РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

•

Под редакцией
Н. М. РОГАЧЕВА

Издание второе,
исправленное

*Допущено Научно-методическим советом
по физике Министерства образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по техническим и технологическим
направлениям и специальностям*

ЛАНЬ®

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •
2008

ББК 22.3
Р 47
Р 47 Решения задач по курсу общей физики: Учебное пособие. 2-е изд., испр. / Под ред. Н. М. Рогачева. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 304 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0855-9

В учебном пособии приведены решения более трехсот задач, используемых при изучении общей физики. К каждой теме дан перечень основных формул, применяемых при решении.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям и специальностям технических наук (550000), техники и технологии (650000).

ББК 22.3

Коллектив авторов:

Николай Михайлович РОГАЧЕВ, Галина Юрьевна БАЛАНДИНА, Игорь Петрович ЗАВЕРШИНСКИЙ, Зинаида Ахатовна КУЛИКОВА, Ирина Леонидовна СТУКАЛИНА

Рецензенты:

зав. каф. общей физики и методики обучения физике Самар. гос. пед. ун-та, д-р пед. наук, проф. *В. А. БЕТЕВ*; зав. каф. общей и теоретической физики Самар. гос. ун-та, канд. физ.-мат. наук, проф. *А. А. БИРЮКОВ*

Генеральный директор *А. Л. Кноп*. Директор издательства *О. В. Смирнова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07 от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ». lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72

Сдано в набор 15.01.08. Подписано в печать 26.05.08.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×84 1/16.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,67. Тираж 2000 экз.

Заказ № 2788.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА» 610033, г. Киров, ул. Московская, 122

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие разработано в соответствии с действующей программой курса общей физики для студентов, обучающихся по направлениям и специальностям технических наук (550000), техники и технологии (650000).

В изучении физики решение задач имеет исключительно важное значение, так как способствует усвоению теоретического материала и позволяет приобрести навыки практического применения основных законов и формул. Умение решать задачи является одним из основных критериев оценки глубины изучения материала.

Основная цель пособия – оказать студентам методическую помощь в выполнении самостоятельных и контрольных работ: ознакомить их с некоторыми методами решения физических задач, привить навыки и культуру решения, обратить внимание на наиболее распространенные ошибки.

В пособии рассмотрены типовые задачи, подобные тем, которые наиболее часто используются при изучении общей физики в техническом вузе.

Решения задач выполнены по единой схеме: составлены необходимые уравнения, проведено решение их в общем виде, подставлены числовые данные, выписан ответ.

Условия некоторых задач взяты из задачников [1,2].

Разделы пособия «Физические основы механики», «Основы молекулярной физики и термодинамики» написаны Н. М. Рогачевым и И. П. Завершинским, раздел «Электричество и магнетизм» — З. А. Куликовой и И. Л. Стукалиной, раздел «Оптика. Атомная физика» — Г. Ю. Баландиной. Общее редактирование пособия выполнено Н. М. Рогачевым.

Таблицы физических величин и другой справочный материал содержатся в «Приложении» в конце книги.

Авторы весьма признательны профессорам А. А. Бирюкову и В. А. Бетеву, взявшим на себя труд рецензирования рукописи. Особую благодарность авторы выражают профессору СПбГПУ, д-ру физ.-мат. наук Н. М. Кожевникову и доценту СПбГПУ, канд. физ.-мат. наук А. Я. Лукину за полезные замечания и советы, которые способствовали улучшению книги.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

При решении задач рекомендуется определенная последовательность:

1. Изучите по учебникам [3–6] теоретический материал соответствующего раздела курса, запомните законы и основные формулы, а также единицы измерения величин, входящих в них.

2. Несколько раз внимательно прочитайте условие задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.

Система СИ состоит из основных, дополнительных и производных единиц. Основными единицами являются: единица длины – метр (м); массы – килограмм (кг); времени – секунда (с); силы электрического тока – ампер (А); термодинамической температуры – кельвин (К); количества вещества – моль (моль); силы света – кандела (кд).

Дополнительные единицы: единица плоского угла – радиан (рад); единица телесного угла – стерадиан (ср).

Производные единицы устанавливаются через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими физическими величинами. Производными единицами являются: единица скорости ($v = \frac{S}{t}$) – метр в секунду ($\frac{\text{м}}{\text{с}}$); ускорения ($a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$) – метр на секунду в квадрате ($\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$); силы ($F = ma$) – ньютон ($\text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$); работы ($A = FS$) – джоуль ($\text{Дж} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$); количества электричества ($q = It$) – кулон ($\text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}$); напряжения ($U = \frac{A}{q}$) – вольт ($\text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$) и т. д.

В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц (см. Приложение).

3. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие абстракции, как материальная точка, абсолютно твердое тело, точечный заряд, луч света и т. д.

4. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж, поясняющий содержание и решение.

5. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, то есть составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.

6. Найдите решение полученной системы уравнений в виде алгоритма, отвечающего на вопрос задачи.

7. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей. Размерности правой и левой частей уравнения должны совпадать. Хотя равенство размерностей не является достаточным подтверждением правильности решения задачи, рекомендуемый метод проверки очень полезен.

8. Подставьте в полученную формулу численные значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.

9. Получив численный ответ, оцените его правдоподобность.

Заметим, что при решении задач возможны отступления от вышеизложенной схемы.

В данном пособии не приводится проверка размерностей в некоторых задачах, в которых она «очевидна». Для уменьшения объема книги подстановка численных значений также не показана.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. Кинематика материальной точки

Основные формулы

● Положение материальной точки в пространстве определяется радиусом-вектором:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \qquad (1.1)$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – координаты точки; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы направлений (орты); t – время.

● Средняя скорость движения

$$<\vec{\mathrm{v}}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \qquad (1.2)$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение материальной точки за промежуток времени Δt.

● Средняя путевая скорость движения

$$<\mathrm{v}> = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \qquad (1.3)$$

где ΔS – путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

● Мгновенная скорость

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \mathrm{v}_x\vec{i} + \mathrm{v}_y\vec{j} + \mathrm{v}_z\vec{k}, \qquad (1.4)$$

где $\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt}$, $\mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt}$, $\mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции вектора скорости $\vec{\mathrm{v}}$ на оси координат.

● Модуль скорости

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}. \qquad (1.5)$$

● Кинематическое уравнение равномерного движения точки вдоль оси x ($\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{const}$, $\vec{a} = 0$)

$$x = x_0 + \mathrm{v}t, \qquad (1.6)$$

где x_0 – начальная координата точки; t – время движения.

● Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{1.7}$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ – проекции ускорения $\vec{a}$ на оси координат.

● Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.8}$$

● При криволинейном движении полное ускорение $\vec{a}$ равно сумме нормального (центростремительного) $\vec{a}_n$ и касательного (тангенциального) $\vec{a}_\tau$ ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

где $a_n = \frac{v^2}{R}$, $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – проекции ускорений.

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \tag{1.9}$$

где R – радиус кривизны траектории в точке, где определяется ускорение.

● Кинематическое уравнение равнопеременного движения ($\vec{a} = \text{const}$) вдоль оси x

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{1.10}$$

● Скорость точки при равнопеременном движении

$$v = v_0 + at, \tag{1.11}$$

где v_0 – начальная скорость движения в момент времени $t_0 = 0$.

При равноускоренном движении ускорение a берется со знаком плюс, при равнозамедленном – со знаком минус.

● Для тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью v_0 (без учета сопротивления воздуха):

время полета

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \tag{1.12}$$

дальность полета

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \tag{1.13}$$

максимальная высота

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{1.14}$$

● При вращательном движении положение твердого тела определяется углом поворота (угловым перемещением) $d\varphi$ при указанном положении оси вращения.

Угловая скорость тела

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.15}$$

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.16}$$

Кинематическое уравнение равномерного вращения ($\vec{\omega} = \text{const}$, $\vec{\varepsilon} = 0$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \tag{1.17}$$

где φ_0 – угол поворота в момент времени $t_0 = 0$.

При равномерном вращении $\omega = 2\pi n$, где n – частота вращения.

●Кинематическое уравнение равнопеременного вращательного движения ($\vec{\varepsilon} = \text{const}$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1.18}$$

угловая скорость тела при равнопеременном вращении

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{1.19}$$

где ω_0 – начальная угловая скорость при $t_0 = 0$.

Если $\omega_o = 0$, то $\omega = \varepsilon t$, а $\varphi = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$.

При равноускоренном вращении тела ускорение ε берется со знаком плюс, при равнозамедленном – со знаком минус.

- Связь между линейными и угловыми величинами:

$$v = \omega R,\ \ a_\tau = \varepsilon R,\ \ a_n = \omega^2 R, \tag{1.20}$$

где R – радиус дуги окружности, пройденной точкой вращающегося тела.

- Полное ускорение

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{1.21}$$

Задача 1.1. По движущемуся эскалатору бегут вниз два человека: один со скоростью $v_1 = 4$ м/с, другой – $v_2 = 6$ м/с. Первый насчитал при этом $n = 38$ ступенек, второй – $m = 40$. Найдите скорость u эскалатора.

Дано:
$v_1 = 4$ м/с
$v_2 = 6$ м/с
$n = 38$
$m = 40$
---
u - ?

Решение. Обозначим за l длину спуска и определим время t_1 пребывания на эскалаторе относительно Земли первого человека: $t_1 = \dfrac{l}{v_1 + u}$, и t_2 – второго человека: $t_2 = \dfrac{l}{v_2 + u}$. Затем найдем расстояние, которое пробежал по эскалатору первый человек: $l_1 = t_1 v_1 = \dfrac{v_1 l}{v_1 + u}$, и второй человек: $l_2 = t_2 v_2 = \dfrac{v_2 l}{v_2 + u}$.

Пусть N – число ступенек на длине l эскалатора, тогда $\dfrac{N}{l}$ – число ступенек на единице длины. Если это отношение умножить на расстояния, которые пробежали спускавшиеся, то получится число ступенек, которое они насчитали.

Таким образом,

$$n = \frac{N}{l} l_1 = \frac{N}{l}\frac{v_1 l}{(v_1 + u)} = \frac{N v_1}{v_1 + u}, \tag{1}$$

$$m = \frac{N}{l} l_2 = \frac{N}{l}\frac{v_2 l}{(v_2 + u)} = \frac{N v_2}{v_2 + u}. \tag{2}$$

Найдем из уравнения (1) общее число ступенек

$$N = \frac{n(v_1 + u)}{v_1}$$

и, подставив его в уравнение (2), получим:

$$mv_1u + mv_1v_2 = nv_2u + nv_1v_2,$$

$$u = \frac{v_1v_2(m-n)}{nv_2 - mv_1}, \quad [u] = \frac{\text{м/с} \cdot \text{м/с}}{\text{м/с}} = \text{м/с}, \quad u = 0{,}7 \text{ м/с}.$$

Ответ: $u = 0{,}7$ м/с.

Задача 1.2. Две трети своего пути мотоциклист проехал со скоростью v_1 = 54 км/ч, остальную часть пути – со скоростью v_2 = 72 км/ч. Найдите среднюю путевую скорость мотоциклиста.

Дано:
$v_1 = 15$ м/с
$v_2 = 20$ м/с
$\langle v \rangle$ - ?

Решение. Среднюю путевую скорость мотоциклиста можно найти по формуле (1.3):

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t},$$

где S – путь, пройденный мотоциклистом за время t.

Представим время t в виде суммы $t = t_1 + t_2$, где t_1 – время, за которое мотоциклист проехал две трети пути, двигаясь со скоростью v_1, т. е. $t_1 = \frac{2}{3}\frac{S}{v_1}$; t_2 – время, за которое мотоциклист проехал оставшуюся треть пути, двигаясь со скоростью v_2, т. е. $t_2 = \frac{1}{3}\frac{S}{v_2}$.

Тогда $$\langle v \rangle = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\left(\frac{2S}{3v_1} + \frac{S}{3v_2}\right)} = \frac{3v_1v_2}{v_1 + 2v_2},$$

$$[\langle v \rangle] = \frac{\text{м/с} \cdot \text{м/с}}{\text{м/с}} = \text{м/с}, \quad \langle v \rangle \approx 16{,}4 \text{ м/с}.$$

Ответ задачи может показаться неожиданным, так как в учебниках при выводе формулы пути равноускоренного движения используется формула

$\langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2}$, согласно которой средняя скорость должна была бы равняться 17,5 м/с, однако эта формула пригодна только для равноускоренного движения.

Ответ: $\langle v \rangle \approx 16{,}4$ м/с.

Задача 1.3. Заданы уравнения движения двух материальных точек:

$$x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2,$$

$$x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2,$$

где $A_1 = 18$ м, $A_2 = 2$ м, $B_1 = B_2 = 3$ м/с, $C_1 = -3$ м/с^2, $C_2 = 1$ м/с^2. Найдите момент времени, когда скорости движения точек будут одинаковы. Определите скорости v_1 и v_2 и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент времени.

Дано:
$A_1 = 18$ м
$A_2 = 2$ м
$B_1 = B_2 = 3$ м/с
$C_1 = -3$ м/с^2
$C_2 = 1$ м/с^2

---

v_1 -? v_2 -?
a_1 -? a_2 -?
t -?

Решение. Материальные точки движутся по прямой (ось x). Заданы кинематические уравнения движения в координатной форме. Скорость точки в произвольный момент времени найдем, дифференцируя координату по времени, т. е.

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_1 + B_1 t + C_1 t^2\right) = B_1 + 2C_1 t,$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_2 + B_2 t + C_2 t^2\right) = B_2 + 2C_2 t.$$

По условию задачи $v_1 = v_2$ в момент времени t, т.е. $B_1 + 2C_1 t = B_2 + 2C_2 t$.

Откуда $t = \frac{(B_1 - B_2)}{(2C_2 - 2C_1)}$, $t = 0$.

Значит, $v_1 = v_2 = B_1 = B_2$, $v_1 = v_2 = 3$ м/с.

Ускорения в произвольный момент времени найдем, взяв вторую производную от координаты x по времени, т. е.

$$a_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B_1 + 2C_1 t\right) = 2C_1, \quad a_1 = -6 \text{ м/с}^2,$$

$$a_2 = \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{dv_2}{dt} = \frac{d}{dt}(B_2 + 2C_2t) = 2C_2, \quad a_2 = 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: $t = 0$; $v_1 = v_2 = 3$ м/с; $a_1 = -6$ м/с^2; $a_2 = 2$ м/с^2.

Задача 1.4. Уравнение прямолинейного движения материальной точки имеет вид:

$$x = at + bt^2,$$

где $a = 3$ м/с, $b = -0{,}25$ м/с^2. Постройте графики зависимости координаты и пути от времени.

Дано:
$x = at + bt^2$
$a = 3$ м/с
$b = -0{,}25$ м/с^2

$x(t)$ -? $S(t)$ -?

Решение. Анализ уравнения движения показывает, что координата x сначала увеличивается, а потом уменьшается. Найдем характерные значения координаты.

Максимальное значение x_{max} достигается в момент времени, когда скорость меняет знак (точка начинает двигаться в обратном направлении). Найдем первую производную от координаты по времени и приравняем ее к нулю, по полученному значению времени вычислим x_{max}:

$$\frac{dx}{dt} = a + 2bt = 0, \text{ откуда } t = -\frac{a}{2b}, \ t = 6 \text{ с}, \ x_{max} = 9 \text{ м}.$$

Определим момент времени, когда координата x равна нулю:

$x = at + bt^2 = 0$.

Решая данное уравнение, получим два значения времени:

$t_1 = 0$ и $t_2 = 12$ с.

Для построения графика зависимости координаты от времени, помимо найденных значений, вычислим еще два значения координаты для моментов времени $t = 3$ с и $t = 9$ с. Полученные данные занесем в таблицу 1.

Таблица 1

t, с	0	3	6	9	12
x, м	0	6,76	9	6,76	0

По данным таблицы 1 строим графики зависимости координаты x и пути S от времени (рис. 1).

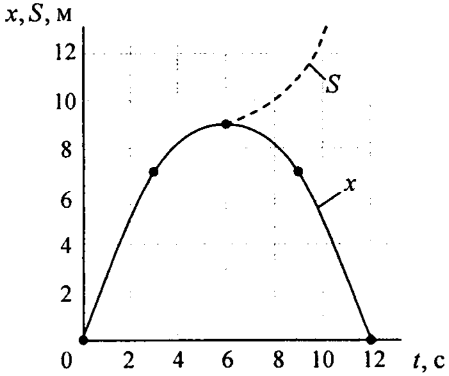

Рис. 1

До момента времени $t = 6$ с, когда скорость изменяет знак, координата x и путь S на графике совпадают. Затем с увеличением времени координата убывает (сплошная линия на рис. 1), а путь продолжает увеличиваться (по закону уменьшения координаты), т. е., начиная с этого момента, график пути является зеркальным отражением графика координаты (пунктирная линия на рис. 1).

Задача 1.5. С какой скоростью и по какому курсу должен лететь самолет, чтобы за 2 часа пролететь точно на север 720 км, если во время полета дует постоянный северо-западный ветер под углом $30°$ к меридиану со скоростью 36 км/ч ?

Дано:
$t = 2$ ч
$S = 720$ км
$\beta = 30°$
$u = 36$ км/ч

v -? α -?

Решение. Скорость будем измерять в км/ч, как это делает летчик, определяя ее по приборам.

Чтобы попасть в пункт назначения, самолету необходимо лететь под углом α к меридиану, отклоняясь на запад (рис. 2).

Обозначим искомую относительную скорость как $\vec{v}$, а результирующую абсолютную скорость, направленную вдоль меридиана, как $\vec{v}_0$. Ее модуль $|\vec{v}_0| = \dfrac{S}{t}$. Из рис. 2 видно, что $\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{u}$. Модуль скорости $|\vec{v}|$ найдем из

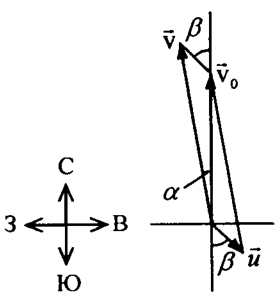

Рис. 2

векторного треугольника скоростей, используя теорему косинусов:

$$v = \sqrt{v_0^2 + u^2 - 2v_0 u \cos(180° - \beta)},$$

$$[v] = \sqrt{\frac{км^2}{ч^2}} = \frac{км}{ч}, \quad v \approx 392 \text{ км/ч}.$$

Таким образом, скорость полета самолета больше v_0.

Угол α можно найти по теореме синусов:

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{v}{\sin(180° - \beta)}, \text{ откуда } \alpha \approx 4{,}5°.$$

Ответ: $v \approx 392$ км/ч ; $\alpha \approx 4{,}5°$.

Задача 1.6. Стрела пущена из лука вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 40$ м/с. Определите: 1) Через сколько времени и с какой скоростью стрела упадет на Землю? Какой путь будет пройден ею за это время? 2) Через какое время она окажется на высоте $h = 35$ м ?

Дано:
$v_0 = 40$ м/с
$h = 35$ м

1) $t_{пол}$ - ? v_y -?
S -? 2) t - ?

Решение. В системе отсчета, связанной с Землей, ось ординат направим вертикально вверх, начало отсчета совместим с точкой бросания (рис. 3). Считая, что движение стрелы прямолинейное и равнозамедленное, уравнения движения в проекциях на ось Oy будут иметь вид:

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

$$v_y = v_0 - gt. \quad (2)$$

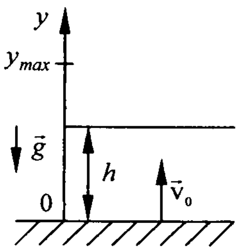

Рис. 3

1) В момент падения на Землю $t = t_{пол}$, $y = 0$. Из уравнения (1) найдем время полета: $t_{пол} = \frac{2v_0}{g}$, $t_{пол} = 8$ с. Подставив $t_{пол}$ в уравнение (2), определим скорость падения стрелы:

$$v_y = v_0 - g\frac{2v_0}{g} = -v_0.$$

Скорость падения равна по модулю начальной скорости и противоположна ей по направлению. В верхней точке траектории $v_y = 0$, из уравнения (2) найдем время подъема:

$$t_{под} = \frac{v_0}{g}, \ \left[t_{под}\right] = \frac{м \cdot с^2}{с \cdot м} = с.$$

Путь, пройденный стрелой за время движения, равен $S = 2y_{max}$. Значение y_{max} определим из уравнения (1), подставив в него $t_{под}$ (время подъема):

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}, \text{ тогда}$$

$$S = \frac{v_0^2}{g}, \ [S] = \frac{м^2 \cdot с^2}{с^2 \cdot м} = м, \ S = 160 \text{ м}.$$

2) Время подъема на высоту h определим, подставив в уравнение (1) значение $y = h$, тогда $35 = 40t - 5t^2$. Решая квадратное уравнение, получим: $t_1 = 1$ с, $t_2 = 7$ с. Два значения для t указывают на то, что стрела на этой высоте побывает дважды: через 1 с (на подъеме) и через 7 с от начала движения (на спуске).

Ответ: $t = 8$ с; $S = 160$ м; $t_1 = 1$ с; $t_2 = 7$ с.

Задача 1.7. Мяч брошен вертикально вверх. На высоте $h = 6$ м он побывал дважды с интервалом $\Delta t = 3$ с. Определите начальную скорость мяча.

Дано:
$h = 6$ м
$\Delta t = 3$ с

---

v_0 - ?

Решение. В системе отсчета, связанной с Землей, ось ординат направим вверх, а начало отсчета совместим с поверхностью Земли в точке бросания (рис. 3). Запишем уравнение движения мяча для моментов t и $t + \Delta t$:

$$y_1 = h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

$$y_2 = h = v_0\left(t + \Delta t\right) - \frac{g\left(t + \Delta t\right)^2}{2}. \quad (2)$$

Приравняв правые части уравнений (1) и (2), получим:

$$t = \frac{2v_0 - g\Delta t}{2g}.$$

Подставив значение t в уравнение (2), найдем

$$v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{8gh + g^2\Delta t^2}\,, \quad [v_0] = \sqrt{\frac{м}{с^2}\cdot м + \frac{м^2}{с^4}\cdot с^2} = \frac{м}{с}, \quad v_0 = 18\ м/с\,.$$

Ответ: $v_0 = 18$ м/с .

Задача 1.8. Камень, брошенный под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, побывал дважды на одной и той же высоте h (рис. 4) через $t_1 = 1$ с и $t_2 = 3$ с от начала бросания. Определите высоту h и начальную скорость камня v_0. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:
$\alpha = 30°$
$t_1 = 1$ с
$t_2 = 3$ с

h - ? v_0 - ?

Решение. Камень, брошенный под углом к горизонту, движется по параболе. Согласно уравнению (1.10), высота

$$h = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Для высоты h можно записать два уравнения: для времени полета t_1 и t_2:

$$h = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{gt_1^2}{2}, \tag{1}$$

$$h = v_0 t_2 \sin\alpha - \frac{gt_2^2}{2}\,. \tag{2}$$

Приравняв правые части уравнений (1) и (2), получим:

$$v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{gt_1^2}{2} = v_0 t_2 \sin\alpha - \frac{gt_2^2}{2}\,,$$

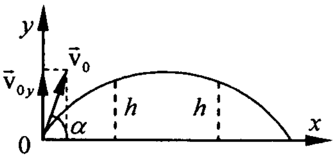

Рис. 4

откуда $v_0 = \dfrac{g(t_2^2 - t_1^2)}{2(t_2 - t_1)\sin\alpha}$,

$$[v_0] = \frac{с^2 \cdot м/с^2}{с} = \frac{м}{с}, \quad v_0 = 40\ м/с\,.$$

Высота h определяется из уравнения (1):

$$h = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{g t_1^2}{2}, \quad [h] = \frac{м}{с}\cdot с - \frac{м}{с^2}\cdot с^2 = м, \quad h = 15 \text{ м}.$$

Ответ: $v_0 = 40$ м/с; $h = 15$ м.

Задача 1.9. С башни горизонтально брошено тело со скоростью $v_0 = 25$ м/с. Найдите скорость тела v, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения тела в конце третьей секунды, а также радиус кривизны траектории R в точке, соответствующей этому времени. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:
$v_0 = 25$ м/с
$t = 3$ с

a - ? v - ?
a_τ - ? a_n - ?
R - ?

Решение. Тело, брошенное с башни горизонтально, будет двигаться по параболе. Пусть за 3 секунды движения тело оказалось в точке А (рис. 5). Построим параллелограмм скоростей и ускорений для данной точки. Скорость $\vec{v}$ направлена по касательной к траектории, ее проекции: $\vec{v}_x$ направлена по горизонтали, а $\vec{v}_y$ – по вертикали. Ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории, а $\vec{a}_n$ – перпендикулярно $\vec{a}_\tau$. Полное ускорение:

$$\vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{g}.$$

Треугольники Δ AMC и Δ ABD подобны, так как все углы одного треугольника равны углам второго. Из подобия треугольников запишем отношения сторон:

$$\cos\varphi = \frac{v_y}{v} = \frac{a_\tau}{g}, \quad a_\tau = \frac{v_y g}{v}, \qquad (1)$$

$$\sin\varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{a_n}{g}, \quad a_n = \frac{v_x g}{v}. \qquad (2)$$

Поскольку $v_x = v_0$, а $v_y = gt$, то

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}, \qquad (3)$$

$$[v] = \sqrt{\frac{м}{с^2}\cdot 2 + \frac{м^2}{с^4}\cdot с^2} = \frac{м}{с}, \quad v = 39 \text{ м/с}.$$

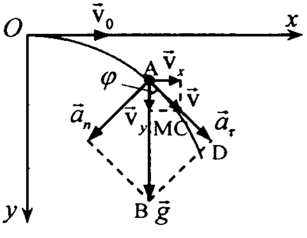

Рис. 5

Подставив уравнение (3) в (1) и (2), получим

$$a_\tau = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \quad a_\tau = 7{,}7 \text{ м/с}^2,$$

$$a_n = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \quad a_n = 6{,}4 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad a = 10 \text{ м/с}^2.$$

Так как $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, то радиус кривизны траектории в точке А равен

$$R = \frac{v^2}{a_n}, \quad R = 238 \text{ м}.$$

Проверим размерности:

$$[a_\tau] = \frac{\text{с}\cdot\text{м}^2/\text{с}^4}{\sqrt{\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 2 + \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^4}\cdot\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad [a_n] = \frac{\text{м/с}\cdot\text{м/с}^2}{\sqrt{\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 2 + \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^4}\cdot\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$[a] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4} + \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad [R] = \frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2} = \text{м}.$$

Ответ: $v = 39$ м/с; $a_\tau = 7{,}7$ м/с^2; $a_n = 6{,}4$ м/с^2; $a = 10$ м/с^2; $R = 238$ м.

Задача 1.10. Материальная точка движется по закону $\vec{r}(t) = \alpha\sin(5t)\vec{i} + \beta\cos^2(5t)\vec{j}$, где $\alpha = 2$ м, $\beta = 3$ м. Определите вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения точки.

Дано:
$\alpha = 2$ м
$\beta = 3$ м

$\vec{v}(t)$ - ?
$\vec{a}(t)$ - ?
$y(x)$ - ?

Решение. По условию задачи движение материальной точки задается изменением радиуса-вектора с течением времени (1.1):

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \qquad (1)$$

Сравнивая уравнение (1) с заданным, запишем движение точки координатным способом:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha\sin(5t), \\ y(t) = \beta\cos^2(5t), \\ z(t) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Определим проекции вектора скорости на оси координат:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 5\alpha\cos(5t), \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -5\beta\cdot 2\cos(5t)\sin(5t) = -5\beta\sin(10t). \end{cases} \quad (3)$$

Согласно (1.4) выражение для вектора скорости будет иметь вид:

$$\vec{v}(t) = 5\alpha\cos(5t)\vec{i} + (-5\beta\sin(10t))\vec{j}. \quad (4)$$

Аналогично (1.7) определим проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -25\alpha\sin(5t), \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -50\cos(10t), \end{cases} \quad (5)$$

и выражение для вектора ускорения:

$$\vec{a}(t) = -25\alpha\sin(5t)\vec{i} - 50\beta\cos(10t)\vec{j}. \quad (6)$$

Для определения траектории движения точки исключим из системы уравнений (2) время. Для этого представим систему в виде

$$\begin{cases} \sin(5t) = \dfrac{x}{\alpha}, \\ \cos^2(5t) = \dfrac{y}{\beta}. \end{cases} \quad (7)$$

Возведя в квадрат левую и правую части первого уравнения в системе (7) и просуммировав уравнения, получим:

$$\sin^2(5t) + \cos^2(5t) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta}. \quad (8)$$

Левая часть уравнения (8) равна 1, тогда

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta} = 1. \quad (9)$$

Выражение (9) является уравнением параболы:

$$y = \frac{\alpha^2\beta - \beta x^2}{\alpha^2}. \quad (10)$$

Подставив в (10) данные из условия задачи, найдем траекторию движения точки:

$$y = 3 - \frac{3}{4}x^2 .$$

Из полученного уравнения следует, что при $y \geq 0$ траектория имеет вид параболы, расположенной выше оси x, по которой точка совершает колебательное движение.

Ответ: $\vec{v}(t) = 10\cos(5t)\vec{i} - 15\sin(10t)\vec{j}$;

$\vec{a}(t) = -50\sin(5t)\vec{i} - 150\cos(10t)\vec{j}$;

$y = 3 - \frac{3}{4}x^2$.

Задача 1.11. Найдите модули скорости и ускорения точки в момент времени $t = 2$ с, если точка движется по закону: $\vec{r}(t) = (a + bt)\vec{i} + (ct + dt^2)\vec{j}$, где $a = -9$ м, $b = 3$ м/с, $c = 4$ м/с, $d = -1$ м/с^2.

Дано:
$t = 2$ с
$a = -9$ м
$b = 3$ м/с
$c = 4$ м/с
$d = -1$ м/с^2

v - ? a - ?

Решение. В условии задачи движение материальной точки описывается векторным способом. Используя прямоугольную систему координат, заданное уравнение представим в виде

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} . \quad (1)$$

Движение точки происходит в плоскости xOy. Сравнивая (1) с законом движения, данным в условии задачи, можно описать движение точки координатным способом:

$$\begin{cases} x(t) = a + bt, \\ y(t) = ct + dt^2. \end{cases} \quad (2)$$

Проекции вектора скорости $\vec{v}$ на координатные оси Ox и Oy определяются соотношениями:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} .$$

Дифференцируя по времени уравнения (2), найдем эти проекции:

$$v_x = b, \quad v_y = c + 2dt . \quad (3)$$

Модуль вектора скорости равен:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{b^2+(c+2dt)^2}\ ,\ [v]=\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}+\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}=\frac{\text{м}}{\text{с}}\ ,\ v=9\ \text{м/с}\ .$$

Проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси определяются соотношениями:

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}\ ,\quad a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv_y}{dt}\ . \tag{4}$$

Используя выражения (3) и (4), получим:
$a_x=0,\quad a_y=2d.$
Модуль вектора ускорения равен:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=2d\ ,\ [a]=\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}+\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}}=\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ ,\quad a=-2\ \text{м/с}^2\ .$$

Ответ: $v=9$ м/с; $a=-2$ м/с^2 .

Задача 1.12. Точка вращающегося тела, двигаясь по окружности радиусом $R=20$ см с постоянным тангенциальным ускорением, к концу третьего оборота после начала движения приобрела линейную скорость $v=20$ см/с. Найдите нормальное ускорение точки за $t=10$ с вращения.

Дано:
$R=0{,}2$ м
$v=0{,}2$ м/с
$t=10$ с
$N=3$
$a_\tau=\text{const}$

---

a_n - ?

Решение. При вращении тела линейная скорость v точки с $a_\tau=\text{const}$ изменяется по закону: $v=a_\tau t$. Угловое ускорение точки ε связано с ее тангенциальным ускорением соотношением $\varepsilon=a_\tau/R$, поэтому

$$v=a_\tau t=\varepsilon Rt\ . \tag{1}$$

Угол поворота тела при равноускоренном вращении из состояния покоя

$$\varphi=\frac{\varepsilon t^2}{2}\ . \tag{2}$$

Число оборотов, которое совершает точка за время t:

$$N=\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{\varepsilon t^2}{4\pi}\ . \tag{3}$$

Из уравнений (1), (2), исключив время t, выразим угловое ускорение:

$$\varepsilon=\frac{v^2}{4\pi NR^2}\ . \tag{4}$$

Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где $\omega = \varepsilon t$, отсюда

$$a_n = \varepsilon^2 t^2 R. \qquad (5)$$

Подставив уравнение (4) в (5), получим:

$$a_n = \frac{v^4 t^2}{16\pi^2 N^2 R^3}, \quad [a_n] = \frac{\text{м}^4}{\text{с}^4} \cdot \text{с}^2 \cdot \frac{1}{\text{м}^3} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad a_n = 0{,}03 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_n = 0{,}03$ м/с^2.

Задача 1.13. Раскручиваясь в течение $t = 2$ мин, маховик набирает частоту $n = 900$ об/мин. Найдите угловое ускорение ε маховика и число оборотов N, которое он совершил за это время.

Дано:
$t = 120$ с
$n = 15$ с$^{-1}$

ε - ? N - ?

Решение. Запишем угловую скорость вращения маховика через угловое ускорение:

$$\omega = \varepsilon t \qquad (1)$$

и через частоту вращения n:

$$\omega = 2\pi n. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{2\pi n}{t}, \quad [\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с} \cdot \text{с}} = \text{рад/с}^2, \quad \varepsilon = 0{,}78 \text{ рад/с}^2. \qquad (3)$$

Угол поворота маховика

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad (4)$$

$$\varphi = 2\pi N. \qquad (5)$$

Из уравнений (3)–(5) определяется число оборотов N:

$$2\pi N = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{2\pi n}{2t} t^2 = \pi n t, \quad N = \frac{nt}{2}, \quad [N] = \frac{1}{\text{с}} \cdot \text{с}, \quad N = 900.$$

Ответ: $\varepsilon = 0{,}78$ рад/с^2, $N = 900$.

Задача 1.14. Колесо, имея частоту вращения $n = 720$ об/мин, с некоторого момента времени начинает вращаться замедленно с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Определите, через какое время колесо остановится и какое число оборотов оно сделает до остановки.

Дано:
$n = 12$ рад/с
$\varepsilon = 2$ рад/с^2
$\omega = 0$

t - ? N - ?

Решение. Вращение колеса равнозамедленное, и его угловая скорость $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$. По условию колесо остановится, т. е. $\omega = 0$. Следовательно,

$$\omega_0 = \varepsilon t. \tag{1}$$

Кроме того, $\omega_0 = 2\pi n$. (2)

Из уравнений (1) и (2) определим время вращения колеса до полной остановки:

$$t = \frac{2\pi n}{\varepsilon}, \ [t] = \frac{\text{рад} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot \text{рад}} = \text{с}, \ t \approx 37{,}7 \text{ с}. \tag{3}$$

Угол поворота колеса

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{4}$$

$$\varphi = 2\pi N. \tag{5}$$

Из уравнений (3)–(5) находится число оборотов N:

$$N = nt/2, \ [N] = \frac{1}{\text{с}} \cdot \text{с}, \ N = 226.$$

Ответ: $t \approx 37{,}7$ с; $N = 226$.

Задача 1.15. По горизонтальной поверхности катится колесо радиусом R с угловой скоростью ω. Найдите траекторию, описываемую точкой A, лежащей на ободе колеса (рис. 6). Начальные условия: при $t = 0$ $x_A = 0$, $y_A = 0$, $\varphi = 0$.

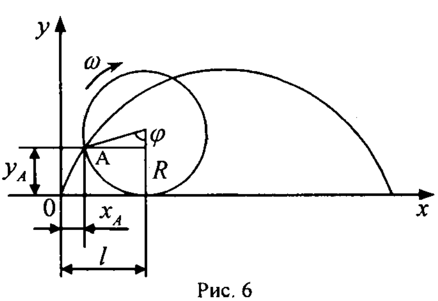

Рис. 6

Дано:
R, ω
x, y

$x(y)$ - ?

Решение. Считая, что колесо катится без скольжения, из рис. 6 находим:

$$x_A = l - R\sin\varphi, \quad (1)$$

$$y_A = R - R\cos\varphi. \quad (2)$$

Поскольку $l = R\varphi$, а $\varphi = \omega t$, то уравнения (1), (2) примут вид

$$x_A = R(\omega t - \sin\omega t), \quad (3)$$

$$y_A = R(1 - \cos\omega t), \quad (4)$$

где t – время движения колеса.

Исключив из выражений (3) и (4) время, получим уравнение траектории. Для этого из (4) найдем

$$\cos\omega t = \frac{R-y}{R}, \text{ откуда } \omega t = \arccos\frac{R-y}{R}. \quad (5)$$

Выполним преобразования:

$$\sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\left(\frac{R-y}{R}\right)^2} = \frac{\sqrt{y(2R-y)}}{R}. \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) подставим в (3):

$$x + \sqrt{y(2R-y)} = R\arccos\frac{R-y}{R}.$$

Получим уравнение циклоиды.

Ответ: траекторией точки A является циклоида.

Задача 1.16. Зависимость угла поворота φ от времени для вращающегося колеса дается в виде уравнения $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $B = 1$ рад/с, $C = 2$ рад/с^3. Найдите угловую ω и линейную v скорости, а также тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек, лежащих на ободе колеса через время $t = 1$ с от начала движения, если радиус колеса $R = 0{,}2$ м.

Дано:
$\varphi = A + Bt + Ct^3$
$B = 1$ рад/с
$C = 2$ рад/с^3
$t = 1$ с
$R = 0{,}2$ м

a_n - ? a_τ - ?
a - ? ω - ?
v - ?

Решение. Согласно определению, угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt + Ct^3) = B + 3Ct^2,$$

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} + \frac{\text{рад}}{\text{с}^3}\text{с}^2 = \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \ \omega = 7 \text{ рад/с}.$$

Линейная скорость $v = \omega R$, $v = 1{,}4$ м/с.

Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(B + 3Ct^2) = 6Ct, \ [\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^3}\text{с} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}, \ \varepsilon = 12 \text{ рад/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$, $[a_\tau] = \text{м} \cdot \frac{1}{\text{с}^2} = \text{м/с}^2$, $a_\tau = 2{,}4$ м/с^2.

Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, $[a_n] = \text{м} \cdot \frac{1}{\text{с}^2} = \text{м/с}^2$, $a_n = 9{,}8$ м/с^2.

Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, $[a] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}} = \text{м/с}^2$, $a = 10{,}1$ м/с^2.

Ответ: $\omega = 7$ рад/с, $v = 1{,}4$ м/с, $a_\tau = 2{,}4$ м/с^2, $a_n = 9{,}8$ м/с^2, $a = 10{,}1$ м/с^2.

Задача 1.17. Зависимость пути S от времени t для вращающейся по окружности радиусом $R = 6$ м точки M дается в виде уравнения $S = At^3$, где $A = 0{,}2$ м/с^3. Определите тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения для момента времени, когда линейная скорость точки $v = 0{,}6$ м/с, а также угол φ между векторами $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}$.

Дано:
$S = At^3$
$A = 0{,}2$ м/с^3
$R = 6$ м
$v = 0{,}6$ м/с

a_n - ? a_τ - ?
a - ? φ - ?

Решение. Линейная скорость точки изменяется по закону

$$v = \frac{dS}{dt} = 3At^2.$$

Найдем момент времени t, когда линейная скорость $v = 0{,}6$ м/с:

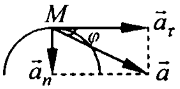

Рис. 7

$$t=\sqrt{\frac{v}{3A}},\ [t]=\sqrt{\frac{м\cdot с^3}{с\cdot м}}=с,\ t=1\ с.$$

Тангенциальное ускорение точки

$$a_\tau=\frac{d^2S}{dt^2}=6At,\ [a_\tau]=\frac{м}{с^3}\cdot с=м/с^2,\ a_\tau=1{,}2\ м/с^2.$$

Нормальное ускорение

$$a_n=\frac{v^2}{R},\ [a_n]=\frac{м^2}{с^2\cdot м}=м/с^2,\ a_n=0{,}06\ м/с^2.$$

Полное ускорение

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2},\ [a]=\sqrt{\frac{м^2}{с^4}}=м/с^2,\ a=1{,}2\ м/с^2.$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к окружности, а нормальное ускорение $\vec{a}_n$ перпендикулярно $\vec{a}_\tau$ (рис. 7). Полное ускорение $\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau$.

Тогда $tg\varphi=\dfrac{a_n}{a_\tau}$, $\varphi\approx 3°$.

Ответ: $a_\tau=1{,}2\ м/с^2$; $a_n=0{,}06\ м/с^2$; $a=1{,}2\ м/с^2$; $\varphi\approx 3°$.

Задача 1.18. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega=\omega_0-\alpha\varphi$, **где** $\omega_0=3$ рад/с, $\alpha=0{,}1\ с^{-1}$. В момент времени $t_0=0$ уг**ол** $\varphi_0=0$. Найдите угловую скорость вращения тела для момента времени $t=2$ с.

Дано:
$\omega=\omega_0-\alpha\varphi$
$\omega_0=3$ рад/с
$t=2$ с
$\alpha=0{,}1\ с^{-1}$
$t_0=0$, $\varphi_0=0$

ω - ?

Решение. Согласно определению угловая скорость $\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$. Тогда по условию задачи

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0-\alpha\varphi. \qquad (1)$$

Разделим переменные в уравнении (1) и проинтегрируем полученное выражение:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\omega_0-\alpha\varphi}=\int_0^t dt. \qquad (2)$$

Пределы интегрирования берутся из условия задачи:

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\varphi}\frac{d(\omega_0-\alpha\varphi)}{\omega_0-\alpha\varphi}=\int_0^t dt,\ \ \ln(\omega_0-\alpha\varphi)\Big|_0^{\varphi}=-\alpha t,\ \ \ln\frac{\omega_0-\alpha\varphi}{\omega_0}=-\alpha t. \qquad (3)$$

Потенцируем уравнение (3):

$$\frac{\omega_0-\alpha\varphi}{\omega_0}=e^{-\alpha t}. \qquad (4)$$

Из (4) находится выражение для угла поворота:

$$\varphi=\frac{\omega_0}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right). \qquad (5)$$

Подставив (5) в заданный закон изменения угловой скорости, получим $\omega=\omega_0 e^{-\alpha t}$, $[\omega]=$ рад/с, $\omega=2{,}46$ рад/с.

Ответ: $\omega=2{,}46$ рад/с.

Задача 1.19. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon=\alpha t$, где $\alpha=0{,}02$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi=60°$ с ее вектором скорости?

Дано:
$\varepsilon=\alpha t$
$\alpha=0{,}02$ рад/с^3
$\varphi=60°$

t - ?

Решение. Разложим вектор полного ускорения $\vec{a}$ (рис. 8) на составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|}. \qquad (1)$$

Используя уравнение (1.20), запишем:

$$a_\tau=\varepsilon R=\alpha t R. \qquad (2)$$

С другой стороны, по определению

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}. \qquad (3)$$

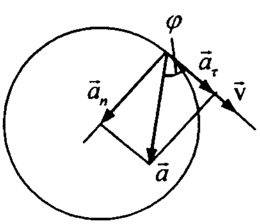

Рис. 8

Из уравнений (2) и (3) найдем:

$$\alpha t R = \frac{d\text{v}}{dt}. \qquad (4)$$

Разделим переменные в уравнении (4) и проинтегрируем его:

$$\alpha t R dt = d\text{v}, \quad \int_0^t \alpha t R dt = \int_0^{\text{v}} d\text{v}, \quad \text{v} = \alpha R \frac{t^2}{2}. \qquad (5)$$

Нормальное ускорение с учетом выражения (5) запишется в виде:

$$a_n = \frac{\text{v}^2}{R} = \frac{\alpha^2 R t^4}{4}. \qquad (6)$$

Подставим в формулу (1) уравнения (2) и (6):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha t^3}{4}. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) найдем искомое время вращения тела:

$$t = \sqrt[3]{\frac{4\operatorname{tg}\varphi}{\alpha}}, \quad [t] = \sqrt[3]{\text{c}^3} = \text{c}, \quad t = 7\ \text{c}.$$

Ответ: $t = 7$ с.

1.2. Динамика. Законы сохранения

Основные формулы

● Импульс тела массой m, движущегося поступательно со скоростью $\vec{\text{v}}$:

$$\vec{p} = m\vec{\text{v}}. \qquad (1.22)$$

● Второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \qquad (1.23)$$

где $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – геометрическая сумма сил, действующих на тело; m – массаж; $\vec{a}$ – ускорение; n – число действующих сил.

● Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила упругости

$$F = -kx, \qquad (1.24)$$

где k – коэффициент упругости; x – абсолютная деформация;

б) сила трения скольжения

$$F = \mu N, \qquad (1.25)$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила нормального давления;

в) сила гравитационного притяжения

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1.26)$$

где $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$ – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы двух материальных точек; r – расстояние между этими материальными точками.

г) сила Архимеда

$$F_A = \rho g V, \qquad (1.27)$$

где ρ – плотность жидкости или газа; V – объем погруженной части тела.

- Закон сохранения импульса (для замкнутой системы)

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = const \text{ или } \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\text{v}}_i = const, \qquad (1.28)$$

где n – число тел, входящих в систему.

- Работа постоянной силы

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta S\cos\alpha, \qquad (1.29)$$

где α – угол между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения ; $\Delta S = |\Delta\vec{r}|$ – элементарный путь.

- Работа переменной силы

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F dS\cos\alpha = \int_1^2 F_S dS, \qquad (1.30)$$

где F_S – проекция вектора силы на перемещение $d\vec{r}$; $dS = |d\vec{r}|$ – модуль перемещения, равный элементарному пути.

- Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно:

$$E_k = \frac{m\text{v}^2}{2} \text{ или } E_k = \frac{p^2}{2m}. \qquad (1.31)$$

● Потенциальная энергия:

а) упругих сил:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}, \qquad (1.32)$$

где k – коэффициент упругости; x – абсолютная деформация;

б) гравитационного взаимодействия двух материальных точек:

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (1.33)$$

в) тела, находящегося в однородном гравитационном поле:

$$E_p = mgh, \qquad (1.34)$$

где h – высота тела над уровнем, принимаемым за нулевой (для консервативной системы).

● Закон сохранения механической энергии

$$E_k + E_p = \text{const}. \qquad (1.35)$$

● Скорости шаров массами m_1 и m_2 после абсолютно упругого центрального удара

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$
$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \qquad (1.36)$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости шаров до удара.

● Скорости шаров после абсолютно неупругого центрального удара

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (1.37)$$

Задача 1.20. На плоской поверхности лежат два тела массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 5$ кг, соединенные нитью. Найдите силу натяжения нити и ускорение тел a, если к одному из них приложить горизонтально направленную силу $F = 21$ Н.

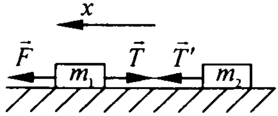

Рис. 9

Дано:

$m_1 = 2$ кг

$m_2 = 5$ кг

$F = 21$ Н

T - ? a - ?

Решение. Пусть сила F приложена к первому телу (рис. 9). Направим ось x по направлению действия силы $\vec{F}$. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела в проекциях на ось x:

$$m_1 a = F - T,$$

$$m_2 a = T'.$$

Считая нить невесомой, по второму закону Ньютона запишем, что сила $T' = T$, поэтому

$$m_1 a = F - T, \qquad (1)$$

$$m_2 a = T. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), определим ускорение:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2},\ [a] = \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ a = 3\ \text{м/с}^2. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), найдем T:

$$T = \frac{F m_2}{m_1 + m_2},\ [T] = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг}}{\text{кг}} = \text{Н},\ T = 15\ \text{Н}.$$

Ответ: $a = 3$ м/с^2; $T = 15$ Н.

Задача 1.21. Наклонная плоскость, имеющая длину $l = 2{,}5$ м, образует угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Определите коэффициент трения μ тела о плоскость в двух случаях: 1) тело, двигаясь равноускоренно, соскальзывает с плоскости за время $t = 2$ с; 2) скатившись с наклонной плоскости, тело приобрело скорость $v = 2{,}5$ м/с.

Дано:

$l = 2{,}5$ м

$\alpha = 30°$

1) $t = 2$ с

2) $v = 2{,}5$ м/с

μ - ?

Решение. 1) Изобразим тело на наклонной плоскости и покажем силы, действующие на него: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$. Приложим все силы к центру тела (рис. 10). Зададим направление координатных осей xoy. Применим второй закон Ньютона: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$.

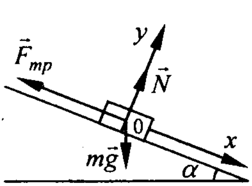

Рис. 10

В проекциях на оси координат имеем:

$$Ox: \ mg\sin\alpha - F_{тр} = ma, \tag{1}$$

$$Oy: \ N - mg\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

Найдем N из уравнения (2): $N = mg\cos\alpha$.

