого, когда лифт неподвижен, равен T_0 .

а) Каков будет период T колебаний маятника, если лифт станет опускаться с ускорением, равным $\frac{3}{4}g$?

б) С каким ускорением w нужно поднимать лифт для того, чтобы период колебаний маятника был равен $\frac{1}{2}T_0$?

1.267. В кабине самолета подвешен маятник. Когда самолет летит без ускорения, маятник качается с частотой ω_0 .

а) Какова будет частота ω колебаний маятника, если самолет летит с ускорением w , направление которого образует с направлением вниз по вертикали угол α ?

б) Найти ω для случая, когда $w=g$ и $\alpha=\pi/2$.

1.268. Найти период колебаний T математического маятника, длина подвеса которого l равна радиусу Земли R_3 . Сравнить полученный результат с ответом к задаче 1.246, п.г).

1.269. Физический маятник устанавливают так, что его центр масс располагается над точкой подвеса. Из этого положения маятник начинает двигаться без трения с нулевой начальной скоростью. В момент прохождения через нижнее положение угловая скорость маятника достигает значения $\varphi_{\max}$. Найти собственную частоту ω_0 малых колебаний этого маятника.

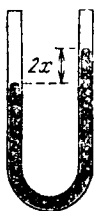


Рис. 1.41

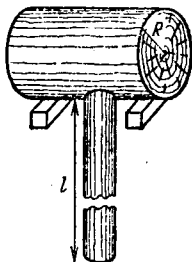


Рис. 1.42

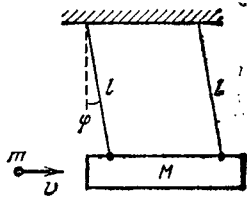


Рис. 1.43

1.270. Шарик массы $m=50,0$ г подвешен на пружине жесткости $k=49,3$ Н/м. Шарик поднимают до такого положения, при котором пружина не напряжена, и отпускают без толчка. Пренебрегая трением и массой пружины,

а) найти период T и амплитуду a возникших колебаний,
б) направив ось x вниз и совместив точку $x=0$ с начальным положением шарика, написать уравнение движения шарика.

1.271. Пренебрегая трением, определить частоту ω малых колебаний ртути, налитой в U-образную трубку с внутренним сечением $S=0,500$ см² (рис. 1.41). Масса ртути $m=136$ г.

1.272. Деревянный молоток состоит из цилиндрического бойка радиуса $R=4,00$ см и рукоятки длины $l=90,0$ см. Масса бойка $m_1=0,800$ кг, масса рукоятки $m_2=0,600$ кг. Молоток положен на два параллельных бруска (рис. 1.42). Найти период T малых колебаний этой системы.

1.273. Бревно массы $M=20,0$ кг висит на двух шнурах длины $l=1,00$ м каждый (рис. 1.43). В торец бревна ударяет и застревает в нем пуля массы $m=10,0$ г, летящая со скоростью $v=500$ м/с. Найти амплитуду φ_m и период T возникших колебаний этой системы. Трением пренебречь.

1.274. Шар массы $m=2,00$ кг подвешен к двум соединенным последовательно пружинам (рис. 1.44). Жесткость пружин равна: $k_1=1000$ Н/м, $k_2=3000$ Н/м. Пренебрегая массой пружин и трением, найти:

а) частоту ω малых колебаний шара,

б) амплитуду a колебаний, возникающих в том случае, если шар установить на уровне, при котором пружины не напряжены, и отпустить без толчка.

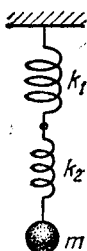


Рис. 1.44

1.275. Блок показанного на рис. 1.45 устройства представляет собой сплошной однородный цилиндр, который может вращаться вокруг оси без ощутимого трения. Масса блока $M=5,00$ кг. Жесткость пружины $k=1000$ Н/м. Массой пружины и переброшенного через блок шнура можно пренебречь. Масса висющего на шнуре груза $m=1,00$ кг. Полагая, что проскальзывание шнура по блоку отсутствует, найти:

а) частоту ω малых колебаний устройства,

б) максимальную силу натяжения шнура слева (F_{1m}) и справа (F_{2m}) от блока в случае, когда амплитуда колебаний $a=5,00$ мм.

1.276. Два шара массами m_1 и m_2 могут скользить без трения по тонкому горизонтальному стержню (рис. 1.46).

Шары связаны невесомой пружиной жесткости k . Сместив шары в противоположные стороны, их отпускают без толчка. Определить:

а) как ведет себя центр масс системы,

б) частоту ω возникших колебаний,

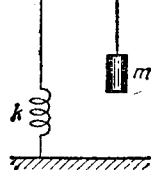


Рис. 1.45

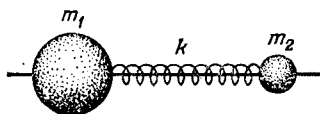


Рис. 1.46

в) максимальное значение относительной скорости шаров $v_{\max}$, если начальное относительное смещение шаров равно a .

1.277. Два шара массами m_1 и m_2 могут скользить без трения по длинной натянутой горизонтально проволоке (см. рис. 1.46). Шары связаны невесомой пружиной жесткости k . Первоначально система неподвижна и пружина не напряжена. Первому шару сообщается импульс $p_0=m_1v_0$. Определить:

- а) скорость v_c центра масс системы,
 б) энергию $E_{\text{пост}}$ поступательного и $E_{\text{колеб}}$ колебательного движения системы,

в) частоту ω и амплитуду a колебаний.

1.278. Однородный диск массы $m=3,00$ кг и радиуса $R=20,0$ см скреплен с тонким стержнем, другой конец которого закреплен неподвижно (рис. 1.47). Коэффициент кручения стержня (отношение приложенного вращающего момента к углу закручивания) $k=6,00$ Н·м/рад. Определить:

а) частоту ω малых крутильных колебаний диска,

б) амплитуду φ_m и начальную фазу α колебаний, если в начальный момент $\varphi=0,0600$ рад, $\dot{\varphi}=0,800$ рад/с.

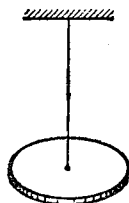


Рис. 1.47

1.279. Два диска могут вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. Радиус дисков одинаков и равен $R=0,500$ м. Массы дисков равны: $m_1=2,00$ кг и $m_2=3,00$ кг.

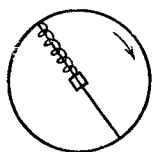


Рис. 1.48

Диски соединены пружиной, у которой коэффициент пропорциональности между возникающим вращательным моментом и углом закручивания равен $k=5,91$ Н·м/рад. Диски поворачивают в противоположные стороны и отпускают. Чему равен период T крутильных колебаний дисков? Диаметр оси пренебречь.

1.280. По диаметру горизонтального диска может перемещаться, скользя без трения по направляющему стержню небольшая муфта массы $m=0,100$ кг. Муфта «привязана» к концу стержня с помощью невесомой пружины, жесткость которой $k=10,0$ Н/м (рис. 1.48). Если пружина не напряжена, муфта находится в центре диска. Найти частоту ω малых колебаний муфты в том случае, когда диск вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, равной:

а) $6,00$ рад/с,

б) $10,1$ рад/с.

1.281. К куполу зала подвешен на легком нерастяжимом шнуре шар массы $m=5,00$ кг. Длина подвеса $l=9,81$ м. Шар отвели в сторону вдоль некоторого направления x на расстояние $a=30,0$ см и сообщили ему в перпендикулярном к x направлению y импульс $p=2,00$ кг·м/с. Пренебрегая трением, найти уравнение траектории, по которой будет двигаться центр шара.

1.282. За 10 с амплитуда свободных колебаний уменьшается в 10 раз. За какое время τ амплитуда уменьшится в 100 раз?

1.283. За 1,00 с амплитуда свободных колебаний уменьшается в 2 раза. В течение какого промежутка времени τ амплитуда уменьшится в 10 раз?

1.284. За время $t=16,1$ с амплитуда колебаний уменьшается в $\eta=5,00$ раз.

а) Найти коэффициент затухания колебаний β .

б) За какое время τ амплитуда уменьшится в e раз?

1.285. За 100 с система успевает совершить 100 колебаний. За то же время амплитуда колебаний уменьшается в 2,718 раз. Чему равны:

а) коэффициент затухания колебаний β ,

б) логарифмический декремент затухания λ ,

в) добротность системы Q ,

г) относительная убыль энергии системы $-\Delta E/E$ за период колебаний?

1.286. За время, в течение которого система совершает $N=100$ колебаний, амплитуда уменьшается в $\eta=5,00$ раз. Найти добротность системы Q .

1.287. Добротность некоторой колебательной системы $Q=2,00$, частота свободных колебаний $\omega=100$ с⁻¹. Определить собственную частоту колебаний системы ω_0 .

1.288. Затухающие колебания частицы были возбуждены путем смещения ее из положения равновесия на расстояние $a_0=1,00$ см. Логарифмический декремент затухания $\lambda=0,0100$. При столь слабом затухании можно с большой степенью точности считать, что максимальные отклонения от положения равновесия достигаются в моменты времени $t_n=(T/2)n$ ($n=0, 1, 2, \dots$). В этом приближении найти путь s , который пройдет частица до полной остановки.

1.289. Частота свободных колебаний некоторой системы $\omega=100,0$ с⁻¹, резонансная частота $\omega_{\text{рез}}=99,0$ с⁻¹. Определить добротность Q этой системы.

1.290. Железный стержень, подвешенный к пружине, будучи выведен из положения равновесия, совершает свободные колебания частоты $\omega'=20,0$ с⁻¹, причем амплитуда колебаний уменьшается в $\eta=2$ раз в течение времени $\tau=1,11$ с. Вблизи нижнего конца стержня помещена катушка, питаемая переменным током (рис. 1.49). При частоте тока $\omega=11,0$ с⁻¹ стержень колеблется с амплитудой $a=1,50$ мм.

а) При какой частоте тока $\omega_{\text{рез}}$ колебания стержня достигнут наибольшей интенсивности?

б) Какова будет амплитуда $a_{\text{рез}}$ колебаний при этой частоте? Предполагается, что амплитуда вынуждающей силы неизменна. Учесть, что частота вынуждающей силы равна удвоенной частоте изменений тока в катушке.

1.291. Под действием вынуждающей силы $F_x = F_m \cos \omega t$ система совершает установившиеся колебания, описываемые функцией $x = a \cos(\omega t - \varphi)$.

а) Найти работу $A_{\text{вын}}$ вынуждающей силы за период.

б) Показать, что работа силы трения за период $A_{\text{тр}} = -A_{\text{вын}}$.

1.292. При неизменной амплитуде вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний при частотах $\omega_1 = 100 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_2 = 300 \text{ с}^{-1}$ оказывается одинаковой. Найти резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$.

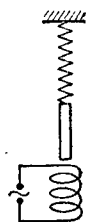


Рис. 1.49

1.293. При неизменной амплитуде вынуждающей силы амплитуда скорости при частотах $\omega_1 = 100 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_2 = 300 \text{ с}^{-1}$ оказывается одинаковой. Найти частоту $\omega_{\text{рез}}$, при которой амплитуда скорости максимальна.

1.10. Релятивистская механика

1.294. Согласуется ли с принципами специальной теории относительности представление о теле в виде шара радиуса $R = 1,00 \text{ м}$, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 3,30 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$?

1.295. Согласуется ли с принципами специальной теории относительности представление об электро́не как о вращающемся вокруг своей оси однородном шарике массы $m = 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$ (масса электрона) и радиуса $R = 2,82 \times 10^{-15} \text{ м}$ (классический радиус электрона), обладающем собственным моментом импульса $M = 0,913 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ (вытекающее из квантовой теории и подтвержденное экспериментально значение собственного момента импульса электрона)?

1.296. В системе K некоторое событие произошло в точке с координатами $(1,00; 1,00; 1,00)$ в момент $t = 1,00 \text{ с}$. Определить координаты и время этого события в системе K' , движущейся относительно K в направлении совпадающих осей x и x' со скоростью $v_0 = 0,800 \text{ с}$.

1.297. Имеются два одинаковых стержня. Стержень 1 покоится в системе отсчета K_1 , стержень 2 покоится в системе отсчета K_2 . Системы движутся друг относительно друга вдоль совпадающих осей x . Стержни параллельны

этим осям. Какой стержень будет короче: а) в системе K_1 , б) в системе K_2 ?

1.298. Какую продольную скорость v нужно сообщить стержню для того, чтобы его длина стала равной половине длины, которую он имеет в состоянии покоя?

1.299. а) Чему равно относительное приращение длины стержня $\Delta l/l_0$, если ему сообщить скорость $v=0,1c$ в направлении, образующем с осью покоившегося стержня угол α ?

б) Вычислить $\Delta l/l_0$ для значений α , равных: 0, 45, 90°.

1.300. Решить задачу 1.299 для скорости $v=0,9c$.

1.301. В системе K' , относительно которой стержень покоится, он имеет длину $l'=1,00$ м и образует с осью x' угол $\alpha'=45^\circ$. Определить в системе K длину стержня l и угол α , который стержень образует с осью x . Относительная скорость систем равна $v_0=0,500c$.

1.302. Неподвижное тело произвольной формы имеет объем V_0 . Чему равен объем V того же тела, если оно движется со скоростью $v=0,866c$?

1.303. Суммарная поверхность неподвижного тела, имеющего форму куба, равна S_0 . Чему равна поверхность S того же тела, если оно движется в направлении одного из своих ребер со скоростью $v=0,968c$?

1.304. Имеются две системы отсчета K и K' , относительная скорость которых неизвестна. Параллельный оси x' стержень, движущийся относительно системы K' со скоростью $v'_x=0,100c$, имеет в этой системе длину $l'=1,10$ м. В системе K длина стержня $l=1,00$ м. Найти скорость v_x стержня в системе K и относительную скорость систем v_0 .

1.305. Имеется двое одинаковых часов. Часы 1 покоятся в системе отсчета K_1 , часы 2 покоятся в системе отсчета K_2 . Системы движутся друг относительно друга. Какие часы идут быстрее: а) в системе K_1 , б) в системе K_2 ?

1.306. Двое одинаковых синхронизированных часов укреплены на концах стержня с собственной длиной l_0 . При каком значении l_0 разность показаний часов $\Delta t'$, определенная наблюдателем, движущимся параллельно стержню со скоростью $v_0=0,600c$, окажется равной: а) 1,000 мкс, б) 1,000 с?

1.307. Решить предыдущую задачу для $v_0=0,999c$.

1.308. На концах двух стержней собственной длины $l_0=10,00$ м укреплены одинаковые синхронизированные друг с другом часы (рис. 1.50). Стержни приведены в движение с относительной скоростью $v_0=c/2$. В момент, когда

часы 1 и $1'$ находятся друг против друга, стрелки обоих часов показывают нулевой отсчет. Определить:

а) показания τ_1 и τ'_2 часов 1 и $2'$ в момент, когда они поравняются друг с другом,

б) показания τ_2 и τ'_1 часов 2 и $1'$ в момент, когда они поравняются друг с другом,

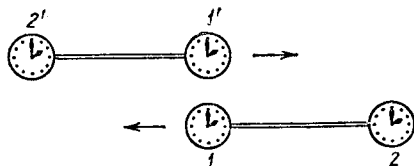


Рис. 1.50

в) показания τ_2 и τ'_2 часов 2 и $2'$ в момент, когда они поравняются друг с другом.

1.309. Собственное время жизни некоторой частицы оказалось равным $\tau = 1,00 \cdot 10^{-6}$ с. Чему равен интервал Δs между рождением и распадом этой частицы?

1.310. С какой скоростью v должна лететь частица относительно системы отсчета K для того, чтобы промежуток собственного времени Δt был в 10 раз меньше промежутка Δt , отсчитанного по часам системы K ?

1.311. За промежуток времени $\Delta t = 1,000$ с, отсчитанный по часам некоторой системы отсчета K , частица, двигаясь прямолинейно и равномерно, переместилась из начала координат системы K в точку с координатами $x = y = z = 1,50 \times 10^8$ м. Найти промежуток собственного времени частицы $\Delta \tau$, за который произошло это перемещение.

1.312. Собственное время жизни нестабильной элементарной частицы равно τ . Считая движение частицы прямолинейным и равномерным, определить путь l , который она пройдет до распада в системе отсчета, в которой время жизни частицы равно t .

1.313. Собственное время жизни нестабильной элементарной частицы, называемой мюоном, $\tau = 2,2$ мкс. Определить время жизни t мюона в системе отсчета, в которой он проходит до распада путь $l = 30$ км. Считая движение мюона прямолинейным и равномерным, найти скорость мюона v .

1.314. Система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $v_0 = 0,500c$. Скорость некоторой частицы в системе K' равна $v' = 0,1732 c (\mathbf{e}_x' + \mathbf{e}_y' + \mathbf{e}_z')$. Найти:

а) модуль v' скорости $\mathbf{v}'$ и угол α' , образуемый $\mathbf{v}'$ с осью x' ,

б) скорость $\mathbf{v}$ частицы в системе K , модуль v этой скорости и угол α , образуемый $\mathbf{v}$ с осью x ,

в) отношение v/v' модулей векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$.

1.315. Две одинаковые частицы движутся в некоторой системе отсчета K навстречу друг другу с одинаковой по модулю скоростью v .

1. Определить модуль скорости v' , с которой каждая из частиц движется относительно другой частицы.

2. Вычислить v' для случая: а) $v=0,1c$, б) $v=0,5c$, в) $v=0,99c$.

1.316. Решить задачу 1.315 для случая, когда частицы движутся в системе K во взаимно перпендикулярных направлениях.

1.317. При какой скорости v погрешность при вычислении импульса по ньютоновской формуле $p=mv$ не превышает 1 %?

1.318. Найти отношение релятивистского и ньютоновского импульсов для скорости, равной: а) $0,1c$, б) $0,5c$, в) $0,999c$.

1.319. Найти скорость v релятивистской частицы массы $m=0,911 \cdot 10^{-30}$ кг (масса электрона), импульс которой $p=1,58 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

1.320. Энергия покоя частицы равна E_0 . Чему равна полная энергия частицы в системе отсчета, в которой импульс частицы равен p ?

1.321. Импульс тела массы m равен $p=mc$. Чему равна кинетическая энергия T тела?

1.322. При какой скорости частицы v ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

1.323. Найти импульс p релятивистской частицы массы m , кинетическая энергия которой равна T .

1.324. Воспользовавшись результатом задачи 1.323, определить импульс p релятивистской частицы массы m , кинетическая энергия T которой равна энергии покоя частицы mc^2 .

1.325. При скорости частицы v_0 импульс частицы равен p_0 .

а) Во сколько раз η нужно увеличить скорость частицы для того, чтобы ее импульс удвоился?

б) Найти значения η для v_0/c , равных 0,1, 0,5, 0,9 и 0,99.

в) Получить приближенное выражение η для значений v_0 , близких к c .

1.326. Полная энергия частицы равна 10 мс^2 . Чему равна ее скорость v ?

1.327. Частица массы $m=1,00 \cdot 10^{-20} \text{ кг}$ обладает в системе K кинетической энергией $T=2,25 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$. Определить кинетическую энергию T' , которой обладает частица в системе K' , движущейся относительно K со скоростью $v_0=0,800c$, перпендикулярной к скорости частицы в системе K .

1.328. Две одинаковые частицы массы m каждая летят навстречу друг другу с одинаковой по модулю скоростью v . Столкнувшись, частицы сливаются в одну частицу.

1. Какова масса M образовавшейся частицы?

2. Найти M для v , равной: а) $0,1c$, б) $0,5c$, в) $0,999c$.

1.329. Неподвижная частица массы M распадается на две одинаковые частицы массой $m=0,4 M$ каждая. Найти скорость v , с которой движутся эти частицы.

1.330. Найти отношение кинетической энергии T к энергии покоя частицы E_0 для случая, когда $\beta=v/c$ составляет: а) $0,9$, б) $0,1$, в) $0,01$.

Выразить T/E_0 через β и β^2 . Установить закономерность в зависимости T/E_0 от β^2 .

1.331. Какую работу A нужно совершить, чтобы сообщить электрону скорость, равную: а) $0,5c$, б) $0,999c$? Энергия покоя электрона $E_0=0,82 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ ($0,51 \text{ МэВ}$).

1.332. Над первоначально покоившимся протоном силами электрического поля была совершена работа $A=1,00 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$. Найти импульс p и скорость v , которые приобрел в результате этого протон.

1.333. Частица массы m начинает двигаться под действием постоянной силы F . Найти зависимость от времени импульса p и скорости v частицы.

1.334. Над частицей массы $m=0,911 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$, двигавшейся первоначально со скоростью $v_1=0,100c$, была совершена работа $A=8,24 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$. Как изменились в результате этого скорость, импульс и кинетическая энергия частицы? (Найти Δv , Δp и ΔT .)

1.335. Относительная скорость систем отсчета K и K' равна $v_0=0,800c$. В системе K' импульс частицы $p'=2,30 \times 10^{-18} (e'_x + e'_y + e'_z)$ (кг·м/с), а энергия $E'=1,50 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}$. Найти импульс p и энергию E частицы в системе K .

1.336. Система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $v_0=0,500c$. В системе K' импульс протона $p'=(0,774e'_x + 1,548e'_y + 2,322e'_z) \cdot 10^{-19} \text{ кг·м/с}$. Определить:

а) энергию E' и модуль скорости v' протона в системе K' ,

б) импульс p , энергию E и модуль скорости v протона в системе K .

1.337. Два протона с энергией $E=50$ ГэВ каждый движутся в системе K навстречу друг другу и претерпевают лобовое соударение. Рассмотрев этот процесс в системе K' , в которой один из протонов неподвижен, определить энергию E' другого протона. (Энергия покоя протона $E_0=938$ МэВ.) Какой вывод можно сделать из полученного результата?

1.11. Гидродинамика

1.338. На столе стоит цилиндрический сосуд высоты H , наполненный доверху водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить высоту h , на которой нужно сделать в сосуде небольшое отверстие, чтобы вытекающая из него струя попадала на стол на наибольшем удалении от сосуда.

1.339. Цилиндрический сосуд высоты $h=0,500$ м и радиуса $R=10,0$ см наполнен доверху водой. В дне сосуда открывается отверстие радиуса $r=1,00$ мм. Пренебрегая вязкостью воды, определить:

а) время τ , за которое вся вода вытечет из сосуда,

б) скорость v перемещения уровня воды в сосуде в зависимости от времени.

1.340. Шприц, применяемый для заправки смазкой шарнирных соединений автомобиля, заполнили для промывки керосином. Радиус поршня шприца $R=2,00$ см, ход поршня $l=25,0$ см. Радиус выходного отверстия шприца $r=2,00$ мм. Пренебрегая вязкостью керосина и трением поршня о стенки, определить время τ , за которое будет вытеснен керосин из шприца, если давить на поршень с постоянной силой $F=5,00$ Н. Плотность керосина ρ принять равной $0,800$ г/см³.

1.341. С мостика, переброшенного через канал, по которому течет вода, опущена узкая изогнутая трубка, обращенная открытым концом навстречу течению (рис. 1.51). Вода в трубке поднимается на высоту $h=150$ мм над уровнем воды в канале. Определить скорость v течения воды.

1.342. Устройство, называемое трубкой Пито — Прандтля, состоит из двух узких коаксиальных трубок (рис. 1.52). Внутренняя трубка открыта на нижнем конце, внешняя имеет боковые отверстия. Верхние концы трубок подключены к дифференциальному манометру (т. е. манометру,

показывающему разность давлений Δp). С помощью этого устройства можно измерять скорость жидкости (или газа). Для этого его погружают в жидкость, обратив открытым концом навстречу потоку, и отсчитывают Δp . При погружении трубки в поток жидкости с плотностью $\rho = 1,10 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ была обнаружена разность давлений $\Delta p = 4,95 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Найти скорость v течения жидкости.

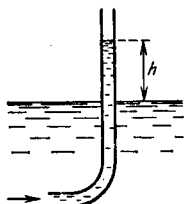


Рис. 1.51

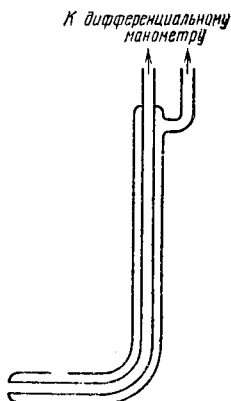


Рис. 1.52

1.343. По горизонтальной трубе радиуса $R = 12,5 \text{ мм}$ течет вода. Поток воды через сечение трубы $Q = 3,00 \times 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$. Определить:

- характер течения,
- перепад давления на единицу длины трубы dp/dl . Вязкость воды принять равной $\eta = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

1.344. Два одинаковых цилиндрических бака соединены узкой трубкой с краном посередине (рис. 1.53). Радиус баков $R = 20,0 \text{ см}$, радиус трубки $r = 1,00 \text{ мм}$. Длина трубки $l = 1,00 \text{ м}$. Проходное отверстие крана совпадает с сечением трубки. В один из баков налита вода до высоты $h = 50,0 \text{ см}$, второй бак вначале пустой. В момент $t = 0$ кран открывают. Определить:

- характер течения воды в трубке в первые секунды,
- время τ , по истечении которого разность уровней воды в баках уменьшается в e раз.

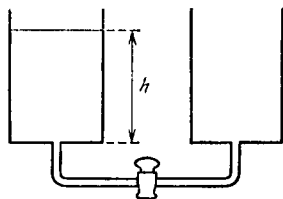


Рис. 1.53

Вязкость воды принять равной $\eta = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

1.345. Над нагретым участком поверхности Земли установился стационарный поток воздуха, направленный вертикально вверх и имеющий скорость $u = 20,0 \text{ см/с}$. В потоке находится шаровидная пылинка, которая движет-

ся вверх с установившейся скоростью $v=4,0$ см/с. Плотность пылинки $\rho=5,00 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность воздуха $\rho_0=1,29$ кг/м³. Вязкость воздуха $\eta=1,72 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

а) Определить радиус пылинки r .

б) Убедиться в том, что обтекание пылинки воздухом имеет ламинарный характер.

Примечание. Для шарика критическое значение числа Рейнольдса Re (т. е. значение, при котором ламинарное обтекание шарика переходит в турбулентное) равно 0,250, если в качестве характерного размера принять радиус шарика.

1.346. В высокий широкий сосуд налит глицерин (плотность $\rho_0=1,21 \cdot 10^3$ кг/м³, вязкость $\eta=0,350$ Па·с). В глицерин погружают вдалеке от стенок сосуда и отпускают без толчка шарик радиуса $r=1,00$ мм. Плотность шарика $\rho=10,0 \cdot 10^3$ кг/м³. Первоначальная высота шарика над дном сосуда $h=0,500$ м.

а) Определить, можно ли силу сопротивления движению шарика вычислять по формуле Стокса (см. примечание к задаче 1.345).

б) Найти зависимость пути s , пройденного шариком, от времени t .

в) Найти время τ , за которое шарик достигнет дна сосуда.

г) Определить время t , по истечении которого скорость шарика будет отличаться от предельного значения v_0 , не более чем на 1%.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Обозначения

A — работа
 A_r — относительная атомная масса
 a, b — константы, постоянные Ван-дер-Ваальса
 C — молярная теплоемкость, скорость откачки, теплоемкость
 C_p — молярная теплоемкость при постоянном давлении
 C_v — молярная теплоемкость при постоянном объеме
 c — удельная теплоемкость
 D — коэффициент диффузии
 D_{12} — коэффициент взаимной диффузии
 d — диаметр, расстояние
 E — энергия
 F — свободная энергия, сила
 g — ускорение свободного падения
 h — высота, глубина
 k — постоянная Больцмана
 l — длина
 M — молярная масса
 M_r — относительная молекулярная масса
 m — масса
 N — число молекул
 N_A — постоянная Авогадро
 n — показатель политропы, число частиц в единице объема
 P — вероятность
 p — давление
 Q — количество теплоты
 q — удельная теплота фазового перехода

R — газовая постоянная, радиус
 r — радиус
 S — площадь, поверхность, энтропия
 S_m — молярная энтропия
 T — термодинамическая температура
 t — время, температура по шкале Цельсия
 U — внутренняя энергия
 U_m — молярная внутренняя энергия
 u — скорость
 V — объем
 V_m — молярный объем
 v — удельный объем, скорость
 α — угол, поверхностное натяжение
 β — коэффициент затухания колебаний
 γ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме
 ϵ — энергия молекулы
 η — вязкость; коэффициент полезного действия
 ϑ — угол
 κ — теплопроводность
 λ — средняя длина свободного пробега
 ν — количество вещества (число молей)
 ρ — плотность
 τ — время
 φ — угол
 χ — коэффициент кручения
 Ω — статистический вес состояния
 ω — угловая скорость

2.1. Молекулярно-кинетические представления. Первое начало термодинамики

2.1. Сколько молекул содержится в стакане воды?

2.2. Воспользовавшись постоянной Авогадро, определить массу: а) атома водорода, б) молекулы кислорода (O_2), в) атома урана.

2.3. Вычислить массу M моля электронов.

2.4. Используя постоянную Авогадро, определить атомную единицу массы (а. е. м.).

2.5. Оценить диаметр d атомов ртути.

2.6. Моль таких газов, как гелий, водород, азот, кислород, занимает при нормальных условиях ($t=0^\circ C$, $p=1013$ гПа) объем, равный 22,4 л. Чему равно в этом случае:

а) число n молекул газа в единице объема,

б) среднее расстояние $\langle a \rangle$ между молекулами? Сравните это расстояние с диаметром молекулы d .

2.7. Как, зная плотность ρ и молярную массу M , найти число n молекул вещества в единице объема?

2.8. Из металлов наибольшим значением отношения ρ/A , обладает бериллий, наименьшим значением — калий. Определить для этих металлов число n атомов в единице объема.

2.9. Имеется поток молекул массы m , летящих с одинаковой по модулю и направлению скоростью v . Плотность молекул в потоке равна n . Найти:

а) число ν ударов молекул за секунду о единицу поверхности плоской стенки, нормаль к которой образует угол ϑ с направлением v ,

б) давление p потока молекул на стенку. Считать, что молекулы отражаются стенкой зеркально и без потери энергии.

2.10. Газ расширяется в идентичных условиях от объема V_1 до объема V_2 один раз быстро, другой раз — медленно. В каком случае совершаемая газом работа будет больше?

2.11. Газ сжимают в идентичных условиях от объема V_1 до объема V_2 один раз быстро, другой раз — медленно. В каком случае совершаемая газом работа будет по модулю больше?

2.12. При неизменном давлении $p=3,00 \cdot 10^5$ Па газ

а) расширяется от объема $V_1=2,00$ л до объема $V_2=4,00$ л,

б) сжимается от объема $V_1=8,00$ л до объема $V_2=5,00$ л.

Найти работу A , совершаемую газом, и работу A' , совершаемую над газом.

2.13. Некоторый газ совершает процесс, в ходе которого давление p изменяется с объемом V по закону $p = p_0 \exp[-\alpha(V - V_0)]$, где $p_0 = 6,00 \cdot 10^5$ Па, $\alpha = 0,200 \text{ м}^{-3}$, $V_0 = 2,00 \text{ м}^3$. Найти работу A , совершаемую газом при расширении от $V_1 = 3,00 \text{ м}^3$ до $V_2 = 4,00 \text{ м}^3$.

2.14. Тело с не зависящей от температуры теплоемкостью $C = 20,0 \text{ Дж/К}$ охлаждается от $t_1 = 100^\circ\text{C}$ до $t_2 = 20^\circ\text{C}$. Определить количество теплоты Q , полученное телом.

2.15. В рассматриваемом интервале температур теплоемкость некоторого тела определяется функцией $C = 10,00 + 2,00 \cdot 10^{-2} T + 3,00 \cdot 10^{-5} T^2$ (Дж/К). Определить количество теплоты Q , получаемое телом при нагревании от $T_1 = 300 \text{ К}$ до $T_2 = 400 \text{ К}$.

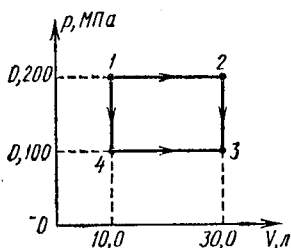


Рис. 2.1

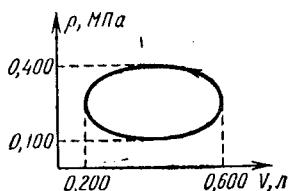


Рис. 2.2

2.16. Некоторое тело переходит из состояния 1 в состояние 3 один раз посредством процесса 1—2—3, а другой раз посредством процесса 1—4—3 (рис. 2.1). Используя данные, указанные на рисунке, найти разность количеств теплоты $Q_{123} - Q_{143}$, получаемых телом в ходе обоих процессов.

2.17. Круговой процесс на диаграмме p, V изображается эллипсом, показанным на рис. 2.2. Используя данные, приведенные на рисунке, определить количество теплоты Q , получаемое рабочим телом за один цикл.

2.18. Внутренняя энергия некоторого воображаемого газа определяется формулой $U = a \ln(T/T_0) + b \ln(p/p_0)$, где $a = 3,00 \text{ кДж}$, $b = 7,00 \text{ кДж}$, $T_0 = 200 \text{ К}$, $p_0 = 10,0 \text{ кПа}$. Газу сообщается при постоянном давлении $p = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Па}$ количество теплоты $Q = 500 \text{ Дж}$, в результате чего объем газа получает приращение $\Delta V = 0,500 \text{ л}$. Как изменяется при этом температура газа?

2.19. Газ из предыдущей задачи нагревается от $T_1 = 250 \text{ К}$ до $T_2 = 500 \text{ К}$. В ходе нагревания газ получает

количество теплоты $Q=14,33$ кДж и совершает работу $A=4,56$ кДж. Как изменяется при этом давление газа?

2.20. Внутренняя энергия некоторого воображаемого газа определяется формулой $U=a \ln(T/T_0)+b \ln(V/V_0)$, где $a=4,00$ кДж, $b=5,00$ кДж, T_0 и V_0 — константы. Первоначально газ находится в состоянии, характеризуемом следующими параметрами: $V_1=20,0$ л, $p_1=1,00 \cdot 10^5$ Па и $T_1=300$ К. Затем газ изобарически расширяется до объема $V_2=30,0$ л. В ходе расширения газ получает количество теплоты $Q=4,00$ кДж. Определить конечную температуру T_2 газа.

2.2. Идеальный газ

2.21. Определить число n молекул воздуха в единице объема (м^3 и см^3) при температуре 0°C и давлении $1,013 \times 10^5$ Па (1 атм).

2.22. Найти массу: а) одного кубического метра, б) одного литра воздуха при температуре 0°C и давлении $1,013 \times 10^5$ Па (1 атм).

2.23. Вблизи поверхности Земли 78,08 % молекул воздуха приходится на долю азота (N_2), 20,95 % — на долю кислорода (O_2), 0,93 % — на долю аргона (Ar), 0,04 % — на долю других газов.

а) Полагая давление воздуха равным $1,013 \cdot 10^5$ Па, найти парциальное давление азота, кислорода и аргона.

б) Определить среднюю молекулярную массу M_r воздуха.

2.24. Ротационный насос захватывает за один оборот объем газа v и выталкивает его в атмосферу. Сколько оборотов n должен сделать насос, чтобы понизить давление воздуха в сосуде объема V от значения p_0 до p ?

2.25. Форвакуумный насос (насос предварительного разрежения), подключенный к сосуду объема V , удаляет из сосуда за время dt объем газа $dV=C dt$ (константу C называют скоростью откачки). Считая, что во время откачки давление газа во всех точках сосуда одинаково, и пренебрегая перепадом давления на патрубке, соединяющем сосуд с насосом, найти закон $p(t)$, по которому изменяется давление газа в сосуде. Начальное давление p_0 . Газ предполагать идеальным.

2.26. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, определить, сколько времени τ потребуется, чтобы с помощью насоса, имеющего скорость откачки $C=1,00$ л/с,

снизить в сосуде объема $V=10,0$ л давление от $p_0=1,00 \cdot 10^5$ Па до $p=0,300$ Па.

2.27. Изобразить для идеального газа примерные графики изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического процессов на диаграммах: а) p, V ; б) T, V ; в) T, p . Графики изобразить проходящими через общую для них точку.

2.28. На рис. 2.3 изображены две изотермы для одной и той же массы идеального газа. Какая из температур больше?

2.29. На рис. 2.4 изображены пять процессов, протекающих с идеальным газом. Как ведет себя внутренняя энергия газа в ходе каждого из процессов?

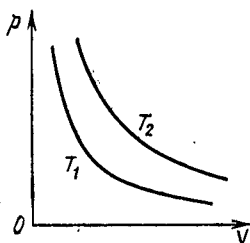


Рис. 2.3

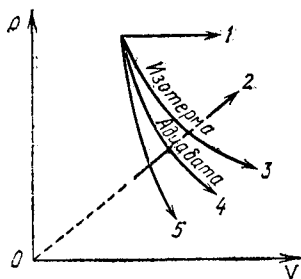


Рис. 2.4

2.30. Изобразить для идеального газа примерные графики:

а) изохорического, изобарического и адиабатического процессов на диаграмме U, T ;

б) изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического процессов на диаграммах U, V и U, p ; U откладывать по оси ординат. Исходной для всех графиков принять общую точку.

2.31. Температура одного моля идеального газа с известным γ повышается на ΔT при изобарическом, изохорическом и адиабатическом процессах. Определить приращение внутренней энергии ΔU газа для всех трех случаев.

2.32. Чему равна теплоемкость C , идеального газа при процессе: а) изотермическом, б) адиабатическом?

2.33. Некоторое количество идеального газа с трехатомными жесткими молекулами перешло адиабатически из состояния с температурой $T_1=280$ К в состояние, характеризующееся параметрами: $T_2=320$ К, $p_2=2,00 \cdot 10^5$ Па, $V_2=50,0$ л. Какую работу A совершает при этом газ?

2.34. Некоторое количество газа перешло из состояния с $U_1=600$ кДж в состояние с $U_2=200$ кДж, совершив при этом работу $A=300$ кДж. Какое количество теплоты Q получил газ, если процесс перехода: а) обратим, б) необратим?

2.35. Некоторое количество одноатомного идеального газа сжимают адиабатически до тех пор, пока давление не превзойдет начальное давление p_1 в 10 раз. Затем газ расширяется изотермически до первоначального объема. Во сколько раз конечное давление p_2 газа превышает начальное давление p_1 ?

2.36. Идеальный газ ($\gamma=1,40$), находившийся первоначально при температуре $t_1=0^\circ\text{C}$, подвергается сжатию, а результате чего: а) объем газа уменьшается в 10 раз, б) давление газа увеличивается в 10 раз. Считая процесс сжатия адиабатическим, определить, до какой температуры t_2 нагревается газ вследствие сжатия.

2.37. На рис. 2.5 показан обратимый переход двухатомного идеального газа из состояния 1 в состояние 2. Процесс перехода состоит из изотермического участка 1—3 и адиабатического участка 3—2.

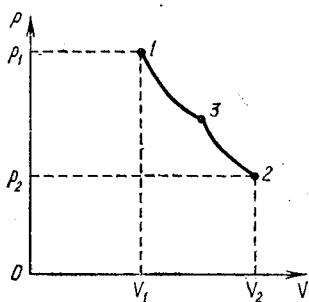


Рис. 2.5

В начальном состоянии $V_1=1,00 \cdot 10^{-3}$ м³, $p_1=3,00 \cdot 10^5$ Па, в конечном состоянии $V_2=2,00 \cdot 10^{-3}$ м³, $p_2=1,33 \cdot 10^5$ Па. Вычислить работу A , совершаемую газом в ходе процесса 1—3—2. Колебательные степени свободы молекул газа не возбуждаются.

2.38. Температура в комнате объема V поднялась от значения T_1 до значения T_2 . Как изменилась при этом внутренняя энергия воздуха, содержащегося в комнате? Атмосферное давление предполагается не изменившимся.

2.39. Атмосферное давление изменилось от $p_1=983$ гПа до $p_2=1003$ гПа. Какое приращение ΔU получает при этом внутренняя энергия воздуха, содержащегося в комнате объема $V=50,0$ м³? Температура в комнате предполагается неизменной.

2.40. Закрытый цилиндр разделен на две части поршнем радиуса $r=10,0$ см и массы $m=1,00$ кг, который может перемещаться без трения. Установив поршень в среднее положение, обе части цилиндра наполняют газом до одина-

кового давления $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$ Па. Объем газа в каждой из половин $V_0 = 5,00$ л. Газ можно считать идеальным, его $\gamma = 1,40$. Пренебрегая теплообменом через стенки цилиндра и через поршень, найти частоту ν колебаний поршня, возникающих при небольшом смещении поршня из среднего положения.

2.41. Некоторое количество идеального газа с одноатомными молекулами совершило при $p = 1,00 \cdot 10^5$ Па обратимый изобарический процесс, в ходе которого объем газа изменился от значения $V_1 = 10,0$ л до $V_2 = 20,0$ л. Определить:

- а) приращение внутренней энергии газа ΔU ,
- б) совершенную газом работу A ,
- в) полученное газом количество теплоты Q .

2.42. Идеальный газ ($\gamma = 1,40$) расширяется изотермически от объема $V_1 = 0,100$ м³ до объема $V_2 = 0,300$ м³. Конечное давление газа $p_2 = 2,00 \cdot 10^5$ Па. Определить:

- а) приращение внутренней энергии газа ΔU ,
- б) работу A , совершаемую газом,
- в) получаемое газом количество теплоты Q .

2.43. При изобарическом нагревании от 0 до 100 °С моль идеального газа поглощает количество теплоты $Q = 3,35$ кДж. Определить:

- а) значение γ ,
- б) приращение внутренней энергии газа ΔU ,
- в) работу A , совершаемую газом.

2.44. Моль идеального газа, имевший первоначально температуру $T_1 = 290$ К, расширяется изобарически до тех пор, пока его объем не возрастет в 2,00 раза. Затем газ охлаждается изохорически до первоначальной температуры T_1 . Определить:

- а) приращение внутренней энергии газа ΔU ,
- б) работу A , совершаемую газом,
- в) получаемое газом количество теплоты Q .

2.45. На рис. 2.6 изображен процесс перехода некоторого количества идеального газа из состояния I в состояние II. Получает или отдает газ теплоту в ходе этого процесса?

2.46. Некоторое количество идеального газа переходит из состояния I в состояние II один раз посредством процесса I, другой раз посредством процесса II (рис. 2.7). В ходе какого из процессов количество теплоты, полученное газом, больше?

2.47. Некоторое количество идеального газа переходит из состояния I в состояние II один раз посредством процесса I, другой раз посредством процесса II (рис. 2.8).

а) Какой знак имеют работы A_I и A_{II} , совершенные газом в ходе каждого из процессов?

б) В ходе какого из процессов количество теплоты, полученное газом, больше?

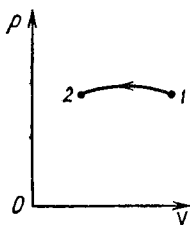


Рис. 2.6

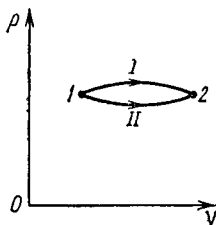


Рис. 2.7

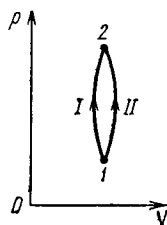


Рис. 2.8

2.48. Первоначально 1,00 кг азота (N_2) заключен в объеме $V_1=0,300$ м³ под давлением $p_1=5,00 \cdot 10^5$ Па. Затем газ расширяется, в результате чего его объем становится равным $V_2=1,00$ м³, а давление — равным $p_2=1,00 \cdot 10^5$ Па.

а) Определить приращение внутренней энергии газа ΔU .

б) Можно ли вычислить работу, совершаемую газом при расширении?

2.49. В результате обратимого изотермического (при $T=300$ К) расширения 531 г азота (N_2) давление газа уменьшается от $p_1=20,0 \cdot 10^5$ Па до $p_2=2,00 \cdot 10^5$ Па. Определить:

а) работу A , совершаемую газом при расширении,

б) получаемое газом количество теплоты Q .

2.50. В результате обратимого адиабатического расширения температура 1,00 кг азота (N_2) понижается на 20,0 К. Определить работу A , совершаемую газом при расширении. Учесть, что колебательные степени свободы молекул азота при рассматриваемых температурах не возбуждаются.

2.51. Гелий (He) массы $m=321$ г, находившийся первоначально при температуре $t=20^\circ\text{C}$ и давлении $p_1=1,00 \cdot 10^5$ Па, сжимают адиабатически до давления $p_2=1,00 \cdot 10^7$ Па. Считая процесс сжатия обратимым, определить:

а) температуру газа T_2 в конце сжатия,

б) работу A , совершаемую газом,

в) во сколько раз уменьшился объем газа.

2.52. Одноатомный идеальный газ совершает процесс, в ходе которого молярная теплоемкость газа остается постоянной и равной $\frac{5}{2}R$. Чему равен показатель политропы n этого процесса?

2.53. Теплоемкость идеального газа при некотором политропическом процессе равна $C = C_V + 0,1R$. Найти значение показателя политропы n этого процесса.

2.54. Молярная теплоемкость идеального газа ($\gamma = 1,40$) изменяется в ходе некоторого процесса по закону $C = 20,00 + 500/T$ (Дж/(моль·К)).

а) Является ли этот процесс политропическим?

б) Найти работу A , совершаемую молям газа при нагревании от $T_1 = 200$ К до $T_2 = 544$ К.

2.55. Идеальный газ совершает процесс, в ходе которого давление p растет пропорционально объему V . Является ли этот процесс политропическим?

2.56. Для процесса из задачи 2.55 найти: а) показатель политропы n , б) молярную теплоемкость C .

2.57. Выразить работу A_{12} , совершаемую ν молями идеального газа при политропическом процессе (с показателем политропы n), через температуры T_1 и T_2 начального и конечного состояний.

2.58. а) Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $pV^2 = \text{const}$?

б) Какова молярная теплоемкость C газа при этом процессе?

2.59. Выразить молярную теплоемкость C идеального газа при политропическом процессе через показатель политропы n и отношение теплоемкостей γ .

2.60. Воспользовавшись ответом предыдущей задачи, определить, при каких значениях показателя политропы n теплоемкость C идеального газа в ходе политропического процесса: а) положительна, б) отрицательна, в) равна нулю, г) бесконечно велика.

2.61. В ходе некоторого политропического процесса идеальный газ ($\gamma = 1,40$) был сжат от объема $V_1 = 10,0$ л до объема $V_2 = 5,00$ л. При этом давление возросло от $p_1 = 1000$ гПа до $p_2 = 5000$ гПа. Определить:

а) показатель политропы n ,

б) молярную теплоемкость C газа для рассматриваемого процесса.

2.62. Определить молярную теплоемкость C (выразить через R) идеального газа ($\gamma = 1,40$) в ходе политропического процесса с показателем политропы, равным: а) $n = 0,9$, б) $n = 0,99$, в) $n = 0,999$, г) $n = 1,1$.

2.63. Для идеального газа ($\gamma = 1,40$) нарисовать примерный график зависимости молярной теплоемкости C при политропическом процессе от показателя политропы n . Отметить на графике асимптоты и характерные точки,

2.64. Идеальный газ расширяется в ходе политропического процесса. При каких значениях показателя политропы n температура газа будет: а) возрастать, б) уменьшаться, в) оставаться постоянной?

2.65. Некоторое количество идеального газа ($\gamma=1,40$) расширяется от $V_1=20,0$ л до $V_2=50,0$ л так, что процесс на диаграмме p, V имеет вид прямой линии. Исходное давление $p_1=1000$ гПа, конечное $p_2=2000$ гПа.

а) Является ли процесс политропическим?

б) Найти количество теплоты Q , поглощаемое газом в ходе расширения.

2.3. Кинетическая теория

2.66. Сколько молекул v ударяется за 1 с об 1 м^2 стенки сосуда, в котором находится азот (N_2) при давлении 1013 гПа (1 атм) и температуре 20°C ?

2.67. В сферическом сосуде с внутренним радиусом $r=5,00$ см содержится водород (H_2) при температуре $T=300$ К и давлении $p=1,00 \cdot 10^5$ Па. Сколько молекул v ударяется о стенки сосуда за 1 с?

2.68. Определить число и характер степеней свободы молекул газа, для которого γ равно: а) 1,67, б) 1,40, в) 1,33, г) 1,29, д) 1,17.

2.69. Вычислить молярные теплоемкости C_V и C_p (выразить их через R), а также отношение этих теплоемкостей γ для идеального газа с: а) одноатомными молекулами, б) двухатомными жесткими молекулами, в) двухатомными упругими молекулами, г) трехатомными жесткими молекулами (атомы которых не лежат на одной прямой).

2.70. Из скольких атомов состоят молекулы газа, если при «замораживании» колебательных степеней свободы γ увеличивается в 1,20 раза?

2.71. При $T=1,00 \cdot 10^3$ К у четырехатомных молекул некоторого идеального газа оказываются возбужденными все степени свободы (включая колебательные). Определить внутреннюю энергию U_m моля газа.

2.72. Сосуд наполнен аргоном (Ar). Температура газа равна 0°C . Сосуд сначала движется со скоростью $v=100$ м/с, затем внезапно останавливается. Пренебрегая теплообменом между газом и стенками сосуда, определить температуру t газа после остановки сосуда.

2.73. Средняя энергия молекул одноатомного идеального газа $\langle \epsilon \rangle = 6,00 \cdot 10^{-21}$ Дж. Давление газа $p=2,00 \times 10^5$ Па. Найти число молекул газа в единице объема n .

2.4. Распределения

2.74. Дана $f(x)$ — функция распределения вероятностей величины x . Написать выражение для $P(a \leq x \leq b)$ — вероятности того, что значение величины x находится в интервале от a до b .

2.75. Даны $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — функции распределения вероятностей для статистически независимых величин x и y . Написать выражение для $P(a_1 \leq x \leq a_2; b_1 \leq y \leq b_2)$ — вероятности того, что значение величины x находится в интервале от a_1 до a_2 , а значение величины y заключено при этом в интервале от b_1 до b_2 .

2.76. На рис. 2.9 приведены графики четырех различных функций распределения вероятностей значений некоторой

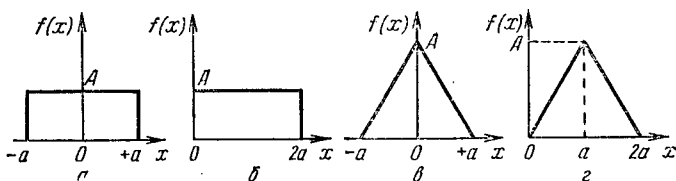


Рис. 2.9

величины x . Для каждого из графиков найти константу A , при которой функция оказывается нормированной. Затем вычислить средние значения x и x^2 . Для случая a вычислить также $\langle |x| \rangle$.

2.77. Функция распределения вероятностей величины x имеет вид $f(x) = Ae^{-\alpha x^2} 4\pi x^2$, где A и α — константы. Написать приближенное выражение для вероятности P того, что значение x окажется в пределах от 7,9999 до 8,0001.

2.78. Гармонический осциллятор совершает колебания с амплитудой a . Масса осциллятора равна m , собственная частота ω . Найти:

- функцию $f(x) = dP_x/dx$ распределения вероятностей значений координаты x осциллятора,
- среднее значение координаты $\langle x \rangle$,
- среднее значение модуля координаты $\langle |x| \rangle$,
- среднее значение квадрата координаты $\langle x^2 \rangle$,
- среднее значение потенциальной энергии осциллятора $\langle U \rangle$.

2.79. Найти температуру T , при которой средняя квадратичная скорость молекул азота (N_2) больше средней скорости на 50,0 м/с.

2.80. При какой температуре T воздуха средние скорости молекул азота (N_2) и кислорода (O_2) отличаются на 30,0 м/с?

2.81. Преобразовать функцию распределения Максвелла, перейдя от переменной v к переменной $u = v/v_{\text{вер}}$, где $v_{\text{вер}}$ — наиболее вероятная скорость молекул.

2.82. В запаянном стеклянном баллоне заключен моль одноатомного идеального газа при температуре $T = 293$ К. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы средняя скорость его молекул увеличилась на 1 %?

2.83. Вычислить наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорости молекул кислорода (O_2) при 20 °С.

2.84. Моль азота (N_2) находится в равновесном состоянии при $T = 300$ К. Чему равна:

- а) сумма x -вых компонент скоростей всех молекул $\sum v_x$,
- б) сумма скоростей всех молекул $\sum v$,
- в) сумма квадратов скоростей всех молекул $\sum v^2$,
- г) сумма модулей скоростей всех молекул $\sum v$?

2.85. Найти среднее значение модуля x -вой компоненты скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T . Масса молекулы равна m .

2.86. Найти сумму модулей импульсов молекул, содержащихся в моле азота (N_2), при температуре 20 °С.

2.87. Определить, исходя из классических представлений, среднеквадратичную угловую скорость $\sqrt{\langle \omega^2 \rangle}$ вращения молекул азота (N_2) при $T = 300$ К. Расстояние между ядрами молекулы $l = 3,7 \cdot 10^{-10}$ м.

2.88. Некоторый газ находится в равновесном состоянии. Какой процент молекул газа обладает скоростями, отличными от наиболее вероятной не более чем на 1 %?

2.89. Написать выражение, определяющее относительную долю η молекул газа, обладающих скоростями, превышающими наиболее вероятную скорость.

2.90. Средняя энергия молекул гелия (He) $\langle \epsilon \rangle = 3,92 \cdot 10^{-21}$ Дж. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ молекул гелия при тех же условиях.

2.91. Азот (N_2) находится в равновесном состоянии при $T = 421$ К.

1. Найти наиболее вероятную скорость молекул $v_{\text{вер}}$.

2. Определить относительное число $\Delta N/N$ молекул, скорости которых заключены в пределах: а) от 499,9 до 500,1 м/с, б) от 249,9 до 250,1 м/с, в) от 749,9 до 750,1 м/с, г) от 999,9 до 1000,1 м/с.

2.92. На рис. 2.10 дан график зависимости плотности n молекул воздуха от высоты h над поверхностью Земли. Какой смысл имеет заштрихованная площадь?

2.93. Молекулы идеального газа находятся в равновесии в центрально-симметричном силовом поле, так что потенциальная энергия отдельной молекулы имеет вид $\epsilon_p = \epsilon_p(r)$. Написать выражение для dN_r — числа молекул, расстояния которых от силового центра лежат в интервале от r до $r+dr$. Известно, что плотность молекул на расстоянии r_1 равна n_1 .

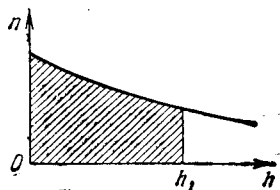


Рис. 2.10

2.94. В опыте, посредством которого Перрен определил постоянную Авогадро N_A , использовалась взвесь шариков гуммигута ($\rho = 1,254$ г/см³) в воде. Температура взвеси равнялась 20 °С. Радиус шариков $r = 0,212$ мкм. При перемещении тубуса микроскопа на $\Delta h = 30$ мкм число шариков, наблюдавшихся в микроскоп, изменялось в 2,1 раза. Исходя из этих данных, найти N_A .

2.95. Считая атмосферу изотермической, а ускорение свободного падения не зависящим от высоты, вычислить давление а) на высоте 5 км, б) на высоте 10 км, в) в шахте на глубине 2 км. Расчет произвести для $T = 293$ К. Давление на уровне моря принять равным p_0 .

2.96. Вблизи поверхности Земли отношение объемных концентраций кислорода (O_2) и азота (N_2) в воздухе $\eta_0 = 20,95/78,08 = 0,268$. Полагая температуру атмосферы не зависящей от высоты и равной 0 °С, определить это отношение η на высоте $h = 10$ км.

2.97. Установленная вертикально закрытая с обоих концов труба наполнена газообразным кислородом (O_2). Высота трубы $h = 200$ м, объем $V = 200$ л. Стенки трубы имеют всюду одинаковую температуру $T = 293$ К. Давление газа внутри трубы, вблизи ее основания равно $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$ Па. Определить:

- давление p в трубе вблизи ее верхнего конца,
- количество N молекул кислорода, содержащихся в трубе.

2.98. 1. Полагая температуру воздуха и ускорение свободного падения не зависящими от высоты, определить, на какой высоте h над уровнем моря плотность воздуха меньше своего значения на уровне моря: а) в 2 раза, б) в e раз. Температуру воздуха положить равной 0 °С.

2. Получив результаты, убедиться в допустимости предположения о независимости g от h . Для этого оценить по полученной в задаче 1.242 формуле, на сколько процентов отличается на найденных высотах ускорение свободного падения от своего значения g на уровне моря.

2.99. Закрытая с одного конца труба длины $l=1,00$ м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью $\omega=62,8$ рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0=1,00 \cdot 10^5$ Па, температура $t=20^\circ\text{C}$. Найти давление p воздуха в трубе вблизи закрытого конца.

2.100. Имеется N частиц, энергия которых может принимать лишь два значения E_1 и E_2 . Частицы находятся в равновесном состоянии при температуре T . Чему равна суммарная энергия E всех частиц в этом состоянии?

2.5. Энтропия

2.101. В сосуде содержатся пять молекул.

а) Каким числом способов могут быть распределены эти молекулы между левой и правой половинами сосуда?

б) Чему равно $\Omega(0, 5)$ — число способов осуществления такого распределения, при котором все пять молекул оказываются в правой половине сосуда? Какова вероятность $P(0, 5)$ такого состояния?

в) Чему равно $\Omega(1, 4)$ — число способов осуществления такого распределения, при котором в левой половине сосуда оказывается одна молекула, а в правой — четыре? Какова вероятность $P(1, 4)$ такого состояния?

г) Чему равно $\Omega(2, 3)$? Какова вероятность $P(2, 3)$ такого состояния?

2.102. Как ведет себя статистический вес Ω состояния некоторой термодинамической системы при протекании обратимого адиабатического процесса?

2.103. Некоторая термодинамическая система перешла из состояния 1 в состояние 2. Статистический вес второго состояния превосходит статистический вес первого состояния в $\eta=2$ раза. Чему равно приращение энтропии системы ΔS_{12} ?

2.104. Статистический вес состояния некоторой массы газа равен Ω_1 . Определить статистический вес Ω_2 состояния в η раз большей массы того же газа. Температура и давление газа в обоих случаях одинаковы.

2.105. Статистический вес Ω некоторого состояния термодинамической системы равен: а) $1,00 \cdot 10^{1020}$, б) $5,00 \cdot 10^{1020}$.

Чему равна энтропия S системы в этом состоянии? Чему равна по порядку величины относительная разность энтропий $\Delta S/S$ для случаев а) и б)?

2.106. Логарифм $N!$ можно вычислить по приближенной формуле Стирлинга:

$$\ln N! = N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln(2\pi N).$$

Относительная погрешность, даваемая этой формулой, убывает с увеличением N . Сравнить точные значения $\ln N!$ со значениями, вычисленными по формуле Стирлинга для: а) $N=5$, б) $N=10$.

2.107. В статистической физике пренебрегают третьим членом в формуле Стирлинга (см. задачу 2.106) и полагают, что

$$\ln N! \approx N \ln N - N.$$

Определить относительную погрешность, которая получается при этом для: а) $N=5$, б) $N=10$, в) $N=20$, г) $N=30$, д) $N=100$. Для $N \geq 20$ в качестве точного значения $\ln N!$ принять значение, вычисленное по трехчленной формуле Стирлинга, приведенной в задаче 2.106.

2.108. Оценить для газа, находящегося при нормальных условиях ($p=1,013 \cdot 10^5$ Па, $T=273$ К), линейные размеры l объема $\Delta V=l^3$, приходящегося в среднем на число молекул $\Delta N=10^3$.

2.109. Энтропия моля водорода (H_2) при температуре 25°C и давлении $1,013 \cdot 10^5$ Па (1 атм) равна $S_m = 130$ Дж/(моль·К). Определить статистический вес Ω :

а) одного моля;

б) двух молей водорода при указанных условиях.

2.110. Определить, во сколько раз увеличивается статистический вес Ω моля воды при переходе ее из жидкого в газообразное состояние при температуре 100°C .

2.111. Как ведет себя энтропия термодинамической системы при адиабатическом процессе?

2.112. Может ли возрасти энтропия системы в ходе процесса, при котором система отдает тепло внешней среде?

2.113. Некоторый газ переходит из состояния 1 в состояние 2 посредством обратимого адиабатического процесса. Может ли этот газ перейти из состояния 1 в состояние 2 посредством необратимого адиабатического процесса?

2.114. На рис. 2.11 изображены две изоэнтропы для одной и той же массы идеального газа. Какая из энтропий больше?

2.115. Изобразить для идеального газа графики изотермического и адиабатического процессов на диаграмме U, S .

2.116. Изобразить для идеального газа примерные графики изотермического, изохорического, изобарического и адиабатического процессов на диаграмме: а) T, S ; б) V, S ; в) p, S . Энтропию S откладывать по оси абсцисс. Графики изобразить проходящими через общую для них точку.

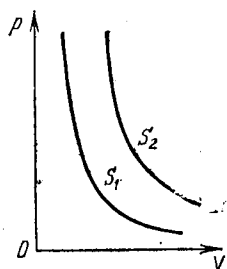


Рис. 2.11

2.117. Как ведет себя энтропия в ходе каждого из процессов, изображенных на рис. 2.4 (см. задачу 2.29)?

2.118. Изобразить для идеального газа примерные графики изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического процессов на диаграмме: а) S, T ; б) S, V ; в) S, p . Энтропию S откладывать по оси ординат. Исходной для всех графиков принять общую точку.

2.119. Некоторое количество газа переходит из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 посредством: а) обратимого адиабатического процесса, б) некоторого необратимого процесса. Начальное и конечное состояния газа для обоих процессов одинаковы.

1. Чему равно приращение энтропии газа ΔS в обоих случаях?

2. Может ли второй процесс быть также адиабатическим?

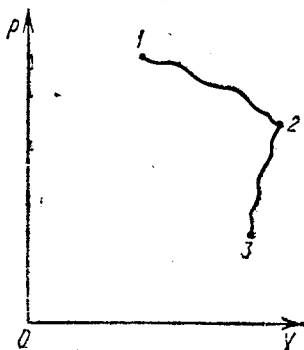


Рис. 2.12

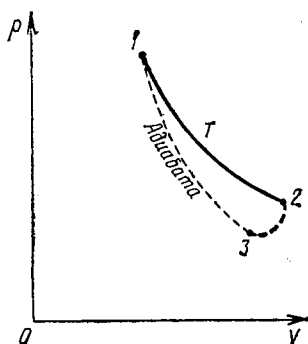


Рис. 2.13

2.120. На рис. 2.12 изображен процесс, совершаемый некоторым количеством идеального газа. Известно, что

приращение энтропии ΔS_{12} в ходе процесса 1—2 отличается от приращения энтропии ΔS_{23} в ходе процесса 2—3 только знаком. Что можно сказать о состояниях 1 и 3?

2.121. На рис. 2.13 изображен процесс 1—2—3, переводящий идеальный газ из состояния 1 в состояние 3. Процесс 1—2 обратим, процесс 2—3 необратим. Состояния 1 и 3 лежат на одной адиабате. Процесс 1—2 изотермический; он протекает при $T=300$ К и сопровождается совершением газом работы $A_{12}=3,00$ Дж. Чему равно приращение энтропии ΔS_{23} в ходе процесса 2—3?

2.122. В некоторой температурной области энтропия термодинамической системы изменяется с температурой по закону: $S=a+bT$, где a — константа, $b=5,00$ Дж/К². Какое количество теплоты Q получает система при обратимом нагревании в этой области от $T_1=290$ К до $T_2=310$ К?

2.123. Моль одноатомного идеального газа нагревается обратимо от $T_1=300$ К до $T_2=400$ К. В процессе нагревания давление газа изменяется с температурой по закону $p=p_0 \exp(\alpha T)$, где $\alpha=1,00 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹. Определить количество теплоты Q , полученное газом при нагревании.

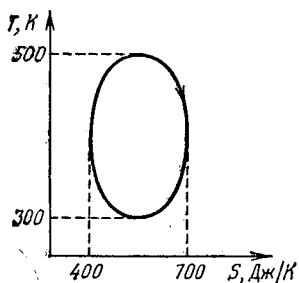


Рис. 2.14

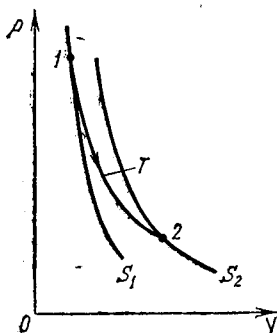


Рис. 2.15

2.124. Круговой процесс на диаграмме T, S изображается эллипсом, показанным на рис. 2.14. Используя данные, приведенные на рисунке, определить работу A , совершаемую рабочим телом за цикл.

2.125. Энтропия 1 г азота при температуре 25 °С и давлении $1,00 \cdot 10^5$ Па равна $S_1=6,84$ Дж/(г·К). Определить энтропию 2 г азота при температуре 100 °С и давлении $2,00 \cdot 10^5$ Па.

2.126. Энтропия моля кислорода при температуре 25 °С и давлении $1,00 \cdot 10^5$ Па равна $S_1=204,8$ Дж/(моль·К).

В результате изотермического расширения объем, занимаемый газом, увеличился в два раза. Определить энтропию S_2 кислорода в конечном состоянии.

2.127. Найти приращение энтропии ΔS_m моля одноатомного идеального газа при нагревании его от 0 до 273 °C в случае, если нагревание происходит:

- а) при постоянном объеме,
- б) при постоянном давлении.

2.128. Идеальный газ, расширяясь изотермически (при $T=400$ К), совершает работу $A=800$ Дж. Что происходит при этом с энтропией газа?

2.129. В ходе обратимого изотермического процесса, протекающего при температуре $T=350$ К, тело совершает работу $A=80$ Дж, а внутренняя энергия тела получает приращение $\Delta U=7,5$ Дж. Что происходит с энтропией тела?

2.130. Идеальный газ, расширяясь изотермически при температуре T , переходит из состояния 1 в состояние 2 (рис. 2.15). Состояние 1 лежит на адиабате, отвечающей энтропии S_1 , состояние 2 — на адиабате, отвечающей энтропии S_2 . Какую работу A совершает газ в ходе процесса?

2.131. Найти приращение энтропии ΔS при превращении массы $m=200$ г льда, находившегося при температуре $t_1=-10,7$ °C, в воду при $t_2=0$ °C. Теплоемкость льда считать не зависящей от температуры. Температуру плавления принять равной 273 К.

2.132. Найти приращение энтропии ΔS при конденсации массы $m=1,00$ кг пара, находившегося при температуре $t_1=100$ °C, в воду и последующем охлаждении воды до температуры $t_2=20$ °C. Теплоемкость воды считать не зависящей от температуры. Конденсация происходит при давлении, равном 1 атм.

2.133. В ограниченном интервале температур приращение энтропии некоторого вещества оказывается пропорциональным приращению температуры: $\Delta S=\alpha\Delta T$. Как зависит от температуры теплоемкость C вещества в том же интервале?

2.134. Теплоемкость тел с простыми кристаллическими решетками изменяется вблизи абсолютного нуля по закону: $C=aT^3$, где a — константа. Определить энтропию S тела при этих условиях.

2.135. Найти зависимость энтропии S_m моля идеального газа (γ — известно) от объема V_m для процесса, при котором давление газа пропорционально его объему.

2.136. Моль идеального газа ($\gamma=1,40$) совершает обратимый процесс, в ходе которого энтропия газа изменяется пропорционально термодинамической температуре. В результате процесса внутренняя энергия газа изменяется от $U_1=6,00$ кДж/моль до $U_2=7,00$ кДж/моль. Энтропия в исходном состоянии $S_1=200$ Дж/(моль·К). Найти работу A , совершаемую газом в ходе процесса.

2.137. 1,000 г кислорода первоначально заключен в объеме $V_1=0,200$ л под давлением $p_1=500$ Па. Затем газ расширился, в результате чего объем газа стал равным $V_2=0,500$ л, а давление — равным $p_2=200$ Па. Считая газ идеальным, определить:

- приращение энтропии газа ΔS ,
- приращение внутренней энергии газа ΔU .

2.138. Сосуд разделен на две равные части перегородкой с закрытым пробкой отверстием. В одной из половин сосуда содержится моль идеального газа, в другой половине сосуда — вакуум. Пробку удаляют, и газ распространяется на весь объем. Считая процесс адиабатическим, определить:

- приращение внутренней энергии газа ΔU_m ,
- приращение энтропии газа ΔS_m .

2.139. Доказать, что внутренняя энергия U , энтропия S и свободная энергия F смеси двух идеальных газов равны сумме соответствующих величин отдельных компонент смеси.

С этой целью рассмотреть процесс разделения смеси, содержащей ν_1 молей компоненты 1 и ν_2 молей компоненты 2. Поместить смесь в сосуд, состоящий из двух вставленных друг в друга сосудов одинакового объема V (рис. 2.16). Дно сосуда 1 свободно пропускает молекулы 2 и непроницаемо для молекул 1. Крышка сосуда 2 свободно пропускает молекулы 1 и непроницаема для молекул 2. Вначале сосуды полностью вдвинуты друг в друга и в их общем объеме V содержится газовая смесь. Стенки сосудов не пропускают тепло. Очень медленно выдвигая сосуд 2 из сосуда 1, можно осуществить обратимое адиабатическое разделение компонент. Требуется доказать, что U , S и F системы при этом не изменяются. Тем самым будет доказано высказанное вначале утверждение.

2.140. Имеется сосуд, разделенный перегородкой на две части. В одной из них находится ν_1 молей одного газа,

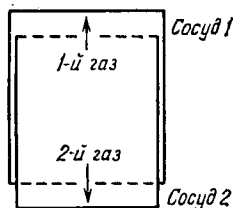


Рис. 2.16

в другой — v_2 молей другого газа. Оба газа идеальные. Температура и давление обоих газов одинаковы. Перегородку убирают и газы полностью перемешиваются. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, найти приращение энтропии ΔS .

2.141. Решить задачу 2.140, рассмотрев изотермический процесс разделения смеси посредством перемещения

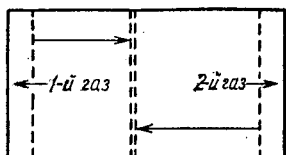


Рис. 2.17

двух перегородок, одна из которых свободно пропускает молекулы 1 и непроницаема для молекул 2, другая свободно пропускает молекулы 2 и непроницаема для молекул 1. Первоначально первая перегородка помещается у левого дна сосуда, вторая — у правого (рис. 2.17). Затем перегородки перемещаются

поочередно в положение, при котором давление в обеих частях сосуда будет одинаковым.

2.142. При $t=25^\circ\text{C}$ и $p=1013$ гПа энтропия моля азота равна 192 Дж/(моль $\cdot$ К), а моля кислорода 205 Дж/(моль $\cdot$ К). Полагая, что в воздухе на одну молекулу кислорода приходится четыре молекулы азота, и пренебрегая остальными компонентами воздуха, найти:

а) энтропию S_m моля воздуха при 25°C ,

б) зависимость S_m от T в области температур, в которой воздух подчиняется законам идеального газа.

В обоих случаях $p=1013$ гПа.

2.143. Температура в комнате объема $V=50,0$ м³ поднялась от $15,0$ до $20,0^\circ\text{C}$. Используя результат предыдущей задачи, определить приращение энтропии ΔS воздуха, содержащегося в комнате. Атмосферное давление предполагается неизменным и равным $p=1013$ гПа.

2.144. Некоторый идеальный газ совершает при температуре $T=300$ К обратимый изотермический процесс, в ходе которого над газом совершается работа $A'=-900$ Дж. Найти приращение энтропии ΔS и приращение свободной энергии ΔF газа.

2.145. Переход некоторой термодинамической системы из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 сопровождается получением количества теплоты Q и приращением свободной энергии ΔF . Температура и энтропия изменяются от значений T_1, S_1 до T_2, S_2 . Какую работу A совершает при этом система?

2.146. В результате обратимого адиабатического расширения температура моля одноатомного идеального газа

понижается на $\Delta T = 10,0$ К. Энтропия газа $S_m = 20,0$ Дж/(моль · К). Найти приращение свободной энергии газа ΔF_m .

2.147. Найти приращение свободной энергии газа ΔF в ходе процесса 1—2, описанного в задаче 2.130.

2.6. Циклы

2.148. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из двух изотерм и двух изохор (рис. 2.18).

1. Как ведет себя: а) внутренняя энергия, б) энтропия на различных участках цикла?

2. На каких участках: а) совершаемая газом работа A , б) получаемое газом количество теплоты Q больше (меньше) нуля?

2.149. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из двух адиабат и двух изобар (рис. 2.19).

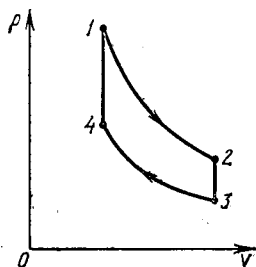


Рис. 2.18

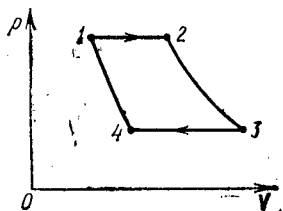


Рис. 2.19

1. Как ведет себя: а) внутренняя энергия, б) энтропия на различных участках цикла?

2. На каких участках: а) совершаемая газом работа A , б) получаемое газом количество теплоты Q больше (меньше) нуля?

2.150. Изобразить на диаграмме T, V совершаемый идеальным газом цикл, состоящий из: а) двух изотерм и двух изобар, б) двух изобар и двух изохор.

2.151. Изобразить на диаграмме T, p совершаемый идеальным газом цикл, состоящий из: а) двух изотерм и двух изохор, б) двух изохор и двух изобар.

2.152. Изобразить на диаграмме T, S совершаемый идеальным газом цикл, состоящий из двух изобар и двух изохор.

2.153. Круговой процесс состоит из изотермы, адиабаты и двух изобар (рис. 2.20). Изобразить этот процесс на диаграмме T, S .

2.154. В ходе цикла Карно рабочее вещество получает от нагревателя количество теплоты $Q_1=300$ кДж. Температуры нагревателя и холодильника равны соответственно $T_1=450$ К и $T_2=280$ К. Определить работу A , совершаемую рабочим веществом за цикл.