По определению сила трения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha . \tag{3}$$

Подставив уравнение (3) в (1), получим:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma . \tag{4}$$

Далее найдем ускорение движения тела:

$$l = at^2/2, \text{ откуда } a = 2l/t^2 . \tag{5}$$

Подставив выражение (5) в (4), получим:

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha - \frac{2l}{t^2 g\cos\alpha}, \ \mu = 0{,}43. \tag{6}$$

2) Скорость при равноускоренном движении с начальной скоростью, равной нулю, определяется по формуле: $\mathrm{v} = at$,

откуда

$$a = \frac{\mathrm{v}}{t}. \tag{7}$$

Из выражений (7) и (5) определим время скатывания тела с наклонной плоскости:

$$t = \frac{2l}{\mathrm{v}}. \tag{8}$$

По формуле (6), подставив в нее выражение для времени (8), найдем коэффициент трения:

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha - \frac{\mathrm{v}^2}{2lg\cos\alpha}, \ [\mu] = \frac{\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = 1, \ \mu = 0{,}43.$$

Ответ: $\mu = 0{,}43$.

Задача 1.22. Шар массой $m = 500$ кг, падая с высоты $h = 1$ м, ударяется о металлическую плиту. Определите среднее значение силы удара $\langle F \rangle$, если его длительность $t = 0{,}01$ с. Удар считать абсолютно упругим.

Дано:
$m = 500$ кг
$h = 1$ м
$t = 0{,}01$ с
$\langle F \rangle$ - ?

Решение. Среднее значение силы удара $\langle F \rangle = \dfrac{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|}{t}$, где $\vec{p}_2$ и $\vec{p}_1$ – импульсы шара после удара и перед ним.

После удара шара о плиту $\vec{p}_2 = 0$, так как скорость шара равна нулю. Импульс шара до удара $\vec{p}_1 = m\vec{\text{v}}_1$, где $\vec{\text{v}}_1$ – скорость шара перед ударом.

Используя закон сохранения энергии в механике, найдем v_1:

$$mgh = \frac{m\text{v}_1^2}{2}, \quad \text{v}_1 = \sqrt{2gh}.$$

Тогда $\langle F \rangle = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{t}$, $[F] = \dfrac{\text{кг} \cdot \sqrt{\dfrac{\text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}}}{\text{с}} = \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$, $F = 221$ кН.

Ответ: = 221 кН.

Задача 1.23. Тело массой $m = 1$ кг, двигаясь равномерно, описывает три четверти окружности радиусом $R = 2$ м за время $t = 6$ с. Найдите изменение модуля импульса тела Δp.

Дано:
$m = 1$ кг
$R = 2$ м
$t = 6$ с
Δp - ?

Решение. Пусть тело переместилось из точки A в C (рис. 11). Скорость тела $\vec{\text{v}}$ по модулю не изменилась, но изменилось направление скорости, следовательно, изменился и импульс. Перенесем вектор импульса $\vec{p}_2 = m\vec{\text{v}}_2$ из точки C в точку A и по теореме Пифагора найдем модуль изменения импульса Δp. По условию задачи вращение тела равномерное, поэтому линейную скорость найдем, поделив длину окружности на время одного оборота (период):

$$\text{v} = 2\pi R / T = 2\pi R / (\tfrac{4}{3}t).$$

Импульс тела $p = m\text{v} = \dfrac{3\pi Rm}{2t}$.

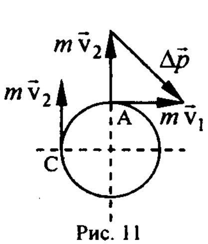

Рис. 11

Изменение модуля импульса

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{2p^2} = p\sqrt{2} = \frac{3\pi Rm}{\sqrt{2}t}, \ \Delta p = 1{,}57\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\Delta p = 1{,}57\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.24. Снаряд массой $m = 100$ кг вылетел из орудия под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_o = 600$ м/с. Найдите: 1) импульс силы, действующей на снаряд за время его полета; 2) изменение модуля импульса снаряда Δp за время его полета.

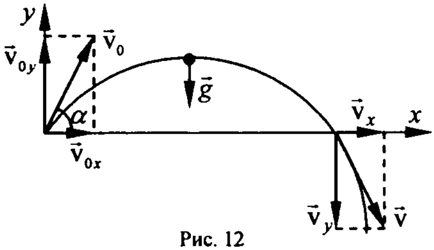

Рис. 12

Дано:
$m = 100$ кг
$\alpha = 30°$
$v_o = 600$ м/с

Ft - ? Δp - ?

Решение. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то траекторией движения снаряда является парабола (рис. 12). Снаряд движется с ускорением $\vec{g}$.

1) Проекции вектора скорости в момент времени t определяются выражениями:

$$v_x = v_o \cos\alpha,$$
$$v_y = v_o \sin\alpha - gt. \qquad (1)$$

Движение снаряда вдоль оси oy описывается уравнением

$$y = v_o t \sin\alpha - gt^2/2. \qquad (2)$$

В момент падения снаряда на Землю координата $y = 0$. С учетом этого из уравнения (2) определим время полета:

$$t = 2v_o \sin\alpha / g. \qquad (3)$$

При полете на снаряд действует сила тяжести. Найдем импульс силы тяжести за время полета (в проекции на ось oy):

$$Ft = -mg\frac{2v_o \sin\alpha}{g} = -2mv_o \sin\alpha, \ Ft = -6\cdot 10^4 \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

2) Проекция скорости v_y в момент падения снаряда на Землю определяется при подстановке выражения (3) в (1):

$$v_y = v_o \sin\alpha - gt = -v_o \sin\alpha .$$

Заметим, что $v_x = v_{ox}$, т. е. остается постоянной. Тогда изменение модуля импульса снаряда за время его полета

$$\Delta p = m(v_y - v_{oy}) = m(-v_o \sin\alpha - v_o \sin\alpha) = -2m v_o \sin\alpha = Ft ,$$

$$[\Delta p] = \text{Н} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} .$$

Ответ: $\Delta p = Ft = -6 \cdot 10^4 \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.25. Найдите импульс Δp, полученный плоской поверхностью в результате абсолютно упругого удара о нее шара массой $m = 0{,}5$ кг, если перед ударом шар имел скорость $v_o = 5$ м/с, направленную под углом $\alpha = 30°$ к поверхности.

Дано:
$m = 0{,}5$ кг
$v_o = 5$ м/с
$\alpha = 30°$

Δp - ?

Решение. При ударе о плоскость (рис. 13) шар сообщает ей импульс, численно равный изменению импульса шара при ударе. При абсолютно упругом ударе проекция импульса шара на ось oy не изменяется, а проекция импульса шара на ось ox изменяет свое направление на противоположное, не изменяясь по абсолютной величине. Поэтому изменение импульса шара при ударе равно:

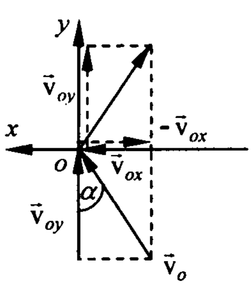

Рис. 13

$$\Delta p_ш = m\Delta v_x = -m v_o \sin\alpha - m v_o \sin\alpha = -2m v_o \sin\alpha .$$

Импульс, полученный стенкой:

$$\Delta p = -\Delta p_ш = 2m v_o \sin\alpha , \qquad [\Delta p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} ,$$

$$\Delta p = 2{,}5 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} .$$

Ответ: $\Delta p = 2{,}5 \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Задача 1.26. Парашютист массой $m = 90$ кг делает затяжной прыжок. Найти скорость парашютиста в момент раскрытия парашюта, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения: $\vec{F}_c = -r\vec{v}$, где $r = 15$ кг/с. Начальную скорость v_0 принять равной нулю. Раскрытие парашюта произошло через 9 с свободного полета.

Дано:
$m = 90$ кг
$\vec{F}_c = -r\vec{v}$
$r = 15$ кг/с
$v_0 = 0$
$t = 9$ с

---

v - ?

Решение. Рассмотрим движение в системе отсчета, связанной с Землей. Начало координат совместим с точкой, из которой начинается движение (точка O на рис. 14), ось Oy направим по вертикали к Земле. Считая высоту h малой по сравнению с радиусом Земли, примем ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2$. На парашютиста действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -r\vec{v}$. По второму закону Ньютона запишем:

$$ma = mg - F_c \quad \text{или} \quad m\frac{dv}{dt} = mg - rv. \tag{1}$$

Разделим переменные в уравнении (1):

$$\frac{dv}{g - \frac{r}{m}v} = dt. \tag{2}$$

Проинтегрируем выражение (2). Пределы интегрирования определяются условием задачи: при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$, в момент времени t скорость равна v:

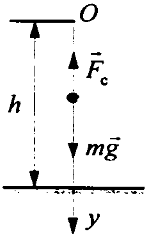

Рис. 14

$$-\frac{m}{r}\int_0^v d\left(g - \frac{r}{m}v\right)\Big/\left(g - \frac{r}{m}v\right) = \int_0^t dt, \quad \ln\left[\left(g - \frac{r}{m}v\right)\Big/g\right] = -\frac{r}{m}t,$$

$$v = \frac{m}{r}g\left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right), \quad \left[\frac{r}{m}t\right] = \frac{\text{кг}\cdot\text{с}}{\text{с}\cdot\text{кг}} = 1, \quad [v] = \frac{\text{кг}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$v = 45{,}7$ м/с.

Ответ: $v = 45{,}7$ м/с.

Задача 1.27. Модель ракеты движется, выбрасывая струю газа с постоянной скоростью $v_0 = 900$ м/с. Расход газа $q = 0,25$ кг/с, начальная масса ракеты $m_0 = 1,5$ кг. Какую скорость относительно Земли приобретет ракета через $t = 2$ с после начала движения?

Дано:
$v_0 = 900$ м/с
$q = 0,25$ кг/с
$m_0 = 1,5$ кг
$t = 2$ с

---

v - ?

Решение. На основании закона сохранения импульса для системы «ракета–струя газа» запишем:

$$d\vec{p} = d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = 0, \qquad (1)$$

где $d\vec{p}_1$ – изменение импульса ракеты за промежуток времени dt; $d\vec{p}_2$ – изменение импульса порции газа, истекающей из ракеты, за промежуток времени dt.

Допустим, что ракета движется вертикально вверх вдоль оси Oy. В проекции на эту ось уравнение (1) примет вид:

$$dp_1 - dp_2 = 0. \qquad (2)$$

Если в момент времени t ракета имела массу $m = m_0 - qt$, то за время dt скорость ракеты за счет реактивного действия газовой струи изменится на dv, а импульс ракеты – на величину

$$dp_1 = (m_0 - qt)dv. \qquad (3)$$

Порция газа qdt, двигаясь вместе с ракетой, обладает скоростью $\vec{v}$. Покинув ракету, эта же масса газа за время dt приобретает относительно Земли скорость $\vec{v} + \vec{v}_0$. Таким образом, импульс порции газа, выброшенной из ракеты, изменится на величину

$$dp_2 = q(v + v_0)dt - qvdt = qv_0dt. \qquad (4)$$

Подставив выражения (3) и (4) в (2), получим:

$$(m_0 - qt)dv - qv_0dt = 0 \quad \text{или} \quad dv = \frac{qv_0dt}{m_0 - qt}. \qquad (5)$$

Интегрируя уравнение (5) при начальной скорости ракеты, равной нулю, получим:

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{qv_0}{m_0 - qt}dt, \quad v = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right), \quad [v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad v = 365 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 365$ м/с.

Задача 1.28. Моторная лодка массой $m = 400$ кг, двигаясь по озеру, за $t = 10$ с достигает скорости $v = 36$ км/ч. Найдите силу тяги мотора $F_т$, считая ее постоянной, если сила сопротивления движению $\vec{F}_c = -k\vec{v}$, где $k = 120$ кг/с.

Дано:
$m = 400$ кг
$t = 10$ с
$v = 10$ м/с
$k = 120$ кг/с

$F_т$ - ?

Решение. Из условия задачи следует, что сила сопротивления $\vec{F}_c = -k\vec{v}$. По второму закону Ньютона

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_т - F_c}{m} = \frac{F_т - kv}{m}. \qquad (1)$$

С другой стороны, по определению ускорение $a = \frac{dv}{dt}$, тогда уравнение (1) перепишем в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_т - kv}{m}.$$

После разделения переменных получим:

$$dv = \frac{F_т - kv}{m}dt \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v - \frac{F_т}{k}} = -\frac{k}{m}dt. \qquad (2)$$

Интегрируем уравнение (2):

$$\ln\left|v - \frac{F_т}{k}\right| = -\frac{k}{m}t + C, \qquad (3)$$

где C – постоянная интегрирования.

Для определения скорости v потенцируем выражение (3):

$$v - \frac{F_т}{k} = e^{\frac{-k}{m}t} \cdot e^C \quad \text{или} \quad v = \frac{F_т}{k} + e^{\frac{-k}{m}t} \cdot e^C. \qquad (4)$$

Из граничных условий известно, что при $t = 0$ скорость $v = 0$, отсюда находится постоянная интегрирования C:

$$0 = \frac{F_т}{k} + e^{\frac{-k}{m}0} \cdot e^C, \text{ откуда } e^C = -\frac{F_т}{k}.$$

Тогда уравнение (4) примет вид:

$$v = \frac{F_т}{k} - e^{-\frac{k}{m}t} \cdot \frac{F_т}{k} = \frac{F_т}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right). \qquad (5)$$

Из уравнения (5) найдем силу тяги мотора:

$$F_т = \frac{k\,v}{\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}, \quad [F_т] = \frac{кг \cdot м}{с \cdot с} = Н, \quad F_т = 1260\ Н.$$

Ответ: $F_т = 1260$ Н.

Задача 1.29. Скорость пули массой $m = 9$ г при движении в воздухе за $t = 1$ с уменьшилась с $v_o = 900$ м/с до $v = 200$ м/с. Найдите коэффициент сопротивления k, считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости: $F_с = k\,v^2$.

Дано:
$m = 9 \cdot 10^{-3}$ кг
$t = 1$ с
$v_o = 900$ м/с
$v = 200$ м/с
$F_с = k\,v^2$

k - ?

Решение. По второму закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}. \qquad (1)$$

Из условия задачи сила сопротивления

$$F_с = -k\,v^2. \qquad (2)$$

Знак минус в уравнении (2) берется потому, что сила сопротивления противоположна скорости пули.

Из уравнений (1) и (2) запишем дифференциальное уравнение полета пули, из которого определим коэффициент сопротивления: $k\,v^2 = -m\dfrac{dv}{dt}$, разделив переменные, получим:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt. \qquad (3)$$

Интегрируем выражение (3):

$$\int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt, \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_o} = \frac{kt}{m}, \quad \text{откуда} \quad k = \frac{m(v_o - v)}{v v_o t},$$

$$[k] = \frac{кг \cdot \frac{м}{с}}{\frac{м}{с} \cdot \frac{м}{с} \cdot с} = \frac{кг}{м}, \quad k = 3{,}5 \cdot 10^{-5}\ кг/м.$$

Ответ: $k = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ кг/м.

Задача 1.30. Однородная цепочка длиной $l = 1{,}5$ м и массой $m = 3$ кг лежит на столе. Если часть цепочки длиной $l_0 = 0{,}2$ м спустить со стола, то она начнет скользить вниз. Коэффициент трения цепочки о стол $\mu = 0{,}1$. Найдите работу, совершаемую против силы трения при соскальзывании всей цепочки.

Дано:
$l = 1{,}5$ м
$l_0 = 0{,}2$ м
$m = 3$ кг
$\mu = 0{,}1$

A - ?

Решение. На часть цепочки длиной x, лежащей на столе, действует сила трения

$$F_{тр} = \mu \frac{mg}{l} x, \qquad (1)$$

где $\frac{m}{l}$ – масса единицы длины цепочки.

Сила трения зависит от длины цепочки, находящейся на столе. При скольжении цепочки сила трения уменьшается, т. е. в задаче требуется определить работу переменной силы.

Для бесконечно малого перемещения dx силу трения можно считать постоянной. Тогда элементарная работа, совершаемая при этом против силы трения, равна:

$$dA = -F_{тр}dx \text{ или с учетом (1) } dA = -\mu \frac{mg}{l} x dx. \qquad (2)$$

По условию задачи скольжение цепочки начинается, когда ее часть длиной l_0 свесится со стола. Следовательно, работа совершается при изменении длины части цепочки, находящейся на столе, от $(l - l_0)$ до 0. Учитывая эти граничные условия и выражение (2), на основании формулы (1.30) запишем:

$$A = -\int_{l-l_0}^{0} \mu \frac{mg}{l} x dx = \mu \frac{mg}{2l}(l - l_0)^2, \quad [A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} \cdot \text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж},$$

$A = 1{,}69$ Дж.

Ответ: $A = 1{,}69$ Дж.

Задача 1.31. Санки скользят по горизонтальной ледяной поверхности со скоростью $v = 5$ м/с, а затем выезжают на дорожку с песком. Длина полозьев санок $l = 1$ м, коэффициент трения их о песок $\mu = 0{,}8$. Определите путь, пройденный санками по песчаной дорожке до остановки.

Дано:
$v = 5$ м/с
$l = 1$ м
$\mu = 0{,}8$

S - ?

Решение. При въезде на песчаную дорожку начинает возрастать сила трения $F_{тр} = \mu N$, действующая на санки. Здесь $N = mg$ – сила нормального давления. Увеличение силы трения происходит до тех пор, пока санки полностью не въедут на песчаную дорожку. Таким образом, часть пути, равную длине санок, они движутся под действием переменной силы. По закону сохранения энергии работа силы трения $A_{тр}$ равна изменению кинетической энергии санок:

$$A_{тр} = E_{к2} - E_{к1} = 0 - \frac{mv^2}{2} = -\frac{mv^2}{2}, \tag{1}$$

где $E_{к1}$, $E_{к2}$ – кинетическая энергия санок в начале и конце пути.

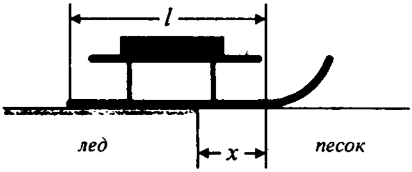

Рис. 15

Для определения работы силы трения $A_{тр}$ разделим путь, проходимый санками, на два участка: $S = l + l_1$. На участке l санки въезжают на песчаную дорожку и на них действует переменная сила трения $F_{тр1} = \mu N$. При прохождении малого отрезка пути x (рис. 15) сила давления санок на дорожку $N = \frac{mgx}{l}$, а сила трения $F_{тр1} = \frac{\mu mgx}{l}$. Тогда работа силы трения на элементарном отрезке пути dx равна:

$$dA_{тр1} = -\mu mg\frac{x}{l}dx \text{ или } A_{тр1} = -\int_0^l \mu mg\frac{x}{l}dx = -\frac{\mu mgl}{2}. \tag{2}$$

Минус в уравнении (2) ставится потому, что $F_{тр}$ и dx имеют противоположные знаки.

На участке l_1 санки полностью въехали на песчаную дорожку и на них действует постоянная сила трения $F_{тр2} = \mu mg$, работа которой

$$A_{тр2} = -\mu m g l_1 . \quad (3)$$

Согласно (2), (3) работа силы трения на всем пути

$$A_{тр} = A_{тр1} + A_{тр2} = -\mu m g\left(\frac{l}{2} + l_1\right). \quad (4)$$

Из выражений (1), (4) найдем: $l_1 = \dfrac{v^2 - \mu g l}{2\mu g}$.

Тогда путь, пройденный санками, равен:

$$S = l + l_1 = \frac{v^2 + \mu g l}{2\mu g}, \quad [S] = \frac{\dfrac{м^2}{с^2} + \dfrac{м}{с^2}\cdot м}{\dfrac{м}{с^2}} = м, \quad S = 2{,}1\ м .$$

Ответ: $S = 2{,}1$ м .

Задача 1.32. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 60°$ с горизонтом. Зависимость пути S от времени t задается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где $A = 5$ м, $B = -1$ м/с, $C = 1{,}5$ м/с^2. Найдите коэффициент трения μ тела о плоскость.

Дано:
$\alpha = 60°$
$S = A + Bt + Ct^2$
$A = 5$ м
$B = -1$ м/с
$C = 1{,}5$ м/с^2

μ - ?

Решение. Дифференцируя дважды заданное уравнение движения тела по времени, найдем его ускорение:

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2} = 2C . \quad (1)$$

На рис. 16 показаны силы, действующие на тело. Применим второй закон Ньютона для данного тела:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} . \quad (2)$$

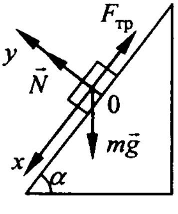

Рис. 16

Запишем уравнение (2) в проекциях на координатные оси:

$$ox: \quad ma = -F_{тр} + mg\sin\alpha , \quad (3)$$

$$oy: \quad 0 = N - mg\cos\alpha . \quad (4)$$

Из уравнения (4) найдем реакцию опоры: $N = mg\cos\alpha$.

Сила трения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha . \quad (5)$$

Подставив уравнение (5) в (3), получим $ma = -\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$, откуда $a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$. Согласно выражению (1) $a = 2C$, тогда

$$g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 2C \text{ и } \mu = \frac{g\sin\alpha - 2C}{g\cos\alpha},$$

$$[\mu] = \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) \Big/ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = 1, \; \mu = 1{,}1.$$

Ответ: $\mu = 1{,}1$.

Задача 1.33. Шарик массой $m = 0{,}2$ кг, подвешенный на нити длиной $l = 1$ м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найдите угол α отклонения нити от вертикали, при котором кинетическая энергия шарика в его нижнем положении $E_k = 1{,}6$ Дж. Чему равно отношение сил натяжения нити в нижнем и верхнем положениях?

Дано:
$m = 0{,}2$ кг
$l = 1$ м
$E_k = 1{,}6$ Дж

α - ? $\dfrac{T_1}{T_2}$ - ?

Решение. Из закона сохранения энергии найдем угол α: потенциальная энергия шарика, находящегося на высоте $h = l(1-\cos\alpha)$ (рис. 17), переходит в кинетическую энергию этого шарика в нижней точке траектории:

$$E_k = \frac{m v^2}{2} = mgh, \; mgl(1-\cos\alpha) = E_k.$$

Откуда $\cos\alpha = 1 - \dfrac{E_k}{mgl} = 0{,}4$,

$\alpha = \arccos(0{,}4) \approx 66{,}5°$.

В нижней точке траектории нормальное ускорение шарика

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{m v^2}{2} \cdot \frac{2}{ml} = \frac{2E_k}{ml}.$$

По второму закону Ньютона для нижней точки траектории запишем: $ma_n = T_1 - mg$, откуда

$$T_1 = m(a_n + g) = m\left(\frac{2E_k}{ml} + g\right), \qquad (1)$$

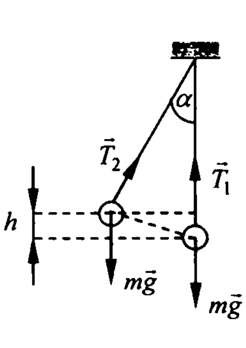

Рис. 17

$$[T_1] = \text{кг}\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{м}} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \text{кг}\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} + \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

В верхней точке траектории скорость шарика и его нормальное ускорение равны нулю, поэтому

$$T_2 - mg\cos\alpha = 0,\ T_2 = mg\cos\alpha = m\left(g - \frac{E_k}{ml}\right). \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем отношение сил натяжения нити:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m\left(\frac{2E_k}{ml} + g\right)}{m\left(g - \frac{E_k}{ml}\right)} = \frac{2E_k + gml}{gml - E_k},\quad \frac{T_1}{T_2} = 13{,}5.$$

Ответ: $\alpha = \arccos(0{,}4) \approx 66{,}5°$; $\frac{T_1}{T_2} = 13{,}5$.

Задача 1.34. Пружина сжимается на $x_o = 25$ см. Какую работу надо при этом совершить, считая силу сжатия F пропорциональной x, а коэффициент жесткости пружины $k = 3$ кН/м?

Дано:
$x_o = 0{,}25$ м
$k = 3 \cdot 10^3$ Н/м
A - ?

Решение. Сила, сжимающая пружину, по мере ее сжатия увеличивается. Воспользуемся выражением для определения работы переменной силы (1.28):

$$A = -\int_0^{x_0} F dx.$$ По условию задачи $F = -kx$.

Тогда $A = \int_0^{x_0} kx dx = \frac{kx_o^2}{2}$, $A = 93{,}75$ Дж, $[A] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}\cdot\text{м}^2 = \text{Дж}$.

Ответ: $A = 93{,}75$ Дж.

Задача 1.35. Спортсмен прыгает в сетку с высоты $h = 8$ м. На какой предельной высоте x над полом надо натянуть сетку, чтобы спортсмен не ударился о пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на $x_0 = 0{,}5$ м, если спортсмен прыгает в нее с высоты $h_0 = 1$ м.

Дано:
$h = 8$ м
$x_0 = 0{,}5$ м
$h_0 = 1$ м

---

x - ?

Решение. Механическую систему «Земля–спортсмен–сетка» можно считать замкнутой, поскольку трение при растяжении сетки пренебрежимо мало. По закону сохранения энергии при прыжке спортсмена его потенциальная энергия должна полностью перейти в энергию упругой деформации сетки:

$$mg(h+x) = \frac{kx^2}{2}, \tag{1}$$

$$mg(h_0 + x_0) = \frac{kx_0^2}{2}, \tag{2}$$

где k – коэффициент упругости; m – масса спортсмена.

Разделив уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{h+x}{h_0+x_0} = \frac{x^2}{x_0^2}, \text{ откуда } (h_0+x_0)x^2 - x_0^2 x - hx_0^2 = 0. \tag{3}$$

Решаем квадратное уравнение (3):

$$x = \frac{x_0^2 \pm \sqrt{x_0^4 + 4hx_0^2(h_0+x_0)}}{2(h_0+x_0)}, \quad x_1 = 1{,}24 \text{ м}, \quad x_2 = -1{,}07 \text{ м}.$$

Значение корня $x_2 = -1{,}07$ м отбрасываем, так как оно противоречит условию задачи.

Ответ: $x = 1{,}24$ м.

Задача 1.36. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$ (рис. 18). Два тела одинаковой массы $m_1 = m_2 = 0{,}5$ кг соединены нитью, перекинутой через невесомый блок, укрепленный в вершине наклонной плоскости. Найдите ускорение a движения тел и силу натяжения нити T, если коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0{,}2$. Трением в блоке пренебречь.

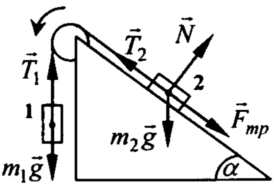

Рис. 18

Дано:
$m_1 = m_2 = 0{,}5$ кг
$\alpha = 30°$
$\mu = 0{,}2$

---

a - ? T - ?

Решение. Предположим, что движение происходит в указанном на рис. 18 направлении.

Запишем второй закон Ньютона для тел 1 и 2:

1) в векторной форме:

$$m_1\vec{g}+\vec{T}_1=m_1\vec{a}, \tag{1}$$

$$m_2\vec{g}+\vec{F}_{тр}+\vec{T}_2+\vec{N}=m_2\vec{a}; \tag{2}$$

2) в скалярной форме:

$$m_1g-T_1=m_1a, \tag{3}$$

$$T_2-m_2g\sin\alpha-F_{тр}=m_2a. \tag{4}$$

Поскольку сила трения

$$F_{тр}=\mu N=\mu m_2\cos\alpha,$$

а сила натяжения $T_1=T_2$, то, сложив уравнения (3) и (4), получим

$m_2a+m_1a=m_1g-m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha$, откуда

$$a=\frac{m_1g-m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha}{m_1+m_2}=\frac{g\left(1-\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)}{2},$$

$[a]=\text{м/с}^2$, $a=1{,}6$ м/с^2.

Сила натяжения нити $T=m_1(g-a)$, $[T]=\text{кг}\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}=\text{Н}$, $T=4{,}1$ Н.

Ответ: 4,1 Н; 1,6 м/с^2.

Задача 1.37. Груз массой $m=4{,}5$ кг, подвешенный на нити длиной $l=1{,}6$ м, вращается в горизонтальной плоскости с частотой $n=36$ об/мин. Найдите угол α, образованный нитью с вертикалью, силу натяжения нити T и скорость вращения груза v.

Дано:
$m=4{,}5$ кг
$l=1{,}6$ м
$n=0{,}6$ с$^{-1}$

α - ? T - ?
v - ?

Решение. Груз движется по окружности с центром в точке О (рис. 19). На груз действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вдоль нити. Векторная сумма этих сил $\vec{F}_ц$ сообщает грузу центростремительное ускорение:

$$\vec{F}_ц=m\vec{g}+\vec{T},\ F_ц=\frac{m\text{v}^2}{R}=m\omega^2R, \tag{1}$$

где R – радиус окружности, $\omega=2\pi n$ – угловая скорость вращения груза.

Из рис. 19 найдем радиус:

$R = l\sin\alpha$.

Силу $F_ц$ выразим из треугольника ABC:

$$F_ц = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\,. \qquad (2)$$

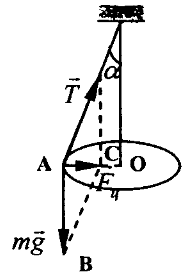

Рис. 19

Из уравнений (1) и (2) получим:

$4m\pi^2n^2l\sin\alpha = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда

$$4\pi^2n^2l\cos\alpha = g, \quad \cos\alpha = \frac{g}{4\pi^2n^2l},$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{4\pi^2n^2l}\right), \quad \alpha \approx 64°, \qquad \left[\frac{g}{n^2l}\right] = \frac{м\cdot с^2}{с^2\cdot м} = 1\,.$$

Из треугольника ABC найдем силу натяжения нити:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}, \quad [T] = кг\cdot\frac{м}{с^2} = Н, \quad T = 103 \text{ Н}.$$

Линейная скорость груза

$$v = \omega R = 2\pi nl\sin\alpha, \quad [v] = \frac{1}{с}\cdot м = \frac{м}{с}, \quad v = 5{,}1 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\alpha = 64°$; $T = 103$ Н; $v = 5{,}1$ м/с.

Задача 1.38. Груз массой m, подвешенный на невесомом стержне, отклоняют на угол $\alpha = 120°$ от вертикали и отпускают. Найдите силу натяжения стержня T в момент прохождения грузом положения равновесия.

Дано:
m
$\alpha = 120°$
T - ?

Решение. В отклоненном положении груз будет находиться в точке A (рис. 20). Найдем расстояние h из треугольника AOC: $h = R\sin\beta$, где R – радиус окружности, а угол $\beta = 30°$.

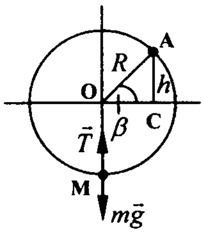

Рис. 20

Применим закон сохранения энергии: потенциальная энергия груза в точке A равна его кинетической энергии в точке M: $mg(h+R) = mv^2/2$, откуда

$$v = \sqrt{2g(h+R)} = \sqrt{3Rg}\,.$$

На груз, находящийся в точке М, действуют сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести $m\vec{g}$, равнодействующая этих сил сообщает грузу центростремительное ускорение, т. е.

$$T - mg = \frac{m\text{v}^2}{R}.$$

Тогда $T = mg + \dfrac{m\text{v}^2}{R} = mg + \dfrac{m3Rg}{Rg} = 4mg$, $[T] = \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$.

Ответ: $T = 4mg$.

Задача 1.39. На какой наибольший угол α можно отклонить от вертикали шар массой $m = 1{,}5$ кг, подвешенный на тонкой металлической проволоке, чтобы при прохождении шаром положения равновесия она не разорвалась? Проволока выдерживает силу натяжения $T = 30$ Н.

Дано:
$m = 1{,}5$ кг
$T = 30$ Н

α_{max} - ?

Решение. На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения проволоки $\vec{T}$ (рис. 21). При отклонении шара от положения равновесия он поднимется на высоту

$$h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha), \qquad (1)$$

где l – длина проволоки.

Потенциальная энергия шара, поднятого на высоту h, по закону сохранения энергии равна кинетической энергии шара в положении равновесия:

$mgh = \dfrac{m\text{v}^2}{2}$ или с учетом (1)

$$gl(1 - \cos\alpha) = \frac{\text{v}^2}{2}, \qquad (2)$$

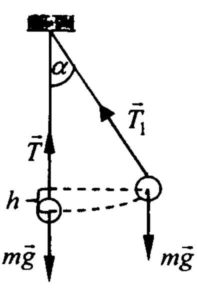

Рис. 21

где v – скорость шара в положении равновесия.

Найдем для этого положения центростремительное ускорение груза, определив v^2 из уравнения (2):

$$a_ц = \frac{\text{v}^2}{l} = 2g(1 - \cos\alpha).$$

Запишем второй закон Ньютона для шара, находящегося в положении равновесия:

$T - mg = 2mg(1 - \cos\alpha)$, отсюда

$T = mg + 2mg(1 - \cos\alpha) = 3mg - 2mg\cos\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{3mg - T}{2mg} = 1{,}5 - \frac{T}{2mg}, \quad \left[\frac{T}{mg}\right] = \frac{\text{Н}}{\text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{Н}}{\text{Н}} = 1,$$

$\alpha = \arccos(1{,}5 - \dfrac{T}{2mg}) = 60°$, таким образом, $\alpha_{max} = 60°$.

Ответ: $\alpha_{max} = 60°$.

Задача 1.40. Мотоциклист описывает «мертвую петлю» радиусом $R = 5$ м в вертикальной плоскости. С какой наименьшей скоростью v_{min} должен проехать мотоциклист верхнюю точку петли, чтобы не оторваться от поверхности?

Дано: $R = 5$ м; v_{min} - ?

Решение. В точке В на мотоцикл действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}_1$, численно равная силе давления его на поверхность (рис. 22).

Запишем второй закон Ньютона: $m\vec{a}_B = m\vec{g} + \vec{N}_1$, или в проекции на ось y:

$$-mg - N_1 = -ma_B, \tag{1}$$

где $a_B = a_n = v^2/R$ – нормальное (центростремительное) ускорение.

Тогда из уравнения (1) получим:

$$\frac{mv^2}{R} = mg + N_1. \tag{2}$$

При движении по окружности сила нормальной реакции N_1, действующая на мотоцикл, должна быть отлична от нуля. Единственная точка, где эта сила может быть равной нулю, – это наивысшая точка траектории. Если $N_1 = 0$, то в следующий момент она будет отлична от нуля, так как всякое тело стремится сохранить состояние прямолинейного и равномерного движения. Поэтому при $N_1 = 0$ будем иметь v_{min}. Следовательно, уравнение (2) примет вид:

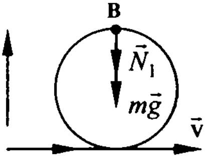

Рис. 22

$$\frac{mv_{min}^2}{R} = mg, \quad v_{min} = \sqrt{Rg}, \quad [v_{min}] = \sqrt{\text{м}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad v_{min} = 7 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_{min} = 7$ м/с.

Задача 1.41. Грузовик массой $m = 6$ т движется по выпуклому мосту со скоростью $v = 36$ км/ч. Найдите силу F давления автомобиля на мост в его верхней точке при радиусе кривизны моста $R = 80$ м.

Дано:
$m = 6000$ кг
$R = 80$ м
$v = 10$ м/с
———
F - ?

Решение. В верхней части моста на грузовик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции моста $\vec{N}$ (рис. 23). Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$mg - N = ma_n, \tag{1}$$

где $a_n = v^2/R$ – нормальное (центростремительное) ускорение.

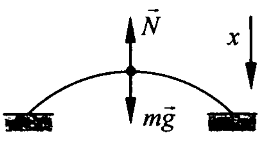

Рис. 23

Сила давления $\vec{F}$ грузовика на мост противоположна силе $\vec{N}$, а их модули совпадают, поэтому

$$F = N. \tag{2}$$

Из уравнений (1), (2) получим:

$$F = m(g - v^2/R), \quad [F] = \text{кг}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}}\right) = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}, \quad F = 51{,}3 \text{ кН}.$$

Ответ: $F = 51{,}3$ кН.

Задача 1.42. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью $v = 72$ км/ч, делая поворот радиусом $R = 50$ м. На какой угол α он должен отклониться от вертикали, чтобы не упасть при повороте? С какой максимальной скоростью v_{max} он может выполнить поворот? Коэффициент трения колес о дорогу $\mu = 0{,}32$.

Дано:
$v = 20$ м/с
$R = 50$ м
$\mu = 0{,}32$
———
α - ?
v_{max} - ?

Решение. Считаем, что мотоциклист и мотоцикл представляют собой единую систему. При повороте на мотоциклиста действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции дороги $\vec{N}$, сила тяги двигателя $\vec{F}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная по касательной к траектории движения, и сила трения покоя $\vec{F}_{тр.п}$, направленная по радиусу к центру окружности (рис. 24).

При постоянной скорости движения сила тяги и сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленные по касательной к траектории в противоположные стороны, компенсируют друг друга.

Мотоциклист может двигаться по окружности, если он наклонится (вместе с мотоциклом) так, чтобы равнодействующая сил $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр.п}$ сообщила ему центростремительное ускорение. Поскольку центр масс мотоциклиста по вертикали не перемещается, то $N = mg$ и центростремительное ускорение сообщается только силой трения покоя: $\dfrac{mv^2}{R} = \vec{F}_{тр.п}$.

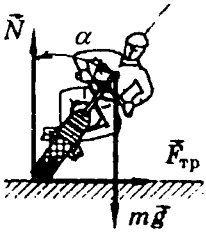

Рис. 24

По законам статики мотоциклист не потеряет равновесия, если равнодействующая сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр.п}$ будет направлена по прямой, проходящей через его центр масс (момент равнодействующей относительно центра масс равен нулю). Тогда

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\vec{F}_{тр.п}}{N} = \frac{mv^2}{Rmg} = \frac{v^2}{Rg} = 0{,}5, \quad \alpha \approx 26{,}5°.$$

Так как $F_{тр.п} \le \mu N = \mu mg$, то максимальная сила трения покоя $F_{тр.п} = \mu mg$, и скорость мотоциклиста не может быть больше значения, определяемого максимальным значением силы трения, т. е.

$$\frac{mv^2_{max}}{R} = \mu mg, \text{ откуда } v_{max} = \sqrt{\mu gR}, \ [v] = \sqrt{\frac{м \cdot м}{с^2}} = \frac{м}{с}, \ v_{max} = 16 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\alpha \approx 26{,}5°$; $V_{max} = 16$ м/с.

Задача 1.43. Камень массой $m = 0{,}6$ кг, привязанный к резиновому шнуру длиной l_0, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Известно, что частота вращения камня $n = 1$ об/с, жесткость шнура $k = 0{,}8$ кН/м, угол отклонения шнура от вертикали $\alpha = 30°$. Найдите длину l_0 нерастянутого шнура.

Дано:
$m = 0{,}6$ кг
$n = 1$ об/с
$k = 8 \cdot 10^2$ Н/м
$\alpha = 30°$

l_0 - ?

Решение. Как видно из рис. 25, сила натяжения шнура $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = 6{,}8$ Н. Эта сила вызывает растяжение шнура на величину Δl.

По закону Гука $T = k\Delta l$.

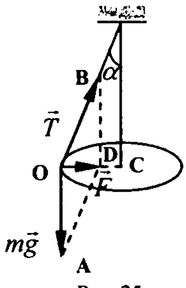

Рис. 25

Отсюда $\Delta l = \frac{T}{k} = 8{,}5$ мм $= 0{,}0085$ м .

Из треугольников ΔOAC и OBD отношение

$$\frac{l}{R} = \frac{T}{F} \qquad (1)$$

Сила F сообщает камню центростремительное ускорение, отсюда запишем:

$$F = T\sin\alpha = \frac{m\mathrm{v}^2}{R} = 4\pi^2 n^2 mR\,. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) имеем:

$$l = \frac{T}{4\pi^2 n^2 m},\quad [l] = \frac{\text{Н}}{\text{кг}/\text{с}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{м},\quad l = 0{,}287 \text{ м}\,.$$

Таким образом, длина нерастянутого шнура $l_0 = l - \Delta l$, $l = 27{,}85\cdot 10^{-2}$ м.

Ответ: $l_0 = 27{,}85\cdot 10^{-2}$ м .

Задача 1.44. Два шара массами $m_1 = 6$ кг и $m_2 = 4$ кг движутся со скоростями $\mathrm{v}_1 = 5$ м/с и $\mathrm{v}_2 = 12$ м/с и сталкиваются друг с другом. Найдите скорость шаров после удара, считая удар прямым и неупругим, в случаях: 1) второй шар догоняет первый; 2) шары движутся навстречу друг другу.

Дано:
$m_1 = 6$ кг
$m_2 = 4$ кг
$\mathrm{v}_1 = 5$ м/с
$\mathrm{v}_2 = 12$ м/с

u - ?

Решение. После неупругого удара шары движутся как единое целое, т. е. имеют одну и ту же скорость u. Закон сохранения импульса в проекции на ось x, когда второй шар догоняет первый (рис. 26,а), будет иметь вид: $m_2\mathrm{v}_2 + m_1\mathrm{v}_1 = (m_1 + m_2)u$, откуда скорость шаров после удара

$$u = \frac{m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_2}{m_1 + m_2},\quad u = 7{,}8 \text{ м/с}.$$

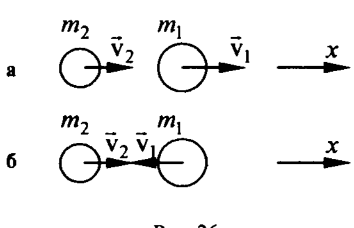

Рис. 26

Рассмотрим второй случай, когда шары движутся навстречу друг другу (рис. 26,б). Предположим, что после удара шары будут двигаться в направлении оси x. Тогда закон сохранения импульса в проекции на ось будет иметь вид:

$m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$, откуда

$$u = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad [u] = \frac{кг \cdot м}{кг \cdot с} = \frac{м}{с}, \quad u = 1{,}8 \text{ м/с}.$$

Ответ: 1) $u = 7{,}8$ м/с; 2) $u = 1{,}8$ м/с.

Задача 1.45. На тележке, представляющей собой длинную доску с колесами на концах, стоит человек массой $M = 70$ кг. Определите скорость перемещения доски $v_д$ относительно Земли, если человек будет двигаться вдоль нее со скоростью $v = 2$ м/с (относительно доски). Масса доски $m = 10$ кг. Массой колес и сопротивлением при движении пренебречь.

Дано:
$M = 70$ кг
$m = 10$ кг
$v = 2$ м/с

$v_д$ - ?

Решение. Поскольку человек движется по доске с постоянной скоростью, то перемещение доски относительно Земли также будет равномерным. Скорость перемещения доски найдем, используя закон сохранения импульса:

$$M v = (m + M) v_д, \text{ откуда}$$

$$v_д = \frac{M v}{m + M}, \quad [v_д] = \frac{кг \cdot м/с}{кг} = \frac{м}{с}, \quad v_д = 1{,}75 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_д = 1{,}75$ м/с.

Задача 1.46. Какую часть кинетической энергии передает движущийся шар массой m_1 неподвижному шару массой m_2 при абсолютно упругом центральном ударе, если: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 = 7m_2$.

Дано:
m_1, m_2

E'_{k2} / E_{k1} - ?

Решение. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x (рис. 27):

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \text{ или}$$

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2 u_2 . \qquad (1)$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \text{ или } m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2 u_2^2 ,$$

$$m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 u_2^2 . \qquad (2)$$

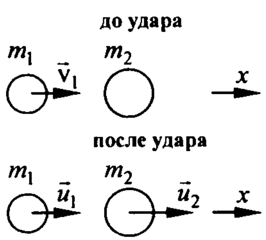

Рис. 27

Поделим друг на друга левые и правые части уравнений (1) и (2):

$$\frac{m_1(\mathrm{v}_1-u_1)(\mathrm{v}_1+u_1)}{m_1(\mathrm{v}_1-u_1)}=\frac{m_2u_2^2}{m_2u_2},\ \mathrm{v}_1+u_1=u_2. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в (1), получим:

$$u_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\mathrm{v}_1. \qquad (4)$$

Найдем $u_2=\mathrm{v}_1+u_1=\mathrm{v}_1+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\mathrm{v}_1=\frac{2m_1\mathrm{v}_1}{m_1+m_2}$. (5)

Кинетическая энергия первого шара до удара

$$E_{k1}=m_1\mathrm{v}_1^2/2. \qquad (6)$$

Кинетическая энергия второго шара после удара

$$E'_{k2}=\frac{m_2u_2^2}{2}=\frac{4m_1^2m_2\mathrm{v}_1^2}{2(m_1+m_2)^2}. \qquad (7)$$

Из уравнений (6), (7) найдем отношение:

$$\frac{E'_{k2}}{E_{k1}}=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}. \qquad (8)$$

а) Пусть $m_1=m_2$: $\frac{E'_{k2}}{E_{k1}}=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}=\frac{4m_1^2}{4m_1^2}=1$, $\left[\frac{E'_{k2}}{E_{k1}}\right]=\frac{\text{Дж}}{\text{Дж}}=1$.

б) Пусть $m_1=7m_2$: $\frac{E'_{k2}}{E_{k1}}=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}=\frac{28m_2^2}{64m_2^2}$, $\frac{E'_{k2}}{E_{k1}}\approx 0,44$.

Ответ: а) $\frac{E'_{k2}}{E_{k1}}=1$; б) $\frac{E'_{k2}}{E_{k1}}=0,44$.

Задача 1.47. Пушка, стоящая на горизонтальной плоскости, стреляет под углом $\alpha=30°$ к горизонту (рис. 28). Масса снаряда $m=20$ кг, начальная скорость $\mathrm{v}=200$ м/с. Какую скорость приобретает пушка при выстреле, если ее масса $M=500$ кг?

Дано:
$\alpha = 30°$
$m = 20$ кг
$v = 200$ м/с
$M = 500$ кг

u_x - ?

Решение. До выстрела суммарный импульс системы «снаряд–пушка» равен нулю. Выстрел произведен под углом α к горизонту. Найдем проекцию вектора импульса снаряда на ось x:

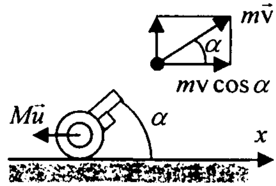

Рис. 28

$p_x = m v \cos\alpha$,

считая, что в этом направлении внешние силы не действуют. После выстрела по закону сохранения импульса в проекции на ось x для системы «снаряд–пушка» можно записать:

$Mu_x + m v\cos\alpha = 0$, отсюда

$$u_x = -\frac{m v\cos\alpha}{M}, \quad [u_x] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad u_x = -7 \text{ м/с}.$$

Знак минус показывает, что пушка откатится назад. Вторую составляющую импульса снаряда $m v\sin\alpha$ получит Земля.

Ответ: $u_x = -7$ м/с.

Задача 1.48. Граната, летящая со скоростью $v = 15$ м/с, разорвалась на два осколка массами $m_1 = 6$ кг и $m_2 = 14$ кг. Скорость большего осколка $v_2 = 24$ м/с, он движется по направлению движения гранаты. Найти скорость и направление движения меньшего осколка.

Дано:
$v = 15$ м/с
$v_2 = 24$ м/с
$m_1 = 6$ кг
$m_2 = 14$ кг

v_1 - ?

Решение. Проведем ось x в направлении движения гранаты и запишем законы сохранения импульса в проекции на эту ось:

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_{1x} + m_1 v_2, \qquad (1)$$

где $(m_1 + m_2)$ – масса всей гранаты.

Из формулы (1) находим

$$v_{1x} = \frac{(m_1 + m_2)v - m_2 v_2}{m_1},$$

$$[v_{1x}] = \frac{\text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}} - \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad v_{1x} = -6 \text{ м/с}.$$

Полученный в результате решения знак минус означает, что меньший осколок полетит в направлении, противоположном направлению движения гранаты.

Ответ: $v_{1x} = -6$ м/с.

Задача 1.49. Двое спортсменов-фигуристов массами $m_1 = 70$ кг и $m_2 = 60$ кг, держась за концы длинного шнура, неподвижно стоят на льду. Один из них начинает укорачивать шнур, выбирая его со скоростью $v = 0{,}5$ м/с. Найдите скорости движения u_1 и u_2 фигуристов по льду. Трением пренебречь.

Дано:
$m_1 = 70$ кг
$m_2 = 60$ кг
$v = 0{,}5$ м/с
---
u_1 - ? u_2 - ?