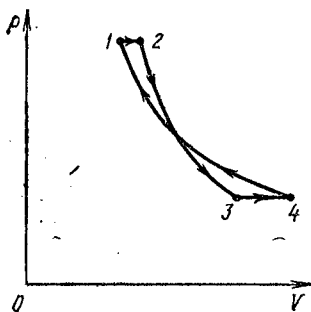


Рис. 2.20

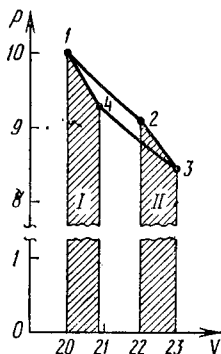


Рис. 2.21

2.155. На рис. 2.21 изображен на диаграмме p, V цикл Карно для идеального газа. Какая из заштрихованных площадей — I или II — больше?

2.156. На рис. 2.22 показан цикл Карно. Рабочим веществом служит двухатомный идеальный газ. Объем газа в состояниях 1 и 2 равен соответственно $V_1=1,00 \cdot 10^{-2}$ м³ и $V_2=2,00 \cdot 10^{-2}$ м³. Работа, совершаемая за цикл, $A=7,2$ кДж. Вычислить работу A_{41} , совершаемую газом в ходе процесса 4—1. Колебательная степень свободы молекул не возбуждается.

2.157. Идеальный газ (γ известно) совершает круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух изохор. Изотермические процессы протекают при температурах T_1 и T_2 ($T_1>T_2$), изохорические — при объемах V_1 и V_2 (V_2 в e раз больше, чем V_1). Найти к. п. д. η цикла.

2.158. Идеальный газ (γ известно) совершает круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух изобар. Изотермические процессы протекают при температурах T_1 и T_2 ($T_1>T_2$), изобарические — при давлениях p_1 и p_2 (p_2 в e раз больше, чем p_1). Найти к. п. д. η цикла.

2.159. Приняв в качестве рабочего вещества идеальный газ ($\gamma=1,40$) и положив температуры равными $T_1=500$ К и $T_2=300$ К, вычислить к. п. д. η цикла:

а) Карно,

б) рассмотренного в задаче 2.157,

в) рассмотренного в задаче 2.158.

2.160. Доказать, что к. п. д. любого обратимого цикла, совершающегося в интервале температур от T_1 до T_2 ($T_1 > T_2$), меньше к. п. д. соответствующего цикла Карно.

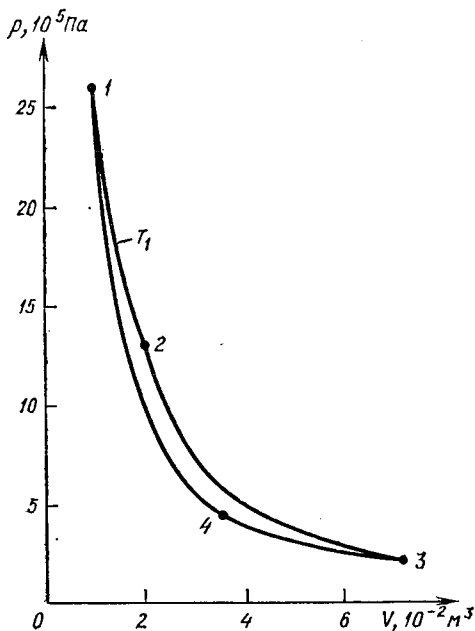


Рис. 2.22

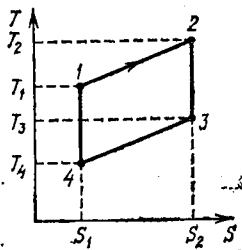


Рис. 2.23

У к а з а н и е. Сопоставить циклы на диаграмме T, S .

2.161. Обратимый цикл, совершаемый некоторой термодинамической системой, имеет на диаграмме T, S вид, показанный на рис. 2.23. Найти к. п. д. η цикла.

2.7. Уравнение Ван-дер-Ваальса

2.162. Моль азота охлажден до температуры -100°C . Определить давление p , оказываемое газом на стенки сосуда, если объем V , занимаемый газом, равен: а) 1,00 л,

б) 0,100 л. Сравнить p с давлением $p_{ид}$, которое имел бы азот, если бы сохранил при рассматриваемых условиях свойства идеального газа.

2.163. Решить предыдущую задачу для двух молей азота и тех же значений температуры и объема. Сравнить полученный результат с ответом к предыдущей задаче.

2.164. Для определения постоянных Ван-дер-Ваальса некоторое количество газа, занимающее при $T_1=300$ К и $p_1=1,00 \cdot 10^7$ Па объем $V_1=6,79 \cdot 10^{-4}$ м³, было изотермически сжато до объема $V_2=4,00 \cdot 10^{-4}$ м³, в результате чего давление возросло до значения $p_2=1,65 \cdot 10^7$ Па. Затем газ был охлажден при неизменном объеме до температуры $T_2=200$ К. Давление при этом уменьшилось до значения $p_3=0,819 \cdot 10^7$ Па. Воспользовавшись этими данными, вычислить постоянные a и b для моля газа.

2.165. Моль азота расширяется адиабатически в пустоту, в результате чего объем газа увеличивается от значения $V_1=1,00$ л до $V_2=10,0$ л. Определить приращение температуры газа ΔT .

2.166. Два моля водорода расширяются в пустоту, в результате чего объем газа увеличивается от значения $V_1=2,00$ л до $V_2=10,0$ л. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы температура его не изменилась?

2.167. Получить выражение для работы A , совершаемой молем ван-дер-ваальсовского газа при изотермическом расширении от объема V_1 до объема V_2 . Температура газа T , постоянные Ван-дер-Ваальса a и b . Сравнить полученное выражение с аналогичным выражением для идеального газа.

2.168. Моль кислорода, занимавший первоначально объем $V_1=1,000$ л при температуре -100 °С, расширился изотермически до объема $V_2=10,00$ л. Найти:

а) приращение внутренней энергии газа ΔU_m ,

б) работу A , совершенную газом (сравнить A с работой $A_{ид}$, вычисленной по формуле для идеального газа).

в) количество теплоты Q , полученное газом.

2.169. Получить для ван-дер-ваальсовского газа уравнение адиабаты в переменных V и T , а также в переменных V и p . Сравнить полученные уравнения с аналогичными уравнениями для идеального газа.

2.170. а) Определить для ван-дер-ваальсовского газа разность молярных теплоемкостей $C_p - C_v$.

б) Вычислить эту разность для азота в объеме $V=1,00$ л при температуре $t=-100$ °С (выразить ее через R).

2.171. Вычислить по формуле, полученной в задаче 2.170, разность $C_p - C_v$ для кислорода при $p = 5,00 \times 10^7$ Па и $T = 273$ К. При этих условиях моль кислорода занимает объем $V = 0,564 \cdot 10^{-4}$ м³.

2.172. Пропуская поток газа через пористую перегородку, установленную в теплоизолированной трубе, Джоуль и Томсон наблюдали изменение температуры газа, обусловленное отклонением газа от идеальности (это явление получило название «эффект Джоуля — Томсона»).

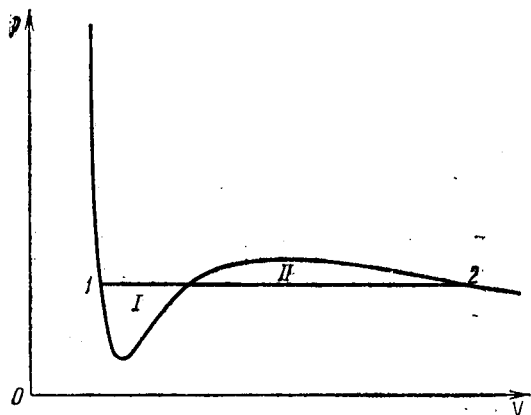


Рис. 2.24

Пусть перед перегородкой состояние газа характеризуется молярным объемом V_1 и температурой T_1 . За перегородкой температура газа равна T_2 . Считая процесс адиабатическим и применив первое начало термодинамики к порции газа, проходящей через перегородку, найти приращение температуры газа $\Delta T = T_2 - T_1$ (выразить ΔT через V_1 и T_1). До расширения газ считать ван-дер-ваальсовским, после расширения — идеальным.

2.173. Что будет происходить с газом вследствие эффекта Джоуля — Томсона (см. задачу 2.172), если $T_1 > 2a/bR$?

2.174. Вычислить приращение температуры ΔT водорода вследствие эффекта Джоуля — Томсона (см. задачу 2.172), получающееся в случае, если $p_1 = 10,0 \cdot 10^5$ Па и T_1 равна: а) 273, б) 210,5, в) 173 К. Значения V_1 можно определять по уравнению состояния идеального газа.

2.175. Вычислить приращение температуры ΔT азота вследствие эффекта Джоуля — Томсона (см. задачу 2.172),

получающееся в случае, если $p_1 = 10,0 \cdot 10^5$ Па и T_1 равна: а) 0°C , б) 100°C . Значения V_1 можно определять по уравнению состояния идеального газа.

2.176. Найти выражение для энтропии моля ван-дер-ваальсовского газа (в зависимости от T и V). Сравнить полученное выражение с аналогичной формулой для идеального газа.

2.177. Сосуд объема V делится на две равные части перегородкой с закрытым пробкой отверстием. В одной из половин сосуда содержится моль ван-дер-ваальсовского газа (с известными a , b и C_V), имеющий температуру T . Пробку удаляют, и газ распространяется на весь объем. Считая процесс расширения адиабатическим, определить:

- приращение внутренней энергии газа ΔU_m ,
- приращение температуры газа ΔT ,
- работу $A_{\text{мол}}$ сил межмолекулярного притяжения,
- приращение энтропии газа ΔS_m .

2.178. Доказать, что площади I и II , заключенные между участками изотермы Ван-дер-Ваальса и прямым участком 1—2 реальной изотермы (рис. 2.24), одинаковы.

2.8. Жидкости и кристаллы

2.179. Может ли: а) неоднородное тело быть изотропным, б) однородное тело быть анизотропным?

2.180. Кристаллы CsCl имеют кубическую объемно-центрированную решетку. В вершинах кристаллической ячейки с ребром, равным $0,41$ нм, находятся ионы хлора, в центре ячейки — ион цезия. Найти молярный объем V_m и плотность ρ кристаллов.

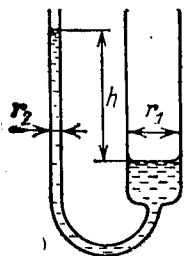


Рис. 2.25

2.181. Используя закон Дюлонга и Пти, определить удельную теплоемкость c : а) меди, б) алюминия.

2.182. Сферическая капля ртути была разделена на: а) 10, б) 100, в) 1000 одинаковых капель. Как изменилось при этом капиллярное давление внутри капель?

2.183. U-образный сосуд состоит из сообщающихся широкой и узкой трубок (рис. 2.25). При налипании в сосуд воды между уровнями ее в узкой и широкой трубках устанавливается разность высот $h = 8,0$ см. Внутренний радиус широкой трубки $r_1 = 5,0$ мм. Считая смачивание полным, найти радиус узкой трубки r_2 .

2.184. В стеклянную трубку с внутренним диаметром $d_1=20,00$ мм вставлена коаксиально стеклянная палочка диаметра $d_2=19,00$ мм. Считая смачивание полным, определить высоту h капиллярного поднятия воды в кольцевом зазоре между трубкой и палочкой.

2.185. Капля ртути объема $V=22,5$ мм³ помещена между двумя расположенными горизонтально стеклянными пластинками. С какой силой F нужно прижимать друг к другу пластинки, чтобы установить между ними зазор $a=3,00$ мкм? Несмачивание ртутью пластин считать полным.

2.186. По краю одной из круглых стеклянных пластин имеется кольцевой выступ высоты $h=2,00$ мкм. Между пластинами помещена капля воды объема $V=15,0$ мм³, после чего пластины прижаты друг к другу (рис. 2.26). Какую силу F нужно приложить к пластинам, чтобы оторвать их друг от друга. Смачивание считать полным.

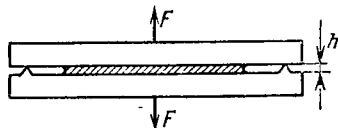


Рис. 2.26

2.187. Две вертикальные параллельные друг другу стеклянные пластины погружены частично в воду. Зазор между пластинами $a=0,500$ мм, размер пластин по горизонтали $l=10,0$ см. Считая смачивание полным, определить:

а) высоту h , на которую поднимается вода в зазоре,
б) силу F , с которой пластины притягиваются друг к другу.

2.188. Две стеклянные пластины сложены так, что зазор между ними образует вертикально расположенный клин с очень малым углом φ при вершине. Пластины погружают частично в жидкость плотности ρ . Считая смачивание полным, определить уравнение кривой, по которой пересекается каждая из пластин с поверхностью жидкости в зазоре. Ось y направить вверх по ребру клина, ось x — горизонтально вдоль внутренней поверхности пластины, расположив эту ось на уровне жидкости вне клина. Поверхностное натяжение жидкости равно α .

2.189. После покрытия слоем парафина радиус отверстий решета стал равен $r=1,50$ мм. Приняв во внимание, что вода не смачивает парафин, определить высоту h слоя воды, который можно носить в решете так, чтобы вода не пролилась через отверстия.

2.190. Определить, на какой глубине h образуются пузырьки газа в воде, если при всплытии пузырьков их

радиус увеличивается в $\eta=1,10$ раза, достигая на поверхности значения $r=1,00$ мкм. Атмосферное давление $p=1,00 \cdot 10^5$ Па. Считать, что температура газа в пузырьке во время всплытия не изменяется.

2.9. Фазовые равновесия и превращения

2.191. У каких веществ равновесный переход из твердой фазы в газообразную происходит при атмосферном давлении, минуя жидкую фазу?

2.192. Для области температур, в которой удельным объемом жидкости можно пренебречь по сравнению с удельным объемом насыщенного пара, найти зависимость давления насыщенных паров $p_{н.п}$ от температуры T . Удельную теплоту парообразования q считать не зависящей от температуры.

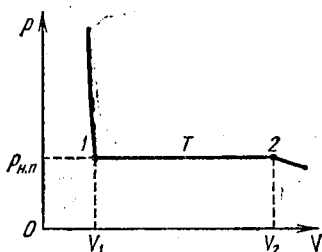


Рис. 2.27

2.193. На рис. 2.27 дана изотерма некоторого вещества. Горизонтальный участок изотермы соответствует двухфазным состояниям «жидкость + насыщенный пар». Известны: температура T , давление насыщенного пара $p_{н.п}$ при этой температуре, масса вещества m , удельная теплота испарения q_{12} , удельные объемы жидкости V_1 и насыщенного пара V_2 . Найти:

а) работу A_{12} , совершенную веществом при переходе из состояния 1 в состояние 2,
б) количество теплоты Q_{12} , полученное при этом переходе,

в) приращение внутренней энергии $U_2 - U_1$,

г) приращение энтропии $S_2 - S_1$,

д) приращение свободной энергии $F_2 - F_1$.

2.194. На рис. 2.28 показана точка А на кривой упругости насыщенного пара некоторого вещества. Что соответствует этой точке на диаграмме p, V ?

2.195. На рис. 2.29 показан участок изотермы, отвечающий переходу некоторого вещества из кристаллического в жидкое состояние. Что соответствует этому участку на диаграмме p, T ?

2,196. На рис. 2.30 а изображены три изотермы и изобара,

а) Изобразить эти линии на диаграмме p, T , приведенной на рис. 2.30 б.

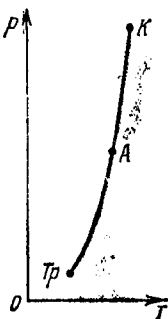


Рис. 2.28

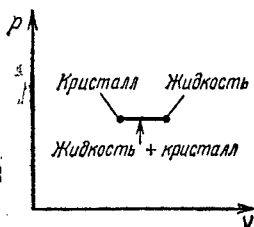


Рис. 2.29

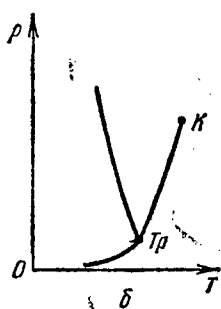
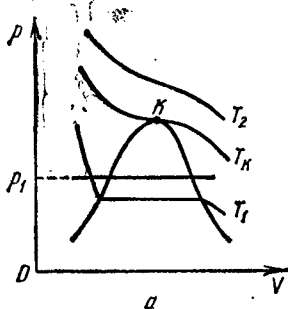


Рис. 2.30

б) Что соответствует на диаграмме p, T области, расположенной под колоколообразной кривой на рис. 2.30 а?

2.10. Физическая кинетика

2.197. Зазор между двумя очень длинными коаксиальными цилиндрическими поверхностями заполнен однородным изотропным веществом. Радиусы поверхностей: $r_1 = 5,00$ см, $r_2 = 7,00$ см. Внутренняя поверхность поддерживается при $T_1 = 290$ К, наружная поверхность — при $T_2 = 320$ К. Найти для средней части цилиндров зависимость температуры T от расстояния r до оси.

2.198. Зазор между двумя концентрическими сферами заполнен однородным изотропным веществом. Радиусы

сфер равны: $r_1=10,0$ см и $r_2=20,0$ см. Поверхность внутренней сферы поддерживается при температуре $T_1=400,0$ К, поверхность внешней сферы — при температуре $T_2=300,0$ К. В этих условиях от внутренней сферы к внешней течет установившийся тепловой поток $q=1,000$ кВт. Считая теплопроводность κ вещества в зазоре не зависящей от температуры, определить:

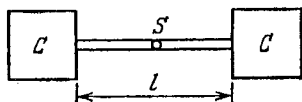


Рис. 2.31

- значение κ ,
- температуру в зазоре $T(r)$ как функцию расстояния r от центра сфер.

2.199. Два тела, теплоемкость каждого из которых равна $C=500$ Дж/К, соединены стержнем длины $l=40,0$ см с площадью поперечного сечения $S=3,00$ см² (рис. 2.31). Теплопроводность стержня не зависит от температуры и равна $\kappa=20,0$ Вт/(м·К). Тела и стержень образуют теплоизолированную систему. В начальный момент температуры тел отличаются друг от друга. Найти время τ , по истечении которого разность температур тел уменьшится в $\eta=2$ раза. Теплоемкостью стержня и неоднородностью температуры в пределах каждого из тел пренебречь.

2.200. Кислород находится при температуре $T=300$ К под давлением $p=1,00 \cdot 10^5$ Па. Определить:

- среднюю длину свободного пробега молекул λ ,
- среднее время свободного пробега молекул τ .

Сравнить λ со средним расстоянием между молекулами $\langle a \rangle$ (см. задачу 2.6).

2.201. Найти число ν столкновений за секунду между молекулами азота, содержащимися в 1 м³ при $p=1,00 \cdot 10^5$ Па и $T=300$ К.

2.202. Теплопроводность гелия при $t=0$ °С и $p=1013$ гПа равна $\kappa=0,143$ Вт/(м·К). Считая числовой коэффициент в выражениях для D , κ и η равным $1/3$, оценить коэффициент самодиффузии D и вязкость η гелия при тех же условиях. Сравнить полученные значения с табличными (полученными экспериментально).

2.203. Коэффициент самодиффузии кислорода при $t=0$ °С и $p=1013$ гПа равен $D=1,8 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Оценить среднюю длину свободного пробега λ молекул кислорода при тех же условиях. Сравнить λ со средним расстоянием $\langle a \rangle$ между молекулами (см. задачу 2.6).

2.204. Вычислить коэффициент D_{12} взаимной диффузии водорода и азота при температуре $T=300$ К и давлении $p=1,00 \cdot 10^5$ Па.

2.205. Между двумя параллельными плоскими очень большими пластинами имеется зазор $a=1,00$ см, заполненный аргоном. Между пластинами поддерживается разность температур $\Delta T=1,00$ К ($T_1=299,5$ К, $T_2=300,5$ К). Оценить плотность теплового потока q/S в случае, если давление аргона равно: а) $1,00 \cdot 10^5$ Па, б) $1,00 \cdot 10^4$ Па, в) $1,00 \cdot 10^{-1}$ Па, г) $1,00 \cdot 10^{-2}$ Па.

Примечание. Следует иметь в виду, что формула $\kappa = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda c_v$ дает лишь порядок величины теплопроводности газов. Числовое значение κ , определенное по этой формуле, может отличаться от экспериментального в несколько раз.

2.206. В термос налита вода массы $m=1,00$ кг. Внутренняя поверхность баллона термоса $S=700$ см². Зазор между внутренним и внешним сосудами баллона $a=5,00$ мм. Давление газа в зазоре $p=0,100$ Па. Полагая, что отвод тепла от содержимого термоса осуществляется только за счет теплопроводности газа в зазоре, определить, за какое примерно время τ температура воды уменьшится от 90 до 80 °С. Температуру вне термоса принять равной 20 °С.

2.207. Горизонтально расположенный диск радиуса $R=0,200$ м подвешен на тонкой упругой нити над таким же укрепленным на вертикальной оси диском. Коэффициент кручения нити (отношение приложенного вращающего момента к углу закручивания) $\chi=3,62 \cdot 10^{-4}$ Н·м/рад. Зазор между дисками $a=5,00$ мм. На какой угол α закрутится нить, если нижний диск привести во вращение с угловой скоростью $\omega=20,0$ рад/с?

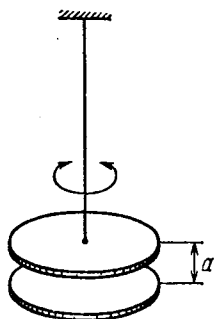


Рис. 2.32

2.208. Один из способов измерения вязкости газов заключается в наблюдении скорости затухания крутильных колебаний горизонтального диска, подвешенного на тонкой упругой нити над таким же неподвижным диском (рис. 2.32). Получить формулу, связывающую вязкость η газа, находящегося между дисками, с массой диска m , радиусом диска R , зазором a и коэффициентом затухания колебаний β . Считать, что трения в подвесе нет.

2.209. В тонкой перегородке, разделяющей сосуд на две части, имеется круглое отверстие радиуса $r=1,00$ мм. В сосуде находится гелий под давлением $p=1,00$ Па. Стенки сосуда поддерживаются при температуре $T=300$ К.

Определить количество ν молекул, пролетающих через отверстие в единицу времени в каждом из направлений.

2.210. Газ, заключенный в сосуде объема V , вытекает в вакуум через отверстие, диаметр которого много меньше длины свободного пробега молекул. Площадь отверстия равна S . Процесс протекает изотермически при температуре T . Найти время τ , за которое давление газа в сосуде уменьшается в η раз. Молярная масса газа равна M .

2.211. Два сосуда разделены тонкой не проводящей тепло прокладкой. Стенки сосуда 1 поддерживаются при температуре $T_1=300$ К, сосуда 2 — при температуре $T_2=500$ К. Сосуды сообщаются через отверстие, размеры которого в 15 раз меньше средней длины свободного пробега молекул газа, заполняющего сосуды. Установившееся давление газа в сосуде 1 равно $p_1=0,100$ Па. Чему равно давление газа p_2 в сосуде 2?

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Обозначения

A — работа
 A_r — относительная атомная масса
 a — радиус
 B — магнитная индукция
 b — радиус, расстояние
 C — электрическая емкость
 C_a — циркуляция вектора a
 c — скорость света в вакууме
 D — электрическое смещение
 d — диаметр, расстояние, толщина
 E — напряженность электрического поля
 $\mathcal{E}$ — электродвижущая сила, действующее значение э. д. с.
 e — элементарный заряд
 F — сила
 H — напряженность магнитного поля
 I — сила тока
 J — намагниченность
 j — плотность тока
 k — коэффициент кручения, коэффициент трения
 L — индуктивность
 L_{12} — взаимная индуктивность
 l — длина, расстояние
 M — момент импульса
 m — масса
 m_e — масса электрона
 n — число витков на единицу длины, частота вращения
 P — поляризованность
 P — мощность
 P_r — остаточная поляризованность

p — электрический дипольный момент, импульс
 p_m — магнитный момент
 Q — добротность контура, количество теплоты
 q — электрический заряд
 R — активное сопротивление, радиус
 r — радиус-вектор
 r — радиус, расстояние
 S — площадь, поверхность
 s — путь
 T — период колебаний
 t — время
 U — напряжение, разность потенциалов
 V — объем
 W — энергия
 w — ускорение
 w — плотность энергии
 α — угол
 δ — относительная погрешность, плотность (масса единицы объема)
 ε — диэлектрическая проницаемость
 ϑ — полярный угол
 λ — линейная плотность заряда
 μ — магнитная проницаемость
 ν — частота
 ρ — объемная плотность заряда, удельное сопротивление
 σ — поверхностная плотность заряда
 σ_p — прочность на разрыв
 τ — время
 Φ_a — поток вектора a
 φ — потенциал
 ω — круговая частота, угловая скорость

3.1. Электрическое поле в вакууме

3.1. С какой относительной погрешностью δ надо измерять заряды порядка 10^{-9} Кл, чтобы обнаружить дискретную природу заряда?

3.2. Некоторый заряд имеет в системе отсчета K величину q . Какова будет величина этого заряда q' в системе отсчета K' , движущейся относительно K со скоростью u_0 ?

3.3. Чему равен суммарный заряд q моля электронов?

3.4. Найти суммарный заряд q атомных ядер меди, содержащихся в 1 см^3 .

3.5. Сопоставить силу кулоновского взаимодействия F_e двух электронов с силой их гравитационного взаимодействия F_g .

3.6. Вычислить ускорение w , сообщаемое одним электроном другому, находящемуся от первого на расстоянии $r=1,00 \text{ мм}$.

3.7. Какую массу m_p должен был бы иметь протон для того, чтобы сила электростатического отталкивания двух протонов уравнивалась силой их гравитационного притяжения?

3.8. Какие заряды q_c и q_z (пропорциональные массам m_c и m_z) нужно было бы сообщить Солнцу и Земле для того, чтобы сила кулоновского взаимодействия между ними оказалась равной силе гравитационного взаимодействия?

3.9. При каком одинаковом для Солнца и Земли удельном заряде q/m сила кулоновского взаимодействия между ними оказалась бы равной силе гравитационного взаимодействия? Сравнить полученное значение q/m с удельным зарядом e/m_e электрона.

3.10. Имеются две системы точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{N_1}$ и $q'_1, q'_2, \dots, q'_k, \dots, q'_{N_2}$, закрепленных в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_{N_1}$ и $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_k, \dots, \mathbf{r}'_{N_2}$. Найти силу $\mathbf{F}$, с которой система зарядов q'_k действует на систему зарядов q_i .

3.11. По телу объема V распределен заряд q с плотностью $\rho=\rho(\mathbf{r})$; по телу объема V' распределен другой заряд q' с плотностью $\rho'=\rho'(\mathbf{r}')$. Написать выражение для силы $\mathbf{F}$, с которой заряд q' действует на заряд q .

3.12. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a помещаются точечные одинаковые по модулю заряды q . Найти потенциал ϕ и напряженность поля $\mathbf{E}$ в центре шестиугольника при условии, что:

а) знак всех зарядов одинаков,

б) знаки соседних зарядов противоположны.

3.13. N точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N$ расположены в вакууме в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N$. Написать выражения для потенциала φ и напряженности поля $\mathbf{E}$ в точке, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}$.

3.14. По области V распределен заряд с плотностью $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Написать выражения для потенциала φ и напряженности поля $\mathbf{E}$ в точке, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}'$.

3.15. Найти потенциал φ и напряженность поля $\mathbf{E}$ в центре сферы радиуса R , заряженной однородно с поверхностной плотностью σ .

3.16. Заряд $q = 2,00$ мкКл распределен равномерно по объему шара радиуса $R = 40,0$ мм. Найти потенциал φ и напряженность поля $\mathbf{E}$ в центре шара.

3.17. Найти потенциал φ и модуль E напряженности поля в центре полусферы радиуса R , заряженной однородно с поверхностной плотностью σ .

3.18. Сфера радиуса R с центром в начале координат заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = kz$, где k — константа, z — координата соответствующей точки сферы. Найти для центра сферы:

- а) потенциал φ и напряженность поля $\mathbf{E}$,
- б) значения производных $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ и $\partial\varphi/\partial z$.

3.19. Что представляют собой эквипотенциальные поверхности однородного электрического поля?

3.20. Напряженность некоторого поля имеет вид $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$, где E — константа. Написать выражение для потенциала поля φ .

3.21. Электростатическое поле имеет вид $\mathbf{E} = E_1\mathbf{e}_x + E_2\mathbf{e}_y + E_3\mathbf{e}_z$, где E_1, E_2, E_3 — константы.

- а) Является ли это поле однородным?
- б) Написать выражение для φ .

3.22. Напряженность некоторого электростатического поля определяется выражением: $\mathbf{E} = (a/r^{3/2})\mathbf{e}_r$, где a — константа.

- а) Является ли это поле однородным?
- б) Найти потенциал этого поля $\varphi(r)$.

3.23. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид: $\varphi = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$.

- а) Что можно сказать о характере поля?
- б) Найти модуль E напряженности поля в точке x, y, z .

3.24. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид: $\varphi = \varphi(r, \vartheta)$, где r — расстояние от начала координат, ϑ — полярный угол.

- а) Что можно сказать о характере поля?

б) Найти модуль E напряженности поля в точке r , ϑ .

3.25. Потенциал поля, создаваемого некоторой системой зарядов, имеет вид: $\varphi = a(x^2 + y^2) + bz^2$, где a и b — положительные константы.

а) Найти напряженность поля E и ее модуль E .

б) Какую форму имеют эквипотенциальные поверхности?

в) Какую форму имеют поверхности, для которых $E = \text{const}$?

3.26. Потенциал поля, создаваемого некоторой системой зарядов, имеет вид: $\varphi = a(x^2 + y^2) - bz^2$, где a и b — положительные константы.

Ответить на те же вопросы, что и в задаче 3.25.

3.27. Находящийся в вакууме очень тонкий прямой стержень длины $2a$ заряжен с одинаковой всюду линейной плотностью λ . Для точек, лежащих на прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его центр, найти модуль E напряженности поля как функцию расстояния r от центра стержня.

3.28. Для стержня из задачи 3.27 найти потенциал φ и модуль E напряженности поля в точках, лежащих на оси стержня вне его, как функцию расстояния r от центра стержня. Исследовать случай $r \gg a$.

3.29. Воспользовавшись ответом к задаче 3.27, получить выражение для модуля $E(r)$ напряженности поля бесконечной прямой нити, заряженной однородно с линейной плотностью λ (r — расстояние от оси нити).

3.30. По тонкому проволочному кольцу радиуса $r = 60,0$ мм равномерно распределен заряд $q = 20,0$ нКл.

а) Приняв ось кольца за ось x , найти потенциал φ и напряженность поля E на оси кольца как функцию x (начало отсчета x поместить в центр кольца).

б) Исследовать случаи: $x = 0$ и $|x| \gg r$.

в) Определить максимальное значение модуля напряженности E_m и координаты x_m точек, в которых оно наблюдается.

г) Построить примерные графики функций $\varphi(x)$ и $E_x(x)$. Выяснить, чем для кривой $\varphi(x)$ являются точки x_m .

Напряженность поля вычислить двумя способами: 1) исходя из выражения для напряженности поля точечного заряда и принципа суперпозиции полей, 2) исходя из выражения для потенциала. Сравнить оба способа вычислений.

3.31. По круглой очень тонкой пластинке радиуса $r = 0,100$ м равномерно распределен заряд $q = 1,00$ мкКл. Приняв ось пластинки за ось x ,

а) найти φ и E_x для точек, лежащих на оси, как функции x ; исследовать полученные выражения для $|x| \gg r$,

б) вычислить φ и E_x в точке $x=100$ мм.

3.32. Очень тонкая пластинка имеет форму кольца с внутренним радиусом a и внешним радиусом b . По пластинке равномерно распределен заряд q . Приняв ось пластинки за ось x , найти φ и E_x на оси пластинки как функции x . Исследовать случай $|x| \gg b$.

3.33. Воспользовавшись результатом задачи 3.31, получить выражение для E_x поля бесконечной плоскости, заряженной однородно с плотностью σ (ось x перпендикулярна к плоскости).

3.34. В задаче 3.33 для напряженности поля, создаваемого бесконечной однородно заряженной плоскостью, получено выражение $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Возьмем точку P , отстоящую от плоскости на расстояние b (рис. 3.1). Проведем вокруг основания перпендикуляра, опущенного на плоскость из точки P , окружность радиуса a . Требуется найти значение a , при котором напряженность, создаваемая в P зарядами, расположенными внутри окружности, составляет половину полной напряженности; определить также r и ϑ , соответствующие этому значению a .

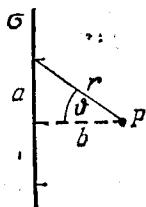


Рис. 3.1

3.35. Имеется плоский конденсатор с круглыми пластинами радиуса r , отстоящими друг от друга на расстояние $2a$ ($a \ll r$). Пластинам сообщены одинаковые по модулю разноименные заряды. Ось, проходящую через центры пластин, обозначим буквой x . Начало координат поместим в центр конденсатора. Полагая, что заряды распределены по пластинам равномерно с плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$, исследовать напряженность поля E в точках, лежащих на оси x . С этой целью найти:

а) E_x как функцию x ,

б) $E_x(0)$, т. е. E_x в центре конденсатора,

в) $E_x(a-0)$, т. е. E_x в точке с координатой $x=a-\delta$ ($\delta \rightarrow 0$),

г) $E_x(a+0)$, т. е. E_x в точке с координатой $x=a+\delta$ ($\delta \rightarrow 0$),

д) E_x как функцию x в точках, для которых $|x| \gg r$.

Толщиной пластин пренебречь.

3.36. Найти потенциал φ и модуль E напряженности поля диполя как функции r и ϑ (r — расстояние от центра диполя, ϑ — угол между осью диполя и направлением от

центра диполя к данной точке). Электрический момент диполя равен p .

3.37. Каким свойством обладает электрический дипольный момент p нейтральной системы зарядов?

3.38. Какую работу A нужно совершить, чтобы повернуть диполь с моментом p из положения по полю E в положение против поля?

3.39. Чему равен электрический дипольный момент p : а) квадруполь, б) октуполь?

3.40. Найти силу F взаимодействия двух молекул воды, отстоящих друг от друга на расстояние $l = 1,00 \cdot 10^{-8}$ м (10 нм). Электрический дипольный момент молекулы воды $p = 0,62 \cdot 10^{-29}$ Кл·м. Дипольные моменты молекул считать расположенными вдоль соединяющей молекулы прямой.

3.41. Два одинаковых заряда $+q$ помещаются в точках с координатами $(+a, 0)$ и $(-a, 0)$ (рис. 3.2). Найти электрический дипольный момент p этой системы относительно точек с координатами: а) $(-a, 0)$, б) $(+a, 0)$, в) $(0, 0)$, г) $(0, +a)$.

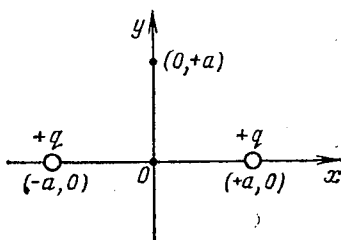


Рис. 3.2

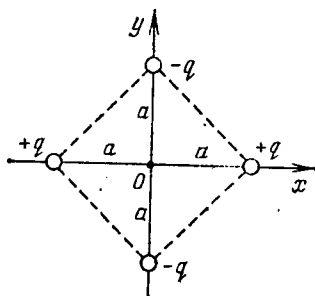


Рис. 3.3

3.42. Решить задачу 3.41, заменив в точке $(-a, 0)$ заряд $+q$ на $-q$.

3.43. На рис. 3.3 изображена система зарядов.

1. Как называется такая система?

2. Чему равен электрический дипольный момент p этой системы зарядов?

3. Найти приближенное значение потенциала ϕ в точке с координатами: а) $(r, 0)$, б) (r, r) , в) $(0, r)$. Во всех случаях $r \gg a$.

4. Сравнить потенциал ϕ в точке $(r, 0)$ с потенциалом ϕ' , который создавал бы в той же точке диполь, заряды которого $+q$ и $-q$ помещались бы в точках $(+a, 0)$ и $(-a, 0)$.

3.44. Заряды системы, изображенной на рис. 3.4, лежат в плоскости x, y и помещаются в вершинах шестиугольника со стороной $a=10,0$ мм; $q=1,00$ мкКл.

1. Найти электрический дипольный момент p системы, а также модуль p этого момента.

2. Определить в дипольном приближении потенциал φ , создаваемый системой в точке с координатами $x_1=y_1=1,00$ м.

3. Найти наибольшее $\varphi_{\max}$ и наименьшее $\varphi_{\min}$ значения потенциала на расстоянии $r=1,00$ м от центра системы.

3.45. Расположенный на оси x тонкий стержень длины $2a$

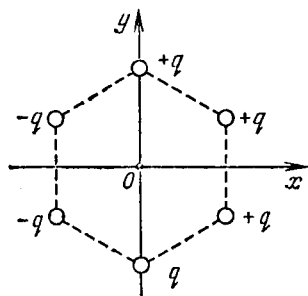


Рис. 3.4



Рис. 3.5

заряжен однородно с линейной плотностью λ (рис. 3.5). Найти электрический дипольный момент p стержня относительно: а) левого конца, б) середины, в) правого конца стержня.

3.46. Решить задачу 3.45 для случая, когда линейная плотность заряда изменяется по закону $\lambda=kx$ (k — константа, начало координат помещается в середине стержня).

3.47. По тонкому кольцу радиуса R распределен равномерно заряд $-q$. В центре кольца расположен точечный заряд $+q$.

1. Чему равен электрический дипольный момент p этой системы зарядов?

2. а) Приняв ось кольца за ось x , начало которой помещается в центре кольца, найти потенциал φ и напряженность поля E для точек оси, координата x которых по модулю много больше радиуса кольца ($|x| \gg R$); б) каким мультиполем создается данное электрическое поле?

3.48. Найти электрический дипольный момент p сферы из задачи 3.18.

3.49. Воспользовавшись результатом задачи 3.48, найти потенциал φ поля, создаваемого сферой из задачи 3.18 на расстояниях от центра сферы r , много больших радиуса сферы R ($r \gg R$).

3.50. У изображенной на рис. 3.6 системы зарядов e — элементарный заряд, $a=0,100$ нм.

1. Определить:

- а) дипольный момент $\mathbf{p}$ системы,
- б) приближенные значения потенциала φ и модуля напряженности поля E в точке, лежащей на оси системы и отстоящей от центра системы на расстояние $r=10,0$ нм,
- в) каким мультиполем обусловлены φ и E .

2. Сравнить полученные значения φ и E со значениями φ' и E' поля точечного заряда $-e$ на том же расстоянии r .

3.51. Вокруг заряда $+e$ движется равномерно по круговой траектории радиуса $a=0,100$ нм заряд $-e$. Центр траектории совпадает с зарядом $+e$. Найти:

а) среднее значение дипольного момента $\langle \mathbf{p} \rangle$ этой системы,

б) средние значения потенциала $\langle \varphi \rangle$ и модуля напряженности поля $\langle E \rangle$ в точке, лежащей в плоскости траектории на

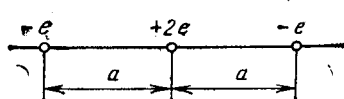


Рис. 3.6

расстоянии $r=10,0$ нм от заряда $+e$. Сравнить полученный результат с ответом к задаче 3.50, п. б).

3.52. Исходя из опреде-

ления дивергенции вектора $\mathbf{a}$

как предела отношения потока Φ_a через замкнутую поверхность к объему V , ограниченному этой поверхностью: $\nabla \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} (\Phi_a/V)$, определить дивергенцию следующих век-

торных полей:

а) $\mathbf{a} = f(x)\mathbf{e}_x$, где $f(x)$ — некоторая функция декартовой координаты x ,

б) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой определяется дивергенция,

в) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_r$, где $\mathbf{e}_r$ — орт радиус-вектора точки, в которой определяется дивергенция,

г) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{e}_r$, где $f(r)$ — некоторая функция модуля радиус-вектора.

3.53. Имеется однородное поле некоторого вектора $\mathbf{a}$. Определить:

а) дивергенцию этого поля $\nabla \mathbf{a}$,

б) поток вектора $\mathbf{a}$ через произвольную замкнутую поверхность Φ_a .

3.54. Воспользовавшись тем, что однородное векторное поле не имеет источников, доказать, что для произвольной замкнутой поверхности $\oint d\mathbf{S} = 0$.

3.55. Вычислить поток Φ_r радиус-вектора $\mathbf{r}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.

3.56. Чему равен интеграл $\oint_S \mathbf{r} dS$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой помещается элемент поверхности dS , S — произвольная замкнутая поверхность, ограничивающая объем V .

3.57. Известна функция $f(r)$, определяющая дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}$: $\nabla \mathbf{a} = f(r)$. Написать выражение для потока Φ_a вектора $\mathbf{a}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.

3.58. В области векторного поля $\mathbf{a}$ имеется воображаемая замкнутая поверхность S , внутри которой всюду $\nabla \mathbf{a} = 0$. Разделим S произвольно на две части S_1 и S_2 . В каком соотношении находятся потоки Φ_1 и Φ_2 вектора $\mathbf{a}$ через S_1 и S_2 ?

3.59. Имеется осесимметричное поле, создаваемое в вакууме тонкой бесконечной однородно заряженной нитью. Линейная плотность заряда равна λ . Имеется также воображаемая сферическая поверхность радиуса R с центром на нити. Найти:

а) проекцию на нормаль к поверхности напряженности поля E_n ,

б) поток Φ_E вектора $\mathbf{E}$ через поверхность,

3.60. Найти зависимость плотности зарядов ρ от декартовых координат x, y, z , при которой напряженность поля описывалась бы функцией $\mathbf{E} = 1x\mathbf{e}_x + 2y^2\mathbf{e}_y + 3z^3\mathbf{e}_z$.

3.61. Найти зависимость плотности зарядов ρ от модуля r радиус-вектора, при которой напряженность поля описывалась бы функцией $\mathbf{E} = A \exp(-\alpha r)\mathbf{e}_r$, где A и α — константы.

3.62. 1. Какая система зарядов может создать в вакууме поле с напряженностью $\mathbf{E} = \alpha \mathbf{r}$ (α — константа, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор)?

2. Чему равен для такого поля поток Φ_E вектора $\mathbf{E}$ через произвольную поверхность S , ограничивающую объем V ?

3.63. Исходя из определения проекции ротора вектора $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{n}$ как предела отношения циркуляции C_a по контуру, лежащему в плоскости, перпендикулярной к направлению $\mathbf{n}$, к ограниченной контуром поверхности S : $[\nabla \mathbf{a}]_{\text{пр } \mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} (C_a/S)$, определить ротор следующих векторных полей:

а) $\mathbf{a} = f(x)\mathbf{e}_x$, где $f(x)$ — некоторая функция декартовой координаты x ,

б) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой определяется ротор,

в) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_r$, где $\mathbf{e}_r$ — орт радиус-вектора точки, в которой определяется ротор,

г) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{e}_r$, где $f(r)$ — некоторая функция модуля радиус-вектора.

3.64. Воспользовавшись тем, что взятый по любому замкнутому контуру $\oint d\mathbf{l}$ равен нулю, доказать, что однородное векторное поле является безвихревым.

3.65. Может ли электростатическое поле иметь вид $\mathbf{E} = -a(y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y)$?

3.66. Для поля $\mathbf{E} = -a(y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y)$ вычислить:

а) ротор в точке с координатами (x, y, z) ,

б) циркуляцию C по окружности радиуса b , лежащей в плоскости x, y (с центром в произвольной точке); направление обхода образует с осью z праввинтовую систему.

3.67. Имеется бесконечная плоскость, заряженная однородно с плотностью σ . Ось x перпендикулярна к плоскости; начало отсчета x находится в точке пересечения оси с плоскостью.

а) Воспользовавшись теоремой Гаусса, найти выражение для E_x в точке с координатой x . Сравнить полученный результат с ответом к задаче 3.33.

б) Найти зависимость φ от x .

в) Можно ли отнормировать выражение для φ так, чтобы φ обращался в нуль на бесконечности?

3.68. Может ли поле вне разноименно и однородно заряженных параллельных бесконечных плоскостей быть отличным от нуля?

3.69. Две параллельные бесконечные плоскости заряжены: одна с плотностью $\sigma_1 = +4,42 \cdot 10^{-10}$ Кл/м², другая с плотностью $\sigma_2 = -8,84 \cdot 10^{-10}$ Кл/м² (рис. 3.7). Найти напряженность поля $\mathbf{E}$ для каждой из областей A, B и C .

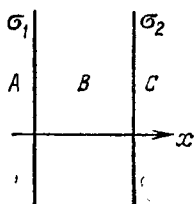


Рис. 3.7

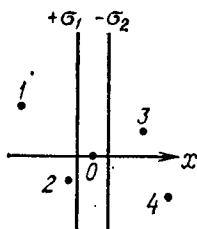


Рис. 3.8

3.70. Две параллельные бесконечные плоскости заряжены разноименно с разными по модулю плотностями $+\sigma_1$ и $-\sigma_2$. Абсциссы указанных на рис. 3.8 точек равны: $x_1 =$

$x_1 = -3,00$ м, $x_2 = -1,00$ м, $x_3 = +2,00$ м, $x_4 = +3,00$ м. Разность потенциалов между точками 2 и 1 равна $\varphi_2 - \varphi_1 = 400$ В.

а) Какая из плотностей ($+\sigma_1$ или $-\sigma_2$) больше по модулю?

б) Чему равна разность потенциалов $\varphi_4 - \varphi_3$?

3.71. Имеется бесконечная очень тонкая прямая нить, заряженная однородно с линейной плотностью λ . Воспользовавшись теоремой Гаусса, найти модуль напряженности поля E как функцию расстояния r от нити. Сравнить полученный результат с ответом к задаче 3.29.

3.72. Бесконечная тонкая прямая нить заряжена однородно с плотностью $\lambda = 2,00$ мкКл/м.

а) Найти E и φ как функции расстояния r от нити. Потенциал на расстоянии $r_0 = 1$ м положить равным нулю.

б) Вычислить E и φ для $r = 10,0$ м.

в) Можно ли отнормировать потенциал так, чтобы он обращался в нуль на бесконечности?

3.73. Электроды двухэлектродной лампы (диода) имеют форму нити радиуса $a = 0,100$ мм (катод) и коаксиального с ней цилиндра радиуса $b = 2,72$ мм (анод). На электроды подано напряжение $U = 100$ В. Найти модуль силы F_e , которую будет испытывать электрон, и силы F_m , которую будет испытывать молекула воды, находясь в точке, отстоящей от оси катода на расстояние $r = 1,00$ мм. Дипольный момент молекулы воды $p = 0,62 \cdot 10^{-29}$ Кл·м.

3.74. С какой силой F (на единицу длины) отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно длинные параллельные нити с одинаковой плотностью заряда $\lambda = 3,00$ мкКл/м, находящиеся на расстоянии $b = 20,0$ мм друг от друга? Какую работу A (на единицу длины) нужно совершить, чтобы сблизить нити до расстояния $a = 10,0$ мм?

3.75. Имеется сфера радиуса R , заряженная однородно с поверхностной плотностью σ .

а) Найти напряженность поля E в точке, отстоящей на расстояние r от центра сферы ($r < R$).

б) Какое заключение вытекает из ответа на п. а)?

в) Чему равен потенциал φ внутри сферы?

3.76. Какая сила F действует на электрон, находящийся в полости, образованной заряженным шаровым слоем, если объемная плотность ρ заряда в слое зависит только от расстояния r до центра слоя?

3.77. Шар радиуса R заряжен однородно с объемной плотностью ρ . Найти напряженность поля E и потенциал φ для точек внутри шара.

3.78. Внутри шара, заряженного однородно с объемной плотностью ρ имеется сферическая полость, в которой заряды отсутствуют. Смещение центра полости относительно центра шара определяется вектором $\mathbf{a}$. Найти напряженность поля $\mathbf{E}$ внутри полости. Рассмотреть случай $\mathbf{a}=0$.

3.79. В 1903 г. Дж. Дж. Томсон предложил модель, согласно которой атом водорода представляет собой равномерно заполненный зарядом $+e$ шар радиуса R , внутри которого находится электрон. Предполагая, что «сил трения» нет, определить характер движения электрона после того, как он будет выведен из положения равновесия.

3.80. Исходя из модели атома, описанной в задаче 3.79, определить радиус положительно заряженного шара R , при котором частота колебаний электрона совпадает с частотой спектральной линии водородного атома, обозначаемой символом H_α . Длина волны этой линии $\lambda=656,3$ нм. Сравнить полученное значение R с размерами атомов, получающимися из кинетической теории газов.

3.81. Заряд $q=1,00$ нКл распределен по шару радиуса $R=10,0$ см с объемной плотностью, пропорциональной расстоянию r от центра шара. Найти:

- а) потенциал φ_0 в центре шара,
- б) потенциал $\varphi(r)$ внутри шара как функцию r ,
- в) модуль напряженности поля $E(R/2)$ посередине расстояния от центра шара до его поверхности.

3.82. Пространство заполнено зарядом, плотность которого изменяется по закону $\rho=\rho_0/r$, где ρ_0 — константа, r — расстояние от начала координат. Найти напряженность поля $\mathbf{E}$ как функцию радиус-вектора $\mathbf{r}$. Исследовать характер линий напряженности. Область вблизи начала координат исключить из рассмотрения.

3.83. Пространство заполнено зарядом плотности $\rho=\rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, где ρ_0 и α — константы. Найти $\mathbf{E}$ как функцию $\mathbf{r}$. Исследовать характер поля при больших и малых r (большими считать значения r , удовлетворяющие условию $\alpha r^3 \gg 1$, малыми — условию $\alpha r^3 \ll 1$).

3.2. Электрическое поле в диэлектриках

3.84. Диэлектрическое тело заряжено однородно с объемной плотностью $\rho_0=1,00$ мкКл/м³. Какова будет объемная плотность заряда ρ , если тело привести в движение со скоростью $v=0,500c$?

3.85. Диэлектрическое тело, имеющее форму куба, заряжено однородно с поверхностной плотностью $\sigma_0=$

$=1,00$ мкКл/м². Какова будет поверхностная плотность заряда σ , если тело привести в движение в направлении одного из его ребер со скоростью $v=0,500c$?

3.86. Тонкий диэлектрический стержень заряжен однородно с линейной плотностью $\lambda_0=1,00$ мкКл/м. Какова будет линейная плотность заряда λ , если стержень привести в движение со скоростью $v=0,500c$ в направлении, образующем с первоначальным направлением оси стержня угол $\alpha = 30^\circ$?

3.87. В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ электрическое смещение имеет значение D . Чему равна поляризованность P в этой точке?

3.88. Имеются две бесконечные параллельные плоскости, заряженные с плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$. Первоначально они находятся в вакууме. Затем зазор между плоскостями заполняется однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ϵ . Что происходит при этом с: а) напряженностью E поля в зазоре, б) смещением D , в) разностью потенциалов U между плоскостями?

3.89. В однородное электрическое поле с напряженностью $E_0=100$ В/м помещена бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного и изотропного диэлектрика с проницаемостью $\epsilon=2,00$. Пластина расположена перпендикулярно к E_0 . Определить:

а) напряженность поля E и электрическое смещение D внутри пластины,

б) поляризованность диэлектрика P ,

в) поверхностную плотность связанных зарядов σ' .

3.90. Бесконечная пластина толщины a из изотропного диэлектрика поляризована так, что поляризованность вблизи одной границы пластины $P_1=P_1n$, а вблизи другой границы $P_2=P_2n$, где n — единичный вектор, перпендикулярный к пластине и направленный от первой границы ко второй. Найти среднюю по объему пластины объемную плотность связанных зарядов $\langle \rho' \rangle$.

3.91. Бесконечная пластина из изотропного диэлектрика помещена в перпендикулярное к ней однородное внешнее электрическое поле напряженностью E_0 (рис. 3.9). Толщина пластины a , проницаемость изменяется линейно от значения ϵ_1 на левой границе до ϵ_2 на правой границе. Вне пластины $\epsilon=1$. Найти:

а) ∇E внутри пластины как функцию x ,

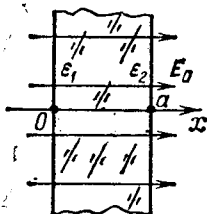


Рис. 3.9

б) поток Φ_E вектора E через воображаемую цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси x ; основания цилиндра расположены в точках с $x_1 = -a/2$ и $x_2 = +a/2$; площадь каждого основания равна S ,

в) объемную плотность ρ' связанных зарядов как функцию x .

3.92. Найти ρ' в середине пластины из задачи 3.91, если $\epsilon_1 = 2,00$, $\epsilon_2 = 4,00$, $a = 1,00$ см, $E_0 = 3,00$ кВ/м.

3.93. Бесконечная диэлектрическая пластина толщины a (рис. 3.10) помещена во внешнее перпендикулярное к пластине однородное электрическое поле с напряженностью E_0 . Проницаемость пластины изменяется по некоторому закону $\epsilon(x)$ [$\epsilon(0) = \epsilon_1$]. Какой вид должна иметь функция $\epsilon(x)$ для того, чтобы плотность связанных зарядов изменялась по закону: $\rho' = \rho'_1 / (1 + \alpha x)$, где ρ'_1 и α — константы? Вне пластины $\epsilon = 1$.

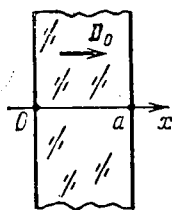


Рис. 3.10

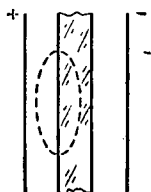


Рис. 3.11

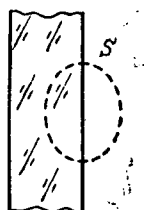


Рис. 3.12

3.94. Стекла́нная пластинка с проницаемостью $\epsilon_2 = 6,00$ внесена в однородное электрическое поле с напряженностью $E_1 = 10,0$ В/м и расположена так, что угол α_1 между нормалью к пластинке и направлением внешнего поля равен 30° . Найти напряженность E_2 поля в пластинке, угол α_2 , который это поле образует с нормалью к пластинке, а также плотность σ' связанных зарядов, возникших на поверхностях пластинки. Считать диэлектрическую проницаемость среды вне пластинки $\epsilon_1 = 1$.

3.95. В зазор между разноименно заряженными плоскостями ввели пластину из диэлектрика, не несущую сторонних зарядов (рис. 3.11). Штриховой линией на рисунке показана воображаемая замкнутая поверхность, частично проходящая внутри диэлектрика, частично вне его. Чему равен поток вектора D через эту поверхность?

3.96. Воображаемая замкнутая поверхность S проходит частично вне пластины из изотропного диэлектрика, частично — внутри нее (рис. 3.12). Поток вектора D через эту поверхность равен нулю, поток вектора E больше нуля. Какие можно сделать из этого выводы?

3.97. Бесконечная пластина из диэлектрика с проницаемостью ϵ заряжена однородно с объемной плотностью ρ . Толщина пластины равна $2a$. Вне пластины $\epsilon=1$. Направим ось x перпендикулярно к пластине; начало координат поместим в середине пластины. Найти φ и E_x внутри и вне пластины как функцию x (потенциал в середине пластины положить равным нулю). Построить графики φ и E_x .

3.98. Для пластины из задачи 3.97 найти:

- а) поляризованность P диэлектрика как функцию x ,
- б) поверхностную плотность σ' связанных зарядов на левой ($x=-a$) и на правой ($x=+a$) границах пластины,
- в) объемную плотность ρ' связанных зарядов.

3.99. Пластина из задачи 3.97 заряжена с плотностью $\rho=\rho_0 \exp(-\alpha|x|)$, где ρ_0 и α — константы. Найти:

- а) проекцию напряженности поля на ось x ,
- б) объемную плотность связанных зарядов как функцию x .

3.100. Поляризованность P некоторой среды оказывается пропорциональной выражению e_r/r^2 , где e_r — орт, а r — модуль радиус-вектора r . Чему равна объемная плотность ρ' связанных зарядов?

3.101. Внутри шара из однородного изотропного диэлектрика с $\epsilon=5,00$ создано однородное электрическое поле с напряженностью $E=100$ В/м. Найти максимальную поверхностную плотность $\sigma'_{\text{макс}}$ связанных зарядов и среднее значение σ' одного знака.

3.102. Палочка из сегнетоэлектрика, обладающая остаточной поляризованностью P_r , направленной вдоль оси палочки, подвешена за середину в горизонтальном положении на тонкой неупругой нити. Определить частоту ω малых колебаний, которые палочка будет совершать в однородном горизонтально направленном поле с напряженностью E , настолько слабом, что оно не оказывает существенного влияния на поляризованность палочки. Длина палочки l , плотность δ .

3.3. Проводники в электрическом поле

3.103. Точечный заряд $q=20,0$ нКл находится в вакууме на расстоянии $a=50,0$ мм от заземленной плоской металлической стенки. Найти силу F , с которой стенка притягивает к себе заряд.

3.104. Вблизи заземленной плоской металлической стенки находится на расстоянии a от нее точечный заряд q . Определить поверхностную плотность σ зарядов, индуци-

рованных на стенке, как функцию расстояния x от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на стенку. Вычислить суммарный индуцированный заряд $q_{\text{инд}}$, полагая размеры стенки бесконечно большими.

3.105. Металлический шарик радиуса $r=1$ см заряжен до потенциала $\varphi=1$ В. В каком знаке изменится заряд шарика q , если с шарика вылетят 100 электронов?

3.106. Первоначально в пространстве между обкладками плоского конденсатора имеется вакуум. В этом случае напряженность поля в зазоре равна E , а электрическое смещение D . Затем половина зазора заполняется так, как показано на рис. 3.13 однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ϵ . Найти возникающие после этого значения E_1 и D_1 в части зазора 1, а также значения E_2 и D_2 в части зазора 2. Рассмотреть два случая:

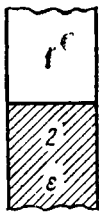


Рис. 3.13

а) остается прежним напряжение между обкладками,

б) остаются неизменными заряды на обкладках.

Изобразить примерный ход линий E и D в зазоре.

3.107. Решить задачу, аналогичную задаче 3.106, с тем отличием, что диэлектриком заполняется половина зазора так, как показано на рис. 3.14.

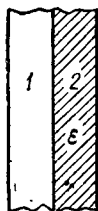


Рис. 3.14

3.108. Площадь каждой обкладки плоского конденсатора $S=1,00$ м², расстояние между обкладками $d=5,00$ мм. Зазор между обкладками заполнен двухслойным диэлектриком. Проницаемость и толщина первого слоя $\epsilon_1=2,00$, $d_1=3,00$ мм, второго слоя $\epsilon_2=3,00$, $d_2=2,00$ мм. Найти емкость C конденсатора.

3.109. Площадь каждой обкладки плоского конденсатора $S=1,00$ м², расстояние между обкладками $d=5,00$ мм. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется в направлении, перпендикулярном к обкладкам, по линейному закону от значения $\epsilon_1=2,00$ вблизи одной обкладки до $\epsilon_2=5,44$ вблизи другой. Определить емкость C конденсатора.

3.110. Пренебрегая рассеянием поля вблизи краев обкладок, получить выражение для емкости C цилиндрического конденсатора. Радиусы обкладок r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$), длина их l . Зазор между обкладками заполнен диэлектриком с проницаемостью ϵ .

3.111. Газоразрядный счетчик элементарных частиц состоит из трубки радиуса $r_2=10,0$ мм и натянутой по оси трубки нити радиуса $r_1=50,0$ мкм. Длина счетчика $l=150$ мм. Положив $\varepsilon=1$, оценить межэлектродную емкость C .

3.112. Получить выражение для емкости C сферического конденсатора. Радиусы обкладок r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$). Зазор между обкладками заполнен диэлектриком с проницаемостью ε .

3.113. Радиусы обкладок сферического конденсатора $r_1=9,00$ см и $r_2=11,00$ см. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется с расстоянием r от центра конденсатора по закону $\varepsilon=\varepsilon_1(r_1/r)$, где $\varepsilon_1=2,00$. Найти емкость C конденсатора.

3.114. Имеется N конденсаторов, емкости которых равны $C_1, C_2, \dots, C_N$. Получить выражение для емкости C системы конденсаторов при а) параллельном, б) последовательном соединении их друг с другом.

3.115. Соединены последовательно 10 одинаковых конденсаторов, емкость каждого из которых равна 100 пФ. Чему равна емкость C этой системы?

3.116. Как нужно соединить конденсаторы $C_1=2$ пФ, $C_2=4$ пФ и $C_3=6$ пФ, чтобы получить систему с емкостью $C=3$ пФ?

3.117. На два последовательно соединенных конденсатора с емкостью $C_1=100$ пФ и $C_2=200$ пФ подано постоянное напряжение $U=300$ В. Определить напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах и заряд q на их обкладках. Какова емкость C этой системы?

3.118. В изображенной на рис. 3.15 схеме $\mathcal{E}=100$ В, $C_1=1,00$ мкФ, $C_2=2,00$ мкФ, $C_3=3,00$ мкФ. Сначала замыкается ключ K_1 . Затем его размыкают и замыкают ключ K_2 . Какие заряды q_1 , q_2 и q_3 пройдут при этом в указанных стрелками направлениях через сечения 1, 2 и 3?

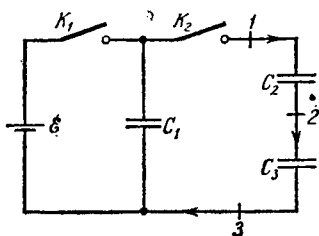


Рис. 3.15

3.119. Конденсаторы с емкостью $C_1=2,00$ мкФ и $C_2=3,00$ мкФ соединены последовательно и подключены к батарее с э. д. с. $\mathcal{E}=120$ В, средняя точка которой заземлена (рис. 3.16). Провод, соединяющий конденсаторы, может быть заземлен с помощью ключа K . Определить заряды q_1 , q_2 и q_3 , которые пройдут после замы-

кания ключа через сечения 1, 2 и 3 в направлениях, указанных стрелками на рисунке.

3.120. Два длинных провода радиуса $a=1,00$ мм расположены в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между их осями $b=200$ мм. Найти взаимную емкость C проводов, приходящуюся на единицу их длины.

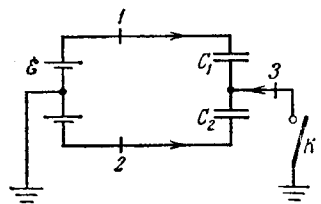


Рис. 3.16

3.121. Найти емкость C конденсатора, образованного двумя одинаковыми шариками радиуса a , находящимися в среде с ди-

электрической проницаемостью ϵ . Расстояние между центрами шариков равно b ($b \gg a$). Вычислить C для $a=10,0$ мм и $\epsilon=1,00$.

3.4. Энергия электрического поля

3.122. Вычислить энергию W кулоновского взаимодействия двух электронов, находящихся друг от друга на расстоянии $r=1,00$ мм.

3.123. Среднее значение величины, обратной расстоянию электрона от ядра в атоме водорода, $\langle 1/r \rangle = 1/r_0$, где $r_0 = 0,0529$ нм — так называемый боровский радиус. Определить:

а) среднее значение $\langle W \rangle$ энергии кулоновского взаимодействия электрона и ядра,

б) суммарную энергию W кулоновского взаимодействия электронов и ядер для моля атомарного водорода.

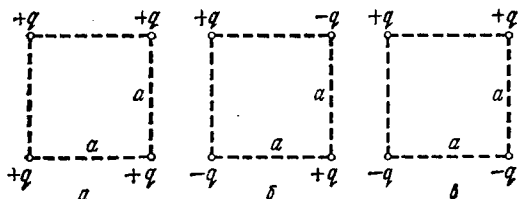


Рис. 3.17

3.124. Найти взаимную потенциальную энергию W для каждой из систем точечных зарядов, изображенных на рис. 3.17. Все заряды одинаковы по модулю и располагаются в вершинах квадрата со стороной a .

3.125. Найти взаимную потенциальную энергию W системы N точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N$, рас-

положенных в вакууме в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N$.

3.126. По телу объема V распределен заряд с плотностью $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Найти выражение для энергии W этого тела, полагая внутри и вне тела диэлектрическую проницаемость $\epsilon = 1$.

3.127. Заряд $q = 1,00 \cdot 10^{-10}$ Кл равномерно распределен по поверхности шара радиуса $r = 1,00$ см. Диэлектрическая проницаемость окружающей шар среды $\epsilon = 1$.

а) Вычислить энергию W поля, связанного с шаром.

б) Какая часть η этой энергии заключена в пределах концентрической с шаром воображаемой сферы радиуса $R = 1,00$ м?

в) Чему равен радиус R сферы, в пределах которой заключена половина энергии?

3.128. Заряд $q = 1,00 \cdot 10^{-10}$ Кл равномерно распределен по объему шара радиуса $r = 1,00$ см. Определить:

а) энергию W поля, связанного с шаром,

б) энергию W_1 , заключенную внутри шара,

в) энергию W_2 , заключенную в окружающем шар пространстве.

Диэлектрическая проницаемость внутри и вне шара $\epsilon = 1$.

3.129. Первоначально заряд $q = 1,00 \cdot 10^{-10}$ Кл распределяется равномерно по объему шара радиуса $r = 1,00$ см. Затем вследствие взаимного отталкивания заряды переходят на поверхность шара. Какую работу A совершают при этом электрические силы над зарядами? ($\epsilon = 1$.)

3.130. Найти так называемый классический радиус $r_{\text{кл}}$ электрона, руководствуясь следующими соображениями. В классической физике электрон рассматривается как заряженный шарик, энергия покоя которого отождествляется с энергией связанного с ним электростатического поля. Чтобы не делать предположений о характере распределения заряда по объему шарика, вместо числового множителя $1/2$ (отвечающего распределению заряда по поверхности; см. ответ к задаче 3.127) или $3/5$ (отвечающего распределению заряда равномерно по объему; см. ответ к задаче 3.128) в выражении для энергии поля берется множитель, равный единице.

3.131. Точечный заряд $q = 3,00$ мкКл помещается в центре шарового слоя из однородного и изотропного диэлектрика с $\epsilon = 3,00$. Внутренний радиус слоя $a = 250$ мм, внешний $b = 500$ мм. Найти энергию W , заключенную в пределах диэлектрика.

3.132. Внешняя обкладка сферического конденсатора может сжиматься, сохраняя строго сферическую форму и оставаясь концентричной с внутренней жесткой обкладкой.

а) После того как обкладкам были сообщены заряды разного знака, но одинаковой величины $q=2,00$ мкКл, внешняя обкладка сжимается под действием электрических сил, в результате чего ее радиус уменьшается от значения $a=100,0$ мм до значения $b=95,0$ мм. Найти совершенную электрическими силами работу A . Проницаемость среды между обкладками считать равной единице.

б) Почему вычисление работы по формуле $\int_a^b \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$

приводит к неправильному результату?

3.133. Определить работу A , которую нужно совершить, чтобы увеличить на $\Delta x=0,200$ мм расстояние x между пластинами плоского конденсатора, заряженными разноименными зарядами $q=0,200$ мкКл. Площадь каждой пластины $S=400$ см². В зазоре между пластинами находится воздух.

3.134. Имеется заряженный плоский конденсатор. Зазор между обкладками конденсатора заполняется диэлектриком с проницаемостью ϵ . Что происходит при этом с плотностью энергии w поля в зазоре, если конденсатор а) соединен с источником напряжения, б) отключен от источника напряжения?

3.5. Электрический ток

3.135. Имеется N сопротивлений $R_1, R_2, \dots, R_N$. Получить выражение для R системы сопротивлений при а) параллельном, б) последовательном соединении их друг с другом.

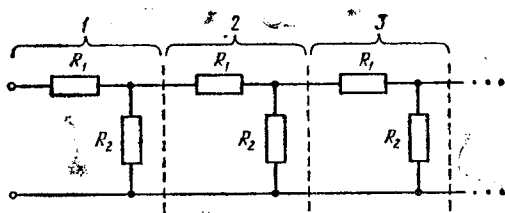


Рис. 3.18

3.136. Как нужно соединить сопротивления $R_1=2$ Ом, $R_2=3$ Ом и $R_3=6$ Ом, чтобы получить систему с $R=4$ Ом?

3.137. На рис. 3.18 изображена бесконечная цепь, образованная повторением одного и того же звена, состоящего

из сопротивлений $R_1=2$ Ом и $R_2=4$ Ом. Найти сопротивление R этой цепи.

3.138. Участок цепи представляет собой тело вращения из однородного материала с удельным сопротивлением ρ (рис. 3.19). Площадь поперечного сечения тела зависит от x по закону $S(x)$. Написать выражение для сопротивления R этого участка цепи.

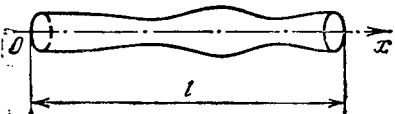


Рис. 3.19

3.139. Требуется изготовить нагревательную спираль для электрической плитки мощностью 0,50 кВт, предназначенной для включения в сеть с напряжением 220 В. Сколько нужно взять для этого нихромовой проволоки диаметра 0,40 мм? Удельное сопротивление нихрома в нагретом состоянии равно $1,05$ мкОм·м.

3.140. Из материала с удельным сопротивлением ρ изготовлено плоское кольцо толщины d . Радиусы кольца равны a и b ($b>a$). Между внешней и внутренней цилиндрическими поверхностями кольца поддерживается некоторая разность потенциалов. Найти сопротивление R кольца в этих условиях.

3.141. Металлический шар радиуса a окружен концентрической с ним металлической оболочкой радиуса b . Пространство между этими электродами заполнено однородной и изотропной проводящей средой с удельным сопротивлением ρ . Найти электрическое сопротивление R межэлектродного промежутка. Рассмотреть случай $b \rightarrow \infty$.

3.142. Через воображаемую замкнутую поверхность течет постоянный ток силы I . Чему он равен и как направлен, если за промежуток времени Δt поток электрического смещения через поверхность Φ_D возрастает от значения Φ_1 до значения Φ_2 ($\Phi_1 < \Phi_2$)?

3.143. Две квадратные пластины со стороной $a=300$ мм, закрепленные на расстоянии $d=3,0$ мм друг от друга, образуют плоский конденсатор, подключенный к источнику постоянного напряжения $U=250$ В. Расположенные вертикально пластины погружают в сосуд с керосином ($\epsilon=2,00$) со скоростью $v=5,0$ мм/с. Найти силу тока I , текущего при этом по подводящим проводам.

3.144. Конденсатор емкости $C=300$ пФ подключается через сопротивление $R=500$ Ом к источнику постоянного напряжения U_0 . Определить время t , по истечении которого напряжение на конденсаторе $U=0,990 U_0$.

3.145. Обкладкам конденсатора емкости $C=2,00$ мкФ сообщаются разноименные заряды $q_0=1,00$ мКл. Затем обкладки замыкаются через сопротивление $R=5000$ Ом. Найти:

- закон изменения тока, текущего через сопротивление,
- заряд q , прошедший через сопротивление за время $\tau=2,00$ мс,
- количество теплоты Q , выделившееся в сопротивлении за то же время.

3.146. Конденсатор емкости C заряжают до напряжения U , после чего замыкают на сопротивление R . Какое количество теплоты Q выделится в сопротивлении при разряде конденсатора?

3.147. Конденсатор емкости $C=5,00$ мкФ подсоединяется к источнику постоянного тока с напряжением $U=200$ В (рис. 3.20). Затем переключатель Π переводится с контакта 1 на контакт 2. Найти количество теплоты, выделившееся в сопротивлении $R_1=500$ Ом. Сопротивление $R_2=300$ Ом. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

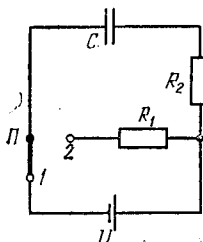


Рис. 3.20

3.148. Имеется $N=24$ одинаковых источников тока с э. д. с. $\mathcal{E}=1,00$ В и внутренним сопротивлением $R_0=0,200$ Ом.

Эти источники соединены так, что образуют батарею из n последовательных секций, каждая из которых состоит из N/n соединенных параллельно источников. К батарее подключен прибор, обладающий сопротивлением $R=0,30$ Ом. При каком n мощность P , отбираемая прибором, будет максимальной? Чему равно максимальное значение P ?

3.149. Между обкладками плоского конденсатора помещена параллельно им медная пластинка, толщина которой равна $1/3$ зазора между обкладками. Емкость конденсатора в отсутствие пластинки $C=0,0250$ мкФ. Конденсатор подключен к источнику тока, вследствие чего заряжен до напряжения $U=100,0$ В. Определить:

- работу A_1 , которую нужно совершить, чтобы извлечь пластинку из конденсатора,
- работу A_2 , совершаемую при этом источником тока. Нагреванием пластинки пренебречь.

3.150. Решить задачу, аналогичную задаче 3.149, с тем отличием, что пластинка изготовлена не из меди, а из диэлектрика с проницаемостью $\epsilon=3,00$.

3.151. Бумажный конденсатор (т. е. конденсатор, в котором диэлектриком служит пропитанная вазелином бумага; $\epsilon=2,10$) теряет за время $\tau=5,00$ мин половину сообщенного ему заряда. Предполагая, что утечка заряда происходит только через диэлектрическую прокладку, вычислить ее удельное сопротивление ρ .

3.152. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен диэлектриком, удельная проводимость которого изменяется в направлении, перпендикулярном к обкладкам, по линейному закону от значения $\sigma_1=1,00 \cdot 10^{-12}$ См/м до значения $\sigma_2=1,00 \cdot 10^{-11}$ См/м. Найти силу I

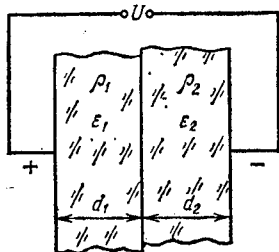


Рис. 3.21

тока утечки через конденсатор при условии, что напряжение на обкладках $U=300$ В. Площадь обкладок $S=100$ см², зазор между обкладками $d=2,00$ мм.

3.153. Диэлектрик плоского конденсатора состоит из двух слоев (рис. 3.21), характеризующихся проницаемостями $\epsilon_1=2,00$, $\epsilon_2=3,00$ и удельными сопротивлениями $\rho_1=10,0$ ГОм·м, $\rho_2=20,0$ ГОм·м. Толщины слоев $d_1=2,00$ мм, $d_2=1,00$ мм. На конденсатор подано напряжение $U=100,0$ В (плюс на левую обкладку, минус — на правую).

1. Определить:

а) значения напряженности поля E_1 и E_2 , а также значения электрического смещения D_1 и D_2 в обоих слоях,

б) плотность сторонних зарядов на левой обкладке σ_1 , на правой обкладке σ_2 и на границе раздела слоев σ ,

в) плотность связанных зарядов вблизи левой обкладки σ'_1 , вблизи правой обкладки σ'_2 и на границе раздела слоев σ' ,

г) плотность j тока, текущего через конденсатор.

2. Определить перечисленные в п. 1 величины для случая $\rho_1=\infty$.

3.154. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен веществом с проницаемостью $\epsilon=7,00$ и удельным сопротивлением $\rho=100$ ГОм·м. Емкость конденсатора $C=3000$ пФ. Найти силу I тока утечки через конденсатор при подаче на него напряжения $U=2000$ В.

3.155. Обкладки конденсатора произвольной формы разделены слабо проводящей средой с проницаемостью ϵ и удельным сопротивлением ρ . Емкость конденсатора равна C . Найти силу I тока утечки через конденсатор при подаче на него напряжения U .

3.156. Два электрода в виде металлических шариков радиуса a помещаются в среде, удельное электрическое сопротивление которой равно ρ . Расстояние между центрами шариков b ($b \gg a$). Найти сопротивление R между электродами.

3.157. Радиусы обкладок сферического конденсатора равны a и b ($a < b$). Пространство между обкладками заполнено веществом с проницаемостью ϵ и удельной проводимостью σ . Первоначально конденсатор не заряжен. Затем внутренней обкладке сообщается заряд q_0 . Найти:

- закон изменения заряда q на внутренней обкладке,
- количество теплоты Q , выделяющееся при растекании заряда; сравнить Q с изменением электрической энергии конденсатора.

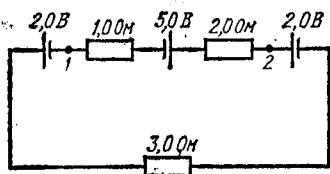


Рис. 3.22

3.158. По участку цепи с сопротивлением R течет постоянный ток силы I . Может ли при этом разность потенциалов на концах участка равняться нулю?

3.159. На рис. 3.22 изображена цепь постоянного тока, состоящая из трех источников тока и трех сопротивлений, включенных последовательно. Определить разность потенциалов $\phi_1 - \phi_2$ между точками 1 и 2. Сопротивлением источников тока и соединительных проводов пренебречь.

3.160. N одинаковых источников тока с э. д. с. $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением R_0 и такое же число одинаковых сопротивлений R образуют замкнутую цепь из N звеньев, изображенную на рис. 3.23. Найти разность потенциалов между точками A и B , делящими цепь на n и $N - n$ звеньев. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

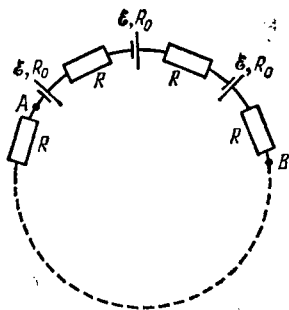


Рис. 3.23

3.161. В схеме, изображенной на рис. 3.24, $\mathcal{E} = 5,0$ В, $R_1 = 1,00$ Ом, $R_2 = 2,00$ Ом, $R_3 = 3,00$ Ом. Сопротивление источника тока $R_0 = 0,10$ Ом. Найти силы токов I_1 и I_2 .

3.162. В схеме, изображенной на рис. 3.25, $\mathcal{E}_1 = 10,0$ В, $\mathcal{E}_2 = 20,0$ В, $\mathcal{E}_3 = 30,0$ В, $R_1 = 1,00$ Ом, $R_2 = 2,00$ Ом, $R_3 = 3,00$ Ом, $R_4 = 4,00$ Ом, $R_5 = 5,00$ Ом, $R_6 = 6,00$ Ом, $R_7 =$

$=7,00 \text{ Ом}$. Внутреннее сопротивление источников тока пренебрежимо мало. Найти силы токов I_1 , I_2 , и I_3 .

3.163. На рис. 3.26 изображены две разветвленные цепи постоянного тока. Определить токи, текущие через сопротивления в обоих случаях. Сопротивлением источников

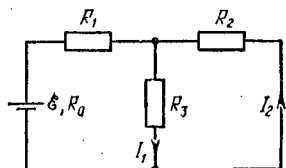


Рис. 3.24

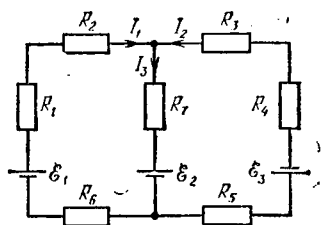


Рис. 3.25

тока и соединительных проводов пренебречь. Как изменятся токи в случае *a*, если разрезать провода в точках *A* и *B*?

3.164. Элементы схемы, изображенной на рис. 3.27, имеют следующие значения: $\mathcal{E}_1=1,00 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2=2,00 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3=3,00 \text{ В}$, $\mathcal{E}_4=4,00 \text{ В}$, $R_1=100 \text{ Ом}$, $R_2=200 \text{ Ом}$, $R_3=300 \text{ Ом}$, $R_4=400 \text{ Ом}$.

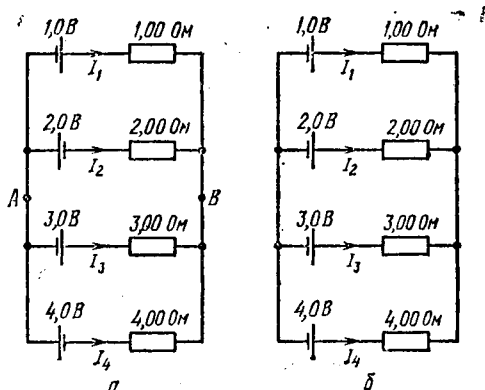


Рис. 3.26

Определить токи $I_1—I_4$, текущие через сопротивления. Сопротивлением источников тока и соединительных проводов пренебречь.

3.165. На рис. 3.28 изображена схема потенциометра. С помощью этого устройства можно регулировать подаваемое на прибор, имеющий сопротивление R , напряжение U

в пределах от 0 до U_0 , где U_0 — напряжение источника постоянного тока. В простейших потенциометрах сопротивление R_0 выполняется в виде однородной проволоки, по

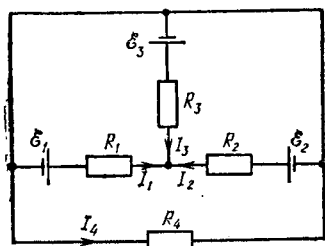


Рис. 3.27

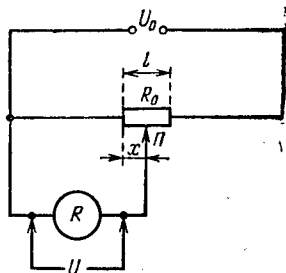


Рис. 3.28

которой скользит ползунок P . Найти напряжение U , снимаемое с потенциометра на прибор R , как функцию расстояния x ползунка потенциометра от конца проволоки R_0 . Исследовать случай $R \gg R_0$.

3.6. Магнитное поле в вакууме

3.166. Электрон движется прямолинейно и равномерно со скоростью $v = 3,00 \cdot 10^5$ м/с. Найти индукцию B поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии от него $r = 1,00 \cdot 10^{-9}$ м (10 Å) и лежащей на перпендикуляре к v , проходящем через мгновенное положение электрона.

3.167. Найти силу I бесконечного прямого тока, при которой индукция B поля на расстоянии от провода $b = 1,00$ м равна $4,8 \cdot 10^{-3}$ Тл (см. ответ к задаче 3.166).

3.168. Два электрона движутся в вакууме «бок о бок» по параллельным прямым с одинаковой скоростью $v = 3,00 \cdot 10^5$ м/с. Расстояние между электронами $a = 1,00$ мм. Найти силу F_m магнитного взаимодействия между электронами. Сравнить F_m с силой F_e кулоновского взаимодействия между электронами.

3.169. По круговому витку радиуса $r = 100$ мм циркулирует ток силы $I = 1,00$ А. Найти магнитную индукцию B :

а) в центре витка,

б) на оси витка на расстоянии $b = 100$ мм от его центра.

3.170. В замкнутой цепи постоянного тока I имеется участок в виде двух образующих прямой угол прямолинейных проводов (рис. 3.29). Длина этих проводов настолько

велика, что влиянием остальных участков цепи на поле в окрестности вершины угла можно пренебречь. Найти магнитную индукцию B в указанной на рисунке точке A .

3.171. По плоскому контуру, изображенному на рис. 3.30, течет ток силы $I=1,00$ А. Угол между прямолинейными

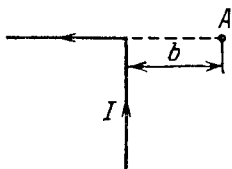


Рис. 3.29

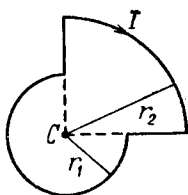


Рис. 3.30

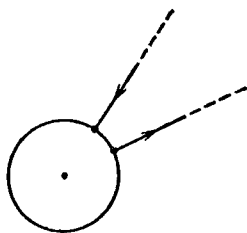


Рис. 3.31

участками контура прямой. Радиусы имеют значения: $r_1=10,0$ см, $r_2=20,0$ см. Найти магнитную индукцию B в точке C .

3.172. Цепь постоянного тока включает однородное кольцо и два подсоединенных к нему очень длинных радиальных проводника (рис. 3.31). Замыкающая эти проводники часть цепи (включающая источник тока) расположена так далеко, что не оказывает заметного влияния на поле в области кольца. Чему равна магнитная индукция B в центре кольца?

3.173. Замкнутая цепь с током силы I включает в себя прямолинейный участок длины $2a$. Точка A лежит на расстоянии b от этого участка на перпендикуляре, проходящем через его середину. Найти ту часть магнитной индукции B в точке A , которая создается данным участком. Исследовать случай $a \rightarrow \infty$.

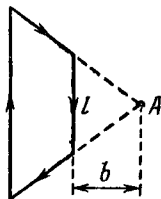


Рис. 3.32

3.174. По проволоке, согнутой в виде правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса r , пропускается ток силы I . Найти магнитную индукцию B в центре многоугольника. Исследовать полученное выражение для случая $n \rightarrow \infty$.

3.175. Ток силы $I=1,00$ А циркулирует в контуре, имеющем форму равнобокой трапеции (рис. 3.32). Отношение оснований трапеции $\eta=2,00$. Найти магнитную индукцию B в точке A , лежащей в плоскости трапеции. Меньшее основание трапеции $l=100$ мм, расстояние $b=50$ мм.

3.176. Соленоид радиуса r и длины l имеет на единицу длины n витков. По соленоиду течет ток силы I . Определить напряженность поля H на оси соленоида как функцию расстояния x от его центра. Исследовать случаи:

а) x конечное, $l \rightarrow \infty$, б) $x = l/2$, $l \rightarrow \infty$.

3.177. Какое влияние на поле соленоида оказывает обстоятельство, что переход от витка к витку сопровождается перемещением вдоль оси соленоида?

3.178. По круглому прямому проводу радиуса R течет ток одинаковой по всему сечению плотности j . Найти выражение для напряженности поля H в точке, положение которой относительно оси провода определяется перпендикулярным к этой оси радиус-вектором r . Рассмотреть случаи, когда точка лежит внутри и вне провода.

3.179. Внутри прямого провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода. Смещение оси полости относительно оси провода определяется вектором a . По проводу течет ток одинаковой по всему сечению плотности j . Найти напряженность магнитного поля H внутри полости. Рассмотреть случай $a=0$.

3.180. Эбонитовый шар радиуса $R=50,0$ мм заряжен равномерно распределенным поверхностным зарядом с плотностью $\sigma=10,0$ мкКл/м². Шар приводится во вращение вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega=100$ рад/с. Найти магнитную индукцию B в центре шара.

3.181. Шар из задачи 3.101 приводится во вращение вокруг своей оси, параллельной вектору E внутри шара. Чему равна магнитная индукция B в центре шара?

3.182. По объему однородного шара массы m и радиуса R равномерно распределен заряд q . Шар приводится во вращение вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти возникающие в результате вращения момент импульса (механический момент) M и магнитный момент p_m , а также отношение p_m к M .

3.183. Магнитный момент кругового контура с током $p_m=1,00$ А·м². Радиус контура $R=10,0$ см. Найти индукцию B в центре контура.

3.184. Изолированный провод намотан так, что образует плоскую спираль из $N=100$ витков. Радиус внутреннего витка (по оси провода) равен $R_1=10,0$ мм, внешнего витка $R_2=40,0$ мм. Каким магнитным моментом p_m обладает эта спираль, когда по ней течет ток силы $I=10,0$ мА? Чему равна в этом случае напряженность магнитного поля H в центре спирали?

3.185. Небольшая магнитная стрелка совершает в магнитном поле Земли малые колебания с периодом $T_1=8,92$ с. При помещении ее внутрь соленоида, по которому течет ток, стрелка колеблется с периодом $T_2=0,68$ с. Определить магнитную индукцию B , поля внутри соленоида. Горизонтальная составляющая индукции земного магнитного поля $B_1=18,0$ мкТл. Затуханием колебаний стрелки пренебречь.

3.186. Две небольшие одинаковые катушки расположены так, что их оси лежат на одной прямой. Расстояние между катушками $l=2,00$ м значительно превышает их линейные размеры. Число витков каждой катушки $N=150$, радиус витков $r=50$ мм. С какой силой F взаимодействуют катушки, когда по ним течет одинаковый ток $I=1,00$ А?

3.187. Рядом с длинным прямым проводом, по которому течет ток $I_1=10,0$ А, расположена квадратная рамка с током $I_2=1,00$ А. Рамка и провод лежат в одной плоскости. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние $b=100$ мм. Сторона рамки $a=80$ мм. Найти силу F , действующую на рамку, и работу A , которую нужно совершить, чтобы повернуть рамку вокруг ее оси на 180° .

3.188. Рамка зеркального гальванометра подвешена на нити, коэффициент кручения которой (отношение приложенного вращающего момента к углу закручивания) $k=10,0$ мкН·м/рад. Рамка состоит из $N=100$ прямоугольных витков тонкой проволоки. Размеры витка 50×30 мм. Рамка может вращаться в зазоре между полюсами магнита, в которых имеются углубления цилиндрической формы. По оси зазора внутри рамки установлен железный цилиндр, благодаря чему поле в зазоре между полюсами и цилиндром имеет осевую симметрию. В той части зазора, где находится одна сторона рамки, поле направлено к оси, а в той части, где находится другая сторона, — от оси рамки. Напряженность поля в зазоре можно считать одинаковой по модулю и равной $H=100$ кА/м. На расстоянии от зеркала гальванометра $l_1=1200$ мм расположена шкала, нанесенная на линейку длины $l_2=800$ мм. В отсутствие тока световой зайчик, отбрасываемый зеркальцем, попадает в середину шкалы.

Какая максимальная сила тока I_m может быть измерена этим прибором?

3.189. В центре длинного соленоида, число витков на единицу длины которого $n=5000$ м $^{-1}$, помещена укрепленная на конце коромысла весов небольшая катушка с числом

витков $N=200$ (рис. 3.33). Ось катушки перпендикулярна к оси соленоида. Диаметр витков катушки $d=20,0$ мм. Плечо коромысла имеет длину $l=1,00$ м. Катушка уравновешена гирьками, установленными на чашке весов. При пропускании по соленоиду и катушке тока равновесие коромысла нарушается. На какую величину ΔP нужно изменить груз,

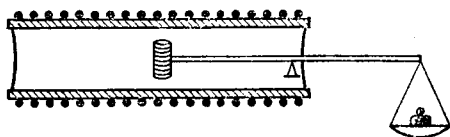


Рис. 3.33

помещающийся на чашке весов, чтобы восстановить равновесие в том случае, когда через соленоид и катушку течет одинаковый ток силы $I=1,00$ А?

3.190. Катушка, по которой течет ток силы $I=1,00$ А, помещена в однородное магнитное поле так, что ее ось совпадает с направлением поля. Обмотка катушки выполнена из медной проволоки диаметра $d=1,00$ мм; радиус витков $r=100$ мм. При каком значении магнитной индукции B внешнего поля обмотка катушки была бы разорвана? Прочность меди на разрыв $\sigma_p=230$ МПа.

3.191. Известно, что: 1) плотность j стационарного тока параллельна оси z и зависит только от расстояния r до этой оси, 2) циркуляция C вектора $\mathbf{H}$ по перпендикулярному к оси z плоскому контуру радиуса r с центром на этой оси пропорциональна третьей степени r : $C=\alpha r^3$. Найти вид функции $j(r)$.

3.192. Зазор между двумя параллельными круглыми пластинами заполнен однородной слабо проводящей средой с удельной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ϵ (магнитная проницаемость среды $\mu=1$). Зазор d много меньше радиуса пластин R . На пластины подается напряжение, изменяющееся по закону $U=U_m \cos \omega t$ (ω достаточно мала для того, чтобы выполнялись условия квазистационарности). Найти выражение для напряженности магнитного поля H в зазоре на расстоянии от оси пластин r , значительно меньшем R .

3.193. Показать, что, несмотря на наличие токов проводимости, текущих в радиальных направлениях, напряженность магнитного поля H в зазоре сферического конденсатора из задачи 3.157 равна нулю.

3.7. Магнитное поле в веществе

3.194. Что произойдет с полем бесконечного соленоида при заполнении соленоида однородным изотропным магнетиком с проницаемостью μ ?

3.195. Чему равно среднее значение модуля тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля $\langle H_l \rangle$ для произвольного замкнутого контура длины l , охватывающего провод, по которому течет ток силы I ?

3.196. В однородное магнитное поле с индукцией B_0 помещена бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного и изотропного магнетика с проницаемостью μ . Пластина расположена перпендикулярно к линиям B_0 . Определить магнитную индукцию B и напряженность магнитного поля H в магнетике.

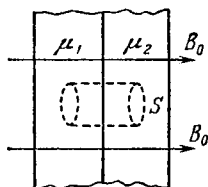


Рис. 3.34

3.197. Две пластины из магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2 сложены вместе и помещены в перпендикулярное к ним однородное поле с индукцией B_0 (рис. 3.34). Штриховой линией показана воображаемая цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными B_0 , и основаниями, параллельными S , перпендикулярными к B_0 . Чему равны поток Φ_B вектора B и поток Φ_H вектора H через эту поверхность?

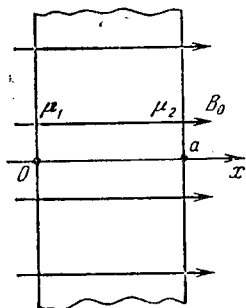


Рис. 3.35

3.198. Бесконечная пластина из изотропного магнетика помещена в перпендикулярное к ней однородное внешнее поле с индукцией B_0 (рис. 3.35). Магнитная проницаемость пластины изменяется линейно от значения μ_1 на левой границе до μ_2 на правой границе. Найти:

а) ∇H внутри пластины как функцию x ,

б) поток Φ_H вектора H через воображаемую цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси x . Основания цилиндра расположены в точках с координатами $x_1 = a/2$ и $x_2 = 3a/2$. Площадь каждого основания равна S .

3.199. В однородное магнитное поле с индукцией B_0 помещен шар из однородного и изотропного магнетика с проницаемостью μ .

а) Определить напряженность H и индукцию B поля в магнетике. Размагничивающий фактор считать известным.

б) Написать приближенное выражение для B в случае, если $\mu \gg 1$.

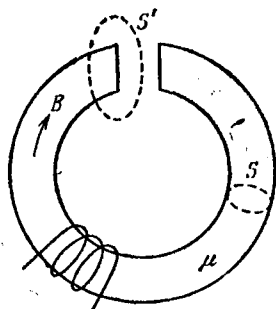


Рис. 3.36

3.200. Железный сердечник, изображенный на рис. 3.36, несет на себе обмотку, по которой течет постоянный ток. В результате в сердечнике возникает поле с индукцией B . Проницаемость железа при этих условиях равна μ . Площадь поперечного сечения сердечника равна S . Один из концов сердечника входит внутрь воображаемой замкнутой поверхности S' . Най-

ти для этой поверхности поток Φ_B вектора B и поток Φ_H вектора H .

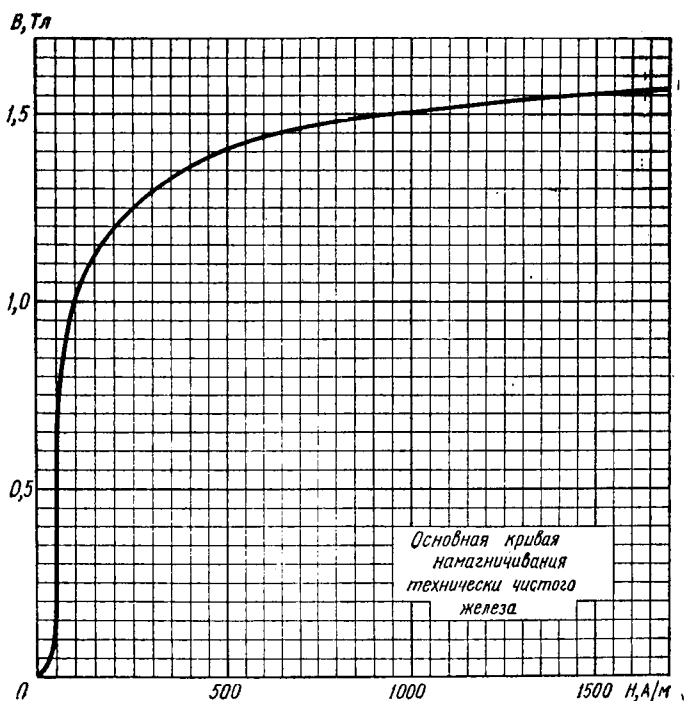


Рис. 3.37

3.201. На железном сердечнике в виде тора диаметра $d=500$ мм имеется обмотка с числом витков $N=1000$. В сердечнике сделана поперечная прорезь, в результате чего образовался воздушный зазор ширины $b=1,00$ мм. При силе тока в обмотке $I=0,85$ А напряженность поля в зазоре $H=600$ кА/м. Определить магнитную проницаемость μ железа при этих условиях. Рассеянием поля у краев зазора пренебречь.

3.202. На рис. 3.37 изображена полученная экспериментально основная кривая намагничивания технически чистого железа. Пользуясь этим графиком, построить кривую зависимости магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля H . Найти максимальное значение проницаемости $\mu_{\text{макс}}$ и напряженность H , при которой оно достигается.

3.203. Имеется железное кольцо квадратного сечения. Средний диаметр кольца $d=300$ мм, площадь поперечного сечения $S=500$ мм². Кольцо несет на себе обмотку из $N=800$ витков. По обмотке течет ток $I=3,00$ А. В кольце имеется поперечная прорезь ширины $b=2,00$ мм. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, найти:

- а) магнитную проницаемость μ железа при этих условиях,
- б) поток магнитной индукции Φ через поперечное сечение кольца,
- в) энергию W_1 , заключенную в железе, энергию W_2 в воздушном зазоре и полную энергию поля W .

3.8. Электромагнитная индукция

3.204. На рис. 3.38 изображен круговой проводящий плоский контур, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B , направленное на нас. Указать направление тока, возникающего в контуре в случае, если: а) B растет, б) B убывает, в) контур растягивается, г) контур сжимается.

3.205. Имеется круговой проводящий плоский контур радиуса a с сопротивлением R (рис. 3.39). Первоначально ток в нем отсутствует. Затем включается перпендикулярное к плоскости контура однородное магнитное поле с индукцией B , направленное за чертеж.

а) В каком направлении будет течь возникший при этом ток?

б) Какой заряд q протечет по контуру?

3.206. По П-образному проводу перемещается с постоянной скоростью v под действием силы F замыкающая провод

перемычка (рис. 3.40). Контур находится в перпендикулярном к его плоскости однородном магнитном поле. Чему равна сила F , если в контуре выделяется каждую секунду количество теплоты Q ?

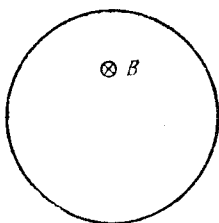


Рис. 3.38

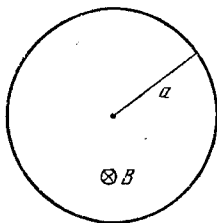


Рис. 3.39

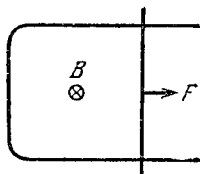


Рис. 3.40

3.207. Тонкий металлический стержень длины $l=1,200$ м вращается с частотой $n=120$ мин $^{-1}$ в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к стержню и отстоящей от одного из его концов на расстояние $l_1=0,250$ м. Вектор $\mathbf{B}$ параллелен оси вращения, $B=1,00$ мТл. Найти разность потенциалов U , возникающую между концами стержня.

3.208. Изолированный металлический диск радиуса $a=0,250$ м вращается с частотой $n=1000$ мин $^{-1}$. Найти разность потенциалов U между центром и краем диска, возникающую:

а) в отсутствие магнитных полей,

б) в случае, когда имеется перпендикулярное к диску однородное поле с индукцией $B=10,0$ мТл.

3.209. Между полюсами электромагнита помещена небольшая катушка, расположенная так, что оси катушки и полюсных наконечников магнита совпадают. Площадь поперечного сечения катушки $S=3,00$ мм ^{2} , число витков $N=60$. При повороте катушки на 180° через соединенный с ней баллистический гальванометр протекает заряд $q=4,50$ мкКл. Определить напряженность поля H между полюсами. Сопротивление катушки, гальванометра и соединительных проводов $R=40,0$ Ом.

3.210. На цилиндрический каркас диаметра $d=120$ мм намотано в один слой $N=100$ витков проволоки. Вся намотка разместилась на длине $l=60$ мм. Определить индуктивность L этой катушки. Магнитную проницаемость сердечника принять равной единице.

У к а з а н и е. Индуктивность однослойных катушек вычисляется по формуле $L=\alpha L_\infty$, где L_∞ — индуктивность идеального соленоида, во всем объеме которого поле такое

же, как у бесконечного соленоида с тем же значением N/l , α — коэффициент, приближенно определяемый выражением $\alpha = [1 + 0,45(d/l)]^{-1}$.

3.211. Из провода радиуса $a = 1,00$ мм сделана прямоугольная рамка, длина которой $l = 10,0$ м значительно больше ширины $b = 0,100$ м (измеренной между осями сторон рамки). Найти индуктивность L рамки. Магнитную проницаемость среды положить равной единице. Полем внутри провода пренебречь.

3.212. Найти индуктивность L_l проводов из задачи 3.120, приходящуюся на единицу их длины. Магнитную проницаемость материала проводов и окружающей среды принять равной единице.

3.213. Так называемый коаксиальный кабель состоит из двух коаксиально расположенных проводников, разделенных слоем диэлектрика. Определить емкость C_l и индуктивность L_l единицы длины кабеля, у которого радиус внутреннего проводника $a = 1,50$ мм, а радиус внешнего проводника (имеющего форму тонкостенной трубки) $b = 5,4$ мм. Диэлектриком служит полиэтилен ($\epsilon = 2,3$). Учесть, что при больших частотах (для которых предназначаются коаксиальные кабели) переменный ток течет по поверхности провода.

3.214. Определить индуктивность L обмотки из задачи 3.203. Рекомендуется вычислить L двумя способами — с помощью выражения для потока вектора $\mathbf{B}$ и с помощью выражения для энергии поля — и сравнить полученные результаты.

3.215. По соседству расположены два витка проволоки. По первому течет ток $I = 10,0$ А. В цепь второго включен баллистический гальванометр. Полное сопротивление второй цепи $R = 5,00$ Ом. Чему равна взаимная индуктивность L_{12} витков, если при выключении тока I через гальванометр проходит заряд $q = 1,00 \cdot 10^{-8}$ Кл?

3.216. На бесконечный соленоид с n витками на единицу длины и площадью поперечного сечения S намотана катушка из N витков. Найти взаимную индуктивность L_{12} катушки и соленоида. Проницаемость среды, заполняющей соленоид, равна μ .

3.217. Определить взаимную индуктивность L_{12} тороида и проходящего по его оси бесконечного прямого провода. Тороид имеет прямоугольное сечение ширины a . Внутренний радиус тороида равен r_1 , внешний r_2 . Число витков тороида равно N . Тороид и провод погружены в среду с проницаемостью μ .

3.218. Прямой провод с сопротивлением R_1 на единицу длины согнут под углом 2α (рис. 3.41). Перемычка из такого же провода, расположенная перпендикулярно к биссектрисе угла 2α , образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур. Этот контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное к его плоскости. Найти направление и силу I тока, текущего в контуре, когда перемычка движется с постоянной скоростью v . Сопротивлением в местах контактов 1 и 2 пренебречь.

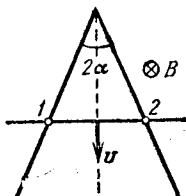


Рис. 3.41

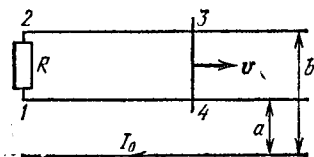


Рис. 3.42

3.219. Имеется бесконечный прямой провод, по которому течет ток силы I_0 . На расстояниях a и b от него расположены два параллельных ему неизолированных провода, закороченных на одном конце сопротивлением R (рис. 3.42). Все три провода лежат в одной плоскости. По закороченным сопротивлениям проводам скользит со скоростью v замыкающий их стержень 3—4. Определить:

а) силу I и направление тока в контуре 1—2—3—4,
 б) силу F , необходимую, чтобы поддерживать постоянной скорость стержня 3—4, и расстояние x от провода с током I_0 до точки, в которой нужно приложить эту силу, чтобы стержень двигался поступательно,

в) мощность P , затрачиваемую на перемещение стержня.

Сопротивлением проводов, стержня и контактов в точках 3 и 4 пренебречь.

3.220. По двум медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медный брусок массы m (рис. 3.43). В окружающем шины пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное к плоскости, в которой перемещается брусок. Вверху шины закорочены сопротивлением R . Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска равен k ($k < \tan \alpha$). Расстояние между шинами равно l . Пренебрегая сопротивлением шин, бруска и мест контакта между ними, найти установившуюся скорость бруска v .

3.221. Имеется устройство, отличающееся от рассмотренного в задаче 3.220 (см. рис. 3.43) лишь тем, что вместо сопротивления R к концам шин подключен конденсатор емкости C . Брусок устанавливается на шины и отпускается. Определить характер движения бруска в предположении, что электрическое сопротивление цепи равно нулю.

3.222. Металлический стержень массы m может качаться как маятник вокруг оси O (рис. 3.44). Нижним концом

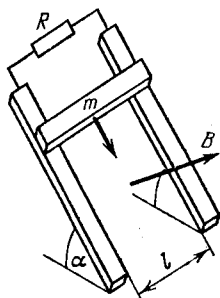


Рис. 3.43

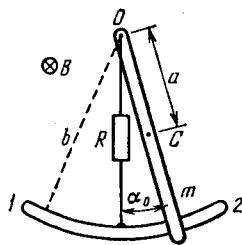


Рис. 3.44

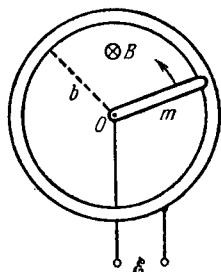


Рис. 3.45

стержень касается проводника 1—2, изогнутого по дуге радиуса b . Середина этого проводника закорочена с точкой подвеса O через сопротивление R . Все устройство помещено в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное к плоскости качаний. Расстояние от точки подвеса до центра масс C стержня равно a ; момент инерции стержня относительно оси, проходящей через C , равен I_0 . Пренебрегая трением, а также электрическим сопротивлением стержня, проводника 1—2 и места их касания, определить характер движения, совершаемого после того, как стержень отклоняют на малый угол α_0 и отпускают с нулевой начальной скоростью.

3.223. Имеется устройство, отличающееся от рассмотренного в задаче 3.222 (см. рис. 3.44) лишь тем, что вместо сопротивления R включен конденсатор емкости C . Считая сопротивление контура равным нулю, определить характер движения, совершаемого после того, как стержень отклоняют на малый угол α_0 и отпускают с нулевой начальной скоростью.

3.224. Стержень массы m может вращаться без трения вокруг оси O , скользя (также без трения) по кольцевому проводнику радиуса b , расположенному в вертикальной плоскости (рис. 3.45). Все устройство помещено в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное к

плоскости кольца. Ось и кольцо подключены к зажимам источника тока. Определить:

а) по какому закону должен изменяться ток I , текущий по стержню, для того чтобы стержень вращался с постоянной угловой скоростью ω . Отсчет времени начать с момента, когда стержень находится в правом горизонтальном положении; ток считать положительным, когда он течет от оси вращения к кольцу,

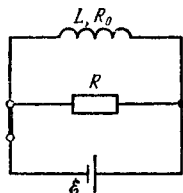


Рис. 3.46

б) какой должна быть э. д. с. источника $\mathcal{E}$, необходимая для поддержания требуемого тока.

Полное сопротивление цепи считать постоянным и равным R . Индуктивностью цепи пренебречь.

3.225. Катушка с индуктивностью $L=250$ мГн и сопротивлением $R=0,300$ Ом подключается к источнику постоянного напряжения. Через какой промежуток времени τ сила тока в катушке достигнет а) 50 %, б) 75 % установившегося значения? Сопоставьте оба значения τ .

3.226. Катушка с индуктивностью $L=2,00$ мкГн и сопротивлением $R_0=1,00$ Ом подключена к источнику постоянного тока с э. д. с. $\mathcal{E}=3,00$ В (рис. 3.46). Параллельно катушке включено сопротивление $R=2,00$ Ом. После того как ток в катушке достигает установившегося значения, источник тока отключается выключателем. Найти количество теплоты Q , выделившееся в сопротивлении R после разрыва цепи. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.

3.227. Железный сердечник, имеющий форму кольца с квадратным сечением, несет на себе обмотку из $N=1000$ витков. Внутренний радиус кольца $a=0,200$ м, внешний $b=0,250$ м. Определить энергию W , запасенную в сердечнике в том случае, когда по обмотке течет ток $I=1,26$ А. Определение произвести приближенно, полагая напряженность поля по всему сечению сердечника одинаковой и равной значению H в центре сечения.

3.228. На кольцо из задачи 3.227 намотана дополнительная обмотка из $N_1=20$ витков, которая подключена к баллистическому гальванометру. Общее сопротивление дополнительной обмотки, гальванометра и соединительных проводов $R=31,0$ Ом. Какой заряд q пройдет через гальванометр, если выключить ток, текущий в основной обмотке? Остаточной намагниченностью сердечника пренебречь.

3.9. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

3.229. Вычислить скорость v , которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов U , равную: а) 100 В, б) 100 кВ.

3.230. Для случая б) предыдущей задачи сравнить значения v_k и v_p , получающиеся по классической и релятивистской формулам.

3.231. Вначале электрон летит свободно со скоростью v_0 . В момент $t=0$ включается однородное электрическое поле с напряженностью E , образующее с направлением v_0 угол α .

а) По какой траектории движется электрон после включения поля?

б) Каков радиус кривизны R траектории в той точке, где скорость электрона минимальна?

в) Чему равно приращение импульса Δp электрона за время τ ?

г) Как изменяется со временем модуль момента импульса электрона M относительно точки, в которой находился электрон в момент включения поля?

3.232. В расположенном горизонтально плоском конденсаторе с зазором между пластинами $d=10,0$ мм находится заряженная капелька массы $m=6,40 \cdot 10^{-16}$ кг. В отсутствие напряжения между обкладками капелька падает с постоянной скоростью $v_1=0,078$ мм/с. После подачи на конденсатор напряжения $U=95,0$ В капелька движется равномерно вверх со скоростью $v_2=0,016$ мм/с. Определить заряд капельки e' .

3.233. Определить силу F , действующую на электрон в момент, когда он пересекает под прямым углом ось длинного соленоида в непосредственной близости от его конца. Сила тока в соленоиде $I=2,00$ А, число витков на единицу длины $n=3000$ м⁻¹. Скорость электрона $v=3,0 \cdot 10^7$ м/с. Магнитную проницаемость среды принять равной единице.

3.234. Первоначально α -частица движется свободно со скоростью $v=0,350 \cdot 10^7$ м/с. В некоторый момент времени в окрестности частицы создается перпендикулярное к ее скорости однородное магнитное поле с индукцией $B=1,000$ Тл. Найти:

а) радиус r траектории частицы,

б) модуль и направление ее магнитного момента p_m ,

в) отношение магнитного момента p_m частицы к ее механическому моменту M .

Заряд α -частицы $e' = 2e$, масса $m = 6,65 \cdot 10^{-27}$ кг.

3.235. Винтовая линия, по которой движется электрон в однородном магнитном поле, имеет диаметр $d = 80$ мм и шаг $l = 200$ мм. Индукция поля $B = 5,00$ мТл. Определить скорость электрона v .

3.236. В направленном вдоль оси x однородном магнитном поле с индукцией $B = 10,0$ мТл из некоторой точки O выходит в направлении x слегка расходящийся пучок моноэнергетических электронов, имеющих скорость $v = 6,0 \times 10^6$ м/с. Определить расстояние l от точки O до ближайшей точки, в которой пересекаются траектории всех электронов (точки, в которой фокусируется пучок).

3.237. Имеются однородные скрещенные поля E и B ($E \ll cB$). Выберем оси координат так, чтобы ось y была направлена вдоль вектора E , а ось z — вдоль вектора B . Поместим в начало координат частицу с массой m и зарядом e' и отпустим ее с нулевой начальной скоростью.

а) Как будет двигаться частица?

б) По какому закону изменяется со временем скорость частицы v ?

3.238. В приборе, аналогичном тому, с помощью которого Томсон определил отношение заряда электрона к его массе (рис. 3.47), электронный пучок может отклоняться в

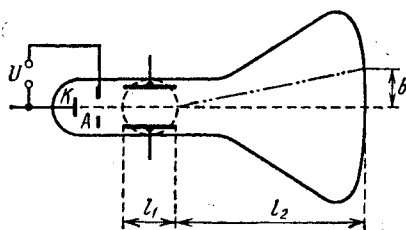


Рис. 3.47

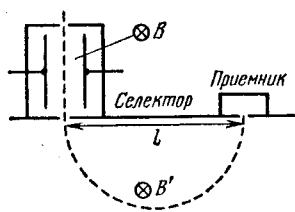


Рис. 3.48

вертикальном направлении либо с помощью вертикально направленного электрического поля, либо с помощью горизонтально направленного магнитного поля. Оба поля действуют на длине $l_1 = 50$ мм. Расстояние от отклоняющей системы до флуоресцирующего экрана $l_2 = 175$ мм. Электроны пучка ускоряются напряжением $U = 500$ В, приложенным между катодом K и анодом A . При некотором электрическом поле след пучка отклоняется по экрану на расстояние $b = 50$ мм. Включение магнитного поля с индукцией $B = 370$ мкТл возвращает след пучка в первоначальную точку.

Определить из приведенных данных удельный заряд электрона.

3.239. В масс-спектрометре Бейнбриджа (рис. 3.48) расстояние между выходной щелью селектора скоростей и входной щелью регистрирующего ионы прибора $l=400$ мм. Индукция магнитного поля $B'=B=50,0$ мТл. При плавном изменении напряженности электрического поля селектора наблюдаются пики ионного тока в приемнике при значениях $E_1=120$ В/см и $E_2=160$ В/см. Определить атомные массы A_{r1} и A_{r2} соответствующих ионов, полагая их однозарядными. Идентифицировать эти ионы (т. е. указать, какому химическому элементу они соответствуют).

3.240. Внутренний диаметр дуантов циклотрона $d=1,000$ м. Индукция магнитного поля $B=1,20$ Тл. Ускоряющее напряжение $U=100$ кВ. Найти:

а) максимальную энергию W , до которой могут быть ускорены в этом циклотроне протоны, и скорость v , приобретаемую протонами к концу ускорения,

б) время τ , в течение которого длится процесс ускорения,

в) приближенное значение пути s , проходимого протонами за это время.

3.241. Среднее значение магнитной индукции $\langle B \rangle$ поля, создаваемого магнитом бетатрона, изменяясь приблизительно по линейному закону, возрастает за время $\tau=1,00$ мс от нуля до значения $B_1=200$ мТл. Радиус орбиты электронов $r=300$ мм. Найти:

а) путь s , проходимый электронами за время ускорения до энергии $W=50$ МэВ,

б) скорость v электронов, ускоренных до такой энергии.

3.10. Электрические колебания

3.242. Конденсатор емкости C заряжается до напряжения U_0 и замыкается на катушку с индуктивностью L . Чему равна амплитуда I_m силы тока в образовавшемся колебательном контуре? Активным сопротивлением контура пренебречь.

3.243. Замкнутый контур в виде рамки с площадью $S=60,0$ см² равномерно вращается с частотой $n=20,0$ с⁻¹ в однородном магнитном поле с индукцией $B=20,0$ мТл. Ось вращения и направление поля взаимно перпендикулярны. Определить амплитудное $\mathcal{E}_m$ и действующее $\mathcal{E}$ значения э. д. с. в контуре.

3.244. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением $R=800$ Ом, индуктивностью $L=1,27$ Гн и емкостью $C=1,59$ мкФ. На зажимы цепи подано 50-периодное действующее напряжение $U=127$ В. Найти:

- действующее значение силы тока I в цепи,
- сдвиг по фазе φ между током и напряжением,
- действующие значения напряжений U_R , U_L и U_C на зажимах каждого из элементов цепи,
- мощность P , выделяющуюся в цепи.

3.245. Переменное напряжение, действующее значение которого $U=220$ В, а частота $\nu=50$ Гц, подано на катушку без сердечника с индуктивностью $L=31,8$ мГн и активным сопротивлением $R=10,0$ Ом.

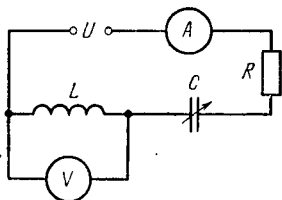


Рис. 3.49

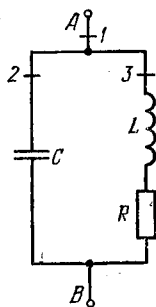


Рис. 3.50

а) Найти количество теплоты Q , выделяющееся в катушке за секунду.

б) Как изменится Q , если последовательно с катушкой включить конденсатор емкости $C=319$ мкФ?

3.246. На зажимы цепи, изображенной на рис. 3.49, подается переменное напряжение с действующим значением $U=220$ В и частотой $\nu=50$ Гц. Активное сопротивление цепи $R=22$ Ом, индуктивность $L=318$ мГн. Емкость цепи подбирается так, чтобы показание вольтметра, включенного параллельно катушке индуктивности, стало максимальным. Найти показания вольтметра U_1 и амперметра I в этих условиях. Полным сопротивлением амперметра и ответвлением тока в цепь вольтметра можно пренебречь.

3.247. На точки A и B схемы, изображенной на рис. 3.50, подается переменное напряжение с действующим значением $U=220$ В. Емкость контура $C=1,00$ мкФ, индуктивность $L=1,00$ мГн, активное сопротивление $R=100$ мОм.

а) При каком значении частоты ω ток через сечение 1 будет минимальным?

б) Чему равны при этой частоте действующие значения I_1 , I_2 и I_3 сил токов, текущих через сечения 1, 2 и 3?

3.248. Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью $L=1,00$ мГн и переменного конденсатора, емкость которого может изменяться в пределах от 9,7 до 92 пФ. В каком диапазоне длин волн может принимать радиостанции этот приемник?

3.249. Активное сопротивление колебательного контура $R=0,33$ Ом. Какую мощность P потребляет контур при поддержании в нем незатухающих колебаний с амплитудой силы тока $I_m=30$ мА?

3.250. Параметры колебательного контура имеют значения: $C=1,00$ нФ, $L=6,00$ мкГн, $R=0,50$ Ом. Какую мощность P нужно подводить к контуру, чтобы поддерживать в нем незатухающие колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m=10,0$ В?

3.251. Параметры колебательного контура имеют значения: $C=4,00$ мкФ, $L=0,100$ мГн, $R=1,00$ Ом.

а) Чему равна добротность контура Q ?

б) Какую относительную погрешность мы сделаем, вычислив добротность по приближенной формуле $Q=R^{-1}\sqrt{L/C}$?

3.252. Добротность колебательного контура $Q=10,0$. Определить, на сколько процентов отличается частота свободных колебаний контура ω от собственной частоты контура ω_0 . (Найти $(\omega_0-\omega)/\omega_0$.)

3.253. Собственная частота колебаний контура $\nu_0=8,0$ кГц, добротность $Q=72$. В контуре возбуждают затухающие колебания.

а) Найти закон убывания запасенной в контуре энергии W со временем t .

б) Какая часть первоначальной энергии W_0 сохранится в контуре по истечении времени $\tau=1,00$ мс?

3.254. Какой должна быть добротность контура Q , чтобы частота, при которой наступает резонанс токов, отличалась от частоты, при которой наступает резонанс напряжений, не более чем на 1 %?

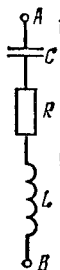


Рис. 3.51

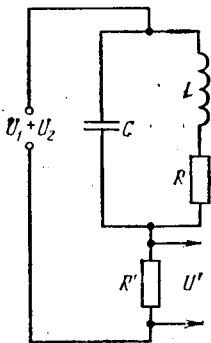


Рис. 3.52

3.255. Емкость цепи, изображенной на рис. 3.51, $C = 1000$ пФ, индуктивность $L = 1,00$ мГн. На точки A и B подается одновременно два переменных напряжения одинаковой амплитуды, но различной частоты: частота первого напряжения совпадает с собственной частотой контура ($\omega_1 = \omega_0$), частота второго напряжения превышает собственную на 10 % ($\omega_2 = 1,10 \omega_0$). Найти отношение амплитуд токов I_1/I_2 , возбуждаемых в контуре обоими напряжениями, для случаев, когда добротность контура Q равна: а) 100, б) 10.

3.256. Колебательный контур, изображенный на рис. 3.52, имеет емкость $C = 1,00$ нФ и индуктивность $L = 10,0$ мкГн. На контур и соединенное с ним последовательно сопротивление $R' = 10,0$ Ом подаются одновременно два одинаковых по амплитуде, но различных по частоте напряжения U_1 и U_2 . Амплитуда каждого из напряжений равна 10,0 В. Частота первого напряжения совпадает с резонансной частотой контура ($\omega_1 = \omega_{рез}$), частота второго напряжения превышает резонансную на 10 % ($\omega_2 = 1,10 \omega_{рез}$). Найти амплитуды напряжений U'_1 и U'_2 , снимаемых с сопротивления R' , в случаях, когда добротность контура Q равна: а) 200, б) 20.

ВОЛНЫ

Обозначения:

A, a — амплитуда
 $\hat{A}$ — комплексная амплитуда
 E — напряженность электрического поля
 E — модуль Юнга
 E_k — кинетическая энергия
 F — сила
 H — напряженность магнитного поля
 I — интенсивность волны, сила тока
 j — плотность потока энергии
 K — импульс
 k — волновой вектор
 k — волновое число
 L — уровень громкости звука
 l — длина, расстояние
 M — молярная масса
 m — масса
 P — мощность
 p — давление
 R — газовая постоянная
 r — радиус, расстояние
 S — вектор Пойнтинга
 T — термодинамическая температура

t — время
 u, v — скорость
 V — объем
 v — фазовая скорость
 W — энергия
 w — плотность энергии
 α — начальная фаза
 γ — коэффициент затухания волны, отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме
 ϵ — диэлектрическая проницаемость
 κ — коэффициент поглощения волны
 λ — длина волны
 μ — магнитная проницаемость
 ν — частота
 ξ — смещение частицы из положения равновесия
 ρ — плотность
 ρ_l — линейная плотность (масса единицы длины)
 τ — время
 φ — угол, фаза
 ω — круговая частота

4.1. Упругие волны

4.1. Какую волну — продольную или поперечную — описывает уравнение $\xi = a \cos(\omega t - kx)$?

4.2. Упругая волна переходит из среды, в которой фазовая скорость волны равна v , в среду, в которой фазовая скорость в два раза больше. Что происходит при этом с частотой волны ω и длиной волны λ ?

4.3. Вдоль оси x распространяется плоская волна длины λ . Чему равно наименьшее расстояние Δx между точками среды, в которых колебания совершаются в противофазе?

4.4. На рис. 4.1 дана «моментальная фотография» смещений ξ частиц среды, в которой распространяется вдоль оси x упругая волна. Указать направления скоростей частиц в точках A , B и C в случае:

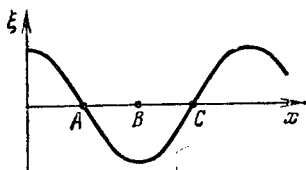


Рис. 4.1

- а) продольной волны,
- б) поперечной волны, колебания в которой происходят в плоскости рисунка.

4.5. В однородной среде распространяется плоская упругая волна, описываемая уравнением $\xi = a \exp(-\gamma x) \times \cos(\omega t - kx)$. Положив $\lambda = 1,00$ м и $\gamma = 0,100$ м⁻¹, найти разность фаз $\delta\phi$ в точках, для которых отношение амплитуд смещения частиц среды $\eta = 1,0100$.

4.6. Какие данные содержит в себе комплексная амплитуда $\hat{A}$?

4.7. Два когерентных колебания одинакового направления характеризуются комплексными амплитудами $\hat{A}_1 = 5 \exp(i\pi/6)$ и $\hat{A}_2 = 6 \exp(i\pi/3)$. Найти комплексную амплитуду $\hat{A}$ результирующего колебания.

4.8. Написать уравнение цилиндрической гармонической волны, излучаемой источником в виде бесконечной прямой нити.

4.9. Исследование некоторой физической величины показало, что она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

где α — постоянная величина, числовое значение которой в СИ равно $1,44 \cdot 10^8$.

а) Определить из вида уравнения размерность величины α .

б) Что можно утверждать относительно величины f ?

4.10. Что описывает уравнение вида $\xi = f(\omega t - kx)$, где f — некоторая функция, ω и k — константы? Какой смысл имеет величина ω/k ?

4.11. Определить скорость v продольных упругих волн в медном стержне. Положить модуль Юнга $E = 1,12 \cdot 10^{11}$ Па.

4.12. На рис. 4.2 дана «моментальная фотография» смещений частиц в бегущей волне.

1. Указать места, в которых деформация среды: а) отсутствует, б) максимальна.

2. Чему равна (нулю, отлична от нуля, максимальна)

плотность кинетической, потенциальной и полной энергии в точках: а) A и C , б) B и D ?

4.13. В упругой среде распространяется продольная плоская волна $\xi = a \cos(\omega t - kx)$. Изобразить для $t=0$ один под другим примерные графики зависимости смещения ξ от x и зависимости плотности среды ρ от x .

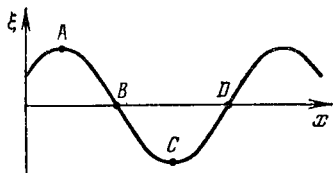


Рис. 4.2

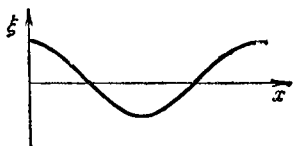


Рис. 4.3

4.14. На рис. 4.3 дан график смещений ξ в бегущей волне для некоторого момента времени t . Нарисовать под этим графиком примерный график плотности энергии w для того же момента t .

4.15. В упругой среде плотности ρ бежит вдоль оси x волна $\xi = a \cos(\omega t - kx + \alpha)$. Написать выражение для вектора Умова $\mathbf{j}$ (вектора плотности потока энергии).

4.16. Что представляет собой поток вектора Умова через некоторую поверхность S ?

4.17. По трубе с площадью сечения S бежит плоская затухающая волна [амплитуда волны убывает по закону $\exp(-\gamma x)$]. В сечении с координатой x_1 среднее (по времени) значение модуля вектора Умова равно j_1 . Какая энергия W поглощается за время t , много большее периода волны, в объеме, заключенном между сечениями с координатами x_1 и x_2 ?

4.18. По какому закону убывает с расстоянием r от источника интенсивность затухающей а) сферической, б) цилиндрической волны?

4.19. От двух точечных когерентных источников распространяются по поверхности воды две волны. Какую форму имеют линии, для которых амплитуда колебаний максимальна?

4.20. На рис. 4.4 изображена картина смещений в стоячей волне для момента времени t , когда смещения достигают максимального значения.

1. Чему равно (нулю или отлично от нуля) мгновенное значение потока энергии через каждую из поверхностей 1, 2, 3, ..., 9: а) в момент t , б) в моменты времени, следующие за t ?

2. Чему равен средний (по времени) поток энергии через те же поверхности?

3. Как направлен вектор Умова $\vec{j}$ в течение следующей за моментом t четверти периода для поверхностей 2, 4, 6, 8?

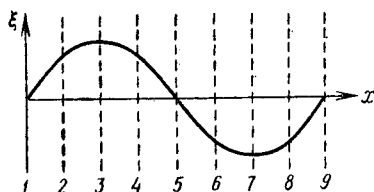


Рис. 4.4

4. Тот же вопрос, что и 3, для последующей четверти периода.

4.21. Найти характер движения частиц упругой среды, в которой распространяются две плоские поперечные волны — одна

вдоль оси x , другая вдоль оси y . Колебания в обеих волнах происходят вдоль оси z . Длины и амплитуды обеих волн одинаковы и равны λ и a . Разность начальных фаз волн равна α .

4.22. Решить задачу 4.21, заменив поперечные волны продольными.

4.2. Акустика

4.23. При некотором натяжении струны длины $l = 1,000$ м частота основного тона струны оказывается равной $\nu = 1000$ Гц. Какова скорость v распространения волны по струне в этих условиях?

4.24. Как изменится частота основного тона струны, если

а) середину струны прижать пальцем к грифу,

б) изменив натяжение струны, увеличить скорость распространения волны по струне в три раза?

4.25. Имеется струна массы m , круговая частота основного тона которой равна ω_1 . В струне возбуждена n -я гармоника (основному тону соответствует $n=1$). Чему равна амплитуда a_n в пучностях струны в случае, если средняя за период колебаний кинетическая энергия струны равна $\langle E_k \rangle$?

4.26. Скорость распространения волны по струне определяется формулой $v = \sqrt{F/\rho_l}$, где F — сила натяжения струны, ρ_l — линейная плотность (масса единицы длины) струны. Определить силу натяжения, при которой основным тоном стальной струны диаметра $d = 0,500$ мм и длины $l = 0,500$ м будет ля первой октавы ($\nu = 440$ Гц). Плотность стали принять равной $\rho = 7,80$ г/см³.

4.27. Предельная высота звука, достигнутая певицами, равна 2,35 кГц. С какой силой F нужно было бы натянуть струну из предыдущей задачи, чтобы ее основной тон имел такую частоту?

4.28. Как изменится частота основного тона струны, если линейную плотность струны увеличить в два раза? Натяжение струны предполагается неизменным.

4.29. Стальной стержень длины 1,00 м закреплен в середине. Положив модуль Юнга равным $2,00 \cdot 10^{11}$ Па, найти частоты ν_n собственных продольных колебаний стержня. Плотность стали $\rho = 7,8$ г/см³.

4.30. Имеется закрытая с одного конца труба длины $l = 1,00$ м. Положив скорость звука $v = 340$ м/с, определить собственные частоты ν_n колебаний воздуха в трубе.

4.31. Отверстие в торце замочного ключа имеет глубину $l = 17$ мм. Если дуть вблизи торца в направлении, перпендикулярном к оси отверстия, в столбе воздуха, находящемся в отверстии, возникают звуковые колебания. Чему равна частота ν основного тона этих колебаний?

4.32. Что будет слышать человек, если на его ухо будут воздействовать одновременно две звуковые волны с примерно одинаковой амплитудой и частотами, равными: а) 500 и 550 Гц, б) 50 и 51 Гц, в) 10 и 11 Гц?

4.33. Из проволоки, один метр которой имеет массу $\rho_l = 1,00$ г, изготовлены две струны — одна длины $l_1 = 51,0$ см, другая $l_2 = 49,0$ см. Струны натянуты с одинаковой силой $F = 200$ Н. Какова будет частота $\Delta \nu$ биений, которые возникнут, если обе струны заставить колебаться одновременно?

4.34. В каком газе при одной и той же температуре скорость звука v больше — в азоте (N_2) или в углекислом газе (CO_2)? Во сколько раз? Колебательные степени свободы молекул газов не возбуждаются.

4.35. 1. Определить скорость звука в воздухе при температуре: а) $-40^\circ C$, б) $0^\circ C$, в) $40^\circ C$.

2. Найти отношение найденных значений, приняв скорость при $0^\circ C$ за единицу.

4.36. Предположим, что температура воздуха изменяется с высотой h по линейному закону от значения $T_1 = 300$ К при $h_1 = 0$ до значения $T_2 = 250$ К на высоте $h_2 = 10,0$ км. Сколько времени t потребуется возбужденной на высоте h_2 звуковой волне, чтобы достичь земной поверхности?

4.37. Во сколько раз уменьшается на некотором пути интенсивность волны, если затухание на этом пути составляет 30 дБ?

4.38. Вдоль оси x в воздухе распространяется плоская звуковая волна. Коэффициент поглощения звука $\kappa = 2,07 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$. В плоскости $x=0$ уровень громкости звука $L_0=100$ дБ. Найти уровень громкости L для x , равных: а) 2,00 км, б) 4,00 км, в) 6,00 км, г) 8,00 км, д) 10,00 км.

4.39. От изотропного источника в воздухе распространяется сферическая звуковая волна. На расстоянии $r_0=100$ м от источника уровень громкости звука $L_0=100$ дБ. Полагая, что поглощения звука в воздухе нет, найти уровень громкости L на расстоянии r , равном: а) 2,00 км, б) 4,00 км, в) 6,00 км, г) 8,00 км, д) 10,00 км. Сравнить результат с ответом к задаче 4.38.

4.40. Изотропный источник возбуждает в воздухе сферическую звуковую волну частоты 3 кГц. На расстоянии $r_1=100$ м от источника уровень громкости звука $L_1=60$ дБ. Определить уровень громкости L_2 на расстоянии $r_2=200$ м и расстояние r_0 , на котором звук перестает быть слышимым: а) положив коэффициент поглощения звука в воздухе $\kappa = 2,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$, б) пренебрегая поглощением. Сравнить полученные результаты.

4.41. Два звука в некотором газе отличаются по уровню громкости на $L_{12}=20,0$ дБ. Найти отношение амплитуд колебаний давления $(\Delta p)_m$ для этих звуков.

4.42. Найти для звука частоты 3 кГц амплитуду колебаний давления воздуха $(\Delta p)_m$, соответствующую: а) порогу слышимости, б) уровню громкости $L=100$ дБ. Положить $T=293 \text{ К}$, $p=1000 \text{ гПа}$.

4.43. Для звуковой волны, описываемой уравнением

$$\xi = 1,00 \cdot 10^{-4} \cos(6280t - 18,5x),$$

где множитель при косинусе выражен в м, множитель при t — в с^{-1} , множитель при x — в м^{-1} , найти:

- амплитуду скорости v_m частиц среды,
- отношение амплитуды a смещения частиц среды к длине волны λ ,
- отношение амплитуды скорости частиц v_m к скорости распространения волны v .

4.44. Покоящийся источник испускает по всем направлениям звуковую волну длины λ_0 . Как изменится длина волны, если источник привести в движение со скоростью, равной половине скорости звука?

4.45. По прямому шоссе едет со скоростью $v_1=60$ км/ч легковой автомобиль. Его догоняет движущаяся со ско-

ростью $v_2=90$ км/ч специальная автомашина с включенным звуковым сигналом частоты $\nu_0=1,00$ кГц. Сигнал какой частоты ν будут слышать пассажиры автомобиля? Считать скорость звука $v=340$ м/с.

4.46. Два электропоезда движутся по прямолинейному участку пути во встречных направлениях с одинаковой скоростью $v=50$ км/ч. Поравнявшись, машинисты приветствуют друг друга продолжительными гудками. Частота обоих сигналов одинакова и равна $\nu_0=200$ Гц. Что слышит железнодорожный рабочий, находящийся на путях на некотором расстоянии от места встречи поездов. Температура воздуха равна -10°C .

4.47. Два электропоезда идут с одинаковой скоростью $v=90$ км/ч по прямому пути вслед друг другу с интервалом между ними $l=2,00$ км. В момент, когда они оказываются расположенными симметрично относительно точки A , отстоящей от железнодорожного пути на расстояние $b=1,00$ км (рис. 4.5), оба поезда дают кратковременный звуковой сигнал одинаковой частоты $\nu_0=500$ Гц. Каков будет характер звука в точке A , когда в нее придут колебания, возбужденные сигналами? Скорость звука $u=350$ м/с.

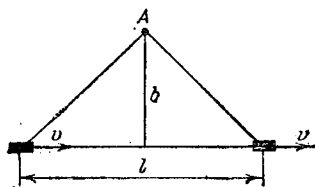


Рис. 4.5

4.48. По прямому участку дороги движутся в одном направлении с одинаковой скоростью 90 км/ч два автомобиля (второй позади первого). Когда вдали показался едущий навстречу со скоростью 72 км/ч третий автомобиль, водитель первого автомобиля дал продолжительный звуковой сигнал частоты 700 Гц. Звук какой частоты воспримут пассажиры второго и третьего автомобилей? Температура воздуха равна 30°C .

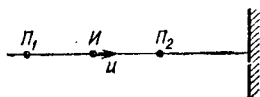


Рис. 4.6

4.49. Вблизи неподвижной стенки расположены в указанной на рис. 4.6 последовательности приемники P_1 и P_2 , а также источник I , генерирующий звук частоты $\nu_0=1000$ Гц. Приемники неподвижны, источник же движется по направлению к стенке со скоростью $u=8,5$ м/с. Скорость звука $v=340$ м/с.

- Какой из приемников будет регистрировать биения?
- Какова частота этих биений?

4.3. Электромагнитные волны

4.50. В вакууме распространяется вдоль одной из координатных осей плоская электромагнитная волна. Написать возможные выражения (через параметры волны и орт одной из осей) для волнового вектора $\mathbf{k}$ в случае, если а) вектор $\mathbf{E}$ коллинеарен с $\mathbf{e}_y$, частота волны равна ω , б) вектор $\mathbf{H}$ коллинеарен с $\mathbf{e}_z$, длина волны равна λ .

4.51. В однородной и изотропной среде с $\epsilon=3,00$ и $\mu=1,00$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_m=10,0$ В/м. Найти:

а) амплитуду напряженности магнитного поля волны H_m ,

б) фазовую скорость v волны.

4.52. Распространяющаяся в вакууме плоская электромагнитная волна, описываемая уравнениями

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t - kx),$$

отражается без потери интенсивности от плоскости, перпендикулярной к оси x . Написать уравнения, описывающие отраженную волну.

4.53. Рассмотреть суперпозицию двух плоских электромагнитных волн, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях. Определить:

1. Координаты пучностей $x_{\text{пучн}}$ и узлов $x_{\text{узл}}$ для а) электрического вектора $\mathbf{E}$ и б) магнитного вектора $\mathbf{H}$ возникшей в результате суперпозиции стоячей волны. Для упрощения формул начальную фазу α в уравнениях прямой и обратной волн считать равной нулю. Сравнить результаты, полученные для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

2. Как соотносятся фазы колебаний векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

4.54. В некоторой среде распространяется электромагнитная волна частоты ω . При частоте ω диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon=2,00$, магнитная проницаемость практически равна единице. Найти вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ в той точке, в которой электрический вектор изменяется по закону $\mathbf{E}=10,0 \cos(\omega t + \alpha)\mathbf{e}_z$ (В/м). Амплитуда вектора $\mathbf{H}$ имеет вид $H_m\mathbf{e}_x$.

4.55. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с ω порядка 10^{10} с^{-1} . Амплитуда электрического вектора волны $E_m=0,775$ В/м. На пути волны располагается поглощающая волну поверхность, имеющая форму полусферы радиуса $r=0,632$ м, обращенная своей вершиной

в сторону распространения волны. Какую энергию W поглощает эта поверхность за время $\tau=1,00$ с?

4.56. Плоский конденсатор с круглыми пластинами заряжается постоянным током в течение времени τ до напряжения U . Зазор между пластинами равен d . Проведя между пластинами коаксиальную с ними воображаемую цилиндрическую поверхность, радиус которой r много меньше радиуса пластин, определить:

а) модуль и направление вектора Пойнтинга в точках поверхности,

б) количество энергии W , протекающей через поверхность за время τ . Сравнить W с энергией электрического поля, содержащейся в ограниченном поверхностью объеме V после окончания процесса зарядки.

4.57. Сила тока в очень длинном соленоиде увеличивается равномерно от нуля до I в течение времени τ . Число витков соленоида на единицу длины равно n . Проведя внутри соленоида в средней его части коаксиальную с ним воображаемую замкнутую поверхность длины l и радиуса r , определить:

а) модуль и направление вектора Пойнтинга в точках поверхности,

б) количество энергии W , протекающей через поверхность за время τ . Сравнить W с энергией магнитного поля, содержащейся в ограниченном поверхностью объеме V после установления силы тока I .

4.58. В вакууме распространяется вдоль оси x плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны $H_m=0,0500$ А/м. Определить:

а) амплитуду напряженности электрического поля волны E_m ,

б) среднюю по времени плотность энергии волны $\langle w \rangle$,

в) интенсивность волны I ,

г) среднюю по времени плотность импульса волны $\langle K_{\text{ед. об.}} \rangle$.

4.59. Описанная в задаче 4.58 волна падает по нормали на поверхность тела, полностью поглощающего волну. Чему равно давление p , оказываемое волной на тело?

4.60. Стержень из сегнетоэлектрика имеет направленную вдоль его оси поляризованность $\mathcal{P}=0,050$ Кл/м². Диаметр стержня $d=5,00$ мм, длина $l=200$ мм. Стержень приводят во вращение вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через его центр с угловой скоростью $\varphi=314$ рад/с (3000 об/мин). Найти длину волны λ и мощность P излучения стержня.

4.61. Электромагнитная волна, излучаемая элементарным диполем, распространяется в вакууме. В волновой зоне на луче, проведенном из диполя перпендикулярно к его оси, в точке, находящейся на расстоянии $r=1,00$ м от диполя, амплитуда напряженности электрического поля $E_m=1,00$ мВ/м. Вычислить мощность P излучения диполя (т. е. энергию, излучаемую диполем в единицу времени по всем направлениям).

4.62. Какая часть η всей мощности излучения диполя приходится на интервал углов ϑ от 70 до 110° (ϑ — угол с осью диполя)?

4.63. Радиус круговой орбиты электрона в бетатроне $r=15,0$ см. В конце цикла ускорения скорость электрона достигает значения $v=0,99995$ с. Найти мощность P излучения электрона при этой скорости.

4.64. Электрон движется в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{B}$. Индукция поля $B=1,00$ Тл, скорость электрона $v=1,00 \cdot 10^7$ м/с. Определить:

а) какую долю η своей кинетической энергии теряет электрон на излучение за один оборот,

б) за какое время τ кинетическая энергия электрона уменьшится на 1 %,

в) число оборотов N , которое совершит электрон за время τ .

4.65. Решить задачу 4.64, заменив электрон протоном.

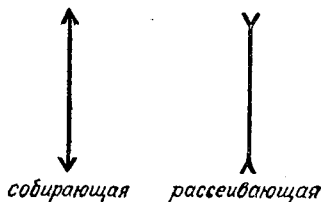
ОПТИКА

Обозначения:

A — амплитуда колебания, амплитуда световой волны, механический эквивалент света
 a — амплитуда, расстояние
 b — расстояние, толщина, ширина
 c — скорость света в вакууме
 D — дисперсия дифракционной решетки
 d — диаметр, период дифракционной решетки, расстояние
 E — световой вектор
 E — напряженность электрического поля, освещенность
 F — передний фокус оптической системы, сила
 F' — задний фокус оптической системы
 f — переднее фокусное расстояние
 f' — заднее фокусное расстояние
 H — напряженность магнитного поля, передняя главная плоскость оптической системы
 H' — задняя главная плоскость оптической системы

I — интенсивность света, сила света
 j — плотность потока
 k — волновой вектор
 L — яркость
 l — длина, расстояние
 M — светимость
 m — масса, целое число
 N — узловая точка оптической системы
 n — концентрация частиц, показатель преломления
 P — степень поляризации
 R — радиус, разрешающая сила оптического прибора
 r — радиус, расстояние
 u — групповая скорость, скорость
 V — объем, относительная спектральная чувствительность человеческого глаза
 v — параметр, скорость, фазовая скорость
 λ — длина световой волны в веществе
 λ_0 — длина световой волны в вакууме
 ρ — радиус когерентности
 Φ — оптическая сила, световой поток
 ω — круговая частота

Тонкая линза условно изображается в виде



5.1. Геометрическая оптика. Фотометрия

5.1. Сколько времени требуется световой волне, чтобы пройти расстояние, равное: а) среднему расстоянию от Солнца до Земли, б) среднему расстоянию от Луны до Земли, в) диаметру Солнца, г) диаметру Земли?

5.2. Свет, имеющий в воздухе длину волны 665 нм, в воде имеет длину волны 500 нм. Означает ли это, что цветовое восприятие глазом этого света в воздухе и в воде будет разным?

5.3. Для некоторой длины волны показатель преломления плоскопараллельной прозрачной пластинки изменяется от значения $n_1=1,40$ на одной из поверхностей до $n_2=1,60$ на другой. Толщина пластинки $d=10,0$ мм.

а) Какое время t затрачивает свет на прохождение пластинки в перпендикулярном к ней направлении?

б) С какой средней скоростью $\langle v \rangle$ распространяется свет в пластинке (выразить ее через c)?

5.4. Секунда определяется как промежуток времени, равный сумме 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. Чему равна длина волны λ этого излучения?

5.5. Воспользовавшись принципом Гюйгенса, доказать, что отношение показателей преломления двух сред обратно отношению скоростей света в этих средах: $n_1/n_2=v_2/v_1$.

5.6. При каком значении угла падения светового луча на границу раздела двух сред (с показателями преломления n_1 и n_2) отраженный и преломленный лучи образуют угол $\pi/2$?

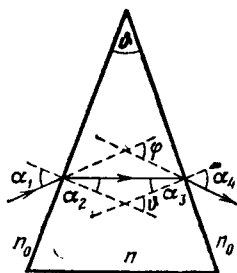


Рис. 5.1

5.7. а) Найти выражение для угла отклонения φ луча призмой (рис. 5.1), ограничившись случаем, когда преломляющий угол призмы $\vartheta \ll 1$ рад, а углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ таковы, что синусы

этих углов с достаточной степенью точности можно заменить самими углами (если $\alpha=5^\circ$, $\sin \alpha$ отличается от α на 0,13 %, если $\alpha=10^\circ$, — на 0,5 %). Показатель преломления призмы равен n , окружающей среды — n_0 . Предполагается, что падающий луч (а следовательно, и вышедший из призмы луч) лежит в главном сечении призмы, т. е. в плоскости, перпендикулярной к преломляющему ребру.

б) Чем примечателен полученный результат?

5.8. Заднее фокусное расстояние f' линзы равно а) 200 мм, б) — 400 мм. Чему равна оптическая сила Φ линзы?

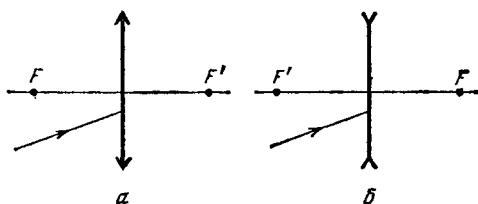


Рис. 5.2

5.9. В каком случае световой луч проходит через центр тонкой линзы, не изменяя своего направления?

5.10. Где помещаются узловые точки N и N' тонкой линзы, если среда по обе стороны линзы одна и та же?

5.11. Построить ход луча за тонкой линзой (рис. 5.2). Показатель преломления среды по обе стороны линзы одинаков.

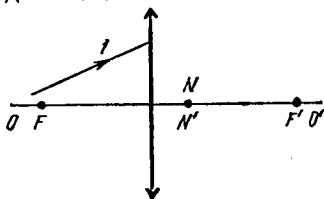


Рис. 5.3

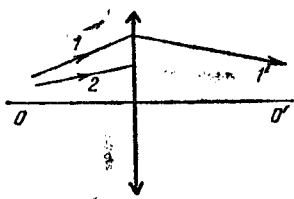


Рис. 5.4

5.12. На рис. 5.3 показана тонкая собирающая линза, ее фокусы F и F' и совпадающие узловые точки N и N' . Требуется построить ход луча 1 за линзой.

5.13. На рис. 5.4 изображена тонкая собирающая линза, ее оптическая ось OO' , сопряженные лучи 1 и $1'$, а также луч 2 . Требуется построить сопряженный с лучом 2 луч $2'$ ($n=n'$).

5.14. В задней фокальной плоскости тонкой собирающей линзы расположено зеркало (рис. 5.5). Произведя построение хода луча 1 в пространстве между линзой и зеркалом, а затем — по выходе из линзы, определить, в каком соотношении находятся направление луча, вышедшего из линзы влево, и направление луча 1 .

5.15. Имеются собирающая линза 1 и рассеивающая линза 2 , расположенные так, что их задние фокусы F'_1 и F'_2

совпадают (рис. 5.6). Среда между линзами и по обе стороны от линз одна и та же. В передней фокальной плоскости линзы l помещается предмет P . Построив изображение предмета, ответить на вопросы:

1. Где располагается изображение?
2. Каким будет изображение: а) действительным или мнимым, б) прямым или обратным?

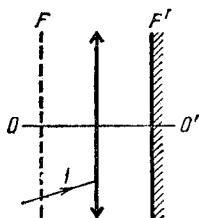


Рис. 5.5

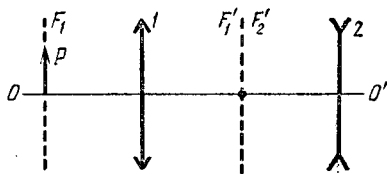


Рис. 5.6

3. В каком случае размер изображения совпадает с размером предмета?