Решение. Согласно закону сохранения импульса, считая систему, состоящую из двух фигуристов, замкнутой, запишем в проекции на ось x (рис. 29): $p_1 = p_2$, где $p_1 = 0$ – импульс системы в начальном состоянии,

$$p_2 = m_2u_2 - m_1u_1 \text{ или } m_2u_2 - m_1u_1 = 0, \tag{1}$$

где p_2 – импульс системы после укорачивания шнура.

Скорость движения второго фигуриста в системе отсчета, связанной с первым, равна скорости укорачивания шнура. Тогда скорость второго фигуриста в системе отсчета, связанной с Землей, равна:

$$u_2 = v - u_1 \text{ или } u_1 + u_2 = v. \tag{2}$$

Решая систему двух уравнений:

$$\begin{cases} m_2u_2 - m_1u_1 = 0, \\ u_1 + u_2 = v, \end{cases}$$

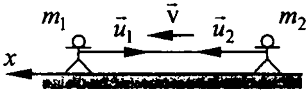

Рис. 29

получим:

$$u_1 = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}, \qquad [u_1] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$u_1 = 0{,}23$ м/с.

$$u_2 = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}, \quad [u_2] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad u_2 = 0{,}27 \text{ м/с}.$$

Ответ: $u_1 = 0{,}23$ м/с; $u_2 = 0{,}27$ м/с.

Задача 1.50. Тело массой $m_2 = 0,6$ кг скользит по наклонной поверхности клина (рис. 30) массой $m_1 = 2$ кг. Найдите ускорение движения тела a_2 и клина a_1, а также силу N взаимодействия клина и тела и силу взаимодействия $N_з$ клина с Землей, если известно, что угол при основании клина $\alpha = 30°$. Трением при движении тел пренебречь.

Дано:
$m_1 = 2$ кг
$m_2 = 0,6$ кг
$\alpha = 30°$

---

a_1 - ? a_2 - ?
N - ? $N_з$ - ?

Решение. В задаче рассматривается движение тела относительно клина и клина относительно Земли. Примем тело за материальную точку. Рассмотрим его движение относительно клина.

Поскольку клин движется с ускорением $\vec{a}_1$, то система отсчета, связанная с клином, является неинерциальной (НИСО). В неинерциальных системах все законы классической механики справедливы в предположении, что, наряду с силами взаимодействия тел, действуют силы инерции, зависящие прежде всего от характера движения самой системы.

Второй закон Ньютона применительно к телу в НИСО запишется в виде:

$$m_2\vec{a}_2 = \sum\vec{F} + \vec{F}_i, \tag{1}$$

где $\sum\vec{F}$ – геометрическая сумма внешних сил, действующих на тело; $\vec{F}_i = -m_2\vec{a}_1$ – сила инерции; a_2 – ускорение движения тела, направленное вдоль оси Ox.

На рис. 30,а показаны силы, действующие на тело и направление осей координат. Запишем уравнение (1) в проекциях на координатные оси:

$$Ox:\quad m_2 g\sin\alpha + m_2 a_1\cos\alpha = m_2 a_2, \tag{2}$$

$$Oy:\quad -N - m_2 a_1\sin\alpha + m_2 g\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Получим систему двух уравнений с тремя неизвестными: a_1, a_2 и N.

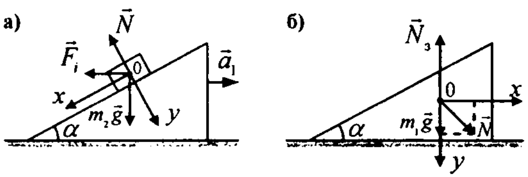

Рис. 30

Рассмотрим далее движение клина относительно Земли. Данную систему отсчета можно считать инерциальной. Направление осей координат и сил, действующих на клин, показано на рис. 30,б. $\vec{N}_з$ – сила взаимодействия клина с Землей; $\vec{N}$ – результат взаимодействия тела и клина. Все силы, действующие на клин, приложим в его центр масс, который движется как материальная точка. Запишем второй закон Ньютона для центра масс клина:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_з + \vec{N} . \qquad (4)$$

Уравнение (4) в проекциях на оси координат примет вид:

$$Ox: \quad m_1 a_1 = N\sin\alpha , \qquad (5)$$

$$Oy: \quad 0 = m_1 g + N\cos\alpha - N_з . \qquad (6)$$

Решая систему уравнений (3) и (5), находим ускорение клина:

$$a_1 = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha} , \quad a_1 = 1{,}2\ \text{м/с}^2 . \qquad (7)$$

Из уравнений (2) и (7) определяется ускорение движения тела:

$$a_2 = g\sin\alpha\left(1 + \cos^2\alpha \Big/ \left(\frac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha\right)\right), \quad a_2 = 6{,}1\ \text{м/с}^2 .$$

Система уравнений (5)–(7) позволяет определить силы взаимодействия N и N_2:

$$N = \frac{m_1 g\cos\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha} , \quad [N] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н} , \quad N = 4{,}8\ \text{Н} .$$

$$N_з = m_1 g\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha}\right), \quad [N_з] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н} , \quad N_з = 24{,}1\ \text{Н} .$$

Ответ: $a_1 = 1{,}2$ м/с^2; $a_2 = 6{,}1$ м/с^2; $N = 4{,}8$ Н; $N_з = 24{,}1$ Н.

Задача 1.51. Две гирьки массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}1$ кг привязаны к нити, перекинутой через блок (рис. 31). Блок прикреплен к потолку кабины лифта. Пренебрегая массой блока, найти силу, с которой блок действует на потолок кабины лифта, поднимающегося с ускорением $a = 1,0$ м/с^2. Нить считать невесомой и нерастяжимой. Трением в блоке пренебречь.

Дано:
$m_1 = 0,2$ кг
$m_2 = 0,1$ кг
$a = 1,0$ м/с^2

F - ?

Решение. Выполним решение задачи, связав систему отсчета с кабиной лифта (НИСО). Гирьки примем за материальные точки.

На гирьку массой m_1 действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила инерции $\vec{F}_{i1} = -m_1\vec{a}$. Применим второй закон Ньютона относительно выбранной НИСО:

$m_1\vec{a}_1 = \sum\vec{F} + \vec{F}_i$, или в проекции на ось Ox:

$$m_1 a_0 = m_1 g + m_1 a - T, \tag{1}$$

где $\vec{a}$ – ускорение лифта; $\vec{a}_0$ – ускорение гирьки массой m_1, направленное по оси Ox.

Аналогично запишем для гирьки массой m_2:

$$-m_2 a_0 = m_2 g + m_2 a - T. \tag{2}$$

Решая систему двух уравнений (1) и (2), найдем силу натяжения нити:

$$T = \frac{2m_1 m_2 (g+a)}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Запишем второй закон Ньютона для центра масс блока: $2T - F = 0$, так как в системе отсчета, связанной с кабиной лифта, центр масс блока неподвижен, отсюда $F = 2T$, или, учитывая выражение (3), получим:

$$F = \frac{4m_1 m_2 (g+a)}{m_1 + m_2},$$

$$[F] = \frac{\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н},$$

$F = 2,9$ Н.

Ответ: $F = 2,9$ Н.

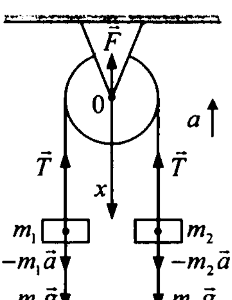

Рис. 31

Задача 1.52. Определить точку либрации Земли, т. е. точку пространства, в которой материальное тело массы m одинаково притягивается Землей и Луной.

Дано:
$F_1 = F_2$

r_1 - ?

Решение. Допустим, что точка А, лежащая на линии соединения центров Земли и Луны, является либрационной точкой (рис. 32). Выпишем табличные данные:

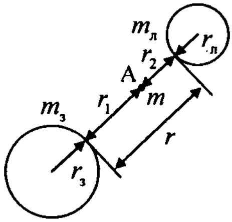

Рис. 32

масса Земли $m_з = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг ;

масса Луны $m_л = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг ;

радиус Земли $r_з = 6{,}378 \cdot 10^6$ м ;

радиус Луны $r_л = 1{,}737 \cdot 10^6$ м ;

среднее расстояние до Луны $r = 3{,}844 \cdot 10^8$ м .

Пусть r_1 – расстояние от поверхности Земли до искомой точки А; r_2 – расстояние от поверхности Луны до точки А.

Найдем силы притяжения F_1 – между телом массы m и Землей, и F_2 – между телом и Луной:

$$F_1 = G\frac{mm_з}{(r_1 + r_з)^2}, \quad F_2 = G\frac{mm_л}{(r_2 + r_л)^2}.$$

По условию задачи модули этих сил равны, т. е.

$$F_1 = F_2 \text{ или } G\frac{mm_з}{(r_1 + r_з)^2} = G\frac{mm_л}{(r_2 + r_л)^2}. \tag{1}$$

Расстояние от поверхности Земли до Луны равно $r = r_1 + r_2$, тогда

$$r_2 = r - r_1. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1) и извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получим:

$$\frac{\sqrt{m_з}}{r_1 + r_з} = \frac{\sqrt{m_л}}{r - r_1 + r_л}, \text{ откуда } r_1 + r_з = \sqrt{\frac{m_з}{m_л}}(r - r_1 + r_л). \tag{3}$$

Преобразуем выражение (3):

$$r_1\left(1 + \sqrt{\frac{m_з}{m_л}}\right) = \sqrt{\frac{m_з}{m_л}}(r + r_л) - r_з, \tag{4}$$

$$1 + \sqrt{\frac{m_з}{m_л}} = \frac{\sqrt{m_л} + \sqrt{m_з}}{\sqrt{m_л}}. \tag{5}$$

Тогда из (4) и (5) находим:

$$r_1 = \frac{(r + r_з)\sqrt{m_з} - r_з\sqrt{m_л}}{\sqrt{m_з} + \sqrt{m_л}}, \quad [r_1] = \frac{\sqrt{кг} \cdot м - \sqrt{кг} \cdot м}{\sqrt{кг} + \sqrt{кг}} = м .$$

Подставив табличные данные, получим, что либрационная точка находится на расстоянии $r_1 = 3,4 \cdot 10^8$ м от поверхности Земли.

Ответ: $r_1 = 3,4 \cdot 10^8$ м .

Задача 1.53. Материальная точка массой m в некоторый момент времени находится в точке О на оси длинного тонкого стержня массой M и длиной l на расстоянии a от одного из его концов (рис. 33). Определите напряженность и потенциал гравитационного поля стержня в точке О, а также силу, действующую на материальную точку.

Дано:
m, M,
a, l
---
g - ? φ - ?
F - ?

Решение. Пусть ось стержня совпадает с осью Ox. Разобьем стержень на элементарные отрезки длиной dx, настолько малые, что каждый из них можно принять за материальную точку. Найдем массу dM выделенного элемента:

$$dM = M\frac{dx}{l} .$$

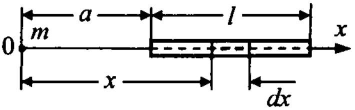

Рис. 33

Тогда модуль силы притяжения dF материальной точки элементом стержня dx можно определить по закону всемирного тяготения:

$$dF = G\frac{mdM}{x^2} = G\frac{mM}{l}\frac{dx}{x^2} . \tag{1}$$

Поделив выражение (1) на m, получим модуль напряженности гравитационного поля в точке О, создаваемой выделенным элементом стержня:

$$dg = \frac{dF}{m} = G\frac{M}{l}\frac{dx}{x^2} . \tag{2}$$

Направление вектора напряженности $d\vec{g}$ совпадает с направлением силы, действующей на материальную точку, т. е. $d\vec{g}$ направлено по оси Ox. Так как от всех элементарных отрезков стрежня векторы $d\vec{g}$ направлены в одну сторону, то модуль напряженности поля $|\vec{g}|$ в точке О определяется интегрированием выражения (2):

$$g = G\frac{M}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2} = \frac{GM}{a(a+l)}, \tag{3}$$

$$[g] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Потенциал гравитационного поля выделенного элемента в точке О определяется с использованием выражения (1.32):

$$d\varphi = \frac{dE_{\text{г}}}{m} = -G\frac{dM}{x} = -G\frac{M}{l}\frac{dx}{x}. \tag{4}$$

Интегрируя (4), получим потенциал гравитационного поля, создаваемого стержнем в точке О:

$$\varphi = -G\frac{M}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x} = -G\frac{M}{l}\ln\left(1+\frac{l}{a}\right), \quad [\varphi] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Сила притяжения, действующая на материальную точку, равна:

$$F = mg = \frac{GMm}{a(a+l)}, \quad [F] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$$

и направлена по оси Ox к стержню.

Ответ: $g = \dfrac{GM}{a(a+l)}$; $\varphi = -G\dfrac{M}{l}\ln\left(1+\dfrac{l}{a}\right)$; $F = \dfrac{GMm}{a(a+l)}$.

Задача 1.54. Деревянный шар ($\rho = 500$ кг/м^3) радиусом $R = 5$ см удерживается под водой внешней силой. При этом верхняя точка шара касается поверхности воды. Найдите работу, которую произведет сила Архимеда, если отпустить шар.

Дано:
$R = 5\cdot10^{-2}$ м
$\rho = 500$ кг/м^3
$\rho_0 = 10^3$ кг/м^3

A - ?

Решение. Рассмотрим свободно плавающий шар. Пусть центр шара находится на высоте H (рис. 34) над поверхностью воды, высота шарового сегмента, погруженного в воду, h. Шар находится в равновесии, если сила тяжести mg, действующая на него, будет уравновешена силой Архимеда F_a, т. е. $mg = F_a$, где

$m=\rho V=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ – масса шара, $F_a=\rho_0 V_0 g$; V_0 – объем погруженной части шара.

Найдем объем V_0 шарового сегмента , погруженного в воду:

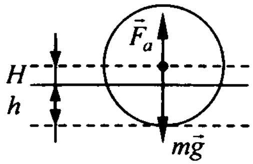

Рис. 34

$V_0=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$, следовательно, сила

$F_a=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)g\rho_0=\frac{4}{3}\pi R^3 g\rho$ или

$4R^3=\frac{\rho_0}{\rho}h^2(3R-h)=2h^2(3R-h)$, откуда

$$2R^3=h^2(3R-h),\ \ 2R^3-h^2(3R-h)=0. \qquad (1)$$

Кубическое уравнение (1) имеет единственный корень $h=R$. Следовательно, шар свободно плавает, будучи погружен в воду до своей диаметральной плоскости, при этом $H=0$.

Если теперь погрузить шар на величину x, то сила Архимеда превысит действующую на шар силу тяжести и результирующая сила, выталкивающая шар из воды, будет равна:

$$F(x)=F_a(x)-mg. \qquad (2)$$

Сила $F(x)$ зависит от величины погружения x. Если отпустить погруженный в воду шар, то он начинает всплывать, величина x, а значит, и сила $F(x)$, уменьшаются. По закону Архимеда сила

$F_a(x)=\rho_0 V_1 g$,

где $V_1=\frac{1}{3}\pi(h+x)^2[3R-(h+x)]$ – объем шарового сегмента высотой $(h+x)$.

Тогда результирующая сила, выталкивающая шар:

$F(x)=F_a(x)-mg=\rho_o V_1 g-\rho_o V_o g=\rho_o g(V_1-V_o)=\rho_o g V(x)$,

где $V(x)=V_1-V_o=\frac{1}{3}\pi(h+x)^2[3R-(h+x)]-\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$. $\qquad$ (3)

Поскольку, как показано выше, $h=R$, то выражение (3) примет вид:

$$V(x)=V_1-V_o=\frac{1}{3}\pi(R+x)^2(2R-x)-\frac{2}{3}\pi R^3. \qquad (4)$$

Следовательно, выталкивающая сила, действующая на шар, равна:

$$F(x)=\rho_o gV(x)=\frac{1}{3}\pi\rho_o g\left[(R+x)^2(2R-x)-2R^3\right]=\frac{1}{3}\pi\rho_o g\times$$
$$\times\left[(R^2+2Rx+x^2)(2R-x)-2R^3\right]=\frac{1}{3}\pi\rho_o g(3R^2x-x^3).$$

Работа переменной силы $F(x)$ при изменении x от 0 до R определяется по формуле (1.30):

$$A=\int_0^R F(x)dx=\frac{1}{3}\pi\rho_o g\int_0^R(3R^2x-x^3)dx=\frac{1}{3}\pi\rho_o g\left(\frac{3R^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^R=$$
$$=\frac{1}{3}\pi\rho_o g\left(\frac{3R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right)=\frac{5}{12}\pi\rho_o gR^4,$$

$$[A]=\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}^4=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж},\quad A=0{,}08\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A=0{,}08$ Дж.

1.3. Вращение твердого тела. Закон сохранения момента импульса

Основные формулы

● Момент силы относительно неподвижной точки

$$\vec{M}=\left[\vec{r},\vec{F}\right],\qquad(1.38)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}$.

● Момент силы относительно неподвижной оси z

$$\vec{M}_z=\left[\vec{r},\vec{F}\right]_z.\qquad(1.39)$$

● Момент инерции относительно оси вращения:

а) материальной точки:

$$I=mr^2,\qquad(1.40)$$

где m – масса точки; r – расстояние точки от оси вращения;

б) сплошного однородного твердого тела:

$$I=\int_m r^2dm=\rho\int_V r^2dV,\qquad(1.41)$$

где ρ – плотность тела; V – его объем.

● Моменты инерции некоторых однородных тел массы m правильной геометрической формы:

а) стержень длиной l относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через:

1) середину стержня:

$$I = \frac{1}{12} ml^2, \tag{1.42}$$

2) конец стержня:

$$I = \frac{1}{3} ml^2; \tag{1.43}$$

б) обруч относительно геометрической оси, перпендикулярной плоскости обруча:

$$I = mR^2, \tag{1.44}$$

где R – радиус обруча;

в) диск (цилиндр) радиусом R относительно оси, совпадающей с осью диска и перпендикулярной его плоскости:

$$I = \frac{1}{2} mR^2; \tag{1.45}$$

г) однородный шар радиусом R относительно оси, проходящей через центр шара:

$$I = 0{,}4mR^2. \tag{1.46}$$

● Теорема Штейнера:

$$I = I_0 + ma^2, \tag{1.47}$$

где I – момент инерции тела относительно произвольной оси; I_0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции тела параллельно заданной оси; a – расстояние между осями; m – масса тела.

● Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]. \tag{1.48}$$

● Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}_z, \tag{1.49}$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси z; $\vec{\omega}_z$ – угловая скорость вращения.

● Закон сохранения момента импульса

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const} .$$

Для двух взаимодействующих тел

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = I_1'\omega_1' + I_2'\omega_2', \tag{1.50}$$

где I_1, I_2, ω_1, ω_2 – моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия; I_1', I_2', ω_1', ω_2' – те же величины после взаимодействия.

● Основное уравнение динамики вращательного движения

$$M_z = I_z\varepsilon , \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{1.51}$$

где ε – угловое ускорение.

● Работа внешних сил при повороте твердого тела на конечный угол φ равна:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi .$$

Если $M_z = \text{const}$, то работа

$$A = M_z\varphi. \tag{1.52}$$

● Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 . \tag{1.53}$$

● Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения:

$$E_k = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{1.54}$$

где $\frac{m\text{v}^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения; v – скорость центра инерции тела; $\frac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции.

Задача 1.55. Найдите момент инерции I прямоугольника, сделанного из проволоки, со сторонами $a = 20$ см и $b = 10$ см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины больших сторон. Масса прямоугольника $m_0 = 0{,}3$ кг.

Дано:
$a = 0{,}2$ м
$b = 0{,}1$ м
$m_0 = 0{,}3$ кг

I - ?

Решение. Момент инерции прямоугольника равен сумме моментов инерции его сторон. С учетом симметрии фигуры (рис. 35) можно записать:

$$I = 2(I_A + I_B), \tag{1}$$

где I_A и I_B – моменты инерции сторон a и b прямоугольника соответственно.

Определим I_A. Момент инерции стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через центр инерции стержня и перпендикулярно ему, найдем по формуле (1.42): $I = \dfrac{ml^2}{12}$.

Так как на единицу длины прямоугольника приходится масса $\dfrac{m_0}{2(a+b)}$, то масса стороны a равна $m_a = \dfrac{m_0 a}{2(a+b)}$, а ее момент инерции

$$I_A = \frac{m_0 a^3}{24(a+b)}. \tag{2}$$

Определим I_B. Момент инерции стержня относительно оси, совпадающей с осью стержня, равен нулю. Согласно теореме Штейнера момент инерции стержня длиной l и массой m относительно оси, параллельной стержню и расположенной на расстоянии r от стержня, равен $I = mr^2$. С учетом того, что масса стороны b равна $m_b = \dfrac{m_0 b}{2(a+b)}$, а расстояние $r = a/2$, запишем:

$$I_B = \frac{m_0 b a^2}{8(a+b)}. \tag{3}$$

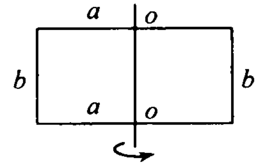

Рис. 35

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$I = 2\left[\frac{m_0 a^3}{24(a+b)} + \frac{m_0 b a^2}{8(a+b)}\right] = \frac{m_0 a^2}{4(a+b)}\left(\frac{a}{3}+b\right),$$

$$[I] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{м}}\cdot\text{м} = \text{кг}\cdot\text{м}^2, \quad I = 1{,}67\cdot10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $I = 1{,}67\cdot10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 1.56. Определите момент инерции равностороннего треугольника, сделанного из проволоки, со стороной $a = 20$ см относительно оси oo, лежащей в плоскости треугольника, как показано на рис. 36, если масса треугольника $m = 20$ г.

Дано:
$a = 0{,}2$ м
$m = 0{,}02$ кг
I - ?

Решение. Выберем оси координат x и y. Момент инерции треугольника ABD равен сумме моментов инерций его сторон. Найдем проекции сторон AB и BD на направление, перпендикулярное оси вращения oo (ось y): $BC = a\sin 60°$. (Проекции этих сторон на ось дают моменты инерции, равные нулю.)

Найдем момент инерции проекций AB и BD по формуле (1.43):

$$I_1 = \frac{1}{3}\frac{m}{3}a^2\sin^2 60° + \frac{1}{3}\frac{m}{3}a^2\sin^2 60° = \frac{1}{6}ma^2.$$

Момент инерции стороны AD

$$I_2 = \frac{m}{3}(\mathrm{BC})^2 = \frac{m}{3}a^2\frac{3}{4} = \frac{ma^2}{4}.$$

Тогда момент инерции треугольника

$$I = I_1 + I_2 = \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{4} = \frac{5}{12}ma^2,$$

$$[I] = \text{кг}\cdot\text{м}^2, \quad I = 3\cdot10^{-4}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $I = 3\cdot10^{-4}$ кг·м^2.

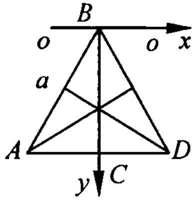

Рис. 36

Задача 1.57. Найдите момент инерции обруча радиусом $R = 30$ см и массой $m = 200$ г относительно оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости обруча.

Дано:
$R = 0{,}3$ м
$m = 0{,}2$ кг
I - ?

Решение. Момент инерции однородного тела находится по формуле (1.41):

$$I = \int r^2 dm .$$

Интегрирование данного выражения производится по всем точкам тела, где r – расстояние от выбранной точки до оси вращения.

Выделим на обруче элемент длиной dl (рис. 37), массой $dm = \dfrac{m}{2\pi R} dl$.

Положение элемента dl относительно центра обруча можно определить углом φ и радиус-вектором $\vec{r}$. При этом $dl = Rd\varphi$, $r = R\cos\varphi$. Тогда

$$dI = \frac{m}{2\pi R} \int (R\cos\varphi)^2 Rd\varphi . \qquad (1)$$

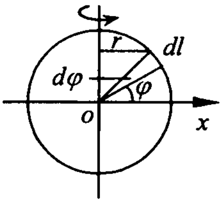

Рис. 37

Для нахождения момента инерции обруча интегрируем выражение (1) от $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, а полученный результат необходимо удвоить:

$$I = \frac{2mR^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{mR^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{mR^2}{2\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\varphi d\varphi \right] = \frac{mR^2}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{mR^2}{2\pi} (\pi + \sin\pi) = \frac{mR^2}{2}.$$

$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$, $I = 9 \cdot 10^{-3}$ $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Ответ: $I = 9 \cdot 10^{-3}$ $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Задача 1.58. Найдите момент инерции диска радиусом $R = 10$ см и массой $m = 1$ кг относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через середину одного из его радиусов.

Дано:
$R = 0{,}1$ м
$m = 1$ кг
I - ?

Решение. Согласно формуле (1.45) момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр инерции:

$$I_0 = \frac{1}{2} mR^2 . \qquad (1)$$

По теореме Штейнера можно найти момент инерции относительно оси, проходящей через середину радиуса:

$$I = I_0 + ma^2, \tag{2}$$

где $a = R/2$.

Из уравнений (1), (2) имеем:

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{4}mR^2 = \frac{3}{4}mR^2, \quad [I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2, \quad I = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $I = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 1.59. Найдите момент инерции однородного диска массой $m_0 = 1$ кг и радиусом $R = 0{,}5$ м относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости, если в диске вырезано отверстие радиусом $r = 0{,}1$ м на расстоянии $l = 10$ см от оси диска.

Дано:
$m_0 = 1$ кг
$R = 0{,}5$ м
$r = 0{,}1$ м
$l = 0{,}1$ м
I - ?

Решение. Момент инерции сплошного диска относительно оси, проходящей через его центр инерции:

$$I_0 = \frac{1}{2}mR^2. \tag{1}$$

Масса сплошного диска

$$m_0 = \rho V = \rho \pi R^2 h, \tag{2}$$

где ρ – плотность материала; h – высота диска; V – объем диска.

Из выражения (2) найдем плотность:

$$\rho = \frac{m_0}{\pi R^2 h}. \tag{3}$$

Масса вырезанного диска $m = \rho \pi r^2 = \dfrac{m_0 r^2 h \pi}{\pi R^2 h} = m_0 \dfrac{r^2}{R^2}$.

Момент инерции вырезанного диска относительно оси, проходящей через его центр инерции:

$$I_в = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{m_0 r^4}{2R^2}. \tag{4}$$

Момент инерции вырезанного диска относительно центра сплошного диска определяется по теореме Штейнера:

$$I' = I_в + ml^2 = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2 = \frac{m_0 r^2}{R^2}\left(\frac{r^2}{2} + l^2\right). \tag{5}$$

Искомый момент инерции найдем из уравнений (1), (5):

$$I = I_o - I' = \frac{1}{2}m_o R^2 - \frac{m_o r^2}{R^2}\left(\frac{r^2}{2} + l^2\right) = \frac{m_o}{2R^2}\left(R^4 - r^4 - r^2 l^2\right),$$

$[I] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^4 = \text{кг} \cdot \text{м}^2$, $I = 12{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг·м².

Ответ: $I = 12{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг·м².

Задача 1.60. Тонкий стержень массой $m = 0{,}5$ кг и длиной $l = 0{,}6$ м вращается под действием внешнего вращающего момента M с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Определите величину момента M, если ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его середину.

Дано:
$m = 0{,}5$ кг
$l = 0{,}6$ м
$\varepsilon = 2$ рад/с^2
M - ?

Решение. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения (формула 1.51) момент

$M = I\varepsilon$,

где $I = \frac{1}{12}ml^2$ – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину. Тогда

$M = \frac{1}{12}ml^2\varepsilon$, $[M] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м}$, $M = 3 \cdot 10^{-2}$ Н·м.

Ответ: $M = 3 \cdot 10^{-2}$ Н·м.

Задача 1.61. Горизонтальная платформа массой $m_1 = 250$ кг имеет форму диска радиусом $R = 2{,}5$ м. Платформа может вращаться относительно оси, проходящей через ее центр. С какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если вдоль ее края будет двигаться человек массой $m_2 = 75$ кг со скоростью v = 2,5 м/с относительно платформы?

Дано:
$m_1 = 250$ кг
$m_2 = 75$ кг
$R = 2{,}5$ м
v = 2,5 м/с
ω - ?

Решение. Согласно условию задачи, платформа с человеком вращается по инерции. Это значит, что момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю. Систему «человек–платформа» будем считать замкнутой. Применим к этой системе закон сохранения момента импульса (1.49):

$$\vec{L}_\text{ч} + \vec{L}_\text{п} = 0, \tag{1}$$

где $L_ч = m_2 \text{v} R$ – момент импульса человека относительно оси вращения платформы, $L_п$ – момент импульса платформы с человеком:

$$L_п = \omega(I_п + I_ч), \quad (2)$$

где $I_п = \frac{1}{2} m_1 R^2$, $I_ч = m_2 R^2$ – моменты инерции платформы и человека соответственно.

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$m_2 \text{v} R = \omega\left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2\right),$$

$$\omega = \frac{m_2 \text{v}}{\frac{1}{2} m_1 R + m_2 R} = \frac{2 m_2 \text{v}}{R(m_1 + 2m_2)}, \; [\omega] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \text{с}^{-1}, \; \omega = 37{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $\omega = 37{,}5 \cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$.

Задача 1.62. Тонкий однородный стержень длиной $l = 0{,}8$ м имеет горизонтальную ось вращения, проходящую через его конец. Найдите скорость v нижней точки стержня, когда стержень проходит положение равновесия при отклонении его от вертикали на угол $\alpha = 30°$.

Дано:
$l = 0{,}8$ м
$\alpha = 30°$

v - ?

Решение. При отклонении стержня на угол α от положения равновесия его центр поднимется на высоту h (рис. 38), которую можно определить из треугольника AOB:

$$\frac{l}{2} - h = \frac{l}{2}\cos\alpha, \; h = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha). \quad (1)$$

При этом потенциальная энергия стержня увеличится на величину

$$\Delta E_п = mgh, \quad (2)$$

где m – масса стержня.

При прохождении стержнем положения равновесия потенциальная энергия $\Delta E_п$ переходит в кинетическую энергию:

$$E_к = I\omega^2 / 2, \quad (3)$$

где I – момент инерции стержня, ω – его угловая скорость вращения.

Для стержня, ось вращения которого проходит через его конец:

$$I=\frac{1}{3}ml^2. \qquad (4)$$

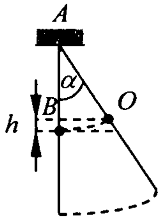

Рис. 38

По закону сохранения энергии

$$E_к=\Delta E_п. \qquad (5)$$

Из уравнений (1)–(5) получим:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)=\frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

или $g(1-\cos\alpha)=\frac{1}{3}l\omega^2$. (6)

Найдем из выражения (6) угловую скорость $\omega=\sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}}$.

Линейная скорость $v=\omega l=\sqrt{3gl(1-\cos\alpha)}$, $[v]=\sqrt{\frac{м}{с^2}\cdot м}=\frac{м}{с}$, $v = 1{,}78$ м/с.

Ответ: $v = 1{,}78$ м/с.

1.4. Элементы специальной теории относительности (СТО)

Основные формулы

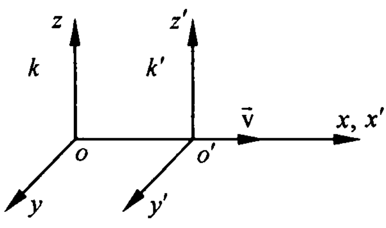

Рис. 39

В СТО рассматриваются только инерциальные системы отсчета. В рассматриваемых задачах считается, что оси координат y, y' и z, z' (рис. 39) сонаправлены, а относительная скорость v системы координат k' относительно системы k направлена вдоль общей оси xx'.

● Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня

$$l=l_0\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (1.55)$$

где l_0 – длина стержня в системе k', относительно которой стержень покоится (собственная длина); стержень параллелен оси x; l – длина стержня в системе k, относительно которой он движется со скоростью v; $\beta = \frac{\text{v}}{c}$; c – скорость света в вакууме.

● Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1.56}$$

где Δt_0 – промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы k', измеренными по часам этой системы (собственное время движущихся часов); Δt – промежуток времени между двумя событиями, измеренными по часам системы k.

● Зависимость массы частицы от скорости ее движения (релятивистская масса)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1.57}$$

где m_0 – масса покоя этой частицы.

● Релятивистский импульс

$$\vec{p} = m\vec{\text{v}} = \frac{m_0\vec{\text{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.58}$$

● Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \tag{1.59}$$

● Полная энергия релятивистской частицы

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + E_к, \tag{1.60}$$

где $m_0 c^2 = E_0$ – энергия покоя частицы.

● Изменение массы системы на величину Δm соответствует изменению энергии системы на величину

$$\Delta E = c^2 \Delta m. \tag{1.61}$$

● Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \tag{1.62}$$

● Релятивистское сложение скоростей

$$u=(u'+\mathrm{v})\Big/\left(1+\frac{u'\mathrm{v}}{c^2}\right),\quad u'=(u-\mathrm{v})\Big/\left(1-\frac{u\mathrm{v}}{c^2}\right), \tag{1.63}$$

где u' - скорость тела относительно системы k' (относительная скорость); v – скорость системы k' относительно системы k (переносная скорость); u – скорость тела относительно системы k.

● Энергию микрочастиц часто измеряют в электрон-вольтах:

$$1\ \text{эВ} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Задача 1.63. Релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 30%. С какой относительной скоростью v движется тело?

Дано:
$\frac{\Delta l}{l_o}=0{,}3$

v - ?

Решение. Релятивистское сокращение длины (1.55):

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}. \tag{1}$$

По условию задачи $\frac{l_0-l}{l_0}=1-\frac{l}{l_0}=0{,}3$, отсюда

$$l=0{,}7l_0. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в (1), получим

$$\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}=0{,}7,\ \mathrm{v}=\sqrt{c^2(1-0{,}49)}=\sqrt{0{,}51c^2}=0{,}714c,\ \mathrm{v}=2{,}14\cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Ответ: $\mathrm{v} = 2{,}14\cdot 10^8$ м/с.

Задача 1.64. Тело движется со скоростью, равной 0,9. Найдите релятивистское сокращение объема тела.

Дано:
$\mathrm{v}=0{,}9c$

τ - ?

Решение. Поскольку поперечные размеры тела при его движении не изменяются, то изменение объема тела будет определяться релятивистским сокращением продольного размера, определяемого формулой (1.55):

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}.$$

Тогда сокращение объема можно найти по аналогичной формуле

$$V=V_0\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}.$$

Определим относительное изменение объема:

$$\tau = \frac{V_0 - V}{V_0} \cdot 100\% = \frac{V_0 - V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{V_0} \cdot 100\% = \left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \cdot 100\%, \ \tau = 56\%.$$

Ответ: $\tau = 56\%$.

Задача 1.65. Скорость движения мезона v = 0,95 *c*. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

Дано:
$v = 0{,}95c$
$\Delta t = 1$ с
$\Delta\tau$ - ?

Решение. Промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя и соответствующий ему промежуток Δt собственного времени связаны соотношением:

(1.56): $\Delta\tau = \Delta t \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, отсюда

$$\Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}95^2}}, \ \Delta\tau = 3{,}2 \text{ с}.$$

Ответ: $\Delta\tau = 3{,}2$ с.

Задача 1.66. В ускорителе протонов – циклотроне – относительное увеличение массы частицы не должно превышать 5%. До какой энергии можно ускорять протоны в циклотроне?

Дано:
$n \le 5\%$
$E_к$ - ?

Решение. Согласно формуле (1.60) кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = E - E_o = mc^2 - m_oc^2 = c^2(m - m_o). \quad (1)$$

Поделив правую и левую части уравнения на m_o, получим:

$$\frac{E_к}{m_o} = \frac{c^2(m - m_o)}{m_o}. \quad (2)$$

Обозначим $\frac{m - m_o}{m_o} = n$, тогда $E_к = m_oc^2n$. По условию задачи $n = 0{,}05$.

Следовательно, $E_к = 41 \cdot 10^{-16}$ Дж $= 25{,}6$ кэВ.

Ответ: $E_к = 25{,}6$ кэВ.

Задача 1.67. В ускорителе электронов – бетатроне – частицы приобретают энергию $E_к = 0{,}67$ МэВ. До какой скорости разгоняются электроны?

Дано:
$E_к = 1{,}072 \cdot 10^{-13}$ Дж

v - ?

Решение. Кинетическая энергия релятивистской частицы определяется выражением:

$$E_к = E - E_0 = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \qquad (1)$$

где $\beta = \mathrm{v}/c$ – скорость частицы, выраженная в долях скорости света.

Из уравнения (1) запишем:

$$\frac{E_к}{E_0} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ откуда } \quad 1-\beta^2 = \frac{1}{\left(\dfrac{E_к}{E_0}+1\right)^2},$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\dfrac{E_к}{E_0}+1\right)^2}} = 0{,}902, \ \mathrm{v} = \beta c, \ \mathrm{v} \approx 2{,}71 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\mathrm{v} \approx 2{,}71 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 1.68. Две ракеты летят навстречу друг другу со скоростями, равными $0{,}8c$ по отношению к неподвижному наблюдателю. Здесь c – скорость света в вакууме. Найдите скорость сближения ракет.

Дано:
$\mathrm{v} = 0{,}8c$
$u' = 0{,}8c$

u - ?

Решение. По условию задачи первая ракета летит со скоростью $u' = 0{,}8c$ относительно второй ракеты. В свою очередь, вторая ракета движется со скоростью $\mathrm{v} = 0{,}8c$ относительно неподвижного наблюдателя. Обе скорости лежат на одной прямой. Результирующая скорость ракет u (скорость их сближения) относительно неподвижного наблюдателя можно определить по формуле сложения скоростей в релятивистской механике (1.63):

$$u = (u' + \mathrm{v}) \Big/ \left(1 + \frac{u'\mathrm{v}}{c^2}\right).$$

Подставив значения скоростей, данные в задаче, получим: $u \approx 0{,}98c$.

Интересно отметить, что по принципу сложения скоростей в классической механике $u = u' + v \approx 1{,}6c$, что противоречит второму постулату теории относительности Эйнштейна, утверждающему, что скорость тела не может превышать скорости света в вакууме.

Ответ: $u \approx 0{,}98c$.

Задача 1.69. Поток энергии, излучаемой Солнцем, $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. За какое время масса Солнца уменьшится в 2 раза? Излучение Солнца считать постоянным.

Дано:
$P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт
$\dfrac{m_0}{m} = 2$
t - ?

Решение. Изменение массы системы на Δm соответствует изменению энергии системы на величину

$\Delta E = c^2 \Delta m$ ·

За время t при постоянном излучении Солнце выделит энергию $\Delta E = Pt$, а потеряет при этом массу $\Delta m = m_0/2$, где $m_0 = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца. Тогда $Pt = \dfrac{c^2 m_0}{2}$, откуда

$$t = \frac{c^2 m_0}{2P}, \quad [t] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{Вт}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot c}{\text{с}^2 \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \text{с}, \quad t \approx 7 \cdot 10^{12} \text{ лет}.$$

Ответ: $t \approx 7 \cdot 10^{12}$ лет.

Задача 1.70. Реакция деления ядра урана $^{235}_{92}U$ сопровождается выделением энергии $\Delta E_0 = 200$ МэВ. Определите изменение массы Δm при делении одного моля урана.

Дано:
$\Delta E_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж
$\nu = 1$ моль
Δm - ?

Решение. Изменение массы

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \tag{1}$$

При делении ν молей урана освобождается энергия

$$\Delta E = \Delta E_0 \nu N_A, \tag{2}$$

где ΔE_0 – энергия, освобождаемая при делении одного ядра, N_A – число Авогадро.

Подставив уравнение (2) в (1), получим:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0 \nu N_A}{c^2}, \ [\Delta m] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{кг}, \ \Delta m = 0{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ кг}.$$

Ответ: $\Delta m = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$ кг.

Задача 1.71. Электрон движется со скоростью v = 0,6*c*. Определите релятивистский импульс и кинетическую энергию электрона.

Дано:
$v = 0{,}6c$

p - ? $E_к$ - ?

Решение. Релятивистский импульс p определяется по формуле (1.58):

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг – масса покоя электрона.

Подставив численные данные, для импульса получим:

$$p = 2{,}05 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы определяется как разность между полной энергией E и энергией покоя E_0 этой частицы (1.59):

$E_к = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$. Подставив числовые значения, получим: $E_к \approx 20{,}5 \cdot 10^{-15}$ Дж $= 0{,}128$ МэВ.

Ответ: $p = 2{,}05 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$; $E_к \approx 0{,}128$ МэВ.

1.5. Механические колебания

Основные формулы

- Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (1.64)$$

● Изменение со временем t колеблющейся величины x описывается формулой

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ или } x = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1.65)$$

где x – смещение (отклонение колеблющейся системы от положения равновесия); A – амплитуда колебаний; ω_0 – круговая (циклическая) частота; φ – начальная фаза при $t_0 = 0$; $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебаний в момент времени t.

● Гармонические колебания можно представить с помощью векторной диаграммы. Вектор $\vec{A}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 относительно точки O (рис. 40), при этом угол φ между осью Ox и вектором $\vec{A}$ непрерывно изменяется со временем t:

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0,$$

где φ_0 – начальный угол при $t_0 = 0$. При вращении проекция конца вектора $\vec{A}$ на ось Ox совершает гармонические колебания:

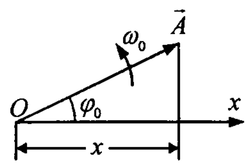

Рис. 40

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

при которых модуль вектора $|\vec{A}|$ является амплитудой, угловая скорость вращения ω_0 – циклической частотой, а угол φ_0 – начальной фазой колебаний.

Метод векторной диаграммы используется при сложении гармонических колебаний одинаковой частоты и определении сдвига фаз между током и напряжением в цепях переменного тока.

● Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$\text{v} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1.66)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\text{v}}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x. \qquad (1.67)$$

● Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты:

а) амплитуда результирующих колебаний:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \qquad (1.68)$$

б) начальная фаза результирующих колебаний:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \tag{1.69}$$

● Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с одной и той же частотой ω_0:

$$x = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1),\ y = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2),$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{1.70}$$

● Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}kA^2, \tag{1.71}$$

где $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$; k – коэффициент упругой силы; m – масса.

● Период колебаний:

а) пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \tag{1.72}$$

б) математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1.73}$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения;

в) физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}, \tag{1.74}$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний; d – расстояние от центра тяжести маятника до оси колебаний.

● Уравнение затухающих колебаний

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi), \tag{1.75}$$

где $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ – зависимость амплитуды колебаний от времени t; A_0 – начальная амплитуда; e – основание натурального логарифма; $\beta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; r – коэффициент сопротивления.

● Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \tag{1.76}$$

где ω_o – частота свободных колебаний.

● Логарифмический декремент затухания

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T, \tag{1.77}$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период T.

● Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{1.78}$$

где F_o – амплитудное значение внешней периодической силы.

● Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \tag{1.79}$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{m\left(2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)}. \tag{1.80}$$

Задача 1.72. Тонкий однородный диск радиусом $R = 0{,}3$ м имеет вырез в виде круга радиусом $r = 0{,}15$ м (рис. 41). Найдите период колебаний диска, если ось вращения перпендикулярна его плоскости и проходит через точку O.

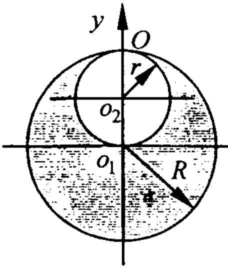

Рис. 41

Дано:
$R = 0{,}3$ м
$r = 0{,}15$ м
T - ?

Решение. Диск представляет собой физический маятник, период колебаний которого определяется по формуле (1.74):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}, \qquad (1)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний O; d – расстояние между центром инерции маятника и осью колебаний.

Момент инерции диска найдем по формуле:

$$I = I_R - I_r, \qquad (2)$$

где I_R – момент инерции диска радиусом R (без выреза); I_r – момент инерции диска радиусом r.

С использованием теоремы Штейнера имеем:

$$I_R = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2, \qquad (3)$$

$$I_r = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2, \qquad (4)$$

где M и m – массы дисков радиуса R и r соответственно.

Подставив выражения (3), (4) в (2), получим:

$$I = \frac{3}{2}\left(MR^2 - mr^2\right). \qquad (5)$$

Найдем массы дисков:

$$M = \rho\pi R^2 h, \ m = \rho\pi r^2 h, \qquad (6)$$

где ρ – плотность материала диска; h – толщина диска.

Уравнение (5) с учетом (6) примет вид:

$$I = \frac{3}{2}\left(\rho\pi R^4 - \rho\pi r^4\right)h = \frac{3}{2}\rho\pi\left(R^4 - r^4\right)h. \qquad (7)$$

Найдем расстояние d по формуле:

$$d = \frac{\sum m_y}{\sum m} = \frac{\left(\rho\pi R^2 \cdot R - \rho\pi r^2 \cdot r\right)h}{\left(\rho\pi R^2 - \rho\pi r^2\right)h} = \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}. \qquad (8)$$

Подставим выражения (7) и (8) в формулу (1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi\rho\left(R^4 - r^4\right)\left(R^2 - r^2\right)h}{2\pi\rho\left(R^2 - r^2\right)g\left(R^3 - r^3\right)h}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2g}\cdot\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}},$$

$$[T]=\sqrt{\frac{м^4\cdot с^2}{м\cdot м^3}}=с,\quad T=1{,}39\ с.$$

Ответ: $T=1{,}39$ с.

Задача 1.73. Складываются два гармонических колебания одного направления с периодами $T_1=T_2=2$ с, амплитудами $A_1=A_2=3$ см и начальными фазами $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi_2=\dfrac{\pi}{3}$. Запишите уравнение результирующих колебаний, найдите амплитуду A и начальную фазу φ, постройте векторную диаграмму.

Дано:
$T_1=T_2=2$ с
$A_1=A_2=0{,}03$ м
$\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_2=\dfrac{\pi}{3}$

A - ? φ - ?

Решение. Амплитуду и начальные фазы результирующих колебаний определим по формулам (1.68) и (1.69):

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},$$

$$A=5{,}8\cdot10^{-2}\ м,$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=75^\circ,$$

$\varphi=0{,}417\pi$ рад.

Запишем уравнения складывающихся колебаний:

$$x_1=A_1\cos(\omega_o t+\varphi_1),$$

$$x_2=A_2\cos(\omega_o t+\varphi_2),$$

и результирующих колебаний:

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)=5{,}8\cdot10^{-2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+0{,}417\pi\right)=$$

$$=5{,}8\cdot10^{-2}\cos(\pi t+0{,}417\pi)\ м.$$

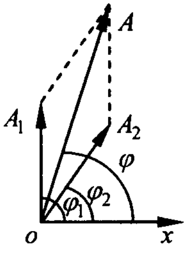

Рис. 42

Векторная диаграмма складываемых колебаний показана на рис. 42.

Ответ: $A=5{,}8\cdot10^{-2}$ м ; $\varphi=0{,}417\pi$ рад;

$$x=5{,}8\cdot10^{-2}\cos(\pi t+0{,}417\pi)\ м.$$

Задача 1.74. Наибольшее смещение точки, совершающей гармонические колебания, равно $x_{max} = 20$ см, наибольшая скорость – $v_{max} = 30$ см/с. Найдите циклическую частоту колебаний ω_o, максимальное ускорение точки a_{max} и период колебаний T.

Дано:
$x_{max} = 0{,}2$ м
$v_{max} = 0{,}3$ м/с
ω_0 - ? T - ?
a_{max} - ?

Решение. Запишем уравнение гармонических колебаний:

$$x = x_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{1}$$

где x_{max} – амплитуда колебаний; ω_0 – циклическая частота; φ – начальная фаза.

Взяв первую производную смещения (1) по времени, найдем скорость колебаний:

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_{max}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{2}$$

а вторая производная определяет ускорение колеблющейся точки:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_{max}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{3}$$

Из уравнений (2) и (3) найдем максимальные значения скорости и ускорения, приравняв соответственно $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ и $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ к единице:

$$v_{max} = \omega_0 x_{max}, \tag{4}$$

$$a_{max} = \omega_0^2 x_{max}. \tag{5}$$

Из выражения (4) найдем циклическую частоту:

$$\omega_0 = \frac{v_{max}}{x_{max}}, \quad [\omega_0] = \frac{м}{с \cdot м} = с^{-1}, \quad \omega_0 = 1{,}5\ с^{-1}$$

и, подставив ее в уравнение (5), получим:

$$a_{max} = \frac{v_{max}^2}{x_{max}}, \quad [a_{max}] = \frac{м^2}{с^2 \cdot м} = \frac{м}{с^2}, \quad a_{max} = 0{,}45\ м/с^2.$$

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, $T = 4{,}19$ с.

Ответ: $T = 4{,}19$ с; $a_{max} = 0{,}45$ м/с^2; $\omega_0 = 1{,}5$ с$^{-1}$.

Задача 1.75. Точка одновременно совершает гармонические колебания, происходящие по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемые уравнениями $x = A_1 \sin \omega_0 t$ и $y = A_2 \cos \omega_0 t$, где $A_1 = 0{,}5$ см, $A_2 = 2$ см. Найдите уравнение траектории и постройте ее, указав направление движения.

Дано:
$x = A_1 \sin \omega_0 t$
$y = A_2 \cos \omega_0 t$
$A_1 = 0{,}5$ см
$A_2 = 2$ см

$y = y(x)$ - ?

Решение. Измерения амплитуд и смещений колебаний целесообразно оставить в сантиметрах. По условию задачи:

$$x = A_1 \sin \omega_0 t = 0{,}5 \sin \omega_0 t, \tag{1}$$

$$y = A_2 \cos \omega_0 t = 2 \cos \omega_0 t. \tag{2}$$

Исключая из уравнений (1) и (2) параметр t, с помощью основного тригонометрического тождества $\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t = 1$ получим:

$$\begin{cases} \sin \omega_0 t = \dfrac{x}{0{,}5}, \\ \cos \omega_0 t = \dfrac{y}{2}, \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{0{,}5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

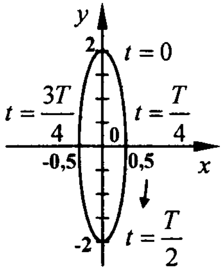

Рис. 43

Траектория представляет собой эллипс с полуосями $a = 0{,}5$ см и $b = 2$ см (рис. 43). Направление движения точки по эллипсу определим, построив табл. 2. Время t выразим через период колебаний T.

Таблица 2

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x [см]	0	0,5	0	-0,5	0
y [см]	2	0	-2	0	2

Ответ: эллипс $\dfrac{x^2}{0{,}5^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$.

Задача 1.76. Определите период колебаний T математического маятника с длиной нити $l = 0,8$ м, поднимающегося вверх с ускорением $a = 2$ м/с^2.

Дано:
$l = 0,8$ м
$a = 2$ м/с^2
T - ?

Решение. Колебания маятника, поднимающегося с ускорением a, эквивалентны колебаниям маятника в поле силы тяжести с ускорением $g' = g + a$, если маятник поднимается вверх, и $g' = g - a$, когда маятник опускается вниз.

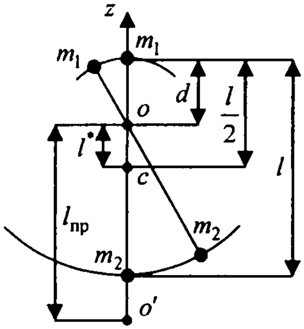

Рис. 44

Таким образом, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}}$,

$[T] = \sqrt{\dfrac{м \cdot с^2}{м}} = с$, $T = 1,6$ с.

Ответ: $T = 1,6$ с.

Задача 1.77. Тонкий невесомый стержень длиной $l = 0,5$ м с грузиками на концах массой $m_1 = m_2 = m$ колеблется около горизонтальной оси (рис. 44). Определите приведенную длину $l_{пр}$ и период колебаний такого маятника, если расстояние $d = 0,1$ м.

Дано:
$l = 0,5$ м
$m_1 = m_2 = m$
$d = 0,1$ м
T - ?
$l_{пр}$ - ?

Решение. Приведенная длина физического маятника

$$l_{пр} = \frac{I}{m^* l^*}, \tag{1}$$

а период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}, \tag{2}$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний (точки o).

Масса маятника

$$m^* = m_1 + m_2 = 2m, \tag{3}$$

l^* – расстояние от оси вращения до центра инерции маятника (точки c),

$$l^* = \frac{l}{2} - d. \tag{4}$$

Считая грузики за материальные точки, найдем момент инерции I маятника относительно оси вращения (точки o):

$$I = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = md^2$, $I_2 = m(l-d)^2$, поэтому

$$I = md^2 + m(l-d)^2. \tag{5}$$

Из уравнений (1), (3)–(5) определим приведенную длину маятника:

$$l_{пр} = \frac{I}{m^* l^*} = \frac{m\left[d^2 + (l-d)^2\right]}{2m\left(\frac{l}{2} - d\right)} = \frac{d^2 + (l-d)^2}{2\left(\frac{l}{2} - d\right)},$$

$$\left[l_{пр}\right] = \frac{м^2}{м} = м, \quad l_{пр} = 0{,}57\ м.$$

По формуле (2) найдем период колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}, \quad T = 1{,}5\ с.$$

Ответ: $T = 1{,}5$ с; $l_{пр} = 0{,}57$ м.

Задача 1.78. Найдите период T затухающих колебаний математического маятника длиной $l = 1$ м, если известен логарифмический декремент затухания $\delta = 0{,}6$.

Дано:
$l = 1$ м
$\delta = 0{,}6$
T - ?

Решение. Найдем период T_0 свободных колебаний:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$,

а $\beta = \frac{\delta}{T}$. Следовательно, $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\delta^2}{T^2}}$.

Из данного выражения определим период затухающих колебаний:

$$T = \frac{T_0}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 + \delta^2} = \sqrt{\frac{l}{g}\left(4\pi^2 + \delta^2\right)},\quad [T] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с},\quad T = 2\ \text{с}.$$

Ответ: $T = 2$ с.

Задача 1.79. Найдите период колебаний поршня массой $m = 50$ г, разделяющего закрытый горизонтальный цилиндрический сосуд сечением $S = 100\ \text{см}^2$ на две равные части длиной $l = 20$ см каждая (рис. 45), при отклонении поршня от среднего положения на малую величину x. По обе стороны от поршня находится воздух под давлением $p = 100$ Па. Температуру считать постоянной. Трением пренебречь.

Дано:
$m = 5\cdot 10^{-2}$ кг
$S = 10^{-2}\ \text{м}^2$
$l = 0{,}2$ м
$p = 100$ Па

T - ?

Решение. Пусть поршень отклонился влево на величину x. Считая процесс изотермическим ($T = \text{const}$), применим к газу, заключенному в цилиндре, закон Бойля–Мариотта:

$$p_1\left(l - x\right)S = p_2\left(l + x\right)S = plS, \tag{1}$$

где p_1, p_2 – давления в левой и правой частях цилиндра; p – первоначальное давление газа в цилиндре.

Найдем силу, действующую на поршень после его отклонения:

$$F = \left(p_1 - p_2\right)S. \tag{2}$$

Давления p_1 и p_2 определим из уравнения (1):

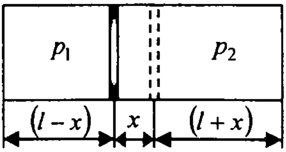

Рис. 45

$$p_1 = \frac{pl}{l - x},\ p_2 = \frac{pl}{l + x}. \tag{3}$$

Подставляя выражения (3) в (2), получим:

$$F = \frac{2plxS}{l^2 - x^2} = \frac{2pVx}{l^2 - x^2}, \tag{4}$$

где V – объем половины цилиндра.

При малых колебаниях $x << l$ и выражение (4) можно записать в виде:

$$F = \frac{2pVx}{l^2}. \quad (5)$$

Согласно второму закону Ньютона, $a = \frac{F}{m}$ или, используя формулу (5), получим:

$$a = \frac{-2pVx}{l^2 m} = \frac{-2pxS}{ml}. \quad (6)$$

Знак минус в уравнении (6) берется потому, что сила давления газа на поршень направлена в сторону, противоположную смещению x.

Поскольку ускорение есть вторая производная смещения x по времени t, то из уравнения (6) можно записать:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2pS}{ml}x = 0. \quad (7)$$

Получили дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний, в котором множитель $\frac{2pS}{ml} = \omega_0^2$, откуда $\omega_0 = \sqrt{\frac{2pS}{ml}}$, где ω_0 – циклическая частота колебаний.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2ml}{pS}}$,

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{Па} \cdot \text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}} = \text{с}, \quad T = 0{,}45 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 0{,}45$ с.

2. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа. Законы идеального газа

Основные формулы

● Количество вещества

$$\nu = \frac{N}{N_A}, \tag{2.1}$$

где N – число молекул газа; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро.

● Молярная масса вещества

$$\mu = \frac{m}{\nu}, \tag{2.2}$$

где m – масса газа.

● Молярная масса смеси газов

$$\mu_{\text{см}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} \nu_i}, \tag{2.3}$$

где m_i – масса i-го компонента смеси; ν_i – количество вещества i-го компонента смеси; n – число компонент смеси.

● Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона)

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \tag{2.4}$$

где $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура; p – давление; V – объем.

● Опытные газовые законы:

а) закон Бойля–Мариотта (изотермический процесс – $T = \text{const}$)

$pV = \text{const}$

или для двух состояний газа

$$p_1V_1 = p_2V_2; \tag{2.5}$$

б) закон Гей–Люссака (изобарный процесс – $p = \text{const}$)

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

или для двух состояний газа

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \tag{2.6}$$

в) закон Шарля (изохорный процесс – $V = \text{const}$)

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$

или для двух состояний газа

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}; \tag{2.7}$$

г) объединенный газовый закон

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

или для двух состояний газа

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \tag{2.8}$$

где p_1, V_1, T_1 – давление, объем и температура газа в начальном состоянии; p_2, V_2, T_2 – те же величины в конечном состоянии.

● Закон Дальтона, определяющий давление смеси газов:

$$p = p_1 + p_2 + p_i + ... + p_n, \tag{2.9}$$

где p – давление смеси газов; p_i – парциальное давление i-го компонента смеси; n – число компонент смеси.

● Концентрация частиц (молекул, атомов и т. п.) однородной системы

$$n = \frac{N}{V}, \tag{2.10}$$

где N – число частиц; V – объем системы.

● Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n < E_п >, \tag{2.11}$$

где $<E_п>$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.

● Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$<E_1> = \frac{1}{2}kT, \qquad (2.12)$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.

● Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на все степени свободы молекулы (полная энергия),

$$<E_i> = \frac{i}{2}kT, \qquad (2.13)$$

где i – сумма числа поступательных $i_\text{п}$, числа вращательных $i_\text{в}$ и удвоенного числа колебательных $i_\text{к}$ степеней свободы молекулы:

$$i = i_\text{п} + i_\text{в} + 2i_\text{к}. \qquad (2.14)$$

● Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры (уравнение состояния газа)

$$p = nkT. \qquad (2.15)$$

● Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT. \qquad (2.16)$$

Задача 2.1. Найдите число молекул газа, находящегося в сосуде объемом $V = 0{,}5$ л при нормальных условиях.

Дано:
$V = 5 \cdot 10^{-4}$ м^3
$p = 10^5$ Па
$T = 273$ К

N - ?

Решение. Считая газ идеальным, из уравнения Менделеева–Клапейрона (2.4) найдем количество вещества газа ν:

$$pV = \nu RT,\ \nu = \frac{pV}{RT},$$

где $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – молярная газовая постоянная.

Число молекул газа N, находящееся в сосуде, найдем как произведение количества вещества ν на постоянную Авогадро N_A (2.1):

$$N = \nu N_A \text{ или } N = \frac{pV}{RT}N_A,\ [N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}} = 1,\ N = 1{,}3 \cdot 10^{22}.$$

Ответ: $N = 1{,}3 \cdot 10^{22}$.

Задача 2.2. В цилиндр длиной $l_1 = 1{,}5$ м и площадью $S = 100$ см^2, заполненный идеальным газом при нормальном давлении, начали медленно вдвигать поршень. Определите силу, действующую на поршень, если его остановить на расстоянии $l_2 = 15$ см от дна цилиндра.

Дано:
$p_1 = 10^5$ Па
$l_1 = 1{,}5$ м
$l_2 = 0{,}15$ м
$S = 10^{-2}$ м^2

F - ?

Решение. Считая температуру газа неизменной, запишем закон Бойля–Мариотта (2.5):

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

где $V_1 = Sl_1$, $V_2 = Sl_2$. Тогда

$$p_1Sl_1 = p_2Sl_2. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) определим давление $p_2 = p_1\dfrac{l_1}{l_2}$.

Сила, действующая на поршень, $F = p_2S = p_1\dfrac{l_1}{l_2}S$,

$$[F] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}}{\text{м}}\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^2 = \text{Н}, \quad F = 10\ \text{кН}.$$

Ответ: $F = 10$ кН.

Задача 2.3. Идеальный газ находится в сосуде при температуре $t_1 = 20°$ С. При нагревании газа до температуры t_2 его давление возросло в 1,5 раза. Найдите температуру газа t_2.

Дано:
$T_1 = 293$ К
$p_2 = 1{,}5p_1$

T_2 - ?

Решение. Процесс нагревания газа протекает при постоянном объеме, т. е. является изохорическим. Для данного процесса согласно (2.7)

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \text{ откуда } T_2 = \frac{p_2}{p_1}T_1, \quad T_2 = 439{,}5\ \text{К}.$$

Ответ: $T_2 = 439{,}5$ К.

Задача 2.4. При нагревании газа на $\Delta T = 10$ К его объем увеличился на 1/250 часть от первоначального объема. Найдите начальную температуру газа, считая давление постоянным.

Дано:
$\Delta T = 10$ К
$p = \text{const}$
$\Delta V = V_1/250$

T_1 - ?

Решение. Воспользуемся законом Гей–Люссака (2.6), поскольку процесс нагревания газа изобарный:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \text{ где } V_2 = V_1 + \Delta V = \frac{251}{250}V_1, \; T_2 = T_1 + \Delta T.$$

Получим $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_1 + \Delta V}{T_1 + \Delta T} = \dfrac{251 V_1}{250(T_1 + \Delta T)}$, откуда

$$T_1 = \frac{250(T_1 + \Delta T)}{251}, \quad T_1 = 250\Delta T, \quad T_1 = 2500 \text{ К}.$$

Ответ: $T_1 = 2500$ К.

Задача 2.5. Сосуд емкостью $V = 10$ л, заполненный воздухом при температуре 500 К, соединяется трубочкой с чашкой, в которой находится ртуть. Найдите количество ртути Δm, перешедшей в сосуд при остывании воздуха в нем до 300 К.

Дано:
$V = 10^{-2}$ м^3
$T_1 = 500$ К
$T_2 = 300$ К

Δm - ?

Решение. Поскольку объем сосуда не меняется, найдем изменение давления Δp воздуха в нем с уменьшением температуры. По закону Шарля (2.7) запишем:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1}, \text{ откуда}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_1 - \frac{p_1 T_2}{T_1} = \frac{p_1(T_1 - T_2)}{T_1}. \tag{1}$$

Считая, что $\dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{\Delta p}{p_1}$, получим $\dfrac{\Delta m}{\rho V} = \dfrac{p_1(T_1 - T_2)}{p_1 T_1}$, откуда

$\Delta m = \rho V \dfrac{(T_1 - T_2)}{T_1}$, где ρV – масса ртути, помещающейся в объеме V,

ρ – плотность ртути; $[\Delta m] = \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3} \cdot \dfrac{\text{К}}{\text{К}} = \text{кг}$, $\Delta m = 54{,}4$ кг.

Ответ: $\Delta m = 54{,}4$ кг.

Задача 2.6. В оболочке сферического аэростата находится газ объемом $V_1 = 1000$ м^3, заполняющий оболочку лишь частично. На сколько увеличится подъемная сила аэростата, если газ в нем нагреть от $T_1 = 273$ К до $T_2 = 300$ К? Давление газа в оболочке и в окружающем воздухе постоянно и равно нормальному атмосферному давлению.

Дано:
$V_1 = 1000$ м^3
$T_1 = 273$ К,
$T_2 = 300$ К
$p_1 = 10^5$ Па

ΔF - ?

Решение. Подъемная сила, действующая на аэростат, в начальном состоянии

$$F_1 = F_{A1} - mg,$$

где $F_{A1} = \rho_1 V_1 g_1$ – сила Архимеда; mg – сила тяжести. Плотность воздуха в начальном состоянии $\rho_1 = 1{,}29$ кг/м^3. Таким образом,

$$F_1 = \rho_1 V_1 g - mg.$$

Подъемная сила, действующая на шар после нагревания воздуха:

$$F_2 = F_{A2} - mg = \rho_1 V_2 g - mg,$$

где V_2 – объем газа в оболочке после нагревания.

При изобарическом нагревании газа согласно (2.6)

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}, \text{ поэтому}$$

$$\Delta F = F_2 - F_1 = F_{A2} - mg - F_{A1} + mg = \rho_1 g (V_2 - V_1) = \rho_1 g V_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1},$$

$$[\Delta F] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}^3 \cdot \frac{\text{К}}{\text{К}} = \text{Н}, \quad \Delta F = 1{,}28 \text{ кН}.$$

Ответ: $\Delta F = 1{,}28$ кН.

Задача 2.7. Два баллона емкостью $V_1 = 2$ л и $V_2 = 6$ л, в которых находятся различные газы, соединены трубкой с краном. Давление газа в первом баллоне $p_1 = 0{,}2$ МПа, а во втором – $p_2 = 0{,}12$ МПа. Температура газов одинакова. Найдите общее давление p в баллонах и парциальные давления p_1' и p_2' газов после открытия крана.

Дано:
$V_1 = 2\cdot 10^{-3}$ м^3
$V_2 = 6\cdot 10^{-3}$ м^3
$p_1 = 2\cdot 10^5$ Па
$p_2 = 12\cdot 10^4$ Па

---

p - ?
p_1' - ? p_2' - ?

Решение. Запишем для каждого из газов, находящихся в баллонах, уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4):

$$p_1V_1 = \nu_1 RT, \qquad (1)$$

$$p_2V_2 = \nu_2 RT, \qquad (2)$$

где ν_1 и ν_2 – количество вещества, R – универсальная газовая постоянная, T – температура.

После открытия крана каждый из газов занимает объем $V = V_1 + V_2$ и находится под своим парциальным давлением. Поэтому для каждого газа снова можно записать уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4):

$$p_1'(V_1 + V_2) = \nu_1 RT, \qquad (3)$$

$$p_2'(V_1 + V_2) = \nu_2 RT. \qquad (4)$$

Из уравнений (1)–(4) запишем:

$$p_1'(V_1 + V_2) = p_1V_1, \qquad (5)$$

$$p_2'(V_1 + V_2) = p_2V_2. \qquad (6)$$

Парциальные давления газов найдем из уравнений (5), (6):

$$p_1' = p_1\frac{V_1}{V_1+V_2},\ p_2' = p_2\frac{V_2}{V_1+V_2},\ [p'] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^3} = \text{Па},$$

$$p_1' = 5\cdot 10^4\ \text{Па},\quad p_2' = 8\cdot 10^4\ \text{Па}.$$

Согласно закону Дальтона, давление p смеси газов равно:

$$p = p_1' + p_2' = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1+V_2},\quad p = 1{,}3\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Ответ: $p_1' = 5\cdot 10^4$ Па; $p_2' = 8\cdot 10^4$ Па; $p = 1{,}3\cdot 10^5$ Па.

Задача 2.8. В сосуде находится смесь водорода и кислорода, причем их массовые доли равны соответственно: $\omega_1 = 2/7$ и $\omega_1 = 5/7$. Найдите плотность ρ смеси газов, если давление смеси $p = 50$ кПа, а температура $T = 273$ К.

Дано:
$\omega_1 = 2/7$
$\omega_2 = 5/7$
$\mu_1 = 2\cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$\mu_2 = 32\cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$p = 5\cdot 10^4$ Па
$T = 273$ К

ρ - ?

Решение. Из уравнения Менделеева–Клапейрона (2.4), зная массовые доли газов, найдем массы водорода и кислорода:

$$m_1 = \frac{p_1 V \mu_1}{RT}, \qquad (1)$$

$$m_2 = \frac{p_2 V \mu_2}{RT}, \qquad (2)$$

где p_1 и p_2 – парциальные давления водорода и кислорода.

Используя формулы (1) и (2), запишем:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{p_2\mu_2}{p_1\mu_1}. \qquad (3)$$

Согласно закону Дальтона (2.9), давление равно

$$p = p_1 + p_2. \qquad (4)$$

Из выражения (4) найдем p_2 и подставим в (3):

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{(p - p_1)\mu_2}{p_1\mu_1}, \text{ откуда } p_1 = \frac{p\mu_2}{\frac{\omega_2}{\omega_1}\mu_1 + \mu_2}. \qquad (5)$$

Тогда $p_2 = p - p_1 = \dfrac{p\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\mu_1}{\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\mu_1 + \mu_2}$. $\qquad (6)$

Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона (2.4) плотность смеси

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}. \qquad (7)$$

Тогда из уравнений (4)–(7) запишем:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \frac{p_1\mu_1}{RT} + \frac{p_2\mu_2}{RT} = \left(\frac{p\mu_1\mu_2}{\frac{\omega_2}{\omega_1}\mu_1 + \mu_2} + \frac{p\frac{\omega_2}{\omega_1}\mu_1\mu_2}{\frac{\omega_2}{\omega_1}\mu_1 + \mu_2}\right)\Bigg/(RT) =$$

$$= \frac{p\mu_1\mu_2\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}+1\right)}{RT\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\mu_1+\mu_2\right)},\ \rho = 0{,}13\ \text{кг/м}^3,$$

$$[\rho] = \frac{\text{Па}\cdot\text{кг}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Па}\cdot\text{кг}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = 0{,}13$ кг/м^3.

Задача 2.9. Найдите массу водорода m_1 и гелия m_2 в смеси, находящейся в баллоне объемом $V = 20$ л, при температуре 300 К и давлении $p = 800$ кПа, если общая масса смеси $m = 20$ г.

Дано:
$\mu_1 = 2\cdot10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$\mu_2 = 4\cdot10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$p = 8\cdot10^5$ Па
$T = 300$ К
$V = 2\cdot10^{-2}$ м^3
$m = 2\cdot10^{-2}$ кг

m_1 - ? m_2 - ?

Решение. По закону Дальтона (2.9) давление смеси

$$p = p_1 + p_2, \tag{1}$$

где p_1 и p_2 – парциальные давления водорода и гелия соответственно. Используя уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4), запишем:

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT,\ p_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT. \tag{2}$$

Просуммировав уравнения (2), получим:

$$pV = (p_1+p_2)V = \left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)RT, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{\mu_1}+\dfrac{m_2}{\mu_2} = \dfrac{pV}{RT}, \\ m_1 + m_2 = m. \end{cases} \tag{4}$$

Имеем систему уравнений с двумя неизвестными, решая которую найдем массу:

$$m_1 = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\left(\frac{pV}{RT}-\frac{m}{\mu_2}\right),$$

$$[m]=\frac{кг\cdot кг\cdot моль}{моль\cdot моль\cdot кг}\left(\frac{Па\cdot м^3\cdot К\cdot моль}{Дж\cdot К}-\frac{кг\cdot моль}{кг}\right)=$$

$$=\frac{кг}{моль}\left(\frac{Н\cdot м^3\cdot моль}{м^2\cdot Н\cdot м}-моль\right)=\frac{кг\cdot моль}{моль}=кг,\ m_1=5{,}7\cdot 10^{-3}\ кг$$

и $m_2=m-m_1=14{,}3\cdot 10^{-3}$ кг.

Ответ: $m_1=5{,}7\cdot 10^{-3}$ кг; $m_2=14{,}3\cdot 10^{-3}$ кг.

Задача 2.10. В закрытом сосуде емкостью V = 20 л находится углекислый газ при температуре T = 300 К. После того как часть газа выпустили, давление в сосуде понизилось на Δp = 0,5 МПа. Определите массу выпущенного газа.

Дано:
$V=2\cdot 10^{-2}$ м^3
$T=300$ К
$\Delta p=5\cdot 10^5$ Па
Δm - ?

Решение. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4) для начального

$$pV=\frac{m}{\mu}RT \qquad (1)$$

и конечного состояний газа:

$$(p-\Delta p)V=\frac{m-\Delta m}{\mu}RT. \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), получим:

$\Delta pV=\dfrac{\Delta m}{\mu}RT$, откуда

$$\Delta m=\frac{\mu\Delta pV}{RT},$$

где $\mu=44\cdot 10^{-3}\ \dfrac{кг}{моль}$,

$$[\Delta m]=\frac{кг\cdot Па\cdot м^3\cdot моль\cdot К}{моль\cdot Дж\cdot К}=\frac{кг\cdot Н\cdot м^3}{м^2\cdot Н\cdot м}=кг,\ \Delta m=0{,}177\ кг.$$

Ответ: Δm = 0,177 кг.

Задача 2.11. Найдите плотность ρ кислорода при температуре $t=10°$ С и давлении $p=100$ кПа.

Дано:
$T = 283$ К
$p = 10^5$ Па
$\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

ρ - ?

Решение. Запишем уравнение состояния идеального газа (2.4): $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$. Поделим на объем V правую и левую части этого уравнения.

Так как $\rho = \dfrac{m}{V}$, то получим $p = \dfrac{\rho}{\mu}RT$,

откуда $\rho = \dfrac{p\mu}{RT}$,

$$[\rho] = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho = 1{,}36\ \text{кг}/\text{м}^3.$$

Ответ: $\rho = 1{,}36\ \text{кг}/\text{м}^3$.

Задача 2.12. Плотность некоторого газа $\rho = 0{,}34$ кг/м^3 при температуре $t = 10°$ С и давлении $p = 200$ кПа. Какой это газ?

Дано:
$T = 283$ К
$p = 2 \cdot 10^5$ Па
$\rho = 0{,}34$ кг/м^3

μ - ?

Решение. Зная молярную массу газа, можно по таблице элементов Менделеева определить род газа.

Из уравнения состояния (2.4) $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ найдем молярную массу:

$$\mu = \frac{mRT}{pV} = \frac{\rho RT}{p}, \quad [\mu] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{Па}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{кг}}{\text{моль}},$$

$$\mu = 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Ответ: $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; гелий.

Задача 2.13. После нагревания газа массой $m = 10$ г при постоянном давлении его плотность стала равна $\rho_2 = 0{,}5$ кг/м^3. До какой температуры нагрели газ, если первоначально он занимал объем $V_1 = 3$ л при температуре $t_1 = 10°$ С?

Дано:
$m = 10^{-2}$ кг
$\rho_2 = 0{,}5$ кг/м^3
$V_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3
$T_1 = 283$ К
T_2 - ?

Решение. Имеем два состояния газа: до и после нагревания. Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона (2.4) для этих состояний:

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1,$$
$$p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2. \qquad (1)$$

Процесс изобарный ($p_1 = p_2 = p$), а плотность газа $\rho_2 = m/V_2$. С учетом этого приведем уравнения (1) к виду:

$$p = \frac{m}{V_1\mu}RT_1,$$
$$p = \rho_2\frac{RT_2}{\mu}. \qquad (2)$$

Приравняв правые части уравнений (2), найдем температуру газа после нагревания: $T_2 = \frac{mT_1}{V_1\rho_2}$, $[T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot \text{кг}} = \text{К}$, $T_2 = 1887$ К.

Ответ: $T_2 = 1887$ К.

Задача 2.14. Углекислый газ массой $m = 20$ г находится под давлением $p = 240$ кПа и при температуре $t_1 = 20$°C. После нагревания при постоянном давлении газ расширился до объема $V_2 = 6$ л. Найдите первоначальный объем газа и температуру T_2 после нагревания, а также плотности газа ρ_1 и ρ_2 до и после нагревания.

Дано:
$m = 2 \cdot 10^{-2}$ кг
$\mu = 44 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$p = 24 \cdot 10^4$ Па
$V_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3
$T_1 = 293$ К
T_2 - ? V_1 - ?
ρ_1 - ? ρ_2 - ?

Решение. Используя уравнение состояния (2.4), находим первоначальный объем газа:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1,\ V_1 = \frac{mRT_1}{p\mu},\ V_1 = 4{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3,$$

$$[V] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{Па} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Па}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^3}{\text{Н}} = \text{м}^3.$$

Так как процесс изобарный, то по закону Гей–Люссака (2.6) запишем:

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}\text{, откуда } T_2=V_2\frac{T_1}{V_1}\text{, } T_2=382\text{ К}.$$

Плотности: $\rho_1=\frac{m}{V_1}$, $\rho_2=\frac{m}{V_2}$, $\rho_1=4{,}35\text{ кг/м}^3$, $\rho_2=3{,}3\text{ кг/м}^3$.

Ответ: $V_1=4{,}6\cdot10^{-3}\text{ м}^3$; $T_2=382\text{ К}$; $\rho_1=4{,}35\text{ кг/м}^3$; $\rho_2=3{,}3\text{ кг/м}^3$.

Задача 2.15. В баллоне объемом $V=0{,}4\text{ м}^3$ находится кислород массой $m_1=1{,}2$ кг и $m_2=0{,}5$ кг воды. Баллон нагревается до температуры t = 300°C, при этом вся вода превращается в пар. Определите давление в баллоне после нагревания.

Дано:

$m_1=1{,}2$ кг

$m_2=0{,}5$ кг

$\mu_1=32\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$\mu_2=18\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$V=0{,}4\text{ м}^3$

$T=573$ К

p - ?

Решение. Согласно закону Дальтона (2.9), давление смеси $p=p_1+p_2$, где p_1 и p_2 – парциальные давления кислорода и водяного пара.

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4) для каждой компоненты газа:

$$p_1V=\frac{m_1}{\mu_1}RT\text{, откуда}$$

$$p_1=\frac{m_1RT}{\mu_1V},$$

Аналогично

$$p_2V=\frac{m_2}{\mu_2}RT\text{, откуда}$$

$$p_2=\frac{m_2RT}{\mu_2V}.$$

Тогда давление смеси

$$p=p_1+p_2=\frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right),$$

$$[p]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{м}^3\cdot\text{кг}}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}=\text{Па},\quad p=777\text{ кПа}.$$

Ответ: $p=777$ кПа.

Задача 2.16. В баллоне находится смесь углекислого газа массой $m_1 = 20$ г и азота массой $m_2 = 30$ г при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 200$ кПа. Найдите плотность смеси ρ.

Дано:
$m_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ кг
$m_2 = 3 \cdot 10^{-2}$ кг
$\mu_1 = 44 \cdot 10^{-3}$ $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$T = 300$ К
$p = 2 \cdot 10^5$ Па

ρ - ?

Решение. По закону Дальтона (2.9) давление смеси газов

$$p = p_1 + p_2, \tag{1}$$

где p_1 и p_2 – парциальные давления углекислого газа и азота. Запишем уравнение состояния идеального газа (2.4) для каждой из компонент смеси:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT. \tag{2}$$

Сложим полученные уравнения:

$$(p_1 + p_2)V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) RT. \tag{3}$$

Из уравнения (3) найдем объем:

$$V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) \frac{RT}{(p_1 + p_2)}. \tag{4}$$

Масса смеси газов

$$m = m_1 + m_2. \tag{5}$$

Так как плотность $\rho = \frac{m}{V}$, то, используя выражения (1), (4), (5), получим:

$$\rho = \frac{(m_1 + m_2)p}{\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) RT}, \quad [\rho] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$\rho = 2{,}6$ кг/м^3.

Ответ: $\rho = 2{,}6$ кг/м^3.

Задача 2.17. Молекула кислорода, летящая со скоростью $v = 500$ м/с, упруго ударяется о стенку по нормали к ней. Найдите импульс, полученный стенкой.

Дано:
$v = 500$ м/с
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
p - ?

Решение. При нормальном упругом ударе молекулы о стенку ее скорость по модулю не меняется, а изменяется на противоположное направление вектора скорости. Тогда изменение импульса молекулы

$$\Delta p = -mv - mv = -2mv,$$

где $m = \frac{\mu}{N_A}$ – масса одной молекулы, N_A – число Авогадро.

Таким образом,

$$\Delta p = -2v\frac{\mu}{N_A},\ [\Delta p] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{с} \cdot \text{моль}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},\ \Delta p = -5{,}3 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Такой же по модулю импульс получит стенка, т. е. $p = \Delta p$.

Ответ: $\Delta p = -5{,}3 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Задача 2.18. Найдите количество вещества ν и число молекул N газа, находящегося в баллоне емкостью $V = 0{,}4$ м^3 при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 3 \cdot 10^5$ Па.

Дано:
$V = 0{,}4$ м^3
$T = 300$ К
$p = 3 \cdot 10^5$ Па
ν - ? N - ?

Решение. Из уравнения состояния идеального газа (2.4) $pV = \nu RT$ найдем количество вещества:

$$\nu = \frac{pV}{RT},\quad \nu = 48 \text{ молей},$$

$$[\nu] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{моль}.$$

Число молекул газа, содержащееся в данном количестве вещества ν, согласно (2.1) равно:

$$N = \nu N_A,\ [N] = \frac{\text{моль}}{\text{моль}} = 1,\ N = 29 \cdot 10^{24}.$$

Ответ: $\nu = 48$ молей; $N = 29 \cdot 10^{24}$.

Задача 2.19. В сосуде емкостью $V = 10$ л находится газ при температуре $T = 300$ К. На сколько понизится давление газа, если из сосуда вытечет $\Delta N = 5 \cdot 10^{20}$ молекул?

Дано:
$V = 10^{-2}$ м^3
$T = 300$ К
$\Delta N = 5 \cdot 10^{20}$

Δp - ?

Решение. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4) для начального:

$$pV = \frac{N}{N_A} RT, \qquad (1)$$

где N – первоначальное число молекул, N_A – число Авогадро; и конечного состояний:

$$(p - \Delta p)V = \frac{N - \Delta N}{N_A} RT. \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), получим:

$$\Delta p = \frac{\Delta N}{N_A} \frac{RT}{V}, \quad [\Delta p] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}, \quad \Delta p = 206 \text{ Па}.$$

Ответ: $\Delta p = 206$ Па.

Задача 2.20. Газ массой m = 117 г находится в сосуде вместимостью V = 10 л. Концентрация молекул газа $n = 2{,}2 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$. Какой это газ?

Дано:
$V = 10^{-2}$ м^3
$n = 2{,}2 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$
$m = 117 \cdot 10^{-3}$ кг

μ - ?

Решение. Определим количество молекул газа в сосуде:

$N = nV$

и массу одной молекулы:

$$m_0 = \frac{m}{N} = \frac{m}{nV}.$$

Тогда молярная масса газа

$$\mu = m_0 N_A = \frac{mN_A}{nV}, \quad [\mu] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{моль} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \quad \mu = 32 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Ответ: кислород.

Задача 2.21. В баллоне вместимостью V = 50 л находится азот, концентрация молекул которого $n = 9{,}5 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$. Найдите массу газа.

Дано:
$V = 5 \cdot 10^{-2}$ м^3
$n = 9{,}5 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$
$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

m - ?

Решение. Число молей газа $\nu = \frac{N}{N_A}$, где N_A – число Авогадро, N – число молекул газа.

С другой стороны, число молекул газа $N = nV$, тогда

$$\nu = \frac{nV}{N_A}. \qquad (1)$$

Поскольку число молей $\nu = \dfrac{m}{\mu}$, то, используя выражение (1), находим массу газа:

$$m = \mu \frac{nV}{N_A}, \quad [m] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{м}^3} = \text{кг}, \quad m = 221 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Ответ: $m = 221 \cdot 10^{-3}$ кг.

Задача 2.22. Найдите внутреннюю энергию U массы $m = 50$ г азота при температуре $t = 20° \text{C}$. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая часть на долю вращательного движения?

Дано:
$T = 293$ К
$m = 50 \cdot 10^{-3}$ кг
$\mu = 28 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

U - ?
$U_\text{п}$ - ? $U_\text{в}$ - ?

Решение. Внутренняя энергия идеального газа определяется по формуле

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT, \qquad (1)$$

где i – число степеней свободы. Для двухатомного газа $i = 5$, причем $i = 3$ приходится на долю поступательного движения молекул и $i = 2$ – на долю вращательного движения. Подставляя в формулу (1) числовые данные и соответствующие значения числа степеней свободы, получим: $U = 10{,}8$ кДж, $U_\text{п} = 6{,}5$ кДж, $U_\text{в} = 4{,}3$ кДж.

Ответ: $U = 10{,}8$ кДж; $U_\text{п} = 6{,}5$ кДж; $U_\text{в} = 4{,}3$ кДж.

Задача 2.23. Двухатомный газ занимает объем $V = 100\ \text{см}^3$ при давлении $p = 6$ кПа и температуре $t = 20° \text{C}$. Какое число молекул N содержится в газе и какой энергией теплового движения обладают эти молекулы?

Дано:
$T = 293$ К
$i = 5$
$V = 10^{-4}\ \text{м}^3$
$p = 6000$ Па

N - ? U - ?

Решение. Из уравнения состояния идеального газа (2.4) $pV = \nu RT$ найдем количество вещества $\nu = \dfrac{pV}{RT}$.

Тогда число молекул, находящихся в объеме, согласно (2.1), равно:

$$N = \nu N_A = \frac{pVN_A}{RT}, \quad N = 1{,}5 \cdot 10^{20},$$

$$[N]=\frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}=\frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3}{\text{Дж}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}=1\,.$$

Внутренняя энергия

$$U=\frac{i}{2}\nu RT=\frac{i}{2}pV,\ [U]=\text{Па}\cdot\text{м}^3=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2}=\text{Дж},\ U=1{,}5\ \text{Дж}.$$

Ответ: $N=1{,}5\cdot10^{20}$; $U=1{,}5$ Дж.

Задача 2.24. Найдите энергию теплового движения молекул, содержащихся в двухатомном газе массой $m=2$ кг, имеющем плотность $\rho=5$ кг/м^3 и находящемся под давлением $p=100$ кПа.

Дано:
$m=2$ кг
$\rho=5$ кг/м^3
$p=10^5$ Па

U - ?

Решение. Внутренняя энергия идеального газа

$U=\dfrac{i}{2}\dfrac{m}{\mu}RT$, где $i=5$ для двухатомного газа.

Из уравнения состояния (2.4) $p=\dfrac{\rho}{\mu}RT$ найдем, что

$\dfrac{RT}{\mu}=\dfrac{p}{\rho}$. Поэтому

$$U=\frac{i}{2}\frac{mp}{\rho},\ [U]=\frac{\text{кг}\cdot\text{Па}\cdot\text{м}^3}{\text{кг}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2}=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж},\ U=10^5\ \text{Дж}.$$

Ответ: $U=10^5$ Дж.

Задача 2.25. Найдите температуру T и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа $\langle E_\text{п}\rangle$, имеющего концентрацию $n=10^{16}$ м$^{-3}$ и находящегося под давлением $p=0{,}5$ мПа.

Дано:
$n=10^{16}$ м$^{-3}$
$p=5\cdot10^{-4}$ Па

$\langle E_\text{п}\rangle$ - ? T - ?

Решение. Согласно уравнению состояния (2.15) давление газа

$p=nkT$,

где $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Отсюда температура газа

$$T=\frac{p}{nk},\ [T]=\frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}}{\text{Дж}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}=\text{К},\ T=3600\ \text{К}.$$

Из основного уравнения МКТ (2.11) $p=\frac{2}{3}n\langle E_п\rangle$ определим среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул:

$$\langle E_п\rangle=\frac{3}{2}\frac{p}{n},\ [E_п]=\text{Па}\cdot\text{м}^3=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2}=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж},\ \langle E_п\rangle=7{,}5\cdot10^{-20}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $T=3600$ К; $\langle E_п\rangle=7{,}5\cdot10^{-20}$ Дж.

2.2. Элементы статистической физики

Основные формулы

● Распределение молекул по скоростям (распределение Максвелла)

$$dN=Nf(\text{v})d\text{v},$$

где $f(\text{v})=\frac{dN}{Nd\text{v}}$ – функция распределения молекул газа по скоростям (доля молекул, модули скоростей которых находятся в единичном интервале скоростей).

Аналитическое выражение функции распределения

$$f(\text{v})=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\text{v}^2e^{\frac{-m_0\text{v}^2}{2kT}}, \tag{2.17}$$

где m_0 – масса молекулы; $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

● Распределение Максвелла в приведенном виде:

$$dN(u)=Nf(u)du=\frac{4}{\sqrt{\pi}}Ne^{-u^2}u^2du, \tag{2.18}$$

где $u=\frac{\text{v}}{\text{v}_в}$; $\text{v}_в$ – наиболее вероятная скорость; $f(u)$ – функция распределения; N – общее число молекул.

● Наиболее вероятная скорость молекул

$$\text{v}_в=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \tag{2.19}$$

● Средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \qquad (2.20)$$

● Средняя квадратичная скорость молекул

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \qquad (2.21)$$

● При решении задач на закон распределения молекул по скоростям удобно пользоваться таблицей 3, в которой даны значения функции распределения $f(u) = \frac{\Delta N}{N \Delta u}$ для различных u.

Таблица 3

u	$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$	u	$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$	u	$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$
0,1	0,022	0,8	0,761	1,5	0,535
0,2	0,087	0,9	0,813	1,6	0,447
0,3	0,185	1,0	0,830	1,7	0,362
0,4	0,308	1,1	0,814	1,8	0,286
0,5	0,439	1,2	0,770	2,0	0,165
0,6	0,567	1,3	0,703	2,2	0,186
0,7	0,677	1,4	0,623	2,4	0,041

● Распределение частиц в силовом поле (распределение Больцмана)

$$n = n_0 \cdot e^{\frac{-E_p}{kT}}, \qquad (2.22)$$

где n – концентрация частиц; E_p – их потенциальная энергия; n_0 – концентрация частиц в точках поля, где $E_p = 0$.

● Распределение давления в однородном поле силы тяжести (барометрическая формула)

$$p = p_0 e^{\frac{-mgh}{kT}} = p_0 e^{\frac{-\mu gh}{RT}}, \qquad (2.23)$$

где h – координата (высота) точки по отношению к уровню, принятому за нулевой; p – давление газа на высоте h; p_0 – давление газа на высоте $h = 0$; m – масса частицы; μ – молярная масса; g – ускорение свободного падения; R – молярная газовая постоянная.

Задача 2.26. Найдите число молекул n кислорода в единице объема сосуда при давлении $p = 300$ Па, если средняя квадратичная скорость его молекул $v_{кв} = 2{,}5$ км/с.

Дано:
$p = 300$ Па
$v_{кв} = 2500$ м/с
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$

n - ?

Решение. Согласно уравнению (2.15), давление газа $p = nkT$, отсюда

$$n = \frac{p}{kT}, \qquad (1)$$

где $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{К}$ – постоянная Больцмана.

Температуру газа T найдем, зная среднюю квадратичную скорость молекул (2.21):

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \text{ откуда } T = \frac{\mu v_{кв}^2}{3R}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в (1), получим:

$$n = \frac{3pR}{k\mu v_{кв}^2},\ [n] = \frac{Па \cdot Дж \cdot К \cdot моль \cdot с^2}{К \cdot моль \cdot Дж \cdot кг \cdot м^2} = \frac{Па \cdot с^2}{кг \cdot м^2} = \frac{Н \cdot с^2}{м^2 \cdot кг \cdot м^2} =$$

$$= \frac{кг \cdot м \cdot с^2}{с^2 \cdot кг \cdot м^4} = \frac{1}{м^3},\quad n = 6,8 \cdot 10^{24}\ м^{-3}.$$

Ответ: $n = 6,8 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$.

Задача 2.27. Найдите температуру T, при которой среднеквадратичная скорость молекулы азота равнялась бы среднеквадратичной скорости молекулы водорода при температуре $T_1 = 200$ К.

Дано:
$\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$
$\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$
$T_1 = 200$ К

T - ?

Решение. Средняя квадратичная скорость, согласно (2.21), равна $v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

По условию задачи $v_{кв1} = v_{кв2}$, где $v_{кв1}$ и $v_{кв2}$ – среднеквадратичные скорости азота и водорода соответственно. Таким образом, $\frac{3RT}{\mu_1} = \frac{3RT_1}{\mu_2}$,

откуда $T = \frac{\mu_1}{\mu_2} T_1$, $T = 2800$ К.

Ответ: $T = 2800$ К.

Задача 2.28. Какое число молекул n содержит единица массы газа при нормальных условиях, если средняя квадратичная скорость молекул $v_{кв} = 500$ м/с ?

Дано:
$v_{кв} = 500$ м/с
$p = 10^5$ Па
$T = 273$ К
n - ?

Решение. Средняя квадратичная скорость, согласно (2.21), равна

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (1)$$

Число молекул газа, содержащихся в его массе m, равно $N = \frac{m}{\mu} N_A$, где N_A – число Авогадро; μ – молярная масса. Тогда число молекул, содержащихся в единице массы:

$$n = \frac{N}{m} = \frac{N_A}{\mu}. \quad (2)$$

Выразив молярную массу из уравнения (1) и подставив ее в (2), получим:

$$n = \frac{N_A v_{кв}^2}{3RT}, \ [n] = \frac{моль \cdot К \cdot м^2}{моль \cdot Дж \cdot К \cdot с^2} = \frac{м^2}{Дж \cdot с^2} = \frac{м^2}{Н \cdot м \cdot с^2} =$$

$$= \frac{м^2 \cdot с^2}{кг \cdot м \cdot м \cdot с^2} = кг^{-1}, \ n = 2{,}2 \cdot 10^{25} \ кг^{-1}.$$

Ответ: $n = 2{,}2 \cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$.

Задача 2.29. Пылинка массой $m = 10^{-11}$ кг находится среди молекул азота. Во сколько раз скорость пылинки v меньше средней квадратичной скорости $v_{кв}$ молекул азота?

Дано:
$m = 10^{-11}$ кг
$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \ \frac{кг}{моль}$
$n = \frac{v_{кв2}}{v_{кв1}}$ - ?

Решение. Средняя квадратичная скорость молекул находится по формуле (2.21):

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где k – постоянная Больцмана; m_0 – масса молекулы.

Тогда для пылинки $v_{кв1} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, для молекул азота $v_{кв2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, а

$n = \frac{v_{кв2}}{v_{кв1}} = \sqrt{\frac{Rm}{k\mu}}$, $[n] = \sqrt{\frac{Дж \cdot кг \cdot К \cdot моль}{моль \cdot К \cdot Дж \cdot кг}} = 1$, $n = 1{,}47 \cdot 10^7$ раз.

Ответ: $n = 1{,}47 \cdot 10^7$ раз.

Задача 2.30. Средняя квадратичная скорость молекул газа $v_{кв} = 800$ м/с. Чему равна их средняя арифметическая скорость $\langle v \rangle$?

Дано:
$v_{кв} = 800$ м/с
$\langle v \rangle$ - ?

Решение. Согласно формулам (2.20) и (2.21), запишем: $v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, а $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.

Поделив скорость $\langle v \rangle$ на $v_{кв}$, получим:

$\frac{\langle v \rangle}{v_{кв}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}$, отсюда $\langle v \rangle = v_{кв}\sqrt{\frac{8}{3\pi}}$, $\langle v \rangle = 737$ м/с.

Ответ: $\langle v \rangle = 737$ м/с.

Задача 2.31. Найдите массу m и давление p двухатомного газа, находящегося в баллоне объемом $V = 40$ л, если известны энергия поступательного движения $E_п = 10$ кДж и средняя квадратичная скорость его молекул $v_{кв} = 2500$ м/с.

Дано:
$V = 40 \cdot 10^{-3}$ м^3
$E_п = 10^4$ Дж
$v_{кв} = 2500$ м/с
m - ? p - ?

Решение. Из формулы (2.21) для средней квадратичной скорости определим температуру газа:

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \text{ откуда } T = \frac{\mu v_{кв}^2}{3R}. \quad (1)$$

Внутренняя энергия идеального газа, согласно (2.16), равна

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT. \quad (2)$$

Поскольку для поступательного движения $i = 3$, то из уравнений (1) и (2) получим:

$$E_п = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\frac{\mu v_{кв}^2}{3R} = \frac{mv_{кв}^2}{2}. \qquad (3)$$

Из выражения (3) найдем массу газа:

$$m = \frac{2E_п}{v_{кв}^2},\ [m] = \frac{Дж \cdot с^2}{м^2} = \frac{Н \cdot м \cdot с^2}{м^2} = \frac{кг \cdot м \cdot м \cdot с^2}{с^2 \cdot м^2} = кг,\ m = 3{,}2 \cdot 10^{-3}\ кг. \qquad (4)$$

Давление газа находится из уравнения состояния (2.4):

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,\ p = \frac{mRT}{V\mu}. \qquad (5)$$

Подставляя в выражение (5) формулы (1) и (4), получим:

$$p = \frac{2}{3}\frac{E_п}{V},\ [p] = \frac{Дж}{м^3} = \frac{Н \cdot м}{м^3} = Па,\ p = 0{,}17\ МПа.$$

Ответ: $m = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ кг; $p = 0{,}17$ МПа.

Задача 2.32. Найдите вероятность ω того, что данная молекула идеального газа обладает скоростью, отличающейся не более чем на 1% от: а) $2v_в$; б) $v_в/2$.

Дано:
а) $2v_в$
б) $v_в/2$

ω - ?

Решение. Воспользуемся распределением Максвелла (2.18):

$$\Delta N(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}Ne^{-u^2}u^2\Delta u.$$

В задании а) требуется найти вероятность того, что скорость молекулы лежит в интервале

от $v - \Delta v = 2v_в - 0{,}01 \cdot 2v_в = 0{,}99 \cdot 2v_в$

до $v + \Delta v = 2v_в + 0{,}01 \cdot 2v_в = 1{,}01 \cdot 2v_в$,

т. е. $\Delta v = 1{,}01 \cdot 2v_в - 0{,}99 \cdot 2v_в = 0{,}04v_в$.