5.16. На рис. 5.7 даны ось, главные и фокальные плоскости центрированной оптической системы, а также предмет P . Плоскости H и H' находятся вне системы.

- а) Построить изображение P' предмета P .
- б) Основываясь на свойствах главных плоскостей, ответить на вопрос: что будет происходить с изображением P' при перемещении предмета P к плоскости H ?

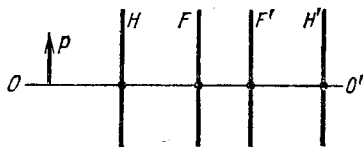


Рис. 5.7

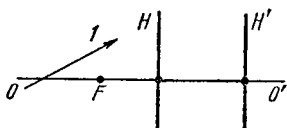


Рис. 5.8

5.17. На рис. 5.8 показаны: оптическая ось OO' центрированной оптической системы, главные плоскости H и H' , передний фокус F и луч l . Среда по обе стороны системы одна и та же. Построить сопряженный с лучом l луч l' .

5.18. На плоскую поверхность падает по нормали к ней монохроматическая световая волна с $\lambda=510$ нм. Интенсивность волны $I=0,32$ Вт/м². Воспользовавшись изображенным на рис. 5.9 графиком относительной спектральной чувствительности глаза, определить освещенность E поверхности. При $\lambda=555$ нм световому потоку в 1 лм соответ-

ствует поток энергии, равный 0,00160 Вт. Величину $A = 0,00160$ Вт/лм называют иногда механическим эквивалентом света.

5.19. Световому потоку в 1 лм, образованному излучением с $\lambda = 555$ нм, соответствует поток энергии, равный

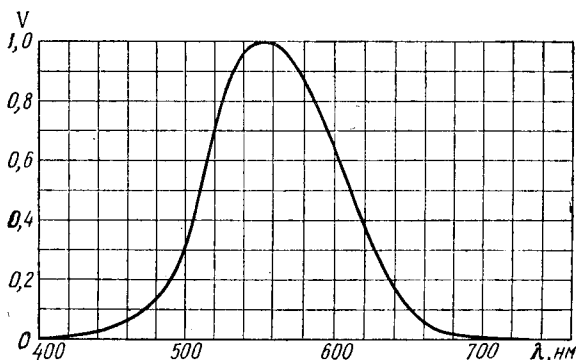


Рис. 5.9

0,00160 Вт. Какой поток энергии соответствует световому потоку в 100 лм, образованному излучением, для которого относительная спектральная чувствительность глаза $V = 0,762$?

5.20. Какой световой поток соответствует потоку энергии в 1,00 Вт, образованному излучением, для которого относительная спектральная чувствительность глаза $V = 0,342$?

5.21. Допустим, что связанный со световой волной поток энергии распределен равномерно по длинам волн, т. е. $d\Phi_s/d\lambda = \text{const}$. Как выглядела бы в этом случае кривая распределения светового потока по длинам волн?

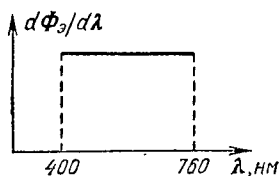


Рис. 5.10

5.22. Допустим, что световой поток распределен равномерно по длинам волн в интервале от 400 до 760 нм (рис. 5.10).

а) Как выглядел бы в этом случае график функции распределения световой энергии по длинам волн?

б) Возможно ли такое распределение?

5.23. Монохроматическая световая волна с $\lambda = 510$ нм при нормальном падении на некоторую поверхность создает освещенность $E = 100$ лк. Определить давление p , оказы-

ваемое светом на поверхность, если отражается половина падающего света.

5.24. Интенсивность (средняя плотность светового потока) монохроматической световой волны $I=100$ лм/м². Частота волны $\omega=3,69 \cdot 10^{15}$ с⁻¹. Показатель преломления среды, в которой распространяется волна, $n=1,50$, магнитная проницаемость $\mu=1$. Найти значения амплитуд E_m и H_m напряженностей электрического и магнитного полей этой волны.

5.25. Точечный изотропный источник света испускает по всем направлениям поток $\Phi=1257$ лм. Чему равна сила света I этого источника?

5.26. Параллельный пучок лучей, несущий однородный световой поток плотности $j=200$ лм/м², падает на плоскую поверхность, внешняя нормаль к которой образует с направлением лучей угол $\alpha=120^\circ$. Какова освещенность E этой поверхности?

5.27. На высоте $h=3,00$ м над полом висит точечный осесимметричный источник, сила света которого описывается функцией $I(\vartheta)=I_0 \cos^2 \vartheta$ в пределах $0 \ll \vartheta \ll \pi/2$ и равна нулю при $\vartheta > \pi/2$ (I_0 — константа, ϑ — угол, образуемый световым лучом с вертикалью). Освещенность пола под источником $E=100$ лк. Определить световой поток Φ , излучаемый источником.

5.28. Точечный изотропный источник света помещается над центром круглого стола. Сила света источника $I=50,0$ кд, радиус стола $R=0,500$ м, высота источника над столом $h=1,00$ м. Определить:

1. Зависимость освещенности E стола от расстояния r от центра.

2. Значение освещенности: а) в центре, б) на краю стола.

3. Поток света Φ , падающий на стол.

4. Какая доля η полного потока, испускаемого источником, падает на стол?

5.29. Как должна зависеть от угла ϑ между направлением луча и вертикалью сила света $I(\vartheta)$ источника из предыдущей задачи для того, чтобы падающий на стол поток $\Phi=33$ лм (см. ответ к п. 3 задачи 5.28) распределялся по поверхности стола равномерно? Какова будет при этом освещенность E стола? Сравнить значение E с ответом к пп. 2а и 2б предыдущей задачи.

5.30. Яркость однородно светящейся плоской поверхности описывается функцией $L(\vartheta, \varphi)$ (ϑ — угол с нормалью к поверхности, φ — азимутальный угол). Написать выражение для светимости M этой поверхности.

5.31. Имеется однородно светящийся диск радиуса $R = 10,0$ см, яркость которого $L = L_0 \cos \vartheta$ (L_0 — константа, равная $1,00 \cdot 10^3$ кд/м², ϑ — угол с нормалью к поверхности). Найти световой поток Φ , испускаемый диском.

5.2. Интерференция света

5.32. Чему равна амплитуда A колебания, являющегося суперпозицией N некогерентных колебаний одинакового направления и одинаковой амплитуды a ?

5.33. Две световые волны создают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления, описываемые функциями $A \cos \omega t$ и $A \cos[(\omega + \Delta\omega)t]$, где $\Delta\omega = 0,628$ с⁻¹. Как ведет себя интенсивность света в этой точке?

5.34. Найти интенсивность I волны, образованной наложением двух когерентных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Значения интенсивности этих волн равны I_1 и I_2 .

5.35. В некоторую точку приходят N параллельных друг другу световых колебаний вида

$$E_m = a \cos[\omega t + (m-1)\delta] \quad (m = 1, 2, \dots, N).$$

Методом графического сложения колебаний определить амплитуду A результирующего колебания.

5.36. Источник света диаметра $d = 30,0$ см находится от места наблюдения на расстоянии $l = 200$ м. В излучении источника содержатся длины волн в интервале от 490 до 510 нм. Оценить для этого излучения:

- а) время когерентности $t_{\text{ког}}$,
- б) длину когерентности $l_{\text{ког}}$,
- в) радиус когерентности $\rho_{\text{ког}}$,
- г) объем когерентности $V_{\text{ког}}$.

5.37. Оценить радиус когерентности ρ_0 света, приходящего от Солнца на Юпитер. Сравнить его с радиусом когерентности ρ_3 света, приходящего от Солнца на Землю. Длину световой волны принять равной 500 нм.

5.38. Угловой диаметр звезды Бетельгейзе (α Ориона) равен 0,047 угловой секунды. Чему равен радиус когерентности $\rho_{\text{ког}}$ света, приходящего на Землю от этой звезды?

5.39. Волновые векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ двух плоских когерентных волн одинаковой интенсивности образуют угол φ , много меньший единицы. Волны падают на экран, установленный так, что векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ симметричны относительно

нормали к экрану. Определить ширину Δx интерференционных полос, наблюдаемых на экране.

5.40. Какая длина волны подразумевается в выражении для разности фаз δ интерферирующих световых волн,

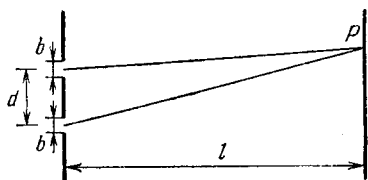


Рис. 5.11

оптическая разность хода которых равна Δ ($\delta = 2\pi\Delta/\lambda$), — длина волны в вакууме или длина волны в среде, в которой распространяются волны?

5.41. На рис. 5.11 изображена интерференционная схема с двумя идентичными светящимися щелями. Колебания

от соответствующих точек щелей (например, от точек, прилежащих к верхнему краю щелей, или от точек, лежащих в середине щелей, и т. п.) являются когерентными, в то время как колебания от точек, находящихся на неодинаковых расстояниях от края щели, являются некогерентными.

а) Полагая показатель преломления среды равным единице, определить $\delta\Delta = \Delta_v - \Delta_n$, где Δ_v — оптическая разность хода до некоторой точки P экрана от верхних краев первой и второй щели, Δ_n — оптическая разность хода до той же точки P от нижних краев первой и второй щели.

б) Оценить максимальную ширину $b_{\max}$ щелей, при которой интерференционные полосы будут еще различимы достаточно отчетливо.

5.42. В некоторой интерференционной установке на пути белого света был установлен один раз красный, другой раз зеленый светофильтр. Полоса пропускания $\Delta\lambda$ у обоих светофильтров одинакова. В каком свете — красном или зеленом — число различимых интерференционных полос будет больше?

5.43. На какую величину a изменяется оптическая разность хода интерферирующих лучей при переходе от середины одной интерференционной полосы к середине другой?

5.44. Пучок лазерного излучения с $\lambda_0 = 632,8$ нм падает по нормали на преграду с двумя узкими параллельными щелями. На экране, установленном за преградой, наблюдается система интерференционных полос. В какую сторону и на какое число полос сместится интерференционная картина, если одну из щелей перекрыть прозрачной пластинкой толщины $a = 10,0$ мкм, изготовленной из материала с показателем преломления $n = 1,633$?

5.45. В опыте, подобном тому, с помощью которого Юнг впервые определил длину волны света, пучок солнеч-

ных лучей, пройдя через светофильтр и узкую щель в непрозрачной преграде, падал на вторую преграду с двумя узкими щелями, находящимися на расстоянии $d=1,00$ мм друг от друга. За преградой на расстоянии $l=1,00$ м располагался экран, на котором наблюдались интерференционные полосы. Ширина полосы Δx оказалась равной: а) 0,65 мм для красного света и б) 0,45 мм для синего света. Чему равна длина световой волны λ_0 ?

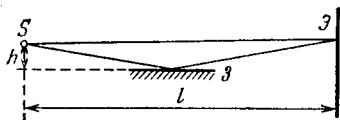


Рис. 5.12

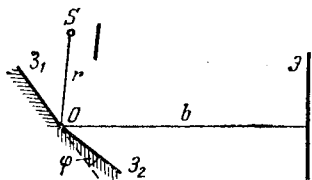


Рис. 5.13

5.46. В схеме, предложенной Ллойдом, световая волна, падающая на экран $\mathcal{E}$ непосредственно от светящейся щели S , интерферирует с волной, отразившейся от зеркала $\mathcal{Z}$ (рис. 5.12). Пусть расстояние от щели до плоскости зеркала $h=1,00$ мм, расстояние от щели до экрана $l=1,00$ м, длина световой волны $\lambda_0=500$ нм. Определить ширину интерференционных полос Δx .

5.47. В изображенной на рис. 5.13 установке с биезеркалами Френеля S — источник света в виде перпендикулярной к плоскости рисунка щели, $\mathcal{E}$ — экран. Расстояние $r=0,100$ м, $b=1,00$ м. Определить:

а) значение угла φ , при котором для $\lambda=500$ нм ширина интерференционных полос на экране $\Delta x=1,00$ мм,

б) максимальное число N полос, которое можно наблюдать в этом случае.

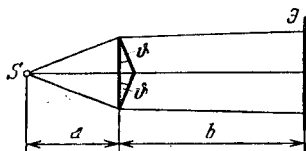


Рис. 5.14

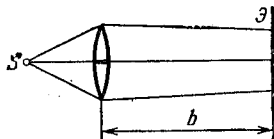


Рис. 5.15

5.48. В изображенной на рис. 5.14 интерференционной схеме с бипризмой Френеля расстояние от светящейся щели S до бипризмы $a=0,300$ м, расстояние от бипризмы до экрана $b=0,700$ м. Показатель преломления бипризмы $n=1,50$. Положив $\lambda_0=500$ нм, определить:

а) при каком значении преломляющего угла призмы ϑ ширина Δx интерференционных полос, наблюдаемых на экране, будет равна 0,400 мм,

б) максимальное число N полос, которое можно наблюдать в этом случае.

5.49. Из тонкой линзы с оптической силой $\Phi = +2,00$ дптр была вырезана по диаметру полоска ширины $h = 1,00$ мм. Затем образовавшиеся части линзы были составлены вместе. В фокальной плоскости образовавшейся билинзы параллельно разрезу поместили источник S в виде светящейся щели, испускающей монохроматический свет с $\lambda = 500$ нм (рис. 5.15). За билинзой на расстоянии от нее $b = 1,00$ м размещен экран. Определить:

а) ширину интерференционных полос Δx ,

б) максимальное число N полос, которое можно наблюдать в этом случае.

5.50. Плоская световая волна длины λ_0 в вакууме падает по нормали на прозрачную пластинку с показателем преломления n . При каких толщинах b пластинки отраженная волна будет иметь а) максимальную, б) минимальную интенсивность?

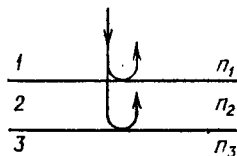


Рис. 5.16

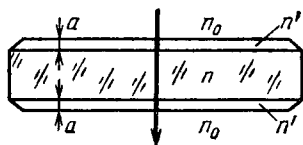


Рис. 5.17

5.51. Имеются два световых пучка одинаковой длины волны и одинаковой интенсивности $I_0 = 100$ лм/м². Один пучок испускается лазером, другой — газоразрядной лампой. Определить интенсивность I каждого из пучков после прохождения ими пластинки толщиной примерно 1 мм с показателем преломления $n = 1,600$, если толщина пластинки равна: а) $N\lambda$, б) $(N + 1/4)\lambda$ (N — целое число, λ — длина волны в пластинке). Ослаблением пучков за счет поглощения в пластинке пренебречь.

5.52. Имеются две параллельные друг другу плоские границы раздела трех прозрачных сред (рис. 5.16). Для некоторой длины волны показатели преломления первой и третьей среды равны соответственно $n_1 = 1,20$ и $n_3 = 1,40$.

а) При каком значении показателя преломления n_2 второй среды доля отраженного света будет для обеих поверхностей одна и та же?

б) Будет ли при найденном значении n_2 также одинакова доля отраженного от обеих поверхностей света при обратном ходе луча (из третьей среды в первую)?

5.53. Стекла́нная пластинка покрыта с обеих сторон пленкой прозрачного вещества (рис. 5.17). Для света длины волны в вакууме $\lambda_0=480$ нм показатель преломления пластинки $n=1,44$, показатель преломления пленки $n'=1,20$, показатель преломления воздуха n_0 практически равен единице. При какой минимальной толщине пленок a свет указанной длины волны будет проходить через пластинку без потерь на отражение?

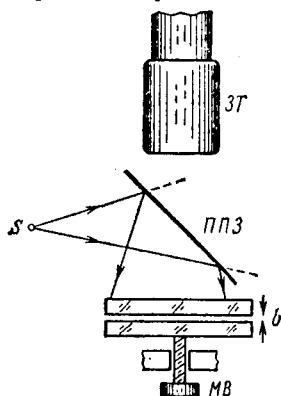


Рис. 5.18

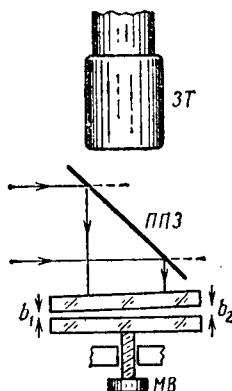


Рис. 5.19

5.54. На рис. 5.18 буквой S обозначен точечный источник, испускающий свет с $\lambda=600$ нм. Половина падающего на полупрозрачное зеркало $ППЗ$ светового потока отражается по направлению к двум параллельным друг другу стеклянным пластинкам. Вращая микрометрический винт $МВ$, нижнюю пластинку можно перемещать, изменяя тем самым зазор b между пластинками.

Половина потока, отраженного пластинками, пройдя через полупрозрачное зеркало, попадает в зрительную трубу $ЗТ$. Какая картина будет наблюдаться в поле зрения трубы, если зазор между пластинками $b=0,5$ мм, а степень монохроматичности света, характеризуемая отношением $\lambda/\Delta\lambda$, равна: а) 500, б) 5000?

5.55. Что будет происходить с картиной, наблюдающейся в поле зрения трубы, в случае б) задачи 5.54, если, вращая плавно микрометрический винт $МВ$, а) увеличивать, б) уменьшать зазор между пластинками?

5.56. В изображенной на рис. 5.19 установке плоская световая волна с $\lambda=600$ нм падает на полупрозрачное зеркало ППЗ. Половина светового потока отражается по направлению к установленным под небольшим углом друг к другу стеклянным пластинкам. Вращая микрометрический винт MB , нижнюю пластинку можно перемещать параллельно самой себе, изменяя тем самым на одинаковую величину зазоры b_1 и b_2 между краями пластинок.

Половина потока, отраженного пластинками, пройдя через полупрозрачное зеркало, попадает в зрительную трубу ЗТ. Какая картина будет наблюдаться в поле зрения трубы, если зазоры между краями пластинок $b_1=497$ мкм, $b_2=503$ мкм, а степень монохроматичности света $\lambda/\Delta\lambda$ равна: а) 500, б) 5000, в) 2500?

5.57. Что будет происходить с картиной, наблюдающейся в поле зрения трубы в случае б) задачи 5.56, если, вращая плавно микрометрический винт MB , а) уменьшать, б) увеличивать зазор между пластинками?

5.58. На пленку толщины $b=367$ нм падает под углом ϑ параллельный пучок белого света. Показатель преломления пленки $n=1,40$ (изменения n в зависимости от λ заключены в пределах 0,01). В какой цвет будет окрашен свет, отраженный пленкой в случае, если ϑ равен: а) 30° , б) 60° ?

5.59. Клиновидная пластинка ширины $a=100,0$ мм имеет у одного края толщину $b_1=0,358$ мм, а у другого $b_2=0,381$ мм. Показатель преломления пластинки $n=1,59$. Под углом $\vartheta=30^\circ$ к нормали на пластинку падает пучок параллельных лучей. Длина волны падающего света $\lambda=655$ нм (красный цвет). Определить ширину Δx интерференционных полос (измеренную в плоскости пластинки), наблюдаемых в отраженном свете, для случая, когда степень монохроматичности света $\lambda/\Delta\lambda$ равна: а) 5000, б) 500.

5.60. Расположенная вертикально проволочная рамка затянута мыльной пленкой. При освещении пленки зеленым светом с $\lambda_0=530$ нм и степенью монохроматичности $\lambda/\Delta\lambda=40$ на верхней части пленки наблюдаются интерференционные полосы равной толщины. Оценить толщину b пленки.

5.61. При освещении клиновидной прозрачной пластинки зеленым светом ($\lambda_0=550$ нм) на части пластинки наблюдаются 36 интерференционных полос равной толщины (остальная часть пластинки освещена равномерно). Какое число полос N будет наблюдаться, если осветить пластинку вместо зеленого красным светом ($\lambda_0=660$ нм), степень моно-

хроматичности которого $\lambda/\Delta\lambda$ в 1,20 раза меньше, чем у зеленого света?

5.62. Угол между гранями прозрачной клиновидной пластинки $\alpha=1,03'$. Средняя толщина пластинки $b=3,00$ мм, длина пластинки $l=100$ мм. При нормальном падении на пластинку света, имеющего в пластинке длину волны $\lambda_1=400,00$ нм, на половине длины пластинки наблюдаются интерференционные полосы равной толщины. На какой части пластинки x будут наблюдаться интерференционные полосы, если осветить пластинку светом с длиной волны $\lambda_2=401,00$ нм, степень монохроматичности которого $\lambda/\Delta\lambda$ такая же, как у первоначального света?

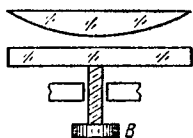


Рис. 5.20

5.63. На стеклянную пластинку положена выпуклой стороной плоско-выпуклая линза. При нормальном падении на плоскую границу линзы красного света ($\lambda_0=610$ нм) радиус 5-го светлого кольца Ньютона оказывается равным $r_5=5,00$ мм. Определить:

- а) радиус кривизны R выпуклой границы линзы,
- б) оптическую силу Φ линзы (показатель преломления линзы $n=1,50$; линзу считать тонкой),
- в) радиус r_3 3-го светлого кольца.

5.64. Во сколько раз возрастет радиус m -го кольца Ньютона при увеличении длины световой волны в полтора раза?

5.65. Обращенная выпуклостью вниз плоско-выпуклая линза закреплена неподвижно. Под линзой на небольшом расстоянии от нее находится стеклянная пластинка, которую можно перемещать по вертикали, вращая головку винта B (рис. 5.20). Шаг винта $h=100,0$ мкм. Сверху линзу освещают светом с $\lambda_0=580$ нм и наблюдают в отраженном свете кольца Ньютона.

1. Что будет происходить с интерференционной картиной, если, плавно вращая винт, а) увеличивать, б) уменьшать зазор между линзой и пластинкой?

2. Какое число N новых колец возникнет (а старых исчезнет), если повернуть винт на один оборот?

5.3. Дифракция света

5.66. Точечный источник света с $\lambda=500$ нм помещен на расстоянии $a=0,500$ м перед непрозрачной преградой с отверстием радиуса $r=0,500$ мм. Определить расстояние b

от преграды до точки, для которой число m открываемых отверстием зон Френеля будет равно: а) 1, б) 5, в) 10.

5.67. Точечный источник света с $\lambda=550$ нм помещен на расстоянии $a=1,00$ м перед непрозрачной преградой с отверстием радиуса $r=2,00$ мм.

а) Какое минимальное число $m_{\min}$ открытых зон Френеля может наблюдаться при этих условиях?

б) При каком значении расстояния b от преграды до точки наблюдения получается минимальное возможное число открытых зон?

в) При каком радиусе r отверстия может оказаться в условиях данной задачи открытой только одна центральная зона Френеля?

5.68. Имеется круглое отверстие в непрозрачной преграде, на которую падает плоская световая волна. За отверстием расположен экран. Что будет происходить с интенсивностью в центре наблюдаемой на экране дифракционной картины, если экран удалять от преграды?

5.69. Исходя из определения зон Френеля, найти число m зон Френеля, которые открывает отверстие радиуса r для точки, находящейся на расстоянии b от центра отверстия, в случае если волна, падающая на отверстие, плоская.

5.70. На непрозрачную преграду с отверстием радиуса $r=1,000$ мм падает монохроматическая плоская световая волна. Когда расстояние от преграды до установленного за ней экрана $b_1=0,575$ м, в центре дифракционной картины наблюдается максимум интенсивности. При увеличении расстояния до значения $b_2=0,862$ м максимум интенсивности сменяется минимумом. Определить длину волны λ света.

5.71. Доказать следующие равенства:

$$\text{а) } \sum_k a_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_k a_k \exp[i(\omega_k t + \alpha_k)] \right\},$$

$$\text{б) } \frac{d}{dt} [a \cos(\omega t + \alpha)] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dt} [a \exp(i(\omega t + \alpha))] \right\},$$

$$\text{в) } \int a \cos(\omega t + \alpha) dt = \operatorname{Re} \left\{ \int a \exp[i(\omega t + \alpha)] dt \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{г) } & \frac{d}{dt} [a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)] + \int a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) dt = \\ & = \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dt} [a_1 \exp(i(\omega_1 t + \alpha_1))] + \int a_2 \exp[i(\omega_2 t + \alpha_2)] dt \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } & \frac{d}{dt} \sum_k a_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) = \\ & = \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dt} \sum_k a_k \exp[i(\omega_k t + \alpha_k)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е) } \sum_k \int a_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) dt &= \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_k \int a_k \exp[i(\omega_k t + \alpha_k)] dt \right\}. \end{aligned}$$

5.72. Предположив, что колебание, создаваемое в центре дифракционной картины от круглого отверстия m -й зоной Френеля, можно представить в виде

$$E_m = A_1 \rho^{m-1} \exp\{i[\omega t + (m-1)\pi]\},$$

где A_1 — амплитуда колебания, создаваемого 1-й зоной, ρ — число, чуть меньшее единицы (имеется в виду, что надо взять вещественную часть этого выражения), определить результирующую амплитуду колебания, создаваемого N зонами Френеля.

5.73. Интенсивность, создаваемая на экране некоторой монохроматической световой волной в отсутствие преград, равна I_0 . Какова будет интенсивность I в центре дифракционной картины, если на пути волны поставить преграду с круглым отверстием, открывающим: а) 1-ю зону Френеля, б) половину 1-й зоны Френеля, в) полторы зоны Френеля, г) треть 1-й зоны Френеля?

5.74. Как изменится в условиях предыдущей задачи интенсивность в точке против центра отверстия, если половину отверстия перекрыть полуплоскостью?

5.75. На пути световой волны с $\lambda_0 = 500$ нм установлена большая прозрачная пластинка, в которой на площади, соответствующей для некоторой точки наблюдения полутора зонам Френеля, сделана круглая цилиндрическая выемка, обращенная в сторону распространения волны. Показатель преломления пластинки $n = 1,500$. При какой наименьшей глубине выемки интенсивность в точке наблюдения будет а) максимальной, б) минимальной, в) равной интенсивности падающего света?

5.76. Освещенность экрана в случае дифракции от круглого отверстия описывается функцией $E = E(r)$, где r — расстояние от центра дифракционной картины. Написать выражение для светового потока Φ , проходящего через отверстие.

5.77. Радиусы окружностей, разграничивающих непрозрачные и прозрачные кольца амплитудной зонной пластинки, имеют значения $r_m = \alpha \sqrt{m}$, где $\alpha = 1,000$ мм, $m = 1, 2, 3, \dots$. Определить основное фокусное расстояние b пластинки для длин волн λ , равных: а) 400 нм, б) 580 нм, в) 760 нм. (Фокусным расстоянием зонной пластинки назы-

вается расстояние от пластинки до точки на ее оси, в которой наблюдается максимум интенсивности при нормальном падении на пластинку плоской световой волны. Основным называется фокусное расстояние, соответствующее наибольшему по интенсивности максимуму. Неосновные максимумы получаются, если в первой зоне, начерченной на пластинке, укладываются 3, 5, 7, ... зон Френеля.)

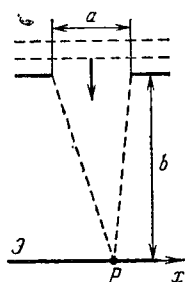


Рис. 5.21

5.78. Исходя из предположения, выдуманного в задаче 5.72, и положив $\rho=0,95$, оценить интенсивность I в фокусе зонной пластинки, перекрывающей четные зоны Френеля. Выразить I через интенсивность I_0 в отсутствие преград.

5.79. Решить задачу 5.78 для случая фазовой зонной пластинки. Сравнить полученный результат с ответом к задаче 5.78.

5.80. Фазовая зонная пластинка изготовлена из материала с показателем преломления $n=1,50$. Какой минимальной высоты h должны быть выступы над четными (или нечетными) зонами пластинки для длины волны $\lambda_0=580$ нм?

5.81. На пути плоской световой волны с длиной λ помещена непрозрачная плоскость, в которой имеется очень длинная («бесконечная») щель ширины a . За преградой на расстоянии b от нее поставлен экран Э (рис. 5.21). Возьмем на экране точку наблюдения P и разобьем совпадающую с преградой волновую поверхность на параллельные краям щели прямолинейные зоны Френеля (т. е. зоны, разность хода от краев которых до точки P равна $\lambda/2$). Внутреннюю границу первой зоны поместим против точки P . Получатся две симметричные системы зон. Зонам, лежащим справа от P , припишем нештрихованные номера 1, 2, ...; зонам, лежащим слева от P , припишем штрихованные номера 1', 2', ...

Требуется определить:

1. Число m нештрихованных и число m' штрихованных зон, открываемых щелью для точки экрана P , расположенной против а) середины, б) левого края, в) правого края щели. Сравнить полученный результат с ответом к задаче 5.69.

2. Координату x_m внешней границы m -й нештрихованной зоны Френеля (ось x перпендикулярна к краям щели, отсчет значений x ведется от точки P).

3. Отношение значений ширины Δx первых пяти зон Френеля.

5.82. Положив в задаче 5.81 $\lambda=500$ нм, $a=3,162$ мм, $b=1,000$ м, вычислить:

1. Числа m и m' для точки P , лежащей против а) середины, б) левого края, в) правого края щели.

2. Значения координаты x_m правой границы первых пяти зон Френеля.

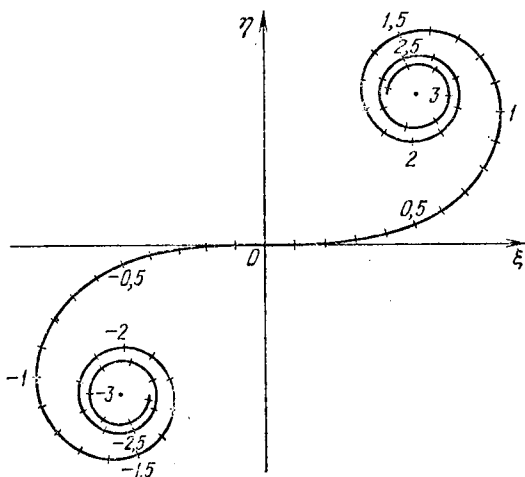


Рис. 5.22

5.83. На рис. 5.22 дана кривая Корню. Эта кривая позволяет методом векторного сложения колебаний определить амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке наблюдения P различными участками волновой поверхности, находящейся на расстоянии b от точки P (рис. 5.23).

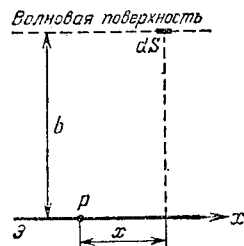


Рис. 5.23

Волновая поверхность разбивается на перпендикулярные к проведенной через точку P оси x бесконечно длинные элементарные зоны dS ширины dx . Амплитуда dA , порождаемая зоной dS , определяется элементом dl кривой Корню ($|dl| \propto dx$). Отсчитанное вдоль кривой расстояние этого элемента от начала координат характеризуется значением безразмерного параметра v . Числа, проставленные на кривой, означают значения этого параметра. Соответствие между значением v (определяющим положение точки на кривой Корню) и координатой x (определяющей положение

зоны dS относительно точки P) в случае плоской волны устанавливается соотношением

$$v = x \sqrt{2/b\lambda}$$

(λ — длина волны).

В точках, для которых $v=1, 3, 5, \dots$, касательная к кривой Корню параллельна оси η ; в точках, для которых $v=2, 4, 6, \dots$, касательная параллельна оси ξ .

1. Какие точки кривой Корню соответствуют границам между зонами Френеля?

2. Какое значение параметра v соответствует границе между 2-й и 3-й а) нештрихованными, б) штрихованными зонами Френеля?

5.84. Воспользовавшись ответом к задаче 5.81 и формулой, приведенной в условии предыдущей задачи,

а) определить значение параметра v , соответствующее внешней границе m -й зоны Френеля,

б) вычислить значения v для $m=1, 2, \dots, 5$.

5.85. В отсутствие преград интенсивность, создаваемая падающей по нормали на экран плоской световой волной, равна I_0 . Определить с помощью кривой Корню интенсивность I в точке экрана P , создаваемую: а) только нештрихованными (или штрихованными) зонами Френеля, б) 1-й

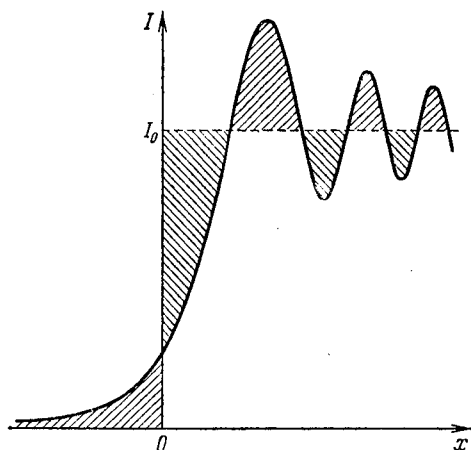


Рис. 5.24

нештрихованной (или штрихованной) зоной, в) всеми штрихованными (или нештрихованными) зонами, кроме 1-й, г) 2-й зоной, д) 1-й и 2-й зонами, е) 2-й и 3-й зонами Френеля.

5.86. На границе тени, отбрасываемой на экран полуплоскостью, образуется система дифракционных полос. Положив длину волны $\lambda=580$ нм, расстояние между полуплоскостью и экраном $b=20,0$ см и интенсивность падающей волны $I_0=100$ лм/м², определить:

- интенсивность $I_{\max}$ 1-го дифракционного максимума,
- интенсивность $I_{\min}$ следующего за ним 1-го минимума,
- отношение $I_{\max}/I_{\min}$,
- примерные значения x для середины 1-го максимума и середины 1-го минимума.

5.87. На рис. 5.24 изображен график интенсивности света в случае дифракции Френеля от края полуплоскости. В каком соотношении находятся суммарные площади, отмеченные штриховкой разного наклона?

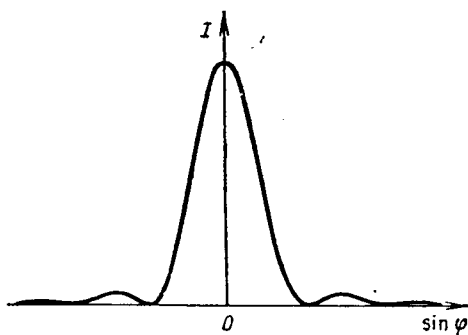


Рис. 5.25

5.88. На щель ширины $a=2,00$ мм, установленную на расстоянии $b=2,00$ м от экрана, падает по нормали плоская световая волна длины $\lambda=500$ нм. В отсутствие преград волна создавала бы на экране освещенность $E_0=100,0$ лк. Определить освещенность E в точке экрана P , расположенной а) против середины, б) против края щели.

5.89. В каком фазовом соотношении находится колебание, создаваемое всеми штрихованными зонами Френеля, с колебанием, создаваемым второй нештрихованной зоной в случае дифракции от края полуплоскости?

5.90. На пути падающей на экран плоской световой волны длины $\lambda=600$ нм поместили очень длинную непрозрачную полоску ширины $a=1,90$ мм на расстоянии от экрана $b=1,50$ м. В отсутствие полоски освещенность экрана $E_0=300$ лк. Определить освещенность E в точке P , находящейся а) против середины, б) против края полоски.

5.91. На рис. 5.25 изображена кривая интенсивности света в случае френгоферовой дифракции от щели.

1. Какой смысл имеет площадь, ограниченная кривой?

2. Как изменятся при увеличении ширины щели в два раза: а) высота дифракционных максимумов, б) ширина максимумов, в) положение минимумов, г) число наблюдаемых минимумов, д) площадь, ограниченная кривой?

5.92. Белый свет падает по нормали на щель ширины $b=0,10$ мм. За щелью установлена линза, в фокальной плоскости которой помещен экран. Оптическая сила линзы $\Phi=+5,0$ дптр. Оценить:

а) ширину a радужного канта на границе наблюдаемого на экране центрального дифракционного максимума,

б) отношение ширины канта a к средней ширине $\langle \Delta x \rangle$ центрального максимума.

5.93. Плоская световая волна падает нормально на непрозрачную плоскую преграду, в которой имеется щель ширины $b=0,200$ мм. За преградой расположен экран. Волновые поверхности, преграда и экран параллельны друг другу. Расстояние между преградой и экраном $l=1,00$ м. Длина волны $\lambda=500$ нм. Показатель преломления среды практически равен 1. Условия когерентности соблюдены. Определить:

а) какой вид дифракции наблюдается в этом случае,

б) ширину a_0 центрального дифракционного максимума,

в) расстояние $a_{1,2}$ между серединами 1-го и 2-го дифракционных максимумов.

5.94. Какой вид дифракции будет наблюдаться в условиях задачи 5.93, если ширину щели увеличить до 1,0 мм?

5.95. Будет ли перемещаться по экрану дифракционная картина от щели при перемещении щели параллельно самой себе в случае, если дифракция наблюдается: а) с помощью линзы, б) без линзы? Предполагается, что свет падает на щель по нормали.

5.96. Как ведет себя интенсивность света в середине дифракционной картины от щели при увеличении ширины щели в случае: а) дифракции Френеля, б) дифракции Френгофера?

5.97. Построить примерный график зависимости интенсивности I от $\sin \varphi$ для дифракционной решетки с числом штрихов $N=5$ и отношением периода решетки к ширине щели $d/b=2$.

5.98. На рис. 5.26 показаны главные максимумы интенсивности, создаваемые некоторой дифракционной решеткой с большим числом штрихов.

1. Какой смысл имеет суммарная площадь максимумов?

2. В промежутках между соседними штрихами решетки падаются дополнительные штрихи. Как изменятся при этом: а) положение максимумов, б) высота центрального максимума, в) ширина максимумов, г) суммарная площадь максимумов?

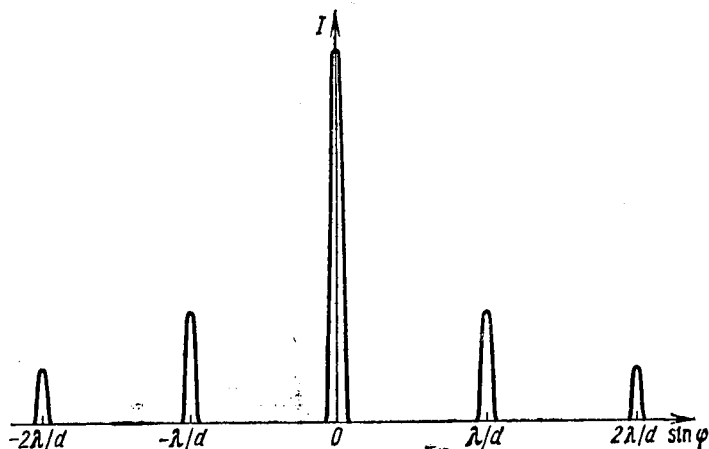


Рис. 5.26

5.99. Что произойдет с дифракционной картиной, если щели дифракционной решетки перекрыть через одну?

5.100. Половина дифракционной решетки перекрывается с одного края непрозрачной преградой, в результате чего число штрихов уменьшается в два раза. Как изменятся при этом:

- положения дифракционных максимумов,
- высота центрального максимума,
- ширина максимумов,
- суммарная площадь максимумов?

Предполагается, что радиус когерентности падающего на решетку света значительно больше длины решетки.

5.101. Ответить на вопросы задачи 5.100 при условии, что радиус когерентности падающего на решетку света много меньше длины решетки.

5.102. 1. Определить, при каком значении отношения $x=b/d$ (d — период дифракционной решетки, b — ширина щели) дифракционный максимум m -го порядка, будет иметь а) максимальную интенсивность, б) интенсивность, равную нулю. Интенсивность падающего на решетку света и период решетки d предполагаются заданными.

2. Найти отвечающие максимуму интенсивности значения x для максимума а) 1-го, б) 2-го, в) 3-го порядка.

3. Найти значения x , при которых интенсивность обращается в нуль, для максимума а) 1-го, б) 2-го, в) 3-го порядка.

5.103. В спектре, даваемом дифракционной решеткой с периодом $d=2300$ нм, видны при $\lambda=500$ нм только два максимума (кроме центрального). Какова ширина щелей b этой решетки?

5.104. Ограничиваясь случаем нормального падения света на решетку, оценить максимальное возможное значение угловой дисперсии D дифракционной решетки, о которой известно, что один из максимумов для $\lambda_1=550$ нм накладывается на один из максимумов для $\lambda_2=660$ нм. Имеется в виду дисперсия в спектре 1-го порядка.

5.105. Минимальное значение угловой дисперсии некоторой дифракционной решетки $D=1,266 \cdot 10^{-3}$ рад/нм. Найти угловое расстояние $\Delta\varphi$ между линиями с $\lambda_1=480$ нм и $\lambda_2=680$ нм в спектре, даваемом решеткой. Предполагается, что свет падает на решетку нормально.

5.106. Свет, падающий на дифракционную решетку нормально, состоит из двух резких спектральных линий с длинами волн $\lambda_1=490$ нм (голубой свет) и $\lambda_2=600$ нм (оранжевый свет). Первый дифракционный максимум для линии с длиной волны λ_1 располагается под углом $\varphi_1=10,0^\circ$. Найти угловое расстояние $\Delta\varphi$ между линиями в спектре 2-го порядка.

5.107. Будут ли разрешены дифракционной решеткой с $N=100$ штрихов спектральные линии с $\lambda_1=598$ нм и $\lambda_2=602$ нм в спектре а) 1-го, б) 2-го порядка?

5.108. Какое число N штрихов должна иметь дифракционная решетка для того, чтобы разрешить в спектре 1-го порядка линии желтого дублета (двойной желтой спектральной линии) натрия, длины волн которого равны 589,0 и 589,6 нм?

5.109. 1. Предполагая, что свет падает на дифракционную решетку нормально, получить точное выражение для угловой дисперсии D решетки в зависимости от λ .

2. Положив период решетки $d=1000$ нм, вычислить по найденной формуле угловую дисперсию в спектре 1-го порядка в окрестности длин волн: а) 400 нм, б) 580 нм, в) 760 нм.

3. Сравнить полученные результаты со значениями D , вычисленными по приближенной формуле $D \approx m/d$ (m — порядок спектра).

5.110. 1. Для случая, когда свет падает на дифракционную решетку нормально, получить точное выражение для линейной дисперсии $D_{\text{лин}}$ решетки в зависимости от λ .

2. Положив период решетки $d=1000$ нм, а фокусное расстояние линзы $f=1,000$ м, вычислить по найденной формуле линейную дисперсию в спектре 1-го порядка в окрестности длин волн: а) 400 нм, б) 580 нм, в) 760 нм.

3. Сравнить полученные результаты со значением $D_{\text{лин}}$, вычисленным по приближенной формуле $D_{\text{лин}} \approx mf/d$ (m — порядок спектра).

5.111. В спектрографе установлена перпендикулярно к падающему световому пучку дифракционная решетка, период которой $d=1000$ нм, а длина рабочей части $l=100,0$ мм. Фокусное расстояние объектива спектрографа $f=1,000$ м.

1. Определить длину $\Delta\lambda$ видимого спектра, получающегося на фотопластинке, установленной в фокальной плоскости объектива.

2. Оценить: а) линейную дисперсию $D_{\text{лин}}$, б) разрешающую силу R прибора.

5.112. Имеется дифракционная решетка, на которую падает нормально световой пучок.

1. Предполагая, что число m , определяющее порядок дифракционного максимума, изменяется непрерывно, получить формулу для $\delta\varphi/\delta m$ в зависимости от m . Эта формула дает при подстановке в нее $m=k+1/2$ приближенное значение углового расстояния между k -м и $(k+1)$ -м максимумами.

2. Приняв $\lambda/d=0,3$, вычислить точное значение углового расстояния $\Delta\varphi$ между: а) 1-м и 2-м, б) 2-м и 3-м максимумами. Сравнить результат с приближенными значениями, найденными по формуле, полученной в п. 1.

5.113. Почему период d прозрачных дифракционных решеток должен быть порядка длины волны λ и не может быть, например, равным 1 мм?

5.114. На дифракционную решетку с периодом $d=2500$ нм падает под углом $\varphi_0=20,0^\circ$ к нормали свет длины волны $\lambda=600$ нм. Полагая углы, отсчитанные от нормали против часовой стрелки, положительными, а по часовой стрелке — отрицательными (заметим, что φ_0 положителен),

1. Получить формулу, определяющую угловые положения φ главных максимумов.

2. Найти:

а) угол φ , под которым получается центральный (нулевой) максимум,

б) углы φ_+ , под которыми получаются положительные максимумы, и углы φ_- , под которыми наблюдаются отрицательные максимумы,

в) число m_+ наблюдаемых положительных максимумов и число m_- наблюдаемых отрицательных максимумов.

3. Сравнить полное число максимумов с числом максимумов, которые получились бы при нормальном падении света на решетку.

5.115. На отражательную дифракционную решетку с периодом d падает под углом скольжения ϑ_0 свет с длиной волны λ . (Угол скольжения является дополнительным к углу падения.)

1. Получить формулу, определяющую углы скольжения ϑ , под которыми получаются главные дифракционные максимумы.

2. Определить углы ϑ , под которыми возникают дифракционные максимумы а) 1-го, б) 2-го, в) 5-го порядков, для случая, когда $d=1,00$ мм, $\lambda=500$ нм, $\vartheta_0=1,00^\circ$.

5.116. 1. Получить выражение для угловой дисперсии $D=d\varphi/d\lambda$ дифракционной решетки в случае падения света на решетку под углом φ_0 к нормали. Сравнить полученный результат с ответом к п. 1 задачи 5.109.

2. Положив период решетки $d=2250$ нм, длину волны $\lambda=500$ нм, вычислить D в спектре 1-го порядка для значений φ_0 , равных: а) нулю, б) 30° , в) 50° , г) 51° .

5.117. Можно ли различить невооруженным глазом два находящихся на расстоянии 2 км столба, отстоящих друг от друга на 1 м? Диаметр зрачка принять равным 4 мм.

5.118. В зрительную трубу рассматривается лунная поверхность. Диаметр объектива трубы $d=4,00$ см. При каком минимальном расстоянии $a_{\min}$ между двумя кратерами их можно увидеть раздельно? Длину световой волны принять равной 600 нм.

5.119. В растровом рисунке изображение образовано точками различной насыщенности (т. е. разной «жирности»). Начиная с какого расстояния l глаз перестанет различать отдельные точки и рисунок будет выглядеть как непрерывный переход от более светлых мест к более темным, если число точек на 1 см^2 равно 2500. Диаметр зрачка принять равным 4,0 мм, а длину волны равной 600 нм.

5.120. Плотность каменной соли (NaCl) $\rho=2,163 \text{ г/см}^3$. Исходя из того, что кристаллическая ячейка соли имеет форму куба, в вершинах которого помещаются, чередуясь, ионы натрия и хлора, найти расстояние d между атомными

плоскостями, параллельными естественным граням кристалла.

5.121. Английские физики У. Г. и У. Л. Брэгги (отец и сын Брэгги) впервые измерили в 1913 г. длину волны рентгеновских лучей. Основываясь на том, что, как было установлено кристаллографами, каменная соль принадлежит к кубической системе, Брэгги вычислили расстояние d между атомными плоскостями, параллельными внешним граням кристалла (см. задачу 5.120). Измерив затем углы, под которыми возникают дифракционные максимумы при отражении от этих плоскостей, Брэгги определили длину волны λ использованного ими рентгеновского излучения. В частности, для монохроматического излучения, испускаемого палладиевым антикатодом (K_α палладия), максимумы интенсивности были получены при углах скольжения, равных $5^\circ 59'$, $12^\circ 3'$ и $18^\circ 14'$. Найти длину волны λ этого излучения.

5.122. На поликристаллический образец меди падает узкий пучок рентгеновского излучения с $\lambda = 0,0214$ нм (K_α вольфрама). За образцом на расстоянии от него $l = 100,0$ мм установлена фотопластинка. Найти радиусы R_1 и R_2 колец, образующихся на фотопластинке за счет дифракционных максимумов 1-го и 2-го порядков, возникающих при отражении от атомных плоскостей, параллельных граням кристаллической ячейки. Ячейка меди является кубической гранецентрированной.

5.4. Поляризация света

5.123. Как ведет себя световой вектор $\mathbf{E}$ в фиксированной точке пространства в случае эллиптически поляризованной волны?

5.124. Чему равна степень поляризации P света, представляющего собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если отношение интенсивности поляризованного света к интенсивности естественного равно: а) 1, б) 10?

5.125. Плоскополяризованный свет интенсивности $I_0 = 100$ лм/м² проходит последовательно через два совершенных поляризатора, плоскости которых образуют с плоскостью колебаний в исходном луче углы $\alpha_1 = 20,0^\circ$ и $\alpha_2 = 50,0^\circ$ (углы отсчитываются от плоскости колебаний по часовой стрелке, если смотреть вдоль луча). Определить интенсивность света I по выходе из второго поляризатора.

5.126. Что такое пластинка в четверть волны?

5.127. Как получить свет, поляризованный по кругу?

5.128. Можно ли получить свет, поляризованный по кругу, с помощью пластинки с «толщиной» иной, чем в четверть волны?

5.129. Световой вектор $\mathbf{E}$ плоской волны изменяется по закону $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx)$, причем вектор $\mathbf{E}_0$ образует с осями y и z соответственно углы α и $(\pi/2 - \alpha)$. Написать выражения для составляющих вектора $\mathbf{E}$ по осям y и z .

5.130. На пути световой волны из предыдущей задачи расположен плоскопараллельный слой однородного анизотропного диэлектрика, в котором составляющие $\mathbf{E}_y$ и $\mathbf{E}_z$ распространяются с неодинаковой скоростью. Написать выражения для этих составляющих $\mathbf{E}'_y$ и $\mathbf{E}'_z$ по выходе из слоя.

5.131. Как ведет себя результирующий световой вектор $\mathbf{E}'$ с составляющими $\mathbf{E}'_y$ и $\mathbf{E}'_z$ (см. задачи 5.129 и 5.130), если: а) $\alpha = 0$; б) $\alpha = 90^\circ$; в) $\alpha = 30^\circ$, $\delta = \pi$; г) $\alpha = 30^\circ$, $\delta = \pi/6$; д) $\alpha = 45^\circ$, $\delta = \pi/6$; е) $\alpha = 30^\circ$, $\delta = \pi/4$; ж) $\alpha = 45^\circ$, $\delta = \pi/4$?

5.132. На пути плоскополяризованного монохроматического света установлена кристаллическая пластинка в четверть волны. Какие видоизменения будет претерпевать вышедший из пластинки свет при вращении пластинки вокруг направления луча?

5.133. На совершенный поляризатор падает поляризованный по кругу свет, интенсивность которого равна I_0 . Какова будет интенсивность I света за поляризатором?

5.134. Между двумя скрещенными совершенными поляризаторами установлена кристаллическая пластинка в четверть волны. Как будет изменяться интенсивность света,

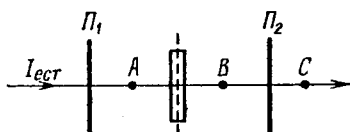


Рис. 5.27

вышедшего из второго поляризатора, при вращении пластинки вокруг направления луча, если на первый поляризатор падает естественный свет интенсивности $I_{\text{ест}}$?

5.135. Кристаллическая пластинка в полволны установлена между двумя совершенными поляризаторами. На первый (по ходу луча) поляризатор падает естественный монохроматический свет интенсивности $I_{\text{ест}}$ с длиной волны, соответствующей пластинке. Оптическая ось пластинки образует с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Первый поляризатор закреплен в положении, в котором его плоскость вертикальна. Второй поляризатор может вращаться. Определить интенсивность I света, вышедшего из второго поляризатора,

для случаев, когда плоскости поляризаторов: а) параллельны, б) взаимно перпендикулярны.

5.136. Естественный свет интенсивности $I_{\text{ест}}$ проходит последовательно через поляризатор P_1 , кристаллическую пластинку в полволны и поляризатор P_2 (рис. 5.27). Ось пластинки установлена вертикально. Ось поляризатора P_1 образует с вертикалью угол α_1 , ось поляризатора P_2 — угол α_2 (углы отсчитываются от вертикали по часовой стрелке, если смотреть вдоль луча). Считая, что пластинка не поглощает света, а поляризаторы являются совершенными, определить:

- а) характер света в точках A , B , C ,
- б) интенсивность света I_A и I_B в точках A и B ,
- в) интенсивность света I_C в точке C , если $\alpha_1 = 30^\circ$, а угол α_2 равен: 60° , 150° ,
- г) интенсивность света I_C в точке C при произвольных углах α_1 и α_2 .

5.137. Имеется система, аналогичная изображенной на рис. 5.27 (см. задачу 5.136), с тем отличием, что вместо пластинки в полволны установлена пластинка в $3/8$ волны. Определить:

- а) характер света в точках B и C ,
- б) интенсивность света I_B в точке B .
- в) Может ли при каких-либо значениях углов α_1 и α_2 из интервалов $10^\circ \leq \alpha_1 \leq 80^\circ$ и $0 \leq \alpha_2 \leq 90^\circ$ интенсивность света I_C в точке C оказаться равной нулю?
- г) Может ли I_C оказаться равной $I_{\text{ест}}/2$?

5.138. Несовершенный поляризатор пропускает в своей плоскости $\alpha_1 = 0,90$ часть интенсивности соответствующего колебания, а в перпендикулярной плоскости $\alpha_2 = 0,10$ часть интенсивности соответствующего колебания. Определить степень поляризации P света, прошедшего через поляризатор, если первоначально свет был естественным.

П р и м е ч а н и е. Естественный свет может быть представлен как наложение двух некогерентных волн одинаковой интенсивности, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. При таком представлении интенсивность естественного света равна сумме интенсивностей этих волн.

5.139. Имеются два одинаковых несовершенных поляризатора, каждый из которых в отдельности обуславливает степень поляризации $P_1 = 0,800$. Какова будет степень поляризации света, прошедшего последовательно через оба поляризатора, если плоскости поляризаторов: а) параллельны, б) перпендикулярны друг другу?

5.140. Естественный свет проходит через систему из двух одинаковых несовершенных поляризаторов. Каждый из них пропускает в своей плоскости $\alpha_1=0,95$ часть интенсивности соответствующего колебания и обуславливает степень поляризации $P=0,90$. Какую долю первоначальной интенсивности света составляет интенсивность света, прошедшего через эту систему, если плоскости поляризаторов взаимно перпендикулярны (поляризаторы скрещены)?

5.141. Естественный свет пропускают через два одинаковых поставленных один за другим несовершенных поляризатора. Интенсивность прошедшего через эту систему света при параллельных плоскостях поляризаторов ($I_{\parallel}$) превышает интенсивность при взаимно перпендикулярных плоскостях ($I_{\perp}$) в $\eta=9,53$ раза. Определить:

а) степень поляризации P_1 света, прошедшего только через один из поляризаторов,

б) степень поляризации $P_{\parallel}$, обуславливаемую системой при параллельных плоскостях поляризаторов.

5.142. На пути плоскополяризованного монохроматического света поставлена двоякопреломляющая клиновидная пластинка, оптическая ось которой параллельна ребру клина. Ось образует с плоскостью колебаний в падающем свете угол 45° . Каков будет характер света за пластинкой?

5.143. 1. Как будет выглядеть поверхность клиновидной пластинки из предыдущей задачи, если ее рассматривать с тыльной стороны через поляризатор, плоскость которого: а) параллельна оси пластинки, б) параллельна плоскости колебаний в падающем свете, в) перпендикулярна к плоскости колебаний в падающем свете?

2. Что произойдет с наблюдаемой картиной, если повернуть поляризатор из положения, при котором его плоскость совпадает с плоскостью колебаний в падающем свете, на 90° ?

5.144. Между двумя скрещенными поляризаторами находится клиновидная пластинка, вырезанная из исландского шпата так, что оптическая ось пластинки параллельна ребру клина. Угол при вершине клина $\vartheta=4,72'$. Ось пластинки образует с плоскостями поляризаторов углы, равные 45° . Найти расстояние Δx между серединами светлых полос, наблюдаемых за вторым поляризатором при прохождении через систему света с $\lambda=486$ нм. Для этой длины волны показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей $n_o=1,668$ и $n_e=1,491$.

5.145. Заполненный нитробензолом сосуд, в котором расположены пластины плоского конденсатора (рис. 5.28;

такое устройство называется ячейкой Керра), при подаче на конденсатор электрического напряжения приобретает свойства двоякопреломляющего кристалла с оптической осью, параллельной напряженности поля в конденсаторе. Разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей пропорциональна квадрату напряженности поля E . Поэтому при прохождении света через ячейку между составляющей светового вектора, параллельной полю, и составляющей, перпендикулярной к полю, возникает разность фаз δ , пропорциональная E^2 и длине l конденсатора по ходу луча, что принято записывать в виде $\delta = 2\pi B l E^2$, где B — характеристика вещества, называемая постоянной Керра. Эта постоянная зависит от длины волны света и от температуры. У нитробензола при комнатной температуре для $\lambda = 600$ нм постоянная Керра $B = 2,2 \cdot 10^{-12}$ м/В².

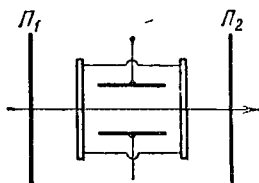


Рис. 5.28

Поместим ячейку Керра между скрещенными поляризаторами Π_1 и Π_2 , расположив ее так, что «оптическая ось» ячейки (т. е. направление электрического поля в ней) образует с плоскостями поляризаторов угол 45° . Положив $l = 10,0$ см, определить:

а) минимальное значение $E_{\min}$ напряженности поля, при котором система будет пропускать максимальную долю падающего на нее света,

б) сколько просветлений и затемнений ячейки произойдет за время, в течение которого напряженность поля возрастет от нуля до $3,38 \cdot 10^6$ В/м.

5.146. На описанную в предыдущей задаче систему, состоящую из ячейки Керра и двух скрещенных поляризаторов, подается переменное напряжение частоты $\nu = 50$ Гц. Амплитудное значение напряженности возникающего при этом электрического поля $E_m = 3,38 \cdot 10^6$ В/м.

а) Сколько раз будет прерывать свет такой световой затвор в течение 1 секунды?

б) Будут ли временные интервалы между прерываниями одинаковыми?

5.147. Поляризованный в вертикальной плоскости белый свет проходит через вырезанную перпендикулярно к оптической оси OO' правовращающую кварцевую пластинку толщины $a = 3,00$ мм, за которой установлен поляроид Π (рис. 5.29). В интервале длин волн от 500 до 650 нм постоян-

ную вращения α кварца можно приближенно (с точностью до 5 %) считать изменяющейся линейно с длиной волны от значения $\alpha_1 = 31$ угл. град./мм при $\lambda_1 = 500$ нм до значения $\alpha_2 = 17$ угл. град./мм при $\lambda_2 = 650$ нм. Определить, какой цвет будет преобладать в свете, вышедшем из поляроида, если плоскость поляроида образует с вертикалью угол φ , равный: а) 55° , б) 64° , в) 72° , г) 85° (φ отсчитывается по часовой стрелке, если смотреть вдоль луча).

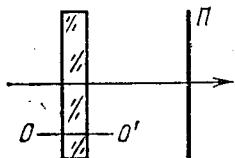


Рис. 5.29

5.148. Имеется призма, вырезанная из кварца так, что оптическая ось OO' перпендикулярна к грани AB (рис. 5.30). Преломляющий угол призмы $\vartheta = 30^\circ$. Параллельный пучок плоскополяризованного света с $\lambda = 590$ нм падает на призму под таким углом, что в призме свет распространяется вдоль оптической оси. Если смотреть на тыльную сторону призмы через поляроид Π , наблюдаются чередующиеся светлые и темные полосы, параллельные ребру призмы AB . Расстояние между серединами светлых (или темных) полос $\Delta x = 15,0$ мм. Найти:

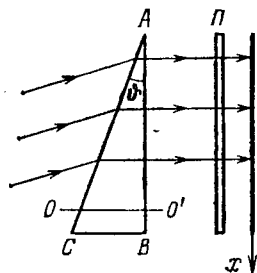


Рис. 5.30

- постоянную вращения α кварца для рассматриваемой длины волны,
- функцию $I(x)$, описывающую зависимость интенсивности света за поляроидом от x .

5.5. Взаимодействие световых волн с веществом

5.149. Какая длина волны подразумевается в формуле для групповой скорости $u = v - \lambda (dv/d\lambda)$ — длина волны в вакууме или длина волны в той среде, в которой скорость света равна v ?

5.150. 1. Допустим, что фазовая скорость v света в некоторой среде изменяется: а) с частотой света ω по закону $v = \alpha \omega^q$, б) с длиной волны λ в данной среде по закону $v = \beta \lambda^p$ (q и p — числа, меньшие 1, α и β — константы). Найти значение групповой скорости u .

2. Вычислить u для случая: а) $q = -1$, б) $p = -1$.

5.151. Для многих прозрачных бесцветных веществ зависимость показателя преломления n от длины волны в ва-

кууме λ_0 может быть приближенно представлена формулой $n=a+b/\lambda_0^2$, где a и b — константы. Ниже приведены экспериментальные данные для одного из сортов стекла:

λ_0 , нм	759,0	589,3	486,0	397,0
n	1,510	1,515	1,521	1,531

1. Найти по наибольшему и наименьшему значениям n значения констант a и b для данного стекла.

2. Вычислить по приведенной выше формуле с использованием найденных значений a и b показатель преломления для двух указанных в таблице промежуточных длин волн. Сравнить результат с табличными значениями.

5.152. Исходя из предположения о том, что зависимость показателя преломления n от длины волны в вакууме λ_0 для некоторой среды определяется формулой $n=a+b/\lambda_0^2$, где a и b — константы (см. задачу 5.151),

а) найти выражение (через λ_0) для групповой скорости u света в данной среде,

б) вычислить значения групповой скорости u (выразить их через c) для указанных в задаче 5.151 длин волн (для a и b принять значения, найденные в задаче 5.151). Сравнить их со значениями фазовой скорости v .

5.153. Свободный электрон находится в поле распространяющейся в вакууме монохроматической световой волны. Длина волны $\lambda=600$ нм, интенсивность $I=375$ лм/м².

а) Пренебрегая в первом приближении действием на электрон магнитной составляющей поля волны, найти амплитуду a колебаний электрона и амплитуду v_m его скорости.

б) Используя полученный результат, определить отношение амплитуд магнитной F_{Bm} и электрической F_{Em} сил, действующих на электрон. Выразить его через амплитуду скорости и скорость света c .

5.154. Имеется разреженная плазма с концентрацией свободных электронов, равной n . Рассмотрев прохождение через плазму электромагнитной волны частоты ω , найти выражение для диэлектрической проницаемости ϵ плазмы в зависимости от ω . Взаимодействием волны с ионами плазмы, а также воздействием на электроны магнитной составляющей волны пренебречь (см. предыдущую задачу).

5.155. При прохождении в некотором веществе пути l интенсивность света I уменьшается в два раза. Во сколько раз уменьшится I при прохождении пути $3l$?

5.156. В некоторой среде распространяется плоская монохроматическая световая волна. Коэффициент поглощения среды для данной длины волны $\kappa=1,00$ м⁻¹ (коэффициентом поглощения такого порядка обладают стекла). На

сколько процентов уменьшается интенсивность света при прохождении волной пути, равного: а) 5,00 мм (оконное стекло), б) 10,0 мм (зеркальное стекло), в) 1,00 м, г) 4,60 м?

5.157. Имеется прозрачная пластина толщины $a = 10,0$ см. Для некоторой длины волны λ коэффициент поглощения пластины изменяется линейно от значения $\kappa_1 = 0,800 \text{ м}^{-1}$ у одной поверхности пластины до $\kappa_2 = 1,200 \text{ м}^{-1}$ — у другой поверхности. Определить ослабление (в процентах) интенсивности монохроматического света данной длины волны при прохождении им толщины пластины.

5.158. На стеклянную плоскопараллельную пластину падает по нормали плоская монохроматическая световая волна интенсивности $I_0 = 100,0 \text{ лм/м}^2$. Показатель преломления пластины для данной длины волны $n = 1,500$, коэффициент поглощения $\kappa = 1,000 \text{ м}^{-1}$. Толщина пластины $a = 10,00$ см. Длина когерентности волны много меньше a . Найти интенсивность I света, прошедшего через пластину, а) без учета, б) с учетом многократных отражений.

5.159. Решить задачу 5.158 в предположении, что поглощение света в пластине отсутствует. Сравнить полученный результат с ответом к задаче 5.158.

5.160. 1. На сколько процентов уменьшается интенсивность света при прохождении им оконного стекла толщины $a = 4,00$ мм за счет: а) поглощения, б) отражений? Коэффициент поглощения стекла κ принять равным $1,23 \text{ м}^{-1}$, а показатель преломления n — равным 1,52. Вторичными отражениями света пренебречь.

2. Во сколько раз уменьшение интенсивности за счет отражений превосходит уменьшение за счет поглощения?

3. Чему равно полное ослабление света (за счет поглощения и отражений) в процентах?

5.161. В лаборатории имеются изготовленные из некоторого сорта стекла пластинки толщины $a_1 = 2,16$ мм и $a_2 = 36,82$ мм. Предложите такой способ определения коэффициента поглощения κ данного сорта стекла для некоторой λ , при котором не требуется знать коэффициент отражения света пластинками. Получите соответствующую расчетную формулу.

5.162. Пусть первая из описанных в предыдущей задаче пластинок пропускает 92,5 % упавшего на нее света, а вторая — 88,2 %. Найти коэффициент поглощения света стеклом для данной длины волны.

5.163. Во сколько раз интенсивность молекулярного рассеяния синего света ($\lambda = 460 \text{ нм}$) превосходит интенсивность рассеяния красного света ($\lambda = 650 \text{ нм}$)?

5.6. Оптика движущихся сред

5.164. В опыте, аналогичном тому, посредством которого Физо определял коэффициент увлечения мирового эфира водой, суммарный путь света в воде $2l=2,00$ м. Длина волны света $\lambda_0=600$ нм. Определить число полос ΔN , на которое смещается интерференционная картина при приведении воды в движение со скоростью $u=6,00$ м/с. Показатель преломления воды $n=1,33$.

5.165. Самолет летит по направлению к радиолокатору, работающему на длине волны $\lambda=20,0$ см. Какова скорость u самолета, если регистрируемая локатором частота биений между сигналом, посылаемым локатором, и сигналом, отраженным от самолета, $\Delta\nu=2778$ Гц?

5.166. В земных условиях длина волны испускаемой атомарным водородом спектральной линии H_α равна $\lambda=656$ нм. При измерении длины волны этой линии в излучении, приходящем от диаметрально противоположных краев солнечного диска, было обнаружено различие, составляющее $\Delta\lambda=0,0088$ нм. Воспользовавшись этими данными, найти период T обращения Солнца вокруг его оси.

5.167. Какое относительное изменение частоты $\Delta\omega/\omega$ излучаемой атомом световой волны наблюдается, если атом а) приближается к спектрографу, б) удаляется от спектрографа со скоростью v , равной средней скорости теплового движения атомов при температуре T ? Масса атома равна m .

5.168. Невзаимодействующие друг с другом идентичные атомы (например, атомы газа, близкого к идеальному) излучают одинаковый набор резких спектральных линий с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots$. Хаотическое тепловое движение приводит к тому, что вследствие эффекта Доплера спектрограф регистрирует вместо частоты ω_i непрерывный набор частот, заключенных в интервале $\delta\omega_i$, расположенном в окрестности ω_i . Возникающее таким образом уширение спектральных линий называется доплеровским и обозначается $\delta\omega_D$ (или $\delta\lambda_D$). Основная часть атомов движется со скоростями, близкими к средней скорости $\langle v \rangle$ теплового движения. Поэтому при вычислении $\delta\omega_D$ предполагают, что все атомы движутся со скоростью $\langle v \rangle$.

а) Написать выражение для относительной доплеровской ширины спектральной линии $\delta\omega_D/\omega$ через среднюю скорость $\langle v \rangle$.

б) Вычислить доплеровскую ширину $\delta\lambda_D$ спектральной линии длины $\lambda=656$ нм, испускаемой атомарным водородом при температуре $T=2000$ К,

5.169. При наблюдении излучения, испускаемого нагретым аргоном, была определена доплеровская ширина спектральных линий, относительная величина которой оказалась равной $\delta\omega_D/\omega = 4,9 \cdot 10^{-6}$. Найти температуру газа T .

5.170. В опыте, аналогичном опыту Айвса, наблюдалось излучение, испускаемое пучком положительных ионов, возникающих в газоразрядной трубке. Наблюдение велось в направлении, перпендикулярном к направлению движения ионов. Было обнаружено относительное смещение спектральных линий в сторону меньших частот на величину $\Delta\omega/\omega = 1,3 \cdot 10^{-5}$. Найти скорость v ионов в пучке.

5.171. Внесший большой вклад в развитие оптики известный американский физик Роберт Вуд очень любил шутку и розыгрыш. С его именем связано много легенд. Согласно одной из них Вуд однажды, управляя автомобилем, проехал на красный свет. Остановившему его полицейскому Вуд объяснил свой проступок тем, что вследствие эффекта Доплера красный свет ему показался зеленым. Полицейский тоже любил шутку. Поэтому он согласился принять версию Вуда, однако оштрафовал его за превышение скорости. Требуется найти скорость автомобиля v , при которой красный свет с длиной волны 690 нм был бы воспринят водителем как зеленый с длиной волны 530 нм.

АТОМНАЯ ФИЗИКА

Обозначения:

A — массовое число, механический эквивалент света, работа выхода
 A_r — относительная атомная масса
 a — амплитуда, поглощательная способность
 B — магнитная индукция
 b — прицельный параметр
 C — молярная теплоемкость
 c — скорость света в вакууме
 D — символ состояния атома с $L=2$
 d — диаметр, расстояние, ридберговская поправка, символ состояния электрона с $l=2$
 E — напряженность электрического поля
 E — модуль Юнга, освещенность, энергия
 E_F — уровень (энергия) Ферми
 E_k — кинетическая энергия
 $E_{св}$ — энергия связи
 $\mathcal{E}$ — электродвижущая сила
 F — символ состояния атома с $L=3$
 f — символ состояния электрона с $l=3$
 g — кратность вырождения (статистический вес), множитель Ланде
 H — символ состояния атома с $L=5$
 I — интенсивность излучения, момент инерции, сила света, сила тока
 J — вращательное квантовое число, квантовое число момента импульса атома, квантовый выход фотоэффекта
 k — постоянная Больцмана

L — орбитальное квантовое число атома
 L_α — энергетическая яркость
 l — длина, орбитальное квантовое число электрона, расстояние
 M — момент импульса (механический момент)
 m — масса
 m_e — масса электрона
 m_α — масса альфа-частицы
 m_μ — масса мюона
 N — число состояний, число уровней, число частиц
 n — квантовое число, номер уровня, число частиц в единице объема (концентрация)
 P — вероятность, символ состояния атома с $L=1$
 p — давление, ридберговская поправка, символ состояния электрона с $l=1$
 q — электрический заряд
 R — радиус, постоянная Ридберга, электрическое сопротивление, энергетическая светимость
 R^* — энергетическая светимость абсолютно черного тела
 r — испускательная способность, радиус, расстояние
 r_0 — боровский радиус, расстояние между ядрами в молекуле
 S — площадь, символ состояния атома с $L=0$, спиновое квантовое число атома
 s — ридберговская поправка, символ состояния электрона с $l=0$, спиновое квантовое число электрона

T — термодинамическая температура, период полураспада
 t — время
 U — напряжение, разность потенциалов, энергия
 u — плотность энергии
 V — объем, относительная спектральная чувствительность человеческого глаза
 v — скорость
 ν — колебательное квантовое число
 Z — атомный номер элемента
 α — угол
 ϵ — энергия осциллятора, энергия частицы
 θ — температура Дебая
 ϑ — угол
 λ — длина волны, постоянная радиоактивного распада

λ_C — комптоновская длина волны ($\lambda_C = \lambda_C / 2\pi$)
 μ — магнитный момент
 μ_B — магнетон Бора
 ν — частота
 ρ — плотность
 σ — постоянная Стефана — Больцмана, постоянная экранирования, удельная электрическая проводимость
 τ — время, среднее время жизни
 Φ — поток энергии
 Φ_0 — квант магнитного потока
 ϕ — потенциал, угол
 ψ — пси-функция
 ω — круговая частота
 ω_r — угловая скорость
 ω_v — собственная частота колебаний
 $\propto$ — знак пропорциональности

6.1. Тепловое излучение

6.1. Чему равна испускательная способность $r(\omega, T)$ идеально отражающей поверхности?

6.2. На поверхность с поглощательной способностью $\alpha = 0,5$, находящуюся в равновесии с излучением, падает поток лучистой энергии $\Phi_{\text{пад}}$. Какой поток Φ распространяется от поверхности по всем направлениям в пределах телесного угла 2π ? За счет чего образуется этот поток?

6.3. Определить длину волны λ_m , отвечающую максимуму испускательной способности абсолютно черного тела при температуре T , равной: а) 3 К, б) 300 К, в) 3000 К, г) 5000 К. В какую спектральную область попадают найденные длины волн?

6.4. При переходе от температуры T_1 к температуре T_2 площадь, ограниченная графиком функции распределения плотности энергии равновесного излучения по длинам волн, увеличивается в 16 раз. Как изменяется при этом длина волны λ_m , на которую приходится максимум испускательной способности абсолютно черного тела?

6.5. Энергетическая светимость абсолютно черного тела $R^* = 250 \text{ кВт/м}^2$. На какую длину волны λ_m приходится максимум испускательной способности этого тела?

6.6. Найти среднюю энергию $\langle \epsilon \rangle$ квантового осциллятора при температуре T . Частота осциллятора равна ω .

6.7. Вычислить среднюю энергию $\langle \epsilon \rangle_{\text{кв}}$ квантового осциллятора (см. задачу 6.6) при температуре T для: а) час-

тоты ω_1 , отвечающей условию $\hbar\omega_1=kT$, б) частоты $\omega_2=0,1\omega_1$, в) частоты $\omega_3=10\omega_1$. Выразить $\langle\epsilon\rangle_{\text{кв}}$ через kT . Сравнить найденные значения со средней энергией $\langle\epsilon\rangle_{\text{кл}}$ классического осциллятора.