Закон Максвелла, записанный в виде (2.18), справедлив только для малых интервалов скоростей Δu, когда выполняется неравенство $\Delta u \ll u$.

Убедимся, что выполняется условие $\Delta u \ll u$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\Delta v}{v_в} = 0{,}04, \\ u &= \frac{v}{v_в} = 2. \end{aligned}\right\} \text{ Тогда } \omega = \frac{\Delta N(u)}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-4} \cdot 4 \cdot 0{,}04 = 6{,}63 \cdot 10^{-3}.$$

В задании б) скорость молекулы лежит в интервале

от $v - \Delta v = \frac{1}{2} v_в - 0{,}01 \cdot \frac{1}{2} v_в = 0{,}99 \cdot \frac{1}{2} v_в$

до $v + \Delta v = \frac{1}{2} v_в + 0{,}01 \cdot \frac{1}{2} v_в = 1{,}01 \cdot \frac{1}{2} v_в$,

т. е. $\Delta v = 1{,}01 \cdot \frac{1}{2} v_в - 0{,}99 \cdot \frac{1}{2} v_в = 0{,}01 v_в$.

Проверим неравенство $\Delta u << u$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\Delta v}{v_в} = 0{,}01, \\ u &= \frac{v}{v_в} = 0{,}5. \end{aligned}\right\} \text{ Тогда } \omega = \frac{\Delta N(u)}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-0{,}25} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}01 = 4{,}39 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ: а) $\omega = 6{,}63 \cdot 10^{-3}$; б) $\omega = 4{,}39 \cdot 10^{-3}$.

Задача 2.33. В сосуде объемом $V = 1$ см^3 находится водород при нормальных условиях. Найдите число молекул ΔN, скорости которых лежат в диапазоне от 0 до 1 м/с.

Дано:
$T = 273$ К
$V = 10^{-6}$ м^3
$p = 10^5$ Па
$v_{min} = 0$ м/с
$v_{max} = 1$ м/с
$\mu = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$

ΔN - ?

Решение. Воспользуемся распределением молекул по скоростям (2.18):

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 du, \qquad (1)$$

где $dN(u)$ – число молекул, скорости u которых заключены в интервале от u до du, N – полное число молекул.

Найдем значения максимальной скорости интересующих нас молекул: $u_{max} = \frac{v_{max}}{v_в}$, где

$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ – наиболее вероятная скорость.

Тогда $u_{max} = 0{,}66 \cdot 10^{-3}$. Для таких значений u выражение (1) можно упростить, учитывая, что $u \ll 1$, выполняется равенство $e^{-u^2} = 1 - u^2$.

Пренебрегая значением $u^2 = 0{,}44 \cdot 10^{-6}$ по сравнению с единицей, выражение (1) примет вид:

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 du; \quad \Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{max}} u^2 du = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u_{max}^3. \tag{2}$$

Число молекул $N = \nu N_A$, а количество вещества ν выразим из уравнения Менделеева–Клапейрона (2.4) $pV = \nu RT$, откуда

$$\nu = \frac{pV}{RT} \text{ и } N = \frac{pVN_A}{RT}. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в (2), получим:

$$\Delta N = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{pVN_A}{RT} u_{max}^3, \quad \Delta N = 5{,}8 \cdot 10^9.$$

$$[\Delta N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{Дж} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = 1.$$

Ответ: $\Delta N = 5{,}8 \cdot 10^9$.

Задача 2.34. Найдите относительное число молекул ω идеального газа, скорости которых находятся в пределах от 0 до одной сотой наиболее вероятной скорости $v_в$.

Дано:
$v_{min} = 0$ м/с
$v_{max} = 0{,}01 \cdot v_в$

ω - ?

Решение. Воспользуемся распределением молекул по скоростям (2.18):

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 du, \tag{1}$$

где $u = \frac{v}{v_в}$, dN – число молекул, скорости которых u заключены в пределах от u до du.

Так как $v_{max} = 0{,}01 \cdot v_в$, то $u_{max} = \frac{v_{max}}{v_в} = 0{,}01$.

Для $u \ll 1$ имеем $e^{-u^2} = 1 - u^2$.

Пренебрегая значением $u^2 = (0{,}01)^2 = 10^{-4}$ по сравнению с 1, получим:

$$\omega = \int_0^{u_{max}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,01} u^2 du = 7 \cdot 10^{-7}.$$

Ответ: $\omega = 7 \cdot 10^{-7}$.

Задача 2.35. Найдите долю молекул кислорода, находящегося при температуре $t = 20°C$, скорости которых находятся в интервале от $v_1 = 275$ м/с до $v_2 = 280$ м/с.

Дано:

$T = 293$ К

$\mu = 32 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$v_1 = 275$ м/с

$v_2 = 280$ м/с

$\frac{\Delta N}{N}$ - ?

Решение. Для нахождения доли молекул, обладающих скоростями, лежащими в заданном интервале, можно воспользоваться распределением молекул по скоростям (2.18):

$$\frac{\Delta N(u)}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u.$$

При решении задач на закон распределения Максвелла удобно пользоваться таблицей 3, в которой даны значения функции распределения $f(u) = \frac{\Delta N(u)}{N \Delta u}$ для различных значений u. Функция распределения $f(u)$ является универсальной, так как не зависит ни от температуры, ни от рода газа.

Для этого вычислим:

наиболее вероятную скорость $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$, $v_в = 385$ м/с,

отношение $u = \frac{v_1}{v_в}$, $u = 0{,}7$

и интервал скоростей $\Delta u = \frac{v_2 - v_1}{v_в}$, $\Delta u = 0{,}013$.

По таблице 3 находим, что скорости $u = 0{,}7$ соответствует значение функции $f(u) = 0{,}677$. Отсюда

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u)du, \quad \frac{\Delta N}{N} = 0{,}677 \cdot 0{,}013 = 0{,}009.$$

Это значит, что 0,9% всех молекул кислорода обладают скоростями, лежащими в заданном интервале скоростей.

Ответ: $\dfrac{\Delta N}{N} = 0{,}009$.

Задача 2.36. Найдите изменение атмосферного давления при подъеме на высоту h = 500 м, считая температуру воздуха постоянной и равной T = 300 К, а давление у поверхности Земли $p_0 = 10^5$ Па.

Дано:
$h = 500$ м
$T = 300$ К
$p_0 = 10^5$ Па

Δp - ?

Решение. Давление воздуха p_1 на высоте h найдем, используя барометрическую формулу (2.23):

$$p_1 = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}, \text{ где } \mu = 29 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Тогда $\Delta p = p_0 - p_1 = p_0 (1 - e^{-\frac{\mu g h}{RT}})$, $\Delta p = 5{,}8$ кПа.

Ответ: $\Delta p = 5{,}8$ кПа.

Задача 2.37. Определите высоту полета самолета, если барометр в его кабине показывает давление $p = 2{,}5 \cdot 10^4$ Па. Температуру воздуха считать постоянной и равной T = 220 К, а давление у поверхности Земли $p_0 = 10^5$ Па.

Дано:
$T = 220$ К
$p = 2{,}5 \cdot 10^4$ Па
$p_0 = 10^5$ Па

h - ?

Решение. Воспользуемся барометрической формулой (2.23):

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}, \qquad (1)$$

где $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса воздуха.

Приведем уравнение (1) к виду $\dfrac{p_0}{p} = e^{\frac{\mu g h}{RT}}$ и прологарифмируем его:

$$\frac{\mu g h}{RT} = \ln \frac{p_0}{p}, \text{ откуда } h = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{p_0}{p}, \quad h = 8700 \text{ м},$$

$$[h] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{м}.$$

Ответ: $h = 8700$ м.

Задача 2.38. Температура воздуха на некоторой высоте T_o = 220 К, а давление p = 25 кПа. Найдите изменение высоты Δh, соответствующее изменению давления на Δp = 100 Па.

Дано:
$T_o = 220$ К
$p = 25 \cdot 10^3$ Па
$\Delta p = 100$ Па

Δh - ?

Решение. Используем барометрическую формулу (2.23):

$$p = p_o \cdot e^{-\frac{\mu g h}{RT}},$$

откуда
$$\frac{p}{p_o} = e^{-\frac{\mu g h}{RT}}. \qquad (1)$$

Так как $p = p_o - \Delta p$, а $h = \Delta h$, то выражение (1) приводится к виду

$$\frac{p_o - \Delta p}{p_o} = e^{-\frac{\mu g \Delta h}{RT}}.$$

Логарифмируя полученное выражение по основанию e, получим

$$\ln\frac{p_o - \Delta p}{p_o} = -\frac{\mu g \Delta h}{RT},$$ откуда

$$\Delta h = \frac{RT}{\mu g}\ln\frac{p_o}{p_o - \Delta p}, \quad \Delta h = 25{,}7 \text{ м},$$

$$[\Delta h] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Ответ: Δh = 25, 7 м.

Задача 2.39. Во время полета вертолета барометр в его кабине показывает давление p = 80 кПа, поэтому летчик считает, что летит на постоянной высоте. Однако температура воздуха изменилась на ΔT = 2 К. Какую ошибку допускает летчик при определении высоты полета? Считать температуру воздуха не зависящей от высоты, а давление у поверхности Земли $p_0 = 10^5$ Па.

Дано:
$p = 8 \cdot 10^4$ Па
$\Delta T = 2$ К
$p_o = 10^5$ Па
$\mu = 29 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

Δh - ?

Решение. До изменения температуры давление, показываемое барометром, согласно (2.23), равно:

$$p = p_o \cdot e^{-\frac{\mu g h}{RT}}, \qquad (1)$$

где h – высота полета.

После изменения температуры на ΔT давление, показываемое барометром, осталось таким же, поэтому

$$p = p_o \cdot e^{-\frac{\mu g(h+\Delta h)}{R(T+\Delta T)}}, \tag{2}$$

где Δh – ошибка в измерении высоты.

Из уравнений (1), (2) следует:

$$p_o \cdot e^{-\frac{\mu g h}{RT}} = p_o \cdot e^{-\frac{\mu g(h+\Delta h)}{R(T+\Delta T)}}, \text{ откуда}$$

$$\frac{h}{T} = \frac{h+\Delta h}{T+\Delta T} \text{ или } \Delta h = \frac{h}{T}\Delta T. \tag{3}$$

Соотношение $\frac{h}{T}$ найдем из формулы (1):

$$\frac{p_o}{p} = e^{\frac{\mu g}{R}\cdot\frac{h}{T}}, \quad \ln\frac{p_o}{p} = \frac{\mu g}{R}\cdot\frac{h}{T}, \quad \frac{h}{T} = \frac{R}{\mu g}\ln\frac{p_o}{p}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в (3), получим:

$$\Delta h = \frac{R\Delta T}{\mu g}\ln\frac{p_o}{p}, \quad [\Delta h] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \text{м}, \quad \Delta h = 13 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta h = 13$ м.

Задача 2.40. Одинаковые частицы массой $m = 10^{-12}$ г каждая распределены в однородном гравитационном поле напряженностью $g = 0{,}2$ мкН/кг. Определите отношение $\frac{n_1}{n_2}$ концентраций частиц, находящихся на эквипотенциальных уровнях, отстоящих друг от друга на $\Delta z = 10$ м. Температура T во всех слоях считается одинаковой и равной 290 К.

Дано:
$m = 10^{-15}$ кг
$g = 2\cdot 10^{-7}$ Н/кг
$\Delta z = 10$ м
$T = 290$ К

$\frac{n_1}{n_2}$ - ?

Решение. Согласно распределению Больцмана (2.22), концентрация частиц в силовом поле

$$n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}},$$

где k – постоянная Больцмана; E_p – потенциальная энергия частиц.

В однородном гравитационном поле напряженностью g потенциальная энергия

$$E_p = mgz,$$

где z – координата (высота) точки, в которой расположена частица массы m, по отношению к уровню, принятому за нулевой.

Для частиц, находящихся на двух эквипотенциальных уровнях, концентрация $n_1 = n_0 e^{-\frac{mgz_1}{kT}}$, $n_2 = n_0 e^{-\frac{mgz_2}{kT}}$. Отсюда найдем отношение $\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{mg}{kT}(z_2 - z_1)}$.

По условию задачи $\Delta z = z_2 - z_1$, поэтому $\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{mg\Delta z}{kT}}$,

$$\left[\frac{mg\Delta z}{kT}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1, \quad \frac{n_1}{n_2} = 1{,}65.$$

Ответ: $\frac{n_1}{n_2} = 1{,}65.$

Задача 2.41. Известно отношение концентраций пылинок $\frac{n_1}{n_0} = 0{,}787$, взвешенных в воздухе и находящихся на высотах $h_1 = 0{,}1$ м и $h_0 = 0$ м. Температура воздуха $T = 300$ К, а масса пылинки $m = 10^{-21}$ кг. Найдите по этим данным значение постоянной Авогадро N_A.

Дано:
$m = 10^{-21}$ кг
$T = 300$ К
$\frac{n_1}{n_0} = 0{,}787$
$h_1 = 0{,}1$ м
$h_0 = 0$ м

N_A - ?

Решение. Воспользуемся распределением Больцмана (2.22):

$$n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}, \tag{1}$$

где $k = \frac{R}{N_A}$ – постоянная Больцмана.

Тогда $n_1 = n_0 e^{-\frac{mgh_1N_A}{RT}}$ или отношение

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-\frac{mgh_1N_A}{RT}}. \tag{2}$$

Логарифмируя выражение (2), получим $\ln\frac{n_1}{n_0} = -\frac{mgh_1 N_A}{RT}$, откуда

$$N_A = -\ln\frac{n_1}{n_0}\cdot\frac{RT}{mgh_1},\ N_A = 5{,}96\cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1},$$

$$[N_A] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{с}^2}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{Дж}} = \text{моль}^{-1}.$$

Ответ: $N_A = 5{,}96\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

2.3. Явления переноса в газах

Основные формулы

● Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени:

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle \text{v}\rangle, \tag{2.24}$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; <v> – средняя арифметическая скорость.

● Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle \lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}, \tag{2.25}$$

где k – постоянная Больцмана.

● Среднее число ударов молекул об единицу поверхности в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{4}n\langle \text{v}\rangle. \tag{2.26}$$

● Закон Ньютона

$$F = \eta\frac{d\text{v}}{dz}\Delta S, \tag{2.27}$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями; η – динамическая вязкость газа; $\frac{d\text{v}}{dz}$ – градиент скорости; ΔS – площадь поверхности, по которой действует сила F.

● Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{\rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle}{3}, \qquad (2.28)$$

где ρ – плотность газа.

● Закон Фурье

$$\Delta Q = -\gamma \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t, \qquad (2.29)$$

где ΔQ – теплота, прошедшая посредством теплопроводности через сечение с площадью ΔS за время Δt; γ – теплопроводность; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры.

● Теплопроводность (коэффициент теплопроводности) газа

$$\gamma = \frac{c_V \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle}{3}, \qquad (2.30)$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

● Закон Фика

$$\Delta m = -D \frac{dn}{dx} m_0 \Delta S \Delta t, \qquad (2.31)$$

где Δm – масса газа, перенесенная в результате диффузии через поверхность площадью ΔS за время Δt; D – коэффициент диффузии; m_0 – масса одной молекулы; $\frac{dn}{dx}$ – градиент концентрации.

● Коэффициент диффузии

$$D = \frac{\langle v \rangle \langle \lambda \rangle}{3}. \qquad (2.32)$$

Задача 2.42. Водород находится при температуре $t = 20°$ С и давлении $p = 15$ Па. Найдите среднюю длину $\langle \lambda \rangle$ пробега молекул водорода.

Дано:
$T = 293$ К
$p = 15$ Па
$d = 0{,}23 \cdot 10^{-9}$ м
$\langle\lambda\rangle$ - ?

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул определяется по формуле (2.25):

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad (1)$$

где n – концентрация молекул газа.

Выразим n из уравнения состояния идеального газа (2.15):

$$p = nkT\,, \quad n = \frac{p}{kT}, \qquad (2)$$

где k – постоянная Больцмана.

Подставив формулу (2) в (1), получим:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}, \ \left[\langle\lambda\rangle\right] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{К}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Па}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2\cdot\text{Н}} = \text{м}\,, \ \langle\lambda\rangle = 1{,}16\cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Ответ: $\langle\lambda\rangle = 1{,}16\cdot 10^{-3}$ м.

Задача 2.43. Средняя длина свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ молекул кислорода равна 10 см. Найдите плотность ρ газа.

Дано:
$\langle\lambda\rangle = 0{,}1$ м
$\mu = 32\cdot 10^{-3}$ $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$d = 0{,}23\cdot 10^{-9}$ м
ρ - ?

Решение. Поскольку (см. задачу 2.42)

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}, \qquad (1)$$

то, выразив давление p из уравнения Менделеева–Клапейрона (2.5) $p = \frac{\rho}{\mu}RT$ и подставив его в формулу (1), получим: $\langle\lambda\rangle = \frac{kT\mu}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho RT}$, откуда $\rho = \frac{k\mu}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle\lambda\rangle R}$,

$$[\rho] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{К}\cdot\text{моль}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{Дж}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \ \rho = 0{,}13\cdot 10^{-5} \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho = 0{,}13\cdot 10^{-5}$ кг/м^3.

Задача 2.44. Найдите среднее число соударений $<z>$ в единицу времени молекул кислорода при температуре $t = 50°$ С, если средняя длина свободного пробега $<\lambda> = 800$ мкм.

Дано:
$\langle\lambda\rangle = 8\cdot10^{-4}$ м
$T = 323$ К
$\mu = 32\cdot10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$\langle z\rangle$ - ?

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул, согласно (2.24),

$$\langle\lambda\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle z\rangle},$$

где $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя арифметическая скорость.

Тогда $\langle z\rangle = \dfrac{\langle v\rangle}{\langle\lambda\rangle} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu\langle\lambda\rangle^2}}$, $\langle z\rangle = 0{,}58\cdot10^6\ \text{с}^{-1}$,

$$[\langle z\rangle] = \sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Ответ: $\langle z\rangle = 0{,}58\cdot10^6\ \text{с}^{-1}$.

Задача 2.45. Найдите среднее число соударений $<z>$ в течение t = 1с, испытываемое молекулой водорода при нормальных условиях.

Дано:
$d = 0{,}23\cdot10^{-9}$ м
$t = 1$ с
$T = 273$ К
$p = 10^5$ Па
$\mu = 2\cdot10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$\langle z\rangle$ - ?

Решение. Среднее число соударений в единицу времени одной молекулы определяется отношением (2.24):

$$\langle z\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle\lambda\rangle},$$

где $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул, согласно (2.25)

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Тогда $\langle z\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}\Bigg/\left(\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}\right) = \dfrac{4d^2 p}{k}\sqrt{\dfrac{R\pi}{\mu T}}$, $\langle z\rangle = 1{,}1\cdot10^{10}\ \text{с}^{-1}$.

$$[\langle z\rangle] = \frac{\text{м}^2\cdot\text{Па}\cdot\text{К}}{\text{Дж}}\sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{К}}} = \frac{\text{м}^2\cdot\text{Н}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Ответ: $\langle z\rangle = 1{,}1\cdot10^{10}\ \text{с}^{-1}$.

Задача 2.46. Найдите число Z всех столкновений, которые происходят в единицу времени между всеми молекулами кислорода, занимающего объем $V = 5$ л при нормальных условиях.

Дано:
$d = 0{,}3 \cdot 10^{-9}$ м
$T = 273$ К
$p = 10^5$ Па
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$V = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3

Z - ?

Решение. Среднее число столкновений за единицу времени, испытываемых одной молекулой, согласно (2.24):

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle \text{v}\rangle,$$

где $\langle \text{v}\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя арифметическая скорость, $n = \dfrac{N}{V}$ – концентрация молекул.

Общее число столкновений $Z = \dfrac{N\langle z\rangle}{2}$. Так как при столкновении участвуют одновременно две молекулы, то берется $\dfrac{1}{2}N$. Таким образом,

$$Z = \frac{V}{2}\sqrt{2}\pi d^2 n^2 \langle \text{v}\rangle = \frac{V}{\sqrt{2}}\pi d^2 n^2 \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \tag{1}$$

Из уравнения состояния (2.15) $p = nkT$ определим концентрацию молекул:

$$n = \frac{p}{kT}. \tag{2}$$

Подставив уравнение (2) в (1), получим:

$$Z = \frac{V\pi d^2 p^2}{\sqrt{2}k^2T^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad [Z] = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Па}^2 \cdot \text{К}^2}{\text{Дж}^2 \cdot \text{К}^2}\sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}} =$$

$$= \frac{\text{м}^5 \cdot \text{Н}^2}{\text{м}^6 \cdot \text{Н}^2}\sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \frac{1}{\text{с}}, \quad Z = 3 \cdot 10^{32}\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $Z = 3 \cdot 10^{32}$ с$^{-1}$.

Задача 2.47. Для исследования плазмы тлеющего разряда применяется цилиндрическая газоразрядная трубка, в которой находится неон при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 1$ Па. Найдите число молекул неона N, ударяющихся в единицу времени о катод, имеющий форму диска площадью $S = 1$ см^2.

Дано:
$T = 300$ К
$p = 1$ Па
$S = 10^{-4}$ м^2
$\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

N - ?

Решение. Согласно формуле (2.26), среднее число ударов молекул об единицу поверхности в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle \text{v} \rangle, \tag{1}$$

где n – число молекул в единице объема – можно определить из уравнения состояния (2.15):

$$n = \frac{p}{kT}. \tag{2}$$

Средняя арифметическая скорость, согласно (2.21), равна

$$\langle \text{v} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \tag{3}$$

Число молекул неона N, ударяющихся о катод в единицу времени, $N = \nu S$, или с учетом выражений (1)–(3) получим:

$$N = \frac{Sp}{4k}\sqrt{\frac{8R}{\pi\mu T}},\ [N] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Па} \cdot \text{К}}{\text{Дж}}\sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{К} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{К}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{К}}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} =$$

$$= \frac{1}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \frac{1}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \frac{1}{\text{с}},\ N = 3{,}4 \cdot 10^{18}\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $N = 3{,}4 \cdot 10^{18}$ с$^{-1}$.

Задача 2.48. Кислород находится при нормальных условиях. Известно, что средняя длина свободного пробега молекул $<\lambda>$ = 0,1 мкм. Найдите коэффициент диффузии D.

Дано:
$T = 273$ К
$p = 10^5$ Па
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$\langle \lambda \rangle = 10^{-7}$ м

D - ?

Решение. Коэффициент диффузии определяется по формуле (2.32):

$$D = \frac{\langle \text{v} \rangle \langle \lambda \rangle}{3},$$

где $\langle \text{v} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя арифметическая скорость.

В итоге $D = \frac{\langle \lambda \rangle}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, $D = 14 \cdot 10^{-6}$ м^2/с,

$$[D] = \text{м}\sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}}} = \text{м}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{м}\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \text{м}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Ответ: $D = 14\cdot10^{-6}$ м²/с.

Задача 2.49. Найдите, во сколько раз отличается коэффициент диффузии D_1 кислорода от коэффициента диффузии D_2 гелия, если оба газа находятся в нормальных условиях.

Дано:
$T = 273$ К
$p = 10^5$ Па
$\mu_1 = 32\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$\mu_2 = 4\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$d_1 = 3\cdot10^{-10}$ м
$d_2 = 2\cdot10^{-10}$ м

$\frac{D_1}{D_2}$ - ?

Решение. Коэффициент диффузии газа, согласно (2.32): $D = \frac{\langle v\rangle\langle\lambda\rangle}{3}$, где $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя арифметическая скорость.

По формуле (2.25) определяется средняя длина свободного пробега молекул:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Таким образом, $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$.

Отношение коэффициентов диффузии $\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$, $\frac{D_1}{D_2} = 0{,}16$.

Ответ: $\frac{D_1}{D_2} = 0{,}16$.

Задача 2.50. Коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях $D = 9\cdot10^{-5}$ м²/с. Найдите динамическую вязкость водорода при тех же условиях.

Дано:
$T = 273$ К
$p = 10^5$ Па
$\mu = 2\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$D = 9\cdot10^{-5}$ м²/с

η - ?

Решение. Запишем коэффициент диффузии и коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость), используя формулы (2.32) и (2.28):

$$D = \frac{\langle v\rangle\langle\lambda\rangle}{3} \text{ и } \eta = \frac{\rho\langle v\rangle\langle\lambda\rangle}{3}.$$

Из сравнения коэффициентов D и η видно, что

$$\eta = \rho D, \qquad (1)$$

где ρ - плотность газа.

Плотность газа ρ определим, используя уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4):

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим динамическую вязкость:

$$\eta = \frac{\mu p}{RT} D, \ \eta = 8 \cdot 10^{-6} \ \text{Па} \cdot \text{с},$$

$$[\eta] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^2}{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па} \cdot \text{м}^2}{\text{Дж} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Ответ: $\eta = 8 \cdot 10^{-6}$ Па · с.

Задача 2.51. Вязкость гелия при нормальных условиях $\eta = 13$ мкПа · с. Найдите среднюю длину свободного пробега молекул гелия $<\lambda>$ при тех же условиях.

Дано:
$T = 273$ К
$p = 10^5$ Па
$\mu = 4 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$\eta = 13 \cdot 10^{-6}$ Па · с

$\langle \lambda \rangle$ - ?

Решение. Динамическая вязкость согласно (2.28)

$$\eta = \frac{\rho \langle \text{v} \rangle \langle \lambda \rangle}{3}, \text{ откуда } \langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{\rho \langle \text{v} \rangle}. \qquad (1)$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона (2.4) определим плотность газа:

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}. \qquad (2)$$

Средняя арифметическая скорость молекул газа

$$\langle \text{v} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)–(3) находим:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}}, \ \langle \lambda \rangle = 184 \cdot 10^{-9} \text{ м},$$

$$[\langle \lambda \rangle] = \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{Па}} \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг}}} = \text{с} \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \text{с} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}} = \text{м}.$$

Ответ: $\langle \lambda \rangle = 184 \cdot 10^{-9}$ м.

Задача 2.52. Вязкость водорода $\eta = 8{,}6$ мкПа·с. Определите коэффициент теплопроводности γ водорода при тех же условиях.

Дано:
$\mu = 2\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$\eta = 86\cdot 10^{-7}$ Па·с
$i = 5$

γ - ?

Решение. Коэффициент теплопроводности определяется по формуле (2.30):

$$\gamma = \frac{c_V\langle v\rangle\rho\langle\lambda\rangle}{3},$$

а коэффициент вязкости – по формуле (2.28):

$$\eta = \frac{\rho\langle v\rangle\langle\lambda\rangle}{3}.$$

Таким образом, коэффициенты теплопроводности и вязкости связаны соотношением

$$\gamma = c_V\eta, \tag{1}$$

где $c_V = \frac{iR}{2\mu}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; i – число степеней свободы для двухатомного газа $i = 5$. Тогда $\gamma = \frac{5R}{2\mu}\eta$,

$$[\gamma] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}},\ \gamma = 89{,}3\ \text{мВт/мК}.$$

Ответ: $\gamma = 89{,}3\ \frac{\text{мВт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

Задача 2.53. Два диска радиусом $R = 0{,}2$ м каждый расположены горизонтально друг над другом на расстоянии $d = 0{,}5$ см так, что их оси совпадают. Верхний диск неподвижен, а нижний вращается относительно своей оси с частотой $n = 10\ \text{с}^{-1}$. Найдите вращающий момент M, действующий на верхний диск, если динамическая вязкость воздуха, в котором находятся диски, $\eta = 8{,}6$ мкПа·с.

Дано:
$R = 0{,}2$ м
$\eta = 86\cdot 10^{-7}$ Па·с
$d = 5\cdot 10^{-3}$ м
$n = 10\ \text{с}^{-1}$

M - ?

Решение. Выделим на верхнем диске участок (заштрихованный на рис. 46) толщиной $d\rho$, расположенный на расстоянии, равном радиусу ρ от центра диска. Его площадь $dS = \rho d\rho d\varphi$.

По закону Ньютона (2.27) на этот участок действует сила внутреннего трения:

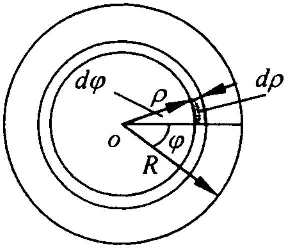

Рис. 46

$$dF = \eta\frac{dv}{dz}dS = \eta\frac{dv}{dz}\rho d\rho d\varphi,$$

где η – динамическая вязкость; $\frac{dv}{dz}$ – градиент скорости слоев воздуха.

Вращающий момент dM, действующий на выделенный участок, равен

$$dM = \rho dF = \eta\frac{dv}{dz}\rho^2 d\rho d\varphi.$$

Так как $\frac{dv}{dz} = \frac{v}{d}$, а $v = \omega\rho = 2\pi n\rho$, то

$$dM = \eta\frac{2\pi n}{d}\rho^3 d\rho d\varphi.$$

Полный вращающий момент, действующий на верхний диск, найдем методом интегрирования:

$$M = \iint dM = \int_0^{2\pi}\int_0^R \eta\frac{2\pi n}{d}\rho^3 d\rho d\varphi = \eta\frac{2\pi n}{d}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho^3 d\rho = \eta\frac{2\pi n}{d}\frac{R^4}{4}2\pi =$$

$$= \frac{\pi^2 n\eta R^4}{d},\quad [M] = \frac{\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^4}{\text{с}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н}\cdot\text{м},\quad M = 0{,}54\ \text{мН}\cdot\text{м}.$$

Ответ: $M = 0{,}54$ мН·м.

Задача 2.54. Сосуд с азотом делится перегородкой на две части, в которых поддерживается различное давление газа: $p_1 = 5\cdot10^{-3}$ Па и $p_2 = 1\cdot10^{-3}$ Па. Перегородка имеет отверстие диаметром $d = 1$ см (рис. 47). Определить массу азота, протекающего в единицу времени через отверстие при температуре газа $T = 300$ К. Газ разрежен, длина свободного пробега молекул $\lambda >> d$.

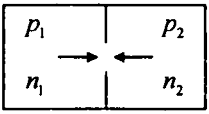

Рис. 47

Дано:
$d = 10^{-2}$ м
$p_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ Па
$p_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ Па
$T = 300$ К
$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \, \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

m - ?

Решение. Число N молекул, проходящих через отверстие в единицу времени, равно

$$N = N_1 - N_2, \qquad (1)$$

где N_1 – число молекул, движущихся слева направо; N_2 – справа налево.

Согласно формуле (2.26),

$$N_1 = \frac{1}{4} n_1 \langle \text{v} \rangle, \; N_2 = \frac{1}{4} n_2 \langle \text{v} \rangle, \qquad (2)$$

где n_1 и n_2 – концентрации молекул; $\langle \text{v} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя арифметическая скорость движения молекул.

Концентрации молекул найдем из уравнения состояния газа (2.15):

$$n_1 = \frac{p_1}{kT}, \; n_2 = \frac{p_2}{kT}. \qquad (3)$$

Из выражений (1)–(3) получим:

$$N = \frac{1}{4} \langle \text{v} \rangle \frac{p_1 - p_2}{kT} = \frac{1}{4} \frac{p_1 - p_2}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \qquad (4)$$

Формула (4) позволяет определить число молекул, проходящих в единицу времени через единицу площади отверстия. Найдем число молекул, проходящих через отверстие в единицу времени:

$$N \cdot S = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{4} \frac{p_1 - p_2}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \qquad (5)$$

где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь отверстия.

Масса газа, протекающего через отверстие за одну секунду, равна

$$m = m_0 NS, \qquad (6)$$

где $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$ – масса одной молекулы; N_A – число Авогадро.

Тогда из (5) и (6) окончательно получим:

$$m=\frac{\mu}{N_A}\frac{\pi d^2}{16}\frac{p_1-p_2}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}=\frac{d^2}{8}(p_1-p_2)\sqrt{\frac{2\pi\mu}{RT}},\ m=4\cdot10^{-10}\ \text{кг/с},$$

$$[m]=\text{м}^2\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}}=\text{Н}\sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Н}\cdot\text{м}}}=\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{м}}}=\frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

Ответ: $m=4\cdot10^{-10}$ кг/с.

2.4. Основы термодинамики

Основные формулы

● Удельные теплоемкости газа при постоянном объеме (c_V) и при постоянном давлении (c_P):

$$c_V=\frac{i}{2}\frac{R}{\mu};\ c_p=\frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}, \tag{2.33}$$

где i – число степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

● Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении:

$$C_V=\frac{iR}{2};\ C_p=\frac{(i+2)R}{2}. \tag{2.34}$$

● Связь между молярной и удельной теплоемкостями

$$C=c\mu. \tag{2.35}$$

● Уравнение Майера

$$C_p-C_V=R. \tag{2.36}$$

● Внутренняя энергия идеального газа

$$U=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT=\frac{m}{\mu}C_VT. \tag{2.37}$$

● Первое начало термодинамики

$$Q=\Delta U+A, \tag{2.38}$$

где Q – теплота, сообщенная системе (газу), ΔU – изменение внутренней энергии системы, A – работа, совершенная системой против внешних сил.

● Работа расширения газа:

а) в общем случае $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p dV$; (2.39)

б) при изохорном процессе $A = 0$;

в) при изобарном процессе $A = p(V_2 - V_1)$; (2.40)

г) при изотермическом процессе $A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$; (2.41)

д) при адиабатическом процессе $A = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} c_V \Delta T$, или

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2), \qquad (2.42)$$

где $\gamma = C_p / C_V$ – показатель адиабаты.

● Уравнение Пуассона, связывающее параметры идеального газа при адиабатическом процессе:

$$pV^{\gamma} = \text{const}. \qquad (2.43)$$

● Связь между начальными и конечными параметрами состояний газа при адиабатическом процессе:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \qquad (2.44)$$

● Термический коэффициент полезного действия (КПД) цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_п}{Q_1}, \qquad (2.45)$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом холодильнику, $A_п$ – полезная работа.

● КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (2.46)$$

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника.

- Изменение энтропии

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}, \qquad (2.47)$$

где A и B – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состоянию системы.

Задача 2.55. Найдите работу A расширения двухатомного идеального газа, которому при постоянном давлении сообщено количество теплоты $Q = 4{,}9$ кДж.

Дано:
$i = 5$
$Q = 4{,}9 \cdot 10^3$ Дж
$p = \text{const}$

A - ?

Решение. Работа газа при изобарическом процессе ($p = \text{const}$) определяется формулой (2.40):

$$A = p(V_2 - V_1), \qquad (1)$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Для двух состояний газа (до и после сообщения газу количества теплоты Q) запишем уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$pV_1 = \nu RT_1, \qquad (2)$$
$$pV_2 = \nu RT_2, \qquad (3)$$

где T_1 и T_2 – температуры газа до и после нагревания.

Вычтем из уравнения (3) уравнение (2):

$$p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1).$$

Тогда из (1) следует:

$$A = \nu R(T_2 - T_1). \qquad (4)$$

Найдем по формуле (2.37) изменение внутренней энергии газа ΔU :

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1), \qquad (5)$$

где i – число степеней свободы молекулы газа, $i = 5$ для двухатомного газа.

Из сравнения выражений (4) и (5) видно, что

$$\Delta U = \frac{i}{2}A. \qquad (6)$$

Согласно первому началу термодинамики (2.38), теплота, сообщенная телу, равна:

$$Q = \Delta U + A\,. \qquad (7)$$

Подставив (6) в (7), получим:

$$Q = \frac{i}{2}A + A = \frac{i+2}{2}A\text{, откуда } A = \frac{2}{i+2}Q,\ A = 1{,}4 \text{ кДж.}$$

Ответ: A = 1,4 кДж.

Задача 2.56. Идеальный газ, занимавший объем V_1 = 10 л при давлении p = 10^5 Па и температуре T_1 = 300 К, был нагрет при постоянном давлении до температуры T_2 = 510 К. Найдите работу расширения газа.

Дано:
$V_1 = 10^{-2}$ м^3
$p = 10^5$ Па
$T_1 = 300$ К
$T_2 = 510$ К
A - ?

Решение. Работа газа при изобарном процессе определяется по формуле (2.40):

$$A = p(V_2 - V_1), \qquad (1)$$

где V_1, V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Согласно закону Гей–Люссака (2.6), отношение $\frac{V}{T} = \text{const}$, или для двух состояний газа имеем:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}\text{, откуда } V_2 = V_1\frac{T_2}{T_1}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим: $A = p\left(V_1\frac{T_2}{T_1} - V_1\right) = \frac{pV_1}{T_1}(T_2 - T_1)$,

$$[A] = \frac{\text{Па}\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}}{\text{К}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж},\ A = 0{,}7 \text{ кДж.}$$

Ответ: $A = 0{,}7$ кДж.

Задача 2.57. Азот массой $m = 100$ г нагрет при постоянном давлении на $\Delta T = 50$ К. Найдите работу расширения газа и приращение ΔU его внутренней энергии.

Дано:
$m = 0{,}1$ кг
$\Delta T = 50$ К
A - ? ΔU -?

Решение. Работа, совершаемая газом при $p = \text{const}$, равна $A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$, где ΔV – увеличение объема газа.

Используя уравнение состояния (2.4), запишем:

$$p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Следовательно, $A = \frac{m}{\mu} R\Delta T$, $A = 14{,}8$ кДж.

Изменение внутренней энергии газа можно определить по формуле (2.37):

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T, \quad [\Delta U] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}\cdot\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж}, \quad \Delta U = 37 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 14{,}8$ кДж; $\Delta U = 37$ кДж.

Задача 2.58. Найдите работу, совершаемую при изотермическом расширении кислорода массой $m = 20$ г, находящегося при температуре $t = -20°\text{C}$, если его давление изменяется от $p_1 = 500$ кПа до $p_2 = 50$ кПа.

Дано:
$m = 20\cdot 10^{-3}$ кг
$\mu = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T_1 = 253$ К
$p_1 = 5\cdot 10^5$ Па
$p_1 = 5\cdot 10^4$ Па

A - ?

Решение. Работа газа при изотермическом процессе ($T = \text{const}$) определяется по формуле (2.41):

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{1}$$

Для изотермического процесса справедлив закон Бойля–Мариотта (2.5):

$p_1V_1 = p_2V_2$, откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в (1), получим:

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right), \quad [A] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}\cdot\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж}, \quad A = 3 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 3$ кДж.

Задача 2.59. Во сколько раз изменилось давление гелия, если при его изотермическом расширении совершена работа $A = 900$ Дж. Масса газа $m = 20$ г, температура $t = 15°\text{C}$.

Дано:
$A = 900$ Дж
$m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг
$\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T_1 = 288$ К

$\frac{p_1}{p_2}$ - ?

Решение. Работа газа при изотермическом расширении, согласно (2.41), равна

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Отсюда $\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{A\mu}{mRT}$, $\frac{p_1}{p_2} = 1{,}1$,

$$\left[\frac{A\mu}{mRT}\right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}} = 1.$$

Ответ: $\frac{p_1}{p_2} = 1{,}1$.

Задача 2.60. Найдите среднюю квадратичную скорость молекул идеального газа, если известна работа его изотермического расширения от объема V_1 до $V_2 = 4V_1$, равная $A = 600$ Дж. Масса газа $m = 20$ г.

Дано:
$V_2 = 4V_1$
$A = 600$ Дж
$m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг

$v_{кв}$ - ?

Решение. Работа изотермического расширения газа определяется по формуле (2.41):

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \quad (1)$$

Из уравнения (1) найдем температуру газа:

$$T = \frac{A\mu}{mR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}. \quad (2)$$

Средняя квадратичная скорость молекул газа, согласно (2.21), равна:

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (3)$$

Подставив выражение (2) в (3), получим: $v_{кв} = \sqrt{\frac{3A}{m \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}}$,

$$[\mathrm{v}_{кв}] = \sqrt{\frac{Дж}{кг}} = \sqrt{\frac{Н \cdot м}{кг}} = \sqrt{\frac{кг \cdot м \cdot м}{кг \cdot с^2}} = \frac{м}{с}, \ \mathrm{v}_{кв} = 255 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\mathrm{v}_{кв} = 255$ м/с.

Задача 2.61. Кислород массой $m = 500$ г нагрет при постоянном давлении на $\Delta T = 60$ К. Найдите количество теплоты Q, полученное газом, изменение его внутренней энергии ΔU и совершенную им работу A.

Дано:
$m = 0{,}5$ кг
$\Delta T = 60$ К
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Q - ? ΔU - ?
A - ?

Решение. Работа, совершенная газом при постоянном давлении, определяется выражением (2.40):

$$A = p\Delta V, \tag{1}$$

где ΔV – изменение объема газа.

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4) для двух состояний газа:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \tag{2}$$

$$pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2. \tag{3}$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (2), получим:

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) \text{ или } p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T. \tag{4}$$

Так как $A = p\Delta V$, то работа газа равна:

$$A = \frac{m}{\mu} R\Delta T, \ [A] = \frac{кг \cdot моль}{кг} \cdot \frac{Дж \cdot К}{моль \cdot К} = Дж, \ A = 7{,}78 \text{ кДж}. \tag{5}$$

Изменение внутренней энергии определяется по формуле (2.37):

$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R\Delta T$, для двухатомного газа $i = 5$, следовательно:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{5}{2} A, \ \Delta U = 19{,}45 \text{ кДж}. \tag{6}$$

Согласно первому началу термодинамики (2.38), $Q = \Delta U + A$. Складывая выражения (5) и (6), получим:

$$Q=\frac{m}{\mu}R\Delta T+\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T=\left(\frac{i}{2}+1\right)\frac{m}{\mu}R\Delta T,\ Q=27{,}33\text{ кДж.}$$

Ответ: $Q=27{,}33$ кДж; $\Delta U=19{,}45$ кДж; $A=7{,}78$ кДж.

Задача 2.62. Водороду массой $m=100$ г сообщили количество теплоты $Q=600$ кДж, при этом его температура увеличилась на $\Delta T=200$ К. Найдите изменение внутренней энергии ΔU газа и совершенную им работу A.

Дано:
$m=0{,}1$ кг
$Q=6\cdot10^5$ Дж
$\Delta T=200$ К
$\mu=2\cdot10^{-3}$ кг/моль
$i=5$

ΔU - ? A - ?

Решение. По формуле (2.37) определим изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U=\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T,$$

$$[\Delta U]=\frac{\text{кг}\cdot\text{моль}}{\text{кг}}\cdot\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}}=\text{Дж},\ \Delta U=415\text{ кДж.}$$

Работу газа найдем, используя первое начало термодинамики (2.38): $A=Q-\Delta U$, $A=185$ кДж.

Ответ: $\Delta U=415$ кДж; $A=185$ кДж.

Задача 2.63. Кислород массой $m=2$ кг, имеющий температуру $T_1=293$ К, сжимается адиабатически. Найдите конечную температуру газа T_2, если в процессе сжатия была совершена работа $A=200$ кДж.

Дано:
$m=2$ кг
$T_1=293$ К
$A=2\cdot10^5$ Дж

T_2 - ?

Решение. Работа адиабатического сжатия газа определяется по формуле (2.42):

$$A=\frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma-1}(T_1-T_2)=\frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma-1}\Delta T, \tag{1}$$

где $\gamma=C_p/C_V$ – показатель адиабаты.

Согласно (2.33), $C_p=\frac{i+2}{2}R$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении, $C_V=\frac{i}{2}R$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме. Тогда $\gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{i+2}{i}=\frac{7}{5}=1{,}4$, так как для двухатомного газа число степеней свободы молекулы $i=5$.

Найдем ΔT из уравнения (1):

$$\Delta T = \frac{A\mu(\gamma - 1)}{mR}, \quad T_2 = T_1 + \Delta T = T_1 + \frac{A\mu(\gamma - 1)}{mR}, \quad T_2 = 447 \text{ К},$$

$$[T_2] = \text{К} + \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж}} = \text{К}.$$

Ответ: $T_2 = 447$ К.

Задача 2.64. Температура кислорода массой $m = 40$ г в процессе адиабатического расширения понизилась на $\Delta T = 20$ К. Найдите работу расширения газа.

Дано:
$m = 40 \cdot 10^{-3}$ кг
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$\Delta T = 20$ К
___
A - ?

Решение. Работа газа в адиабатическом процессе совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа, т. е. $A = -\Delta U$, с учетом (2.37) получаем:

$$A = -\frac{m}{\mu} C_V \Delta T,$$

где $C_V = \frac{iR}{2}$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Для двухатомного газа $i = 5$.

Тогда $A = -\frac{m}{\mu}\frac{iR}{2}\Delta T$, $[A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж}$, $A = -519$ Дж.

Ответ: $A = -519$ Дж.

Задача 2.65. Азот массой m = 20 г, имевший температуру T_1 = 293 К, был сжат адиабатически. Объем газа уменьшился в n = 5 раз. Найдите температуру газа T_2 после сжатия.

Дано:
$m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг
$T_1 = 293$ К
$n = \frac{V_1}{V_2} = 5$
___
T_2 - ?

Решение. Связь между начальными и конечными значениями температуры T и объема V газа при адиабатическом процессе устанавливается уравнением Пуассона (2.44):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} \quad \text{или} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{nV_1}{V_1}\right)^{\gamma - 1} = n^{\gamma - 1},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$.

Так как газ двухатомный, то $i = 5$ и $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1{,}4$.

Тогда $T_2 = T_1 \cdot n^{0,4}$, $T_2 = 293 \cdot 5^{0,4} = 558$ К.

Ответ: $T_2 = 558$ К.

Задача 2.66. Азот, занимавший объем $V_1 = 6$ л, адиабатически сжимается до объема $V_2 = 3$ л. При этом давление повышается до $p_2 = 1{,}5$ МПа. Найдите давление газа до сжатия.

Дано:
$V_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ м^3
$V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3
$p_2 = 1{,}5 \cdot 10^6$ Па
p_1 - ?

Решение. Согласно уравнению Пуассона (2.44),

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma,$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = 1{,}4$ для двухатомного газа.

Тогда $p_1 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$, $p_1 = 0{,}57$ МПа.

Ответ: $p_1 = 0{,}57$ МПа.

Задача 2.67. Кислород, взятый при температуре $T_1 = 300$ К, расширяется адиабатически, и его внутренняя энергия уменьшается на $\Delta U = 8$ кДж, а объем увеличивается в $n = 9$ раз. Определите массу m кислорода.

Дано:
$T_1 = 300$ К
$\Delta U = 8 \cdot 10^3$ Дж
$n = 9$
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
m - ?

Решение. Согласно первому началу термодинамики (2.47), $Q = \Delta U + A$.

Поскольку в адиабатном процессе $Q = 0$, то $A = -\Delta U$.

Работа при адиабатном процессе определяется выражением (2.42):

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right], \qquad (1)$$

где $\gamma = \frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты, i – число степеней свободы молекул газа, для двухатомного газа $i = 5$ и $\gamma = 1{,}4$.

Из уравнения (1) найдем массу газа:

$$m = \frac{A\mu(\gamma - 1)}{RT_1\left(1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}}\right)} = \frac{\Delta U\mu(\gamma - 1)}{RT_1\left(1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}}\right)},\ [m] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}} = \text{кг}, m = 7\cdot 10^{-2}\ \text{кг}.$$

Ответ: $m = 7 \cdot 10^{-2}$ кг.

Задача 2.68. Воздух сжимается от объема $V_1 = 20$ л до объема $V_2 = 2$ л. При каком процессе сжатия – адиабатическом или изотермическом – затрачивается меньше работы?

Дано:

$V_1 = 2\cdot 10^{-2}$ м^3

$V_2 = 2\cdot 10^{-3}$ м^3

$\mu = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\frac{A_1}{A_2}$ - ?

Решение. Запишем выражение для определения работы, совершаемой над газом при изотермическом (2.41):

$$A_1 = -\frac{m}{\mu}RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (1)$$

и адиабатическом (2.42) сжатии:

$$A = -\frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right], \qquad (2)$$

где m – масса газа; μ – молярная масса; $\gamma = \frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

Будем считать, что число степеней свободы молекулы воздуха $i = 5$ (как у двухатомной молекулы). При этом $\gamma = 1{,}4$. Поделив уравнение (1) на (2), получим: $\frac{A_1}{A_2} = (\gamma - 1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \Big/ \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)$, $\frac{A_1}{A_2} = 0{,}6$.

Ответ: $\frac{A_1}{A_2} = 0{,}6$; при изотермическом.

Задача 2.69. Азот массой $m = 10$ г, находящийся при нормальных условиях, сжимается до объема $V_2 = 1{,}4$ л. Найдите давление p_2, температуру T_2 и работу сжатия A, если азот сжимается: а) изотермически; б) адиабатически.