6.8. Найти среднюю энергию $\langle\epsilon\rangle$ (в эВ) электромагнитного колебания при температуре 3000 К для длин волн λ , равных: а) 500 мкм, б) 50 мкм, в) 5 мкм, г) 0,5 мкм (видимая область спектра). Сравнить найденные значения $\langle\epsilon\rangle$ со значением kT .

6.9. Найти: а) температурную зависимость частоты ω_m , на которую приходится максимум функции $f(\omega, T)$, определяющей испускательную способность абсолютно черного тела,

б) значение произведения $\lambda_m\omega_m$, где λ_m — длина волны, отвечающая максимуму функции $\varphi(\lambda, T)$. Сравнить это значение с $2\pi c$.

6.10. Поверхность Солнца близка по своим свойствам к абсолютно черному телу. Максимум испускательной способности приходится на длину волны $\lambda_m=0,50$ мкм (в излучении Солнца, прошедшем через атмосферу и достигшем поверхности Земли, максимум приходится на $\lambda=0,55$ мкм). Определить:

а) температуру T солнечной поверхности,

б) энергию E , излучаемую Солнцем за 1 секунду в виде электромагнитных волн,

в) массу m , теряемую Солнцем в 1 секунду за счет излучения,

г) примерное время τ , за которое масса Солнца уменьшилась бы за счет излучения на 1 %, если бы температура Солнца оставалась постоянной.

6.11. Полагая, что Солнце обладает свойствами абсолютно черного тела, определить интенсивность I солнечного излучения вблизи Земли за пределами ее атмосферы (эта интенсивность называется солнечной постоянной). Температура солнечной поверхности $T=5785$ К.

6.12. Интенсивность испускаемого Солнцем видимого излучения вблизи поверхности Земли за пределами ее атмосферы $I_{\text{вид}}=0,60$ кВт/м². Полагая, что в видимой области энергия излучения распределена равномерно по длинам волн, и воспользовавшись кривой относительной спектральной чувствительности человеческого глаза (см. рис. 5.9), оценить:

а) освещенность E перпендикулярной к направлению лучей поверхности, создаваемую солнечным излучением на внешней границе земной атмосферы,

б) силу света Солнца I ,

Механический эквивалент света $A=0,0016$ Вт/лм.

6.13. Как зависит энергетическая яркость L_e абсолютно черного тела от температуры T ?

6.14. В тонкостенной замкнутой оболочке имеется отверстие, линейные размеры которого много меньше линейных размеров оболочки. Стенки оболочки поддерживаются при температуре $T=300$ К. Приняв во внимание, что абсолютно черное тело является ламбертовским источником, определить энергетическую яркость L_e отверстия.

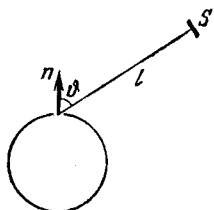


Рис. 6.1

6.15. В сферической оболочке диаметра 30 см имеется отверстие диаметра $d=4,00$ мм. На расстоянии $l=500$ мм от центра отверстия расположена круглая площадка S , радиус которой $r=3,00$ мм (рис. 6.1). Линия, проведенная из центра отверстия в центр площадки, образует с нормалью к отверстию угол $\varphi=45,0^\circ$. Площадка перпендикулярна к этой линии. Стенки полости поддерживаются при температуре $T=2000$ К. Определить падающий на площадку поток энергии Φ , обусловленный излучением, выходящим из отверстия.

6.16. На корпусе космической лаборатории, летящей вокруг Солнца по круговой орбите, радиус которой R равен среднему расстоянию от Земли до Солнца, установлено устройство, моделирующее абсолютно черное тело. Наружная поверхность оболочки этого устройства является идеально отражающей. Отверстие в оболочке все время обращено к Солнцу. Пренебрегая теплообменом через крепление устройства к корпусу лаборатории, определить равновесную температуру T , которая установится внутри устройства. Температуру солнечной поверхности T_c принять равной 5800 К.

6.2. Фотоны

6.17. Определить пределы (в эВ), в которых находится энергия фотонов, соответствующих видимой части спектра.

6.18. Монохроматический свет длины волны $\lambda=555$ нм, падая на некоторую поверхность, создает освещенность $E=100$ лк (такая освещенность в белом свете необходима для того, чтобы можно было читать без напряжения). Сколько фотонов попадает на площадку $S=1$ см² в 1 секунду?

Механический эквивалент света $A=0,0016$ Вт/лм.

6.19. Определить энергию ϵ (в эВ) и импульс p фотона с длиной волны λ , равной: а) 555 нм (видимый свет), б) 0,1 нм (рентгеновские лучи), в) 0,001 нм (гамма-лучи). Сравнить ϵ с энергией покоя электрона, а p с импульсом электрона, движущегося со скоростью $v=1000$ м/с.

6.20. При какой скорости v импульс электрона p совпадет по модулю с импульсом фотона, длина волны которого $\lambda=0,001$ нм (см. задачу 6.19, п. в).

6.21. Параллельный пучок световых лучей с интенсивностью $I=1,37$ кВт/м² (см. задачу 6.11) падает на шарик радиуса $r=1,00$ см, обладающий идеально гладкой поверхностью. Определить, исходя из корпускулярных представлений, силу F , которую испытывает шарик, если поверхность его обладает:

- а) коэффициентом поглощения, равным 1,
- б) коэффициентом отражения, равным 1.

6.22. Солнечная постоянная (т. е. интенсивность солнечного излучения вблизи Земли за пределами земной атмосферы) $I=1,37$ кВт/м². Примерно 40 % этого потока энергии приходится на видимую часть спектра. Считая, что эта энергия распределена равномерно по частотам,

а) найти функцию $\varphi(\omega)$ распределения плотности потока фотонов по частотам,

б) определить плотность потока $j_{\text{фот}}$ «видимых» фотонов, падающего на внешнюю границу атмосферы.

6.23. Определить длину волны λ_{min} , отвечающую коротковолновой границе рентгеновского спектра, для случая, когда к трубке приложено напряжение $U=50$ кВ.

6.24. Увеличение напряжения на рентгеновской трубке в $\eta=2$ раза сопровождается изменением длины волны, отвечающей коротковолновой границе рентгеновского спектра, на $\Delta\lambda=0,025$ нм. Определить первоначальное напряжение U , приложенное к трубке.

6.25. В 1916 г. Р. Миллиkenом при исследовании фотоэффекта с поверхности натрия были получены данные, приведенные ниже:

$\nu, 10^{14} \text{ с}^{-1}$	5,49	6,92	7,41	8,22	9,60	11,83
$U, \text{ В}$	0,47	1,02	1,20	1,60	2,13	3,02

Здесь ν — частота света, U — задерживающее напряжение¹⁾. Используя эти данные, определить:

- а) значение постоянной Планка $\hbar$,
- б) работу выхода электрона A для натрия.

¹⁾ Данные взяты из оригинальной работы Милликена. В значения U внесена поправка на контактную разность потенциалов.

6.26. Работа выхода электрона для никеля $A=4,84$ эВ. Найти длину волны λ_0 , отвечающую красной границе фотоэффекта.

6.27. Красной границе фотоэффекта для алюминия соответствует длина волны $\lambda_0=332$ нм. Найти:

- а) работу выхода электрона A для этого металла,
- б) длину световой волны λ , при которой задерживающий потенциал $U=1,00$ В.

6.28. До какого потенциала ϕ можно зарядить удаленный от других тел цинковый шарик, облучая его ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda=200$ нм?

6.29. Катод вакуумного фотодиода освещается равномерно монохроматическим светом с $\lambda=450$ нм. Площадь катода $S=1,00$ см², освещенность $E=100$ лк (такая освещенность в белом свете нужна для того, чтобы можно было читать без напряжения). Определить ток насыщения $I_{\text{нас}}$, текущий через диод. При указанной длине волны световому потоку в 1 лм соответствует поток энергии в 0,040 Вт. Квантовый выход фотоэффекта J (т. е. число фотоэлектронов, приходящееся на один падающий фотон) принять равным 0,050.

6.30. Фотон длины волны $\lambda=700$ нм (видимая часть спектра) рассеивается под углом $\vartheta=\pi/2$ на свободном покоящемся электроне. Определить:

- а) какую долю первоначальной энергии теряет при этом фотон,
- б) какую скорость v приобретает электрон.

6.31. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для случая $\lambda=0,100$ нм (рентгеновское излучение).

6.32. а) Определить кинетическую энергию E_k , приобретаемую первоначально покоившейся свободной частицей массы m при рассеянии на ней под углом ϑ фотона с энергией ϵ .

б) Упростить полученную формулу для случая, когда $\epsilon \ll mc^2$.

6.33. Гамма-квант с энергией $\epsilon=1,00$ МэВ рассеивается под углом $\vartheta=90^\circ$ на свободном покоящемся протоне. Определить:

- а) какую кинетическую энергию E_k сообщает гамма-квант протону,
- б) с какой скоростью v будет двигаться протон после «соударения».

6.34. При исследовании излучения, возникшего в результате рассеяния на графите под углом $\vartheta=90^\circ$ рентгенов-

ского пучка с длиной волны $\lambda=0,0714$ нм (K_{α} молибдена), дифракционный максимум 1-го порядка несмещенной компоненты получился при падении на кристалл рентгеновского спектрографа под углом скольжения $\varphi=30,0^{\circ}$. На какой угол $\delta\varphi$ нужно было повернуть кристалл для того, чтобы максимум несмещенной компоненты был заменен максимумом смещенной компоненты?

6.35. Используя постоянную Планка $\hbar$, скорость света в вакууме c и массу частицы m , составить выражение для величины, имеющей размерность длины. Что это за величина?

6.3. Формула Резерфорда. Атом Бора

6.36. На какое расстояние $r_{\min}$ может приблизиться к неподвижному ядру атома золота α -частица при центральном «соударении», если скорость частицы на большом расстоянии от ядра $v=3,00 \cdot 10^7$ м/с?

6.37. Определить значение прицельного параметра b в случае рассеяния α -частицы на угол $\vartheta=\pi/2$ ядром атома серебра. Скорость α -частицы $v=1,00 \cdot 10^7$ м/с.

6.38. Написать формулу Резерфорда для рассеяния протонов веществом с атомным номером Z .

6.39. В опыте, аналогичном опыту Резерфорда, поток α -частиц, равный $2,70 \cdot 10^5$ частиц/с, рассеивался золотой фольгой толщины $a=4,00$ мкм. Кинетическая энергия частиц $E_k=8,30$ МэВ. Рассеянные частицы регистрировались путем наблюдения сцинтилляций на круглом экране площади $S=1,00$ см². Расстояние экрана от места пересечения пучка α -частиц с фольгой $l=0,200$ м. Определить среднее число сцинтилляций, наблюдавшихся за время $\Delta t=1,00$ мин при установке регистрирующего частицы устройства под углом ϑ к направлению падающего пучка, равным: а) 30° , б) 60° , в) 90° , г) 120° , д) 150° .

6.40. Найти вероятность P того, что α -частица в опыте, описанном в задаче 6.39, будет рассеяна в заднюю полусферу, т. е. на угол $\vartheta \geq \pi/2$.

6.41. В каком соотношении находятся вероятности резерфордовского рассеяния в заднюю полусферу (см. задачу 6.40) для α -частицы (P_{α}) и для протона (P_p) при идентичных условиях (т. е. при одинаковых v , Z , n и a)?

6.42. В опыте с парами ртути, аналогичном опыту Франка и Герца, наблюдались пики тока при разностях потенциалов U , равных 4,9 и 9,8 В. При понижении давления

паров ртути появился дополнительный пик при $U=6,7$ В. Как надо интерпретировать эти результаты?

6.43. Определить скорость v_1 , с которой электрон движется по первой боровской орбите в атоме водорода.

6.44. Имеется система, состоящая из ядра атома водорода (протона) и мюона (частицы, имеющей такой же заряд, как у электрона, и массу, равную 207 массам электрона) (такую систему называют мезоатомом или мюонным атомом). Исходя из представлений теории Бора, определить:

а) радиус r_1 первой боровской орбиты мюона; сравнить с боровским радиусом r_0 ,

б) энергию $E_{\text{св}}$ (в эВ) связи мюона с протоном в основном состоянии,

в) скорость v_1 мюона на первой орбите; сравнить v_1 с ответом к задаче 6.43.

г) число оборотов, которое успеет совершить мюон до своего распада (среднее время жизни мюона $\tau=2,2$ мкс; по истечении этого времени мюон распадается на электрон, нейтрино и антинейтрино).

6.45. В рамках теории Бора найти:

а) выражение для энергии связи $E_{\text{св}}$ электрона с ядром в основном состоянии атома водорода, учитывающее движение ядра,

б) относительную величину δ поправки к энергии связи, получающейся в результате учета движения ядра.

6.46. Чему равна относительная величина δ поправки (см. задачу 6.45, п. б) для мюонного атома (см. задачу 6.44)?

6.47. Используя постоянную Планка $\hbar$, массу m_e и заряд e электрона, составить выражение для величины, имеющей размерность длины. Что это за величина?

6.48. Используя постоянную Планка $\hbar$, массу m_e и заряд e электрона, составить выражение для величины, имеющей размерность энергии. Что это за величина?

6.49. Определить магнитный момент μ_1 электрона, находящегося в атоме водорода на первой боровской орбите. Сравнить полученный результат с магнетонном Бора μ_B .

6.50. Определить магнитный момент μ'_1 мюона, находящегося в мюонном атоме (см. задачу 6.44) на первой боровской орбите. Сравнить μ'_1 с магнитным моментом μ_1 электрона, находящегося в атоме водорода на первой боровской орбите (см. задачу 6.49).

6.51. Найти для электрона, находящегося в атоме водорода на n -й боровской орбите, отношение магнитного момента μ_n к механическому моменту M_n . Сравнить полученный результат с ответом к задаче 3.165.

6.52. Частица массы m движется в центрально-симметричном силовом поле $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$ (k — положительная константа). Полагая, что момент импульса частицы может иметь лишь значения, кратные $\hbar$ (как в теории атома Бора), найти:

а) возможные радиусы r_n круговых орбит частицы,

б) возможные значения E_n полной энергии частицы.

Выразить E_n через частоту ω , с которой колебалась бы частица под действием силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

6.4. Спектры атомов и молекул

6.53. а) Выразить через постоянную Ридберга R частоту ω_m головной линии m -й спектральной серии водородного атома.

б) Найти отношение частот головных линий первых четырех серий, приняв за единицу частоту ω_2 головной линии серии Бальмера.

6.54. Потенциал ионизации водородного атома $\varphi_i = 13,6$ В. Исходя из этого, вычислить значение постоянной Ридберга R .

6.55. Исходя из того, что энергия ионизации атома водорода $E_i = 13,6$ эВ, определить первый потенциал возбуждения φ_1 этого атома.

6.56. Основываясь на том, что первый потенциал возбуждения водородного атома $\varphi_1 = 10,2$ В, определить энергию ϵ (в эВ) фотона, соответствующего первой линии серии Бальмера.

6.57. Энергия ионизации водородного атома $E_i = 13,6$ эВ. Исходя из этого, определить энергию ϵ (в эВ) фотона, соответствующего второй линии серии Бальмера.

6.58. Основываясь на том, что потенциал ионизации водородного атома равен 13,6 В, определить длину волны λ_1 первой линии и длину волны λ_∞ границы серии: а) Лаймана, б) Бальмера, в) Пашена.

6.59. Исходя из того, что длина волны спектральной линии H_β равна 486,1 нм, найти значение постоянной Ридберга R .

6.60. Исходя из того, что первый потенциал возбуждения водородного атома $\varphi_1 = 10,2$ В, найти длину волны: а) линии H_α , б) границы серии Бальмера H_∞ .

6.61. Потенциал ионизации водородного атома равен 13,6 В. Исходя из этого, определить, сколько линий серии Бальмера попадают в видимую часть спектра.

6.62. Спектральные линии каких длин волн возникнут, если атом водорода перевести в состояние $3S$?

6.63. Фотон с энергией $15,0$ эВ выбивает электрон из покоящегося атома водорода, находящегося в основном состоянии. С какой скоростью v движется электрон вдали от ядра?

6.64. Энергия валентного электрона в основном состоянии $E_1 = -3,8$ эВ. Чему равен потенциал ионизации ϕ_i атома?

6.65. Границе главной (т. е. возникающей при переходе в состояние с наименьшей энергией) серии некоторого атома соответствует длина волны $\lambda_\infty = 250$ нм. Найти потенциал ионизации ϕ_i атома.

6.66. Основным состоянием атома натрия является состояние $3S$. Ридберговская поправка для S -термов равна $-1,35$. Исходя из этих данных, вычислить энергию ионизации E_i атома натрия (выразить ее в эВ).

6.67. Основным для атома натрия является состояние $3S$. Ридберговская поправка для P -термов $p = -0,87$. Длина волны резонансной линии (обусловленной переходом $3P \rightarrow 3S$) $\lambda = 590$ нм. Исходя из этих данных, найти потенциал ионизации ϕ_i атома натрия.

6.68. Основным для атома натрия является состояние $3S$. Ридберговские поправки отрицательны и находятся в соотношении $|s| > |p| > |d|$. Уровень nP лежит ниже уровня $(n+1)S$, а уровень nD — ниже уровня $(n+1)P$. Исходя из этих данных, перечислить возможные последовательности переходов, посредством которых атом натрия может перейти из возбужденного состояния $5S$ в основное состояние.

6.69. Длины волн желтого дублета натрия $\lambda_1 = 589,00$ нм $\lambda_2 = 589,59$ нм. Исходя из этих данных, определить разность частот $\Delta\omega$ дублетов резкой серии.

6.70. Исходя из приведенных в задаче 6.69 длин волн, найти для уровня $3P$ атома натрия значение расщепления ΔE (в эВ), обусловленного спин-орбитальным взаимодействием.

6.71. Приняв во внимание водородоподобность F -термов атома натрия, найти разность частот $\Delta\omega$ первой и второй линий основной серии.

6.72. Потенциал ионизации атома лития $\phi_i = 5,39$ В, а первый потенциал возбуждения $\phi_1 = 1,85$ В. Исходя из этих данных, найти ридберговские поправки s и p для лития.

6.73. Используя результаты, полученные в задаче 6.72, определить длины волн спектральных линий, возникаю-

щих при переходе атомов лития из состояния $3S_2$ в состояние $2S$.

6.74. Потенциал ионизации атома цезия $\varphi_i = 3,89$ В. Основным является состояние $6S$. Исходя из этих данных, найти ридберговскую поправку s к S -термам цезия.

6.75. Какую скорость v приобретает первоначально покоившийся атом водорода при испускании фотона, соответствующего головной линии серии:

- а) Лаймана,
- б) Бальмера?

6.76. Найти энергию отдачи E и скорость v , приобретаемую первоначально покоившимся свободным атомом натрия при испускании им фотона, отвечающего переходу $3P \rightarrow 3S$ (желтая линия натрия, см. задачу 6.69). Какую долю энергии фотона $\hbar\omega$ составляет энергия отдачи E ?

6.77. Определить скорость v , приобретаемую первоначально покоившимся свободным атомом ртути при поглощении им фотона резонансной частоты (резонансной называется частота, отвечающая переходу атома на первый возбужденный уровень). Первый потенциал возбуждения атомов ртути равен 4,9 В.

6.78. Первоначально покоившийся свободный атом натрия испускает фотон.

а) Чему равно изменение длины волны $\Delta\lambda$ фотона, возникающее вследствие отдачи, претерпеваемой атомом при излучении?

б) Чем примечателен полученный результат?

6.79. Свободный покоящийся атом лития поглотил фотон частоты $\omega = 2,81 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, в результате чего перешел на первый возбужденный уровень и начал двигаться с некоторой скоростью. Затем атом вернулся в основное состояние, испустив новый фотон в направлении, перпендикулярном к направлению своего движения. С какой скоростью v движется после этого атом?

6.80. Фотон с энергией $\epsilon = 5,4852$ эВ вырывает из свободного покоящегося атома лития валентный электрон. Электрон вылетает под прямым углом к направлению, в котором летел фотон. С какой скоростью v и в каком направлении движется ионизованный атом? Потенциал ионизации лития $\varphi_i = 5,3918$ В.

6.81. Длина волны линии K_α у ванадия ($Z=23$) $\lambda_V = 0,25073$ нм, а у меди ($Z=29$) $\lambda_{Cu} = 0,15443$ нм.

а) Исходя из этих данных, найти значения констант C и σ в уравнении закона Мозли: $\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)$. Сравнить

найденное значение C с величиной, равной $\sqrt{3R/4}$ (R — постоянная Ридберга).

б) Определить атомный номер Z элемента, у которого длина волны линии K_α $\lambda=0,19399$ нм. Что это за элемент?

6.82. Длина волны линии K_α равна у вольфрама ($Z=74$) $0,021381$ нм, а у серебра ($Z=47$) $0,056378$ нм. Исходя из этих данных, определить значения констант C и σ (см. задачу 6.81). Сравнить полученные значения с результатом задачи 6.81. Объяснить наблюдающееся расхождение.

6.83. Длина волны линии L_α равна у вольфрама ($Z=74$) $0,147635$ нм, а у свинца ($Z=82$) $0,117504$ нм.

а) Исходя из этих данных, найти значения констант C и σ в уравнении закона Мозли: $\sqrt{\omega}=C(Z-\sigma)$. Сравнить найденное значение C с величиной, равной $\sqrt{5R/36}$ (R — постоянная Ридберга).

б) Определить атомный номер Z элемента, у которого длина волны линии L_α равна $0,131298$ нм. Что это за элемент?

6.84. Длина волны линии L_α равна у железа ($Z=26$) $1,7602$ нм, а у цинка ($Z=30$) $1,2282$ нм. Исходя из этих данных, определить значения констант C и σ (см. задачу 6.83). Сравнить полученные значения с результатом задачи 6.83.

6.85. У какого из элементов — меди или серебра — относительное изменение частоты $\Delta\omega/\omega$ линии K_α при комптоновском рассеянии на некотором веществе будет больше? Во сколько раз?

6.86. Первый потенциал возбуждения электронной оболочки молекулы CO равен $6,0$ В. В основном электронном состоянии молекулы собственная частота колебаний $\omega_v=4,09 \cdot 10^{14}$ с $^{-1}$. Найти:

а) число N колебательных уровней, заключенных между основным и первым возбужденным электронными уровнями,

б) отношение энергии ΔE_e , необходимой для перевода молекулы на первый возбужденный электронный уровень, к энергии ΔE_v , необходимой для перевода молекулы на первый возбужденный колебательный уровень.

6.87. В основном электронном состоянии молекулы CO собственная частота колебаний $\omega_v=4,09 \cdot 10^{14}$ с $^{-1}$, а равновесное расстояние между ядрами $r_0=0,112$ нм. Найти:

а) число N вращательных уровней, заключенных между основным и первым возбужденным колебательными уровнями,

б) отношение энергии ΔE_v , необходимой для перевода молекулы на первый возбужденный колебательный уровень,

к энергии ΔE_r , необходимой для перевода молекулы на первый возбужденный вращательный уровень. Сравнить полученные результаты с ответом к задаче 6.86.

6.88. Расстояние между линиями вращательной полосы молекулы CN $\Delta\omega = 7,19 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Определить равновесное расстояние r_0 между ядрами молекулы.

6.89. Имеется двухатомная молекула, момент инерции которой равен I . Определить угловую скорость вращения ω_r молекулы в состоянии с вращательным квантовым числом J . Сравнить ω_r с частотой ω спектральной линии, возникающей при переходе с J -го на $(J-1)$ -й вращательный уровень.

6.90. Расстояние между ядрами молекулы HCl $r_0 = 0,127 \text{ нм}$. Найти угловую скорость вращения ω_r молекулы, находящейся на первом возбужденном вращательном уровне.

6.91. Газ, состоящий из молекул CN, находится в термодинамическом равновесии при температуре $T = 400 \text{ К}$. Собственная частота колебаний молекулы CN $\omega = 3,90 \times 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Определить отношение числа N_{i+1} молекул, находящихся на $(i+1)$ -м колебательном уровне, к числу N_i молекул, находящихся на i -м колебательном уровне.

6.5. Квантовая механика

6.92. Написать выражение для дебройлевской длины волны λ релятивистской частицы массы m : а) через ее скорость v , б) через кинетическую энергию E_k .

6.93. При каком значении скорости v дебройлевская длина волны микрочастицы равна ее комптоновской длине волны?

6.94. При какой скорости v электрона его дебройлевская длина волны будет равна: а) 500 нм , б) $0,1 \text{ нм}$? (В случае электромагнитных волн первая длина волны соответствует видимой части спектра, вторая — рентгеновским лучам.)

6.95. При движении вдоль оси x скорость оказывается определенной с точностью $\Delta v_x = 1 \text{ см/с}$. Оценить неопределенность координаты Δx : а) для электрона, б) для броуновской частицы массы $m \sim 10^{-13} \text{ г}$, в) для дробинки массы $m \sim 0,1 \text{ г}$.

6.96. Поток летящих параллельно друг другу электронов, имеющих скорость $v = 1,00 \cdot 10^5 \text{ м/с}$, проходит через щель ширины $b = 0,0100 \text{ мм}$. Найти ширину Δx центрального дифракционного максимума, наблюдаемого на экране,

отстоящем от щели на расстояние $l=1,00$ м. Сравнить Δx с шириной щели b .

6.97. Узкий пучок летящих параллельно друг другу электронов, имеющих скорость $v=1,00 \cdot 10^7$ м/с, проходит через поликристаллическую никелевую фольгу и попадает на расположенный за ней на расстоянии $l=10,0$ см экран. Найти радиусы двух первых дифракционных колец, получающихся на экране за счет отражения электронов от кристаллических плоскостей, отстоящих друг от друга на расстояние $d=0,215$ нм.

6.98. Используя соотношение неопределенности, оценить минимальную энергию E_1 , которой может обладать частица массы m , находящаяся в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме ширины a .

6.99. Оценить с помощью соотношения неопределенности минимальную энергию E_0 одномерного гармонического осциллятора. Масса осциллятора равна m , собственная частота ω .

6.100. Исходя из того, что радиус r атома имеет величину порядка $0,1$ нм, оценить скорость движения электрона v в атоме водорода.

6.101. Задана пси-функция частицы $\psi(x, y, z)$. Написать выражение для вероятности P того, что частица будет обнаружена в области объема V .

6.102. Найти пси-функции и значения энергии частицы массы m , находящейся в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a ($0 \leq x \leq a$). (Бесконечная глубина ямы означает, что потенциальная энергия частицы внутри ямы равна нулю, а вне ямы — бесконечности.) Сравнить результат для наименьшей энергии E_1 с ответом к задаче 6.98.

6.103. Частица из задачи 6.102 находится в основном состоянии (т. е. в состоянии с наименьшей энергией). Вычислить вероятность P того, что координата x частицы имеет значение, заключенное в пределах от ηa до $(1-\eta)a$, где $\eta = 0,3676$.

6.104. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме ширины $a=1,00$ см. Найти:

а) плотность энергетических уровней dn/dE электрона (т. е. число уровней, приходящееся на единичный интервал энергии),

б) значение этой плотности в окрестности уровня с номером $n=10^{10}$,

в) среднее значение энергии $\langle E_n \rangle$ первых $N=10^{10}$ уровней.

6.105. Найти пси-функции и значения энергии частицы массы m , находящейся в двумерной бесконечно глубокой (см. задачу 6.102) потенциальной яме, размер которой равен a по оси x и b по оси y ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$).

6.106. Для частицы из задачи 6.105 найти значения энергии (в эВ) трех нижних уровней, положив $m = 0,911 \times 10^{-30}$ кг (масса электрона) и $a = b = 1,00$ нм.

6.107. Найти пси-функции и значения энергии частицы массы m , находящейся в трехмерной бесконечно глубокой (см. задачу 6.102) потенциальной яме, размер которой равен a по оси x , b по оси y и c по оси z ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$).

6.108. Частица массы m находится в бесконечно глубокой (см. задачу 6.102) сферической потенциальной яме радиуса R . Найти:

а) пси-функции, соответствующие тем состояниям, у которых ψ зависит только от r . Чтобы осуществить вычисления, представить пси-функции в виде $\psi_n(r) = \varphi_n(r)/r$,

б) значения энергии E_n частицы в состояниях, описываемых функциями $\psi_n(r)$.

Примечание. Кроме состояний вида $\psi(r)$, возможны состояния, у которых пси-функции зависят также от угловых координат ϑ и φ .

6.109. Пси-функция некоторой частицы имеет вид $\psi = A \frac{\exp(-r/a)}{r}$, где r — расстояние частицы от силового центра, a — константа. Найти:

а) значение коэффициента A ,

б) среднее расстояние $\langle r \rangle$ частицы от центра.

6.110. Пси-функция некоторой частицы имеет вид

$$\psi = \left(\sqrt{\pi a} \sqrt{2\pi} \right)^{-1} \frac{\exp(-r^2/a^2)}{r},$$

где r — расстояние частицы от силового центра, a — константа. Найти среднее расстояние $\langle r \rangle$ частицы от центра.

6.111. Пси-функция некоторой частицы имеет вид $\psi = A \exp(-r^2/2a^2)$, где r — расстояние частицы от силового центра, a — константа. Найти:

а) значение коэффициента A ,

б) наиболее вероятное $r_{\text{вер}}$ и среднее $\langle r \rangle$ расстояния частицы от центра.

6.112. а) Какой наименьший отличный от нуля момент импульса M_{min} встречается в природе?

б) Перечислить «объекты», обладающие таким моментом.

6.113. В задаче 1.183 был вычислен момент импульса M

Земли, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Выразить этот момент в единицах $\hbar$.

6.114. Пси-функция основного состояния гармонического осциллятора имеет вид

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right),$$

где $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ (m — масса, ω — собственная частота осциллятора). Энергия осциллятора в этом состоянии $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Найти:

а) среднее значение модуля координаты $\langle |x| \rangle$; выразить $\langle |x| \rangle$ через классическую амплитуду a (которая связана с энергией осциллятора соотношением $E = ma^2\omega^2/2$ и сравнить найденное выражение с полученным в задаче 2.78 выражением для $\langle |x| \rangle$ классического осциллятора,

б) среднее значение потенциальной энергии осциллятора $\langle U \rangle$.

6.115. Математический маятник имеет массу $m = 10,0$ мг и длину $l = 1,00$ см. Найти:

а) энергию E_0 нулевых колебаний этого маятника,

б) классическую амплитуду a маятника, отвечающую энергии E_0 .

6.116. Пси-функция основного состояния водородного атома имеет вид $\psi = A \exp(-r/r_0)$, где r_0 — боровский радиус (т. е. радиус первой боровской орбиты). Найти:

а) значение константы A ,

б) плотность вероятности нахождения электрона на расстоянии r от ядра dP/dr ,

в) наиболее вероятное расстояние $r_{\text{вер}}$ электрона от ядра,

г) среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра,

д) среднее значение потенциальной энергии электрона $\langle U \rangle$,

е) вероятность P_η того, что электрон находится на расстоянии от ядра, превышающем ηr_0 (η — некоторое число).

6.117. Воспользовавшись результатом задачи 6.116, п. е), вычислить вероятность того, что электрон в основном состоянии атома водорода находится от ядра на расстоянии, превышающем: а) r_0 , б) $1,5r_0$, в) $2r_0$, г) $5r_0$, д) $10r_0$.

6.118. Некоторое количество атомарного водорода находится в тепловом равновесии при температуре $T = 3000$ К. Сколько N атомов, находящихся в основном состоянии, приходится на один атом, находящийся в первом возбужденном состоянии? Учесть, что вероятность нахождения в со-

стоянии с энергией E пропорциональна, кроме больцмановского множителя, кратности вырождения g (или, как говорят, статистическому весу) данного энергетического уровня.

6.6. Квантовомеханическое описание состояний атомов

6.119. Чему равен квадрат орбитального момента импульса M^2 электрона в состояниях: а) $2p$, б) $4f$?

6.120. Состояние атома характеризуется квантовыми числами L и S , равными: а) 2 и 2, б) 3 и 2, в) 2 и 3, г) 1 и $3/2$. Написать возможные значения квантового числа J при данных значениях L и S .

6.121. Какие из термов: 1) $^2S_1$, 2) $^2P_1$, 3) $^3P_{1/2}$, 4) $^3P_3$, 5) $^5D_0$, 6) $^1F_0$, 7) $^8F_{13/2}$ написаны неверно?

6.122. Мультиплетность F -состояния равна пяти. Написать термы, принадлежащие этому состоянию.

6.123. Из скольких компонент состоит терм: а) ^1S , б) ^2S , в) ^2P , г) ^3P , д) ^4P , е) ^5D ?

6.124. D -терм состоит из пяти компонент. Какова может быть мультиплетность этого терма?

6.125. Каждое из состояний P и D имеет три компоненты. Чему равны возможные значения спинового квантового числа S этих состояний?

6.126. Найти возможные мультиплетности χ термов вида: а) $^{\chi}S_0$, б) $^{\chi}P_2$, в) $^{\chi}D_{3/2}$, г) $^{\chi}F_{1/2}$.

6.127. Какие термы возможны в случае электронных конфигураций: а) $2s^2$, б) $2p3s$, в) $3p^2$?

6.128. Электронная оболочка атома состоит из s -, p - и d -электрона. Написать символ терма для состояния, в котором атом обладает: а) максимальным, б) минимальным для этой конфигурации полным механическим моментом.

6.129. Написать для системы из двух эквивалентных d -электронов символы термов для состояний с а) наибольшим, б) наименьшим возможным значением полного механического момента M_J . Чему равны эти значения?

6.130. Написать символ терма, соответствующего состоянию, в котором механический момент атома $M_J = \hbar\sqrt{2}$, магнитный момент равен нулю, а спинное квантовое число $S=2$.

6.131. Атом, находящийся в состоянии, мультиплетность которого равна четырем, обладает механическим моментом $M_J = (\hbar/2)\sqrt{63}$. Какие значения может иметь квантовое число L этого состояния?

6.132. Чему равен полный механический момент M_J ,

атома, находящегося в состоянии, в котором магнитный момент атома равен нулю, а орбитальное и спиновое квантовые числа имеют значения: $L=2$, $S=3/2$?

6.133. Чему равен максимальный возможный полный механический момент M_J атома лития, валентный электрон которого находится в состоянии с $n=3$? Напишите символ терма соответствующего состояния.

6.134. Решить задачу, аналогичную задаче 6.133, для атома натрия, валентный электрон которого находится в состоянии с $n=4$.

6.135. В случае четырех эквивалентных p -электронов принципу Паули не противоречат термы $^1S_0$, $^3P_2$, $^3P_1$, $^3P_0$, $^1D_2$. Какой из этих термов является основным?

6.136. Сверх заполненных оболочек и подоболочек атом имеет пять эквивалентных p -электронов. Определить основной терм атома.

6.137. Сверх заполненных оболочек и подоболочек атом имеет три эквивалентных p -электрона. Определить согласующиеся с принципом Паули термы атома. Какой из этих термов является основным?

6.138. Какие из переходов: 1) $^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$, 2) $^2S_{1/2} \rightarrow ^2D_{3/2}$, 3) $^2P_{1/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$, 4) $^2D_{5/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$, 5) $^2F_{7/2} \rightarrow ^2D_{3/2}$, 6) $^2D_{3/2} \rightarrow ^2F_{5/2}$, 7) $^2F_{5/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$ запрещены правилами отбора?

6.139. Валентный электрон атома натрия находится в состоянии с $n=4$. Значения остальных квантовых чисел электрона таковы, что атом имеет наибольший возможный механический момент M_J . Определить магнитный момент μ атома в этом состоянии.

6.140. Атом углерода с электронной конфигурацией $1s^2 2s^2 2p 3d$ обладает максимальным возможным при такой конфигурации полным механическим моментом. Чему равен (в магнетонах Бора) магнитный момент μ атома в этом состоянии?

6.141. Найти три самых простых терма, для которых множитель Ланде $g=0$.

6.142. Выразить через магнетон Бора магнитный момент μ атома в состоянии: а) $^3S_1$, б) $^1P_0$, в) $^1P_1$, г) $^4D_{1/2}$, д) $^5F_1$, е) $^7H_2$.

6.143. На сколько компонент расщепится в магнитном поле терм: а) ^1S , б) ^1P , в) ^1D , г) $^2D_{5/2}$?

6.144. На сколько компонент расщепляется в опыте, аналогичном опыту Штерна и Герлаха, пучок атомов, находящихся в состоянии: а) $^2P_{3/2}$, б) $^3D_1$, в) $^3F_4$?

6.145. На сколько компонент расщепляется в опыте,

аналогичном опыту Штерна и Герлаха, пучок атомов, находящихся в состояниях: а) $^1S_0$, б) $^4D_{1/2}$?

6.146. В опыте, аналогичном опыту Штерна и Герлаха, пучок атомов хлора, находящихся в состоянии $^2P_{3/2}$, проходит через область неоднородного магнитного поля с $dB/dx=100$ Тл/м. Протяженность этой области $l_1=40,0$ мм. На расстоянии $l_2=100$ мм от границы области установлен экран. Скорость атомов на входе в область поля $v=600$ м/с. Найти расстояние a между соседними следами, оставляемыми на экране пучками, на которые расщепляется при прохождении через поле исходный пучок.

6.147. Атом находится в магнитном поле с индукцией $B=1,00$ Тл. Найти полное расщепление ΔE (в эВ) термов: а) ^1S , б) ^1P , в) ^1D , г) $^2D_{5/2}$.

6.148. Найти числовое значение нормального (лоренцева) смещения $\Delta\omega_0$ (смещения компонент спектральной линии при простом эффекте Зеемана), соответствующее $B=1,00$ Тл.

6.149. Излучающие атомы находятся в магнитном поле с индукцией $B=1,00$ Тл. Найти интервал $\Delta\omega$ между соседними зеемановскими компонентами для переходов: а) $^1P_1 \rightarrow ^1S_0$, б) $^1D_2 \rightarrow ^1P_1$, в) $^2P_{1/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$, г) $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$, д) $^3D_1 \rightarrow ^3P_0$.

6.150. Сравнить интервал $\Delta\omega$ между линиями желтого дублета натрия (см. задачу 6.69) с интервалом $\Delta\omega'$ между зеемановскими компонентами, на которые расщепляются линии дублета при $B=1,00$ Тл. Линии дублета соответствуют переходам $^2P_{1/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ и $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ (см. задачу 6.149, п. в, г).

6.151. С каким числом штрихов N требуется дифракционная решетка для того, чтобы разрешить зеемановские компоненты, на которые расщепляются при $B=1,00$ Тл спектральные линии желтого дублета натрия (см. задачу 6.150)? Длины волн линий равны 589,0 и 589,6 нм.

6.7. Физика твердого тела

6.152. Ребро ячейки кубического кристалла равно a . Найти расстояние l между точками с индексами:

- а) $\left[\left[\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}\right]\right]$ и $\left[\left[\frac{1}{2} \ 1 \ \frac{1}{2}\right]\right]$, б) $[[0 \ 0 \ 0]]$ и $[[1 \ 1 \ 1]]$,
в) $\left[\left[1 \ 0 \ \frac{1}{2}\right]\right]$ и $\left[\left[\frac{1}{2} \ 1 \ \frac{1}{2}\right]\right]$.

6.153. Найти угол α между направлениями $[2 \ 3 \ 6]$ и $[3 \ 2 \ 1]$ в кубическом кристалле.

6.154. Найти угол α между плоскостями (1 2 3) и (3 2 1) в кубическом кристалле.

6.155. Имеется струна длины l , которая может совершать поперечные колебания в заданной плоскости. Скорость распространения колебаний равна v . Определить число dN_ω нормальных колебаний струны с частотами в интервале от ω до $\omega + d\omega$.

6.156. Имеется прямоугольная мембрана площади S . Скорость распространения поперечных колебаний в мембране равна v . Определить число dN_ω нормальных колебаний мембраны с частотами в интервале от ω до $\omega + d\omega$. Сравнить результат с ответом к задаче 6.155.

6.157. Упругое тело объема V имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Скорость распространения поперечных колебаний в теле равна v . Определить число dN_ω нормальных поперечных колебаний тела с частотами в интервале от ω до $\omega + d\omega$. Сравнить результат с ответами к задачам 6.155 и 6.156.

6.158. Определить температуру Дебая θ для одномерного химически простого кристалла, т. е. цепочки одинаковых атомов, совершающих колебания вдоль прямой линии, на которой они размещаются. Концентрация атомов (число их, приходящееся на единицу длины) $n = 5,00 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$, скорость волн в кристалле $v = 3000 \text{ м/с}$.

6.159. Определить температуру Дебая θ для двумерного кристалла, состоящего из атомов одного сорта. Атомы могут колебаться в плоскости, на которой они размещаются. Равновесные положения атомов находятся в вершинах прямоугольных кристаллических ячеек. Концентрация атомов (число их, приходящееся на единицу площади) $n = 2,50 \times 10^{19} \text{ м}^{-2}$, скорость поперечных и продольных волн в кристалле одинакова и равна $v = 3000 \text{ м/с}$.

6.160. Определить температуру Дебая θ для трехмерного кристалла, состоящего из атомов одного сорта. Равновесные положения атомов находятся в вершинах прямоугольных кристаллических ячеек. Концентрация атомов (число их, приходящееся на единицу объема) $n = 1,25 \times 10^{29} \text{ м}^{-3}$. Скорость поперечных и продольных волн в кристалле одинакова и равна $v = 3000 \text{ м/с}$. Сравнить полученный результат с ответами к задачам 6.158 и 6.159.

6.161. Найти среднее значение частоты $\langle \omega \rangle$ нормальных колебаний:

- а) одномерного кристалла из задачи 6.158,
- б) двумерного кристалла из задачи 6.159,
- в) трехмерного кристалла из задачи 6.160.

6.162. Ниже приведены значения скорости поперечных волн $v_{\perp}$, скорости продольных волн $v_{\parallel}$ и концентрация n атомов для: а) бериллия, б) серебра, в) свинца. Определить температуру Дебая θ для этих металлов.

Металл	$v_{\perp}$, м/с	$v_{\parallel}$, м/с	n , 10^{29} м $^{-3}$
Бериллий	8830	12 550	1,23
Серебро	1590	3600	0,586
Свинец	700	2160	0,328

6.163. Скорость поперечных упругих волн в алюминии $v_{\perp}=3130$ м/с, продольных волн $v_{\parallel}=6400$ м/с. Определить температуру Дебая θ для алюминия.

6.164. Определить энергию U_0 нулевых колебаний охлажденного до затвердевания моля аргона (температура Дебая $\theta=92$ К).

6.165. При давлении $p=1013$ гПа аргон затвердевает при температуре, равной 84 К. Температура Дебая для аргона $\theta=92$ К. Экспериментально установлено, что при $T_1=4,0$ К молярная теплоемкость аргона $C_1=0,174$ Дж/(моль·К). Определить значение молярной теплоемкости аргона C_2 при $T_2=2,0$ К.

6.166. Входящий в дебаевское выражение для теплоемкости интеграл $\int_0^{x_m} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}$ при $x_m \rightarrow \infty$ принимает значение, равное $4\pi^4/15$. С учетом этого определить примерное значение молярной теплоемкости C аргона ($\theta=92$ К) при $T=4,0$ К. Сравнить полученное значение с приведенным в задаче 6.165 экспериментальным значением.

6.167. Найти максимальную энергию ϵ_m фонона, который может возбуждаться в кристалле, характеризуемом температурой Дебая $\theta=300$ К. Фотон какой длины волны λ обладал бы такой же энергией?

6.168. Воспользовавшись данными задачи 6.162 и ответом к ней, оценить максимальное значение p_m импульса фонона в серебре. Фотон какой длины волны λ обладал бы таким же импульсом?

6.169. Атомная масса серебра $A_r=107,9$, плотность $\rho=10,5$ г/см ^{3} . Исходя из этих данных, оценить максимальное значение p_m импульса фонона в серебре. Сравнить полученный результат с ответом к задаче 6.168.

6.170. Что происходит с энергетическим спектром фононов при увеличении объема кристалла (при неизменной концентрации атомов) в два раза?

6.171. Зависит ли среднее число фононов $\langle n_i \rangle$ строго определенной частоты ω_i , возбуждаемых при данной температуре в некотором кристаллическом образце, от числа атомов в этом образце?

6.172. Как зависит число фононов dn с частотами от ω до $\omega + d\omega$, возбуждаемых при данной температуре в некотором кристаллическом образце, от числа N атомов в этом образце?

6.173. Как зависит полное число n фононов всех частот, возбуждаемых при данной температуре в некотором кристаллическом образце, от числа N атомов в этом образце?

6.174. Какое число $\langle n_m \rangle$ фононов максимальной частоты возбуждается в среднем при температуре $T=400$ К в кристалле, дебаевская температура которого $\theta=200$ К?

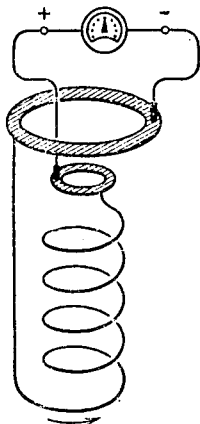


Рис. 6.2

6.175. Приняв для серебра значение температуры Дебая $\theta=208$ К (см. ответ к задаче 6.162, п. б), определить:

а) максимальное значение энергии ϵ_m фонона,

б) среднее число $\langle n_m \rangle$ фононов с энергией ϵ_m при температуре $T=300$ К.

6.176. В эксперименте, аналогичном опыту Толмена и Стюарта, катушка диаметра $d=500$ мм имела $N=400$ витков медной проволоки. Через скользящие контакты катушка присоединялась к баллистическому гальванометру с нулем посередине шкалы (рис. 6.2). Общее сопротивление катушки, гальванометра и соединительных проводов имело значение

$R=50,0$ Ом. Катушка приводилась в равномерное вращение в направлении, указанном стрелкой, с частотой $n=100$ с⁻¹ и затем резко затормаживалась. При этом через гальванометр проходил заряд $q=11,0$ нКл, вызвавший отклонение стрелки в левую сторону. Определить знак и отношение заряда к массе носителей тока в меди.

6.177. Медная пластинка имеет длину $l=60,0$ мм, ширину $b=20,0$ мм и толщину $a=1,00$ мм (рис. 6.3). При пропускании вдоль пластинки тока силы $I=10,0$ А между точками 1 и 2 наблюдается разность потенциалов $U_{12}=0,51$ мВ,

разность потенциалов между точками 3 и 4 равна нулю. Если, не выключая тока, создать перпендикулярное к пластинке однородное магнитное поле с индукцией $B=0,100$ Тл, то между точками 3 и 4 возникает разность потенциалов $U_{34}=55$ мВ. Воспользовавшись этими данными, определить для меди концентрацию свободных электронов n и их подвижность μ_0 .

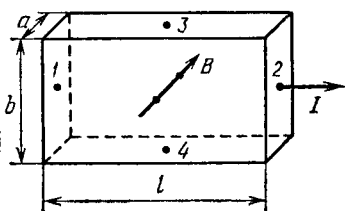


Рис. 6.3

6.178. Зависит ли средняя энергия $\langle \epsilon \rangle$ свободных электронов в кристалле от числа атомов, образующих кристалл?

6.179. Что произойдет с энергетическим спектром свободных электронов при увеличении числа N атомов, образующих кристалл, в η раз?

6.180. Что произойдет с интервалом $\Delta \epsilon$ между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле при увеличении объема металла в три раза?

6.181. Кристаллический образец содержит 0,17 моля некоторого химически простого вещества. Ширина разрешенной зоны энергий $\Delta E=10$ эВ. Чему равно среднее значение интервала между соседними энергетическими уровнями $\langle \Delta \epsilon \rangle$?

6.182. Написать выражение для интервала $\Delta \epsilon$ между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле.

6.183. Положив объем V образца металла равным 1 см^3 , вычислить по формуле, полученной в задаче 6.182, интервал $\Delta \epsilon$ (в эВ) между соседними уровнями энергии свободных электронов для значений энергии E , равных: а) $0,1$ эВ, б) 1 эВ, в) 3 эВ, г) 5 эВ.

6.184. Полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, определить:

а) уровень Ферми при абсолютном нуле $E_F(0)$ для меди,

б) среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ свободных электронов при абсолютном нуле,

в) температуру T , при которой средняя кинетическая энергия электронов классического электронного газа равнялась бы средней энергии свободных электронов в меди при $T=0$.

6.185. Положив уровень Ферми при абсолютном нуле $E_F(0)=5$ эВ, определить уровень Ферми при $T=300$ К. Выразить E_F через $E_F(0)$.

6.186. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле кинетическую энергию, превышающую половину максимальной?

6.187. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле кинетическую энергию, превышающую среднюю энергию?

6.188. Чему равна вероятность P того, что в состоянии с энергией, равной энергии Ферми E_F , будет находиться свободный электрон?

6.189. Чему равно среднее число $\langle n \rangle$ свободных электронов, находящихся на уровне с энергией, равной энергии Ферми E_F ?

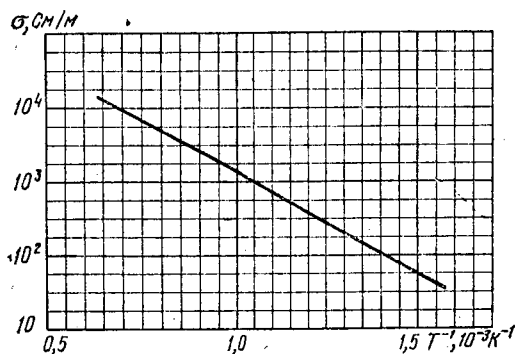


Рис. 6.4

6.190. Приняв заряд носителя тока равным удвоенному элементарному заряду, вычислить квант магнитного потока Φ_0 .

6.191. На рис. 6.4 изображена полученная экспериментально зависимость проводимости σ кремния от величины, обратной термодинамической температуре T . Определить ширину запрещенной энергетической зоны ΔE для кремния.

6.192. Во сколько раз изменится при повышении температуры от 300 до 310 К проводимость: а) металла, б) собственного полупроводника, ширина запрещенной зоны которого $\Delta E = 0,300$ эВ? Каков характер изменения в обоих случаях?

6.193. Какова работа выхода A электрона из металла, если повышение температуры металла от значения $T = 2000$ К на $\Delta T = 0,0100$ К увеличивает ток насыщения термоэлектронной эмиссии на $0,0100$ %?

6.194. Зазор между пластинами плоского конденсатора $d=1,00$ мм. Одна из пластин изготовлена из платины (для которой работа выхода электрона $A=5,29$ эВ), другая — из алюминия (для которого $A=3,74$ эВ). Пластины закорочены медным проводом. Какова будет напряженность E электрического поля между пластинами? Как будет направлено поле?

6.195. Между электродами двухэлектродной лампы (диода) включена батарея с э.д.с. $\mathcal{E}=10,0$ В. Материалом катода является вольфрам (для которого работа выхода электрона $A_W=4,50$ эВ), материалом анода — никель (для которого $A_{Ni}=4,84$ эВ). Какую энергию E приобретают электроны на пути от катода к аноду? Скоростью, с которой электроны вылетают из катода, можно пренебречь.

6.196. Имеются два металла с концентрацией свободных электронов $n_1=1,00 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ и $n_2=1,00 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$. Определить внутреннюю контактную разность потенциалов $U_{\text{внутр}}$, возникающую при приведении этих металлов в соприкосновение.

6.8. Энергия связи ядра. Радиоактивность

6.197. Определить энергию связи $E_{\text{св}}/A$ (в МэВ), приходящуюся на один нуклон, для ядра: а) ${}^{11}_5\text{B}$, б) ${}^{20}_{10}\text{Ne}$, в) ${}^{28}_{14}\text{Si}$, г) ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, д) ${}^{68}_{30}\text{Zn}$, е) ${}^{137}_{56}\text{Ba}$, ж) ${}^{207}_{82}\text{Pb}$, з) ${}^{235}_{92}\text{U}$. Построить на миллиметровке график зависимости $E_{\text{св}}/A$ от массового числа A .

6.198. Ядро свободного покоящегося атома радия ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ претерпевает α -распад. Энергия связи ядра ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ равна 1731,6 МэВ, ядра ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ равна 1708,2 МэВ, α -частицы 28,3 МэВ. Полагая, что дочернее ядро радона ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ образуется в невозбужденном состоянии, определить:

- а) скорость v_α образовавшейся α -частицы,
- б) скорость v дочернего атома.

6.199. Исходя из закона радиоактивного распада, найти:

- а) период полураспада T радиоактивного ядра,
- б) среднее время жизни τ ядра,
- в) соотношение между T и τ .

Считать известной постоянную распада λ .

6.200. Что больше — среднее время жизни τ радиоактивного ядра или период полураспада T ? Во сколько раз?

6.201. Какая часть η атомов радиоактивного вещества остается нераспавшейся по истечении времени t , равного трем средним временам жизни τ атома?

6.202. Какая часть η атомов радиоактивного вещества

распадается за время t , равное трем периодам полураспада T ?

6.203. Чему равна вероятность P того, что радиоактивный атом распадется за время t , равное периоду полураспада T ?

6.204. Среднее время жизни атомов некоторого радиоактивного вещества $\tau=1,00$ с. Определить вероятность P того, что ядро распадется за промежуток времени t , равный: а) 1,00 с, б) 10,0 с, в) 0,100 с.

6.205. Имеется препарат, состоящий из вещества, претерпевающего цепочку радиоактивных превращений. Первое в ряду (материнское) вещество обладает столь большим периодом полураспада, что образование дочернего вещества можно считать происходящим с постоянной скоростью $b=1,00 \cdot 10^5$ ядер/с. Дочернее вещество обладает периодом полураспада $T=10,0$ сут. Полагая, что в момент $t=0$ имеется только материнское вещество, найти:

а) зависимость числа N ядер дочернего вещества, содержащегося в препарате, от времени t ,

б) число N атомов дочернего вещества по истечении времени, равного периоду полураспада ядер этого вещества,

в) число N атомов дочернего вещества по истечении времени, значительно превышающего период полураспада этого вещества.

6.206. Радиоактивные ядра X с постоянной скоростью распада λ_1 превращаются в радиоактивные ядра Y с постоянной скоростью распада λ_2 . Полагая, что в момент $t=0$ имеется только N_{X0} ядер X ,

а) найти зависимость числа N_Y ядер Y от времени t ,

б) определить время t_m , по истечении которого N_Y достигает максимального значения,

в) исследовать случай $\lambda_1 \ll \lambda_2$, $\lambda_1 t \ll 1$. Сравнить получающийся в этом случае результат для N_Y с ответом к задаче 6.205.

6.207. Чтобы определить возраст t древней ткани, найденной в одной из египетских пирамид, была определена концентрация в ней атомов радиоуглерода ^{14}C . Она оказалась соответствующей 9,2 распадам в минуту на один грамм углерода. Концентрация ^{14}C в живых растениях соответствует 14,0 распадам в минуту на один грамм углерода. Период полураспада ^{14}C равен 5730 лет. Исходя из этих данных, оценить t .

ОТВЕТЫ

Часть I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. а) Перемещение частицы Δr за промежуток времени от t_1 до t_2 , б) путь s , пройденный частицей за тот же промежуток времени, в) приращение Δx координаты x частицы за то же время.

1.2. а) $\Delta v = \omega t$, б) $v_y = v_{0y} + \omega_y t$, в) $\Delta r = v_0 t + \omega t^2/2$, г) $\Delta z = v_{0z} t + \omega_z t^2/2$.

1.3. Если a и b коллинеарны; $e_a = -e_b$.

1.4. Да, если векторы a и Δa имеют одинаковое направление.

1.5. $\Delta a = -|\Delta a|$.

1.6. $\Delta a = -2a$, $|\Delta a| = 2a$, $\Delta a = 0$.

1.7. а) $|\Delta a| \approx a \delta \varphi$, б) $\Delta a = 0$.

1.8. а) $\Delta v = 1e_x + 1e_y + 1e_z$, б) $|\Delta v| = 1,73$ м/с, в) $\Delta v = 1,57$ м/с.

1.9. $\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$.

1.10. $\alpha = 50,8^\circ$.

1.11. $a[bc] = b[ca] = abc \cos \alpha$.

1.12. а) $\Delta r = \int_{t_1}^{t_2} \{v_x(t) e_x + v_y(t) e_y + v_z(t) e_z\} dt$,

б) $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[v_x(t)]^2 + [v_y(t)]^2 + [v_z(t)]^2} dt$,

в) $\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt$,

г) $\langle w \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \{\dot{v}_x(t) e_x + \dot{v}_y(t) e_y + \dot{v}_z(t) e_z\} dt$.

1.13. $v = be_y - ae_x$, $v = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.15. а) $\langle v \rangle = (4/\tau) R(e_x - e_y)$, б) $\langle v \rangle = -(4/\tau) R e_y$, в) $\langle v \rangle = -(4/3\tau) R(e_x + e_y)$, г) $\langle v \rangle = 0$, д) $\langle v \rangle = -(4/\tau) R e_x$.

1.16. $|\langle v \rangle| = (2\sqrt{2/3\pi}) \langle v \rangle = 0,300 \langle v \rangle$.

1.17. а) $\langle v \rangle = 3\pi R/\tau = 4,7$ м/с, б) $|\langle v \rangle| = 2R/\tau = 1,00$ м/с, в) $|\langle w \rangle| = 6\pi R/\tau^2 = 0,94$ м/с².

1.18. $\langle a \rangle = (2a/\pi)(e_x + e_y)$, $|\langle a \rangle| = (2\sqrt{2}/\pi)a = 0,900a$.

1.19. а) Траекторией является прямая линия, выходящая из начала координат; б) траекторией является линия, все точки которой лежат на сфере радиуса r с центром в начале координат.

1.20. а) $s=500$ м, б) $|\Delta r|=500$ м, в) частица движется в одну сторону по прямолинейной траектории, поэтому $s=|\Delta r|$.

1.21. а) $v=6te_x+2e_y$ (м/с), $w=6e_x$ (м/с²), б) $v=6,3$ м/с, в) $s \approx 63$ м.

1.22. а) $\Delta r=2e_x+4e_y+8e_z$ (м), б) $v=13$ м/с.

1.23. а) $v=5,4$ м/с, б) $w=a(2e_x+3e_y+4e_z)$, $w=5,4$ м/с², в) $s=13,5$ м, г) частица движется равноускоренно по прямолинейной траектории.

1.24. а) $\Delta t = \sqrt{2h/(g+w)} = 0,71$ с, б) $s = \omega^2 t_1^2 / g + hg / (g + \omega) - \omega t_1 \sqrt{2h/(g + \omega)} = 1,9$ м.

1.25. $R = [v(t)]^2 / \sqrt{[\dot{v}(t)]^2 - [\dot{v}(t)]^2}$.

1.26. $R = v^2 / \omega$.

1.27. По окружности или винтовой линии.

1.28. а) $dv/dt = -0,53$ м/с², б) $R = 3,8$ м.

1.29. а) $v_x = -(2\pi/T)a \sin(2\pi/T)t$, $w_x = -(2\pi/T)^2 a \cos(2\pi/T)t$, б) $s_1 = 0,293a$, в) $s_2 = 0,707a$, г) $s = 4a$.

1.30. $v=a$, $\omega=a\omega$, $\alpha=\pi/2$. Частица движется равномерно по окружности радиуса $R=a/\omega$.

1.31. а) $r=a(\cos \omega t \cdot e_x + \sin \omega t \cdot e_y)$, $v=a\omega(-\sin \omega t \cdot e_x + \cos \omega t \cdot e_y)$, $w=-a\omega^2(\cos \omega t \cdot e_x + \sin \omega t \cdot e_y)=-\omega^2 r$, $r=a$, $v=a\omega$, $w=a\omega^2$.

б) $gv=0$. Это означает, что векторы g и v взаимно перпендикулярны.

в) $gw=-\omega^2 a^2=-\omega v$. Это означает, что векторы g и w имеют противоположные направления.

г) $x^2+y^2=a^2$ —окружность радиуса a .

д) Против часовой стрелки.

е) Частица движется равномерно против часовой стрелки по окружности радиуса a , центр которой находится в начале координат.

ж) Направление движения частицы изменится на противоположное.

1.32. а) $\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$, б) $l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, в) $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$,

г) $y' = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x'^2$, д) $\left| \frac{dv}{dt} \right| = g$, $\frac{d|v|}{dt} = 0$, е) $R_0 = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}$,

$R_0 = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$.

1.33. $\langle v \rangle = v_0 + g\tau/2$.

1.34. $\alpha = 11,5^\circ$ или $78,5^\circ$.

1.35. $v(s) = \left[v_0^2 + 2 \int_0^s f(s) ds \right]^{1/2}$.

1.36. $t = \int_0^s \frac{ds}{v(s)}$.

1.37. а) $s = \frac{v_0}{b}(1 - e^{-bt})$, б) $v = v_0 e^{-bt}$, в) $s \approx v_0 t$, $v \approx v_0(1 - bt)$.

1.38. Константа b есть величина, обратная промежутку времени τ_e , за который скорость частицы уменьшается в e раз.

1.39. $s = 2u_0 b / 3v = 7,0 \cdot 10^2$ м.

1.40. $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1 / v_2 = 1,67$.

1.41. а) 0,01, б) 0,001, в) 0,005, г) 0,05, д) 0,002, е) $4 \cdot 10^{-6}$.

1.42. а) $\alpha = 5,7^\circ$, б) $t = l / \sqrt{v^2 - u^2} = 10,1$ с, в) $s = 201$ м.

1.43. а) Под углом к линии AB, синус которого равен u/v , б) $t_1 = 2l / \sqrt{v^2 - u^2} \approx 402$ с (402,02 с), $t_2 = 2lv / (v^2 - u^2) \approx$

≈ 404 с (404,04 с); в) $t_1 = \frac{2l}{v} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{v^2} \right) \approx 402$ с (402,00 с),

$t_2 = \frac{2l}{v} \left(1 + \frac{u^2}{v^2} \right) \approx 404$ с (404,00 с).

1.44. а) $\alpha = \arccos(u/v_0) = 78,5^\circ$, б) $t = (v_0/g) [\sqrt{1 - u^2/v_0^2} - \sqrt{1 - (u^2 + 2gh)/v_0^2}] = 11,5$ с, в) $s = ut = 1,15$ км.

1.45. $\omega_L = 2,66 \cdot 10^{-6}$ рад/с = 0,037 ω_3 .

1.46. $\beta = 0$.

1.47. $\dot{a} = [\omega a]$, $\ddot{a} = -\omega^2 a$.

1.48. $v_1 = v(e_x + e_y)$, $v_2 = 2ve_x$, $v_3 = v(e_x - e_y)$.

1.49. а) $\Omega = \omega \cos \omega' t \cdot e_x + \omega \sin \omega' t \cdot e_y + \omega' e_z$, $\beta = \omega \omega' (\cos \omega' t \cdot e_y - \sin \omega' t \cdot e_x)$, $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2}$, $\beta = \omega \omega'$; б) $\alpha = \arctg(\omega'/\omega)$; в) $\varphi = \pi/2$.

1.50. а) $\varphi = 20$ рад. б) Вокруг оси, лежащей в плоскости x, y и образующей с осью x угол, равный 63° .

1.51. $\beta = 4,7$ рад/с².

1.52. $\langle \omega \rangle = s/tR = 29$ рад/с, $\langle \beta \rangle = v_0/tR = 24$ рад/с².

1.53. $s \approx v\omega(t_2^2 - t_1^2)/2 = 5,7 \cdot 10^2$ м.

1.54. $k = 0,25$.

1.55. 1. а) $F = 6,0$ Н, б) $F = 4,0$ Н.

2. Сумма результатов в случаях (а) и (б) равна силе F_0 .

1.56. а) $F = [F_0 m_2 - m_1 m_2 g(k_1 - k_2)] / (m_1 + m_2) = 7,2$ Н,

б) $F = [F_0 m_1 - m_1 m_2 g(k_2 - k_1)] / (m_1 + m_2) = 2,8$ Н.

1.57. а) $F = 4,8$ Н, б) $F = 5,2$ Н.

1.58. 1. а) $\omega = g[(m_1 + m_2) \sin \alpha - (k_1 m_1 + k_2 m_2) \cos \alpha] / (m_1 + m_2) = 5,8$ м/с², б) $F = m_1 m_2 g(k_2 - k_1) \cos \alpha / (m_1 + m_2) = 0,83$ Н.

2. Второй брусок скользил бы с большим ускорением, чем первый. В результате затор между брусками увеличился бы со временем.

1.59. а) $\omega = g[m - (k_1 + k_2)M] / (2M + m) = 0,98$ м/с²,

б) $F_{12} = Mg[m(1 + k_1) - M(k_2 - k_1)] / (2M + m) = 2,0$ Н,

в) $F = mg[M(2 + k_1 + k_2)] / (2M + m) = 4,4$ Н.

1.60. $F = 972$ кгс.

1.61. $x^2 + y^2 = (mv'qB)^2$.

1.62. а) $n = (1/2\pi) \sqrt{g/\sqrt{l^2 - R^2}} = 0,296$ с⁻¹ = 17,8 мин⁻¹,

б) $F = mgl/\sqrt{l^2 - R^2} = 1,06$ мг = 2,1 Н.

1.63. $r \leq 1,8$ м.

1.64. а) $h = v_0^2/2g = 0,46$ м, б) $t_1 = v_0/g \sin \alpha = 0,89$ с, в) $t_2 = t_1 = 0,89$ с, г) $v = v_0 = 3,00$ м/с.

1.65. а) $h = v_0^2 \sin \alpha / 2g (\sin \alpha + k \cos \alpha) = 0,36$ м,

б) $t_1 = v_0/g (\sin \alpha + k \cos \alpha) = 0,70$ с.

в) $t_2 = v_0/g \sqrt{\sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha} = 0,93$ с,

г) $v = v_0 \sqrt{(\sin \alpha - k \cos \alpha) / (\sin \alpha + k \cos \alpha)} = 2,3$ м/с,

д) $A = -mv_0^2 k \cos \alpha / (\sin \alpha + k \cos \alpha) = -1,9$ Дж.

1.66. б) $v = (mg/k)(1 - 1/\eta)[1 - \exp(-kt/m)]$.

1) Ср. с ответом к п. б) задачи 1.42.

1.67. а) $k = \eta/(1 - \eta) = 0,38$, б) $A = -mgl\eta(1 - \eta)/2 = -9,8$ мДж, в) $v = \sqrt{gl(1 - \eta)} = 2,67$ м/с.

1.68. а) $F(t) = 3mg^2t^2/2l = 3mg(l - h)/l$ (h — высота верхнего конца цепочки над столом в момент t); таким образом, $F(t)$ равна утроенному весу части цепочки, лежащей в момент t на столе. б) $\langle F \rangle = mg$.

1.69. $A = 6a$ Дж.

1.70. а), б), в) $A = 0$.

1.71. $A = 0$.

1.72. $A = \int_{s_1}^{s_2} m\omega_\tau(s) ds$.

1.73. а) $\langle P \rangle = m\sqrt{g^3h/2} = 97$ Вт, б) $P = \langle P \rangle \sqrt{2} = 137$ Вт.

1.74. $A = \frac{mv^2}{2} + mgh - A_{\text{сопр}}$.

1.75. а) $P(t) = mg(gt - v_0 \sin \alpha)$, б) $P = 0$, в) $\langle P \rangle_{\text{пол}} = -\frac{1}{2}mgv_0 \times \sin \alpha$, г) $\langle P \rangle_{\text{пол}} = 0$.

1.76. $P(t) = (1/m)(2t^3 + 3t^5)$.

1.77. а) $\Delta E = 3$ Дж, б) $\Delta E = -2$ Дж.

1.78. а) $-\Delta E = -3$ Дж, б) $-\Delta E = 2$ Дж.

1.79. $T = F_x(x_2 - x_1) + F_y(y_2 - y_1) + F_z(z_2 - z_1) = 14$ Дж.

1.80. а) $A = -10$ Дж, б) кинетическая энергия получает приращение $\Delta T = -10$ Дж, т. е. уменьшается на 10 Дж.

1.81. Очевидно соотношение: $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_C + \mathbf{r}_i$, где $\mathbf{R}_i$ — радиус-вектор i -й материальной точки в л-системе, $\mathbf{R}_C$ — радиус-вектор центра масс, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i -й точки, проведенный из центра масс. Дифференцирование этого соотношения дает: $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_C + \mathbf{v}_i$. По определению

$$T_{\text{л}} = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{V}_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{V}_C + \mathbf{v}_i)^2 = \\ = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{V}_C^2 + \mathbf{V}_C \sum m_i \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i^2.$$

Первое слагаемое можно написать в виде: $\frac{1}{2}m\mathbf{V}_C^2$ ($m = \sum m_i$). Сумма $\sum m_i \mathbf{v}_i$ эквивалентна $m\mathbf{V}_C$, где $\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс в ц-системе, т. е. нуль; следовательно, второе слагаемое равно нулю.

Третье слагаемое есть $T_{\text{ц}}$. Таким образом, $T_{\text{л}} = T_{\text{ц}} + \frac{1}{2}m\mathbf{V}_C^2$, что и требовалось доказать.

1.82. $A = -28$ Дж.

1.83. $T = 24a$.

1.84. а) $v_1 = v_2$, б) $t_1 > t_2$.

1.85. Время соскальзывания для обеих плоскостей одинаково.

1.86. $A = -mgh$.

1.87. $h = \frac{2}{3}R$.

1.88. а) $h = \frac{5}{2}R$, б) $F = 0$.

1.89. 1. а) $\nabla r = \mathbf{e}_r$, б) $\nabla(1/r) = -(1/r^2)\mathbf{e}_r$, в) $\nabla f(r) = (df/dr)\mathbf{e}_r$ ($\mathbf{e}_r$ — орт радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки P).

Примечание. В случае б) $\mathbf{e}_t = -\mathbf{e}_r$, в случае в) $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_r$, если $df/dr > 0$, и $\mathbf{e}_t = -\mathbf{e}_r$, если $df/dr < 0$.

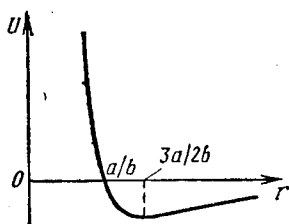


Рис. 1

1.90. а) $F = (\alpha/r^2) \mathbf{e}_r$, $A = 0,082\alpha$, б) $F = -kr$, $A = -7,5k$.

1.91. а) $F = a \left\{ -\frac{1}{y} \mathbf{e}_x + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} \right) \mathbf{e}_y - \frac{y}{z^2} \mathbf{e}_z \right\}$, б) $A = U_1 - U_2 = -\frac{a}{3}$.

1.92. а) Да, при $r = 3a/2b$. б) См. рис. 1.

1.93. $U = -2T$, $E = -T$, $E = U/2$.

1.94. При $v_0 > \sqrt{2\alpha/mr_0}$ по гиперболе, при $v_0 = \sqrt{2\alpha/mr_0}$ по параболе, при $v_0 < \sqrt{2\alpha/mr_0}$ по эллипсу (в частном случае по окружности).

1.95. При $v_0 = \sqrt{\alpha/mr_0}$, что равнозначно условию: $E = -m\alpha^2/2M^2$ (E — полная энергия, M — момент импульса частицы).

1.96. $h_2 = 2m_1h_1/(m_1 + m_2) = 1,50$ м.

1.97. $k = mg \sin \alpha (\eta - 1) v^2 = 0,66$.

1.98. а) $\Delta l = F/k = 0,53$ мм,

б) $v = \sqrt{2(g - F/m)(l_0 + F/k)} \approx \sqrt{2(g - F/m)l_0} = 4,2$ м/с,

в) $\Delta l_{\max} = \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{m^2g^2 - F^2}{k^2} + \frac{2}{k}(mg - F)l_0} = 103$ мм, $\Delta l_{\max} \approx \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{2}{k}(mg - F)l_0} = \Delta l_{\text{ст}} + \Delta l_{\text{кин}} = 5$ мм + 97 мм, где $\Delta l_{\text{кин}}$ — удлинение, связанное с кинетической энергией T , приобретенной муфтой при движении до упора, соотношением $k\Delta l_{\text{кин}}^2/2 = T \approx (mg - F)l_0$.

1.99. $\mathbf{r}_C = 0,23\mathbf{e}_x + 0,18\mathbf{e}_y + 0,18\mathbf{e}_z$, $|\mathbf{r}_C| = 0,34$ м.

1.100. $m_L = m_3 \eta R_3 / (R - \eta R_3) = 7,3 \cdot 10^{22}$ кг.

1.101. $l = 3/4 h$.

1.102. $p = 0$.

1.103. Центр масс неподвижен.

1.104. Двигается с ускорением g .

1.105. а) $\Delta p = mgt$, б) $\langle p \rangle = mv_0 + mgt/2 = p_0 + \Delta p/2$.

1.106. $p = mv_0 + (F/\omega) [\mathbf{e}_x \sin \omega t - \mathbf{e}_y (1 - \cos \omega t)]$.

1.107. Оба шара будут двигаться со скоростью 2,00 м/с в направлении, в котором до соударения двигался первый шар.

1.108. а) $\eta = 1/2$, б) $\eta = 10/11 \approx 0,91$, в) $\eta = 1/11 \approx 0,091$.

1.109. а) $m_1 < m_2$. б) Шар остановится. в) Шар будет лететь в обратном направлении с практически такой же по модулю скоростью, с какой он двигался до удара.

1.110. $v_{1x} = -1,40$ м/с, $v_{2x} = 0,60$ м/с.

1.111. 1. а) $m_1 < m_2$, б) $m_1 < 3m_2$, в) $m_1 > m_2$, г) $m_1 < m_2$.

2. Нет, невозможен.

3. $\beta < 45^\circ$.

4. а) $\eta = 2m_1/(m_1 + m_2)$, б) $\eta = m_1/(m_1 + m_2)$, в) и г) $\eta = 4m_1m_2/(m_1 + m_2)^2$.

6. $\eta < 3/4$.

7. $m_1 = m_2$, $\beta = 0$.

8. а) $\beta = 4^\circ$, б) $\beta = 45^\circ$.

1.112. 1. $v_1 = (v_0/2)(1 - \sqrt{1 - \eta})$, $v_2 = (v_0/2)(1 + \sqrt{1 - \eta})$.

2. а) Скорости шаров одинаковы — абсолютно неупругий удар, б) $v_1 = 0$, $v_2 = v_0$ — абсолютно упругий удар.