Дано:
$m = 0{,}01$ кг
$\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$p_2 = 10^5$ Па
$T_1 = 273$ К
$V_2 = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3

p_2 - ? T_2 - ?
A - ?

Решение. а) При изотермическом сжатии газа $T = \text{const}$, поэтому $T_2 = T_1 = 273$ К. Из уравнения Менделеева–Клапейрона (2.4)

$$p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2$$

найдем давление газа:

$$p_2 = \frac{mRT_2}{\mu V_2}, \quad p_2 = 5{,}78 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$[p_2] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Работа при изотермическом сжатии определяется формулой (2.41):

$$A = RT_1 \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

По закону Бойля–Мариотта (2.5) запишем: $p_1 V_1 = p_2 V_2$, откуда найдем отношение $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{V_2}{V_1}$. Тогда

$$A = RT_1 \frac{m}{\mu} \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad [A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж}, \quad A = -1{,}42 \text{ кДж}.$$

б) Поскольку азот двухатомный газ, то $\gamma = 1{,}4$ (см. предыдущую задачу). Из уравнения Пуассона (2.44) для адиабатического сжатия запишем:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \qquad (1)$$

или $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1}. \qquad (2)$$

Поделив уравнение (1) на (2), получим: $\frac{p_1T_2}{p_2T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{[\gamma-(\gamma-1)]} = \frac{V_2}{V_1}$, откуда $V_1 = \frac{V_2p_2T_1}{p_1T_2}$. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона (2.4),

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1, \text{ тогда } V_1 = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{p_1}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в (1), получим:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2\mu p_1}{mRT_1}\right)^{\gamma}, \text{ откуда } p_2 = p_1\Big/\left(\frac{V_2\mu p_1}{mRT_1}\right)^{\gamma}, \quad p_2 = 11{,}6\cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$[p_2] = \text{Па} : \frac{\text{м}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{Па}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}} = \text{Па} : \frac{\text{м}^3\cdot\text{Н}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{Па}.$$

Подставив (3) в (2), получим:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2\mu p_1}{mRT_1}\right)^{\gamma-1}, \text{ откуда } T_2 = T_1\Big/\left(\frac{V_2\mu p_1}{mRT_1}\right)^{\gamma-1}, \quad T_2 = 545 \text{ К},$$

$$[T_2] = \text{К} : \frac{\text{м}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{Па}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}} = \text{К} : \frac{\text{м}^3\cdot\text{Н}}{\text{м}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{К}.$$

Работу адиабатического сжатия определим по формуле (2.42):

$$A = \frac{mT_1}{\mu}\frac{R}{\gamma-1}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right), \quad [A] = \frac{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}} = \text{Дж}, \quad A = -2{,}02 \text{ кДж}.$$

Ответ: а) $p_2 = 5{,}78\cdot 10^5$ Па; $T_2 = 273$ К; $A = -1{,}42$ кДж.

б) $p_2 = 11{,}6\cdot 10^5$ Па; $T_2 = 545$ К; $A = -2{,}02$ кДж.

Задача 2.70. Объем газа при адиабатическом расширении увеличился в два раза, а температура уменьшилась в 1,32 раза. Найдите число степеней свободы молекулы этого газа.

Дано:

$\frac{V_2}{V_1} = 2$

$\frac{T_1}{T_2} = 1{,}32$

i - ?

Решение. Показатель адиабаты равен $\gamma = \frac{i+2}{i}$. Запишем уравнение Пуассона (2.44):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

По условию $\frac{T_1}{T_2} = 1{,}32$, а $\frac{V_2}{V_1} = 2$, тогда $2^{\gamma-1} = 1{,}32$ или $\left(\frac{i+2}{i} - 1\right)\ln 2 = \ln 1{,}32$. Отсюда $\frac{i+2-i}{i} = \frac{2}{i} = \frac{\ln 1{,}32}{\ln 2} = 0{,}4$, $i = 5$.

Ответ: $i = 5$.

Задача 2.71. В результате кругового процесса газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 6$ кДж. Найдите работу в этом процессе, если термический КПД $\eta = 0{,}15$.

Дано:

$Q_1 = 6 \cdot 10^3$ Дж

$\eta = 0{,}15$

A - ?

Решение. Термический КПД замкнутого процесса, согласно (2.45), равен:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \text{ отсюда } A = Q_1\eta,\ A = 900 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 900$ Дж.

Задача 2.72. Газ, совершая круговой процесс, передал охладителю количество теплоты $Q_2 = 8$ Дж. Определите термический КПД цикла, если при этом совершается работа $A = 2$ Дж.

Дано:

$Q_2 = 8$ Дж

$A = 2$ Дж

η - ?

Решение. Термический КПД определяется по формуле (2.45):

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \text{ где } Q_1 = Q_2 + A.$$

Тогда $\eta = \frac{A}{Q_2 + A}$, $\eta = 0{,}2$.

Ответ: $\eta = 0{,}2$.

Задача 2.73. Идеальный одноатомный газ совершает цикл, показанный на рис. 48. Определите КПД цикла, если $V_1 = 1$ л, $V_2 = 2$ л, $p_1 = 0{,}1$ МПа, $p_2 = 0{,}2$ МПа.

Дано:
$V_1 = 10^{-3}$ м^3
$V_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3
$p_1 = 10^5$ Па
$p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па

η - ?

Решение. Согласно определению (2.45), КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q}, \qquad (1)$$

где A – работа, совершаемая газом за цикл, Q – количество теплоты, подведенное при этом к газу.

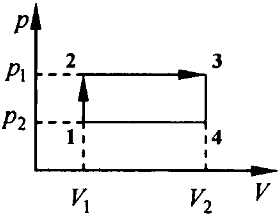

Рис. 48

Работа газа A равна площади прямоугольника 1–2–3–4, т. е.

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1). \qquad (2)$$

Газ получает тепло на участке 1–2–3. Согласно первому началу термодинамики (2.38), запишем:

$$Q = \Delta U_{1\text{-}3} + A_{2-3}, \qquad (3)$$

где $\Delta U_{1\text{-}3}$ – изменение внутренней энергии газа, A_{2-3} – работа газа в процессе 2-3.

Изменение внутренней энергии определяется по формуле (2.37):

$$\Delta U_{1\text{-}3} = U_3 - U_1 = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R(T_3 - T_1). \qquad (4)$$

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4) $pV = \frac{m}{\mu}RT$, запишем выражение (4) в виде:

$$\Delta U_{1\text{-}3} = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1). \qquad (5)$$

Работа в общем случае определяется по формуле (2.39):

$$A_{2-3} = p_2(V_2 - V_1). \qquad (6)$$

Из уравнений (3)–(5) найдем количество теплоты:

$$Q = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + p_2(V_2 - V_1). \qquad (7)$$

Подставив в (1) уравнения (2) и (7), получим

$$\eta = \frac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)}{\frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + p_2(V_2 - V_1)}, \quad [\eta] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{Па} \cdot \text{м}^3} = 1, \quad \eta = 0{,}15.$$

Ответ: $\eta = 0{,}15$.

Задача 2.74. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0{,}5$ МПа. Найдите:

1) изменение внутренней энергии ΔU газа;
2) совершенную им работу A;
3) количество теплоты Q, переданное газу.

Постройте график процесса.

Дано:
$m = 2$ кг
$V_1 = 1$ м^3
$V_2 = 3$ м^3
$p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па
$p_3 = 5 \cdot 10^5$ Па
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

ΔU - ? A - ?
Q - ?

Решение. Изобразим график процесса в координатах p и V (рис. 49).

Изменение внутренней энергии газа определяется формулой (2.37):

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T, \tag{1}$$

где ΔT – разность конечной и начальной температур газа, $\Delta T = T_3 - T_1$; m – масса газа; i – число степеней свободы молекулы газа (для кислорода $i = 5$).

Для нахождения T_1 и T_3 запишем уравнение Менделеева–Клапейрона (2.4) для состояний газа 1 и 3:

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1, \text{ откуда}$$

$$T_1 = \frac{p_1V_1\mu}{mR}, \tag{2}$$

$$p_3V_2 = \frac{m}{\mu}RT_3, \text{ откуда}$$

$$T_3 = \frac{p_3 V_2 \mu}{mR}. \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\left(\frac{p_3 V_2 \mu}{mR} - \frac{p_1 V_1 \mu}{mR}\right) = \frac{i}{2}\left(p_3 V_2 - p_1 V_1\right), \qquad (4)$$

$$[\Delta U] = \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}, \quad \Delta U = 3{,}25 \text{ МДж}.$$

Работа, совершенная газом, может быть представлена в виде суммы:

$A = A_{12} + A_{23}$.

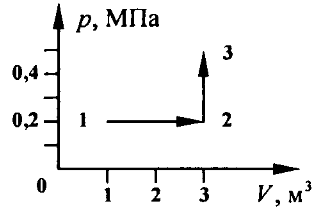

Рис. 49

Работу газа при изобарном процессе 1–2 найдем по формуле (2.40):

$A_{12} = p_1(V_2 - V_1)$,

а работа газа при изохорном процессе 2–3

$A_{23} = 0$.

Таким образом:

$$A = p_1(V_2 - V_1), \qquad (5)$$

$$[A] = \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}, \quad A = 0{,}4 \text{ МДж}.$$

Согласно первому началу термодинамики (2.38) количество теплоты, переданное газу:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (6)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в (6), получаем

$$Q = \frac{i}{2}\left(p_3 V_2 - p_1 V_1\right) + p_1(V_2 - V_1), \; [Q] = \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж},$$

$Q = 3{,}65$ МДж.

Ответ: $\Delta U = 3{,}25$ МДж; $A = 0{,}4$ МДж; $Q = 3{,}65$ МДж.

Задача 2.75. Кислород массой $m = 20$ г нагревается от температуры $t_1 = 20°$ C до температуры $t_2 = 220°$ C. Найдите изменение энтропии ΔS, если нагревание происходит: а) изохорически, б) изобарически.

Дано:
$m = 2 \cdot 10^{-2}$ кг
$T_1 = 293$ К
$T_2 = 493$ К
$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
ΔS - ?

Решение. а) При изохорическом нагревании $A = 0$ и количество теплоты, согласно (2.38), равно:

$$dQ = dU = \frac{m}{\mu} C_V dT ,$$

где $C_V = \frac{i}{2} R$ – молярная теплоемкость.

Изменение энтропии (2.47) равно:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m}{\mu} C_V \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right), \quad [\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}} .$$

Для кислорода число степеней свободы $i = 5$. Тогда $\Delta S = 6{,}75$ Дж/К.

б) При изобарическом процессе количество теплоты, согласно первому началу термодинамики (2.38):

$$dQ = dU + A = \frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{m}{\mu} R dT = \frac{m}{\mu} C_p dT ,$$

и изменение энтропии

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m}{\mu} C_p \int_1^2 \frac{dT}{T}, \quad [\Delta S] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}} .$$

Так как $C_p = C_V + R$ (по уравнению Майера (2.36)), то

$$C_p = \frac{5}{2} R + R = \frac{7}{2} R \text{ и } \Delta S = \frac{7}{2} \frac{m}{\mu} R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right), \Delta S = 9{,}45 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: а) $\Delta S = 6{,}75$ Дж/К, б) $\Delta S = 9{,}45$ Дж/К.

Задача 2.76. Лёд, имеющий массу $m = 10$ г, взятый при температуре $t = -20°$ С, нагревается и превращается в пар. Найдите изменение ΔS энтропии при таком превращении.

Дано:
$m = 10^{-2}$ кг, $T_0 = 273$ К
$T = 253$ К, $T_п = 373$ К
ΔS - ?

Решение. Изменение энтропии при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2 определяется формулой (2.47):

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} . \tag{1}$$

Согласно первому началу термодинамики (2.38),

$$dQ = dU + dA = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV \quad (2)$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона (2.4) давление равно:

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}. \quad (3)$$

Тогда, подставив (3) в (2), получим:

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}. \quad (4)$$

При смене агрегатного состояния вещества общее изменение энтропии складывается из изменений ее в отдельных процессах. При нагревании льда от температуры T до температуры плавления T_o изменение энтропии будет равно:

$$\Delta S_1 = \int_T^{T_o} \frac{mc_л dT}{T} = mc_л \ln\left(\frac{T_о}{T}\right), \quad (5)$$

где $c_л = 2{,}1 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot К}$ – удельная теплоемкость льда.

При плавлении льда изменение энтропии:

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_о} = \frac{m\lambda}{T_о}, \quad (6)$$

где $\lambda = 0{,}33 \cdot 10^6 \frac{Дж}{кг}$ – удельная теплота плавления льда.

Найдем далее изменение энтропии при нагревании образовавшейся изо льда воды от температуры $T_о$ до температуры парообразования $T_п$:

$$\Delta S_3 = \int_{T_о}^{T_п} \frac{mc_в dT}{T} = mc_в \ln\left(\frac{T_п}{T_о}\right), \quad (7)$$

где $c_в = 4{,}19 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot К}$ – удельная теплоемкость воды.

В процессе парообразования при температуре $T_п$ изменение энтропии:

$$\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_п} = \frac{mr}{T_п}, \qquad (8)$$

где $r = 2,26 \cdot 10^6 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ – удельная теплота парообразования.

Общее изменение энтропии найдем из уравнений (5)–(8):

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = mc_л \ln\left(\frac{T_о}{T}\right) + \frac{m\lambda}{T_о} + mc_в \ln\left(\frac{T_п}{T_о}\right) + \frac{mr}{T_п},$$

$$[\Delta S] = \text{кг} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} + \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} + \text{кг} \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} + \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}, \ \Delta S = 90 \ \text{Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S =$ 90 Дж/К.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. Электростатика

Основные формулы

• Закон сохранения электрического заряда

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = \text{const}, \qquad (3.1)$$

где k – число зарядов.

В электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов остается постоянной.

• Закон Кулона

$$\left|\vec{F}\right| = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (3.2)$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2$,

$\vec{F}$ – сила взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме, r – расстояние между зарядами, ε_0=8,85·10^{-12} Ф/м – электрическая постоянная.

• Сила взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся в однородном, безграничном диэлектрике:

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}, \qquad (3.3)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость.

• Напряженность электрического поля в данной точке (т. е. в той точке, в которой на пробный заряд q действует сила $\vec{F}$)

$$\vec{E} = \vec{F}/q. \qquad (3.4)$$

• Принцип суперпозиции электрических полей: напряженность поля $\vec{E}$, создаваемая в данной точке системой, состоящей из k точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей, создаваемых в этой точке отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k. \qquad (3.5)$$

• Напряженность поля точечного заряда или заряженной сферы (вне сферы)

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{3.6}$$

где r – расстояние от центра сферы до точки.

• Напряженность поля, создаваемого в безграничном диэлектрике точечным зарядом или заряженной сферой (вне сферы),

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2 \varepsilon}. \tag{3.7}$$

• Напряженность поля бесконечно длинной заряженной нити или цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \tag{3.8}$$

где $\tau = \frac{dq}{dl}$ – линейная плотность заряда (dl – длина физически бесконечно малого отрезка нити, dq – заряд, сосредоточенный на этом отрезке).

• Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости в вакууме

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \tag{3.9}$$

где $\sigma = \frac{dq}{dS}$ – поверхностная плотность заряда (dS – физически бесконечно малый участок поверхности, dq – заряд, заключенный в слое площади dS).

• Напряженность поля, образованного двумя параллельными бесконечными, равномерно заряженными плоскостями:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{3.10}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость однородного диэлектрика, полностью заполняющего объем между плоскостями.

• Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через поверхность S определяется интегралом

$$\Phi = \oint_S E_n dS , \qquad (3.11)$$

где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали к элементу площади поверхности dS.

• Теорема Гаусса: поток вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0:

$$\oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_i}{\varepsilon_0} , \qquad (3.12)$$

где k – число зарядов.

• Вектор электрического смещения (электрической индукции) для изотропной, однородной диэлектрической среды:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} . \qquad (3.13)$$

• Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$: поток электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов:

$$\oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{k} q_i . \qquad (3.14)$$

Сторонними называются заряды, которые находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул.

• Потенциал в какой-либо точке электрического поля равен отношению потенциальной энергии заряда W_p к пробному заряду $q_{пр}$:

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{пр}} . \qquad (3.15)$$

• Потенциальная энергия заряда в поле другого точечного заряда

$$W_p = \frac{q q_{пр}}{4\pi\varepsilon_0 r} . \qquad (3.16)$$

• Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} . \qquad (3.17)$$

• Работа по перемещению заряда в электрическом поле:

$$A = q\int_L E_l dl\ ;\ A = q(\varphi_1 - \varphi_2)\ , \tag{3.18}$$

где E_l – проекция вектора напряженности $\vec{E}$ в данной точке контура L на направление касательной к контуру в той же точке; dl – элемент длины контура; φ_1 и φ_2 – потенциалы начальной и конечной точек.

• Напряженность и потенциал электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой с радиусом R и с зарядом q, на расстоянии r от центра сферы:

а) если $r < R$, то $E = 0$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$; (3.19)

б) если $r = R$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$; (3.20)

в) если $r > R$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. (3.21)

• Электроемкость уединенного проводника

$$C = q/\varphi\ , \tag{3.22}$$

где q – заряд проводника, φ – его потенциал.

• Электроемкость конденсатора

$$C = q/(\varphi_1 - \varphi_2)\ ,$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – напряжение между пластинами.

Для плоского конденсатора

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d\ , \tag{3.23}$$

где S – площадь одной пластины конденсатора, d – расстояние между пластинами, ε – диэлектрическая проницаемость однородного изотропного диэлектрика, заполняющего полностью пространство между пластинами.

• Электроемкость сферического конденсатора (две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2)

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2/\left(R_2 - R_1\right). \tag{3.24}$$

• Электроемкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра с длиной образующей l и радиусами R_1 и R_2)

$$C = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l/\ln\left(R_2/R_1\right). \tag{3.25}$$

• Электроемкость системы конденсаторов:

а) при параллельном соединении:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n; \qquad (3.26)$$

б) при последовательном соединении:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}. \qquad (3.27)$$

• Энергия заряженного уединенного проводника:

$$W = q\varphi/2 = C\varphi^2/2 = q^2/(2C). \qquad (3.28)$$

• Энергия заряженного конденсатора:

$$W = q^2/(2C) = CU^2/2 = qU/2. \qquad (3.29)$$

• Энергия электрического поля в объеме V:

$$W = \int_V \omega\, dV, \qquad (3.30)$$

где $\omega = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2 = ED/2$ – объемная плотность энергии, dV – бесконечно малый объем.

• Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора:

$$F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d^2} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \qquad (3.31)$$

Связь между поверхностной плотностью σ' связанного заряда в однородном диэлектрике с поверхностной плотностью σ стороннего заряда на поверхности прилежащего к нему заряженного проводника:

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma. \qquad (3.32)$$

Задача 3.1. Два тонких длинных проводника равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $|\tau| = 200\ \frac{\text{мк Кл}}{\text{м}}$ и расположены параллельно друг другу. Расстояние между проводниками $d = 10$ см. Какова напряженность E поля в точке, удаленной от первого проводника на расстояние $r_1 = 15$ см, а от второго – на $r_2 = 16$ см?

Дано:
$d = 0{,}10$ м
$\tau = 2\cdot 10^{-4}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}}$
$r_1 = 0{,}15$ м
$r_2 = 0{,}16$ м

E - ?

Решение. На рис. 50 показаны сечения проводников А и В. Согласно принципу суперпозиции электрических полей (3.5) напряженность поля в точке С равна $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Модули напряженностей первого и второго проводников вычисляем по формуле (3.8): $E_1 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_1}$, $E_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_2}$. Направление результирующего вектора $\vec{E}$ находим по правилу параллелограмма, а модуль вектора $\vec{E}$ определяем по теореме косинусов:

$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}$, где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Из рис. 50 видно, что угол $\alpha = 180^0 - \beta$, а $\cos\alpha = \cos\left(180^0 - \beta\right) = -\cos\beta$. Тогда расчетная формула примет вид:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{r_1^{\,2}} + \frac{1}{r_2^{\,2}} - \frac{2}{r_1 r_2}\cos\beta}\ .$$

Из треугольника АВС также по теореме косинусов запишем: $d^2 = r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2\cos\beta$.

Отсюда найдем $\cos\beta = \dfrac{d^2 - r_1^{\,2} - r_2^{\,2}}{2r_1r_2}$,

$\cos\beta = 0{,}8$, $[E] = \dfrac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Ф}\cdot\text{м}} = \dfrac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$,

$E = 14\ \dfrac{\text{МВ}}{\text{м}}$.

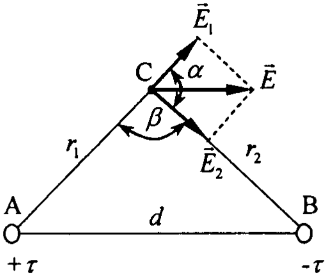

Рис. 50

Ответ: $E = 14\ \dfrac{\text{МВ}}{\text{м}}$.

Задача 3.2. Тонкий стержень длиной l = 15 см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 6\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}}$. Найдите напряженность E, создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси стержня и удаленной от ближайшего конца стержня на расстояние r = 10 см.

Дано:
$l = 0{,}15$ м
$\tau = 6 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}}$
$r = 0{,}1$ м

E-?

Решение. Заряд, равномерно распределенный по тонкому стержню, не является точечным, поэтому непосредственно вычислить напряженность поля по формуле (3.6) невозможно. Выделим на стержне бесконечно малый элемент длины dx (рис. 51). Заряд $dq = \tau dx$, находящийся на выделенном элементе, можно считать точечным, и по формуле (3.6) найдем напряженность в точке А, создаваемую зарядом dq:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2},$$

где x – расстояние от dx до точки А.

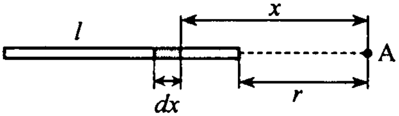

Рис. 51

Применяя принцип суперпозиции, определим напряженность поля в точке А, создаваемую заряженным стержнем:

$$E = \int\limits_l dE = \int\limits_r^{r+l} \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_r^{r+l} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l}\right),$$

$$[E] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Ф}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$E = 324\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E = 324\ \dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

Задача 3.3. На отрезке тонкого прямого провода длиной l = 10 см равномерно распределен заряд $q = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Вычислите напряженность E в точке, расположенной на перпендикуляре к проводу, проведенном через один из его концов, на расстоянии r_0 = 0,08 м.

Дано:
$l = 0{,}1$м
$q = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл
$r = 0{,}08$ м

Е-?

Решение. Заряд, равномерно распределенный по тонкому проводу АВ (см. рис. 52), не является точечным. Однако, если выделить на стержне малый участок длиной dx, то находящийся на нем заряд dq можно рассматривать как точечный.

Введем линейную плотность электрического заряда $\tau = \frac{q}{l}$ и $dq = \tau dx$.

Тогда напряженность dE, создаваемая точечным зарядом в точке С, будет равна:

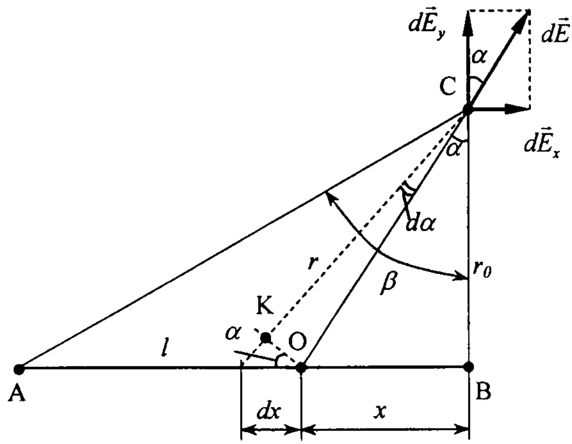

Рис. 52

$$dE = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{1}$$

Вектор $d\vec{E}$ можно разложить по координатным осям:

$$dE_x = dE \sin\alpha \text{ и } dE_y = dE\cos\alpha. \tag{2}$$

Рассчитаем dE. Из рис. 52 следует, что

$$dx = \frac{KO}{\cos\alpha} = \frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha}; \tag{3}$$

$$r = \sqrt{r_o^2 + x^2}\text{, где } x = r_0 \operatorname{tg}\alpha. \tag{4}$$

Таким образом, используя выражения (1)–(4), получим:

$$dE = \frac{\tau r\,d\alpha}{\cos\alpha\, 4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau\,d\alpha}{\cos\alpha\, 4\pi\varepsilon_0\sqrt{r_0^2 + r_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\tau\,d\alpha}{\cos\alpha\, 4\pi\varepsilon_0 r_0 \sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{\tau\cos\alpha\ d\alpha}{\cos\alpha\, 4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\tau\ d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}. \tag{5}$$

Вычислим E_x и E_y. Используя выражения (2) и (5), запишем:

$$E_x = \int_0^\beta dE \sin\alpha = \int_0^\beta \frac{\tau \sin\alpha \, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\cos\alpha \Big|_0^\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}[1-\cos\beta];$$

$$E_y = \int_0^\beta dE \cos\alpha = \int_0^\beta \frac{\tau \cos\alpha \, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\alpha \Big|_0^\beta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\beta.$$

Здесь коэффициент $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{l}{r_0}$, $\beta = 51{,}34^\circ$. По принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$, или по модулю:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\sqrt{2(1-\cos\beta)}, \qquad [E] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Ф}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$E = 39\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E = 39\,\text{кВ/м}$.

Задача 3.4. Электрическое поле создано двумя одинаковыми параллельными пластинами площадью 150 см^2 каждая. Пластины расположены на малом (по сравнению с линейными размерами пластин) расстоянии друг от друга. На одной из пластин равномерно распределен заряд $q_1 = -50$ нКл, на другой – заряд $q_2 = +150$ нКл. Определите напряженность E электрического поля между пластинами.

Дано:
$S = 0{,}015\,\text{м}^2$
$q_1 = -5\cdot 10^{-8}$ Кл
$q_2 = 15\cdot 10^{-8}$ Кл

$E - ?$

Решение. Поскольку по условию задачи расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров, то пластины можно считать бесконечно протяженными и равномерно заряженными. Поверхностные плотности зарядов на них соответственно равны $\sigma_1 = q_1/S$ и $\sigma_2 = q_2/S$. Напряженность поля, создаваемая каждой пластиной, определим по формуле (3.9): $E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$ и $E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$. На рис. 53 показаны направления силовых линий поля с учетом знака зарядов на пластинах.

По принципу суперпозиции результирующая напряженность между пластинами $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. В проекции на ось x

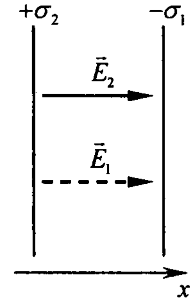

Рис. 53

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S},$$

$$E = \frac{1}{2S\varepsilon_0}[q_1 + q_2], \; [E] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$E = 750 \ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E = 750 \ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$.

Задача 3.5. Две круглые параллельные пластины находятся на малом (по сравнению с радиусом) расстоянии друг от друга. Пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью $\sigma_1 = 10 \ \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$ и $\sigma_2 = -30 \ \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$. Определите силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь S, равную 2 м^2.

Дано:

$\sigma_1 = 10^{-8} \ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

$\sigma_2 = -3\cdot 10^{-8} \ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

$S = 2 \ \text{м}^2$

$F - ?$

Решение. Так как расстояние между пластинами мало по сравнению с размерами самих пластин, то их можно принять за бесконечно протяженные плоскости. Напряжённость E такой плоскости определяется по формуле (3.9): $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды. В нашем случае $\varepsilon = 1$ (воздух). Пусть плоскость с поверхностной плотностью σ_1 создает поле напряженностью

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}.$$

А в это поле помещаем вторую пластину с поверхностной плотностью σ_2, где $\sigma_2 = \frac{q_2}{S}$. Тогда на вторую пластину действует сила Кулона (с учетом знаков это будет сила притяжения) $F = E_1 q_2$, где $q_2 = \sigma_2 S$. Подставив

E_1 и q_2, получим $F = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\sigma_2 S$. Окончательно имеем $F = \dfrac{\sigma_1\sigma_2}{2\varepsilon_0}S$,

$$[F] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{м}^2\cdot\Phi} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\Phi} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н},$$

$F = 33{,}8$ мкН.

Ответ: $F = 33{,}8$ мкН.

Задача 3.6. Эбонитовый полый шар равномерно заряжен по объему с плотностью $\rho = 100\ \dfrac{\text{нКл}}{\text{м}^3}$. Внутренний радиус R_1 шара равен 5 см, а наружный – R_2 = 10 см. Вычислите напряженность $\vec{E}$ и смещение $\vec{D}$ электрического поля в точках, отстоящих от центра шара на расстояниях: r_1 = 3 см; $r_2 = 6$ см; $r_3 = 12$ см. Постройте графики зависимостей $E(r)$ и $D(r)$.

Дано:
$\rho = 10^{-7}$ Кл/м^3
$R_1 = 0{,}05$ м
$R_2 = 0{,}1$ м
$r_1 = 0{,}03$ м
$r_2 = 0{,}06$ м
$r_3 = 0{,}12$ м
$\varepsilon_1 = 1$
$\varepsilon_2 = 3$
$\varepsilon_3 = 1$

D_1 – ? D_2 – ? D_3 – ?
E_1 – ? E_2 – ? E_3 – ?

Решение. Разобьем объем полого шара на три области (рис. 54) и рассчитаем для каждой из них D и E. Для расчета используем теорему Гаусса в интегральной форме (3.14): $\oint\limits_S D_n dS = \sum q_i$ и связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$ (3.13): $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$.

Область I (ε = 1): Суммарный заряд $\sum q_i$ в этой области равен 0, т. к. шар полый ($r < R_1$). Поэтому $D_1 = 0$ и $E_1 = 0$.

Область II (ε_2 = = 3): Проведем замкнутую поверхность произвольного радиуса r (r – текущая координата), $R_2 > r > R_1$ и вычислим по формуле (3.14) поток вектора $\vec{D}_2$ сквозь эту поверхность:

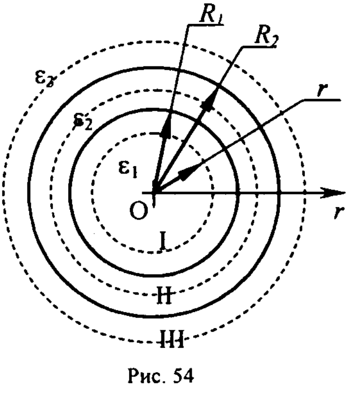

Рис. 54

$$\oint\limits_S D_n dS = \int\limits_V \rho dV,$$

где $\rho = \dfrac{q}{V}$. В итоге получим:

$$D_2 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3), \quad D_2 = \rho \frac{1}{3r^2}(r^3 - R_1^3) = \frac{\rho r}{3}\left[1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^3\right].$$

Тогда $E_2 = \dfrac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_2 \varepsilon_0}\left[1 - \left(\dfrac{R_1}{r}\right)^3\right]$. Подставив $r = r_2 = 0{,}06$ м, вычислим E_2 и D_2: $D_2 = 840\ \dfrac{\text{пКл}}{\text{м}^2}$, $E_2 = 31{,}6\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

Область III ($\varepsilon_3 = 1$): Проведем замкнутую поверхность произвольного радиуса $r > R_2$ и воспользуемся теоремой Гаусса:

$$\oint_S D_n dS = \rho(V_2 - V_1),$$

$$D_3 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3), \quad D_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)}{4\pi r^2} = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3r^2},$$

$$E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2 \varepsilon_3}.$$

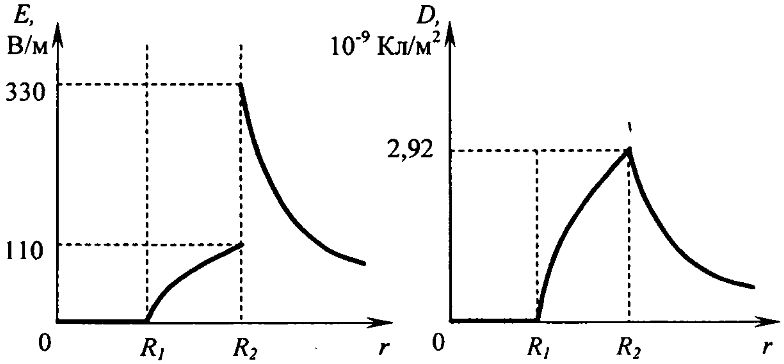

Рис. 55

Вычислим D_3 и E_3 при $r = r_3 = 0{,}12$ м: $D_3 = 2{,}02\ \dfrac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$, $E_3 = 228\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

Для построения графиков подсчитаем D_2, E_2 и E_3 на границе $r = R_2$:

$$E_2 = \frac{\rho R_2}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right],\ [E_2] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\cdot\frac{\text{м}}{\text{Ф}}\cdot\text{м} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}},\ E_2 = 110\ \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$D_2 = \frac{\rho R_2}{3}\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right],\ [D_2] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\cdot\text{м} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},\ D_2 = 2{,}92\cdot10^{-9}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},$$

$$E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2^2},\ [E_3] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\cdot\frac{\text{м}}{\text{Ф}}\cdot\frac{\text{м}^3}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{м}^2\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}},\ E_3 = 330\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Графики зависимости напряженностей и смещения электрического поля заряженного шара представлены на рис. 55.

Ответ: $D_1 = 0$, $E_1 = 0$, $D_2 = 840\ \dfrac{\text{пКл}}{\text{м}}$, $E_2 = 31{,}6\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$, $D_3 = 2{,}02\ \dfrac{\text{нКл}}{\text{м}}$, $E_3 = 228\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

Задача 3.7. Точечный заряд $q = 100$ нКл находится на малом расстоянии от большой металлической пластины против ее середины. Найдите силу F, действующую на заряд со стороны пластины. Пластина несет равномерно распределенный по поверхности заряд $\sigma = 10\ \dfrac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$.

Дано:

$q = 10^{-7}$ Кл

$\sigma = 10^{-8}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

F – ?

Решение. По условию задачи пластина большая и находится на малом расстоянии от заряда. Поэтому ее можно принять за бесконечно протяженную плоскость, для которой $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, $(\varepsilon = 1)$.

Сила, действующая на заряд, $F = Eq = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}q$,

$$[F] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

$F = 56{,}5$ мкН.

Ответ: $F = 56{,}5$ мкН.

Задача 3.8. Тонкая, бесконечно длинная нить с равномерно распределенным зарядом по длине плотностью $\tau = 0{,}2\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}}$ параллельна безграничной проводящей плоскости с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 2\ \dfrac{\text{нКл}}{\text{см}^2}$. С какой силой электрическое поле заряженной бесконечной плоскости действует на каждый метр заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле?

Дано:

$\tau = 0{,}2 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}}$

$\sigma = 2 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

$\dfrac{F}{l}$ – ?

Решение. Напряженность электрического поля, созданного бесконечной плоскостью, $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, где $\varepsilon = 1$ – диэлектрическая проницаемость среды. Сила, с которой плоскость действует на нить, $F = Eq_{\text{н}}$, где $q_{\text{н}} = \tau l$ – заряд нити, l – длина нити.

Следовательно, сила, действующая на каждый метр длины заряженной бесконечно длинной нити,

$$\frac{F}{l} = \frac{\sigma\tau}{2\varepsilon_0},$$

$$\left[\frac{F}{l}\right] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{м}^2\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$\frac{F}{l} = 226 \text{ мН/м}.$$

Ответ: $\dfrac{F}{l} = 226$ мН/м.

Задача 3.9. Пластины плоского конденсатора площадью $S = 200$ см^2 притягиваются с силой $F_1 = 9{,}84$ мН. Между пластинами конденсатора находится точечный заряд $q = 30$ мКл. Определите, с какой силой F_2 поле конденсатора действует на заряд.

Дано:
$S = 0{,}02$ м^2
$F_1 = 9{,}84 \cdot 10^{-3}$ Н
$q = 3 \cdot 10^{-2}$ Кл

F_2 – ?

Решение. Сила F_1, с которой притягиваются пластины, равна:

$F_1 = E_1 q_2$,

где $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ – напряженность поля одной из пластин, а $q_2 = \sigma S$ – заряд второй пластины. Тогда

$$F_1 = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

Отсюда можно определить поверхностную плотность заряда σ на пластине конденсатора:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 F_1}{S}}. \qquad (2)$$

Сила F_2, с которой поле конденсатора действует на заряд q, равна:

$$F_2 = Eq = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} q, \qquad (3)$$

где E – напряженность поля конденсатора, определяемая по формуле (3.10), ($\varepsilon = 1$).

Подставляя выражение (2) в (3), получим:

$$F_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} q = q\sqrt{\frac{2F_1}{\varepsilon_0 S}},$$

$$[F] = \text{Кл}\sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Ф}\cdot\text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}^2}} = \sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{Н}\cdot\text{В}}{\text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{Н}\cdot\text{В}}{\text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}\cdot\text{Н}}{\text{м}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{Н}}{\text{м}}} = \sqrt{\text{Н}^2} = \text{Н}, \quad F_2 = 10 \text{ мН}.$$

Ответ: $F_2 = 10$ мН.

Задача 3.10. Емкость конденсатора $C_1 = 0{,}4$ мкФ, когда он заполнен воздухом. Конденсатор заряжается до разности потенциалов $U = 500$ В. Определите изменение энергии конденсатора ΔW и работу сил электриче-ского поля при заполнении конденсатора трансформаторным маслом ($\varepsilon = 2{,}5$) для случаев: 1) конденсатор отключен от источника; 2) конденсатор соединен с источником.

Дано:
$\varepsilon = 2{,}5$
$C_1 = 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ Ф
$U = 500$ В

$\Delta W_1 - ?$ $\Delta W_2 - ?$
$A_1 - ?$ $A_2 - ?$

Решение. Работу сил электрического поля можно определить, используя закон сохранения энергии:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -A + A_и , \qquad (1)$$

где W_1, W_2 – энергии конденсатора до и после заполнения его диэлектриком, A – работа сил поля, $A_и$ – работа, совершаемая источником.

При заполнении конденсатора маслом силы поля совершают в обоих рассматриваемых случаях положительную работу: поляризуют диэлектрик и втягивают его в поле с большей напряженностью, т. е. работа сил поля $A > 0$. Поэтому энергия конденсатора уменьшается, если он отключен от источника. При включенном источнике напряжение на пластинах конденсатора не изменяется и при заполнении маслом заряд конденсатора возрастает, т. е. источник, заряжая конденсатор, совершает положительную работу.

В первом случае при $q = \text{const}$ изменение энергии

$$\Delta W_1 = W_2 - W_2 = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon C_1} - \frac{1}{C_1}\right) = -A_1, \text{ т. к. } A_и = 0 .$$

Поскольку $q = C_1 U$, то $\Delta W_1 = \dfrac{C_1 U^2}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)$,

$$[\Delta W] = \text{Ф} \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}^2}{\text{В}} = \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В} = \text{Дж} , \ \Delta W_1 = -3{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} ,$$

$A_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-2}$ Дж .

Во втором случае, когда конденсатор соединен с источником, $U = \text{const}$ и изменение энергии

$$\Delta W = \frac{U^2}{2}(C_2 - C_1) = \frac{C_1 U^2}{2}(\varepsilon - 1) , \qquad (2)$$

где $C_2 = \varepsilon C_1$; $\Delta W_2 = 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ Дж .

Работа сил поля A_2, согласно уравнению (1), равна:

$$A_2 = A_u - \Delta W_2 , \qquad (3)$$

где

$$A_u = \Delta q U = U^2 (C_2 - C_1) . \qquad (4)$$

Из уравнений (2)–(4) получим:

$$A_2 = C_1 U^2 (\varepsilon - 1)/2 , \; A_2 = 7{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} .$$

Ответ: $\Delta W_1 = -3{,}6 \cdot 10^{-2}$ Дж, $A_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-2}$ Дж, $\Delta W_2 = 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ Дж, $A_2 = 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Задача 3.11. На пластины плоского конденсатора с диэлектриком, расстояние между которыми $d = 4$ мм, подана разность потенциалов $U_1 = 600$ В. Если, отключив источник напряжения, вынуть диэлектрик из конденсатора, то напряжение на пластинах возрастет в три раза. Найдите поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике и диэлектрическую восприимчивость χ диэлектрика.

Дано:

$d = 4 \cdot 10^{-3}$ м

$U_1 = 600$ В

$U_2 / U_1 = 3$

$\sigma_{св}$ – ? χ – ?

Решение. Напряженность поля в конденсаторе первоначально была (при наличии диэлектрика) $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}$, где σ – поверхностная плотность стороннего заряда на проводнике. С другой стороны, $E_1 = \dfrac{U_1}{d}$. Тогда $U_1 = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon \varepsilon_0}$.

По формуле (3.32), если $\sigma_{св} = -\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$, то $U_1 = \dfrac{\sigma_{св} d}{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}$.

После отключения источника и удаления диэлектрика разность потенциалов на пластинах изменилась (по условию возросла):

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{U_2}{d} . \text{ Отсюда } U_2 = \frac{\sigma_{св} \varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{d}{\varepsilon_0} . \text{ Отношение } \frac{U_2}{U_1} = \varepsilon = 3 .$$

Поверхностную плотность связанных зарядов найдем через напряжение U_1:

$$\sigma_{св} = \frac{\varepsilon_0 U_1 (\varepsilon - 1)}{d} , \; [\sigma_{св}] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} , \; \sigma_{св} = 2{,}65 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2 .$$

Диэлектрическая восприимчивость χ диэлектрика связана с $\sigma_{св}$ формулой

$$\sigma_{\text{св}} = \varepsilon_0 \chi E_1 = \varepsilon_0 \chi \frac{U_1}{d}, \ \chi = \frac{\sigma_{\text{св}} d}{\varepsilon_0 U_1}, \ [\chi] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{Ф} \cdot \text{В}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{В}} = 1, \ \chi = 2.$$

Ответ: $\sigma_{\text{св}} = 2{,}65 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2; $\chi = 2$.

Задача 3.12. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполняется диэлектриком ($\varepsilon = 7$). При присоединении пластин к источнику напряжения напряженность электрического поля в конденсаторе $E = 0{,}4 \cdot 10^6$ В/м. Найдите: 1) давление пластин на диэлектрик; 2) электрическую индукцию в диэлектрике; 3) поверхностную плотность связанных зарядов; 4) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; 5) объемную плотность энергии электрического поля в диэлектрике.

Дано:
$\varepsilon = 7$
$E = 0{,}4 \cdot 10^6$ В/м

$p - ?$ $D - ?$
$\sigma_{св} - ?$ $\sigma_{д} - ?$
$\omega - ?$

Решение. 1) Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора определяется по формуле (3.31). Тогда давление пластин на диэлектрик равно:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{1}$$

Выразив из формулы (3.10) поверхностную плотность зарядов σ и подставив в уравнение (1), получим:

$$p = \frac{E^2 \varepsilon\varepsilon_0}{2},$$

$$[p] = \frac{\text{В}^2 \cdot \text{Ф}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{Кл}}{\text{м}^3} = \frac{\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}, \ p = 5 \ \text{Па}.$$

2) Электрическую индукцию D вычислим по формуле (3.13): $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$,

$$[D] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{В} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \ D = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \ \text{Кл/м}^2.$$

3) Поверхностная плотность связанных зарядов, согласно (3.32),

$$\sigma_{\text{св}} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E, \ \sigma_{св} = 21{,}2 \cdot 10^{-6} \ \text{Кл/м}^2.$$

4) Поверхностная плотность зарядов на пластинах конденсатора:

$\sigma_{\text{д}} = D$, $\sigma_{\text{д}} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ Кл/м^2.

5) Объемная плотность энергии электрического поля в диэлектрике, согласно (3.30),

$$\omega=\frac{W}{V}=\frac{ED}{2},\ [\omega]=\frac{\text{В}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}=\frac{\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{м}^3}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3},\ \omega=5\ \text{Дж}/\text{м}^3.$$

Ответ: $p=5\ \text{Н}/\text{м}^2$; $D=2{,}5\cdot10^{-5}\ \text{Кл}/\text{м}^2$; $\sigma_{\text{св}}=21{,}2\cdot10^{-6}\ \text{Кл}/\text{м}^2$; $\sigma_{\text{д}}=2{,}5\cdot10^{-5}\ \text{Кл}/\text{м}^2$; $\omega=5\ \text{Дж}/\text{м}^3$.

Задача 3.13. Имеем среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Определите объемную плотность энергии ω электрического поля в этой среде в точке, находящейся:

а) на расстоянии $x=2$ см от поверхности заряженного шара радиусом $R=1$ см;

б) на расстоянии $x=2$ см от бесконечно длинной заряженной нити.

Поверхностная плотность заряда на шаре $\sigma=16{,}7\ \text{мкКл}/\text{м}^2$, линейная плотность заряда на нити $\tau=167\ \text{нКл}/\text{м}$.

Дано:
$R=0{,}01$ м
$\varepsilon=2$
$x=0{,}02$ м
$\sigma=16{,}7\cdot10^{-6}\ \text{Кл}/\text{м}^2$
$\tau=167\cdot10^{-9}\ \text{Кл}/\text{м}$

$\omega_{\text{ш}}-?\ \ \omega\ -?$

Решение. а) Электрическое поле, создаваемое заряженным шаром, подобно полю точечного заряда, который поместили в центр шара (3.6):

$$E_{\text{ш}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_{\text{ш}}}{(x+R)^2},$$

где $q_{\text{ш}}=\sigma S_{\text{ш}}=\sigma 4\pi R^2$. Таким образом,

$$E_{\text{ш}}=\frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(x+R)^2}.$$

Электрическое смещение (индукция) равно:

$$D=\varepsilon\varepsilon_0 E.$$

Объемная плотность энергии согласно формуле (3.30):

$$\omega=\frac{ED}{2}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Таким образом, $\omega_{\text{ш}}=\dfrac{\sigma^2R^4}{2\varepsilon\varepsilon_0(x+R)^4}$,

$$[\omega_{ш}] = \frac{Кл^2 \cdot м^4 \cdot м}{м^4 \cdot Ф \cdot м^4} = \frac{Кл^2 \cdot В}{м^3 \cdot Кл} = \frac{Кл \cdot В}{м^3} = \frac{А \cdot с \cdot В}{м^3} = \frac{Вт \cdot с}{м^3} = \frac{Дж}{м^3},$$

$$\omega_{ш} = 9{,}73 \cdot 10^{-2}\ Дж/м^3 .$$

б) Напряженность поля в диэлектрике, создаваемая бесконечно длинной заряженной нитью, определим по формуле (3.8): $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x\varepsilon}$. Тогда объемная плотность энергии электрического поля $\omega = \frac{\tau^2}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$,

$$[\omega] = \frac{Кл^2 \cdot м}{м^2 \cdot Ф \cdot м^2} = \frac{Кл^2 \cdot В}{м^3 \cdot Кл} = \frac{А \cdot с \cdot В}{м^3} = \frac{Вт \cdot с}{м^3} = \frac{Дж}{м^3},\ \omega = 0{,}049\ \ Дж/м^3 .$$

Ответ: $\omega = 9{,}73 \cdot 10^{-2}\ \frac{Дж}{м^3}$; $\omega = 0{,}049\ \frac{Дж}{м^3}$.

Задача 3.14. Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора меняют от d_1 = 2 мм до d_2 = 20 мм. К пластинам приложена разность потенциалов U = 0,1 кВ. Площадь пластины S = 0,01 м^2. Найдите энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключается; б) отключается.

Дано:
$d_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м
$d_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м
$U = 100$ В
$S = 0{,}01$ м^2

$W_1 - ?\ W_2 - ?$

Решение. а) Если пластины конденсатора остаются подключенными к источнику, то разность их потенциалов остается неизменной ($U = \text{const}$). Энергию конденсатора удобно считать по формулам (3.29): $W = \frac{CU^2}{2}$. Емкость плоского конденсатора с увеличением расстояния d будет уменьшаться, так как $C = \varepsilon_0 S / d$.

Таким образом, $W_1 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d_1}$ и $W_2 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d_2}$. $W_1 = 2{,}2 \cdot 10^{-7}$ Дж,

$$W_2 = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\ Дж,\ [W] = \frac{Ф \cdot м^2 \cdot В^2}{м \cdot м} = \frac{Кл \cdot В^2}{В} = Кл \cdot В = А \cdot с \cdot В = Вт \cdot с = Дж .$$

б) Систему двух заряженных и отключенных от источника пластин можно рассматривать как изолированную систему. Энергию в данном случае удобно выразить через заряд q на пластинах, так как заряд пластин, отключенных от источника при их раздвижении, не изменяется:

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1}, \text{ где } q = C_1 U, \; W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d_1}, \; W_1 = 2{,}2\cdot 10^{-7} \text{ Дж};$$

$$W_2 = \frac{q^2}{2C_2} = \frac{U^2 \varepsilon_0 S}{2d_2},$$

$$[W] = \frac{\text{Ф}\cdot\text{м}^2\cdot\text{В}^2}{\text{м}\cdot\text{м}} = \text{Ф}\cdot\text{В}^2 = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}^2}{\text{В}} = \text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В} = \text{Вт}\cdot\text{с} = \text{Дж}, \; W_2 = 22{,}1\cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Ответ: а) $W_1 = 2{,}2\cdot 10^{-7}$ Дж; $W_2 = 2{,}2\cdot 10^{-8}$ Дж.