1.113. а) $v_1 = 0,026v_0$, $v_2 = 0,974v_0$; б) $v_1 = 0,146v_0$, $v_2 = 0,854v_0$; в) $v_1 = 0,342v_0$, $v_2 = 0,658v_0$.

1.114. $v = 1,0$ м/с (направление $\mathbf{v}$ противоположно направлению $\mathbf{v}_0$).

1.115. $r_{\min} = 4ke^2/\mu v_0^2 = 0,69 \cdot 10^{-12}$ м ($\mu = m_p m_\alpha / (m_p + m_\alpha)$ — приведенная масса протона и альфа-частицы).

1.116. а) $v = u [1 - \exp(-mt/M)] = 4,5$ м/с, б) $v_{\max} = u = 10,0$ м/с.

1.117. а) $N = -2e_x - 11e_y + 10e_z$ (Н·м), б) $N = 15$ Н·м, в) $N_z = 10$ Н·м.

$$1.118. F = \frac{3N}{k} \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_2^3 - d_1^3} = 3,3 \text{ кН.}$$

$$1.119. \Delta M = -40e_x \text{ (кг·м}^2\text{/с)}.$$

$$1.120. M = -(mv_0^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha / 2g) e_z.$$

$$1.121. 1. \text{ а) } p = p_1 + p_2 \neq 0, \text{ б) } M_1 = [lp_2 + b_1(p_2 - p_1)] n, M_2 = [lp_1 + b_2(p_1 - p_2)] n \text{ (} M_1 \neq M_2 \text{).}$$

$$2. \text{ а) } p = 0, \text{ б) } M_1 = M_2 = lpn \text{ (ср. с моментом пары сил).}$$

1.123. Воспользуемся соотношениями: $R_i = R_C + r_i$, $V_i = V_C + v_i$ (см. ответ к задаче 1.81). По определению

$$M_O = \sum m_i [R_i V_i] = \sum m_i [(R_C + r_i) (V_C + v_i)] = \\ = \sum m_i [R_C V_C] + \sum m_i [R_C v_i] + \sum m_i [r_i V_C] + \sum m_i [r_i v_i].$$

Первое слагаемое можно написать в виде $[R_C, mV_C] = [R_C p]$. Второе слагаемое $[R_C, \sum m_i v_i] = [R_C, mV_C] = 0$ (так как V_C — скорость центра масс в ц-системе — есть нуль). Третье слагаемое $[\sum m_i r_i, V_C] = [mr_C, V_C] = 0$ (потому что r_C — радиус-вектор центра масс в ц-системе — есть нуль). Четвертое слагаемое представляет собой M_C — момент импульса системы материальных точек в ц-системе. Таким образом, $M_O = M_C + [R_C, p]$, что и требовалось доказать.

$$1.124. \text{ а) } N = \frac{1}{2} mgh \sin 2\alpha \cdot n, \text{ б) } M = \frac{1}{2} mgh \sin 2\alpha \cdot tn.$$

$$1.125. \text{ а) } N = -mgv_0 \cos \alpha \cdot te_z, \text{ б) } M = -\frac{1}{2} mgv_0 \cos \alpha \cdot t^2 e_z.$$

$$1.126. |\Delta M| = \frac{1}{2} mgv_0 \tau^2 = 2,5 \cdot 10^2 \text{ кг·м}^2\text{/с}.$$

1.127. а) Гантели вращаются по часовой стрелке с одинаковой угловой скоростью, центры гантелей неподвижны, б) $\omega = 2v/l = 2,00$ рад/с, в) $\tau = \pi/\omega = 1,57$ с, г) гантели движутся поступательно с той же скоростью и в тех же направлениях, что и вначале, удаляясь друг от друга.

1.128. а) Центры гантелей движутся вдоль первоначальных направлений, гантели вращаются вокруг центров по часовой стрелке, б) $v_C = v/2 = 0,500$ м/с, в) $\omega = v/l = 1,00$ рад/с, г) E уменьшается в два раза.

1.129. а) Центры гантелей движутся вниз (на рис. 1.24) со скоростью v , гантели вращаются по часовой стрелке с одинаковой угловой скоростью ω , б) $\omega = 2v/l = 2,00$ рад/с, в) $\tau = \pi/\omega = 1,57$ с, г) левая гантель покоится, правая движется поступательно с той же скоростью и в том же направлении, что и вначале, удаляясь от левой гантели.

1.130. б) Центры обеих гантелей движутся вниз — левой со скоростью $v'_C = \frac{1}{2}v = 0,500$ м/с, правой со скоростью $v''_C = \frac{3}{2}v = 1,500$ м/с, в) обе гантели вращаются с угловой скоростью $\omega = v/l = 1,00$ рад/с, г) E уменьшается в $4/3$ раза (ср. с ответом к п. г) задачи 1.128).

$$1.131. \langle v \rangle = 2,98 \cdot 10^4 \text{ м/с} \approx 30 \text{ км/с}, v_{\max} = 1,017 \langle v \rangle = 3,03 \cdot 10^4 \text{ м/с}, v_{\min} = 0,984 \langle v \rangle = 2,93 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

$$1.132. \mu = m/2.$$

$$1.133. \mu \approx m(1 - m/M).$$

1.134. а) Сила тяжести mg , сила нормального давления со стороны диска, равная $-mg$, и направленная к оси вращения сила трения, модуль которой равен $m\omega_0^2 r$. б) В системе отсчета, вращающейся вместе с диском. в) В системе отсчета, вращающейся вокруг оси вращения диска с угловой скоростью, отличной от ω_0 .

$$1.135. P = 0.$$

$$1.136. A=0.$$

$$1.137. A=m\omega^2(R_2^2-R_1^2)/2=1,5 \text{ Дж.}$$

$$1.138. \text{Тело отклонится к востоку на расстояние } x=(2/3)\omega_3 h \times \sqrt{2h/g}=0,69 \text{ мм, } \Delta s=\omega_3 h \sqrt{2h/g}=(3/2)x.$$

$$1.139. \text{а) } s=\omega R^2/v, \text{ б) не зависит.}$$

$$1.140. \text{а) На } \omega l^2 \sin \varphi/v=1,03 \text{ мм вправо (т. е. на восток), б) на } 1,03 \text{ мм вправо (т. е. на запад).}$$

$$1.141. F=2m\omega_3 \sin \varphi=0,38 \text{ кН.}$$

$$1.142. \text{а) } v'=1/2[\omega], \text{ б) } v=1/2[\omega r].$$

$$1.143. \text{а) } \tau=(1/\omega) \ln [l/l_0 + \sqrt{(l/l_0)^2 - 1}] = 3,0 \text{ с,}$$

$$\text{б) } F=m \sqrt{4\omega^4(l^2-l_0^2)+g^2}=1,00 \text{ Н,}$$

$$\text{в) } A=m\omega^2(l^2-l_0^2)=0,10 \text{ Дж.}$$

$$1.144. N=-2ma^2t\omega.$$

$$1.145. M(t)=-mv^2t^2\omega.$$

$$1.147. v_2=v_1+[\omega r]_{12}.$$

$$1.148. r=v_0t+[\omega v_0]/\omega^2=v_0te_x-(v_0/\omega)e_y.$$

$$1.149. F_1=1,76 \cdot 10^3 \text{ Н, } F_2=1,18 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

$$1.150. F_1=-20e_x(\text{Н}), \text{ б) } \alpha_0 \geq 60^\circ.$$

$$1.151. \text{Центр масс тела движется по параболе с ускорением } g.$$

$$1.152. w_G=0,11 \text{ г.}$$

1.153. Нет, не могут. Вследствие жесткости стержня составляющие обеих скоростей в направлении стержня должны быть одинаковыми.

$$1.154. I=\mu l^2, \text{ где } \mu=m_1m_2/(m_1+m_2) \text{ — приведенная масса частиц.}$$

$$1.155. I=1/2mR^2.$$

$$1.156. \text{а) } \langle \rho \rangle_V = 1/3(\rho_1+2\rho_2) = 7/3\rho_1 = 1,17 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \langle \rho \rangle_r = 1/2(\rho_1+\rho_2) = 2\rho_1, \langle \rho \rangle_V = 7/6 \langle \rho \rangle_r, \text{ б) } I = 13/10\rho_1\pi R^4 = 39/70mR^2 = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I = 39/35I'.$$

$$1.157. I=2/5mR^2.$$

$$1.158. I=3/10mR^2.$$

$$1.159. \text{а) } I_C=1/12ml^2, \text{ б) } I=1/3ml^2.$$

$$1.160. \text{а) } I_C=1/12m(a^2+b^2), \text{ б) } I=1/3m(a^2+b^2).$$

$$1.161. I=1/6ma^2.$$

$$1.163. I=1/10ma^2 \text{ (ср. с ответом к задаче 1.158).}$$

$$1.164. \text{а) } I_{\text{пирам}}/I_{\text{конус}}=\pi/3=1,047, \text{ б) } I_{\text{куб}}/I_{\text{шар}}=(5/12) \times \times (4\pi/3)^{2/3}=13/12=1,083.$$

$$1.165. I_1=I_2=1/4mR^2, I_3=1/2mR^2.$$

$$1.166. I=m(1/4R^2+1/12h^2).$$

$$1.167. h=R\sqrt{3}.$$

$$1.168. I=m(3\pi R^4-4a^4)/6(\pi R^2-a^2)=0,106 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

$$1.169. I_x+I_y=I_z.$$

$$1.170. I=mR^2/4.$$

$$1.171. I=10^{-2} \begin{pmatrix} 0,28 & 0 & 0 \\ 0 & 0,96 & 0 \\ 0 & 0 & 1,13 \end{pmatrix} (\text{кг} \cdot \text{м}^2).$$

$$1.172. b_x=b_y=b_z=6.$$

$$1.173. b=a.$$

$$1.174. I = \begin{pmatrix} 0,100 & 0 & 0 \\ 0 & 0,100 & 0 \\ 0 & 0 & 0,100 \end{pmatrix} = 0,100 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=0,100 \text{ Е (кг} \cdot \text{м}^2) \text{ (см. задачу 1.173).}$$

1.175. При вращении тела вокруг одной из его главных осей инерции.

1.176. Если: а) тело является шаровым волчком, б) векторы ω и N совпадают по направлению с одной из главных осей инерции тела, в) При вращении тела вокруг одной из его главных осей инерции.

1.178. а) $M = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, $\alpha = 24^\circ$, б) $T = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$.

1.179. а) $M(t) = 2mr^2\omega(t)$. б) Не зависит.

1.180. $M = \frac{2}{5}mR^2\omega$.

1.181. Остается постоянным.

1.182. $M_1 = mv_0R$, $M_2 = \frac{1}{2}mv_0R$, $M_3 = 0$.

1.183. $M_0 = 7,0 \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, $M = 2,7 \cdot 10^{40} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с} = 3,9 \cdot 10^6 M_0$.

1.184. а) Угловое ускорение β максимально в моменты, когда ось цилиндра находится на одном уровне с осью вращения, β минимально в верхнем и нижнем положениях цилиндра. б) $\beta_{\max} = 2g/3R$, $\beta_{\min} = 0$.

1.185. а) $\omega = \frac{1}{6}g = 1,6 \text{ м/с}^2$, $F_{12} = \frac{1}{6}Mg = 1,6 \text{ Н}$, $F_2 = \frac{1}{3}Mg = 3,2 \text{ Н}$, $F_m = \frac{5}{6}mg = 4,1 \text{ Н}$.

б) $\omega = \frac{1}{6}g = 2,0 \text{ м/с}^2$, $F_{12} = \frac{1}{5}Mg = 2,0 \text{ Н}$, $F_2 = F_m = \frac{4}{5}mg = 4,0 \text{ Н}$.

1.187. а) $\beta_0 = 12ga/(l^2 + 12a^2) = 11 \text{ рад/с}^2$, $F_0 = mgl^2/(l^2 + 12a^2) = 5,3 \text{ Н} = 0,89mg$,

б) $\omega = 2\sqrt{6ga/(l^2 + 12a^2)} = 4,6 \text{ рад/с}$, $F = mgl(l^2 + 36a^2)/(l^2 + 12a^2) = 7,1 \text{ Н} = 1,21mg$.

1.188. а) $\omega = \sqrt{(3g/l)[1 + \cos \varphi_0 - (\pi - \varphi_0) \sin \varphi_0]} = 6,6 \text{ рад/с}$,

б) $M = ml \sqrt{(gl/3)[1 + \cos \varphi_0 - (\pi - \varphi_0) \sin \varphi_0]} = 0,44 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

1.189. $M = mh \sqrt{gh/3} = 4,7 \cdot 10^2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, $v = \sqrt{3gh} = 9,5 \text{ м/с}$.

1.190. а) $x = l^2/12a = 20,8 \text{ см}$, б) линейка вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\omega = 12pa/ml^2 = 3,0 \text{ рад/с}$.

1.191. 1. $k \geq \frac{2}{7} \tan \alpha = 0,165$.

2. а) Шарик скользит по плоскости, одновременно вращаясь, б) $v_A = (\sin \alpha - \frac{7}{2}k \cos \alpha)gt = 1,9 \text{ м/с}$, $v_B = (\sin \alpha + \frac{3}{2}k \cos \alpha)gt = 6,2 \text{ м/с}$, $v_C = (\sin \alpha - k \cos \alpha)gt = 4,1 \text{ м/с}$.

1.192. а) $t_1 = 3v_0/2g \sin \alpha = 1,34 \text{ с}$, б) $h = 3v_0^2/4g = 0,69 \text{ м}$, в) $t_2 = t_1 = 1,34 \text{ с}$, г) $v = v_0 = 3,00 \text{ м/с}$.

1.193. а) $t_1 = \frac{3v_0}{2(g \sin \alpha + N_{\text{ТП}}/mR)} = 1,03 \text{ с}$,

б) $h = \frac{3v_0^2 \sin \alpha}{4(g \sin \alpha + N_{\text{ТП}}/mR)} = 0,53 \text{ м}$,

в) $t_2 = \frac{3v_0}{2\sqrt{g^2 \sin^2 \alpha - N_{\text{ТП}}^2/m^2R^2}} = 1,41 \text{ с}$,

г) $v = v_0 \sqrt{\frac{g \sin \alpha - N_{\text{ТП}}/mR}{g \sin \alpha + N_{\text{ТП}}/mR}} = 2,2 \text{ м/с}$,

д) $A = -\frac{3v_0^2 N_{\text{ТП}}}{2R(g \sin \alpha + N_{\text{ТП}}/mR)} = -3,1 \text{ Дж}$.

1.194. 1. Катушка катится без скольжения, если

$$F < kmg(I + mR^2)/[mRr + I \cos \alpha + k \sin \alpha(I + mR^2)].$$

2. а) Катушка ползет по плоскости, не вращаясь, с ускорением $\omega_x = 0,51 \text{ м/с}^2$, б) катушка неподвижна, в) катушка катится без скольжения вправо, $\omega_x = 0,36 \text{ м/с}^2$, г) катушка катится без скольжения влево, $\omega_x = -0,30 \text{ м/с}^2$.

1.195. а) $t = \sqrt{3h/g} = 0,39 \text{ с}$. б) $F = mg/6 = 1,64 \text{ Н}$.

1.196. $M(t) = (mgR - N_{\text{ТП}})t$.

1.197. $M = (I/R^2 + m)vR$, $T = (I/R^2 + m)v^2/2$.

1.198. а) $\omega = \omega_0/4$, б) уменьшится в четыре раза.

1.199. $\omega = 6m'v/(m+3m') l = 0,62$ рад/с.

1.200. а) $\omega = 12m'v/(3m'+m) l = 1,24$ рад/с,

б) $v' = -v(m-3m')/(m+3m') = -48,9$ м/с.

1.201. $\omega = [2m'/(2m'+m)] v'/R$.

1.202. $A = \int_{t_1}^{t_2} N_z(t) \omega(t) dt$.

1.203. $T = g^2 t^2 m'/(2m'+m) = 100$ Дж.

1.204. а) $\omega = [2(mgr-N)/(2m+m') r^2] t = 29t$ рад/с,

б) $F = mg \frac{m'r + 2N/g}{(2m+m') r} = 81$ Н,

в) $\tau = \sqrt{h(2m+m') r/(mgr-N)} = 1,9$ с,

г) $v = 2 \sqrt{h(mgr-N)/(2m+m') r} = 7,2$ м/с,

д) $A = -Nh/r = -9,3$ Дж.

1.205. а) $m' > N_{\text{тр}}/gR$, б) $m' = (\pi/2) N_{\text{тр}}/gR$.

1.206. $A = -mR^2 \omega^2/4$.

1.207. $\langle P \rangle = mR^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)/4t$.

1.208. $N = 3I\omega^2/8\pi kFR = 50$ об.

1.209. $l = \omega \omega' R^2/2g = 9,8$ см.

1.210. а) $\omega' = mgl/I\omega = 1,00$ рад/с, б) $\beta = \omega \omega' \sin \alpha = mgl \sin \alpha/I =$

$= 50$ рад/с².

1.211. а) $\beta = (mgl \sin \alpha/I) (\cos \omega' t \cdot e_y - \sin \omega' t \cdot e_x) = 50 (\cos 1t \cdot e_y -$

$-\sin 1t \cdot e_x)$,

б) вектор β перпендикулярен к вектору ω и лежит в плоскости, перпендикулярной к оси z.

1.212. $\varphi = 17,04'$ (в первом приближении $\varphi = 17,19'$).

1.213. $\gamma = \alpha r^2/klmM = 6,7 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

1.214. $F = 6,7 \cdot 10^{-11}$ Н.

1.215. Сила увеличится в $n^{4/3}$ раз.

1.216. а) $F = \gamma mM/a^2 \cdot 2\sqrt{5}$, б) $F \approx \gamma mM/b^2$, в) $F = F' \cdot 2/\sqrt{5} =$

$= 0,894F'$.

1.217. а) $F = \gamma mM/3a^2$, б) $F = \gamma mM/b^2$, в) $F = 4/3 F'$.

1.218. а) $U = -\gamma mM/\sqrt{R^2+x^2}$, б) $F_x = -\gamma Mx/(R^2+x^2)^{3/2}$, в) $U \approx -\gamma mM/x$, $F_x \approx -\gamma MM/x^2$.

1.219. а) $F = 2\pi\gamma m\sigma(1-b/\sqrt{b^2+R^2})$, б) при $b/R \ll 10^2$.

1.220. а) $F = 2\pi\gamma m\sigma$. б) F не зависит от b . в) $F = 2\pi\gamma m\rho d$.

1.221. $F = 2\pi\gamma\rho md = 0,42$ мН.

1.222. $F = 2\pi\gamma\rho^2 d^2 = 0,42$ мН.

1.223. а) $F = 2\gamma m\lambda/b$, б) $M = 2b\lambda$.

1.224. $dS = R^2 d\Omega$.

1.225. $dS = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$.

1.226. $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$.

1.227. $F = 0$.

1.228. $F = 0$.

1.229. $F = \gamma mM/2R^2$.

1.230. а) $U(r) = -\gamma mM/R = \text{const}$, б) $U(r) = -\gamma mM/r$.

1.231. 1. а) $U(r) = -3/2 \gamma mM(R_1+R_2)/(R_1^2+R_1R_2+R_2^2) = \text{const}$, б) $U(r) = -\gamma mM/r$.

2. Внутри слоя $F=0$, вне слоя сила такова, как если бы масса слоя была сосредоточена в его центре.

1.232. а) g , радиус Земли, б) γ , масса Земли, радиус земной орбиты, период обращения Земли по орбите.

1.233. а) $m_3 = gR_3^3/\gamma = 5,97 \cdot 10^{24}$ кг (R_3 — средний радиус Земли),
 $\langle \rho \rangle_3 = 5,5 \cdot 10^3$ кг/м³, б) $m_C = 4\pi^2 R_{орб}^3/\gamma T^2 = 1,98 \cdot 10^{30}$ кг ($R_{орб}$ — сред-
 ний радиус земной орбиты, T — период обращения Земли вокруг
 Солнца), $\langle \rho \rangle_C = 1,40 \cdot 10^3$ кг/м³.

1.234. а) $F_{C-3} = 3,5 \cdot 10^{22}$ Н, б) $F_{Л-3} = 1,92 \cdot 10^{20}$ Н $= 1/132 F_{C-3}$.

1.235. $\omega = 6,0 \cdot 10^{-4}$ г $= 5,9 \cdot 10^{-3}$ м/с² ≈ 6 мм/с².

1.236. $v_1 = \sqrt{gR_3} = 7,9$ км/с (R_3 — радиус Земли).

1.237. $v_2 = \sqrt{2gR_3} = v_1 \sqrt{2} = 11,2$ км/с (R_3 — радиус Земли).

1.238. В случае б).

1.239. $R = \sqrt[3]{\gamma M_3 T^2 / 4\pi^2} = 4,22 \cdot 10^7$ м $= 6,6 R_3$ (M_3 — масса Зем-
 ли, T — период обращения Земли вокруг своей оси).

1.240. $R^3 = \alpha T^2$, где α — не зависящий от массы планеты коэф-
 фициент, равный $\gamma M_C / 4\pi^2$ (M_C — масса Солнца).

1.241. $T_M = 1,88$ год.

1.242. а) $g(h) = g[R_3/(R_3 + h)]^2$, где R_3 — радиус Земли,
 б) $g(100 \text{ км}) = 0,97g$, $g(1000 \text{ км}) = 0,75g$, $g(10\,000 \text{ км}) = 0,151g$.

1.243. а) $U = mgR_3 h/(R_3 + h)$. б) $U \approx mgh$.

1.244. Введем безразмерные величины: $a = gR_3/v_0^2 \cos^2 \alpha$, $x = a -$
 $-\sqrt{a^2 - 2a + 1} \cos^2 \alpha$. Тогда: а) $h = R_3(1 - x)/x = 1,00 \cdot 10^6$ м, б) $v =$
 $= xv_0 \cos \alpha = 3,2 \cdot 10^3$ м/с, в) $R_{кр} = v_0^2 \cos^2 \alpha / g = 1,38 \cdot 10^8$ м.

1.246. а) $w(r) = gr/R_3$ (R_3 — радиус Земли), б) $v(r) =$
 $= \sqrt{g(R_3^2 - r^2)/R_3}$, в) $v(0) = \sqrt{gR_3} = 7,9$ км/с $= v_1$, г) $\tau = 2\pi \times$
 $\times \sqrt{R_3/g} = 84,4$ мин $= t_1$, д) $\langle v \rangle = (2/\pi) \sqrt{gR_3} = (2/\pi) v(0)$.

1.247. а) $U(r) = \begin{cases} mg(r^2 - 3R^2)/2R & \text{для } r \leq R, \\ -mgR^2/r & \text{для } r \geq R, \end{cases}$

б) $U(0) = -3/2 mgR = 3/2 U(R)$.

1.248. а) Центробежную силу инерции $F_{цб}$ и силу Кориолиса F_K .

б) $F_{цб} = F_K = 4F_g = 1,41 \cdot 10^{23}$ Н; $F_{цб}$ направлена от Солнца,
 F_K — к Солнцу.

1.249. $F = m(g_{экр} + \omega^2 R_3)$, где ω — угловая скорость вращения
 Земли, R_3 — радиус Земли.

1.251. а) $t_1 = T/12 = (1/3)(T/4)$, б) $t_2 = T/6 = (2/3)(T/4)$.

1.252. а) $\langle v \rangle = 0,40$ м/с, б) $\langle v \rangle = 0,57$ м/с, в) $\langle v \rangle = 0,23$ м/с.

1.253. а) $\langle v \rangle = 0$, б) $\langle v \rangle = 0,40 e_x$ (м/с), в) $\langle v \rangle = -0,40 e_x$ (м/с).

1.254. $\omega = v_m/a$.

1.255. $a = v_m^2/\omega_m$, $\omega = \omega_m/v_m$.

1.256. а) $a\omega^2 > g$. б) В момент отрыва шайбы платформа движет-
 ся вверх от среднего положения ($x > 0$, $\dot{x} > 0$). в) $h = g/2\omega^2 +$
 $+ a^2\omega^2/2g = 25$ см.

1.257. $\langle \sin^2 x \rangle = \langle \cos^2 x \rangle = 1/2$.

1.258. $A = 0$.

1.259. а) $x^2/a^2 + p_x^2/m^2 a^2 \omega^2 = 1$, в) $S = (2\pi/\omega) E$.

1.260. $\omega = (2b/3a)^2 \sqrt{2b/m} = (1/r_0^2) \sqrt{2b/m}$, где r_0 — равновесное
 расстояние частицы от центра поля.

1.261. а) $l = 0,248$ м $\approx 1/4$ м, б) $T = 2,006$ с ≈ 2 с.

1.262. а) $l = 0,373$ м $\approx 1/3$ м, б) $T = 1,64$ с $\approx 1,5$ с.

1.263. $x = (l/2)/\sqrt{3}$, $\omega_{\max} = \sqrt{(g/l)\sqrt{3}}$.

1.264. $F = mg \cos(\varphi_m \cos \omega t) + m l \omega^2 \varphi_m^2 \sin^2 \omega t$.

1.265. а) Маятник остается неподвижным, б) маятник равномерно вращается вокруг точки подвеса.

1.266. а) $T = 2T_0$, б) $\omega = 3g$.

1.267. а) $\omega = \omega_0 \sqrt{(g^2 - 2g\omega \cos \alpha + \omega^2)/g^2}$, б) $\omega = \omega_0 \sqrt{2} = 1,19\omega_0$.

1.268. $T = 2\pi \sqrt{R_3/g} = 84,4$ мин.

1.269. $\omega_0 = 1/2 \dot{\varphi}_{\max}$.

1.270. а) $T = 0,200$ с, $a = 0,0100$ м, б) $x = 0,0100 (1 - \cos 10\pi t)$.

1.271. $\omega = \sqrt{2\rho g S/m} = 9,9$ с⁻¹.

1.272. $T = 2\pi \sqrt{(9m_1 R^2 + 2m_2 l^2)/3m_2 g (l + 2R)} = 1,50$ с.

1.273. $\varphi_m = \arccos \{1 - [m/(M + m)]^2 v^2/2g\} = 4,6^\circ$, $T = 2\pi \sqrt{l/g} = 2,0$ с.

1.274. а) $\omega = \sqrt{k/m} = 19,4$ с⁻¹, где $k = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$ (ср. с выражением для приведенной массы), б) $a = 26$ мм.

1.275. а) $\omega = \sqrt{2k/(2m + M)} = 16,9$ с⁻¹, б) $F_{1m} = ka + mg = 14,8$ Н, $F_{2m} = m(g + a\omega^2) = 11,2$ Н.

1.276. а) Центр масс системы остается неподвижным, б) $\omega = \sqrt{k/\mu}$, где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса шаров, в) $v_{\max} = a\omega = a \sqrt{k/\mu}$.

1.277. а) $v_C = m_1 v_0 / (m_1 + m_2)$, б) $E_{\text{пост}} = E_{\text{полн}} m_1 / (m_1 + m_2)$, $E_{\text{колеб}} = E_{\text{полн}} m_2 / (m_1 + m_2)$, где $E_{\text{полн}} = m_1 v_0^2 / 2$ — полная энергия системы, в) $\omega = \sqrt{k/\mu}$, где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса системы, $a = v_0 \sqrt{\mu/k}$.

1.278. а) $\omega = \sqrt{2k/mR^2} = 10,0$ с⁻¹, б) $\varphi_m = \sqrt{\varphi_0^2 + \dot{\varphi}_0^2 m R^2 / 2k} = 0,100$ рад, $\alpha = \arctg(-\dot{\varphi}_0 / \varphi_0 \omega) = -0,93$ рад.

1.279. $T = \pi R \sqrt{2\mu/k} = 1,00$ с, где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса дисков.

1.280. а) $\omega = \sqrt{k/m - \dot{\varphi}^2} = 8,0$ с⁻¹, б) в случае, когда $\dot{\varphi}^2 \geq (k/m)$, колебания не возникают.

1.281. $x^2/900 + y^2/1600 = 1$ (x и y выражены в см).

1.282. $\tau = 20$ с.

1.283. $\tau = 3,3$ с.

1.284. а) $\beta = \ln \eta / t = 0,100$ с⁻¹, б) $\tau = t / \ln \eta = 10,0$ с.

1.285. а) $\beta = 1,00 \cdot 10^{-2}$ с⁻¹, б) $\lambda = 1,00 \cdot 10^{-2}$, в) $Q = 314$, г) $-\Delta E/E = 2,00 \cdot 10^{-2}$.

1.286. $Q = 195$.

1.287. $\omega_0 = \omega \sqrt{1 + 1/4 Q^2} = 103$ с⁻¹.

1.288. $s = a_0 (1 + e^{-\lambda/2}) / (1 - e^{-\lambda/2}) = 4,0$ м.

1.289. $Q = 1/2 \sqrt{1 - (\omega_{\text{рез}}/\omega)^2} = 4$.

1.290. а) $\omega_{\text{рез}} = 1/2 \sqrt{\omega'^2 - q^2} \approx 1/2 \omega' = 10,0$ с⁻¹.

б) $a_{\text{рез}} = (a/2\omega'q) \sqrt{(\omega'^2 + q^2 - 4\omega^2)^2 + 16\omega^2 q^2} = 5$ мм ($q = \ln \eta / \tau$).

1.291. а) $A_{\text{вын}} = \pi a F_m \sin \varphi$.

1.292. $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} = 224$ с⁻¹.

1.293. $\omega'_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 173$ с⁻¹.

1.294. Нет, не согласуется. Скорость экваториальных точек такого тела $v = 3,3 \cdot 10^8$ м/с превышает скорость света в вакууме.

1.295. Нет, не согласуется, так как скорость на «экваторе» та-

кого шарика была бы равна $0,89 \cdot 10^{11}$ м/с, т. е. превышала бы скорость света в вакууме почти в 300 раз.

1.296. $x' = -4,0 \cdot 10^8$ м, $y' = z' = 1,00$ м, $t' = 1,66$ с.

1.297. а) Стержень 2, б) стержень 1.

1.298. $v = 0,866c$.

1.299. а) $\Delta l/l_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cdot v^2/c^2} - 1$, б) $-0,005$; $-0,0025$; 0 .

1.300. а) См. 1.299, п. а); б) $-0,564$; $-0,229$; 0 .

1.301. $l = l' \sqrt{\sin^2 \alpha + (1 - v_0^2/c^2) \cos^2 \alpha} = 0,94$ м,

$\alpha = \arctg \left(\frac{\lg \alpha'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \right) = 49,1^\circ$.

1.302. $V = 0,500V_0$.

1.303. $S = 0,50S_0$.

1.304. $v_x = c \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l'} \right)^2 \left(1 - \frac{v_x'^2}{c^2} \right)} = 0,43c$,

$v_0 = \frac{v_x - v_x'}{1 - v_x v_x'/c^2} = 0,34 c$.

1.305. а) Часы 1, б) часы 2.

1.306. $l_0 = (c^2 \Delta t' / v_0) \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$; а) $l_0 = 400$ м, б) $l_0 = 400 \cdot 10^6$ м.

1.307. а) $l_0 = 13,4$ м, б) $l_0 = 1,34 \cdot 10^7$ м.

1.308. а) $\tau_1 = (l_0/v_0) \sqrt{1 - v_0^2/c^2} = 5,77 \cdot 10^{-8}$ с, $\tau'_2 = l_0/v_0 = 6,66 \cdot 10^{-8}$ с, б) $\tau_2 = l_0/v_0 = 6,66 \cdot 10^{-8}$ с, $\tau'_1 = (l_0/v_0) \sqrt{1 - v_0^2/c^2} = 5,77 \cdot 10^{-8}$ с, в) $\tau_2 = \tau'_2 = (l_0/v_0) (1 + \sqrt{1 - v_0^2/c^2}) = 12,43 \cdot 10^{-8}$ с.

1.309. $\Delta s = c\tau = 300$ м.

1.310. $v = 0,995c$.

1.311. $\Delta \tau = \sqrt{\Delta t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)/c^2} = 0,50$ с.

1.312. $l = c \sqrt{t^2 - \tau^2}$.

1.313. $t = \sqrt{\tau^2 + \frac{l^2}{c^2}} = 100$ мкс. $v = \frac{c}{\sqrt{1 + (c\tau/l)^2}} = 0,99976c$.

1.314. а) $v' = 0,300c$, $\alpha' = 55^\circ$, б) $v = c(0,620 e_x + 0,138 e_y + 0,138 e_z)$, $v = 0,650c$, $\alpha = 17,5^\circ$, в) $v/v' = 2,17$.

1.315. 1. $v' = 2v/(1 + v^2/c^2)$.

2. а) $0,198c$, б) $0,8c$, в) $0,99995c$.

1.316. 1. $v' = v \sqrt{2 - v^2/c^2}$.

2. а) $0,141c$, б) $0,661c$, в) $0,99980c$.

1.317. $v \leq 0,14 c$.

1.318. а) $1,005$, б) $1,155$, в) $22,4$.

1.319. $v = cp/\sqrt{p^2 + m^2 c^2} = 0,50 c$.

1.320. $E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}$.

1.321. $T = 0,414mc^2$.

1.322. $v = 0,866 c$.

1.323. $p = (T/c) \sqrt{1 + 2mc^2/T}$.

1.324. $p = mc \sqrt{3}$.

1.325. а) $\eta = 2/\sqrt{1 + 3v_0^2/c^2}$, б) $1,971$, $1,512$, $1,080$, $1,0075$. в) $\eta \approx 1 + \frac{3}{8}(1 - v_0^2/c^2)$.

1.326. $v = 0,995 c$.

- 1.327. $T' = E_0 \{ 1 / \sqrt{1 - [1 - (E_0/E)^2] (1 - v_0^2/c^2)} - 1 \} = 0,65 \cdot 10^{-4}$ Дж
 $(E_0 = mc^2, E = E_0 + T)$.
- 1.328. 1. $M = 2m / \sqrt{1 - v^2/c^2}$.
 2. а) 2,01 м, б) 2,31 м, в) 44,7 м.
- 1.329. $v = 0,6c$.
- 1.330. а) $1,29 = 1,44\beta = 1,60\beta^2$, б) $0,00504 = 0,0504\beta = 0,504\beta^2$,
 в) $0,0000500 = 0,00500\beta = 0,500\beta^2$. При $\beta \rightarrow 1$ $T/E_0 \rightarrow \infty$, при $\beta \rightarrow 0$ $T/E_0 \rightarrow 1/2\beta^2$.
- 1.331. $A = E_0 (1 / \sqrt{1 - v^2/c^2} - 1)$; а) $A = 0,155E_0 = 1,3 \cdot 10^{-14}$ Дж
 $(0,08 \text{ МэВ})$, б) $A = 21E_0 = 1,8 \cdot 10^{-12}$ Дж (11 МэВ).
- 1.332. $p = (1/c) \sqrt{A(A + 2E_0)} = 0,67 \cdot 10^{-18}$ кг·м/с,
 $v = c \sqrt{(A^2 + 2AE_0)/(A + E_0)^2} = 0,80 c$.
- 1.333. $p = Ft$, $v = cFt / \sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}$.
- 1.334. $\Delta v = c \sqrt{1 - 1/\alpha^2} - v_1 = 0,77c$,
 $\Delta p = mc(\sqrt{\alpha^2 - 1} - \beta_1 / \sqrt{1 - \beta_1^2}) = 4,5 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с, $\Delta T = A =$
 $= 8,24 \cdot 10^{-14}$ Дж ($\alpha = 1 / \sqrt{1 - \beta_1^2} + A/mc^2$, $\beta_1 = v_1/c$).
- 1.335. $p = 10^{-18} (10,5 e_x + 2,30 e_y + 2,30 e_z)$ (кг·м/с),
 $E = 3,4 \cdot 10^{-9}$ Дж.
- 1.336. а) $E' = 1,15E_0 = 1,74 \cdot 10^{-10}$ Дж, $v' = 0,50c$, б) $p =$
 $= (4,24 e_x + 1,548 e_y + 2,322 e_z) \cdot 10^{-19}$ кг·м/с, $E = 1,42E_0 =$
 $= 2,14 \cdot 10^{-10}$ Дж, $v = 0,71c$.
- 1.337. $E' = 2E^2/E_0 - E_0 = 53 \cdot 10^2$ ГэВ. Столкновение двух встреч-
 ных пучков протонов, ускоренных до энергии 50 ГэВ, эквивалентно
 бомбардировке мишени из неподвижных протонов пучком протонов,
 ускоренных до энергии 5300 ГэВ. В этом состоит преимущество уско-
 рителей частиц, основанных на принципе встречных пучков.
- 1.338. $h = H/2$.
- 1.339. а) $\tau = (R/r)^2 \sqrt{2h/g} = 3,2 \cdot 10^3$ с = 53 мин,
 б) $v = (r/R)^4 g (\tau - t)$.
- 1.340. $\tau = (R/r)^2 lR \sqrt{(\pi\rho/2F)[1 - (r/R)^4]} \approx (R/r)^2 lR \sqrt{\pi\rho/2F} =$
 $= 7,9$ с.
- 1.341. $v = \sqrt{2gh} = 1,72$ м/с.
- 1.342. $v = \sqrt{2\Delta p/\rho} = 3,00$ м/с.
- 1.343. а) $Re = \rho Q / \pi \eta R = 764 < 1000$ — течение ламинарное,
 б) $dp/dl = 8\eta Q / \pi R^4 = 3,1$ Па/м (ρ — плотность воды).
- 1.344. а) $Re = \rho^2 g h r^3 / 8\eta^2 l \approx 600 < 1000$ — течение ламинарное,
 б) $\tau = 4\eta l R^2 / \rho g r^4 = 1,6 \cdot 10^4$ с = 4,5 ч (ρ — плотность воды).
- 1.345. а) $r = 3 \sqrt{\eta(u-v)/2g(\rho - \rho_0)} = 1,59 \cdot 10^{-2}$ мм, б) $Re =$
 $= \rho(u-v)r/\eta = 0,19 < 0,25$ — обтекание имеет ламинарный характер.
- 1.346. а) $Re = 2g\rho_0(\rho - \rho_0)r^3/9\eta^2 = 0,19 < 0,25$ — да, можно.
 б) $s = \frac{b}{a}t - \frac{b}{a^2}(1 - e^{-at})$, где $a = 9\eta/2\rho r^2$, $b = g(\rho - \rho_0)/\rho$, в) $\tau \approx$
 $\approx (ha^2 + b)/ab = 9,1$ с, г) $t = \ln 100/a = 0,029$ с.

Часть 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

- 2.1. Приблизительно $6 \cdot 10^{24}$ молекул.
 2.2. а) $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, б) $5,31 \cdot 10^{-26}$ кг, в) $3,96 \cdot 10^{-25}$ кг.
 2.3. $M = 5,49 \cdot 10^{-7}$ кг.
 2.4. 1 а. е. м. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг.

- 2.5. $d = 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 3,6 \text{ \AA}$.
 2.6. а) $n = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, б) $\langle a \rangle = 33 \cdot 10^{-10} \text{ м} \approx 10d$.
 2.7. $n = \rho N_A / M$.
 2.8. $n_{\text{Be}} = 1,2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $n_{\text{K}} = 1,3 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.
 2.9. $v = nv \cos \vartheta$, б) $p = 2nmv^2 \cos^2 \vartheta$.
 2.10. При медленном расширении.
 2.11. При быстром сжатии.
 2.12. а) $A = 0,60 \text{ кДж}$, $A' = -0,60 \text{ кДж}$, б) $A = -0,90 \text{ кДж}$, $A' = 0,90 \text{ кДж}$.
 2.13. $A = 45 \cdot 10^4 \text{ Дж}$.
 2.14. $Q = -1,6 \text{ кДж}$.
 2.15. $Q = 2,1 \text{ кДж}$.
 2.16. $Q_{123} - Q_{143} = 2,0 \text{ кДж}$.
 2.17. $Q = -94 \text{ Дж}$.
 2.18. Увеличивается в 1,16 раза.
 2.19. Увеличивается в 3,00 раза.
 2.20. $T_2 = T_1 \exp \{ [Q - p_1(V_2 - V_1) - b \ln(V_2/V_1)]/a \} = 3,8 \cdot 10^2 \text{ К}$.
 2.21. $n = p/kT = 2,69 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3} = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Сравните с ответом к задаче 2.6.
 2.22. а) $1,29 \text{ кг/м}^3$, б) $1,29 \text{ г/л}$.
 2.23. а) $p_{\text{N}_2} = 0,791 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $p_{\text{O}_2} = 0,212 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $p_{\text{Ar}} = 0,009 \cdot 10^5 \text{ Па}$.
 б) $M_r = 28,9$.
 2.24. $n = \ln(p_0/p) / \ln(1 + v/V)$.
 2.25. $p(t) = p_0 \exp(-Ct/V)$.
 2.26. $\tau = 127 \text{ с}$.
 2.27. См. рис. 2.

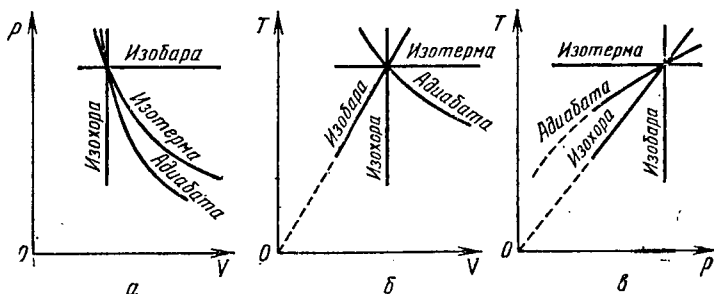


Рис. 2

- 2.28. $T_2 > T_1$.
 2.29. 1 и 2 — растет, 3 — постоянна, 4 и 5 — убывает.
 2.30. См. рис. 3.

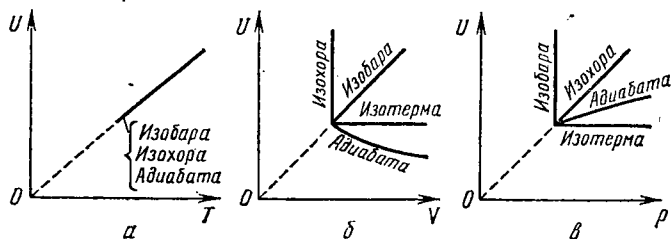


Рис. 3

- 2.31. Для всех трех процессов $\Delta U = [R/(\gamma - 1)] \Delta T$.
- 2.32. а) $C = \infty$, б) $C = 0$.
- 2.33. $A = 3p_2V_2(T_1/T_2 - 1) = -3,8$ кДж.
- 2.34. а) и б) $Q = -1,00 \cdot 10^5$ Дж.
- 2.35. В 2,51 раза.
- 2.36. а) $t_2 = 413^\circ\text{C}$, б) $t_2 = 254^\circ\text{C}$.
- 2.37. $A = [1/(\gamma - 1)] [p_1V_1 \ln(p_2V_2^\gamma/p_1V_1^\gamma) + p_1V_1 - p_2V_2] = 0,20$ кДж.
- 2.38. $\Delta U = 0$.
- 2.39. $\Delta U = 0,25$ МДж.
- 2.40. $v = r^2 \sqrt{\gamma p_0/2mV_0} = 37$ Гц.
- 2.41. а) $\Delta U = [1/(\gamma - 1)] p(V_2 - V_1) = 1,5$ кДж, б) $A = p(V_2 - V_1) = 1,0$ кДж, в) $Q = [\gamma/(\gamma - 1)] p(V_2 - V_1) = 2,5$ кДж.
- 2.42. а) $\Delta U = 0$, б) $A = 66$ кДж, в) $Q = 66$ кДж.
- 2.43. а) $\gamma = 1,33$, б) $\Delta U = 2,5$ кДж, в) $A = 0,83$ кДж.
- 2.44. а) $\Delta U = 0$, б) $A = 2,41$ кДж, в) $Q = 2,41$ кДж.
- 2.45. Газ отдает теплоту внешним телам ($Q_{12} < 0$).
- 2.46. $Q_I > Q_{II}$.
- 2.47. а) $A_I > 0$, $A_{II} < 0$, б) $Q_I > Q_{II}$.
- 2.48. а) $\Delta U = -0,13$ МДж, б) Нет, потому что не указан характер процесса расширения.
- 2.49. а) $A = 109$ кДж, б) $Q = 109$ кДж.
- 2.50. $A = 14,8$ кДж.
- 2.51. а) $T_2 = T_1(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1,85 \cdot 10^3$ К,
- б) $A = [mRT_1/M(\gamma - 1)] [1 - (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}] = -1,56$ МДж, в) в 16 раз.
- 2.52. $n = 0$.
- 2.53. $n = -9$.
- 2.54. а) Нет, не является, б) $A = 0,23$ кДж.
- 2.55. Да, является.
- 2.56. а) $n = -1$, б) $C = C_V + R/2 = 1/2(C_V + C_p)$.
- 2.57. $A_{12} = \nu R(T_1 - T_2)/(n - 1)$.
- 2.58. а) При расширении газ охлаждается. б) $C = C_V - R$.
- 2.59. $C = R(n - \gamma)/(\gamma - 1)(n - 1)$.
- 2.60. а) $n < 1$ и $n > \gamma$, б) $1 < n < \gamma$, в) $n = \gamma$, г) $n = 1$.
- 2.61. а) $n = 2,3$. б) $C = 1,7R = 14$ Дж/(моль·К).
- 2.62. а) $C = 12,5R$, б) $C = 102,5R$, в) $C = 1002,5R$, г) $C = -7,5R$.
- 2.63. См. рис. 4.
- 2.64. а) При $n < 1$, б) при $n > 1$, в) при $n = 1$.
- 2.65. а) Нет, не является.
- б) $Q = 25$ кДж.
- 2.66. $v = 2,95 \cdot 10^{27}$ с $^{-1}$ ·м $^{-2}$.
- 2.67. $v = 3,4 \cdot 10^{28}$ с $^{-1}$.
- 2.68. а) Три поступательные, б) три поступательные и две вращательные, в) три поступательные и три вращательные, г) три поступательные, две вращательные и одна колебательная, д) три поступательные, три вращательные и три колебательные.
- 2.69. а) $C_V = 3/2R$, $C_p = 5/2R$, $\gamma = 1,67$, б) $C_V = 5/2R$, $C_p = 7/2R$, $\gamma = 1,40$, в) $C_V = 7/2R$, $C_p = 9/2R$, $\gamma = 1,29$, г) $C_V = 3R$, $C_p = 4R$, $\gamma = 1,33$.
- 2.70. Из четырех.

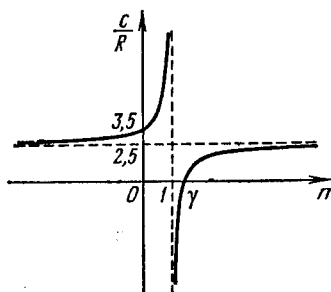


Рис. 4

$$2.71. U_m = 75 \text{ кДж/моль.}$$

$$2.72. t = 16^\circ \text{C.}$$

$$2.73. n = 5,0 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

$$2.74. P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$2.75. P(a_1 \leq x \leq a_2; b_1 \leq y \leq b_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f_1(x) f_2(y) dx dy.$$

$$2.76. A = 1/2a, \langle x \rangle = 0, \langle x^2 \rangle = a^2/3, \langle |x| \rangle = a/2 \text{ (а)}, A = 1/2a, \langle x \rangle = a, \langle x^2 \rangle = 4a^2/3 \text{ (б)}, A = 1/a, \langle x \rangle = 0, \langle x^2 \rangle = a^2/6 \text{ (в)}, A = 1/a, \langle x \rangle = a, \langle x^2 \rangle = 7a^2/6 \text{ (г)}.$$

$$2.77. P \approx A \exp(-64\alpha) \cdot 4\pi \cdot 64 \cdot 0,0002.$$

$$2.78. \text{ а) } f(x) = 1/(\pi \sqrt{a^2 - x^2}), \text{ б) } \langle x \rangle = 0, \text{ в) } \langle |x| \rangle = 2a/\pi = 0,637a, \text{ г) } \langle x^2 \rangle = a^2/2, \text{ д) } \langle U \rangle = 1/4 m a^2 \omega^2 = 1/2 E \text{ (E — полная энергия осциллятора).}$$

$$2.79. T = 454 \text{ К.}$$

$$2.80. T = 288 \text{ К.}$$

$$2.81. dN_u = N (4/\sqrt{\pi}) e^{-u^2} u^2 du.$$

$$2.82. Q = 3/2 R (1,01^2 - 1) T = 73 \text{ Дж.}$$

$$2.83. v_{\text{вер}} = 390 \text{ м/с}, \langle v \rangle = 440 \text{ м/с}, v_{\text{ср. кв}} = 478 \text{ м/с.}$$

$$2.84. \text{ а) } \sum v_x = 0, \text{ б) } \sum v = 0, \text{ в) } \sum v^2 = 1,61 \cdot 10^{20} \text{ м}^2/\text{с}^2, \text{ г) } \sum v = 2,87 \cdot 10^{26} \text{ м/с.}$$

$$2.85. \langle |v_x| \rangle = \sqrt{2kT/\pi m}.$$

$$2.86. \sum mv = M \langle v \rangle = 13,2 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

$$2.87. \sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = \sqrt{8RT/Ml^2} = 2,3 \cdot 10^{12} \text{ рад/с.}$$

$$2.88. 1,66 \%. \quad 2.89. \eta = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty e^{-u^2} u^2 du.$$

$$2.90. \langle v \rangle = 1,00 \text{ км/с.}$$

$$2.91. \text{ л. } v_{\text{вер}} = 500 \text{ м/с.}$$

$$2. \text{ а) } 3,32 \cdot 10^{-4}, \text{ б) } 1,76 \cdot 10^{-4}, \text{ в) } 2,14 \cdot 10^{-4}, \text{ г) } 0,66 \cdot 10^{-4}.$$

$$2.92. \text{ Заштрихованная площадь численно равна количеству молекул, заключенных в цилиндрическом столбе воздуха с площадью основания } 1 \text{ м}^2 \text{ и высотой } h_1.$$

$$2.93. dN_r = n_1 \exp \{ - [\varepsilon_p(r) - \varepsilon_p(r_1)] / kT \} 4\pi r^2 dr.$$

$$2.94. N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

$$2.95. \text{ а) } p = 0,56 p_0, \text{ б) } p = 0,31 p_0, \text{ в) } p = 1,26 p_0.$$

$$2.96. \eta = \eta_0 \exp \{ (M_{N_2} - M_{O_2}) gh / RT \} = 0,226.$$

$$2.97. \text{ а) } p = 0,97 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,97 p_0,$$

$$\text{ б) } N = (V N_A p_0 / Mgh) [1 - \exp(-Mgh/RT)] = 4,9 \cdot 10^{24}.$$

$$2.98. \text{ л. а) } h = 5,5 \text{ км, б) } h = 8,0 \text{ км.}$$

$$2. \text{ а) } 0,17 \%, \text{ б) } 0,25 \%.$$

$$2.99. p = p_0 \exp (M \omega^2 l^2 / 2RT) = 1,02 p_0 = 1,02 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$2.100. E = N \frac{E_1 \exp(-E_1/kT) + E_2 \exp(-E_2/kT)}{\exp(-E_1/kT) + \exp(-E_2/kT)}.$$

$$2.101. \text{ а) } 2^5 = 32 \text{ способами. б) } \Omega(0, 5) = 1, P(0, 5) = 1/32, \text{ в) } \Omega(1, 4) = 5, P(1, 4) = 5/32, \text{ г) } \Omega(2, 3) = 10, P(2, 3) = 5/16.$$

$$2.102. \Omega \text{ остается постоянным.}$$

$$2.103. \Delta S_{12} = 0,96 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

2.104. $\Omega_2 = \Omega_1^{\eta}$.

2.105. а) и б) $S = 3,18 \cdot 10^{-3}$ Дж/К; $\Delta S/S \sim 10^{-20}$.

2.106. а) 4,7875 и 4,7709 (−0,35 %), б) 15,1044 и 15,0961 (−0,05 %).

2.107. а) −36 %, б) −14 %, в) −6 %, г) −3,5 %, д) −0,9 %.

2.108. $l \approx 3 \cdot 10^{-8}$ м.

2.109. а) $\Omega = 10^{4,1 \cdot 10^{24}}$, б) $\Omega = 10^{6,2 \cdot 10^{24}}$.

2.110. В $10^{3,42 \cdot 10^{24}}$ раз.

2.111. Если процесс обратим, энтропия остается постоянной, если процесс необратим — возрастает.

2.112. Может, если процесс необратим.

2.113. Нет, не может.

2.114. $S_2 > S_1$.

2.115. См. рис. 5.

2.116. См. рис. 6.

2.117. 1, 2 и 3 — растет, 4 — постоянна, 5 — убывает.

2.118. См. рис. 7.

2.119. 1. В обоих случаях $\Delta S = 0$.

2. Нет, не может.

2.120. Состояния 1 и 3 лежат на одной адиабате.

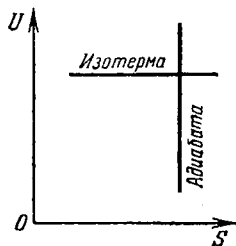


Рис. 5

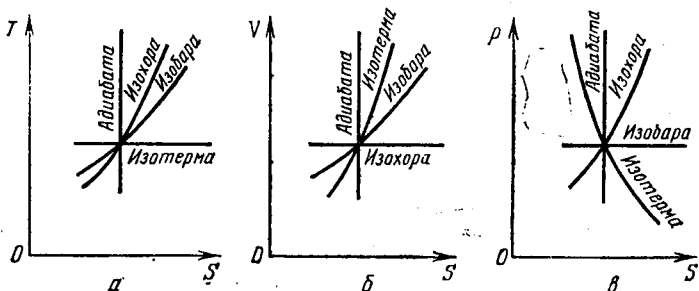


Рис. 6

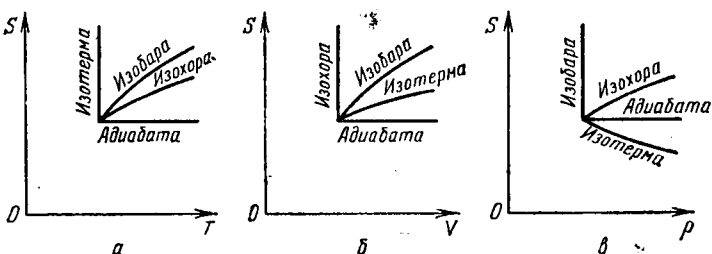


Рис. 7

2.121. $\Delta S_{23} = -1,00 \cdot 10^{-2}$ Дж/К.

2.122. $Q = b(T_2^2 - T_1^2)/2 = 30$ кДж.

2.123. $Q = (R/2)(T_2 - T_1)[5 - \alpha(T_2 + T_1)] = 1,8$ кДж.

2.124. $A = 47$ кДж.

2.125. $S_2 = 13,73$ Дж/К.

2.126. $S_2 = 210,6 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

2.127. а) $\Delta S_M = 8,6 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, б) $\Delta S_M = 14,4 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

2.128. Энтропия получает приращение $\Delta S = 2,00 \text{ Дж}/\text{К}$.

2.129. Энтропия тела получает приращение $\Delta S = 0,25 \text{ Дж}/\text{К}$.

2.130. $A = T(S_2 - S_1)$.

2.131. $\Delta S = m[c \ln(T_2/T_1) + q_{пл}/T_2] = 261 \text{ Дж}/\text{К}$ ($q_{пл}$ — удельная теплота плавления).

2.132. $\Delta S = m[c \ln(T_2/T_1) - q_n/T_1] = -7,0 \text{ Дж}/\text{К}$ (q_n — удельная теплота парообразования).

2.133. $C = \alpha T$.

2.134. $S = C/3$.

2.135. $S_M = [(\gamma + 1)/(\gamma - 1)] R \ln V_M + \text{const.}$

2.136. $A = [(\gamma - 1) S_1 (1 + U_2/U_1) - 2R] (U_2 - U_1)/2R = 9,4 \text{ кДж}$.

2.137. а) $\Delta S = 0,24 \text{ Дж}/\text{К}$, б) $\Delta U = 0,00 \text{ Дж}$.

2.138. а) $\Delta U_M = 0$, б) $\Delta S_M = R \ln 2$.

2.139. Дно и крышка сосуда 1 испытывают одинаковое обусловленное молекулами 1 давление p_1 ; дно и крышка сосуда 2 испытывают одинаковое обусловленное молекулами 2 давление p_2 . Поэтому работа при выдвигании сосудов равна нулю. Теплоты система не получает. Следовательно, внутренняя энергия, а значит, и температура системы не изменяются. При обратимом адиабатическом процессе энтропия также не изменяется. Из неизменности U , T и S следует неизменность F . Из неизменности U , S и F и их аддитивности вытекает выказанное в условии задачи утверждение.

2.140. $\Delta S = R \{v_1 \ln [(v_1 + v_2)/v_1] + v_2 \ln [(v_1 + v_2)/v_2]\}$.

2.142. а) $S_M = 199 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, б) $S_M = [199 + 29,1 \ln(T/T_0)] \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, где $T_0 = 298 \text{ К}$.

2.143. $\Delta S = -6,1 \text{ кДж}/\text{К}$.

2.144. $\Delta S = -A'/T = 3,0 \text{ Дж}/\text{К}$, $\Delta F = A' = -900 \text{ Дж}$.

2.145. $A = Q - \Delta F - (T_2 S_2 - T_1 S_1)$.

2.146. $\Delta F_M = (3/2 R - S_M) \Delta T = 75 \text{ Дж}/\text{моль}$.

2.147. $\Delta F = T(S_1 - S_2)$.

2.148. 1. а) 1—2 и 3—4 — постоянна, 2—3 — убывает, 4—1 — растет, б) 1—2 и 4—1 — растет, 2—3 и 3—4 — убывает.

2. а) 1—2: $A > 0$, 3—4: $A < 0$, 2—3 и 4—1: $A = 0$, б) 1—2 и 4—1: $Q > 0$, 2—3 и 3—4: $Q < 0$.

2.149. 1. а) 1—2 и 4—1 — растет, 2—3 и 3—4 — убывает, б) 2—3 и 4—1 — постоянна, 1—2 — растет, 3—4 — убывает.

2. а) 1—2 и 2—3: $A > 0$, 3—4 и 4—1: $A < 0$, б) 1—2: $Q > 0$, 4—3: $Q < 0$, 2—3 и 4—1: $Q = 0$.

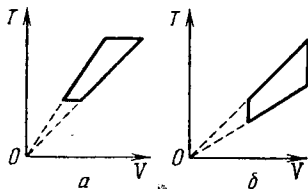


Рис. 8

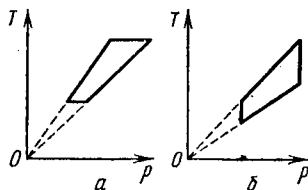


Рис. 9

2.150. См. рис. 8

2.151. См. рис. 9.

2.152. См. рис. 10.

2.153. См. рис. 11.

2.154. $A = 113$ кДж.

2.155. Площади I и II одинаковы.

2.156. $A_{41} = -AC_V/R \ln(V_2/V_1) = -26$ кДж.

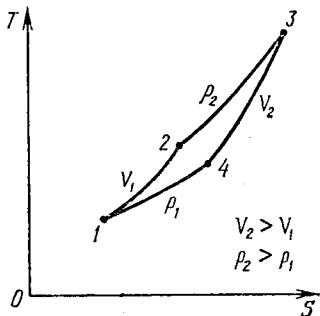


Рис. 10

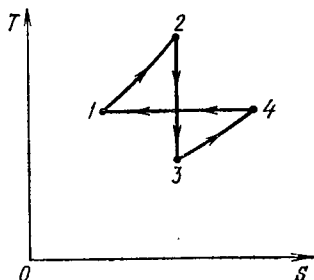


Рис. 11

2.157. $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + (T_1 - T_2)/(\gamma - 1)} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

2.158. $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + \gamma(T_1 - T_2)/(\gamma - 1)} < \frac{T_1 - T_2}{T_1 + (T_1 - T_2)/(\gamma - 1)}$ (см. задачу 2.157).

2.159. а) $\eta = 2/5$, б) $\eta = 1/5$, в) $\eta = 1/6$.

2.160. На рис. 12 изображены рассматриваемый цикл (замкнутая кривая) и соответствующий цикл Карно (прямоугольник). Заметим, что к.п.д. цикла Карно зависит лишь от T_1 и T_2 и, следовательно, не зависит от «размера» цикла по оси S . Поэтому мы взяли цикл Карно, имеющий такую же протяженность по оси S , как и рассматриваемый цикл.

Из рисунка видно, что для любого цикла площадь $aABCb$ (т. е. количество теплоты Q_1 , полученное за цикл) меньше, чем площадь $a12b$ (т. е. Q_1 в случае цикла Карно). Площадь же $aADCb$ (т. е. количество теплоты Q_2 , отданное за цикл)

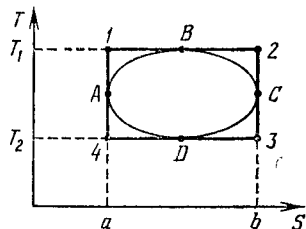


Рис. 12

больше, чем площадь $a43b$ (т. е. Q_2 в случае цикла Карно). Таким образом, отношение Q_2/Q_1 для любого цикла больше, чем для цикла Карно. Отсюда следует, что $\eta < \eta_{\text{Карно}}$.

2.161. $\eta = 1 - (T_3 + T_4)/(T_1 + T_2)$.

2.162. а) $p = 1,36 \cdot 10^6$ Па = $0,95$ рид., б) $p = 1,0 \cdot 10^7$ Па = $0,70$ рид.

2.163. а) $p = 2,6 \cdot 10^6$ Па = $0,90$ рид., б) $p = 8 \cdot 10^7$ Па = $2,7$ рид.

2.164. $a = 0,150$ Па·м³/моль², $b = 3,3 \cdot 10^{-5}$ м³/моль.

2.165. $\Delta T = a(\gamma - 1)(1/V_2 - 1/V_1)/R = -5,8$ К.

2.166. $Q = a'(1/V_1 - 1/V_2) = 38$ Дж (a' — постоянная Ван-дер-Ваальса).

2.167. $A = RT \ln[(V_2 - b)/(V_1 - b)] + a(1/V_2 - 1/V_1)$.

2.168. а) $\Delta U_m = a(1/V_1 - 1/V_2) = 122$ Дж, б) $A = 3,23$ кДж = $= 0,98 A_{\text{ид}}$, в) $Q = 3,35$ кДж.

2.169. $T(V-b)^{R/C_V} = \text{const}$, $(p+a/V^2)(V-b)^{R/C_V+1} = \text{const}$ (a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса).

2.170. а) $C_p - C_V = R/[1 - 2a(V-b)^2/RTV^3] \approx R(1 + 2a/RTV)$,

б) $C_p - C_V = 1,21R$.

2.171. $C_p - C_V = 1,66R$.

2.172. $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{C_V + R} \left(\frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right)$.

2.173. Газ будет нагреваться.

2.174. а) $\Delta T = +0,21 \text{ K}$, б) $\Delta T = 0$, в) $\Delta T = -0,20 \text{ K}$.

2.175. а) $\Delta T = -2,7 \text{ K}$, б) $\Delta T = -1,6 \text{ K}$.

2.176. $S = C_V \ln T + R \ln(V-b) + \text{const}$.

2.177. а) $\Delta U_M = 0$, б) $\Delta T = -a/VC_V$, в) $A_{\text{мол}} = -a/V$, г) $\Delta S_M \approx C_V \ln(1 - a/VT C_V) + R \ln 2(1 + b/V) \approx R(\ln 2 + b/V) - a/VT$.

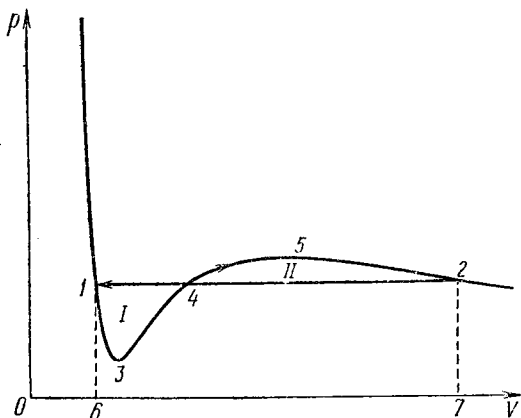


Рис. 13

2.178. Рассмотрим обратимый изометрический цикл $1-3-4-5-2-4-1$ (рис. 13). Из условий $\Delta S = \Delta U = 0$ и $T = \text{const}$ следует, что $Q = 0$ и $A = 0$ (Q — количество теплоты, полученное за цикл, A — совершенная за цикл работа). На участке $1-3-4-5-2$ работа положительна, на участке $2-4-1$ работа отрицательна. Суммарная работа равна нулю. Поэтому площади фигур $6-1-3-4-5-2-7-6$ и $6-1-4-2-7-6$ должны быть одинаковыми. Отсюда следует, что площади I и II равны.

Заметим, что проведенные рассуждения не применимы для циклов $1-3-4-1$ и $4-5-2-4$. Эти циклы необратимы, так как включают совершаемый в точке 4 необратимый переход из состояния, принадлежащего изотерме Ван-дер-Ваальса $1-3-4-5-2$, в состояние, принадлежащее прямолинейному участку $1-4-2$ реальной изотермы.

2.179. а) и б): да, может.

2.180. $V_M = 42 \text{ см}^3$, $\rho = 4,1 \text{ г/см}^3$.

2.181. а) $c = 0,39 \text{ Дж/(г·K)}$, б) $c = 0,92 \text{ Дж/(г·K)}$.

2.182. Возросло в: а) 2,15, б) 4,64, в) 10 раз.

2.183. $r_2 = 2\alpha r_1/(2\alpha + \rho g h r_1) = 0,18 \text{ мм}$.

2.184. $h = 4\alpha/\rho g(d_1 - d_2) = 3,0 \text{ см}$.

$$2.185. F = 2\alpha V/a^2 = 2,4 \text{ кН.}$$

$$2.186. F = 2\alpha V/h^2 = 0,55 \text{ кН.}$$

$$2.187. \text{ а) } h = 3,0 \text{ см, б) } F = 2\alpha^2 l / \rho g a^2 = 0,43 \text{ Н.}$$

$$2.188. xy = 2\alpha / \rho g \varphi.$$

$$2.189. h = 2\alpha / \rho g r = 1,0 \text{ см.}$$

$$2.190. h = (l / \rho g) [p (\eta^3 - 1) + (2\alpha / r) \eta \times \\ \times (\eta^2 - 1)] = 7 \text{ м.}$$

2.191. У веществ, у которых давление в тройной точке превышает атмосферное давление.

2.192. $p_{н.п} = C \exp(-qM/RT)$, где C — константа.

$$2.193. \text{ а) } A_{12} = p_{н.п} m (V'_2 - V'_1), \text{ б) } Q_{12} = \\ m q_{12}, \text{ в) } U_2 - U_1 = m q_{12} - p_{н.п} m (V'_2 - V'_1), \\ \text{ г) } S_2 - S_1 = m q_{12} / T, \text{ д) } F_2 - F_1 = -p_{н.п} m \times \\ \times (V'_2 - V'_1).$$

2.194. Весь горизонтальный участок изотермы, проходящий в двухфазной области.

2.195. Точка на кривой плавления.

2.196. а) См. рис. 14. б) Области под колоколообразной кривой соответствует кривая испарения.

$$2.197. T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} = 147 + 89 \ln r \text{ (} r \text{ — в см).}$$

$$2.198. \text{ а) } \kappa = \frac{q}{4\pi(T_1 - T_2)} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = 4,0 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К), б) } T = (T_1 - T_2) \times$$

$$\times \frac{r_1 r_2}{r(r_2 - r_1)} + \frac{r_2 T_2 - r_1 T_1}{r_2 - r_1} = \frac{20}{r} + 200.$$

$$2.199. \tau = lC \ln \eta / 2\kappa S = 1,16 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 3 \text{ ч.}$$

$$2.200. \text{ а) } \lambda = 0,76 \cdot 10^{-7} \text{ м} \approx 20 \langle a \rangle, \text{ б) } \tau = 1,71 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

$$2.201. v = 8,4 \cdot 10^{34} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$2.202. D = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}, \eta = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с.}$$

$$2.203. \lambda \approx 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м} \approx 38 \langle a \rangle.$$

$$2.204. D_{12} = 0,70 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с.}$$

$$2.205. \text{ а) и б) } q/S \approx 0,5 \text{ Вт/м}^2, \text{ в) } q/S \approx 0,03 \text{ Вт/м}^2, \\ \text{ г) } q/S \approx 0,003 \text{ Вт/м}^2.$$

$$2.206. \tau \approx 40 \text{ ч.}$$

$$2.207. \alpha = \pi \eta \omega R^4 / 2a\chi = 0,48 \text{ рад.}$$

$$2.208. \eta = 2\beta m a / \pi R^2.$$

$$2.209. v = 2,4 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$2.210. \tau = (4V/S) \ln \eta \sqrt{\pi M / 8RT}.$$

$$2.211. p_2 = 0,129 \text{ Па.}$$

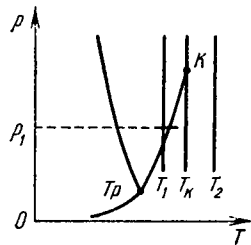


Рис. 14

Часть 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

$$3.1. \delta \sim 10^{-11}.$$

$$3.2. q' = q \text{ — заряд релятивистски инвариантен.}$$

$$3.3. q = -9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль} = -F, \text{ где } F \text{ — постоянная Фарадея.}$$

$$3.4. q = 3,9 \cdot 10^5 \text{ Кл.}$$

$$3.5. F_e / F_g = 4,2 \cdot 10^{12}.$$

$$3.6. \omega = 2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}^2.$$

$$3.7. m_p' = 1,86 \cdot 10^{-9} \text{ кг} \approx 10^{18} m_p, \text{ где } m_p \text{ — истинная масса протона.}$$

$$3.8. q_C = 1,70 \cdot 10^{20} \text{ Кл}, q_3 = 5,13 \cdot 10^{14} \text{ Кл.}$$

$$3.9. q/m = 0,86 \cdot 10^{-19} \text{ Кл/кг} = 4,9 \cdot 10^{-22} e/m_e.$$

$$3.10. F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \frac{q_i q_k}{|r_i - r'_k|^3} (r_i - r'_k).$$

$$3.11. F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int_{V'} \frac{\rho(r) \rho(r') (r - r')}{|r - r'|^3} dV dV'.$$

$$3.12. \text{ а) } \varphi = (1/4\pi\epsilon_0) (6q/a), \text{ E} = 0, \text{ б) } \varphi = 0, \text{ E} = 0.$$

$$3.13. \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|r - r_i|},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|r - r_i|^3} (r - r_i).$$

$$3.14. \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r) dV}{|r' - r|}, \text{ E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r) (r' - r) dV}{|r' - r|^3}.$$

$$3.15. \varphi = R\sigma/\epsilon_0, \text{ E} = 0.$$

$$3.16. \varphi = (1/4\pi\epsilon_0) (3q/2R) = 6,8 \cdot 10^5 \text{ В}, \text{ E} = 0.$$

$$3.17. \varphi = R\sigma/2\epsilon_0, \text{ E} = \sigma/4\epsilon_0.$$

$$3.18. \text{ а) } \varphi = 0, \text{ E} = -(kR/3\epsilon_0) e_z, \text{ б) } \partial\varphi/\partial x = \partial\varphi/\partial y = 0, \partial\varphi/\partial z = kR/3\epsilon_0.$$

3.19. Систему равноотстоящих параллельных друг другу плоскостей.

$$3.20. \varphi = -Ex + \text{const.}$$

$$3.21. \text{ а) Да, является. б) } \varphi = -E_1x - E_2y - E_3z + \text{const.}$$

$$3.22. \text{ а) Нет, не является. б) } \varphi(r) = a/2r^2.$$

$$3.23. \text{ а) Поле является центрально-симметричным. б) } E = 2|\varphi'| \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$3.24. \text{ а) Поле является осесимметричным.}$$

$$\text{ б) } E = \sqrt{(\partial\varphi/\partial r)^2 + (1/r^2)(\partial\varphi/\partial\theta)^2}.$$

$$3.25. \text{ а) } E = -2(axe_x + aye_y + bze_z), \text{ E} = 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2}.$$

$$\text{ б) Эллипсоид вращения с полуосями: } \sqrt{\varphi/a}, \sqrt{\varphi/a}, \sqrt{\varphi/b}.$$

$$\text{ в) Эллипсоид вращения с полуосями: } E/2a, E/2a, E/2b.$$

$$3.26. \text{ а) } E = -2(axe_x + aye_y - bze_z), \text{ E} = 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2}.$$

б) При $\varphi > 0$ — однополостный гиперболоид вращения, при $\varphi = 0$ — прямая круговой конус, при $\varphi < 0$ — двуполостный гиперболоид вращения.

в) Эллипсоид вращения.

$$3.27. E = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{a^2 + r^2}}.$$

$$3.28. \varphi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r+a}{r-a}, \text{ E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a\lambda}{r^2 - a^2}. \text{ При } r \gg a \text{ — поле точеч-$$

ного заряда: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \text{ E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ (q — полный заряд стержня).

$$3.29. E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r.$$

$$3.30. \text{ а) } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + x^2}}, \text{ E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} e_x.$$

γ) Для $x=0$: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$, $E=0$; для $|x| \gg r$: $\varphi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|x|}$,
 $E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \frac{x}{|x|} e_x$ (как для точечного заряда).

в) $E_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{3r^2 \sqrt{3}} = 1,92 \cdot 10^4$ В/м, $x_m = \pm r/\sqrt{2} = \pm 42,4$ мм.

г) Точки x_m являются точками перегиба.

3.31. а) $\varphi = \frac{q}{2\epsilon_0\pi r^2} (\sqrt{r^2+x^2} - \sqrt{x^2})$, $E_x = \frac{q}{2\epsilon_0\pi r^2} \times$
 $\times \left(\frac{x}{\sqrt{x^2}} - \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} \right)$; при $|x| \gg r$ — поле точечного заряда: $\varphi =$
 $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|x|}$, $E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \frac{x}{|x|}$, б) $\varphi = 75$ кВ, $E_x = 0,53$ МВ/м.

3.32. $\varphi = \frac{q}{2\epsilon_0\pi (b^2-a^2)} (\sqrt{b^2+x^2} - \sqrt{a^2+x^2})$,

$E_x = \frac{qx}{2\epsilon_0\pi (b^2-a^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+x^2}} \right)$.

При $|x| \gg b$ — поле точечного заряда.

3.33. $E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|}$.

3.34. $a = b\sqrt{3}$; $r = 2b$, $\vartheta = 60^\circ$.

3.35. а) $E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2}} - \frac{x+a}{\sqrt{r^2+(x+a)^2}} - \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}} + \right.$
 $\left. + \frac{x-a}{\sqrt{r^2+(x-a)^2}} \right)$.

б) $E_x(0) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}} \right) \approx -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$,

в) $E_x(a-0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{r^2+4a^2}} \right) \approx \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$,

г) $E_x(a+0) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a}{\sqrt{r^2+4a^2}} \approx -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a}{r}$,

д) $E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(2aq)}{x^3}$, где $q = \pi r^2 \sigma$ (как для диполя с момен-
 том $p = 2aq$).

3.36. $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) p \cos \vartheta / r^2$, $E = (1/4\pi\epsilon_0) (p/r^3) \sqrt{1+3\cos^2 \vartheta}$.

3.37. Момент p не зависит от выбора точки, относительно кото-
 рой он берется.

3.38. $A = 2pE$.

3.39. а) и б) $p = 0$.

3.40. $F = (1/4\pi\epsilon_0) 6p^2/l^4 = 2,1 \cdot 10^{-16}$ Н.

3.41. а) $p = 2aqe_x$, б) $p = -2aqe_x$, в) $p = 0$, г) $p = -2aqe_y$.

3.42. а), б), в), г) $p = 2aqe_x$.

3.43. 1. Квадруполем

2. $p = 0$. 3. а) $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) 3qa^2/r^3$, б) $\varphi = 0$, в) $\varphi = -(1/4\pi\epsilon_0) 3qa^2/r^3$.
 4. $\varphi = (3a/2r) \varphi'$.

3.44. 1. $p = 2aq(e_x \sqrt{3} + e_y)$, $p = 4aq = 4,0 \cdot 10^{-8}$ Кл·м.

2. $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) 2qa (x_1 \sqrt{3} + y_1)/(x_1^2 + y_1^2)^{3/2} = 174 \text{ В.}$
 3. $\varphi_{\max} = (1/4\pi\epsilon_0) p/r^2 = 360 \text{ В, } \varphi_{\min} = 0.$
 3.45. а) $p = 2\lambda a^2 e_x$, б) $p = 0$, в) $p = -2\lambda a^2 e_x$.
 3.46. а), б), в) $p = (2ka^3/3) e_x$.
 3.47. 1. $p = 0$. 2. а) $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0) qR^2/2 |x|^3$, $E = (1/4\pi\epsilon_0) (3qR^2/2x^4) \times (x/|x|) e_x$; б) квадруполем.
 3.48. $p = (4\pi/3) kR^4 e_z$.
 3.49. $\varphi = kR^4 \cos \theta / 3\epsilon_0 r^2$, где θ — угол между осью z и направлением на точку, в которой определяется потенциал.
 3.50. а) $p = 0$, б) $\varphi = -(1/4\pi\epsilon_0) 2ea^2/r^3 = -29 \text{ мкВ}$, $E = (1/4\pi\epsilon_0) 6ea^2/r^4 = 8,6 \text{ кВ/м}$, в) квадруполем, г) $\varphi = 2(a/r)^2 \varphi' = 2 \cdot 10^{-4} \varphi'$, $E = 6(a/r)^2 E' = 6 \cdot 10^{-4} E'$.
 3.51. а) $\langle p \rangle = 0$, б) $\langle \varphi \rangle = -(1/4\pi\epsilon_0) ea^2/4r^3 = -3,6 \text{ мкВ}$, $\langle E \rangle = (1/4\pi\epsilon_0) 3ea^2/4r^4 = 1,1 \text{ кВ/м}$.
 3.52. а) $\nabla [f(x) e_x] = df/dx$, б) $\nabla r = 3$, в) $\nabla e_r = 2/r$, г) $\nabla [f(r) e_r] = 2f(r)/r + df(r)/dr$.
 3.53. а) $\nabla a = 0$, б) $\Phi_a = 0$.
 3.55. $\Phi_r = 4\pi R^3$.
 3.56. Интеграл равен $3V$.
 3.57. $\Phi_a = \int_0^R f(r) \cdot 4\pi r^2 dr$.
 3.58. $\Phi_1 = -\Phi_2$.
 3.59. а) $E_n = \lambda/2\pi\epsilon_0 R$ (чем примечателен этот результат?), б) $\Phi_E = 2\lambda R/\epsilon_0$.
 3.60. $\rho = \epsilon_0 (1 + 4y + 9z^2)$.
 3.61. $\rho = \epsilon_0 A (2/r - \alpha) \exp(-\alpha r)$.
 3.62. 1. Заряд, распределенный по пространству с одинаковой всюду плотностью $\rho = 3\alpha\epsilon_0$.
 2. $\Phi_E = 3\alpha V$.
 3.63. а) — г) $[\nabla a] = 0$.
 3.65. Нет, не может — это поле не потенциально.
 3.66. а) $[\nabla E] = 2ae_z$, б) $C = 2\alpha\pi b^2$.
 3.67. а) $E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|}$. б) $\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x| + \text{const.}$ в) Нет, нельзя.
 3.68. Да, может, если модуль плотностей зарядов пластин различен.
 3.69. $E_A = 25e_x \text{ (В/м)}$, $E_B = 75e_x \text{ (В/м)}$, $E_C = -25e_x \text{ (В/м)}$.
 3.70. а) $\sigma_1 > \sigma_2$, б) $\varphi_1 - \varphi_2 = -200 \text{ В}$.
 3.71. $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$.
 3.72. а) $E = (1/2\pi\epsilon_0) \lambda/r$, $\varphi = -(\lambda/2\pi\epsilon_0) \ln(r/r_0)$, б) $E = 3,6 \text{ кВ/м}$, $\varphi = -83 \text{ кВ}$, в) нет, нельзя.
 3.73. $F_e = eU/r \ln(b/a) = 4,9 \cdot 10^{-15} \text{ Н}$, $F_m = pU/r^2 \ln(b/a) = 1,9 \cdot 10^{-22} \text{ Н}$.
 3.74. $F = \lambda^2/2\pi\epsilon_0 b = 8,1 \text{ Н/м}$. $A = (\lambda^2/2\pi\epsilon_0) \ln(b/a) = 0,11 \text{ Дж/м}$.
 3.75. а) $E = 0$. б) Потенциал во всех точках внутри сферы, включая и центр сферы, одинаков. в) $\varphi = R\sigma/\epsilon_0$ (см. ответ к задаче 3.15).
 3.76. $F = 0$ (ср. с ответом к задаче 1.227).
 3.77. $E = \rho r/3\epsilon_0$, $\varphi = (\rho/2\epsilon_0) (R^2 - r^2/3)$.
 3.78. Поле внутри полости однородно и имеет напряженность $E = (\rho/3\epsilon_0) a$.
 3.79. Электрон будет совершать гармонические колебания около положения равновесия, совпадающего с центром шара. Частота колебаний $\omega = \sqrt{e^2/4\pi\epsilon_0 m_e R^3}$.

$$3.80. R = \sqrt[3]{(e\lambda/2\pi c)^2/4\pi\epsilon_0 m_e} = 0,31 \text{ нм.}$$

$$3.81. \text{ а) } \varphi_0 = (1/4\pi\epsilon_0) 4q/3R = 120 \text{ В,}$$

$$\text{ б) } \varphi = (1/4\pi\epsilon_0) (q/3R) [4 - (r/R)^3] = 120 - 3 \cdot 10^4 r \text{ (} r \text{ — в метрах, } \varphi \text{ — в вольтах), в) } E(R/2) = (1/4\pi\epsilon_0) q/4R^2 = 225 \text{ В/м.}$$

$$3.82. E = (\rho_0/2\epsilon_0) r/r.$$

$$3.83. E = (\rho_0 r/3\epsilon_0 \alpha r^3) [1 - \exp(-\alpha r^3)]. \text{ При больших } r: E \approx (\rho_0 r/3\epsilon_0 \alpha r^3), \text{ т. е. пропорциональна } 1/r^2 \text{ (как для точечного заряда), при малых } r: E \approx \rho_0 r/3\epsilon_0 \text{ (ср. с ответом к задаче 3.77).}$$

$$3.84. \rho = \rho_0/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1,15 \text{ мкКл/м}^3.$$

$$3.85. \text{ На гранях, перпендикулярных к скорости, } \sigma = 1,00 \text{ мкКл/м}^2, \text{ на остальных гранях } \sigma = 1,15 \text{ мкКл/м}^2.$$

$$3.86. \lambda = \lambda_0/\sqrt{1 - (v/c)^2 \cos^2 \alpha} = 1,11 \text{ мкКл/м.}$$

$$3.87. P = (1 - 1/\epsilon) D.$$

$$3.88. \text{ а) } E \text{ уменьшается в } \epsilon \text{ раз, б) } D \text{ остается неизменным, в) } U \text{ уменьшается в } \epsilon \text{ раз.}$$

$$3.89. \text{ а) } E = E_0/\epsilon = 50 \text{ В/м, } D = \epsilon_0 E_0 = 0,88 \text{ нКл/м}^2, \text{ б) } P = \epsilon_0 E_0 (\epsilon - 1)/\epsilon = 0,44 \text{ нКл/м}^2, \text{ в) } \sigma' = \pm P = \pm 0,44 \text{ нКл/м}^2.$$

$$3.90. \langle \rho' \rangle = (P_1 - P_2)/a.$$

$$3.91. \text{ а) } \nabla E = -E_0 k/(\epsilon_1 + kx)^2, \text{ где } k = (\epsilon_2 - \epsilon_1)/a, \text{ б) } \Phi_B = SE_0 [2/(\epsilon_1 + \epsilon_2) - 1], \text{ в) } \rho' = -\epsilon_0 E_0 k/(\epsilon_1 + kx)^2.$$

$$3.92. \rho' = -(4\epsilon_0 E_0/a) (\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 = -0,59 \text{ мкКл/м}^2.$$

$$3.93. \epsilon(x) = \alpha \epsilon_1 \epsilon_0 E_0 [\epsilon_1 \rho_1' \ln(1 + \alpha x) + \alpha \epsilon_0 E_0].$$

$$3.94. E_2 = (E_1/\epsilon_2) \sqrt{\epsilon_2^2 \sin^2 \alpha_1 + \epsilon_1^2 \cos^2 \alpha_1} = 5,2 \text{ В/м, } \alpha_2 = \arctg[(\epsilon_2/\epsilon_1) \tg \alpha_1] = 74^\circ, \sigma' = \epsilon_0 (\epsilon_2 - 1) (\epsilon_1/\epsilon_2) E_1 \cos \alpha_1 = 64 \text{ пКл/м}^2.$$

$$3.95. \text{ Нулю.}$$

$$3.96. \text{ На выделяемой поверхностью } S \text{ части пластины: а) суммарный сторонний заряд равен нулю, б) суммарный связанный заряд больше нуля.}$$

$$3.97. \text{ При } |x| \leq a: \varphi = -\rho x^2/2\epsilon\epsilon_0, E_x = \rho x/\epsilon\epsilon_0, \text{ при } |x| > a: \varphi = -(\rho a/\epsilon_0) |x| + (\rho a^2/\epsilon_0) (1 - 1/2\epsilon), E_x = (\rho a/\epsilon_0) (x/|x|).$$

$$3.98. \text{ а) } P = (1 - 1/\epsilon) \rho \epsilon x, \text{ б) на обеих поверхностях } \sigma' = (1 - 1/\epsilon) \rho a, \text{ в) } \rho' = -(1 - 1/\epsilon) \rho.$$

$$3.99. \text{ а) } E_x = (x/|x|) (\rho_0/\alpha\epsilon\epsilon_0) [1 - \exp(-\alpha |x|)], \text{ б) } \rho' = -(1 - 1/\epsilon) \rho_0 \times \exp(-\alpha |x|).$$

$$3.100. \rho' = 0.$$

$$3.101. \sigma'_{\max} = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E = 3,5 \text{ нКл/м}^2, \sigma' = \sigma'_{\max}/2 = 1,75 \text{ нКл/м}^2.$$

$$3.102. \omega = 2\sqrt{3P_r E/l^2 \delta}.$$

$$3.103. F = (1/4\pi\epsilon_0) q^2/(2a)^2 = 0,36 \text{ мН.}$$

$$3.104. \sigma = -qa/2\pi (a^2 + x^2)^{3/2}, q_{\text{инд}} = -q.$$

$$3.105. \text{ В пятом знаке.}$$

$$3.106. \text{ а) } E_1 = E_2 = E, D_1 = D, D_2 = \epsilon D, \text{ б) } E_1 = E_2 = 2E/(1 + \epsilon), D_1 = 2D/(1 + \epsilon), D_2 = 2\epsilon D/(1 + \epsilon). \text{ Густота линий } E \text{ во всем зазоре одинакова, линии } D \text{ в части зазора 2 в } \epsilon \text{ раз гуще, чем в части зазора 1.}$$

$$3.107. \text{ а) } E_1 = 2\epsilon E/(1 + \epsilon), E_2 = 2E/(1 + \epsilon), D_1 = D_2 = 2\epsilon D/(1 + \epsilon), \text{ б) } E_1 = E, E_2 = E/\epsilon, D_1 = D_2 = D. \text{ Густота линий } D \text{ во всем зазоре одинакова, линии } E \text{ в части зазора 2 в } \epsilon \text{ раз реже, чем в части зазора 1.}$$

$$3.103. C = \epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 S/(\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1) = 4,1 \text{ нФ.}$$

$$3.109. C = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1) S}{\ln(\epsilon_2/\epsilon_1) d} = 6,1 \text{ нФ.}$$

$$3.110. C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}.$$

$$3.111. C \approx 1,6 \text{ пФ.}$$

$$3.112. C = 4\pi\epsilon_0 r_1 r_2 / (r_2 - r_1).$$

$$3.113. C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_1 r_1 / \ln(r_2/r_1) = 100 \text{ пФ.}$$

$$3.114. \text{ а) } C = \sum_{k=1}^N C_k, \text{ б) } C = 1 / \sum_{k=1}^N C_k^{-1}.$$

$$3.115. C = 10 \text{ пФ.}$$

3.116. Соединенные параллельно конденсаторы емкостью C_1 и C_2 соединить последовательно с конденсатором емкостью C_3 .

$$3.117. U_1 = 200 \text{ В, } U_2 = 100 \text{ В, } q = 20 \text{ нКл, } C = 67 \text{ пФ.}$$

$$3.118. q_1 = q_2 = q_3 = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} = 55 \text{ мКл.}$$

$$3.119. q_1 = \frac{C_1 (C_1 - C_2)}{2(C_1 + C_2)} = -24 \text{ мКл, } q_2 = \frac{C_2 (C_1 - C_2)}{2(C_1 + C_2)} = -36 \text{ мКл, } q_3 = \frac{C_3 (C_2 - C_1)}{2(C_1 + C_2)} = +60 \text{ мКл.}$$

$$3.120. C \approx \pi\epsilon_0 / \ln(b/a) = 5,2 \text{ пФ/м.}$$

$$3.121. C \approx 2\pi\epsilon_0 a = C'/2 = 0,56 \text{ пФ (} C' \text{ — емкость шара радиуса } a \text{).}$$

$$3.122. W = 2,3 \cdot 10^{-25} \text{ Дж.}$$

$$3.123. \text{ а) } \langle W \rangle = -(1/4\pi\epsilon_0) (e^2/r_0) = -4,4 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = -27 \text{ эВ,}$$

$$\text{ б) } W = \langle W \rangle N_A = -2,6 \cdot 10^6 \text{ Дж} = -1,6 \cdot 10^{25} \text{ эВ.}$$

$$3.124. \text{ а) } W = (1/4\pi\epsilon_0) (q^2/a) (\sqrt{2}+4), \text{ б) } W = (1/4\pi\epsilon_0) (q^2/a) (\sqrt{2}-4),$$

$$\text{ в) } W = -(1/4\pi\epsilon_0) (q^2/a) \sqrt{2}.$$

$$3.125. W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, k=1 \\ (i \neq k)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{|r_i - r_k|}.$$

$$3.126. W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V \rho(r') dV' \int_V \frac{\rho(r) dV}{|r - r'|}.$$

$$3.127. W = (1/4\pi\epsilon_0) q^2/2r = 4,5 \text{ нДж. б) } \eta = (R-r)/R = 0,99.$$

$$\text{ в) } R = 2r = 2,00 \text{ см.}$$

$$3.128. \text{ а) } W = (1/4\pi\epsilon_0) 3q^2/5r = 5,4 \text{ нДж, б) } W_1 = 1/6 W = 0,9 \text{ нДж,}$$

$$\text{ в) } W_2 = 5/6 W = 4,5 \text{ нДж.}$$

$$3.129. A = (1/4\pi\epsilon_0) q^2/10r = 0,9 \text{ нДж.}$$

$$3.130. r_{кл} = (1/4\pi\epsilon_0) q^2/m_e c^2 = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

$$3.131. W = (1/4\pi\epsilon_0) q^2 (b-a)/2\epsilon ab = 27 \text{ мДж.}$$

$$3.132. \text{ а) } A = q^2 (a-b)/8\pi\epsilon_0 ab = 9 \text{ мДж. б) Потому что эта формула не учитывает работу, затрачиваемую на сжатие зарядов на сжимающейся обкладке.}$$

$$3.133. A = q^2 \Delta x / 2\epsilon\epsilon_0 S = 11,3 \text{ мкДж.}$$

$$3.134. \text{ а) } \omega \text{ увеличивается в } \epsilon \text{ раз, б) } \omega \text{ уменьшается в } \epsilon \text{ раз.}$$

$$3.135. \text{ а) } R = 1 / \sum_{k=1}^N R_k^{-1}, \text{ б) } R = \sum_{k=1}^N R_k.$$

3.136. Соединенные параллельно R_2 и R_3 соединить последовательно с R_1 .

$$3.137. R = R_1/2 + \sqrt{R_1^2/4 + R_1 R_2} = 4 \text{ Ом.}$$

$$3.138. R = \rho \int_0^l \frac{dx}{S(x)}.$$

$$3.139. 12 \text{ м.}$$

$$3.140. R = (\rho/2\pi d) \ln(b/a).$$

$$3.141. R = (\rho/4\pi) (1/a - 1/b). \text{ При } b = \infty \quad R = \rho/4\pi a.$$

3.142. $I = (\Phi_2 - \Phi_1)/\Delta t$, направлен ток внутрь замкнутой поверхности.

3.143. $I = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) a U v/d = 1,1 \text{ нА}$.

3.144. $t = -RC \ln(1 - U/U_0) = 0,69 \text{ мкс}$.

3.145. а) $i = (q_0/RC) \exp(-t/RC)$, б) $q = q_0 [1 - \exp(-t/RC)] = 0,18 \text{ мКл}$, в) $Q = (q_0^2/2C) [1 - \exp(-2t/RC)] = 82 \text{ мДж}$.

3.146. $Q = CU^2/2$.

3.147. $Q = CU^2 R_1/2 (R_1 + R_2) = 63 \text{ мДж}$.

3.148. $n = \sqrt{NR/R_0} = 6$. $P_{\max} = N\phi^2/4R_0 = 30 \text{ Вт}$.

3.149. а) $A_1 = \frac{1}{4}CU^2 = 63 \text{ мкДж}$, б) $A_2 = -\frac{1}{2}CU^2 = -125 \text{ мкДж}$.

3.150. а) $A_1 = \frac{1}{2}CU^2 (\varepsilon - 1)/(2\varepsilon + 1) = 36 \text{ мкДж}$, б) $A_2 = -CU^2 (\varepsilon - 1)/(2\varepsilon + 1) = 72 \text{ мкДж}$.

3.151. $\rho = \tau/\varepsilon\varepsilon_0 \ln 2 = 2,3 \cdot 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

3.152. $I = US (\sigma_2 - \sigma_1)/\ln(\sigma_2/\sigma_1) d = 5,9 \text{ нА}$.

3.153. 1. а) $E_1 = \rho_1 U/(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2) = 25 \text{ кВ/м}$, $E_2 = \rho_2 U/(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2) = 50 \text{ кВ/м}$, $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = 0,44 \text{ мККл/м}^2$, $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 = 1,33 \text{ мККл/м}^2$; б) $\sigma_1 = D_1 = 0,44 \text{ мККл/м}^2$, $\sigma_2 = -D_2 = -1,33 \text{ мККл/м}^2$, $\sigma = D_2 - D_1 = 0,89 \text{ мККл/м}^2$; в) $\sigma'_1 = -\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) E_1 = -0,22 \text{ мККл/м}^2$, $\sigma'_2 = \varepsilon_0 (\varepsilon_2 - 1) E_2 = 0,88 \text{ мККл/м}^2$, $\sigma' = -(\sigma'_1 + \sigma'_2) = -0,66 \text{ мККл/м}^2$; г) $j = E_1/\rho_1 = E_2/\rho_2 = 2,5 \text{ мкА}$.

2. а) $E_1 = U/d_1 = 50 \text{ кВ/м}$, $E_2 = 0$, $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = 0,88 \text{ мККл/м}^2$, $D_2 = 0$; б) $\sigma_1 = D_1 = 0,88 \text{ мККл/м}^2$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma = -D_1 = -0,88 \text{ мККл/м}^2$; в) $\sigma'_1 = -\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) E_1 = -0,44 \text{ мККл/м}^2$, $\sigma'_2 = 0$, $\sigma' = -\sigma'_1 = 0,44 \text{ мККл/м}^2$, г) $j = 0$.

3.154. $I = UC/\rho\varepsilon\varepsilon_0 = 0,97 \text{ мкА}$.

3.155. $I = UC/\rho\varepsilon\varepsilon_0$.

3.156. $R = \rho/2\pi a = 2R'$, где R' — сопротивление между шариком радиуса a и концентрической с ним сферической оболочкой очень большого радиуса r ($r \gg a$) (см. ответ к задаче 3.141).

3.157. а) $q = q_0 \exp(-\sigma t/\varepsilon\varepsilon_0)$, б) $Q = (q_0^2/8\pi\varepsilon\varepsilon_0) (1/a - 1/b)$.

3.158. Может, если на участке действует э. д. с., равная IR .

3.159. $\phi_1 - \phi_2 = -4,5 \text{ В}$.

3.160. $\phi_A - \phi_B = 0$.

3.161. $I_1 = R_2\phi/D = 0,87 \text{ А}$, $I_2 = -R_3\phi/D = -1,30 \text{ А}$, где $D = (R_0 + R_1)R_2 + (R_0 + R_1 + R_2)R_3$.

3.162. $I_1 = 0,63 \text{ А}$, $I_2 = -2,86 \text{ А}$, $I_3 = -2,23 \text{ А}$.

3.163. $I_1 = I_3 = 1,00 \text{ А}$, $I_2 = I_4 = -1,00 \text{ А}$. Не изменятся (а). $I_1 = -0,92 \text{ А}$, $I_2 = 0,04 \text{ А}$, $I_3 = 0,36 \text{ А}$, $I_4 = 0,52 \text{ А}$ (б).

3.164. $I_1 = -6,4 \text{ мА}$, $I_2 = 1,8 \text{ мА}$, $I_3 = 4,6 \text{ мА}$, $I_4 = 0$.

3.165. $U = U_0 R x/[Rl + R_0(l - x)]$, при $R \gg R_0$ $U = U_0 x/l$.

3.166. $B = (\mu_0/4\pi) ev/r^2 = 4,8 \text{ мТл}$.

3.167. $I = 2\pi B b/\mu_0 = 24 \text{ кА}$.

3.168. $F_m = (\mu_0/4\pi) e^2 v^2/a^2 = 2,3 \cdot 10^{-28} \text{ Н} = (v/c)^2 F_e = 10^{-6} F_e$.

3.169. а) $B = 6,3 \text{ мкТл}$, б) $B = 2,2 \text{ мкТл}$.

3.170. $B = \frac{1}{2}B_\infty$, где $B_\infty = (\mu_0/4\pi) \cdot 2I/b$ — магнитная индукция на расстоянии b от бесконечного прямого тока.

3.171. $B = 5,5 \text{ мТл}$.

3.172. $B = 0$.

3.173. $B = \mu_0 I/2\pi b \sqrt{1 + (b/a)^2}$. При $a = \infty$ $B = \mu_0 I/2\pi b$ — поле бесконечного прямого тока.

3.174. $B = \frac{\mu_0 I}{2r} \frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{\pi/n}$. В пределе при $n \rightarrow \infty$ $B = \mu_0(I/2r)$ — поле в центре кругового тока.

$$3.175. B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2Il}{b \sqrt{l^2 + 4b^2}} (1 - 1/\eta) = 1,4 \text{ мкТл.}$$

$$3.176. H = \frac{nI}{2} \left\{ \frac{l/2 - x}{\sqrt{r^2 + [(l/2) - x]^2}} + \frac{l/2 + x}{\sqrt{r^2 + [(l/2) + x]^2}} \right\},$$

$$a) H = nI, \quad б) H = nI/2.$$

3.177. Это приводит к возникновению осевой составляющей тока и соответственно к появлению дополнительного поля, аналогичного полю прямого тока.

$$3.178. H = 1/2 [jr] \text{ для } r \leq R, \quad H = 1/2 (R^2/r^2) [jr] \text{ для } r \geq R.$$

3.179. Поле внутри полости однородно и имеет напряженность $H = 1/2 [ja]$.

$$3.180. B = 2\mu_0 \omega \sigma R/3 = 42 \text{ пТл.}$$

$$3.181. B = 0.$$

$$3.182. M = 2/5 m R^2 \omega, \quad p_m = 1/5 q R^2 \omega, \quad p_m/M = q/2m.$$

$$3.183. B = (\mu_0/4\pi) 2p_m/R^3 = 0,20 \text{ мТл.}$$

$$3.184. p_m \approx 1/3 \pi N I (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) = 2,2 \text{ мА} \cdot \text{м}^2.$$

$$H \approx N I \ln (R_2/R_1)/2 (R_2 - R_1) = 23 \text{ А/м.}$$

$$3.185. B_2 = (T_1/T_2)^2 B_1 = 3,1 \text{ мТл.}$$

$$3.186. F = 3/2 \mu_0 \pi (N I r^2/l^2)^2 = 0,05 \text{ мкН.}$$

$$3.187. F = 2\mu_0 I_1 I_2 a^2/\pi (4b^2 - a^2) = 1,5 \text{ мкН,}$$

$$A = (\mu_0/\pi) I_1 I_2 a \ln [(2b+a)/(2b-a)] = 0,27 \text{ мкДж.}$$

$$3.188. I_m = (k/2N S \mu_0 H) \operatorname{arctg} (l_2/2l_1) = 0,09 \text{ мА} \quad (S - \text{площадь рамки}).$$

$$3.189. \Delta P = \mu_0 \pi d^2 n N I^2/4l = 0,39 \text{ мН.}$$

3.190. $B = \sigma_p d^2/4lr = 1,8 \text{ кТл}$ (предельное достижимое при помощи электромагнитов с железным сердечником значение составляет менее 10 Тл).

$$3.191. j(r) = (3\alpha/2\pi) r e_z.$$

$$3.192. H = (U_m r/2d) \sqrt{\sigma^2 + (\epsilon \epsilon_0 \omega)^2} \cos [\omega t + \operatorname{arctg} (\epsilon \epsilon_0 \omega/\sigma)].$$

3.194. В увеличится в μ раз, H останется прежним.

$$3.195. \langle H_l \rangle = I/l.$$

3.196. $B = B_0, \quad H = H_0/\mu$, где H_0 — напряженность внешнего магнитного поля.

$$3.197. a) \Phi_B = 0, \quad \Phi_H = (SB_0/\mu_0) (1/\mu_2 - 1/\mu_1).$$

$$3.198. a) \nabla H = - (B_0/\mu_0) [k/(\mu_1 + kx)^2], \text{ где } k = (\mu_2 - \mu_1)/a,$$

$$б) \Phi_H = (SB_0/\mu_0) [1 - 2/(\mu_1 + \mu_2)].$$

3.199. а) $H = [3/\mu_0 (2 + \mu)] B_0 = [3/(2 + \mu)] H_0$ (H_0 — напряженность внешнего магнитного поля), $B = [3\mu/(2 + \mu)] B_0$. б) $B \approx 3B_0$.

$$3.200. \Phi_B = 0, \quad \Phi_H = (SB/\mu_0) (1 - 1/\mu).$$

$$3.201. \mu = (\pi d - b) H/(NI - bH) = 38 \cdot 10^2.$$

$$3.202. \mu_{\max} \approx 9800 \text{ при } H = 65 \text{ А/м.}$$

3.203. а) $\mu = 3 \cdot 10^3$, б) $\Phi = 0,7 \text{ мВб}$, в) $W_1 = 0,1 \text{ Дж}$, $W_2 = 0,7 \text{ Дж}$, $W = 0,8 \text{ Дж}$.

3.204. а) и в) против часовой стрелки, б) и г) по часовой стрелке.

3.205. а) Против часовой стрелки. б) $q = B \pi a^2/R$.

$$3.206. F = Q/v.$$

$$3.207. U = \pi B n l (l - 2l_1) = 5,3 \text{ мВ.}$$

$$3.208. a) U = 2\pi^2 a^2 (n/60)^2 m_e/e = 2,0 \text{ нВ}, \quad б) U = -\pi a^2 (n/60) B + 2\pi^2 a^2 (n/60)^2 m_e/e \approx -\pi a^2 (n/60) B = -33 \text{ мВ.}$$

$$3.209. H = qR/2\mu_0 N S = 400 \text{ кА/м.}$$

$$3.210. L = \pi \mu \mu_0 N^2 d^2/4 (l + 0,45d) = 1,3 \text{ мГн.}$$

$$3.211. L = (\mu_0 l/\pi) \ln [(b-a)/a] = 18 \text{ мкГн.}$$

$$3.212. L_1 = (\mu_0/\pi) [1/2 + \ln (b/a)] = 1,4 \text{ мкГн/м.}$$

$$3.213. C_1 = 2\pi \frac{\epsilon \epsilon_0}{\ln (b/a)} = 100 \text{ пФ/м}, \quad L_1 = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0,26 \text{ мкГн/м.}$$

$$3.214. L = N\Phi/I = 2W/I^2 = 0,2 \text{ Гн.}$$

$$3.215. L_{12} = qR/I = 5,0 \text{ нГн.}$$

$$3.216. L_{12} = \mu\mu_0 nNS.$$

$$3.217. L_{12} = (1/2\pi) \mu\mu_0 Na \ln(r_2/r_1).$$

3.218. $I = Bv \sin \alpha / R_1 (1 + \sin \alpha) = \text{const}$, направление тока — против часовой стрелки.

3.219. а) $I = \mu_0 I_0 \ln(b/a)/2\pi R$, направление тока — против часовой стрелки, б) $F = [\mu_0 I_0 \ln(b/a)/2\pi]^2 v/R$, $x = (b-a)/\ln(b/a)$, в) $P = RI^2$.

$$3.220. v = mgR (\sin \alpha - k \cos \alpha) / B^2 l^2.$$

$$3.221. \omega = mg (\sin \alpha - k \cos \alpha) / (m + CB^2 l^2) = \text{const}.$$

3.222. При $B < B_0$ ($B_0^2 = 8R \sqrt{mga(I_0 + ma^2)/b^4}$) угол отклонения $\alpha = (\alpha_0/\cos \gamma) e^{-\beta t} \cos(\omega t + \gamma)$, где $\beta = B^2 b^4 / 8R(I_0 + ma^2)$, $\omega = \sqrt{mga/(I_0 + ma^2) - B^4 b^8 / 64 R^2 (I_0 + ma^2)^2}$, $\gamma = \arctg(-\beta/\omega)$.
При $B \geq B_0$ — аperiodическое возвращение маятника в положение равновесия.

$$3.223. \alpha = \alpha_0 \cos \omega t, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{4mga}{4(I_0 + ma^2) + CB^2 b^4}}.$$

$$3.224. \text{ а) } I = (mg/Bb) \cos \omega t, \text{ б) } \mathcal{E} = (1/2) Bb^2 \omega + (mgR/Bb) \cos \omega t.$$

$$3.225. \tau = (L/R) \ln[i_0/(i_0 - i)]; \text{ а) } \tau = 0,58 \text{ с, б) } \tau = 1,16 \text{ с.}$$

$$3.226. Q = RL\mathcal{E}^2/2R_0^2(R + R_0) = 6,0 \text{ мкДж.}$$

$$3.227. W = \pi(b+a)(b-a)^2 \int_0^H H dB = 0,7 \text{ Дж.}$$

$$3.228. q = N_1 B(b-a)^2/R = 2,4 \text{ мКл.}$$

$$3.229. \text{ а) } v = \sqrt{2eU/m_e} = 5,9 \cdot 10^6 \text{ м/с,}$$

$$\text{ б) } v = c \sqrt{1 - [m_e c^2 / (eU + m_e c^2)]^2} = 1,64 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

$$3.230. v_k = 1,88 \cdot 10^8 \text{ м/с, } v_p = 1,64 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 0,872 v_k.$$

3.231. а) По параболе. б) $R = m_e v_0^2 \sin^2 \alpha / eE$. в) $\Delta p = -eE\tau$.
г) $M = \frac{1}{2} t^2 e E v_0 \sin \alpha$.

$$3.232. e' = mg(1 + v_2/v_1) d/U = 8,0 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 5e.$$

$$3.233. F = \mu_0 n l e v / 2 = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ Н.}$$

3.234. а) $r = mv/e'B = 7,3 \text{ см}$, б) $p_m = mv^2/2B = 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ Дж/Тл}$, направления p_m и B противоположны, в) $p_m/M = e'/2m = 2,41 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг}$.

$$3.235. v = eB \sqrt{l^2 + (\pi d)^2} / 2\pi m_e = 4,5 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

$$3.236. l = 2\pi v m_e / eB = 21 \text{ мм.}$$

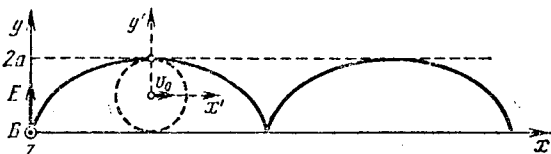


Рис. 15

3.237. а) Движение частицы описывается уравнениями: $x = v_0 t - a \sin \omega t$, $y = a(1 - \cos \omega t)$, $z = 0$, где $v_0 = E/B$, $a = mE/e'B^2$, $\omega = (e'/m)B$ (рис. 15).

Если перейти в систему координат K' , в которой $x' = x - v_0 t$, $y' = y - a$ (начало этой системы смещено вдоль оси y на a и движется вдоль оси x со скоростью v_0), то в этой системе движение частицы описывается уравнениями: $x' = -a \sin \omega t$, $y' = -a \cos \omega t$. Это озна-

чает, что в системе K' частица движется по часовой стрелке по окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью ω . Следовательно, относительно неподвижной системы частица движется так, как двигалась бы точка обода колеса радиуса a , катящегося по плоскости со скоростью v_0 . Траектория, описываемая точкой в этом случае, называется циклоидой.

б) Скорость частицы изменяется в пределах от 0 до $2v_0$ по закону $v = v_0 \sqrt{2 - 2 \cos \omega t}$.

$$3.238. -e/m_e = -2Ub^2/B^2I_1^2(l_1/2 + l_2)^2 = -1,8 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

3.239. $A_r = eBB'N_A/2E$; $A_{r1} = 4,0$, $A_{r2} = 3,0$. Пики соответствуют изотопам гелия ^4He и ^3He .

$$3.240. \text{ а) } W = B^2e^2d^2/8m_p = 17 \text{ МэВ, } v = Bed/2m_p = 5,8 \cdot 10^7 \text{ м/с,}$$

б) $\tau = B\pi d^2/8U = 4,7 \text{ мкс}$, в) $s = 0,131 \sum_{n=1}^{172} \sqrt{n} \approx 198 \text{ м}$ (для вычисления суммы воспользоваться формулой из Приложения 12).

$$3.241. \text{ а) } s = 2W\tau/eB_1r = 1,7 \cdot 10^6 \text{ м} = 1700 \text{ км,}$$

$$\text{ б) } v = c \sqrt{1 - [m_e c^2 / (W + m_e c^2)]^2} = 0,99995 \text{ с.}$$

$$3.242. I_m = U_0 \sqrt{C/L}.$$

$$3.243. \mathcal{G}_m = 15,1 \text{ мВ, } \mathcal{G} = 10,7 \text{ мВ.}$$

3.244. а) $I = 71 \text{ мА}$, б) $\varphi = -63^\circ$ (ток опережает напряжение), в) $U_R = 57 \text{ В}$, $U_L = 28 \text{ В}$, $U_C = 142 \text{ В}$, г) $P = 4,0 \text{ Вт}$.

3.245. а) $Q = U^2 R / (R^2 + 4\pi^2 \nu^2 L^2) = 2,4 \text{ кВт}$. б) Увеличится в два раза.

$$3.246. U_1 = U\omega L/R = 1,0 \text{ кВ, } I = U/R = 10 \text{ А.}$$

$$3.247. \text{ а) } \omega = \omega_0 \sqrt{-4\beta^2/\omega_0^2 + \sqrt{1 + 8\beta^2/\omega_0^2}} \approx \omega_0 = 3,16 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1} (\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \beta = R/2L).$$

б) $I_1 = (U/Z) \sqrt{4\beta^2\omega^2/\omega_0^4 + (1 - \omega^2/\omega_0^2)^2} \approx 2\beta U/Z\omega_0 = 22 \text{ мА}$
 $(Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \approx L\omega_0)$, $I_2 = UC\omega \approx UC\omega_0 = 7,0 \text{ А}$, $I_3 = U/Z \approx U/L\omega_0 = 7,0 \text{ А}$.

3.248. От 186 до 570 м.

$$3.249. P = RI_m^2/2 = 0,15 \text{ мВт.}$$

$$3.250. P = RCU_m^2/2L = 4,2 \text{ мВт.}$$

3.251. а) $Q = \sqrt{L/CR^2 - 0,25} = 5,0$. б) $\Delta Q/Q \approx CR^2/8L = 0,005 \sim 0,5 \%$.

$$3.252. (\omega_0 - \omega)/\omega_0 = 1 - 2Q/\sqrt{4Q^2 + 1} = 0,0012 \sim 0,12 \%.$$

$$3.253. \text{ а) } W = W_0 \exp(-\omega_0 t/Q). \text{ б) } 50 \%.$$

3.254. Требуемое условие имеет вид $\sqrt{1 - 1/(2Q^2 + 0,5)} \geq 0,99$, откуда $Q \geq 5,0$.

3.255. $I_1/I_2 = \sqrt{1 + (1,10 - 1/1,10)^2 (Q^2 + 0,25)}$; а) $I_1/I_2 = 19$, б) $I_1/I_2 = 2,2$.

3.256. а) $U'_1 = 5 \text{ мВ}$, $U'_2 = 191 \text{ мВ}$, б) $U'_1 = 50 \text{ мВ}$, $U'_2 = 195 \text{ мВ}$. Из полученных результатов вытекает, что контур плохо пропускает ток резонансной частоты, причем тем хуже, чем больше добротность контура.

Часть 4. ВОЛНЫ

4.1. Это уравнение может описывать с равным правом как продольную, так и поперечную волну.

4.2. Частота остается прежней, длина волны увеличивается в два раза.

4.3. $\Delta x = \lambda/2$.

4.4. См. рис. 16. В точке B скорость в обоих случаях равна нулю.

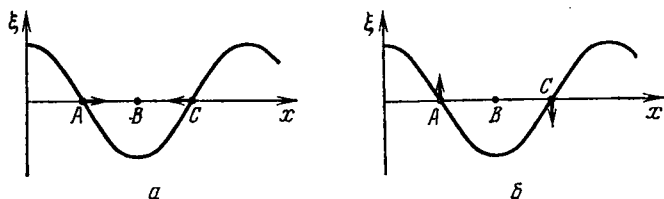


Рис. 16

4.5. $\delta\varphi = 0,63$ рад.

4.6. Комплексная амплитуда $\hat{A}$ содержит в себе данные об обычной амплитуде A и начальной фазе колебаний α .

4.7. $\hat{A} = 10,6 \exp(i\pi/3,9)$.

4.8. $\xi = (a/\sqrt{r}) \cos(\omega t - kr + \alpha)$, где r — расстояние от нити.

4.9. а) Размерность α совпадает с размерностью квадрата скорости.

б) Изменения величины f в пространстве и времени могут иметь характер плоской волны, бегущей вдоль оси x со скоростью, равной $1,20 \cdot 10^4$ м/с.

4.10. Уравнение такого вида описывает плоскую волну произвольной формы (т. е. не обязательно гармоническую), распространяющуюся вдоль оси x со скоростью $v = \omega/k$.

4.11. $v = \sqrt{E/\rho} = 3,5$ км/с.

4.12. 1. а) В точках A и C , б) в точках B и D .

2. а) Нулю, б) максимальна.

4.13. См. рис. 17, ρ_0 — плотность среды в отсутствие волн.

4.14. См. рис. 18.

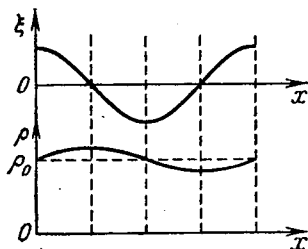


Рис. 17

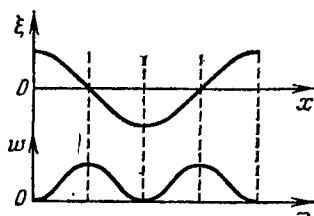


Рис. 18

4.15. $\mathbf{j} = (\rho a^2 \omega^3 / k) \sin^2(\omega t - kx + \alpha) \mathbf{e}_x$.

4.16. Поток энергии, переносимый упругой волной через поверхность S .

4.17. $W = S j_1 \{1 - \exp[-2\gamma(x_2 - x_1)]\} t$.

4.18. а) $(1/r^2) \exp(-\kappa r)$ (r — расстояние от центра),

б) $(1/r) \exp(-\kappa r)$ (r — расстояние от оси).

4.19. Эти линии являются гиперболами, в фокусах которых помещаются источники.

4.20. 1. а) Для всех поверхностей — нулю, б) для поверхностей 1, 3, 5, 7, 9 — нулю, для поверхностей 2, 4, 6, 8 — отлично от нуля.

2. Для всех поверхностей — нулю.

3. Для поверхностей 2 и 6 — вправо, для поверхностей 4 и 8 — влево.

4. Для поверхностей 2 и 6 — влево, для поверхностей 4 и 8 — вправо.

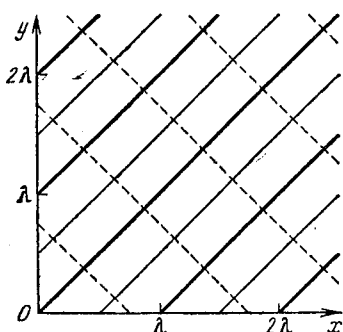


Рис. 19

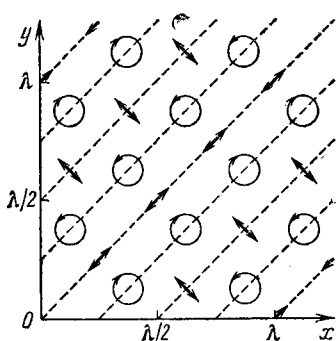


Рис. 20

4.21. Вдоль прямых $y = x + (\alpha\lambda/2\pi) \pm n\lambda$ ($n=0, 1, 2, \dots$) располагаются максимумы амплитуды, равные $2a$ (см. жирные прямые на рис. 19, выполненные для $\alpha=0$). Вдоль прямых $y = x + (\alpha\lambda/2\pi) \pm (n+1/2)\lambda$ ($n=0, 1, 2, \dots$) располагаются минимумы амплитуды, равные нулю (тонкие прямые на рисунке). Фаза имеет одинаковую величину в точках, удовлетворяющих условию $x+y=\text{const}$. Точки, лежащие на соседних штриховых прямых (см. рисунок), колеблются в противофазе. Штриховые прямые отстоят друг от друга на $\lambda/\sqrt{2}$.

4.22. В точках, лежащих на прямых $y = x + (\alpha\lambda/2\pi) \pm n\lambda$ ($n=0, 1, 2, \dots$), частицы среды колеблются вдоль этих прямых (см. рис. 20, выполненный для $\alpha=0$). В точках, лежащих на прямых $y = x + (\alpha\lambda/2\pi) \pm (n+1/2)\lambda$ ($n=0, 1, 2, \dots$), частицы среды колеблются перпендикулярно к этим прямым (и к оси z). Наконец, в точках, лежащих на прямых $y = x + (\alpha\lambda/2\pi) \pm (n+1/4)\lambda$ ($n=0, 1, 2, \dots$), частицы среды движутся по окружностям, лежащим в плоскости x, y . В остальных точках частицы движутся по эллипсам. Такой характер движения имеет место в любой плоскости $z=\text{const}$.

4.23. $v=2,00$ км/с.

4.24. а) Увеличится в два раза, б) увеличится в три раза.

4.25. $a_n = (1/n\omega_1) \sqrt{8 \langle E_K \rangle / m}$.

4.26. $F = \pi d^2 \rho v^2 l^2 = 0,30$ кН.

4.27. $F = 8,4$ кН.

4.28. Уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

4.29. $v_n = 2,5(2n-1)$ кГц, где $n=1, 2, 3, \dots$

4.30. $v_n = 85(2n-1)$ Гц, где $n=1, 2, 3, \dots$

4.31. $v = v/4l = 5$ кГц.

4.32. а) Звук частоты 50 Гц, б) звук частоты 50 Гц, интенсивность которого будет пульсировать с периодом в 1 с, в) ничего.

4.33. $\Delta v = [(l_1 - l_2)/2l_1 l_2] \sqrt{F/\rho l} = 6$ Гц.

4.34. В азоте v больше в 1,3 раза.

- 4.35. 1. а) 306 м/с, б) 331 м/с, в) 354 м/с.
2. 0,92:1:1,07.
- 4.36. $t = 2h_2/\sqrt{\gamma R/M} (\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}) = 30$ с.
- 4.37. В 1000 раз.
- 4.38. а) 82 дБ, б) 64 дБ, в) 46 дБ, г) 28 дБ, д) 10 дБ.
- 4.39. а) 74 дБ, б) 68 дБ, в) 64,5 дБ, г) 62 дБ, д) 60 дБ.
- 4.40. а) $L_2 = 53$ дБ, $r_0 = 3,0$ км; б) $L_2 = 54$ дБ, $r_0 = 100$ км.
- 4.41. $(\Delta p)_{m1}/(\Delta p)_{m2} = 10^{0,05} L_{12} = 10$.
- 4.42. $(\Delta p)_m = \sqrt{2\rho v l} = \sqrt{2I_0 \cdot 10^{L/10} \rho \sqrt{\gamma M/RT}} =$ а) $2,9 \cdot 10^{-5}$ Па, б) 2,9 Па (I_0 — интенсивность, соответствующая порогу слышимости, которая принимается равной 10^{-12} Вт/м²) (ср. с ответом к предыдущей задаче).
- 4.43. а) $v_m = 0,63$ м/с, б) $a/\lambda = 2,9 \cdot 10^{-4}$, в) $v_m/v = 1,9 \cdot 10^{-3}$.
- 4.44. Перед источником $\lambda = 0,5\lambda_0$, позади источника $\lambda = 1,5\lambda_0$, в направлениях, перпендикулярных к направлению движения источника, $\lambda = \lambda_0$.
- 4.45. $v = v_0 (v - v_1)/(v - v_2) = 1,03$ кг/с..
- 4.46. Биения частоты $\Delta\nu \approx 2\nu_0 (v/u) = 17$ Гц (u — скорость звука при данной температуре).
- 4.47. В точке А будут слышны биения, частота которых $\Delta\nu = 2uv \cos(\pi/4)/[u^2 - v^2 \cos^2(\pi/4)] = 50$ Гц.
- 4.48. Второго 700 Гц, третьего 800 Гц.
- 4.49. а) Только приемник Π_1 . б) $\Delta\nu = 50$ Гц.
- 4.50. а) $k = \pm (\omega/c) e_x$, $k = \pm (\omega/c) e_z$, б) $k = \pm (2\pi/\lambda) e_x$, $k = \pm (2\pi/\lambda) e_y$.
- 4.51. а) $H_m = E_m \sqrt{\epsilon\epsilon_0/\mu\mu_0} = (E_m/120\pi) \sqrt{\epsilon/\mu} = 46$ мА/м, б) $v = c/\sqrt{\epsilon\mu} = 1,7 \cdot 10^8$ м/с.
- 4.52. $E = E_m \cos(\omega t + kx + \alpha)$, $H = H_m \cos(\omega t + kx + \alpha + \pi)$.
- 4.53. 1. а) $x_{\text{пучн}} = \pm n\lambda/2$, $x_{\text{узл}} = \pm (n + 1/2)\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), б) $x_{\text{пучн}} = \pm (n + 1/2)\lambda/2$, $x_{\text{узл}} = \pm n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Пучности Е совпадают с узлами Н, и наоборот.
2. Фазы колебаний Е и Н отличаются на $\pi/2$. Когда Е максимальна, Н равна нулю, и наоборот.
- 4.54. $S = 0,38 \cos^2(\omega t + \alpha) e_y$ (Вт/м²).
- 4.55. $W = (1/2) E_m H_m \pi r^2 t = (1/240) E_m^2 r^2 t = 1,00$ мДж.
- 4.56. а) $S = (r\epsilon_0 U^2/2\tau^2 d^2) t$, направление внутрь, б) $W = \epsilon_0 U^2 \pi r^2/2d = \omega V$, где ω — плотность энергии.
- 4.57. а) На боковой поверхности $S = (\mu_0 n^2 I \pi r^2/2\tau^2) t$, направление внутрь; на торцах $S = 0$, б) $W = \mu_0 n^2 I \pi r^2 l/2 = \omega V$, где ω — плотность энергии.
- 4.58. а) $E_m = 120\pi H_m = 18,8$ В/м, б) $\langle \omega \rangle = (1/2) \mu_0 H_m^2 = 1,57$ нДж/м³, в) $I = (1/2) E_m H_m = 60\pi H_m^2 = 0,47$ Вт/м², г) $\langle K_{\text{ед. об}} \rangle = (I/c^2) e_x = 60\pi (H_m/c)^2 e_x = 5,2 \cdot 10^{-18} e_x$ [кг/(м²·с)].
- 4.59. $p = \langle \omega \rangle = 1,57$ нПа.
- 4.60. $\lambda = 2\pi c/\dot{\varphi} = 600 \cdot 10^4$ м, $P = (5/4) (\pi d^3 l \dot{\varphi}^2/c)^2 = 8,3 \cdot 10^{-20}$ Вт.
- 4.61. $P = \langle |S| \rangle \cdot 4\pi r^2 = (2/3) [(1/2) E_m^2/120\pi r^2] 4\pi r^2 = 11$ нВт ($\langle |S| \rangle$ — модуль вектора Пойнтинга, усредненный по времени и по направлениям).
- 4.62. $\eta = 0,493 \approx 1/2$.
- 4.63. $P = (1/6\pi c^2) \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} e^2 \dot{v}^2 = 20e^2 v^4/c^2 r^2 = 2,0 \cdot 10^{-18}$ Вт = 12,5 эВ/с.
- 4.64. а) $\eta = 80\pi e^3 B/c^2 m^2 = 1,38 \cdot 10^{-11}$, б) $\tau = -\ln 0,99c^2 m^3/40e^4 B^2 = 0,026$ с, в) $N = -\ln 0,99c^2 m^2/80\pi e^3 B = 0,73 \cdot 10^9$ об.
- 4.65. а) $\eta = 4,1 \cdot 10^{-18}$, б) $\tau = 1,6 \cdot 10^8$ с ≈ 5 лет, в) $N = 2,5 \cdot 10^{15}$ об.

Часть 5. ОПТИКА

5.1. а) $498,3 \text{ с} \approx 500 \text{ с} \approx 8,3 \text{ мин}$, б) $1,3 \text{ с}$, в) $4,6 \text{ с}$, г) $0,04 \text{ с}$.

5.2. Нет, не означает. Цветовое восприятие определяется не длиной волны, а частотой света.

5.3. а) $t = (n_1 + n_2) d / 2c = 0,50 \cdot 10^{-10} \text{ с}$. б) $\langle v \rangle = 2c / (n_1 + n_2) = 0,67 \text{ с}$.

5.4. $\lambda = 32,6 \text{ см}$.

5.6. $\vartheta = \arctg(n_2/n_1)$.

5.7. а) $\varphi = (n/n_0 - 1) \vartheta$. б) В рассматриваемом приближении угол отклонения φ не зависит от угла падения α_1 .

5.8. а) $\Phi = 5 \text{ дптр}$, б) $\Phi = -2,5 \text{ дптр}$.

5.9. Если показатель преломления среды по обе стороны линзы одинаков.

5.10. В центре линзы.

5.12. См. рис. 21.

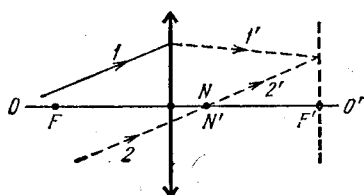


Рис. 21

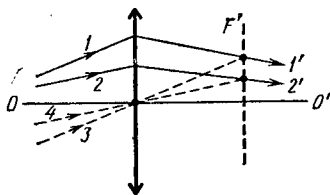


Рис. 22

5.13. См. рис. 22. Последовательность построения: параллельный лучу 1 луч 3 — фокальная поверхность F' — параллельный лучу 2 луч 4. Луч 2' проходит через точку пересечения луча 4 с F' .

5.14. Лучи распространяются вдоль параллельных направлений.

5.15. 1. В общей фокальной плоскости $F'_1 - F'_2$.

2. а) Мнимым, б) прямым.

3. Если фокусные расстояния линз равны по модулю.

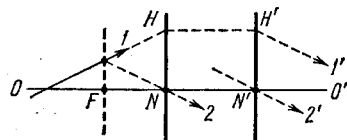


Рис. 23

5.16. б) Изображение будет перемещаться к плоскости H' . Когда предмет окажется в плоскости H , изображение попадет в плоскость H' , причем размер изображения станет равным размеру предмета.

5.17. Построение показано на рис. 23: N и N' — узловые точки системы, 2 и 2' — вспомогательные

параллельные друг другу сопряженные лучи, луч 1' параллелен лучу 2'.

5.18. $E = 1,0 \cdot 10^2 \text{ лк}$.

5.19. $0,21 \text{ Вт}$.

5.20. 214 лм .

5.21. Эта кривая имела бы такой же вид, как изображенная на рис. 5.9 кривая относительной спектральной чувствительности глаза.

5.22. а) См. рис. 24. б) Нет, невозможно.

5.23. $p = 3EA/2cV = 1,6 \text{ нПа}$ (A — механический эквивалент света, см. задачу 5.18; V — относительная спектральная чувствительность глаза).

$$5.24. E_m = \sqrt{(2IA/nV)\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} = 13 \text{ В/м}, H_m = \sqrt{(2IAN/V)\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}} = 0,050 \text{ А/м} \quad (A \text{ и } V - \text{см. ответ к предыдущей задаче}).$$

$$5.25. I = 100,0 \text{ кД.}$$

$$5.26. E = 100 \text{ лк.}$$

$$5.27. \Phi = (2\pi/3) Eh^2 = 19 \cdot 10^3 \text{ лм.}$$

$$5.28. 1. E = Ih/(h^2 + r^2)^{3/2}.$$

$$2. \text{ а) } 50 \text{ лк, б) } 27 \text{ лк.}$$

$$3. \Phi = 2\pi I (1 - h/\sqrt{h^2 + R^2}) = 33 \text{ лм.}$$

$$4. \eta = 0,053.$$

$$5.29. I(\vartheta) = I_0/\cos^3 \vartheta, \text{ где } I_0 = 42 \text{ кД. } E = 42 \text{ лк.}$$

$$5.30. M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} L(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

$$5.31. \Phi = (2/3) \pi^2 R^2 L_0 = 66 \text{ лм.}$$

$$5.32. A = a \sqrt{N}.$$

5.33. Интенсивность пульсирует с периодом, равным 10 с.

$$5.34. I = I_1 + I_2.$$

$$5.35. A = a \sin(N\delta/2)/\sin(\delta/2).$$

$$5.36. \text{ а) } t_{\text{кор}} \approx 4 \cdot 10^{-14} \text{ с,}$$

$$\text{ б) } I_{\text{кор}} \approx 0,01 \text{ мм, в) } \rho_{\text{кор}} \approx 0,3 \text{ мм, г) } V_{\text{кор}} \approx 0,003 \text{ мм}^3.$$

$$5.37. \rho_{\text{Ю}} \approx 0,3 \text{ мм} \approx 5\rho_3.$$

$$5.38. \rho_{\text{кор}} \approx 2,5 \text{ м.}$$

$$5.39. \Delta x = \lambda/\varphi.$$

5.40. Длина волны в вакууме.

5.41. а) Для точек, расстояния которых от середины экрана много меньше l , $\delta\Delta = bd/l$. б) $b_{\text{max}} \approx \lambda l/4d$.

5.42. В красном.

5.43. $a = \lambda_0$, где λ_0 — длина волны света в вакууме.

5.44. Картина сместится в сторону перекрытой щели на 10 полос.

5.45. а) $\lambda_0 = 650 \text{ нм}$, б) $\lambda_0 = 450 \text{ нм}$.

$$5.46. \Delta x = \lambda_0 l/2h = 0,25 \text{ мм.}$$

$$5.47. \text{ а) } \varphi = \lambda(r+b)/2r \Delta x = 10', \text{ б) } N = 5.$$

$$5.48. \text{ а) } \vartheta = (a+b)\lambda/2a(n-1) \Delta x = 14,3', \text{ б) } N = 7.$$

$$5.49. \text{ а) } \Delta x = \lambda/\Phi h = 0,25 \text{ мм, б) } N = 7.$$

$$5.50. \text{ а) } b = (\lambda_0/2n)(m+1/2) \quad (m=1, 2, 3, \dots), \text{ б) } b = (\lambda_0/2n)m \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

5.51. У пучка, испущенного газоразрядной лампой, в обоих случаях $I = 90 \text{ лм/м}^2$. У лазерного пучка в случае а) $I = 100 \text{ лм/м}^2$, в случае б) $I = 80 \text{ лм/м}^2$.

$$5.52. \text{ а) } n^2 = \sqrt{n_1 n_3} = 1,30. \text{ б) Да, будет.}$$

$$5.53. a = \lambda_0/4n' = 0,100 \text{ мкм.}$$

5.54. а) Равномерно освещенное поле зрения, б) чередующиеся светлые и темные кольца.

5.55. а) Кольца будут увеличиваться в диаметре; внешние кольца будут уходить из поля зрения трубы; в центре будут возникать новые кольца, по одному кольцу на каждое перемещение пластинки на расстояние $\lambda/2$. б) Кольца будут уменьшаться в диаметре; внутреннее кольцо будет стягиваться в точку и исчезать; извне в поле зрения трубы будут появляться новые кольца.

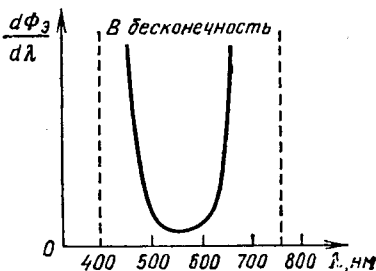


Рис. 24

5.56. а) Равномерно освещенное поле зрения, б) чередующиеся светлые и темные полосы, параллельные линии пересечения плоскостей, ограничивающих пластинки, в) очень слабо различимые полосы, отчетливость которых будет возрастать по направлению от зазора b_2 к зазору b_1 .

5.57. Полосы будут смещаться а) вправо, б) влево (по отношению к рис. 5.19). Перемещение пластинки на $\lambda/2$ сопровождается смещением картины на одну полосу.

5.58. а) В красный ($\lambda = 640$ нм), б) в зеленый ($\lambda = 538$ нм).

5.59. Интерференционные полосы видны при $(\lambda/\Delta\lambda) \geq \geq 2b \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}/\lambda_0 = 1,6 \cdot 10^3$, а) $\Delta x = a\lambda_0/2 (b_2 - b_1) \sqrt{n^2 - \sin^2\theta} = 1,0$ мм, б) полосы не наблюдаются.

5.60. $b \approx \lambda_0 (\lambda/\Delta\lambda)/2 = 10$ мк.

5.61. $N = 30$.

5.62. Полосы будут видны на длине $x = l \left[\frac{b(\lambda_2/\lambda_1 - 1)}{\alpha l} + \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{4} l$.

5.63. а) $R = 2r_0^2/\lambda_0 (10 - 1) = 9,1$ м, б) $\Phi = (n - 1)/R = 0,55$ дптр, в) $r_3 = \sqrt{R\lambda_0 (6 - 1)/2} = 3,7$ мм.

5.64. В 1,225 раз.

5.65. 1. а) Кольца будут уменьшаться в диаметре; внутреннее кольцо будет стягиваться в точку и исчезать; на внешней границе картины будут возникать новые кольца. б) Кольца будут увеличиваться в диаметре; внешние кольца будут уходить за пределы картины; в центре будут возникать новые кольца.

2. $N = 345$.

5.66. $b = 1/2 (m - 1)$; а) $b = \infty$, б) $b = 125$ мм, в) $b = 56$ мм.

5.67. а) $m_{\min}$ равно наименьшему целому числу, превышающему $r^2/a\lambda = 8$. б) $b = ar^2/(a\lambda m - r^2) = 10$ м. в) $r \leq \sqrt{a\lambda} = 0,74$ мм.

5.68. Максимумы и минимумы интенсивности будут поочередно сменять друг друга.

5.69. $m = r^2/b\lambda$.

5.70. $\lambda = r^2 (b_2 - b_1)/b_1 b_2 = 58 \cdot 10^{-8}$ м.

5.72. $A = \frac{A_1 - (-1)^N \rho A_N}{1 + \rho} \approx \frac{A_1 - (-1)^N A_N}{2}$ (ρ очень мало отличается от единицы).

5.73. а) $I = 4I_0$, б) и в) $I = 2I_0$, г) $I = I_0$.

5.74. Интенсивность уменьшится в четыре раза.

5.75. а) 375 нм, б) 875 нм, в) 750 нм.

5.76. $\Phi = \int_0^\infty E(r) \cdot 2\pi r dr$.

5.77. $b = \alpha^2/\lambda$; а) $b = 2,50$ м, б) $b = 1,72$ м, в) $b = 1,32$ м.

5.78. $I = 4I_0/(1 - \rho^2)^2 = 421I_0$.

5.79. $I = 4I_0/(1 - \rho)^2 = 1600I_0$.

5.80. $h = \lambda_0/2 (n - n_0) = 0,58$ пм (n_0 — показатель преломления окружающей пластинку среды, который в случае воздуха можно считать равным единице).

5.81. 1. а) $m = m' = a^2/4b\lambda$, б) $m = a^2/b\lambda$, $m' = 0$, в) $m = 0$, $m' = a^2/b\lambda$.

2. $x_m = \sqrt{mb\lambda}$.

3. 1:0,414:0,318:0,268:0,236.

5.82. 1. а) $m = m' = 5$, б) $m = 20$, $m' = 0$, в) $m = 0$, $m' = 20$.

2. $x_1 = 0,71$ мм, $x_2 = 1,00$ мм, $x_3 = 1,22$ мм, $x_4 = 1,41$ мм, $x_5 = 1,58$ мм.

5.83. 1. Точки, в которых касательные к кривой параллельны оси ξ .

2. а) $v=2$, б) $v=-2$.

5.84. а) $v=\sqrt{2m}$. б) 1,41; 2,00; 2,45; 2,83; 3,16.

5.85. а) $I=0,25I_0$, б) $I=0,38I_0$, в) $I=0,025I_0$, г) $I=0,07I_0$, д) $I=0,18I_0$, е) $I=0,004I_0$.

5.86. а) $I_{\max}=137 \text{ лм/м}^2$, б) $I_{\min}=78 \text{ лм/м}^2$, в) $I_{\max}/I_{\min}=1,76$, г) $x_{\max}=0,3 \text{ мм}$, $x_{\min}=0,45 \text{ мм}$.

5.87. Суммарная площадь участков, заштрихованных с наклоном влево, равна суммарной площади участков, заштрихованных с наклоном вправо.

5.88. а) 153 лк, б) 80 лк.

5.89. Эти колебания сдвинуты по фазе друг относительно друга на $3\pi/4$.

5.90. а) Полоска закрывает одну нештрихованную и одну штрихованную зону Френеля. Из кривой Корню получаем, что $E/E_0=(6/19)^2$, откуда $E=30 \text{ лк}$; б) полоска закрывает четыре нештрихованные либо четыре штрихованные зоны Френеля. Из кривой Корню: $E/E_0=(21/38)^2$, откуда $E=92 \text{ лк}$.

5.91. 1. Площадь характеризует световой поток, проходящий через единицу длины щели.

2. а) Высота максимумов увеличится в четыре раза, б) ширина максимумов уменьшится в два раза, в) координаты всех минимумов уменьшатся в два раза, в результате чего 2-й минимум окажется на месте 1-го, 4-й на месте 2-го и т. д., г) число минимумов станет в два раза больше, д) площадь увеличится в два раза.

5.92. а) $a=(\lambda_{\text{кр}}-\lambda_{\text{фиол}})/b\Phi \approx 0,7 \text{ мм}$, б) $a/\langle \Delta x \rangle = (\lambda_{\text{кр}}-\lambda_{\text{фиол}})/(\lambda_{\text{кр}}+\lambda_{\text{фиол}}) \approx 0,3$. (В качестве ширины максимума взято среднее значение ширины максимумов для различных длин волн.)

5.93. а) Дифракция Фраунгофера, б) $a_0=5,0 \text{ мм}$, в) $a_{12}=2,5 \text{ мм}$.

5.94. Дифракция Френеля.

5.95. а) Нет, центр картины находится против центра линзы. б) Да, центр картины находится против середины щели.

5.96. а) Если первоначально щель была достаточно узка, то интенсивность сначала монотонно растет, затем пульсирует со все уменьшающимся размахом, колеблясь около значения I_0 , которое наблюдается в отсутствие преград; б) монотонно растет.

5.98. 1. Суммарная площадь максимумов характеризует световой поток, проходящий через единицу длины щелей.

2. а) 1-й максимум займет место 2-го, 2-й—4-го и т. д. б) высота центрального максимума увеличится в четыре раза, в) ширина максимумов останется прежней, г) суммарная площадь максимумов удвоится.

5.99. Максимумы станут в два раза гуще; высота центрального максимума уменьшится в четыре раза; ширина максимумов останется прежней; суммарная площадь максимумов станет в два раза меньше (ср. с задачей 5.98).

5.100. а) Положения максимумов не изменятся, б) высота центрального максимума станет в четыре раза меньше, в) ширина максимумов удвоится, г) суммарная площадь максимумов уменьшится в два раза.

5.101. а) Положения максимумов не изменятся, б) высота центрального максимума станет в два раза меньше, в) ширина максимумов останется прежней, г) суммарная площадь максимумов уменьшится в два раза.

5.102. 1. а) $x=(2k+1)/2m$, где $k=0, 1, \dots$ (значения k , при которых $x > 1$, исключаются); б) $x=k/m$, где $k=1, 2, \dots, m-1$.

2. а) $x=1/2$, б) $x=1/4$ и $3/4$, в) $x=1/6$, $3/6$ и $5/6$.
 3. а) Интенсивность ни при каких значениях x , кроме не имеющих смысла значений 0 и 1, не обращается в нуль, б) $x=1/2$, в) $x=1/3$ и $2/3$.

5.103. $b=1150$ нм.

5.104. $D \approx 3 \cdot 10^5$ рад/м ≈ 1 угл. мин/мм.

5.105. $\Delta\varphi=22,0^\circ$.

5.106. $\Delta\varphi=4,8^\circ$.

5.107. а) Не будут, б) будут.

5.108. $N \approx 1000$ штрихов.

5.109. 1. $D = m/d \sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}$.

2. а) $1,09 \cdot 10^{-3}$ рад/мм, б) $1,23 \cdot 10^{-3}$ рад/мм, в) $1,54 \cdot 10^{-3}$ рад/мм.

5.110. 1. $D_{\text{лин}} = f m/d [1 - (m\lambda/d)^2]^{3/2}$.

2. а) $1,30$ мм/мм, б) $1,85$ мм/мм, в) $3,64$ мм/мм.

5.111. 1. $\Delta x = 733$ мм.

2. а) $D_{\text{лин}} \sim 1$ мм/мм (см. задачу 5.110), б) $R = 10^5$.

5.112. 1. $\delta\varphi/\delta m = (\lambda/d)/\sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}$.

2. Точные значения: а) $19,4^\circ$, б) $27,3^\circ$. Вычисленные по формуле, полученной в п. 1: а) $19,2^\circ$, б) $25,9^\circ$.

5.113. При большом периоде дифракционные максимумы располагаются очень густо (см. ответ к п. 1 задачи 5.112). При $d=1$ мм угловое расстояние между соседними максимумами будет порядка $\lambda/d \approx 0,5 \cdot 10^{-3}$ рад $\approx 2'$.

5.114. 1. $d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = \pm m\lambda$.

2. а) $\varphi = \varphi_0 = 20,0^\circ$; б) $\varphi_+ = 35,6^\circ$, $55,3^\circ$; $\varphi_- = 5,9^\circ$, $-7,9^\circ$, $-22,2^\circ$, $-38,2^\circ$, $-59,1^\circ$; в) $m_+ = 2$, $m_- = 5$.

3. При нормальном падении полное число максимумов на единицу больше.

5.115. 1. $d(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) = \pm m\lambda$.

2. а) $2,07^\circ$, б) $2,75^\circ$, в) $4,17^\circ$.

5.116. 1. $D = |m|/\sqrt{1 - (\sin \varphi_0 + m\lambda/d)^2}$, где $-(d/\lambda)(1 + \sin \varphi_0) \leq m \leq (d/\lambda)(1 - \sin \varphi_0)$.

2. а) $1,6$ угл. мин/мм, б) $2,2$ угл. мин/мм, в) 10 угл. мин/мм, г) 43 угл. мин/мм.

5.117. Да, можно.

5.118. $a_{\text{мин}} = 7,0$ км.

5.119. $l = d/1,22\lambda \sqrt{N} = 1,1$ м (d —диаметр зрачка, N —число точек на 1 м²).

5.120. $d = \sqrt[3]{M/2N_A \rho} = 0,282$ нм (M —молярная масса NaCl).

5.121. $\lambda = 0,0588$ нм.

5.122. $R = l \lg [2 \arcsin (m\lambda/a)]$, где m —порядок максимума, $a = \sqrt[3]{4M/N_A \rho}$; $R_1 = 11,9$ мм, $R_2 = 24,2$ мм.

5.123. Вектор E вращается вокруг направления луча, одновременно изменяясь по модулю так, что конец вектора описывает эллипс.

5.124. а) $P = 0,50$, б) $P = 0,91$.

5.125. $I = I_0 \cos^2 \alpha_1 \cos^2 (\alpha_2 - \alpha_1) = 66$ лм/м².

5.126. Вырезанная параллельно оптической оси одноосная двояко-преломляющая пластинка, создающая сдвиг по фазе между обыкновенным и необыкновенным лучами на $\pm \pi/4$. Толщина d этой пластинки удовлетворяет условию: $d = [(m + 1/4) \lambda_0] / (n_o - n_e)$, где m —целое число или нуль, λ_0 —длина световой волны в вакууме, n_o и n_e —показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей.

5.127. Пропустить плоскополяризованный свет через пластинку в четверть волны, установленную так, что ее оптическая ось образует с плоскостью колебаний плоскополяризованного света угол 45° .

5.128. Нет, нельзя.

5.129. $E_y = E_0 \cos \alpha e_y \cos(\omega t - kx)$, $E_z = E_0 \sin \alpha e_z \cos(\omega t - kx)$.

5.130. $E'_y = E_0 \cos \alpha e_y \cos(\omega t - kx + \delta_1)$,

$E'_z = E_0 \sin \alpha e_z \cos(\omega t - kx + \delta_2)$ ($\delta_1 \neq \delta_2$).

5.131. а) и б) $E' = E$, где E — исходный вектор (см. задачу 5.129); в) $E'_y = E_y$, $E'_z = -E_z$ — плоскости колебаний векторов E и E' симметричны относительно оси y ; г) и д) вектор E' вращается вокруг оси x , описывая своим концом эллипс, оси которого не совпадают с осями y и z ; е) конец вектора E' описывает эллипс, оси которого совпадают с осями y и z ; ж) вектор E' вращается вокруг оси x , описывая своим концом окружность.

5.132. Четыре раза за один оборот свет становится плоскополяризованным, четыре раза (в промежуточных положениях) — поляризованным по кругу. В остальное время свет будет эллиптически поляризованным с непрерывным видоизменением формы эллипса от отрезка прямой до окружности и обратно.

5.133. $I = I_0/2$.

5.134. Интенсивность будет изменяться в пределах от нуля до $I_{\text{ест}}/4$, четыре раза за один оборот достигая минимума и четыре раза — максимума.

5.135. а) $I_{\parallel} = I_{\text{ест}}/8$, б) $I_{\perp} = 3I_{\text{ест}}/8$.

5.136. а) Во всех трех точках свет плоскополяризован, б) $I_A = I_B = I_{\text{ест}}/2$, в) $I_C = 0$, $I_C = I_{\text{ест}}/2$, г) $I_C = (I_{\text{ест}}/2) \cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)$.

5.137. а) В точке B — свет эллиптически поляризованный либо при $\alpha_1 = 0$ или $\pi/2$ — плоскополяризованный; в точке C — плоскополяризованный свет, б) $I_B = I_{\text{ест}}/2$. в) Нет, не может. г) Может, если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ или $\pi/2$.

5.138. $P = 0,80$.

5.139. а) $P_{\parallel} = 2P_1/(1 + P_1^2) = 0,976$, б) $P_{\perp} = 0$.

5.140. $\eta = \alpha_1^2(1 - P)/(1 + P) = 0,048$.

5.141. а) $P_1 = \sqrt{(\eta - 1)/(\eta + 1)} = 0,900$. б) $P_{\parallel} = \sqrt{\eta^2 - 1}/\eta = 0,994$.