б) $W_1 = 2{,}2\cdot 10^{-7}$ Дж; $W_2 = 22{,}1\cdot 10^{-7}$ Дж.

Задача 3.15. На пластинах плоского воздушного конденсатора находится заряд $4{,}95$ нКл. Конденсатор подключен к источнику с ЭДС, равной 280 В. Площадь пластины конденсатора $S = 0{,}01$ м^2. Найдите: а) напряженность поля E внутри конденсатора; б) расстояние d между пластинами; в) скорость v, которую получит электрон, пройдя в конденсаторе путь от одной пластины до другой; г) энергию W конденсатора; д) силу притяжения пластин F.

Дано:
$q = 4{,}95\cdot 10^{-9}$ Кл
$U = 280$ В
$S = 0{,}01$ м^2
$\varepsilon = 1$

E – ? d – ?
v – ? W – ?
F – ?

Решение. а) Напряженность поля E, созданного двумя пластинами, по формуле (3.10) равна:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ где } \sigma = \frac{q}{S}, \; E = \frac{q}{S\varepsilon_0}, \; E = 56 \; \frac{\text{кВ}}{\text{м}},$$

$$[E] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{Ф}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

б) Разность потенциалов пластин U и напряженность E поля внутри конденсатора связаны соотношением $E = \dfrac{U}{d}$. Отсюда $d = \dfrac{U}{E}$, $[d] = \dfrac{\text{В}\cdot\text{м}}{\text{В}} = \text{м}$,

$d = 5\cdot 10^{-3}$ м.

в) По закону сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} = q_e U$, где m – масса электрона ($m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг); q_e – заряд электрона ($q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Отсюда находим скорость электрона:

$$v = \sqrt{\frac{2q_e U}{m}}, \quad v = 10^7 \ \frac{м}{с},$$

$$[v] = \sqrt{\frac{Кл \cdot В}{кг}} = \sqrt{\frac{А \cdot с \cdot В}{кг}} = \sqrt{\frac{Дж}{кг}} = \sqrt{\frac{Н \cdot м}{кг}} = \sqrt{\frac{кг \cdot м \cdot м}{кг \cdot с^2}} = \frac{м}{с}.$$

г) Энергию конденсатора рассчитаем по формуле (3.29):

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S}, \quad W = 6{,}9 \cdot 10^{-7} \ Дж,$$

$$[W] = \frac{Кл^2 \cdot м \cdot м}{Ф \cdot м^2} = \frac{Кл^2 \cdot В}{Кл} = Кл \cdot В = А \cdot с \cdot В = Вт \cdot с = Дж.$$

д) Сила притяжения пластин F в плоском конденсаторе равна:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}, \quad F = 0{,}14 \ мН,$$

$$[F] = \frac{Кл^2 \cdot м}{Ф \cdot м^2} = \frac{Кл^2 \cdot В}{Кл \cdot м} = \frac{Кл \cdot В}{м} = \frac{А \cdot с \cdot В}{м} = \frac{Вт \cdot с}{м} = \frac{Дж}{м} = \frac{Н \cdot м}{м} = Н.$$

Ответ: $E = 56 \ \frac{кВ}{м}$; $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м;

$v = 10^7 \ \frac{м}{с}$; $W = 6{,}9 \cdot 10^{-7}$ Дж; $F = 0{,}14$ мН.

Задача 3.16. Два металлических шарика радиуса R_1 = 6 см и R_2 = 4 см соответственно соединены проволочкой, емкостью которой можно пренебречь. До соединения заряд на первом шарике был q_1 = 10 нКл, а потенциал второго шарика φ_2 = 9 кВ. Найдите: а) потенциал φ_1 первого шарика до соединения; б) заряд q_2 второго шарика до соединения; в) энергии W_1 и W_2 каждого шарика до соединения; г) заряд q_1' и потенциал φ_1' первого шарика после соединения; д) заряд q_2' и потенциал φ_2' второго шарика после соединения; е) энергию W, соединенных проводником шариков.

Дано:
$R_1 = 0,06$ м
$R_2 = 0,04$ м
$q_1 = 10^{-8}$ Кл
$\varphi_2 = 9000$ В

$\varphi_1 - ?$ $q_1' - ?$
$q_2 - ?$ $q_2' - ?$
$W_1 - ?$ $\varphi_1' - ?$
$W_2 - ?$ $\varphi_2' - ?$
$W - ?$

Решение. Емкость шарика $C = 4\pi\varepsilon_0 R = \dfrac{R}{k}$, где

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \dfrac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$. С другой стороны, емкость

уединенного проводника по определению $C = \dfrac{q}{\varphi}$.

а) Потенциал первого шарика до соединения равен $\varphi_1 = \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{q_1 k}{R_1}$,

$$\varphi_1 = 1500\ \text{В},\ [\varphi_1] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

б) Заряд второго шарика до соединения равен:

$$q_2 = C_2\varphi_2 = \frac{R_2}{k}\varphi_2,\ q_2 = 40\ \text{нКл},$$

$$[q_2] = \frac{\text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{Кл} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}} = \text{Кл}.$$

в) Энергия шариков до соединения определяется по формулам (3.28):

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} = \frac{q_1^2 k}{2R_1},\quad W_1 = 0,75 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж};\quad W_2 = \frac{q_2^2 k}{2R_2},\quad W_2 = 18 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж};$$

$$[W] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{м}} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

г) Так как потенциалы шаров $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то после соединения шариков по проволочке потечет ток. Заряды будут перетекать к шарику с меньшим потенциалом (к первому шарику). Перетекание зарядов будет происходить до тех пор, пока потенциалы шаров сравняются ($\varphi_1' = \varphi_2'$). По закону сохранения электрического заряда (3.1) в изолированной системе (когда нет притока и оттока зарядов извне) $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$

или $q_1 + q_2 = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2' = \varphi_1'(C_1 + C_2)$.

Найдем общий потенциал шаров после соединения:

$$\varphi_1' = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{k(q_1 + q_2)}{R_1 + R_2}, \quad \varphi_1' = \varphi_2' = 4500 \text{ В}.$$

Тогда заряд $q_1' = C_1\varphi_1' = \frac{R_1}{k}\varphi_1'$, $q_1' = 30$ нКл.

д) Заряд на втором шарике после соединения:

$q_2' = q_1 + q_2 - q_1'$, $q_2' = 20$ нКл.

е) Энергия W соединенных проводником шариков:

$$W = \frac{(C_1 + C_2)\varphi_1'^2}{2} = \frac{(R_1 + R_2)\varphi_1'^2}{2k}, \quad W = 112{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж},$$

$$[W] = \frac{\text{м} \cdot \text{В}^2 \cdot \text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В}^2 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{Дж}} = \frac{\text{Дж}^2}{\text{Дж}} = \text{Дж}.$$

Ответ: $\varphi_1 = 1500$ В; $q_2 = 40$ нКл; $W_1 = 0{,}75 \cdot 10^{-5}$ Дж;

$W_2 = 18 \cdot 10^{-5}$ Дж; $\varphi_1' = \varphi_2' = 4500$ В; $q_1' = 30$ нКл;

$q_2' = 20$ нКл, $W = 112{,}5 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Задача 3.17. Емкость шара, погруженного в масло ($\varepsilon = 5$), равна $0{,}39$ пФ, заряд на шаре $1{,}76$ нКл. Каковы потенциал шара φ, радиус шара R, поверхностная плотность заряда σ и энергия шара W?

Дано:
$C = 0{,}39 \cdot 10^{-12}$ Ф
$\varepsilon = 5$
$q = 1{,}76 \cdot 10^{-9}$ Кл

$\varphi - ?$ $R - ?$
$\sigma - ?$ $W - ?$

Решение. По формуле (3.22) емкость уединенного проводника равна $C = \frac{q}{\varphi}$. Отсюда определяем потенциал на шаре $\varphi = \frac{q}{C}$, $\varphi = 4{,}5$ кВ, $[\varphi] = \frac{\text{Кл}}{\text{Ф}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Кл}} = \text{В}$. С другой стороны, емкость шара $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R = \frac{\varepsilon R}{k}$, где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$.

Таким образом, радиус шара $R=\dfrac{kC}{\varepsilon}$,

$$[R]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Ф}}{\text{Кл}^2}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{м}\cdot\text{Кл}}{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}=\frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}=\text{м},\quad R=0{,}7\cdot10^{-3}\ \text{м}.$$

Поверхностная плотность заряда на шаре

$$\sigma=\frac{q}{4\pi R^2},\quad \sigma=286\ \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$$

Энергию шара определим по формуле (3.28):

$$W=\frac{q^2}{2C},\quad W=3{,}97\ \text{мкДж},\quad [W]=\frac{\text{Кл}^2}{\text{Ф}}=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{В}}{\text{Кл}}=\text{Кл}\cdot\text{В}=\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}=\text{Дж}.$$

Ответ: $\varphi=4{,}5$ кВ; $R=0{,}7$ мм; $\sigma=286\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$; $W=3{,}97$ мкДж.

Задача 3.18. Напряженность E электрического поля на расстоянии $x=5$ см от центра сфер воздушного сферического конденсатора равна $44{,}5\ \dfrac{\text{кВ}}{\text{м}}$. Радиусы внутренней и внешней сфер соответственно равны: $r=2$ см, $R=8$ см. Найдите разность потенциалов U, приложенную между сферическими поверхностями.

Дано:

$E=44{,}5\cdot10^3\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$

$x=0{,}05$ м

$r=0{,}02$ м

$R=0{,}08$ м

$\varepsilon=1$

$U-?$

Решение. Электрическая емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиуса r и R, пространство между которыми заполнено диэлектриком) определяется по формуле (3.24):

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}{(R-r)}. \qquad (1)$$

С другой стороны, емкость конденсатора

$$C=\frac{q}{U}, \qquad (2)$$

где U – разность потенциалов между сферами конденсатора. Из уравнений (1) и (2) получим:

$$\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}{(R-r)}=\frac{q}{U},\quad U=\frac{q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0 rR}. \qquad (3)$$

Заряд на сфере q найдем через напряженность поля конденсатора E. Согласно формуле (3.7), $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$. Отсюда $q=4\pi\varepsilon_0 Ex^2$. Разность потенциалов U между сферами $U=\frac{(R-r)Ex^2}{rR}$, $[U]=\frac{\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}=\text{В}$, $U=4{,}2\ \text{кВ}$.

Ответ: $U=4{,}2\ \text{кВ}$.

3.2. Постоянный ток

Основные формулы

- Сила тока

$$I=\frac{dq}{dt}, \tag{3.33}$$

где dq – количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время dt. Для постоянного тока

$$I=\frac{q}{t}.$$

- Плотность электрического тока определяется отношением силы тока dI к площади dS поперечного сечения проводника, перпендикулярной к направлению тока:

$$\vec{j}=\frac{dI}{dS_\perp}\frac{\vec{v}_+}{|v_+|}. \tag{3.34}$$

Плотность тока – векторная величина, направление которой совпадает с направлением скорости упорядоченного движения положительных зарядов $\vec{v}_+$.

- Сила тока I через любую поверхность S равна:

$$I=\int_S j_n\,dS, \tag{3.35}$$

где j_n – проекция вектора $\vec{j}$ на нормаль к поверхности.

• Сопротивление R однородного проводника длиной l и площадью поперечного сечения S:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{3.36}$$

где ρ – удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник.

• Зависимость от температуры:

а) сопротивления проводника

$R = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$;

б) удельного сопротивления проводника:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha \cdot \Delta t), \tag{3.37}$$

где R_0, ρ_0 – сопротивление проводника и удельное сопротивление при 0 °C, α – температурный коэффициент сопротивления, Δt – изменение температуры.

• Сопротивление проводников, соединенных:

а) последовательно

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i; \tag{3.38}$$

б) параллельно

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \tag{3.39}$$

Здесь R_i – сопротивление i-го проводника; n – число проводников.

• Закон Ома:

а) для неоднородного участка цепи

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathscr{E}_{12}}{R + r} = \frac{U}{R + r}; \tag{3.40}$$

б) для однородного участка цепи ($\mathscr{E}_{12} = 0$)

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}; \tag{3.41}$$

в) для замкнутой цепи ($\varphi_1 = \varphi_2$)

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \tag{3.42}$$

Здесь $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; $\mathscr{E}_{12}$ – ЭДС источника, входящего в участок; U – напряжение на участке цепи; $\mathscr{E}$ – ЭДС, действующая в цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока.

• Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma \vec{E}, \qquad (3.43)$$

где σ – удельная проводимость, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

• Правила Кирхгофа:

1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0, \qquad (3.44)$$

где n – число токов, сходящихся в узле.

1. В замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на всех участках этого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников, включенных в контур:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \mathscr{E}_i, \qquad (3.45)$$

где n – число участков, содержащих сопротивление R; k – число ЭДС, действующих в контуре.

• Работа, совершаемая электрическим полем и сторонними силами на участке цепи постоянного тока за время t:

$$A = qU = IUt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t. \qquad (3.46)$$

• Тепловая мощность тока:

$$P = \frac{A}{t} = IU = I^2 R. \qquad (3.47)$$

• Закон Джоуля–Ленца:

$$dQ = I^2 R dt, \qquad (3.48)$$

где dQ – количество теплоты, выделяющееся на участке электрической цепи за время dt.

Задача 3.19. К источнику с ЭДС равной $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r_1 присоединили катушку с сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом. При этом амперметр показал силу тока $I_1 = 0{,}5$ А. Если же к источнику присоединить последовательно еще один источник с такой же ЭДС, но с внутренним сопротивлением $r_2 = 4{,}5$ Ом, то сила тока I_2 в той же катушке окажется равной $0{,}4$ А. Определите внутреннее сопротивление r_1 и ЭДС источника $\mathscr{E}$.

Дано:
$R = 0{,}1\,\text{Ом}$
$I_1 = 0{,}5\,\text{А}$
$I_2 = 0{,}4\,\text{А}$
$r_2 = 4{,}5\,\text{Ом}$

$\mathscr{E}$ –? r_1–?

Решение. Запишем закон Ома для замкнутой цепи (3.42) в первом случае (рис. 56,*а*): $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{R + r_1}$, где r_1 – внутреннее сопротивление первого источника. Во втором случае (рис. 56,*б*) закон Ома будет иметь вид:

$$I_2 = \frac{2\mathscr{E}}{R + r_1 + r_2}.$$

Найдем сопротивление r_1 для первого источника, разделив одно уравнение на другое и подставив значения токов I_1 и I_2:

$\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R + r_1 + r_2}{(R + r_1)2} = \dfrac{5}{4}$. Тогда $r_1 = \dfrac{2}{3} r_2 - R$, $r_1 = 2{,}9$ Ом.

Источник имеет ЭДС $\mathscr{E} = I_1(R + r_1)$, $[\mathscr{E}] = \text{А} \cdot \text{Ом} = \text{В}$, $\mathscr{E} = 1{,}5$ В.

Ответ: $r_1 = 2{,}9$ Ом; $\mathscr{E} = 1{,}5$ В.

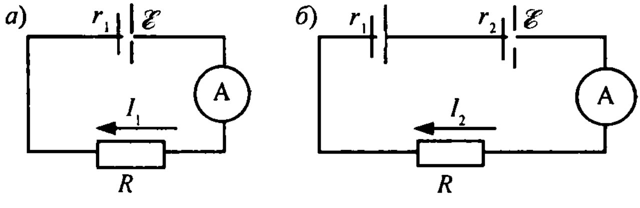

Рис. 56

Задача 3.20. В схеме (см. рис. 57) ЭДС каждого элемента $\mathscr{E} = 1{,}2$ В, внутреннее сопротивление $r = 0{,}2$ Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление R и дает во внешнюю цепь ток $I = 2$ А. Найдите сопротивление R.

Дано:
$\mathscr{E} = 1{,}2$ В
$r = 0{,}2$ Ом
$I = 2$ А

R – ?

Решение. Батарея имеет смешанное соединение элементов: две параллельные ветви с тремя последовательно соединенными элементами (рис. 57). По закону Ома для замкнутой цепи (3.42) найдем внешнее сопротивление

$$R = \frac{3\mathscr{E}}{I} - r_{об},$$

так как суммарная ЭДС равна $3\mathscr{E}$.

Здесь $r_{об} = \dfrac{3r}{2}$ – сопротивление источников при смешанном соединении. Найдем $r_{об}$. Внутреннее сопротивление элементов в одной ветви $r_в = 3r$, так как элементы соединены последовательно. Две такие ветви, соединенные параллельно, образуют цепь с общим внутренним сопротивлением элементов, определяемым по формуле: $\dfrac{1}{r_{об}} = \dfrac{1}{3r} + \dfrac{1}{3r} = \dfrac{2}{3r}$, откуда $r_{об} = \dfrac{3}{2}r$.

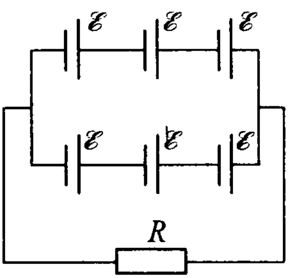

Рис. 57

Тогда $R = \dfrac{3\mathscr{E}}{I} - \dfrac{3r}{2}$,, $R = 1{,}5$ Ом.

Ответ: $R = 1{,}5$ Ом.

Задача 3.21. Имеется 12 одинаковых гальванических элементов с ЭДС $\mathscr{E} = 1{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление $R = 0{,}3$ Ом? Определите максимальную силу тока во внешней цепи I_{max}.

Дано:
$N = 12$
$r = 0{,}4$ Ом
$\mathscr{E} = 1{,}5$ В
$R = 0{,}3$ Ом

I_{max} – ?

Решение. Представим схему батареи, как показано на рис. 58, где n – число элементов, соединенных последовательно, m – число таких ветвей, соединенных параллельно. Полная ЭДС батареи $n\mathscr{E}$, ее внутреннее сопротивление

$$r_б = \frac{nr}{m}.$$

Поскольку $m = \frac{N}{n}$, сила тока через резистор R равна по закону (3.42):

$$I = \frac{n\mathscr{E}}{\frac{nr}{m} + R} = \frac{N\mathscr{E}}{nr + \frac{N}{n}R}.$$

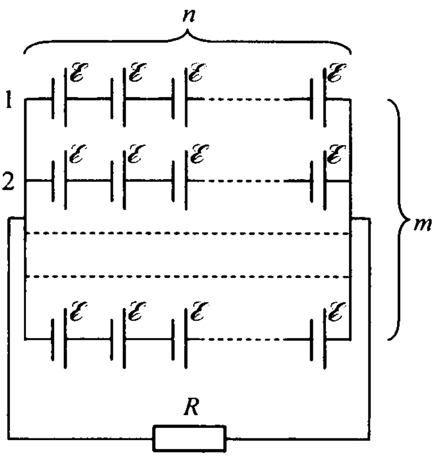

Рис. 58

Найдем, при каком значении n будет максимальная сила тока. Для этого возьмем производную $\frac{dI}{dn}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dI}{dn} = -\frac{\left(r - \frac{NR}{n^2}\right)N\mathscr{E}}{\left(nr + \frac{N}{n}R\right)^2} = 0.$$

При дифференцировании целочисленную переменную n условно считаем непрерывной. Отсюда $r = \frac{NR}{n^2}$ и $n = \sqrt{\frac{RN}{r}}$, $n = 3$. Число ветвей $m = \frac{12}{n} = 4$.

Тогда наибольшая сила тока

$$I_{max} = \frac{N\mathscr{E}}{nr + \frac{N}{n}R} = \frac{12\mathscr{E}}{3r + 4R};\ I_{max} = 7{,}5\ \text{А}.$$

Ответ: $I_{max} = 7{,}5$ А.

Задача 3.22. Если соединить два элемента одноименными полюсами, то сила тока в цепи $I = 0{,}5$ А. ЭДС первого элемента $\mathscr{E}_1 = 1{,}2$ В и внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}1$ Ом. ЭДС второго элемента $\mathscr{E}_2 = 0{,}9$ В и внутреннее сопротивление $r_2 = 0{,}3$ Ом. Определите сопротивление R соединительных проводов.

Дано:
$I = 0{,}5$ А
$\mathscr{E}_1 = 1{,}2$ В
$r_1 = 0{,}1$ Ом
$\mathscr{E}_2 = 0{,}9$ В
$r_2 = 0{,}3$ Ом

$R - ?$

Решение. Рассмотрим схему (рис. 59) соединения двух элементов, предложенную в условии.

Так как $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$, то ток в цепи идет по часовой стрелке. Выберем направление обхода контура тоже по часовой стрелке и запишем второе правило Кирхгофа (3.45):

$$Ir_1 + Ir_2 + IR = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2.$$

Откуда

$$R = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 - I(r_1 + r_2)}{I}, \quad R = 0{,}2 \text{ Ом}.$$

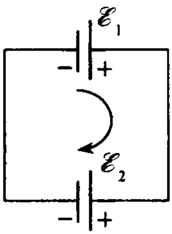

Рис. 59

Если изменить полярность второго источника, то знак перед $\mathscr{E}_2$ изменится на противоположный.

Ответ: $R = 0{,}2$ Ом.

Задача 3.23. Источники с электродвижущими силами $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ включены в цепь, как показано на рис. 60. Определите силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3, если $\mathscr{E}_1 = 10$ В и $\mathscr{E}_2 = 4$ В, $R_1 = R_4 = 2$ Ом и $R_2 = R_3 = 4$ Ом. Сопротивлением источников пренебречь.

Дано:
$\mathscr{E}_1 = 10$ В
$\mathscr{E}_2 = 4$ В
$R_1 = R_4 = 2$ Ом
$R_2 = R_3 = 4$ Ом

$I_2 - ?\ I_3 - ?$

Решение. Силы токов в разветвленной цепи определим, используя законы Кирхгофа (3.44), (3.45).

Для этого выберем направления токов, как показано на рис. 60 (направление тока выбирается произвольно).

По первому закону Кирхгофа (3.44) составляется $(n-1)$ уравнений, где n – число узлов в цепи. Рассматриваемая в задаче схема имеет два узла: А и В.

При составлении уравнения необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком плюс; ток, отходящий от узла, – со знаком минус.

Итак, для узла В запишем уравнение

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0. \qquad (1)$$

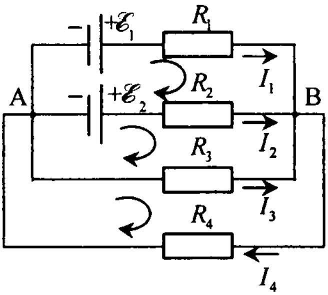

Рис. 60

В уравнении (1) четыре неизвестных. Недостающие три уравнения составим по второму закону Кирхгофа (3.45). Выбираем замкнутый контур таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров. Например, контуры AR_1BR_2A, AR_1BR_3A и AR_3BR_4A.

При составлении уравнений для контуров по второму правилу Кирхгофа необходимо соблюдать следующее правило знаков:

а) если направление тока совпадает с выбранным направлением обхода контура, то соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае следует ставить знак минус;

б) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т. е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

Условимся обходить выбранные контуры по часовой стрелке.

Получим следующие уравнения:

$$I_1R_1 - I_2R_2 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2, \tag{2}$$

$$I_1R_1 - I_3R_3 = \mathscr{E}_1, \tag{3}$$

$$I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \tag{4}$$

Подставив в равенства (2)–(4) значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0,$$

$$2I_1 - 4I_2 = 6,$$

$$2I_1 - 4I_3 = 10,$$

$$4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Поскольку нужно найти только два тока, то удобно воспользоваться методом определителей (детерминантов). С этой целью перепишем систему уравнений в виде:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0,$$

$$2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6,$$

$$2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 = 10,$$

$$0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0.$$

Искомые значения токов найдем из выражений:

$$I_2 = \Delta_{I_2} / \Delta, \quad I_3 = \Delta_{I_3} / \Delta,$$

где Δ – определитель системы уравнений; Δ_{I_2}, Δ_{I_3} – определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами, составленными из свободных членов четырех вышеприведенных уравнений. Находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96; \quad \Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -96.$$

Отсюда получим:

$I_2 = 0,\quad I_3 = -1$ А.

Знак минус у значения силы тока I_3 свидетельствует о том, что истинное направление тока в резисторе R_3 противоположно выбранному.

Ответ: $I_2 = 0$; $I_3 = 1$ А.

Задача 3.24. Два источника ($\mathscr{E}_1 = 8$ В, $r_1 = 2$ Ом, $\mathscr{E}_2 = 6$ В, $r_2 = 1{,}5$ Ом) и резистор сопротивлением $R = 10$ Ом соединены, как показано на рис. 61. Вычислите силу тока I_1, текущую через источник с ЭДС $\mathscr{E}_1$.

Дано:
$\mathscr{E}_1 = 8$ В
$\mathscr{E}_2 = 6$ В
$r_1 = 2$ Ом
$r_2 = 1{,}5$ Ом
$R = 10$ Ом

I_1 – ?

Решение. Выберем направления токов на отдельных участках цепи (рис. 61) и запишем для узла А уравнение по первому правилу Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 - I = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим внешний 1 и один внутренний контур 2, которые будем обходить по часовой стрелке. По второму правилу Кирхгофа запишем для них уравнения:

$$I_1 r_1 + IR = \mathscr{E}_1, \qquad (2)$$

$$-I_2 r_2 + IR = -\mathscr{E}_2, \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1)–(3), получим выражение для силы тока, текущего через источник с ЭДС $\mathscr{E}_1$:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1(R+r_2)+\mathscr{E}_2 R}{Rr_1 + Rr_2 + r_1 r_2}, \quad I_1 = 4 \text{ А},$$

$$[I] = \frac{\text{В}\cdot\text{Ом}}{\text{Ом}^2} = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{А}.$$

Ответ: $I_1 = 4$ А.

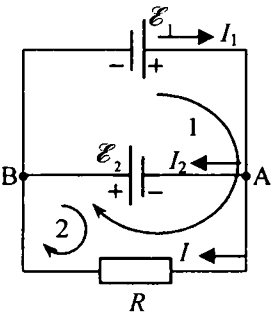

Рис. 61

Задача 3.25. В проводнике в течение времени $\tau = 10$ с равномерно убывает сила тока от $I_0 = 5$ А до $I = 0$. При этом в проводнике выделяется количество теплоты $Q = 1$ кДж. Каково сопротивление R проводника?

Дано:
$\tau = 10$ с
$I_0 = 5$ А
$I = 0$
$Q = 10^3$ Дж

$R - ?$

Решение. Сила тока в проводнике убывает равномерно по линейному закону $I = b - kt$. Коэффициенты b и k найдем из начальных условий. При $t = 0$ $I = I_0$, $b = I_0$, а при $t = \tau$ $I = 0$ и $k = \dfrac{I_0}{\tau}$, $k = 0{,}5\ \dfrac{\text{А}}{\text{с}}$.

Окончательно закон убывания тока примет вид $I = I_0 - kt$.

Согласно закону Джоуля–Ленца, количество теплоты, выделившееся в проводнике за бесконечно малый промежуток времени,

$$dQ = I^2 R dt = (I_0 - kt)^2 R dt.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$Q = \int_0^\tau (I_0 - kt)^2 R dt, \quad Q = R\left[I_0^2\tau - 2k\frac{\tau^2}{2}I_0 + k^2\frac{\tau^3}{3}\right].$$

Отсюда найдем сопротивление проводника: $R = \dfrac{Q}{I_0^2\tau - I_0 k\tau^2 + \dfrac{k^2\tau^3}{3}}$,

$$[R] = \frac{\text{Дж}}{\text{А}^2\cdot\text{с}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}^2\cdot\text{с}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}, \quad R = 12 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 12$ Ом.

Задача 3.26. Определите количество теплоты Q, выделившееся в проводнике сопротивлением $R = 50$ Ом, при пропускании по нему электрического тока. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I = 10$ А в течение времени $\tau = 30$ с.

Дано:
$R = 50$ Ом
$I_0 = 0$
$I = 10$ А
$\tau = 30$ с

$Q - ?$

Решение. Нарастание силы тока в проводнике происходит по закону $I = b + kt$. Найдем коэффициенты b и k, используя начальные условия.

При $t = 0$ $I = I_0$, $b = I_0 = 0$.

При $t = \tau$ $I = I_{max}$, $k = \dfrac{I_{max}}{\tau}$, $k = 0{,}33\ \dfrac{\text{А}}{\text{с}}$.

Таким образом, $I = kt$.

По закону Джоуля–Ленца количество теплоты $Q = \int\limits_0^\tau I^2 R dt = \int\limits_0^\tau k^2 t^2 R dt$,

$$Q = k^2 R \frac{\tau^3}{3},$$

$$[Q] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с}^3}{\text{с}^2} = \text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = \text{Дж},\ Q = 50\ \text{кДж}.$$

Ответ: $Q = 50$ кДж.

Задача 3.27. Определите ток короткого замыкания для батареи, если при силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1 = 18$ Вт, при силе тока $I_2 = 1$ А – соответственно $P_2 = 10$ Вт.

Дано:
$I_1 = 3$ А
$P_1 = 18$ Вт
$I_2 = 1$ А
$P_2 = 10$ Вт

$I_{кз} - ?$

Решение. Ток короткого замыкания $I_{кз} = \dfrac{\mathscr{E}}{r}$, следовательно, задача сводится к нахождению ЭДС батареи $\mathscr{E}$ и ее внутреннего сопротивления r. Используем закон Ома для полной цепи (3.42) для двух случаев:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + r}, \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_2 + r}. \qquad (1)$$

Сопротивления внешней цепи R_1 и R_2 определим через значения мощности (3.47):

$$R_1 = \frac{P_1}{I_1^2},\ R_2 = \frac{P_2}{I_2^2}. \qquad (2)$$

Подставим значения сопротивлений (2) в уравнения (1):

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{\frac{P_1}{I_1^2} + r},\quad I_2 = \frac{\mathscr{E}}{\frac{P_2}{I_2^2} + r}. \qquad (3)$$

Разделив I_1 на I_2 в уравнениях (3), получим:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P_2}{I_2^2} + r}{\frac{P_1}{I_1^2} + r},\quad \frac{P_1}{I_1} + I_1 r = \frac{P_2}{I_2} + I_2 r. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) найдем значение внутреннего сопротивления:

$$r = \frac{\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2}}{I_2 - I_1},\quad r = 2\ \text{Ом}.$$

Выразим ЭДС батареи аккумуляторов из уравнения (3):

$$\mathscr{E} = I_1\left(\frac{P_1}{I_1^2} + r\right) = \frac{P_1}{I_1} + I_1 r,\quad [\mathscr{E}] = \frac{\text{Вт}}{\text{А}} + \text{А}\cdot\text{Ом} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}}{\text{А}} + \text{В} = \text{В},\quad \mathscr{E} = 12\ \text{В}.$$

Ток короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\mathscr{E}}{r}$, $I_{кз} = 6$ А.

Ответ: $I_{кз} = 6$ А.

Задача 3.28. Какую наибольшую мощность P_{max} можно получить во внешней цепи от батареи аккумуляторов? ЭДС батареи $\mathscr{E} = 12$ В. Ток короткого замыкания 6 А.

Дано:
$\mathscr{E} = 12$ В
$I_{кз} = 6$ А

P_{max} – ?

Решение. Мощность, выделяющаяся во внешней цепи (3.47), равна $P = I^2 R$, где, согласно закону Ома для полной цепи (3.42), $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R+r}$. Отсюда $P = \dfrac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}$.

По условию задачи необходимо найти наибольшую мощность P_{max}. Выясним, при каком сопротивлении R внешней цепи это возможно. Найдем производную $\dfrac{dP}{dR}$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mathscr{E}^2 (R+r)^2 - 2(R+r)\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^4} = 0.$$ Если $R = r$, то $\dfrac{dP}{dR} = 0$.

При $R = r$ можно получить во внешней цепи наибольшую мощность:

$$P_{max} = \frac{\mathscr{E}^2 r}{(2r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$

Зная ток короткого замыкания, выразим внутреннее сопротивление батареи: $r = \dfrac{\mathscr{E}}{I_{кз}}$. Тогда $P_{max} = \dfrac{\mathscr{E} I_{кз}}{4}$, $P_{max} = 18$ Вт.

Ответ: $P_{max} = 18$ Вт.

Задача 3.29. По медному проводу длиной $l = 1000$ м и диаметром $d = 4$ мм течет ток I. При каком значении тока падение напряжения U на проводе будет равно $10{,}8$ В?

Дано:
$l = 1000$ м
$d = 0{,}004$ м
$U = 10{,}8$ В
$\rho = 0{,}017 \cdot 10^{-6}$ Ом·м

I-?

Решение. Ток, текущий по участку однородного проводника, подчиняется закону Ома $I = \dfrac{U}{R}$, где $R = \rho \dfrac{l}{S}$ – сопротивление провода.

Так как $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, то $R = \rho \dfrac{4l}{\pi d^2}$.

Тогда сила тока $I=\frac{U}{R}=\frac{U\pi d^2}{\rho 4l}$, $[I]=\frac{В\cdot м^2}{Ом\cdot м\cdot м}=А$, $I=8$ А.

Ответ: $I=8$ А.

Задача 3.30. Батарея аккумуляторов с ЭДС $\mathscr{E}$ = 12 В и внутренним сопротивлением $r=2{,}4$ Ом замкнута на внешнее сопротивление $R=9$ Ом. Найдите падение напряжения U во внешней цепи и падение напряжения U_r внутри батареи. С каким КПД η работает батарея?

Дано:
$\mathscr{E}$ = 12 В
$r=2{,}4$ Ом
$R=9$ Ом

$U-?$ $U_r-?$
$\eta-?$

Решение. По закону Ома для полной цепи (3.42) определим силу тока $I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}$. Тогда падение напряжения U во внешней цепи, согласно закону Ома для однородного участка цепи (3.41)

$$U=IR=\frac{\mathscr{E}R}{R+r},\ U=9{,}5\ В.$$

Падение напряжения U_r внутри батареи: $U_r=Ir=\frac{\mathscr{E}r}{R+r}$, $U_r=2{,}53$ В.

КПД источника тока равен отношению мощности P_1, выделяемой внешним участком цепи (полезная мощность), к полной мощности P, развиваемой источником:

$$\eta=\frac{P_1}{P},\ \text{где}\ P_1=I^2R,\ P=I\mathscr{E}.$$

Тогда КПД источника $\eta=\frac{IR}{\mathscr{E}}=\frac{R}{R+r}$, $\eta=0{,}79$.

Ответ: $U=9{,}5$ В; $U_r=2{,}53$ В; $\eta=0{,}79$.

Задача 3.31. Батарея состоит из двух последовательно соединенных элементов с одинаковыми ЭДС $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1=1$ Ом и $r_2=1{,}5$ Ом. Разность потенциалов на зажимах второго элемента $U_2=0$. При каком внешнем сопротивлении R это возможно?

Дано:
$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = 2$ В
$r_1 = 1$ Ом
$r_2 = 1{,}5$ Ом
$U_2 = 0$

$R - ?$

Решение. Разность потенциалов на зажимах второго элемента $U_2 = \mathscr{E}_2 - Ir_2$.

Исходя из условия, что $U_2 = 0$, найдем силу тока $I = \dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}$, $I = 1{,}33$ А. Согласно закону Ома для замкнутой цепи при последовательном соединении элементов, сила тока в цепи равна: $I = \dfrac{2\mathscr{E}}{R + r_1 + r_2}$.

Отсюда находим внешнее сопротивление R:

$$R = \frac{2\mathscr{E}}{I} - r_1 - r_2,\ [R] = \frac{\text{В}}{\text{А}} - \text{Ом} = \text{Ом},\ R = 0{,}5\ \text{Ом}.$$

Ответ: $R = 0{,}5$ Ом.

Задача 3.32. На катушку намотана медная проволока диаметром $d = 1$ мм. Какое сопротивление имеет проволока, если масса ее $m = 3{,}41$ кг?

Дано:
$d = 10^{-3}$ м
$m = 3{,}41$ кг

$R - ?$

Решение. Сопротивление проводника (3.36) $R = \rho\dfrac{l}{S}$, где $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м – удельное сопротивление медного провода; l – длина проволоки, намотанной на катушку; $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – сечение проволоки.

Длину l проволоки найдем, зная ее массу: $m = DlS$, где $D = 8{,}6 \cdot 10^3\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – плотность меди. Тогда $l = \dfrac{m}{DS}$, а сопротивление равно:

$$R = \rho\frac{m}{DS^2} = \rho\frac{16m}{D\pi^2 d^4},\ [R] = \frac{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{м}^4} = \text{Ом},\ R = 10{,}8\ \text{Ом}.$$

Ответ: $R = 10{,}8$ Ом.

Задача 3.33. Вольфрамовая нить электрической лампочки при температуре $t_1 = 20\ ^\circ$C имеет сопротивление $R_1 = 35{,}8$ Ом. Какова будет температура t_2 нити лампочки, если при включении в сеть напряжением $U = 120$ В по нити идет ток $I = 0,33$ А ? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама: $\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Дано:
$U = 120$ В
$I = 0,33$ А
$t_1 = 20\,°\text{C}$
$\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$
$R_1 = 35,8$ Ом

$t_2 - ?$

Решение. Зависимость сопротивления нити от температуры выражается соотношением

$$R_1 = R_0\left(1 + \alpha\Delta t\right),$$

где R_0 – сопротивление нити при температуре $t_0 = 0\,°\text{C}$, $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1$.

Тогда $R_1 = R_0\left(1 + \alpha t_1\right)$.

Аналогично запишем $R_2 = R_0\left(1 + \alpha t_2\right)$. Разделим одно уравнение на другое: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_0\left(1 + \alpha t_1\right)}{R_0\left(1 + \alpha t_2\right)}$ и выразим сопротивление R_2 из закона Ома:

$\dfrac{R_1}{U/I} = \dfrac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}$. Отсюда найдем $t_2 = \dfrac{(1 + \alpha t_1)U}{I\alpha R_1} - \dfrac{1}{\alpha}$, $[t_2] = \dfrac{\text{В} \cdot °\text{C}}{\text{А} \cdot \text{Ом}} - °\text{C} = °\text{C}$,

$t_2 = 2200\ °\text{C}$.

Ответ: $t_2 = 2200\ °\text{C}$.

Задача 3.34. Чтобы изготовить печь сопротивлением $R = 40$ Ом, при комнатной температуре $t = 20\,°\text{C}$ на фарфоровый цилиндр диаметром $d = 5$ см наматывают никелиновую проволоку радиусом $r = 0,5$ мм. Сколько витков проволоки потребуется для изготовления такой печи? Удельное сопротивление никелина $\rho = 4 \cdot 10^{-7}$ Ом·м при температуре $t = 20\,°\text{C}$.

Дано:
$R = 40$ Ом
$d = 0{,}05$ м
$r = 5\cdot 10^{-4}$ м
$\rho = 4\cdot 10^{-7}$ Ом·м
$t = 20\,^{\circ}$C

$N - ?$

Решение. Сопротивление проводника можно рассчитать по формуле (3.36):

$$R = \rho\frac{l}{S}, \qquad (1)$$

где ρ – удельное сопротивление, l – длина проводника, S – площадь его поперечного сечения.

Длина одного витка равна $2\pi\frac{d}{2}$, тогда длина всей намотанной проволоки $l = \pi dN$, где N – число витков. Площадь поперечного сечения провода $S = \pi r^2$.

Подставив l и S в формулу (1), получим: $R = \rho\frac{\pi dN}{\pi r^2}$.

Откуда $N = \frac{Rr^2}{\rho d}$, $[N] = \frac{\text{Ом}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\text{м}} = 1$, $N = 500$.

Ответ: $N = 500$.

Задача 3.35. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника, реостата и амперметра. При температуре $t_0 = 0\,^{\circ}$C сопротивление реостата $R_0 = 120$ Ом, сопротивление амперметра $R_A = 20$ Ом. Амперметр показывает ток $I_0 = 22$ мА. Если же реостат нагреется на $\Delta t = 50\ ^{\circ}$C, то амперметр покажет силу тока $I = 17{,}5$ мА. Каков температурный коэффициент сопротивления проволоки, из которой сделан реостат?

Дано:
$t_0 = 0\,^{\circ}$C
$R_0 = 120$ Ом
$R_A = 20$ Ом
$I_0 = 22\cdot 10^{-3}$ А
$\Delta t = 50\ ^{\circ}$C
$I = 17{,}5\cdot 10^{-3}$ А

$\alpha - ?$

Решение. Запишем закон Ома для первоначального состояния цепи: $I_0 = \frac{U}{R_0 + R_A}$.

После того как реостат нагрелся, его сопротивление R_0 изменилось и стало равным R. Амперметр показал новую силу тока: $I = \frac{U}{R + R_A}$.

Сопротивление реостата можно найти по формуле $R=\rho\frac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление, которое зависит от температуры, а именно: $\rho=\rho_0(1+\alpha\Delta t)$.

Тогда $R=\rho_0(1+\alpha\Delta t)\frac{l}{S}=R_0(1+\alpha\Delta t)$, где $R_0=\rho_0\frac{l}{S}$.

Найдем отношение токов $\frac{I_0}{I}=\frac{R_0(1+\alpha\Delta t)+R_A}{R_0+R_A}$, из которого определим искомую неизвестную величину $\alpha=\frac{\left(\frac{I_0}{I}-1\right)(R_0+R_A)}{R_0\Delta t}$, $[\alpha]=\frac{\text{Ом}}{\text{Ом}\cdot\text{К}}=\text{К}^{-1}$,

$\alpha=0{,}006\ \text{К}^{-1}$.

Ответ: $\alpha=0{,}006\ \text{К}^{-1}$.

3.3 Магнитное поле

Основные формулы

• Закон Био–Савара–Лапласа

$$d\vec{B}=\frac{\mu\mu_0 I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{4\pi r^3}, \tag{3.49}$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция в точке поля, создаваемая элементом длины проводника $d\vec{l}$ с током I; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника к точке, магнитная индукция в которой определяется; μ – магнитная проницаемость; $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

• Модуль вектора $d\vec{B}$ выражается формулой:

$$dB=\frac{\mu\mu_0 I\,dl\sin\alpha}{4\pi r^2}, \tag{3.50}$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

• Связь магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \tag{3.51}$$

• Магнитная индукция поля бесконечно длинного прямого проводника с током:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}, \tag{3.52}$$

где r – расстояние от оси проводника до точки, в которой определяется магнитная индукция.

• Магнитная индукция в центре кругового витка с током:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}, \tag{3.53}$$

где R – радиус кривизны проводника.

• Магнитная индукция поля, создаваемая отрезком проводника:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)}{4\pi r}. \tag{3.54}$$

Вектор $\vec{B}$ в точке А (рис. 62) направлен за чертеж перпендикулярно его плоскости.

• Магнитная индукция поля, создаваемого длинным соленоидом в средней его части:

$$B = \mu\mu_0 nI, \tag{3.55}$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, I – сила тока в соленоиде.

• Индукция магнитного поля на оси соленоида конечной длины:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} In(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1), \tag{3.56}$$

где α_1 и α_2 – углы между осью соленоида и радиусом-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концам соленоида.

• Принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \ldots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i, \tag{3.57}$$

где $\vec{B}$ – магнитная индукция результирующего поля, $\vec{B}_i$ – магнитная индукция поля с индексом i.

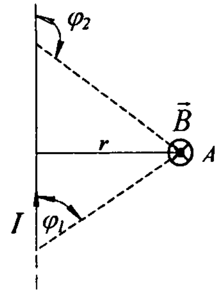

Рис. 62

• Закон Ампера: сила, действующая на элемент проводника $d\vec{l}$ с током I в магнитном поле, равна:

$$d\vec{F} = \left[d\vec{l}, \vec{B}\right]I, \tag{3.58}$$

где $\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$ – векторное произведение элемента длины проводника $d\vec{l}$ и магнитной индукции поля $\vec{B}$.

Модуль силы Ампера

$$dF = IBdl\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

• Сила взаимодействия двух прямых бесконечных параллельных проводников с токами I_1 и I_2, приходящаяся на единицу длины каждого из проводников:

$$F = \frac{\mu\mu_0 2I_1I_2}{4\pi b}, \tag{3.59}$$

где b – расстояние между проводниками.

• Сила Лоренца: сила, действующая на заряд q, движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]. \tag{3.60}$$

• Модуль силы Лоренца

$$F = qvB\sin\alpha, \tag{3.61}$$

где α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

• Результирующая сила, действующая на заряженную частицу с электрическим зарядом q, находящуюся в электрическом и магнитном полях:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}], \tag{3.62}$$

где $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля.

• Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность S:

а) в случае однородного поля

$$\Phi = BS\cos\alpha = B_nS, \tag{3.63}$$

где α – угол между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к поверхности; $B_n = B\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$;

б) в случае неоднородного поля

$$\Phi = \int_S B_n dS. \tag{3.64}$$

Задача 3.36. Соленоид длиной $l = 20$ см содержит $N = 1000$ витков. Радиус катушки соленоида $R = 10$ см. Определите магнитную индукцию B в точке, лежащей на оси соленоида на расстоянии $a = 5$ см от его конца. По обмотке соленоида идет ток $I = 5$ А.

Дано:
$l = 0,2$ м
$N = 1000$
$R = 0,1$ м
$a = 0,05$ м
$I = 5$ А

$B - ?$

Решение. Соленоид можно рассматривать как систему последовательно соединенных круговых токов одинакового радиуса, имеющих общую ось.

На рис. 63 показано сечение соленоида длиной l с током I. Кружки с точками представляют собой сечения витков радиуса R, в которых ток направлен из-за чертежа к нам, а кружки с крестиками – сечения витков, в которых ток направлен за чертеж; n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида ($n = \frac{N}{l}$).

По правилу буравчика магнитная индукция $\vec{B}$ в любой точке, лежащей на оси O_1O_2 соленоида, направлена вдоль оси и ее модуль равен алгебраической сумме индукций, создаваемых всеми витками в этой точке. Магнитная индукция в произвольной точке A соленоида определяется по формуле (3.56):

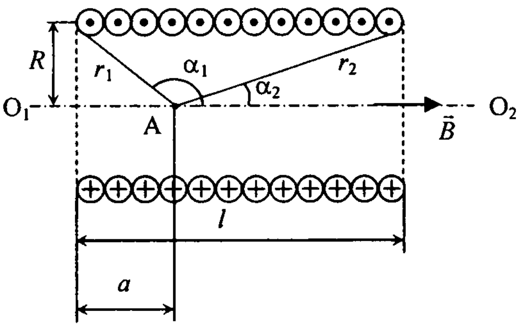

Рис. 63

$B = \frac{1}{2}\mu\mu_0 nI(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$, где $\alpha_2 < \alpha_1$, $\mu = 1$ (для вакуума),

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Из рис. 63 видно, что

$$\cos\alpha_1 = -\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{l - a}{\sqrt{R^2 + (l - a)^2}}.$$

Таким образом,

$$B=\frac{1}{2}\mu_0\frac{N}{l}I\left(\frac{l-a}{\sqrt{R^2+(l-a)^2}}+\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),$$

$$[B]=\frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{м}\cdot\text{м}}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{м}^2\cdot\text{А}}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{А}}=\frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}=\text{Тл},\ B=40{,}2\ \text{мТл}.$$

Примечание: Можно доказать, что при прочих равных условиях индукция В наибольшая в точке, лежащей на середине оси соленоида, причем

$$B_{max}=\frac{\mu\mu_0 nIl}{\sqrt{4R^2+l^2}}.$$

Ответ: $B=40{,}2$ мТл.

Задача 3.37. Найдите напряженность H магнитного поля внутри прямого длинного соленоида при силе тока $I=4$ А. Витки намотаны из проволоки радиусом $r=0{,}25$ мм. Толщиной изоляции пренебречь.

Дано:
$I=4$ А
$r=25\cdot10^{-5}$ м

$H-?$

Решение. По условию соленоид можно считать бесконечно длинным, тогда напряженность поля внутри соленоида определяем из формул (3.51) и (3.55): $H=In$. Предполагается, что витки плотно прилегают друг к другу, поэтому длина соленоида $l=N2r$. Итак, $H=I\frac{N}{l}=I\frac{N}{N2r}=\frac{I}{2r}$, $H=8\ \frac{\text{кА}}{\text{м}}$.

Ответ: $H=8\ \frac{\text{кА}}{\text{м}}$.

Задача 3.38. По двум длинным параллельным проводам текут токи $I_1=I_2=30$ А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами равно $d=5$ см. Найдите модуль и направление напряженности $\vec{H}$ магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1=4$ см от одного и $r_2=3$ см от другого провода.