5.142. Против мест пластинки, для которых оптическая разность хода Δ обыкновенного и необыкновенного лучей равна $m\lambda$ (m — целое число), свет будет плоскополяризованным с плоскостью колебаний, совпадающей с плоскостью колебаний в падающем свете. Против мест, для которых $\Delta = (m + 1/2)\lambda$ — плоскополяризованный свет с плоскостью колебаний, перпендикулярной к плоскости колебаний в падающем свете. Против мест, для которых $\Delta = (m \pm 1/4)\lambda$ — свет, поляризованный по кругу. В остальных местах — эллиптически поляризованный свет.

5.143. 1. а) Поверхность будет освещена равномерно, б) и в) поверхность будет испещрена чередующимися светлыми и темными полосами.

2. Темные и светлые полосы поменяются местами.

5.144. $\Delta x = \lambda/\phi (n_o - n_e) = 2,0$ мм.

5.145. а) $E_{\min} = 1,51 \cdot 10^6$ В/м, б) три просветления и три затемнения (с учетом затемнения при $E = 0$).

5.146. а) 500 раз. б) Нет, не будут.

5.147. а) Красный, в) оранжевый, г) желтый, д) зеленый.

5.148. а) $\alpha = \pi/(\Delta x \cdot \lg \phi) = 21$ угл. град/мм, б) $I(x) = I_m \cos^2(\pi x/\Delta x)$, где I_m — константа.

5.149. Длина волны в среде, в которой скорость света равна v .

5.150. 1. а) $u = v/(1-q)$, б) $u = (1-p)v$.

2. а) $u = v/2$, б) $u = 2v$.

5.151. 1. $a = 1,502$, $b = 4,56 \cdot 10^3$ нм².

5.152. а) $u = c\lambda_0^2/(a\lambda_0^2 + 3b)$,

б) λ_0 , нм	759,0	589,3	486,0	397,0
u/c	0,655	0,649	0,641	0,629
v/c	0,662	0,660	0,658	0,653
u/v	0,990	0,983	0,975	0,964

5.153. а) $a = eE_m/m_e\omega^2 = 4,9 \cdot 10^{-10}$ м, $v_m = a\omega = 1,53 \cdot 10^{-3}$ м/с (E_m — амплитуда напряженности электрического поля). б) $F_{Bm}/F_{Em} = v_m/2c = 0,26 \cdot 10^{-11}$.

5.154. $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2}$.

5.155. В 8 раз.

5.156. а) на 0,50 %, б) на 1,00 %, в) на 63 %, г) на 99,0 %.

5.157. $[(I - I_0)/I_0] 100\% = \{1 - \exp[-\alpha(\kappa_1 + \kappa_2)/2]\} 100\% = 9,5\%$.

5.158. а) $I = I_0\sigma(1-\rho)^2 = 83,4$ лм/м², б) $I = I_0\sigma(1-\rho)^2/(1-\sigma^2\rho^2) = 83,5$ лм/м². $\{\sigma = \exp(-\kappa a)$, $\rho = [(n-1)/(n+1)]^2\}$.

5.159. а) $I = I_0(1-\rho)^2 = 92,2$ лм/м², б) $I = I_0(1-\rho)^2/(1-\rho^2) = 92,3$ лм/м².

5.160. 1. а) 0,49 %, б) 8,33 %.

2. В 17 раз. 3. 8,78 %.

5.161. $\kappa = \ln(\tau_1/\tau_2)/(a_2 - a_1)$, где τ — коэффициент пропускания света пластинкой (отношение интенсивности света, прошедшего через пластинку, к интенсивности падающего света).

5.162. $\kappa = 1,37$ м⁻¹.

5.163. В четыре раза.

5.164. $\Delta N = 4c\alpha u/\lambda_0(c^2/n^2 - \alpha^2 u^2) = 0,10$. (Буквой α обозначено выражение $1 - 1/n^2$).

5.165. $v = \lambda\Delta\nu/2 = 278$ м/с = 1000 км/ч.

5.166. $T = (\lambda/\Delta\lambda) 4\pi R_C/c = 25$ сут (R_C — радиус Солнца).

5.167. $\Delta\omega/\omega = \pm (1/c) \sqrt{8kT/\pi m}$; плюс в случае а), минус в случае б) (k — постоянная Больцмана).

5.168. а) $\delta\omega_D/\omega = 2\langle v \rangle/c$, б) $\delta\lambda_D = 0,020$ нм.

5.169. $T = \pi M c^2 (\delta\omega_D/\omega)^2 / 32R = 1,0 \cdot 10^3$ К (M — молярная масса, R — газовая постоянная).

5.170. $v = c\sqrt{2(\Delta\omega/\omega)} = 1,5 \cdot 10^6$ м/с.

5.171. $v = 0,26c = 78\,000$ км/с.

Часть 6. АТОМНАЯ ФИЗИКА

6.1. $r(\omega, T) \equiv 0$.

6.2. $\Phi = \Phi_{\text{пад}}$. 0,5 Φ образуется за счет излучения, 0,5 Φ — за счет отражения половины падающего потока.

6.3. а) 0,97 нм (далекая инфракрасная область, граничащая с микроволновым радиодиапазоном), б) 9700 нм (инфракрасная область), в) 970 нм (близкая инфракрасная область), г) 580 нм (видимая часть спектра).

6.4. λ_m уменьшается в два раза.

6.5. $\lambda_m = b\sqrt[4]{\sigma/R^*} = 2,00$ мкм.

$$6.6. \langle \epsilon \rangle = \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}.$$

$$6.7. \text{ а) } \langle \epsilon \rangle_{\text{кв}} = 0,582 kT = 0,582 \langle \epsilon \rangle_{\text{кл}}, \quad \text{ б) } \langle \epsilon \rangle_{\text{кв}} = 0,950 kT = 0,950 \langle \epsilon \rangle_{\text{кл}}, \quad \text{ в) } \langle \epsilon \rangle_{\text{кв}} = 0,000454 kT = 0,000454 \langle \epsilon \rangle_{\text{кл}}.$$

$$6.8. \text{ а) } \langle \epsilon \rangle = 0,257 \text{ эВ} = 0,993 kT, \quad \text{ б) } \langle \epsilon \rangle = 0,247 \text{ эВ} = 0,954 kT, \\ \text{ в) } \langle \epsilon \rangle = 0,154 \text{ эВ} = 0,600 kT, \quad \text{ г) } \langle \epsilon \rangle = 0,0178 \text{ мэВ} = 0,000687 kT.$$

$$6.9. \text{ а) } \omega_m = 2,821 (\hbar/\hbar) T = 3,71 \cdot 10^{11} T, \quad \text{ б) } \lambda_m \omega_m = 1,08 \cdot 10^9 \text{ м/с} = 0,57 \cdot 2\pi c.$$

$$6.10. \text{ а) } T = 5,8 \cdot 10^3 \text{ К}, \quad \text{ б) } E = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}, \quad \text{ в) } m = 4,3 \cdot 10^9 \text{ кг/с}, \\ \text{ г) } \tau \approx 10^{11} \text{ лет}.$$

$$6.11. I = \sigma T^4 (r/R)^2 = 1,37 \text{ кВт/м}^2 \quad (r - \text{радиус Солнца}, R - \text{расстояние от Солнца до Земли}).$$

$$6.12. \text{ а) } E = \frac{I_{\text{впл}}}{A (\lambda_2 - \lambda_1)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda) d\lambda = 1,1 \cdot 10^5 \text{ лк} \quad (\text{точное значение:}$$

$$1,36 \cdot 10^5 \text{ лк}), \quad \text{ б) } I = ER^2 = 2,5 \cdot 10^{27} \text{ кд} \quad (\text{точное значение: } 3,0 \cdot 10^{27} \text{ кд}).$$

Здесь λ_1 и λ_2 — границы видимой части спектра, $V(\lambda)$ — относительная спектральная чувствительность глаза, R — расстояние от Солнца до Земли.

У к а з а н и е: значение интеграла определить путем подсчета числа квадратов координатной сетки, охватываемой кривой на рис. 5.9.

$$6.13. L_3 \sim T^4.$$

$$6.14. L_3 = \sigma T^4 / \pi = 0,15 \text{ кВт} \cdot \text{м}^2 / \text{ср}.$$

$$6.15. \Phi = \sigma T^4 \pi d^2 r^2 \cos \vartheta / 4l^2 = 0,29 \text{ мВт}.$$

$$6.16. T = T_C \sqrt{r/R} = 395 \text{ К} \quad (r - \text{радиус Солнца}).$$

$$6.17. \text{ От } 1,6 \text{ до } 3,1 \text{ эВ}.$$

$$6.18. N = AE\lambda / 2\pi\hbar c = 4,5 \cdot 10^{13} \text{ фотон/}(\text{см}^2 \cdot \text{с}).$$

$$6.19. \text{ а) } \epsilon = 2,23 \text{ эВ} = 4,4 \cdot 10^{-6} m_e c^2, \quad p = 1,2 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 1,3 m_e v,$$

$$\text{ б) } \epsilon = 12,3 \text{ кэВ} = 2,4 \cdot 10^{-2} m_e c^2, \quad p = 0,66 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 0,7 \cdot 10^4 m_e v,$$

$$\text{ в) } \epsilon = 1,23 \text{ мэВ} = 2,4 m_e c^2, \quad p = 0,66 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 0,7 \cdot 10^6 m_e v.$$

$$6.20. v = \frac{c}{\sqrt{1 + (m_e c \lambda / 2\pi\hbar)^2}} = 0,92c.$$

$$6.21. \text{ а) и б) } F = \pi r^2 I / c = 1,43 \text{ нН}.$$

$$6.22. \text{ а) } \varphi(\omega) = \alpha / \omega, \text{ где } \alpha = 0,40 I / \hbar (\omega_2 - \omega_1) = 2,3 \cdot 10^{21} \text{ фотон/}(\text{м}^2 \cdot \text{с}), \\ \text{ б) } j_{\text{фот}} = \alpha \ln(\omega_2 / \omega_1) = 1,5 \cdot 10^{21} \text{ фотон/}(\text{м}^2 \cdot \text{с}) \quad (\omega_1 \text{ и } \omega_2 - \text{частоты, соответствующие границам видимой части спектра}).$$

$$6.23. \lambda_{\text{min}} = 2\pi\hbar c / eU = 0,025 \text{ нм}.$$

$$6.24. U = 2\pi\hbar c \frac{1 - 1/\eta}{e\Delta\lambda} = 25 \text{ кВ}.$$

$$6.25. \text{ а) } \hbar = 1,04 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}, \quad \text{ б) } A = 1,8 \text{ эВ} \quad (\text{более поздние работы дают значение, немного превышающее } 2 \text{ эВ}).$$

$$6.26. \lambda_0 = 2\pi\hbar c / A = 256 \text{ нм}.$$

$$6.27. \text{ а) } A = 2\pi\hbar c / \lambda_0 = 3,74 \text{ эВ}, \quad \text{ б) } \lambda = \frac{\lambda_0}{1 + eU\lambda_0 / 2\pi\hbar c} = 262 \text{ нм}.$$

$$6.28. \varphi = \frac{2\pi\hbar c / \lambda - A}{e} = 2,5 \text{ В}.$$

$$6.29. I_{\text{нас}} = 0,040 ESJ e \lambda / 2\pi\hbar c = 7 \text{ мкА}.$$

$$6.30. \text{ а) } \Delta E / E = \lambda_C / (\lambda + \lambda_C) \approx \lambda_C / \lambda = 0,347 \cdot 10^{-5} \quad (\lambda_C = 2\pi\hbar / m_e c = 0,002426 \text{ нм} - \text{комптоновская длина волны электрона}), \quad \text{ б) } v = 2\pi\hbar \sqrt{2} / \lambda m_e = 1,47 \text{ км/с}.$$

6.31. а) $\Delta E/E = 0,024$, б) $v = 1,03 \cdot 10^7 \text{ м/с} = 0,034c$.

6.32. а) $E_k = \frac{\epsilon \alpha \sin^2(\vartheta/2)}{1 + \alpha \sin^2(\vartheta/2)}$, где $\alpha = 2\epsilon/mc^2$,

б) $E_k = (\epsilon^2/mc^2) (1 - \cos \vartheta)$.

6.33. а) $E_k = (\epsilon^2/m_p c^2) (1 - \cos \vartheta) = 1,07 \text{ кэВ}$, б) $v = c\sqrt{2E_k/m_p c^2} = 1,5 \cdot 10^{-3}c = 4,5 \cdot 10^5 \text{ м/с}$.

6.34. $\delta\varphi = 2\pi/\hbar (1 - \cos \vartheta) \text{ tg } \varphi/m_e c\lambda = 1,1^\circ$.

6.35. $\lambda_C = \hbar/mc$ — комптоновская длина волны данной частицы.

6.36. $r_{\min} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m_\alpha c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) = 1,2 \cdot 10^{-14} \text{ м}$.

6.37. $b = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2} \text{ ctg } (\vartheta/2) = 3,3 \cdot 10^{-14} \text{ м}$.

6.38. В СИ:

$$\frac{dN}{N} = na \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2m_p v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\vartheta/2)},$$

где n — число атомов в единице объема фольги, а a — толщина фольги, m_p — масса протона, v — скорость протона.

В гауссовой системе — то же выражение, но без множителя $1/4\pi\epsilon_0$.

6.39. а) 100, б) 7,2; в) 1,8; г) 0,8; д) 0,5.

6.40. $P = \pi r N_A a (Ze^2/4\pi\epsilon_0 E_k)^2/M = 1,4 \cdot 10^{-4}$ (ρ — плотность, M — молярная масса золота).

6.41. $P_p = 4P_\alpha$.

6.42. Первый потенциал возбуждения атомов ртути $\varphi_1 = 4,9 \text{ В}$, второй потенциал возбуждения $\varphi_2 = 6,7 \text{ В}$.

6.43. В СИ: $v_1 = (1/4\pi\epsilon_0) e^2/\hbar = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. В гауссовой системе: $v_1 = e^2/\hbar = 2,2 \cdot 10^8 \text{ см/с}$.

6.44. В СИ: а) $r_1 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2/m_\mu e^2 = r_0/207 = 2,56 \cdot 10^{-13} \text{ м}$ ($m_\mu/m_e = 207$), б) $E_{св} = m_\mu e^4/2 (4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 = 2,82 \text{ кэВ}$.

В гауссовой системе: те же формулы, но без множителей $4\pi\epsilon_0$.

в) $v_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ (ср. с ответом к задаче 6.43), г) $v_{1T}/2\pi r_1 = 3,0 \cdot 10^{12} \text{ оборотов}$.

6.45. а) В СИ: $E_{св} = m_{пр} e^4/2 (4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 = 13,59 \text{ эВ}$, где $m_{пр} = m_e m_p/(m_e + m_p)$ — приведенная масса системы электрон — протон.

В гауссовой системе: то же выражение, но без множителя $(1/4\pi\epsilon_0)^2$.

б) $\delta = -1/(1 + m_p/m_e) = -0,00054 = -0,054 \%$.

6.46. $\delta = -1/(1 + m_p/m_\mu) = -0,101 = -10,1 \%$.

6.47. $r_0 = \hbar^2/m_e e^2$ — боровский радиус.

6.48. $m_e e^4/\hbar^2 = -2E_1$, где E_1 — энергия атома водорода в основном состоянии.

6.49. $\mu_i = e\hbar/2m_e = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл} = \mu_B$.

6.50. $\mu_i = e\hbar/2m_\mu = (1/207) \mu_i$.

6.51. $\mu_n/M_n = e/2m_e$.

6.52. а) $r_n = \sqrt{n\hbar/\omega m}$, б) $E_n = n\hbar\omega$ ($n = 1, 2, \dots$).

6.53. а) $\omega_m = R(2m+1)/m^2(m+1)^2$, б) $\omega_1:\omega_2:\omega_3:\omega_4 = 5,4:1:0,35:0,16$.

6.54. $R = e\varphi_i/\hbar = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$.

6.55. $\varphi_1 = 3E_i/4e = 10,2 \text{ В}$.

6.56. $\epsilon = 5e\varphi_1/27 = 1,9 \text{ эВ}$.

6.57. $\epsilon = 3E_i/16 = 2,6 \text{ эВ}$.

6.58. а) $\lambda_i = 122 \text{ нм}$, $\lambda_\infty = 91 \text{ нм}$, б) $\lambda_i = 657 \text{ нм}$, $\lambda_\infty = 365 \text{ нм}$, в) $\lambda_i = 1876 \text{ нм}$, $\lambda_\infty = 821 \text{ нм}$.

- 6.59. $R = 2,068 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$.
- 6.60. а) $\lambda_\alpha = 660 \text{ нм}$, б) $\lambda_\infty = 370 \text{ нм}$.
- 6.61. Четыре линии.
- 6.62. 657 и 122 нм.
- 6.63. $v = 7,0 \cdot 10^5 \text{ м/с}$.
- 6.64. $\varphi_i = 3,8 \text{ В}$.
- 6.65. $\varphi_i = 2\pi\hbar c / e\lambda_\infty = 5,0 \text{ В}$.
- 6.66. $E_i = 5,0 \text{ эВ}$ (экспериментальное значение равно 5,1 эВ).
- 6.67. $\varphi_i = 5,1 \text{ В}$.
- 6.68. 1) $5S \rightarrow 4P \rightarrow 4S \rightarrow 3P \rightarrow 3S$; 2) $5S \rightarrow 4P \rightarrow 3D \rightarrow 3P \rightarrow 3S$;
3) $5S \rightarrow 4P \rightarrow 3S$; 4) $5S \rightarrow 3P \rightarrow 3S$.
- 6.69. $\Delta\omega = 2\pi c (\lambda_2 - \lambda_1) / \lambda_1 \lambda_2 = 3,2 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$.
- 6.70. $\Delta E = 2\pi\hbar c (\lambda_2 - \lambda_1) / \lambda_1 \lambda_2 = 2,1 \text{ мэВ}$.
- 6.71. $\Delta\omega = R (1/4^2 - 1/5^2) = 4,65 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$.
- 6.72. $s = -0,41$, $p = -0,04$.
- 6.73. $\lambda_1 = 820 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 680 \text{ нм}$.
- 6.74. $s = -4,13$.
- 6.75. а) $v = 3\hbar R / 4m_{\text{H}}c = 3,25 \text{ м/с}$, б) $v = 5\hbar R / 36m_{\text{H}}c = 0,60 \text{ м/с}$.
- 6.76. $E = \frac{2(\pi\hbar/\lambda)^2}{m_{\text{Na}}} = 1,66 \cdot 10^{-29} \text{ Дж} = 0,49 \cdot 10^{-10} \hbar\omega$,
 $v = 2\pi\hbar / m_{\text{Na}}\lambda = 2,95 \text{ см/с}$.
- 6.77. $v = 0,79 \text{ см/с}$.
- 6.78. а) $\Delta\lambda = \pi\hbar / m_{\text{Na}}c = \lambda_C / 2 = 2,9 \cdot 10^{-17} \text{ м}$ (λ_C — комптоновская длина волны атома). б) $\Delta\lambda$ не зависит от энергии испущенного фотона.
- 6.79. $v = \hbar\omega \sqrt{2} / m_{\text{Li}}c = 0,12 \text{ м/с}$.
- 6.80. $v = \sqrt{v^2 + 2m_e c^2 (e - e\varphi_i)} / m_{\text{Li}}c = 14,3 \text{ м/с}$; атом движется под углом $\alpha = \text{arctg} [\sqrt{2m_e c^2 (e - e\varphi_i)} / e] = 89,0^\circ$ к направлению, в котором летел фотон.
- 6.81. а) $C = \sqrt{2\pi c} \frac{V \sqrt{1/\lambda_{\text{Cu}}} - V \sqrt{1/\lambda_{\text{V}}}}{Z_{\text{Cu}} - Z_{\text{V}}} = 1,253 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1/2} =$
 $= 1,006 \sqrt{3R/4}$, $\sigma = \frac{Z_{\text{V}} V \sqrt{1/\lambda_{\text{Cu}}} - Z_{\text{Cu}} V \sqrt{1/\lambda_{\text{V}}}}{V \sqrt{1/\lambda_{\text{Cu}}} - V \sqrt{1/\lambda_{\text{V}}}} = 1,12$.
- б) $Z = \sigma + \frac{V \sqrt{2\pi c/\lambda}}{C} = 26$ — железо.
- 6.82. $C = 1,336 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1/2} = 1,07 \sqrt{3R/4}$, $\sigma = 3,7$. С увеличением Z график функции $\sqrt{\omega} = f(Z)$ все больше отклоняется от прямолинейности, постепенно загibaясь вверх.
- 6.83. а) $C = 5,398 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1/2} = 1,007 \sqrt{5R/36}$, $\sigma = 7,8$, б) $Z = 78$ — платина.
- 6.84. $C = 5,098 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1/2} = 0,95 \sqrt{5R/36}$, $\sigma = 5,7$.
- 6.85. У серебра. В $(46/28)^2 = 2,7$ раза.
- 6.86. а) $N = 22$, б) $\Delta E_e / \Delta E_\sigma = 22$.
- 6.87. а) $N = 32$, б) $\Delta E_v / \Delta E_r = 553$.
- 6.88. $r_0 = \sqrt{\hbar / m_{\text{пр}} \Delta\omega} = 0,118 \text{ нм}$ ($m_{\text{пр}}$ — приведенная масса атомов углерода и азота).
- 6.89. $\omega_r = (\hbar/I) \sqrt{J(J+1)} = \omega \sqrt{(J+1)/J}$.
- 6.90. $\omega_r = 5,8 \cdot 10^{12} \text{ рад/с}$.
- 6.91. $N_{i+1}/N_i = \exp(-\hbar\omega/kT) = 1/1716$.

$$6.92. \text{ а) } \lambda = \frac{2\pi\hbar \sqrt{1-v^2/c^2}}{mv}, \text{ б) } \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_K(1+E_K/2mc^2)}}.$$

$$6.93. v = c/\sqrt{2} = 0,707c.$$

$$6.94. \text{ а) } v = 1,46 \cdot 10^3 \text{ м/с, б) } v = 0,73 \cdot 10^7 \text{ м/с} = 0,024 \text{ с.}$$

$$6.95. \text{ а) } \Delta x = 0,5 \text{ см, б) } \Delta x \sim 10^{-14} \text{ см, в) } \Delta x \sim 10^{-27} \text{ см.}$$

$$6.96. \Delta x = 4\pi\hbar l/bm_e v = 1,5 \text{ мм} = 150b.$$

$$6.97. r = l \operatorname{tg} [2 \arcsin (k\pi\hbar/m_e v d)], \text{ где } k \text{ — номер кольца; } r_1 = 35 \text{ мм, } r_2 = 83 \text{ мм.}$$

$$6.98. E_1 \sim \hbar^2/ma^2.$$

$$6.99. E_0 \approx \hbar\omega \text{ (точное значение равно } \hbar\omega/2).$$

$$6.100. v \sim \hbar/m_e r \approx 10^6 \text{ м/с} \sim 0,01 \text{ с (ср. с ответом к задаче 6.43).}$$

$$6.101. P = \int_V |\psi(x, y, z)|^2 dV.$$

$$6.102. \psi_n = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a), E_n = (\pi^2\hbar^2/2ma^2)n^2, \text{ где } n \text{ — квантовое число, принимающее значения } 1, 2, 3, \dots$$

$$6.103. P = 1 - 2 \int_0^{\pi a} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = 0,500.$$

$$6.104. \text{ а) } dn/dE = (a/\pi\hbar) \sqrt{m_e/2E},$$

$$\text{ б) } dn/dE = m_e a^2/\pi^2\hbar^2 n = 0,83 \cdot 10^{23} \text{ Дж}^{-1} = 1,33 \cdot 10^4 \text{ эВ}^{-1},$$

$$\text{ в) } \langle E_n \rangle = \frac{\int_0^{E_N} E \left(\frac{dn}{dE} \right) dE}{\int_0^{E_N} \left(\frac{dn}{dE} \right) dE} = \frac{1}{3} E_N = 2,0 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,12 \text{ МэВ.}$$

$$6.105. \psi_{n_1, n_2}(x, y) = \sqrt{4/S} \sin(n_1\pi x/a) \cdot \sin(n_2\pi y/b), E_{n_1, n_2} = (\pi^2\hbar^2/2m)(n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2), \text{ где } S = ab \text{ — площадь ямы, } n_1 \text{ и } n_2 \text{ — квантовые числа, принимающие независимо друг от друга значения } 1, 2, 3, \dots$$

$$6.106. E_{11} = 0,75 \text{ эВ, } E_{12} = E_{21} = 1,89 \text{ эВ, } E_{22} = 3,02 \text{ эВ.}$$

$$6.107. \psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{8/V} \sin(n_1\pi x/a) \cdot \sin(n_2\pi y/b) \times \sin(n_3\pi z/c), E_{n_1, n_2, n_3} = (\pi^2\hbar^2/2m)(n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2 + n_3^2/c^2), \text{ где } V = abc \text{ — объем ямы, } n_1, n_2, n_3 \text{ — квантовые числа, принимающие независимо друг от друга значения } 1, 2, 3, \dots$$

$$6.108. \text{ а) } \psi_n = \frac{\sqrt{1/2\pi R}}{r} \sin \frac{n\pi r}{R}, \text{ б) } E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mR^2}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$6.109. \text{ а) } A = 1/\sqrt{2\pi a}, \text{ б) } \langle r \rangle = a/2.$$

$$6.110. \langle r \rangle = a/\sqrt{2\pi}.$$

$$6.111. \text{ а) } A = 1/\sqrt{\pi a^3} \sqrt{\pi}, \text{ б) } r_{\text{вер}} = a, \langle r \rangle = 2a/\sqrt{\pi}.$$

$$6.112. \text{ а) } M_{\min} = \hbar (\sqrt{3}/2) = 0,913 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с. б) Электрон, протон, нейтрон и другие элементарные частицы со спином, равным } 1/2.$$

$$6.113. M = 6,7 \cdot 10^{67} \hbar.$$

- 6.114. а) $\langle |x| \rangle = \sqrt{\hbar/\pi m \omega} = a/\sqrt{\pi} = 0,564a = (\sqrt{\pi}/2) \langle |x| \rangle_{\text{кл}} = 0,886 \langle |x| \rangle_{\text{кл}}$, б) $\langle U \rangle = \hbar \omega/4 = E_0/2$.
- 6.115. $E_0 = (\hbar/2) \sqrt{g/l} = 1,65 \cdot 10^{-33}$ Дж, $a = \sqrt{(\hbar/m) \sqrt{l/g}} = 0,58 \cdot 10^{-15}$ м.
- 6.116. а) $A = 1/\sqrt{\pi r_0^3}$, б) $dP/dr = (4r^2/r_0^3) \exp(-2r/r_0)$, в) $r_{\text{вер}} = r_0$, г) $\langle r \rangle = 3r_0/2$, д) $\langle U \rangle = -e^2/r_0$, е) $P_\eta = (2\eta^2 + 2\eta + 1) \exp(-2\eta)$.
- 6.117. а) $P_1 = 0,677$, б) $P_{3/2} = 0,423$, в) $P_2 = 0,238$, г) $P_5 = 0,00276$, д) $P_{10} = 4,45 \cdot 10^{-7}$.
- 6.118. $N = (g_1/g_2) \exp(\hbar \omega/kT) = 3,53 \cdot 10^{16}$ (ω — частота головной линии серии Лаймана).
- 6.119. а) $M^2 = 2\hbar^2$, б) $M^2 = 12\hbar^2$.
- 6.120. а) 0, 1, 2, 3, 4; б) и в) 1, 2, 3, 4, 5; г) 1/2, 3/2, 5/2.
- 6.121. Первый, второй, третий, четвертый и шестой.
- 6.122. ${}^5F_1$, ${}^5F_2$, ${}^5F_3$, ${}^5F_4$, ${}^5F_5$.
- 6.123. а) и б) из одной, в) из двух, г) и д) из трех, е) из пяти.
- 6.124. 5, 6, 7, ...
- 6.125. Для P -состояния S может иметь значения: 1, 2, 3, ...; для D -состояния $S = 1$.
- 6.126. а) $\kappa = 1$, б) $\kappa = 3, 5, 7$, в) $\kappa = 2, 4, 6, 8$, г) $\kappa = 6, 8$.
- 6.127. а) ${}^1S_0$, б) ${}^1P_1$, ${}^3P_2$, ${}^3P_1$, ${}^3P_0$, в) ${}^1S_0$, ${}^3P_2$, ${}^3P_1$, ${}^3P_0$, ${}^1D_2$.
- 6.128. а) ${}^4F_{9/2}$, б) ${}^2P_{1/2}$.
- 6.129. а) ${}^3F_4$ и ${}^1G_4$; $M_J = \hbar \sqrt{20}$, б) ${}^1S_0$ и ${}^3P_0$; $M_J = 0$.
- 6.130. ${}^5F_1$.
- 6.131. $L = 2, 3, 4, 5$.
- 6.132. $M_J = \hbar \sqrt{3/4}$.
- 6.133. $M_J = (\hbar/2) \sqrt{35}$. ${}^2D_{5/2}$.
- 6.134. $M_J = (\hbar/2) \sqrt{63}$. ${}^2F_{7/2}$.
- 6.135. ${}^3P_2$.
- 6.136. ${}^2P_{3/2}$.
- 6.137. ${}^4S_{3/2}$, ${}^2P_{3/2}$, ${}^2P_{1/2}$, ${}^2D_{5/2}$, ${}^2D_{3/2}$. Основным является терм ${}^4S_{3/2}$.
- 6.138. Второй, четвертый, пятый и седьмой.
- 6.139. $\mu = (4/7) \mu_B \sqrt{63}$.
- 6.140. $\mu = (\mu_B/2) \sqrt{125}$.
- 6.141. ${}^4D_{1/2}$, ${}^5F_1$, ${}^7H_2$.
- 6.142. а) $\mu = \mu_B \sqrt{2}$, б) $\mu = 0$, в) $\mu = \mu_B 2 \sqrt{2}$, г), д) и е) $\mu = 0$.
- 6.143. а) Не расщепится, б) на три, в) на пять, г) на шесть.
- 6.144. а) На четыре, б) на три, в) на девять.
- 6.145. а) и б) расщепления не будет.
- 6.146. $a = \mu_B g \frac{dB}{dx} \cdot \frac{l_1}{mv^2} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) = 0,28$ мм.
- 6.147. а) $\Delta E = 0$, б) $\Delta E = 116$ мкэВ, в) $\Delta E = 232$ мкэВ, г) $\Delta E = 348$ мкэВ.
- 6.148. $\Delta \omega_0 = 0,879 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$.
- 6.149. а) и б) $\Delta \omega = 0,88 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, в) и г) $\Delta \omega = 0,59 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, д) $\Delta \omega = 0,44 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$.
- 6.150. $\Delta \omega = 55 \Delta \omega'$.
- 6.151. $N = 2\pi c/\lambda \Delta \omega \approx 5 \cdot 10^4$ штрихов ($\Delta \omega$ — интервал между зеемановскими компонентами; см. задачу 6.149).

- 6.152. а) $l=a$, б) $l=a\sqrt{3}$, в) $l=a\sqrt{5/4}$.
 6.153. $\alpha=46,6^\circ$.
 6.154. $\alpha=44,4^\circ$.
 6.155. $dN_\omega=(l/\pi v) d\omega$.
 6.156. $dN_\omega=(S/2\pi v^2) \omega d\omega$.
 6.157. $dN_\omega=(V/\pi^2 v^3) \omega^2 d\omega$.
 6.158. $\theta=\pi\hbar v n/k=360$ К (k —постоянная Больцмана).
 6.159. $\theta=(\hbar/k) 2v \sqrt{\pi n}=406$ К.
 6.160. $\theta=(\hbar/k) v \sqrt[3]{6\pi^2 n}=447$ К.
 6.161. а) $\langle\omega\rangle=(1/2) \omega_m=k\theta/2\hbar=2,4\cdot 10^{13}$ с $^{-1}$, б) $\langle\omega\rangle=(2/3) \omega_m=$
 $=2k\theta/3\hbar=2,7\cdot 10^{13}$ с $^{-1}$, в) $\langle\omega\rangle=(3/4) \omega_m=3k\theta/4\hbar=2,9\cdot 10^{13}$ с $^{-1}$.
 6.162. а) 1420 К, б) 208 К, в) 76 К.
 6.163. $\theta=\frac{\hbar}{k} \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 N_{Ap}}{M(1/v_\parallel^3+2/v_\perp^3)}}=410$ К.
 6.164. $U_0=(9/8) R\theta=860$ Дж (R —газовая постоянная).
 6.165. $C_2=(T_2/T_1)^3 C_1=0,022$ Дж/(моль·К).
 6.166. $C\approx 2,4\pi^4 R (T/\theta)^3=0,16$ Дж/(моль·К).
 6.167. $\varepsilon_m=0,026$ эВ, $\lambda=0,048$ нм.
 6.168. $\rho_m\sim 10^{-24}$ кг·м/с, $\lambda=0,66$ нм.
 6.169. $\rho_m\approx \pi\hbar \sqrt[3]{\rho N_A/M}=1,3\cdot 10^{-24}$ кг·м/с.
 6.170. Уровни энергии становятся в два раза гуще.
 6.171. Нет, не зависит.
 6.172. $dn\propto N$.
 6.173. $n\propto N$.
 6.174. $\langle n_m\rangle=\frac{1}{\exp(\theta/T)-1}=1,54$.
 6.175. а) $\varepsilon_m=0,018$ эВ, б) $\langle n_m\rangle=1,0$.
 6.176. $e/m=-Nn(\pi d)^2/qR=-1,8\cdot 10^{11}$ Кл/кг.
 6.177. $n=IB/eaU_{34}=1,1\cdot 10^{29}$ м $^{-3}$,
 $u_0=IU_{34}/bBU_{12}=3,2\cdot 10^{-3}$ м ^{2} /(В·с).
 6.178. Нет, не зависит.
 6.179. Плотность уровней dn/dE возрастет в η раз.
 6.180. $\Delta\varepsilon$ уменьшится в 3 раза.
 6.181. $\langle\Delta\varepsilon\rangle=1,0\cdot 10^{-22}$ эВ.
 6.182. $\Delta\varepsilon=(2\pi\hbar)^3/4\pi V(2m)^{3/2} \sqrt{E}$.
 6.183. а) $4,7\cdot 10^{-22}$ эВ, б) $1,5\cdot 10^{-22}$ эВ, в) $0,85\cdot 10^{-22}$ эВ,
 г) $0,66\cdot 10^{-22}$ эВ.
 6.184. а) $E_F(0)=(3\pi^2 N_{Ap}/M)^{2/3} \hbar^2/2m_e=7,04$ эВ, б) $\langle E\rangle=3E_F(0)/5=$
 $=4,23$ эВ, в) $T=2\langle E\rangle/3k=3,27\cdot 10^4$ К.
 6.185. $E_F\approx E_F(0) \left\{1-\frac{[\pi kT/E_F(0)]^2}{12}\right\}=E_F(0) (1-2,2\cdot 10^{-5})$.
 6.186. $\eta=1-(1/2)^{3/2}=0,65$.
 6.187. $\eta=1-(3/5)^{3/2}=0,54$.
 6.188. $P=0,5$.
 6.189. $\langle n\rangle=1$.
 6.190. В СИ: $\Phi_0=\pi\hbar/e=2,07\cdot 10^{-15}$ Вб, в гауссовой системе:
 $\Phi_0=\pi\hbar c/e=2,07\cdot 10^{-7}$ Мкс.
 6.191. $\Delta E=1,1$ эВ.

6.192. а) $\sigma_2/\sigma_1 = T_1/T_2 = 1/1,033$; уменьшится в 1,033 раза (на 3,3%), б) $\sigma_2/\sigma_1 = 1,21$; увеличится в 1,21 раз (на 21%).

6.193. $A = kT (T\Delta j / j\Delta T - 2) = 3,1$ эВ.

6.194. $E = 1,55$ кВ/м. Поле направлено от алюминиевой пластины к платиновой.

6.195. $E = e\phi + A_W - A_{Ni} = 9,7$ эВ.

6.196. $U_{\text{внутр}} = (\hbar^2/2me) (3\pi^2)^{2/3} (n_2^{2/3} - n_1^{2/3}) = 6,2$ В.

6.197. а) 6,93, б) 8,03, в) 8,45, г) 8,79, д) 8,76, е) 8,39, ж) 7,87, з) 7,59 МэВ.

6.198. а) $v_\alpha = \sqrt{2(E_2 + E_\alpha - E_1) M/m(M+m)} = 1,5 \cdot 10^7$ м/с, б) $v = \sqrt{2(E_2 + E_\alpha - E_1) m/M(M+m)} = 2,7 \cdot 10^5$ м/с. (E_1, E_2 и E_α — энергия связи исходного ядра, дочернего ядра и α -частицы, M — масса дочернего ядра, m — масса α -частицы).

6.199. а) $T = \ln 2/\lambda$, в) $\tau = 1/\lambda$, в) $T = \tau \ln 2$.

6.200. τ больше T в 1,44 раза.

6.201. $\eta = \exp(-3) = 0,050$.

6.202. $\eta = 0,875$.

6.203. $P = 1/2$.

6.204. $P = 1 - \exp(-t/\tau)$. а) $P = 0,63$, б) $P = 0,999955$, в) $P = 0,095$.

6.205. а) $N = (bT/\ln 2) [1 - \exp(-t \ln 2/T)]$, б) $N = 6,2 \cdot 10^{10}$, в) $N \approx bT/\ln 2 = 1,25 \cdot 10^{11}$.

6.206. а) $N_Y = N_{XO} [\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1)] [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]$, б) $t_m = \ln(\lambda_1/\lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_2)$.

6.207. $t = 3,5 \cdot 10^3$ лет.

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1.28. Воспользоваться выражением для косинуса угла между двумя векторами (см. ответ к задаче 1.9).

1.35. Использовать преобразование $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$.

1.37. Воспользоваться формулой $\exp(\pm x) \approx 1 \pm x$, справедливой для $x \ll 1$.

1.66. б) Чтобы решить получающееся для v дифференциальное уравнение, следует перейти к переменной x , связанной с v соотношением $x = v - mg/k$.

1.69. Воспользоваться формулой $A = F\Delta r = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$.

1.94. Принять во внимание, что в случае центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от силового центра и имеющей направление к этому центру, траектория частицы представляется собой: а) гиперболу, если полная энергия частицы $E > 0$, б) параболу, если $E = 0$, в) эллипс, если $E < 0$.

1.122. Написать выражения для момента импульса относительно двух произвольных точек O и O' , смещенных друг относительно друга на отрезок b , и убедиться в том, что эти выражения равны друг другу.

1.125. а) Воспользоваться тем, что модуль момента вектора равен произведению модуля вектора на плечо; б) использовать соотношение $\Delta M = \int N dt$.

1.129. Перейти в ц-систему, которая движется относительно л-системы вниз (на рисунке) со скоростью v . В ц-системе события разыгрываются в точности так, как в задаче 1.127. После рассмотрения процессов соударений вернуться в л-систему.

1.130. См. указание к задаче 1.129.

1.143. См. задачи 1.35 и 1.36.

1.146. При повороте направления от O к O' на угол $\Delta\varphi$ направление от O' к O поворачивается на тот же угол $\Delta\varphi$ (рис. 25). Отсюда следует, что $\omega = \omega'$.

1.212. Угол φ определяется соотношением $\sin \varphi = (\omega'/\omega) \sin(\alpha - \varphi)$. Положив в правой части $\varphi = 0$, получим в первом приближении $\varphi_1 = 0,286^\circ$ и т. д.

1.219. Воспользоваться результатом задачи 1.218.

1.220. Воспользоваться результатом задачи 1.219.

1.221. См. задачу 1.220.

1.224. Телесным углом Ω называется часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью. Телесный угол измеряется отношением площади S , вырезаемой им на сфере с центром в

вершине конической поверхности, к квадрату радиуса R сферы: $\Omega = S/R^2$.

1.227. Рассмотреть действие на материальную точку m бесконечно тонкого однородного шарового слоя. Разбить слой на противоположающиеся элементарные площадки dS_1 и dS_2 (рис. 26), отвечающие одинаковому телесному углу $d\Omega$. Величина i -й площадки $dS_i = r_i^2 d\Omega / \cos \alpha_i$. Из рисунка следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Поэтому $dS_i \propto r_i^2$. Отсюда легко заключить, что силы, с которыми участки слоя dS_1 и dS_2 действуют на m , уравновешивают друг друга.

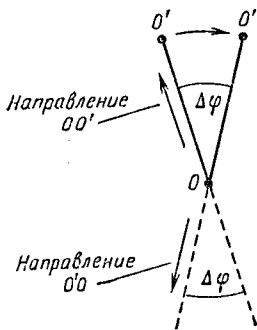


Рис. 25

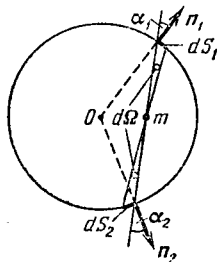


Рис. 26

1.230. Вычисления целесообразно вести в сферических координатах, представив элемент массы слоя в виде $dM = (M/4\pi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ и поместив частицу на полярной оси.

1.241. Воспользоваться результатом задачи 1.240.

1.244. Использовать законы сохранения энергии и момента импульса, а также результаты задач 1.242 и 1.243. Для упрощения выкладок целесообразно ввести обозначения: $x = R/(R+h)$, $a = gR/v_0^2 \cos^2 \alpha$.

1.246. Принять во внимание соотношения: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} v$, $dt = \frac{dr}{v}$.

1.291. б) Сила трения $F_{тр} = -r\dot{x}$, где $r = 2\beta m$. Следовательно, $A_{тр} = \int_0^T F_{тр} \dot{x} dt = -r \int_0^T \dot{x}^2 dt = -\frac{1}{2} r a^2 \omega^2 T = -\pi a (r a \omega) = -\pi a (2\beta \omega a m)$.

Из формулы $\tan \varphi = 2\beta \omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$ вытекает, что $\sin \varphi = 2\beta \omega / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} = 2\beta \omega (am/F_m)$. Отсюда $2\beta \omega a m = F_m \sin \varphi$. Подстановка этого значения в выражение для работы дает: $A_{тр} = -\pi a F_m \sin \varphi = -A_{вын}$.

1.337. Воспользоваться формулой преобразования энергии: $E' = (E - \beta p_x) / \sqrt{1 - \beta^2}$; β определить из соотношения $E = mc^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$; учесть, что $p_x = -p = -Ev/c^2 = -E\beta/c$ (скорость системы K' по отношению к системе K и модуль скорости протонов в системе K совпадают).

1.346. а) Предположив, что сила сопротивления определяется формулой Стокса, получим для предельной скорости шарика значение $v_0 = 2g(\rho - \rho_0)r^2/9\eta$. Этой скорости соответствует значение числа Рейнольдса $Re = 0,19$, меньшее чем 0,25. Отсюда следует, что сделанное предположение справедливо — силу сопротивления можно определять по формуле Стокса. в) При нахождении τ пренебречь e^{-at} по сравнению с единицей.

2.45. Воспользоваться уравнением первого начала термодинамики.

2.46. См. указание к задаче 2.45.

2.88. Перейти в распределении Максвелла к переменной $u = v/v_{\text{вер}}$ и произвести вычисления по формуле $\Delta n/n = f(u) \Delta u$, положив $u = 1$, $\Delta u = 0,02$.

2.123. Воспользоваться соотношением $d'Q = T dS$.

2.142. Использовать результаты задачи 2.140.

2.145. Воспользоваться уравнением первого начала термодинамики и соотношением $F = U - TS$.

2.177. Использовать ответ к задаче 2.176 и формулу $\ln(1 \pm x) \approx \pm x$ (для $x \ll 1$).

2.192. Ввиду малой плотности пара можно считать, что он ведет себя как идеальный газ.

2.201. $v = \langle v \rangle / \lambda (n/2)$ (n — число молекул в единице объема).

2.207. Выделим на верхнем диске кольцо радиуса r и ширины dr . На кольцо действует сила трения $dF = \eta (dv/dz) dS = \eta (r\omega/a) 2\pi r dr$. Момент этой силы $dN = r dF$. Полный момент силы трения, прило-

женный к верхнему диску $N = \int_0^R dN = 2\pi\eta (\omega/a) \int_0^R r^3 dr = \pi\eta\omega R^4/2a$.

2.208. См. указание к задаче 2.207.

3.17. Для нахождения E поместить в центр полусферы начало сферической системы координат, разбить поверхность полусферы на элементы площади $dS = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$.

3.31. Воспользоваться результатом задачи 3.30 и принципом суперпозиции полей.

3.32. Воспользоваться результатом задачи 3.31 и принципом суперпозиции полей.

3.35. См. указание к задаче 3.32.

3.36. Учсть, что «длина» диполя l много меньше r , пренебречь членами, содержащими степени отношения l/r выше первой. Вычислив φ , найти радиальную E_r и перпендикулярную к ней составляющую E_φ напряженности поля.

3.51. При разложении выражения $(1+x)^{-1/2}$, где $x = (a/r)^2 - (a/r) \cos \alpha$, учсть член, квадратичный по x , и лишь в окончательном результате отбросить слагаемые, содержащие отношение a/r в степенях, больших двух (α — угол между направлением от $+e$ к $-e$ и направлением от $+e$ на данную точку поля; по этому углу производится усреднение).

3.56. Воспользоваться теоремой Остроградского — Гаусса.

3.59. Ввести оси x и y , перпендикулярные к нити, и выразить E через орты этих осей. Учсть, что нормаль к сфере равна $e_r = r/r$.

3.62. Воспользоваться формулой $\nabla E = \rho/\epsilon_0$.

3.75. См. указание к задаче 1.227.

3.78. Воспользоваться векторным выражением для напряженности поля внутри объемно заряженного шара и принципом суперпозиции полей.

3.103. Из условия равновесия зарядов на проводнике вытекает,

что поле внутри металла, представляющее собой суперпозицию поля заряда q и поля индуцированных на стенке поверхностных зарядов σ , равно нулю. Следовательно, поле, создаваемое зарядами σ в металле, совпадает с полем, которое создавал бы заряд $-q$, помещенный в ту же точку, где находится заряд q . В силу симметрии поле, создаваемое зарядами σ вне металла, совпадает с полем, которое создал бы заряд $-q$, помещенный в точку внутри металла, являющуюся зеркальным изображением точки, в которой находится заряд q (рис. 27). Фиктивный заряд $-q$ называют изображением заряда q , а метод решения с использованием таких фиктивных зарядов — методом изображений.

3.126. Применить формулу $W = \frac{1}{2} \int_V \varphi(r') \rho(r') dV'$ и использо-

вать ответ задачи 3.14.

3.137. Поскольку цепь бесконечна, все звенья, начиная со второго, могут быть заменены сопротивлением, равным искомому сопротивлению R .

3.155. Существуют два способа решения.

1. Предположить, что заряженный до напряжения U и отключенный от источника тока конденсатор погружается в рассматриваемую среду. Написать для момента времени, следующего сразу за погружением, выражение для силы тока, текущего через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую одну из обкладок конденсатора. Затем применить к той же поверхности теорему Гаусса для E .

2. Разбить пространство между обкладками на очень малые (в пределе — бесконечно малые) объемы, ограниченные эквипотенциальными поверхностями и линиями E (совпадающими с линиями j). Написать выражения для сопротивления и емкости возникшей в результате такого разбиения параллельно-последовательной системы бесконечно большого числа сопротивлений (конденсаторов).

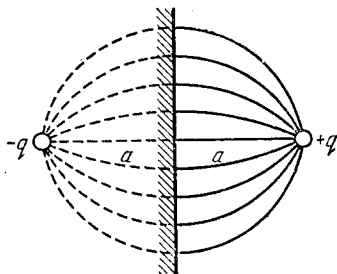


Рис. 27

3.156. Воспользоваться результатами задач 3.121 и 3.155.

3.157. Ток через поверхность радиуса r ($a < r < b$) равен $I(r) = 4\pi r^2 j(r) = 4\pi r^2 \sigma E(r)$, где $E(r) = (4\pi\epsilon\epsilon_0)^{-1} q(r)/r^2$ ($q(r)$ — сторонний заряд, заключенный внутри сферы радиуса r). Силу тока $I(r)$ можно представить в виде $-dq(r)/dt$. Заменяя $I(r)$ и $E(r)$ их значениями, придем к уравнению $\dot{q}(r) = -(\sigma/\epsilon\epsilon_0) q(r)$. Его решение имеет вид $q(r) = q_0 \exp(-\sigma t/\epsilon\epsilon_0)$. Это выражение не зависит от r . Отсюда вытекает, что избыточный заряд имеется только на внутренней обкладке. Таким образом, заряд на внутренней обкладке изменяется по закону $q = q_0 \exp(-\sigma t/\epsilon\epsilon_0)$.

Продифференцировав $q(r)$ по t , получим выражение для силы тока

$$I(r) = -\dot{q}(r) = (\sigma q_0/\epsilon\epsilon_0) \exp(-\sigma t/\epsilon\epsilon_0),$$

которое также не зависит от r .

Выделившееся количество теплоты находим по формуле

$$Q = \int_0^{\infty} R I^2 dt,$$

где в качестве R нужно взять значение, найденное в задаче 3.141 (заменив ρ на σ).

3.179. Воспользоваться ответом к задаче 3.178 и принципом суперпозиции полей.

3.184. Считать ток распределенным равномерно в радиальном направлении.

3.193. Рассмотреть циркуляцию вектора $\mathbf{H}$ по произвольному контуру, расположенному на сферической поверхности радиуса r ($a < r < b$); учесть токи смещения.

3.203. Из теоремы о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ получается следующее уравнение, связывающее H и B в железе:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{b} - \frac{\mu_0 (\pi d - b)}{b} H = a - kH.$$

Кроме того, между B и H в железе имеется соотношение $B = f(H)$, изображенное графически на рис. 3.37. Искомые значения H и B удовлетворяют одновременно обоим уравнениям. Решив эту систему уравнений графически (т. е. найдя координаты точки пересечения прямой $B = a - kH$ с кривой $B = f(H)$), получим $H = 0,33$ кА/м, $B = 1,3$ Тл. Дальнейшие выкладки предоставляем читателю.

3.213. Для нахождения L_1 вычислить энергию связанного с кабелем магнитного поля.

3.226. Воспользоваться выражением для энергии тока.

3.227. Формула $\omega = \frac{1}{2} H B$ для плотности магнитной энергии годится только в случае линейной связи между H и B . В противном

случае плотность энергии находится по формуле $\omega = \int_0^B H dB$. Значе-

ние этого интеграла можно определить путем подсчета числа клеточек под кривой $H = f(B)$ на рис. 3.37. Напряженность H в сердечнике находится по теореме о циркуляции.

3.247. Воспользоваться векторной диаграммой. Приняв за исходную ось U , построить векторы токов, текущих через ветвь C и ветвь L, R . Сумма этих векторов даст вектор тока I_1 .

3.256. Приняв за исходную ось напряжения U_k , приложенного к контуру, построить совместную векторную диаграмму для токов I_C, I_L, I_R и напряжений U_k, U_R, U . Рассмотреть треугольник, образованный токами, а также треугольник, образованный напряжениями.

4.5. Разность фаз в точках, отстоящих друг от друга на расстояние Δx , определяется выражением $\delta\varphi = 2\pi\Delta x/\lambda$. При вычислении $\ln \eta$ воспользоваться тем, что η мало отличается от единицы.

4.25. При вычислении интеграла воспользоваться тем, что среднее за период значение квадрата синуса равно $1/2$.

4.28. См. формулу для v в условии задачи 4.26.

4.31. См. задачу 4.30.

4.33. См. формулу для v в условии задачи 4.26.

4.40. Уравнение вида $\lg r_0 = a - br_0$ решить графически, построив на миллиметровке графики функций $\lg r_0$ и $a - br_0$. Целесообразный масштаб: 50 мм для единицы по оси ординат, 50 мм для 1000 м по оси абсцисс.

Можно решить это уравнение и методом последовательных приближений. Представим уравнение в виде $r_0 = (a - \lg r_0)/b$. Из характера задачи ясно, что $r_0 > 200$ м. Возьмем в качестве нулевого приближения значение $r_0 = 200$ м. Подставим его логарифм в правую часть уравнения. В результате получим значение $r_0 = r_0^{(1)}$. Подставим его логарифм в правую часть уравнения — получим значение $r_0^{(2)}$ и т. д. Уже $r_0^{(4)}$ отличается от точного значения примерно на 1 %, а $r_0^{(5)}$ — на 0,3 %.

4.55. Воспользоваться тем, что t на много порядков больше периода волны T .

4.56. Учесть магнитное поле, создаваемое током смещения.

4.57. Учесть электрическое поле, создаваемое изменяющимся магнитным полем.

4.61. Плотность потока энергии, излучаемой диполем в направлении, образующем с его осью угол ϑ , пропорциональна $\sin^2 \vartheta$.

5.24. Воспользоваться графиком, изображенным на рис. 5.9.

5.34. Колебание светового вектора в результирующей волне имеет вид $E = A_1 \cos \omega t + A_2 \cos (\omega t + \alpha)$. Результирующая интенсивность

$$I = \langle E^2 \rangle = \langle [A_1^2 \cos^2 \omega t + A_2^2 \cos^2 (\omega t + \alpha) + 2A_1 A_2 \cos \omega t \cos (\omega t + \alpha)] \rangle = A_1^2/2 + A_2^2/2 = I_1 + I_2 \quad (A_1 A_2 = 0).$$

5.47. б) N равно максимальному нечетному целому числу, которое не превосходит значение выражения $4rb\varphi^2/\lambda (r+b)$.

5.48. а) См. ответ к задаче 5.7. б) N равно максимальному нечетному целому числу, которое не превосходит значение выражения $4ab(n-1)^2 \vartheta^2/\lambda (a+b)$.

5.49. а) См. задачу 5.39. б) N равно максимальному нечетному целому числу, которое не превосходит значение выражения $bh^2\Phi^2/\lambda$.

5.51. Учесть, что в случае лазерного пучка волны, отраженные от обеих поверхностей пластинки, когерентны и будут интерферировать.

5.72. Комплексная амплитуда $\hat{A}$ результирующего колебания оказывается в данном случае вещественной и равной сумме членов геометрической прогрессии $\sum_{m=1}^N A_1 (-\rho)^{m-1}$.

5.86. Воспользоваться кривой Корню (рис. 5.22) и приведенной в условии задачи 5.83 формулой, связывающей параметр v с координатой x .

5.88. Воспользоваться кривой Корню (рис. 5.22).

5.102. Интенсивность, создаваемая решеткой под углом φ , определяется формулой

$$I_{\text{реш}} = I_0 \frac{\sin^2 (\pi b \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \sin \varphi / \lambda)^2} \frac{\sin^2 (N \pi d \sin \varphi / \lambda)}{\sin^2 (\pi d \sin \varphi / \lambda)},$$

где I_0 — интенсивность, создаваемая одной щелью под углом $\varphi = 0$, N — число щелей. Для m -го максимума $\sin \varphi / \lambda = m/d$. Интенсивность I_0 пропорциональна квадрату ширины щели, т. е. пропорциональна x^2 . С учетом этого получаем, что $I_{\text{реш}}$ пропорциональна $\sin^2 (m\pi x)$. Максимум этой величины достигается при значениях x , удовлетворяющих условию $m\pi x = (k + 1/2)\pi$; нулевое значение — при условии, что $m\pi x = k\pi$.

5.122. На одну гранецентрированную ячейку приходится четыре атома. Расстояние между атомными плоскостями равно $1/2$ ребра ячейки.

5.139. Выразить P и P_1 через долю α_1 интенсивности, пропускаемой одним поляризатором в его плоскости, и долю α_2 интенсивности, пропускаемой в перпендикулярной плоскости. Затем исключить α_1 и α_2 из получившихся уравнений.

5.141. См. указание к задаче 5.139.

5.147. См. Приложение 9.

5.153. См. задачу 5.24.

5.154. Вычислить поляризованность плазмы, P , затем — диэлектрическую восприимчивость κ и, наконец, проницаемость ϵ .

6.104. Уровни располагаются очень густо. Поэтому при вычислении dn/dE можно считать, что переменная n в выражении для E_n изменяется непрерывно.

6.105. Представив пси-функцию в виде $\psi(x, y) = A \sin k_1 x \cdot \sin k_2 y$, найти значения k_1 и k_2 , удовлетворяющие граничным условиям. Для нахождения значений энергии подставить удовлетворяющее граничным условиям выражение для $\psi(x, y)$ в уравнение Шрёдингера.

6.108. Воспользоваться уравнением Шрёдингера в сферических координатах и учесть, что $\partial\psi/\partial\theta$ и $\partial\psi/\partial\phi$ равны нулю.

6.135. Воспользоваться правилами Хунда.

6.136. Составить таблицу, аналогичную табл. 37.2 в книге И. В. Савельева «Курс общей физики», т. 3, § 37 (М. — Наука, 1987). Применить правило Хунда.

6.137. См. указание к задаче 6.136.

6.145. В случае б) $g = 0$.

6.169. Определить межатомное расстояние d и положить $\lambda_{\min} \approx 2d$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Основные физические постоянные

Атомная единица массы	$1 \text{ а. е. м.} = \begin{cases} 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 931,42 \text{ МэВ} \end{cases}$
Боровский радиус	$r_0 = 0,52917706 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31441 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$
Магнетон Бора	$\mu_B = \begin{cases} 0,9274078 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл} \\ 0,9274078 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс} \end{cases}$
Масса нейтрона	$m_n = \begin{cases} 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 939,57 \text{ МэВ} \end{cases}$
Масса протона	$m_p = \begin{cases} 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 938,28 \text{ МэВ} \end{cases}$
Масса электрона	$m_e = \begin{cases} 0,9109534 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \\ 0,51100 \text{ МэВ} \end{cases}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = \begin{cases} 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \\ 0,8617082 \cdot 10^{-4} \text{ эВ/К} \end{cases}$
Постоянная закона смещения Вина	$b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Планка	$\hbar = \begin{cases} 1,0545887 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \\ 0,6582176 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с} \end{cases}$
Постоянная Ридберга	$R = 2,0670687 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$
Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Скорость света в вакууме	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Стандартное атмосферное давление	$p = 1013,25 \text{ гПа}$
Стандартное ускорение свободного падения	$g = 9,80665 \text{ м/с}^2$
Элементарный заряд	$e = \begin{cases} 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ} \end{cases}$
Электрическая постоянная	$1/4\pi\epsilon_0 = 8,9875 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$
Магнитная постоянная	$\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ Н/А}^2$

2. Единицы и размерности физических величин в СИ

Определения единиц физических величин приведены для основных (выделены полужирным шрифтом) и дополнительных единиц СИ. Внесистемные единицы, допустимые к применению наравне с единицами СИ, отмечены кружком

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Длина	L	метр	м	Основная единица Метр представляет собой расстояние, проходимое в вакууме плоской электромагнитной волной за $1/299\,792\,458$ долю секунды 1 а. е. = $1,49598 \cdot 10^{11}$ м 1 св. год = $9,4605 \cdot 10^{15}$ м 1 пк = $3,0857 \cdot 10^{16}$ м
		°астрономическая единица длины	а. е.	
		°световой год	св. год	
		°парсек	пк	
Площадь	L ²	квадратный метр °гектар	м ² га	1 га = 10 ⁴ м ²
Объем	L ³	кубический метр °литр	м ³ л	1 л = 10 ⁻³ м ³
Плоский угол		радиан	рад	Дополнительная единица Радиан равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу

		градус минута секунда	° "		$1^{\circ} = (\pi/180)$ рад $1' = (\pi/10\,800)$ рад $1'' = (\pi/648\,000)$ рад
Телесный угол	—	стерадиан	ср		<i>Дополнительная единица</i> Стерadian равен телесному углу с вершинной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы
Время	T	секунда минута час сутки	с мин ч сут		<i>Основная единица</i> Секунда равна 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 $1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$ $1 \text{ ч} = 3600 \text{ с}$ $1 \text{ сут} = 86\,400 \text{ с}$
Скорость	LT-1	метр в секунду	м/с		
Ускорение	LT-2	метр на секунду в квадрате	м/с²		
Угловая скорость	T-1	радиан в секунду	рад/с		$1 \text{ рад/с} = 1 \text{ с}^{-1}$
Угловое ускорение	T-2	радиан на секунду в квадрате	рад/с²		$1 \text{ рад/с}^2 = 1 \text{ с}^{-2}$

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Частота периодического процесса	T^{-1}	герц	Гц	$1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$
Частота вращения	T^{-1}	секунда в минус первой степени	с^{-1}	
Масса	M	килограмм %тонна %атомная единица массы	кг т а. е. м.	Основная единица Килограмм равен массе международного прототипа килограмма $1 \text{ т} = 10^3 \text{ кг}$ $1 \text{ а. е. м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	кг/м^3	
Удельный объем	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	$\text{м}^3/\text{кг}$	
Массовый расход	MT^{-1}	килограмм в секунду	кг/с	
Объемный расход	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	$\text{м}^3/\text{с}$	

Сила	$LM T^{-2}$	ньютон	Н	$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Давление	$L^{-1} M T^{-2}$	паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Жесткость	$M T^{-2}$	ньютон на метр	Н/м	$1 \text{ Н/м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Напряжение (механическое)	$L^{-1} M T^{-2}$	паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Динамическая вязкость	$L^{-1} M T^{-1}$	паскаль-секунда	Па·с	$1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 1 \text{ м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$
Кинематическая вязкость	$L^2 T^{-1}$	квадратный метр в секунду	$\text{м}^2/\text{с}$	
Поверхностное натяжение	$M T^{-2}$	ньютон на метр	Н/м	$1 \text{ Н/м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Импульс	$LM T^{-1}$	килограмм-метр в секунду	кг·м/с	
Момент силы	$L^2 M T^{-2}$	ньютон-метр	Н·м	$1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Момент импульса	$L^2 M T^{-1}$	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг·м ² /с	
Момент инерции	$L^2 M$	килограмм-метр в квадрате	кг·м ²	

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Работа, энергия	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Мощность, поток энергии	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Температура (термодинамическая)	Θ	кельвин градус Цельсия	К °C	Основная единица Кельвин равен $1/273,16$ части термодинамической температуры тройной точки воды $t/^{\circ}\text{C} = T/\text{K} - 273,15$
Температурный коэффициент	Θ^{-1}	кельвин в минус первой степени	K^{-1}	
Температурный градиент	$L^{-1}\Theta$	кельвин на метр	К/м	
Количество вещества	N	моль	моль	Основная единица Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг При применении моля структурные элементы должны быть специфицированы

					и могут быть атомами, молекулами, ионами, электронами и другими частицами или специфизированными группами частиц
Молярная масса	MN^{-1}	килограмм на моль	кг/моль		
Молярный объем	L^3N^{-1}	кубический метр на моль	м ³ /моль		
Количество теплоты (теплота)	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж		1 Дж = 1 Н·м = 1 м ² ·кг·с ⁻²
Удельная теплота	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг		1 Дж/кг = 1 м ² ·с ⁻²
Молярная теплота	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль		1 Дж/моль = 1 м ² ·кг·с ⁻² моль ⁻¹
Теплоемкость, энтропия	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К		1 Дж/К = 1 м ² ·кг·с ⁻² ·К ⁻¹
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)		1 Дж/(кг·К) = 1 м ² ·с ⁻² ·К ⁻¹
Молярная теплоемкость, молярная энтропия	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	Дж/(моль·К)		1 Дж/(моль·К) = 1 м ² ·кг·с ⁻² ·К ⁻¹ ·моль ⁻¹
Тепловой поток	L^2MT^{-3}	ватт	Вт		1 Вт = 1 Дж/с = 1 м ² ·кг·с ⁻³

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Плотность теплового потока	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$	$1 \text{ Вт}/м^2 = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Теплопроводность	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	$Вт/(м \cdot K)$	$1 \text{ Вт}/(м \cdot K) = 1 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot K^{-1}$
Коэффициент теплопередачи	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на квадратный метр-кельвин	$Вт/(м^2 \cdot K)$	$1 \text{ Вт}/(м^2 \cdot K) = 1 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot K^{-1}$
Концентрация (плотность числа частиц)	L^{-3}	метр в минус третьей степени	$м^{-3}$	
Молярная концентрация	$L^{-3}N$	моль на кубический метр	$моль/м^3$	
Коэффициент диффузии	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	$м^2/с$	
Сила электрического тока	I	ампер	A	Основная единица Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, рас-

					положенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	A/m^2		
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл		1 Кл = 1 с·А
Поверхностная плотность электрического заряда	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м ²		1 Кл/м ² = 1 м ⁻² с·А
Пространственная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	Кл/м ³		1 Кл/м ³ = 1 м ⁻³ с·А
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В		1 В = 1 Вт/А = 1 м ² ·кг·с ⁻³ ·А ⁻¹
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м		1 В/м = 1 Вт/(А·м) = 1 м·кг·с ⁻³ ·А ⁻¹

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А} = 1 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$
Удельное электрическое сопротивление	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом · метр	Ом · м	$1 \text{ Ом} \cdot \text{м} = 1 \text{ м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	$1 \text{ См} = 1 \text{ Ом}^{-1} = 1 \text{ м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Удельная электрическая проводимость	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	сименс на метр	См/м	$1 \text{ См/м} = 1 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = 1 \text{ м}^{-3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В} = 1 \text{ м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$
Электрическая постоянная, абсолютная диэлектрическая проницаемость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	Ф/м	$1 \text{ Ф/м} = 1 \text{ м}^{-3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$
Поток электрического смещения	Тл	кулон	Кл	$1 \text{ Кл} = 1 \text{ с} \cdot \text{А}$

Электрическое смещение	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	$Kл/м^2$	$1 Kл/м^2 = 1 м^{-2} \cdot с \cdot А$
Магнитный поток (поток магнитной индукции)	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	$1 Вб = 1 В \cdot с = 1 Тл \cdot м^2 = 1 м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Магнитная индукция (плотность магнитного потока)	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	$1 Тл = 1 В \cdot с/м^2 = 1 Вб/м^2 = 1 кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	$1 Гн = 1 м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-2}$
Магнитная постоянная, абсолютная магнитная проницаемость	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м	$1 Гн/м = 1 м \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-2}$
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	
Энергия излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	$1 Дж = 1 м^2 \cdot кг \cdot с^{-2}$
Мощность излучения (поток излучения)	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	$1 Вт = 1 Дж/с = 1 м^2 \cdot кг \cdot с^{-3}$
Интенсивность излучения (плотность потока излучения)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м ²	$1 Вт/м^2 = 1 кг \cdot с^{-3}$

Величина		Единица			связь с основными единицами СИ
наименование	размерность	наименование	обозначение		
Поток частиц	T^{-1}	секунда в минус первой степени	c^{-1}		
Плотность потока частиц	$L^{-2}T^{-1}$	секунда в минус первой степени на метр в минус второй степени	$c^{-1} \cdot m^{-2}$		
Сила света	J	кандела	кд	Основная единица Кандела равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср	
Световой поток	J	люмен	лм	1 лм = 1 кд·ср	
Световая энергия	TJ	люмен-секунда	лм·с	1 лм·с = 1 с·кд·ср	

Светимость	$L^{-2}J$	люмен на квадратный метр	лм/м ²	$1 \text{ лм/м}^2 = 1 \text{ м}^{-2} \cdot \text{кд} \cdot \text{ср}$
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	$1 \text{ лк} = 1 \text{ лм/м}^2 = 1 \text{ м}^{-2} \cdot \text{кд} \cdot \text{ср}$
Яркость	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	кд/м ²	
Оптическая сила	L^{-1}	°диоптрия	дптр	$1 \text{ дптр} = 1 \text{ м}^{-1}$
Энергетическая сила света (сила излучения)	L^2MT^{-3}	ватт на стерадиан	Вт/ср	$1 \text{ Вт/ср} = 1 \text{ м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{ср}^{-1}$
Энергетическая светимость (излучательность)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м ²	$1 \text{ Вт/м}^2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Энергетическая освещенность (облученность)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м ²	$1 \text{ Вт/м}^2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Энергетическая яркость (лучистость)	MT^{-3}	ватт на стерадиан-квадратный метр	Вт/(ср·м ²)	$1 \text{ Вт/(ср} \cdot \text{м}^2) = 1 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{ср}^{-1}$

3. Астрономические величины

Величина	Ее значение
Масса (в кг)	
Солнца	$1,97 \cdot 10^{30}$
Земли	$5,96 \cdot 10^{24}$
Луны	$7,35 \cdot 10^{22}$
Средний радиус (в м)	
Солнца	$6,96 \cdot 10^8$
Земли	$6,37 \cdot 10^6$
Луны	$1,74 \cdot 10^3$
Среднее расстояние (в м)	
от Солнца до Земли	$1,496 \cdot 10^{11}$
от Солнца до Юпитера	$7,778 \cdot 10^{14}$
от Земли до Луны	$3,844 \cdot 10^3$

4. Плотность веществ

Вещество	$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$	Вещество	$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$
Алюминий	2,70	Медь	8,93
Бериллий	1,84	Ртуть	13,6
Калий	0,87	Соль NaCl	2,17

5. Постоянные газов (при нормальных условиях)

Газ	Относительная молекулярная масса	Диаметр молекулы d , нм	Коэффициент самодиффузии D , $10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$	Вязкость η , мкПа·с	Теплопроводность κ , Вт/(м·К)
Ar	40	0,35	0,16	21,0	0,017
He	4	0,20	1,62	20,7	0,143
H ₂	2	0,27	1,28	8,6	0,168
N ₂	28	0,37	0,17	16,7	0,024
O ₂	32	0,35	0,18	19,9	0,025
Воздух	29	—	—	17,2	0,024

6. Постоянные Ван-дер-Ваальса

Газ	$a, \text{Па} \cdot \text{м}^3 / \text{моль}^2$	$b, 10^{-5} \text{м}^3 / \text{моль}$
Азот (N_2)	0,135	3,9
Водород (H_2)	0,024	2,7
Кислород (O_2)	0,136	3,2

7. Постоянные воды и льда

Величина	Ее значение
Удельная теплоемкость (в $\text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$)	
воды	4,18
льда	2,10
Удельная теплота (в $\text{кДж}/\text{кг}$)	
плавления льда	333
парообразования воды	2250

8. Поверхностное натяжение

Вещество	$\alpha, \text{Н/м}$	Вещество	$\alpha, \text{Н/м}$
Вода	0,073	Ртуть	0,470

9. Интервалы длин волн, соответствующие различным цветам спектра

Цвет спектра	Интервал длин волн, нм	Цвет спектра	Интервал длин волн, нм
Фиолетовый	400—450	Желтый	560—590
Синий	450—480	Оранжевый	590—620
Голубой	480—500	Красный	620—760
Зеленый	500—560		

10. Работа выхода электрона из металла

Металл	A , эВ	Металл	A , эВ
Алюминий	3,74	Никель	4,84
Натрий	2,27	Цинк	3,74

11. Атомный номер и масса некоторых элементарных частиц и изотопов

Z	Название	Символ	m , а. е. м
—	Электрон	e	0,0005485
—	Нейтрон	n	1,0086650
1	Протон	p	1,0072765
1	Водород	${}^1\text{H}$	1,007825
5	Бор	${}^{11}\text{B}$	11,0093
10	Неон	${}^{20}\text{Ne}$	19,99244
14	Кремний	${}^{28}\text{Si}$	27,9769
26	Железо	${}^{56}\text{Fe}$	55,9349
30	Цинк	${}^{68}\text{Zn}$	67,9248
56	Барий	${}^{137}\text{Ba}$	136,9058
82	Свинец	${}^{207}\text{Pb}$	206,9759
92	Уран	${}^{235}\text{U}$	235,04393

12. Формулы для приближенных вычислений

Неравенства указывают значения x , при которых расчет по приближенным формулам приводит к ошибкам, не превышающим 0,1 %.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \pm x} &\approx 1 \mp x, & x < 0,031 \\ \sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{1}{2}x, & x < 0,093 \\ \sqrt{1-x} &\approx 1 - \frac{1}{2}x, & x < 0,085 \\ e^{\pm x} &\approx 1 \pm x, & x < 0,045 \\ \ln(1 \pm x) &\approx \pm x, & x < 0,045 \\ \sin x &\approx x & x < 0,077 \text{ рад } (4,4^\circ) \\ \cos x &\approx 1 - \frac{1}{2}x^2 & x < 0,387 \text{ рад } (22,2^\circ) \end{aligned}$$

13. Вычисление сумм при помощи интегралов

Пусть имеется сумма вида

$$\sum_{n=0}^N f(a+nh) = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b),$$

где $f(x)$ — некоторая, не слишком быстро изменяющаяся функция; h — малая величина; $b = a + Nh$.

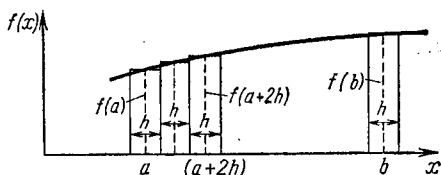


Рис. 28

Легко сообразить, что искомая сумма равна площади S изображенных на рис. 28 столбиков, деленной на h . Заменяв площадь столбиков площадью, ограниченной кривой $f(x)$, можно написать, что

$$S \approx \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} hf(a) + \frac{1}{2} hf(b).$$

Отсюда следует приближенное соотношение

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b) \approx \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b).$$

Отметим, что при уменьшении величины h точность формулы возрастает.

14. Некоторые математические формулы

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Площадь эллипса $S = \pi ab$, где a и b — полуоси эллипса.

$$\begin{aligned} a[bc] &= b[ca] = c[ab], \\ [a[bc]] &= b(ac) - c(ab). \end{aligned}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}),$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} x dx = \frac{1}{\beta^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} x dx = \frac{1}{2\beta},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} x^2 dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} x^3 dx = \frac{1}{2\beta^2}.$$

15. Некоторые числа

$e = 2,718282$ $\lg e = 0,434294$ $\ln 10 = 2,302585$ $\lg x = 0,4343 \ln x$	$\ln x = 2,3026 \lg x$ $\pi = 3,1415926$ $\pi^2 = 9,869624$ $\sqrt{\pi} = 1,7724538$
---	---

16. Десятичные приставки к названиям единиц

Г — гига (10^9) М — мега (10^6) к — кило (10^3)	г — гекто (10^2) с — санти (10^{-2}) м — милли (10^{-3})	мк — микро (10^{-6}) н — нано (10^{-9}) п — пико (10^{-12})
---	--	---