Дано:
$I_1 = I_2 = 30$ А
$d = 0{,}05$ м
$r_1 = 0{,}04$ м
$r_2 = 0{,}03$ м

$H - ?$

Решение. Согласно принципу суперпозиции, напряженность магнитного поля в точке D (рис. 64):

$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$,

где $H_1 = \dfrac{I_1}{2\pi r_1}$, а $H_2 = \dfrac{I_2}{2\pi r_2}$ (проводники бесконечно длинные). Направления векторов H_1 и H_2 определяются по правилу буравчика. Треугольник ADC – прямоугольный (треугольник Пифагора). Угол $\angle ADC = \angle H_1DH_2 = 90^0$.

Поэтому напряженность в точке D

$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$.

Или $H = \sqrt{\left(\dfrac{I_1}{2\pi r_1}\right)^2 + \left(\dfrac{I_2}{2\pi r_2}\right)^2}$, $H = 200\ \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

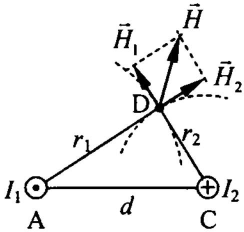

Рис. 64

Ответ: $H = 200\ \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

Задача 3.39. Два параллельных бесконечно длинных провода расположены на расстоянии $d = 4$ см друг от друга. Определите магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке, отстоящей от одного проводника на расстоянии $r_1 = 5$ см и от другого – на расстоянии $r_2 = 8$ см. Токи в проводах $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А текут в одном направлении.

Дано:
$d = 0{,}04$ м
$r_1 = 0{,}05$ м
$r_2 = 0{,}08$ м
$I_1 = 50$ А
$I_2 = 100$ А

$B - ?$

Решение. Для нахождения магнитной индукции в указанной точке А (рис. 65) определим направления векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых каждым проводником в отдельности, и сложим их геометрически, т. е. $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

Модуль индукции найдем по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Значения индукций B_1 и B_2 вычислим по формуле (3.52):

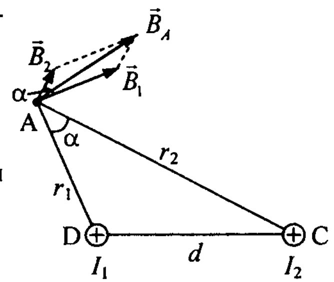

Рис. 65

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}.$$

Подставляя B_1 и B_2 в формулу (1) и вынося $\frac{\mu_0}{2\pi}$ за знак корня, получим:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2 + 2\frac{I_1 I_2}{r_1 r_2}\cos\alpha}, \qquad (2)$$

$$[B] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл}.$$

Из треугольника ADC по теореме косинусов запишем:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos\alpha.$$

Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$, $\cos\alpha = 0{,}912$.

Подставив в формулу (2) значения μ_0, I_1, I_2, r_1, r_2 и $\cos\alpha$, найдем B = 443 мкТл.

Ответ: B = 443 мкТл.

Задача 3.40. Стороны прямоугольника, изготовленного из тонкого провода, равны $a = 30$ см и $b = 40$ см. Магнитная индукция $\vec{B}_o$ в точке пересечения диагоналей равна 400 мкТл, если по проводнику пропустить ток I. Определите величину тока I.

Дано:
$a = 0{,}3$ м
$b = 0{,}4$ м
$B_0 = 4\cdot10^{-4}$ Тл

$I - ?$

Решение. Обозначим индукции $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ и $\vec{B}_4$ магнитных полей, создаваемых в точке О прямоугольника проводниками AB, BC, CD, DA соответственно (рис. 66). Они имеют одинаковое направление – перпендикулярно плоскости контура «от нас». Поэтому индукция результирующего магнитного поля в точке О равна:

$$B_o = B_1 + B_2 + B_3 + B_4. \qquad (1)$$

Стороны прямоугольника AB и CD обозначим a, а BC и DA – b. В силу симметрии $B_1 = B_3$ и $B_2 = B_4$. Таким образом,

$$B_o = 2B_1 + 2B_2. \qquad (2)$$

Величины B_1 и B_2 можно вычислить по формуле (3.54):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1}\left[\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right],$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_2}\left[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right].$$

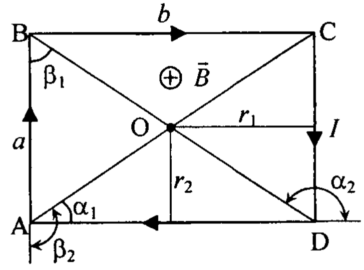

Рис. 66

Из рис. 66 можно также определить:

$$\cos\beta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos\beta_2 = \cos(180-\beta_1) = -\cos\beta_1;$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha_2 = \cos(180-\alpha_1) = -\cos\alpha_1;\ r_1 = \frac{b}{2},\ r_2 = \frac{a}{2}.$$

Следовательно, индукция магнитного поля в точке O пересечения диагоналей равна:

$$B_o = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{b}{2}}\left[2\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] + 2\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{a}{2}}\left[2\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right],\ B_o = \frac{8\mu_0 I}{4\pi ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Из последней формулы находим $I = \dfrac{B_o 4\pi ab}{8\mu_0\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$[I] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{Гн}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{А}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{А}}{\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{А},\ I = 120\ \text{А}.$$

Ответ: I = 120 А.

Задача 3.41. По тонкому проволочному контуру в виде треугольника течет ток. Не изменяя силы тока, контуру придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

Решение. Рассмотрим контур 1 в виде равностороннего треугольника (рис. 67) и выберем направление тока. По принципу суперпозиции $\vec{B}_0 = \vec{B}_{AC} + \vec{B}_{AD} + \vec{B}_{DC}$. Все эти вектора направлены перпендикулярно плоскости чертежа «от нас» и в силу симметрии равны по модулю. Следовательно, $B_{\Delta} = 3B_{AC}$. Согласно (3.54), $B_{AC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$,

$\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$; $\alpha_1 = 30°$.

Пусть длина проволочного контура l, тогда сторона треугольника $\frac{l}{3}$, а $r = \frac{l}{6\sqrt{3}}$.

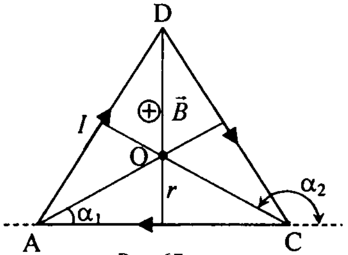

Рис. 67

Таким образом, магнитная индукция в центре витка:

$$B_{\Delta} = 3\frac{\mu_0 I 6\sqrt{3}}{4\pi l} 2\cos\alpha_1, \quad B_{\Delta} = \frac{54\mu_0 I}{4\pi l}.$$

Рассмотрим теперь контур 2 из того же проводника, но имеющий форму квадрата (рис. 68).

Выбрав направление тока, проведя аналогичные рассуждения, будем иметь:

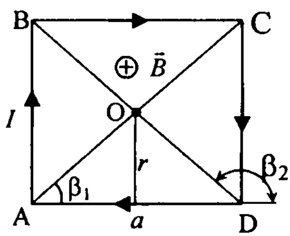

Рис. 68

$$\vec{B}_{\square} = \vec{B}_{AD} + \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD},$$

$$B_{\square} = 4B_{AD} = 4\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2),$$

$\cos\beta_1 = -\cos\beta_2$, $\beta_1 = 45°$.

Сторона квадрата (длина контура не изменилась) $a = l/4$, а $r = \frac{l}{8}$.

Окончательно имеем:

$$B_{\square} = 4\frac{8\mu_0 I}{4\pi l} 2\cos\beta_1, \quad B_{\square} = \frac{32\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}.$$

Вычислим, во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура $\frac{B_{\Delta}}{B_{\square}} = 1{,}19$.

Ответ: уменьшилась в 1,19 раза.

Задача 3.42. Длинный прямой провод с током $I = 50$ А изогнут под углом $\alpha = 150°$. Определите магнитную индукцию $\vec{B}$ в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от его вершины на расстояние $a = 5$ см.

Дано:
$I = 50$ А
$\alpha = 150°$
$OA = a = 0{,}05$ м

$B_A - ?$
$B_C - ?$

Решение. Изогнутый провод можно рассматривать как два длинных провода, концы которых сходятся в точке О (рис. 69). В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей, магнитная индукция $\vec{B}$ в точке А будет равна геометрической сумме $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых проводниками 1 и 2, т. е.

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

В силу симметрии $|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2|$, а векторы направлены перпендикулярно плоскости чертежа «от нас».

Следовательно, в точке А результирующая индукция

$$B_A = 2B_1.$$

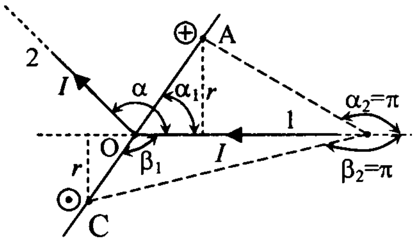

Рис. 69

Магнитную индукцию B_1 можно вычислить по формуле (3.54):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right),$$

где $\alpha_1 = 75°$, $\alpha_2 = \pi$ для бесконечно длинного провода и $r = a\sin\alpha_1$. Следовательно,

$$B_A = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi a \sin\alpha_1}\left(\cos\alpha_1 + 1\right), \quad B_A = 261 \text{ мкТл}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести относительно точки С:

$$\vec{B}_C = \vec{B}_1' + \vec{B}_2', \quad B_C = 2B_1'.$$

Но направление вектора $\vec{B}_C$, определяемое по правилу буравчика, противоположно $\vec{B}_A$.

По формуле (3.54)

$$B_1' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right),$$

где $\beta_1 = \pi - \alpha_1 = 105^0$, $\beta_2 = \pi$.

Таким образом,

$$B_C = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi a \sin\alpha_1}\left(-\cos\alpha_1 + 1\right), \quad B_C = 153 \text{ мкТл},$$

$$[B] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл}.$$

Ответ: $B_A = 261$ мкТл, $B_C = 153$ мкТл.

Задача 3.43. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл влетает протон под углом 30° к направлению поля. Кинетическая энергия протона W = 433 эВ. Определите радиус R винтовой линии, по которой будет двигаться протон.

Дано:
$B = 0{,}1$ Тл
$\alpha = 30^0$
$W = 693\cdot 10^{-19}$ Дж
$m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг
$q_p = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл

R – ?

Решение. Движение протона в однородном магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к вектору магнитной индукции $\vec{B}$, происходит по винтовой линии (спирали). Разложим скорость протона на две составляющие: параллельную линиям индукции и перпендикулярную им (рис. 70):

$$v_1 = v\cos\alpha, \tag{1}$$

$$v_2 = v\sin\alpha. \tag{2}$$

Благодаря наличию перпендикулярной составляющей скорости v_2 на протон действует сила Лоренца, заставляя его двигаться по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Радиус окружности определяется условием:

$$\frac{mv_2^2}{R} = qv_2B,$$

т. к. сила Лоренца сообщает протону центростремительное ускорение.

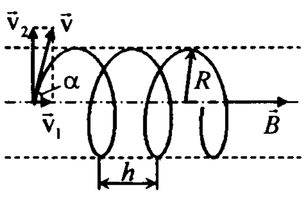

Рис. 70

Отсюда

$$R = \frac{mv_2}{qB} = \frac{mv\sin\alpha}{qB}. \tag{3}$$

Вдоль направления вектора $\vec{B}$ сила не действует, поэтому частица движется равномерно со скоростью v_1.

В результате сложения двух движений протон движется по спирали радиусом R и шагом винта h:

$$h = v_1 T, \tag{4}$$

где T – период обращения протона по окружности:

$$T = \frac{2\pi R}{v_2}. \tag{5}$$

Учитывая соотношения (1)–(3) и (5), из уравнения (4) получаем:

$$h = \frac{2\pi v m \cos\alpha}{qB}.$$

Скорость протона входит в кинетическую энергию:

$$W = \frac{mv^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2W}{m}},$$

$$[v] = \sqrt{\frac{Дж}{кг}} = \sqrt{\frac{Н \cdot м}{кг}} = \sqrt{\frac{кг \cdot м \cdot м}{c^2 \cdot кг}} = \frac{м}{с}, \quad v = 2{,}9 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Протон, обладающий такой скоростью, не является релятивистским, т. к. $v \ll c$.

Таким образом,

$$R = \frac{\sqrt{2mW}\sin\alpha}{qB}, \quad h = \frac{2\pi\sqrt{2mW}\cos\alpha}{qB}, \quad R = 1{,}5 \text{ см}, \quad h = 16{,}3 \text{ см},$$

$$[R] = \frac{\sqrt{Дж \cdot кг}}{Кл \cdot Тл} = \frac{\sqrt{Н \cdot м \cdot кг} \cdot А \cdot м}{А \cdot с \cdot Н} = \frac{\sqrt{\dfrac{кг \cdot м \cdot кг \cdot м}{с^2}} \cdot м}{Н \cdot с} = \frac{кг \cdot м \cdot м}{с \cdot Н \cdot с} = м.$$

Ответ: $R = 1{,}5$ см; $h = 16{,}3$ см.

Задача 3.44. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0{,}1$ Тл возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислите скорость частицы.

Дано:
$B = 0{,}1$ Тл
$E = 10^5$ В/м

$v - ?$

Решение. Чтобы движение заряженной частицы было равномерным и прямолинейным, должно выполняться условие (рис. 71):

$$F_л = F_к, \quad (1)$$

где $F_л$ – сила Лоренца, $F_к$ – кулоновская сила,

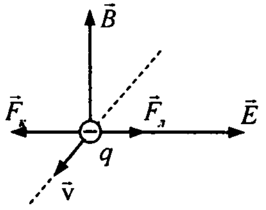

Рис. 71

$$F_л = qvB\sin\alpha, \qquad (\sin\alpha = 1), \; F_к = qE.$$

Подставим выражения для этих сил в уравнение (1):

$$qvB = qE.$$

Откуда

$$v = \frac{E}{B}, \; [v] = \frac{В\cdot А\cdot м}{м\cdot Н} = \frac{В\cdot А}{Н}\cdot\frac{с}{с} = \frac{Дж}{Н\cdot с} = \frac{Н\cdot м}{Н\cdot с} = \frac{м}{с}, \; v = 10^6 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 10^6$ м/с.

Задача 3.45. Протон влетает в электромагнитное поле со скоростью $v = 100$ км/с. Магнитное поле с напряженностью $H = 2{,}6$ кА/м и электрическое поле напряженностью $E = 210$ В/м направлены одинаково. Найдите нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное a ускорения протона.

Задачу решить, если скорость протона направлена:

а) параллельно направлению электрического поля;

б) перпендикулярно к направлению электрического поля.

Дано:
$v = 10^5$ м/с
$H = 2{,}6\cdot 10^3$ А/м
$E = 210$ В/м
$m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг
$q = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл

$a_n - ?$
$a_\tau - ?$
$a - ?$

Решение. *а*) При совпадающих по направлению полях $\vec{H}$ и $\vec{E}$ (рис. 72,а), когда скорость протона совпадает с общим направлением полей, на него действует только кулоновская сила (сила Лоренца равна нулю):

$$F_к = qE.$$

По второму закону Ньютона эта сила равна ma_τ:

$$ma_\tau = qE, \; a_\tau = \frac{qE}{m},$$

$$a_\tau = a = 20{,}1 \text{ Гм/с}^2.$$

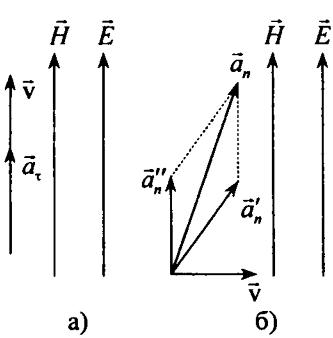

Рис. 72

б) Если направление вектора скорости протона перпендикулярно направлению векторов $\vec{H}$ и $\vec{E}$ (рис. 72,б), то к кулоновской силе добавляется сила Лоренца:

$$F_{\text{л}} = qB\text{v}\sin\alpha, \quad (\sin\alpha = 1).$$

Сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости протона и создает нормальное ускорение:

$$ma'_n = qB\text{v}, \; a'_n = \frac{qB\text{v}}{m}.$$

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, считая $\mu = 1$, получим:

$$a'_n = \frac{q\mu_0 H\text{v}}{m},$$

$$[a'_n] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{с}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}^2\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} =$$

$$= \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Электрическое поле действует перпендикулярно движению протона, поэтому $a_\tau = 0$, а нормальное ускорение $a''_n = \dfrac{qE}{m}$. Векторы $\vec{a}'_n$ и $\vec{a}''_n$ взаимно перпендикулярны, поэтому нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{(\vec{a}'_n)^2 + (\vec{a}''_n)^2} = \sqrt{\left(\frac{q\mu_0 H\text{v}}{m}\right)^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2},$$

$$[a''_n] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad a_n = 37{,}5 \text{ Гм/с}^2.$$

Ответ: а) $a_\tau = a = 20{,}1$ Гм/с^2; б) $a_n = a = 37{,}5$ Гм/с^2.

Задача 3.46. В однородное магнитное поле напряженностью $H = 200$ кА/м влетает заряженная частица со скоростью v $= 10^6$ м/с перпендикулярно магнитному полю. В результате частица движется по окружности радиусом $R = 8{,}3$ см. Найдите удельный заряд частицы.

Дано:
$H = 2\cdot 10^5$ А/м
$\mathrm{v} = 10^6$ м/с
$R = 0{,}083$ м

$q/m - ?$

Решение. На заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца $F_л = qB\mathrm{v}$, которая сообщает ей центростремительное ускорение, заставляя частицу двигаться по окружности, т. е.

$$F_ц = F_л, \frac{m\mathrm{v}^2}{R} = qB\mathrm{v}.$$

Отсюда

$$\frac{q}{m} = \frac{\mathrm{v}}{RB} = \frac{\mathrm{v}}{\mu_0 RH},$$

$$\left[\frac{q}{m}\right] = \frac{м\cdot м\cdot м}{с\cdot Гн\cdot м\cdot А} = \frac{м^2\cdot А}{с\cdot В\cdot с\cdot А} = \frac{м^2\cdot Кл}{Дж\cdot с^2} = \frac{Кл\cdot м^2}{Н\cdot м\cdot с^2} = \frac{Кл\cdot с^2\cdot м}{кг\cdot м\cdot с^2} = \frac{Кл}{кг},$$

$$\frac{q}{m} = 4{,}8\cdot 10^7\ \frac{Кл}{кг}.$$

Например, для α-частицы

$$\frac{q}{m} = \frac{2q_p}{4m_p},$$

где $q_p = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл – заряд протона; $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг – масса протона.

$$\left(\frac{q}{m}\right)_\alpha = 4{,}8\cdot 10^7 \left(\frac{Кл}{кг}\right).$$

Ответ: в магнитном поле движется α-частица.

Задача 3.47. Протон и α-частица влетают в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению их движения. Найти отношение периода обращения T_1 протона в магнитном поле к периоду обращения T_2 α-частицы.

Дано:
$m_1 = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг
$m_2 = 6{,}64\cdot 10^{-27}$ кг
$q_1 = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл
$q_2 = 3{,}2\cdot 10^{-19}$ Кл

$T_1/T_2 - ?$

Решение. Период обращения заряженной частицы

$$T = \frac{2\pi R}{\mathrm{v}}. \qquad (1)$$

Скорость частицы v найдем из условия, что на частицу при ее движении в магнитном поле действует сила Лоренца $F_л = qB\text{v}\sin\alpha$ ($\sin\alpha = 1$ по условию), которая сообщает частице центростремительное ускорение, т. е.

$$F_л = ma_ц,$$

тогда

$$qB\text{v} = \frac{m\text{v}^2}{R}. \tag{2}$$

Из уравнения (2) найдем скорость частицы и подставим ее в формулу (1):

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \tag{3}$$

Учитывая, что заряженные частицы влетают в одно и то же магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, используя выражение (3), найдем отношение их периодов обращения:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1 q_2}{q_1 m_2}, \tag{4}$$

где m_1, q_1 – масса и заряд протона; m_2, q_2 – масса и заряд α-частицы. Из уравнения (4) найдем отношение их периодов:

$$\frac{T_1}{T_2} = 0,5.$$

Ответ: $T_1/T_2 = 0,5$.

Задача 3.48. В магнитном поле с индукцией $B = 0,6$ Тл по круговой орбите радиусом $R = 4$ см движется заряженная частица. Скорость движения частицы $\text{v} = 10^6$ м/с. Найдите заряд q частицы, если известно, что ее энергия $W = 24$ кэВ.

Дано:
$B = 0,6$ Тл
$R = 0,04$ м
$\text{v} = 10^6$ м/с
$W = 38,4 \cdot 10^{-16}$ Дж

q – ?

Решение. Частица не является релятивистской, так как $\text{v} \ll c$. Кинетическая энергия частицы

$$W = \frac{m\text{v}^2}{2}, \tag{1}$$

где v – скорость частицы, которую найдем из равенства:

$$F_л = ma_ц.$$

Здесь $F_л$ – сила Лоренца, $a_ц$ – центростремительное ускорение.

$$qBv = \frac{mv^2}{R}, \quad v = \frac{qBR}{m}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим:

$$W = \frac{q^2B^2R^2}{2m}. \tag{3}$$

Из уравнения (3) найдем заряд частицы:

$$q = \sqrt{\frac{2mW}{B^2R^2}}. \tag{4}$$

Массу частицы m выразим из формулы (1):

$$m = \frac{2W}{v^2}. \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в (4), получим:

$$q = \sqrt{\frac{2W \cdot 2W}{v^2B^2R^2}} = \frac{2W}{vBR},$$

$$[q] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \text{А} \cdot \text{с} = \text{Кл}, \quad q = 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Ответ: $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Задача 3.49. В однородное магнитное поле влетают протон и α-частица, ускоренные одинаковой разностью потенциалов. Во сколько раз радиус кривизны R_1 траектории протона отличается от радиуса кривизны R_2 траектории α-частицы? Магнитное поле перпендикулярно скоростям частиц.

Дано:
$m_p = m_1$, $q_p = q_1$
$m_\alpha = 4m_p = m_2$
$q_\alpha = 2q_p = q_2$

R_1 / R_2 – ?

Решение. На заряженные частицы, влетающие в магнитное поле перпендикулярно вектору магнитной индукции, действует сила Лоренца:

$$F_л = qBv, \tag{1}$$

которая сообщает им центростремительное ускорение.

Поэтому

$$qB\text{v} = \frac{m\text{v}^2}{R}. \qquad (2)$$

Из (2) находим радиус траектории

$$R = \frac{m\text{v}}{qB}. \qquad (3)$$

По закону сохранения энергии работа электрического поля qU, ускоряющая частицу, равна кинетической энергии частицы:

$$\frac{m\text{v}^2}{2} = qU, \qquad (4)$$

где U – ускоряющая разность потенциалов.

Из уравнения (4) определяется скорость частицы:

$$\text{v} = \sqrt{\frac{2qU}{m}}. \qquad (5)$$

Подставив выражение (5) в (3), найдем радиус кривизны траектории частицы:

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}. \qquad (6)$$

По формуле (6) запишем радиусы R_1 и R_2 для протона и α-частицы:

$$R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{q_1}}, \quad R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{q_2}}.$$

Найдем отношение радиусов:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1q_2}{q_1m_2}}, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7.$$

Ответ: $\frac{R_1}{R_2} = 0,7.$

3.4 Электромагнитная индукция

Основные формулы

• Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$A = I\,\Delta\Phi\,, \tag{3.65}$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром; I – сила тока в контуре.

• Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея)

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{3.66}$$

где $\mathscr{E}_i$ – мгновенное значение ЭДС индукции; $\dfrac{d\Phi}{dt}$ – скорость изменения магнитного потока.

• Разность потенциалов U на концах проводника длиной l, движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле:

$$U = Bl\mathrm{v}\sin\alpha\,, \tag{3.67}$$

где α – угол между направлениями векторов скорости $\vec{\mathrm{v}}$ и магнитной индукции $\vec{B}$.

• Электродвижущая сила индукции $\mathscr{E}_i$, возникающая в рамке, содержащей N витков, площадью S, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B:

$$\mathscr{E}_i = BNS\omega\sin\omega t, \tag{3.68}$$

где $\omega t = \alpha$ – мгновенное значение угла между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки.

• Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L:

$$\Phi = L\,I\,. \tag{3.69}$$

• ЭДС самоиндукции

$$\mathscr{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}, \tag{3.70}$$

где L – индуктивность контура, $\dfrac{dI}{dt}$ – скорость изменения силы тока.

• Индуктивность длинного соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S\,, \tag{3.71}$$

где l – длина соленоида, S – площадь его поперечного сечения, $n = N/l$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

• Мгновенное значение силы тока I в цепи, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L:

а) после замыкания цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right), \tag{3.72}$$

где $\mathcal{E}$ – ЭДС источника, r – внутреннее сопротивление источника, t – время, прошедшее после замыкания цепи;

б) после размыкания цепи

$$I = I_0 e^{-(R/L)t}\,, \tag{3.73}$$

где I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$; t – время, прошедшее после размыкания цепи.

• Энергия магнитного поля, созданного контуром с током:

$$W = \frac{LI^2}{2}\,. \tag{3.74}$$

• Объемная плотность энергии:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}\,. \tag{3.75}$$

Задача 3.50. Стержень длиной 1 м вращается в однородном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω = 30 рад/с. Ось вращения стержня параллельна магнитным силовым линиям поля и проходит через его конец. Определите ЭДС индукции, возникшую на концах стержня, если индукция магнитного поля $B = 2\cdot10^{-2}$ Тл.

Дано:
l=1 м
ω=30 рад/с
$B = 2\cdot10^{-2}$ Тл

$\mathcal{E}$ – ?

Решение. При вращении стержня в любом его бесконечно малом участке dx (рис. 73), взятом на расстоянии x от оси вращения O, возникает согласно (3.67) элементарная ЭДС индукции:

$$d\mathcal{E} = -B\mathrm{v}\,dx,$$

где v – линейная скорость участка dx.

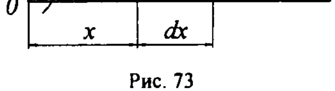

Рис. 73

Поскольку v = ωx, то
$d\mathscr{E} = -B\, \omega\, x\, dx$.

Интегрируя полученное выражение по длине стержня (от 0 до l), найдем ЭДС индукции:

$$\mathscr{E} = -\int_0^l B\omega x dx = -B\omega \frac{x^2}{2}\bigg|_0^l = -\frac{1}{2}B\omega l^2 = -0{,}3 \text{ В}.$$

Знак минус определяет направление ЭДС индукции.
Ответ: $\mathscr{E} = -0{,}3$ В.

Задача 3.51. В однородном горизонтальном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0{,}5$ Тл по вертикально расположенным рельсам, замкнутым через последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 5$ Ом и источник с ЭДС $\mathscr{E} = 12$ В (рис. 74), свободно скользит без нарушения контакта проводник длиной $l = 1$ м и массой $m = 100$ г. Найдите величину скорости v и направление установившегося движения проводника. Сопротивлением рельсов, проводника и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Дано:
$B = 0{,}5$ Тл
$R = 5$ Ом
$\mathscr{E} = 12$ В
$l = 1$ м
$m = 0{,}1$ кг
v - ?

Решение. Сила тока в контуре $abcd$ $I = \mathscr{E} / R$.

Поскольку проводник ad расположен в магнитном поле, то при прохождении тока на него будет действовать сила Ампера (3.58):

$$F_A = IBl = \mathscr{E}Bl/R, \quad F_A = 1{,}2 \text{ Н}, \tag{1}$$

направленная вверх (по правилу левой руки). На проводник также действует сила тяжести $mg = 0{,}1 \text{ кг} \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2 = 0{,}98$ Н, направленная вниз. Под действием результирующей этих двух сил проводник ad начинает двигаться вверх с ускорением. При этом на концах проводника возникает разность потенциалов, которая согласно формуле (3.67) равна

$U = B\text{v}l$.

В проводнике ab возникает индукционный ток:

$$I_i = \frac{U}{R} = \frac{B\text{v}l}{R}, \tag{2}$$

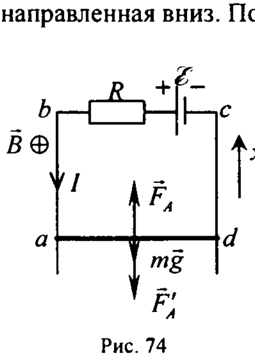

Рис. 74

а значит, появится новая сила Ампера:

$$F'_A = I_i Bl = B^2 l^2 \text{v} / R, \qquad (3)$$

направленная (по правилу Ленца) против движения проводника, т. е. вниз.

По второму закону Ньютона запишем:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}'_A = m\vec{a}. \qquad (4)$$

При установившемся движении $\vec{\text{v}} = \text{const}$, а ускорение $\vec{a} = 0$. В проекции на направление движения (ось x) уравнение (4) примет вид:

$$F_A - mg - F'_A = 0. \qquad (5)$$

Подставляя в уравнение (5) выражения (1) и (3), получим:

$$\frac{\mathcal{E} lB}{R} - mg = \frac{l^2 B^2 \text{v}}{R},$$

$$\mathcal{E} lB - mgR = l^2 B^2 \text{v}.$$

Откуда

$$\text{v} = \frac{\mathcal{E} lB - mgR}{l^2 B^2},$$

$$[\text{v}] = \frac{\text{В} \cdot \text{м} \cdot \text{Тл} - \text{Н} \cdot \text{Ом}}{\text{м}^2 \cdot \text{Тл}^2} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{Ом}}{\text{Н}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{Ом}}{\text{Н}} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{В}}{\text{А} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{Н}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} =$$

$$= \frac{\text{Дж}}{\text{Н} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \text{v} = 4{,}4 \text{ м/с}.$$

Ответ: v = 4,4 м/с.

Задача 3.52. В магнитном поле Земли находится виток проволоки радиусом $r = 20$ см и сопротивлением 2 Ом. Если виток повернуть с одной стороны на другую, то по проволоке протечет заряд q. Какое количество электричества q протечет по витку, если виток первоначально расположен горизонтально, а вертикальная составляющая индукции $\vec{B}$ магнитного поля Земли равна 50 мкТл?

Дано:
$r = 0{,}2$ м
$R = 2$ Ом
$B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл

$q - ?$

Решение. Первоначальное положение витка в поле Земли горизонтальное (рис. 75).

В этом случае магнитный поток, пронизывающий виток,

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha_1,$$

где α_1 – угол между нормалью к плоскости витка и направлением индукции магнитного поля Земли, $\alpha_1 = 0°$, $\cos\alpha_1 = 1$, $\Phi_1 = BS$.

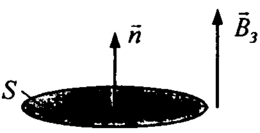

Рис. 75

По условию задачи при повороте витка по проволоке потечет ток. Сила тока: $I = dq/dt$, откуда

$$dq = I\,dt. \qquad (1)$$

С другой стороны сила тока:

$$I = \mathscr{E}_i / R, \qquad (2)$$

где $\mathscr{E}_i$ – ЭДС, индуцируемая в витке. Тогда из выражений (1) и (2) получим:

$$dq = \frac{\mathscr{E}_i}{R}dt. \qquad (3)$$

ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$ связана со скоростью изменения магнитного потока Ф по закону Фарадея:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4)$$

Из уравнений (3), (4) запишем:

$$dq = -\frac{d\Phi}{R}. \qquad (5)$$

Интегрируем выражение (5) с пределами интегрирования от Φ_1 до Φ_2:

$$q = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} -\frac{d\Phi}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{2BS}{R},$$

где $S = \pi r^2$ – площадь витка.

Окончательно $q = 2\pi B r^2 / R$, $[q] = \dfrac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}} = \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{В}} = \dfrac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{Кл}$,

$q = 6{,}28$ мкКл.

Ответ: $q = 6{,}28$ мкКл.

Задача 3.53. Проволочное кольцо радиусом $r = 8$ см и сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом находится в однородном магнитном поле. Плоскость кольца составляет угол $\alpha = 30°$ с линиями индукции поля. Если магнитное поле выключить, то по кольцу протечет количество электричества $q = 10$ мКл. Какова была индукция B магнитного поля?

Дано:
$r = 0{,}08$ м
$R = 0{,}1$ Ом
$\alpha = 30^\circ$
$q = 10^{-2}$ Кл

$B - ?$

Решение. Рассмотрим положение проволочного кольца в магнитном поле (рис. 76).

При выключении магнитного поля меняется магнитный поток, пронизывающий кольцо, и, следовательно, возникает ЭДС индукции:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

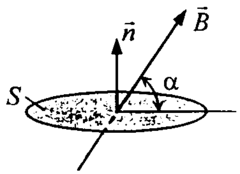

Рис. 76

До выключения магнитного поля проволочное кольцо пронизывал магнитный поток:

$$\Phi_1 = BS\cos\beta,$$

где β – угол между нормалью к плоскости кольца и вектором индукции $\vec{B}$ ($\beta = \pi/2 - \alpha = 60^o$). Если магнитное поле выключено, то $B = 0$ и $\Phi_2 = 0$.

При выключении магнитного поля по кольцу потечет ток. Сила тока $I = dq/dt$, откуда заряд

$$dq = I\,dt. \qquad (2)$$

С другой стороны, по закону Ома сила тока $I = \mathscr{E}_i / R$, тогда

$$dq = \frac{\mathscr{E}_i}{R}dt. \qquad (3)$$

Из выражений (1)–(3) получим:

$$dq = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{R} = -\frac{d\Phi}{R}.$$

Тогда

$$q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{0} d\Phi = \frac{\Phi_1}{R} = \frac{BS}{R}\cos\beta. \qquad (4)$$

Площадь кольца $S = \pi r^2$. Из уравнения (4) найдем искомую величину B магнитного поля:

$$B = \frac{qR}{\pi r^2\cos\beta},\ [B] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Ом}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл},\ B = 0{,}1\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 0{,}1$ Тл.

Задача 3.54. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл с частотой $n = 10\ \frac{\text{об}}{\text{с}}$ вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков провода. Ось рамки перпендикулярна к направлению магнитного поля. Максимальная ЭДС индукции, возникающая в рамке, равна $\mathscr{E}_{max} = 94{,}2$ В. Найдите площадь рамки S.

Дано:
$B = 0{,}1$ Тл
$n = 10\ \frac{\text{об}}{\text{с}}$
$N = 1000$
$\mathscr{E}_{max} = 94{,}2$ В

$S - ?$

Решение. Запишем закон электромагнитной индукции (3.66):

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}N, \tag{1}$$

где $\Phi = BS\cos\omega t$ – магнитный поток, пронизывающий плоскость витка рамки; ω – угловая скорость вращения рамки. Тогда

$$\frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega\sin\omega t. \tag{2}$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi n$, из уравнений (1) и (2) получим:

$\mathscr{E}_i = BS2\pi n N\sin\omega t$.

ЭДС индукции максимальна, когда $\sin\omega t = 1$. Следовательно, $\mathscr{E}_{max} = BS2\pi nN$. Откуда площадь рамки:

$$S = \frac{\mathscr{E}_{max}}{2\pi nNB},$$

$$[S] = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{Тл}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}} = \text{м}^2,\ S = 15\cdot10^{-3}\ \text{м}^2.$$

Ответ: $S = 15\cdot10^{-3}$ м^2.

Задача 3.55. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}8$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной $l = 20$ см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. При какой частоте вращения n разность потенциалов на концах его равна $U = 1{,}6$ В?

Дано:
$B = 0,8$ Тл
$l = 0,2$ м
$U = 1,6$ В

$n - ?$

Решение. Под действием магнитной составляющей силы Лоренца

$$\vec{F}_л = e[\vec{v}\,\vec{B}], \qquad (1)$$

в стержне при его вращении происходит перераспределение электронов. Здесь e – заряд электрона, $\vec{v}$ – скорость его движения, $\vec{B}$ – индукция магнитного поля. На концах стержня образуются заряды разных знаков, которые создают электрическое поле напряженностью

$$E = -\frac{\vec{F}_л}{e} \qquad (2)$$

и разностью потенциалов между двумя произвольными точками стержня

$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}\,. \qquad (3)$$

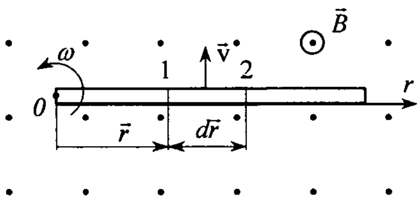

Рис. 77

Знак минус в выражении (2) ставится потому, что сила Лоренца $\vec{F}_л$ является сторонней силой, $d\vec{r}$ – приращение радиуса-вектора $\vec{r}$ на участке стержня между точками 1 и 2. Пусть $\vec{r}$ направлен от оси вращения вдоль стержня (рис. 77). Вектор силы Лоренца при любом положении вращающегося стержня направлен вдоль стержня к оси вращения (к точке О). Вектор линейной скорости $\vec{v}$ перпендикулярен вектору $\vec{B}$, и модуль векторного произведения

$$\left|\left[\vec{v}\,\vec{B}\right]\right| = vB\,. \qquad (4)$$

Линейная скорость

$$v = \omega r\,, \qquad (5)$$

где

$$\omega = 2\pi n \qquad (6)$$

– угловая скорость вращения стержня.

Тогда выражение (3) для разности потенциалов с учетом (1), (2), (4)–(6) примет вид:

$$U=-\omega B\int_0^l r\,dr=-\frac{1}{2}B\omega l^2=-B\pi n l^2. \qquad (7)$$

Знак минус в выражении (7) означает, что при указанном на рис. 77 направлении вращения электроны будут скапливаться около оси вращения (точки О).

Из уравнения (7) определяется частота вращения:

$$n=\frac{U}{\pi B l^2},\ [n]=\frac{\text{В}}{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}\cdot\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\cdot\frac{1}{\text{м}^2}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Кл}}{\text{Кл}\cdot\text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2}=\frac{1}{\text{с}},\ n=16\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $n=16\ \text{с}^{-1}$.

Задача 3.56. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,8 Тл равномерно вращается рамка площадью S = 50 см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Среднее значение ЭДС индукции за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменился от нуля до максимального значения, равно $\langle\mathscr{E}\rangle$ = 0,16 В. С какой частотой n вращалась рамка?

Дано:
$B=0{,}8$ Тл
$S=5\cdot10^{-3}$ м²
$\langle\mathscr{E}\rangle=0{,}16$ В

$n-?$

Решение. При вращении рамки в магнитном поле в ней наводится ЭДС индукции, так как изменяется со временем магнитный поток, пронизывающий рамку. Если линии магнитной индукции скользят по рамке, то магнитный поток Φ_{min} = 0, если линии вектора $\vec{B}$ перпендикулярны плоскости рамки, то поток $\Phi_{max}=BS$. Согласно закону Фарадея (3.66), среднее значение ЭДС индукции

$$\langle\mathscr{E}_i\rangle=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-\frac{\Phi_{max}-\Phi_{min}}{\Delta t}.$$

Такое изменение магнитного потока, пронизывающего рамку, происходит 4 раза за один оборот рамки, т. е. $\Delta t=T/4$, где $T=1/n$ – период вращения рамки. Таким образом, $\Delta t=1/(4n)$, а $\langle\mathscr{E}\rangle=4n\Phi_{max}=4BSn$.

Отсюда находим частоту вращения рамки $n=\dfrac{\langle\mathscr{E}_i\rangle}{4BS}$,

$$[n]=\frac{\text{В}}{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}\cdot\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\cdot\frac{1}{\text{м}^2}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Кл}}{\text{Кл}\cdot\text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^2}=\frac{1}{\text{с}},\ n=10\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $n=10\ \text{с}^{-1}$.

Задача 3.57. Катушка сопротивлением $R_1 = 5$ Ом имеет $N = 30$ витков площадью $S = 2$ см^2 и помещена между полюсами электромагнита в поле с индукцией $B = 0,75$ Тл. Ось катушки параллельна линиям индукции и соединена с баллистическим гальванометром сопротивлением $R_2 = 45$ Ом. Если ток в обмотке электромагнита выключить, то какое количество электричества q протечет по цепи?

Дано:
$R_1 = 5$ Ом
$N = 30$
$S = 2\cdot10^{-4}$ м^2
$B_1 = 0,75$ Тл
$R_2 = 45$ Ом

q – ?

Решение. При выключении тока в обмотке электромагнита изменяется магнитный поток, пронизывающий витки катушки от $\Phi_1 = NBS$ до $\Phi_2 = 0$. Согласно закону Фарадея для электромагнитной индукции, в катушке наводится ЭДС индукции:

$$\mathscr{E}_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Поскольку витки соединены с баллистическим гальванометром, то по цепи потечет ток $I = dq/dt$, откуда

$$dq = Idt. \qquad (2)$$

По закону Ома сила тока

$$I = \frac{\mathscr{E}_i}{R_1 + R_2}. \qquad (3)$$

Из выражений (1)–(3) получим:

$$dq = -N\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{R_1 + R_2}, \quad \text{а} \quad q = -\frac{N}{R_1 + R_2}\int_{\Phi_1}^{0} d\Phi = \frac{N\Phi_1}{R_1 + R_2} = \frac{NBS}{R_1 + R_2},$$

$$[q] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{Ом}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В}} = \text{Кл}, \quad q = 90 \text{ мкКл}.$$

Ответ: $q = 90$ мкКл.

Задача 3.58. Квадрат из медной проволоки помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл так, что плоскость его перпендикулярна линиям магнитной индукции поля. Если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию, то по проволоке потечет количество электричества $q = 84$ мКл. Какова масса m проволоки?

Дано:

$B = 0{,}2$ Тл

$q = 84 \cdot 10^{-3}$ Кл

$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м

$D = 8{,}6 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

$m - ?$

Решение. При вытягивании квадрата в линию изменяется площадь фигуры и меняется магнитный поток, пронизывающий ее, от $\Phi_1 = BS$ до $\Phi_2 = 0$. По закону Фарадея для электромагнитной индукции в проволоке наводится ЭДС индукции:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

и по ней потечет индукционный ток $I = dq/dt$, откуда

$$dq = Idt. \qquad (2)$$

По закону Ома сила тока

$$I = \frac{\mathscr{E}_i}{R}. \qquad (3)$$

Из выражений (1)–(3) получим:

$$dq = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{R}, \text{ а } q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{BS}{R}, \qquad (4)$$

где $S = l^2$ – площадь квадрата, l – сторона рамки; $R = \rho 4l/S_1$ – сопротивление проволоки, ρ – удельное сопротивление; $S_1 = m/(D4l)$ – площадь сечения провода, D – плотность меди.

Подставив S_1 в формулу для сопротивления, получим:

$$R = 16\rho l^2 D/m. \qquad (5)$$

Из выражений (4) и (5) находится масса проволоки $m = 16\rho Dq/B$,

$$[m] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{Тл}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{В}}{\text{А}}\frac{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}}\cdot\frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{Н}} = \text{кг},$$

$$m = 0{,}98 \text{ г}.$$

Ответ: $m = 0{,}98$ г.

Задача 3.59. Магнитный поток, пронизывающий соленоид, $\Phi = 80$ мкВб, когда сила тока I, протекающего по обмотке, равна 6 А. Индуктивность соленоида $L = 8$ мГн. Сколько витков N содержит соленоид?

Дано:
$\Phi = 80 \cdot 10^{-6}$ Вб
$I = 6$ А
$L = 8 \cdot 10^{-3}$ Гн

$N - ?$

Решение. Между магнитным потоком и силой тока существует связь $\psi = LI$, где $\psi = N\Phi$ – потокосцепление.

$$N\Phi = LI, \quad N = \frac{LI}{\Phi},$$

$$[N] = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{Вб}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{Тл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1,$$

$N = 600$.

Ответ: $N = 600$.

Задача 3.60. На картонный цилиндр диаметром $D = 4$ см намотано $N = 1000$ витков проволоки в один слой. Витки плотно прижаты друг к другу. Индуктивность полученного соленоида $L = 4$ мГн. Каков диаметр d проволоки, из которой сделан соленоид?

Дано:
$D = 0{,}04$ м
$N = 1000$
$L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн

$d - ?$

Решение. Индуктивность однослойного воздушного соленоида, согласно (3.71),

$$L = \mu\mu_0 n^2 lS,$$

где $\mu = 1$ – магнитная проницаемость воздуха; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная; $n = \frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины соленоида; S – площадь сечения катушки соленоида.

Так как витки плотно прилегают друг к другу, то длина l соленоида равна $l = dN$, где d – диаметр проволоки. Площадь сечения S катушки равна $S = \frac{\pi D^2}{4}$. Тогда $L = \mu_0 \frac{N}{d} \cdot \frac{\pi D^2}{4}$.

Отсюда находим диаметр проволоки:

$$d = \frac{\mu_0 N \pi D^2}{4L},\ [d] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{Гн}} = \text{м},\ d = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Ответ: $d = 4 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 3.61. Индуктивность соленоида $L = 220$ мкГн. Обмотка соленоида состоит из N витков медной проволоки, поперечное сечение которой $S_0 = 1\ \text{мм}^2$. Сопротивление обмотки $R = 0{,}4$ Ом. Чему равна длина l соленоида?

Дано:
$L = 220 \cdot 10^{-6}$ Гн
$S_0 = 10^{-6}\ \text{м}^2$
$R = 0{,}4$ Ом
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м

$l - ?$

Решение. Согласно (3.71), индуктивность соленоида $L = \mu_0 n^2 l S$, где $n = \frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины соленоида. Тогда $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$.

Для нахождения площади сечения S соленоида используем сопротивление R обмотки: $R = \rho \frac{l_0}{S_0}$, где l_0 – длина обмотки.

Если диаметр обмотки соленоида D, то $l_0 = N \pi D$.

И тогда $R = \rho \frac{N \pi D}{S_0}$, где ρ – удельное сопротивление меди.

Отсюда находим диаметр D и площадь сечения соленоида:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{R^2 S_0^2}{4 \rho^2 N^2 \pi}.$$

Следовательно, индуктивность соленоида можно представить в виде: $L = \mu_0 \frac{R^2 S_0^2}{4 \rho^2 \pi l}$. Длина же катушки соленоида $l = \frac{\mu_0 R^2 S_0^2}{4 L \rho^2 \pi}$,

$$[l] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{Ом}^2 \cdot \text{м}^4}{\text{Гн} \cdot \text{Ом}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{м},\ l = 0{,}25\ \text{м}.$$

Ответ: $l = 0{,}25$ м.

Задача 3.62. Длина соленоида $l = 160$ см, площадь поперечного сечения $S = 19,6$ см^2. Обмотка соленоида имеет $N = 2000$ витков, и по ней течет ток $I = 2$ А. Какая средняя ЭДС индуцируется в витке, надетом на соленоид с железным сердечником, если ток в соленоиде спадает до нуля в течение времени $t = 2$ мс?

Дано:
$l = 1,6$ м
$S = 19,6 \cdot 10^{-4}$ м^2
$N = 2000$
$I = 2$ А
$t = 2 \cdot 10^{-3}$ с

$\langle \mathscr{E}_s \rangle$ –?

Решение. Изменение магнитного потока в витке достигается изменением тока в соленоиде. При этом индуцируется ЭДС самоиндукции (3.70):

$\langle \mathscr{E}_{si} \rangle = -L_{1,2} \dfrac{\Delta I}{\Delta t}$, где $L_{1,2} = \mu\mu_0 n_1 n_2 lS$ – взаимная индуктивность витка и соленоида.

Для соленоида $n_1 = \dfrac{N}{l}$ – число витков на единицу длины; для витка $n_2 = \dfrac{1}{l}$. Считая начальное время и конечный ток равными нулю, получаем $\Delta t = t$ и $\Delta I = I$.

Теперь уравнение для ЭДС можно переписать в виде $\langle \mathscr{E}_s \rangle = \mu\mu_0 \dfrac{N}{l} S \dfrac{I}{t}$.

В полученном уравнении неизвестна магнитная проницаемость железа μ. Запишем напряженность магнитного поля соленоида, считая его бесконечно длинным, $H = In_1 = \dfrac{IN}{l}$, $H = 2500 \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

По графику (рис. 78) находим значение магнитной индукции для железа $B = 1,45$ Тл. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $\mu\mu_0 = \dfrac{B}{H}$, $\mu\mu_0 = 0,58 \dfrac{\text{мГн}}{\text{м}}$.

Подставляя найденное значение в уравнение для средней ЭДС, получим: $\langle \mathscr{E}_s \rangle = \mu\mu_0 \dfrac{N}{l} S \dfrac{I}{t}$, $\left[\langle \mathscr{E}_s \rangle\right] = \dfrac{\text{Гн} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \dfrac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В}$, $\langle \mathscr{E}_s \rangle = 1,42$ В.

Ответ: $\langle \mathscr{E}_s \rangle = 1,42$ В.

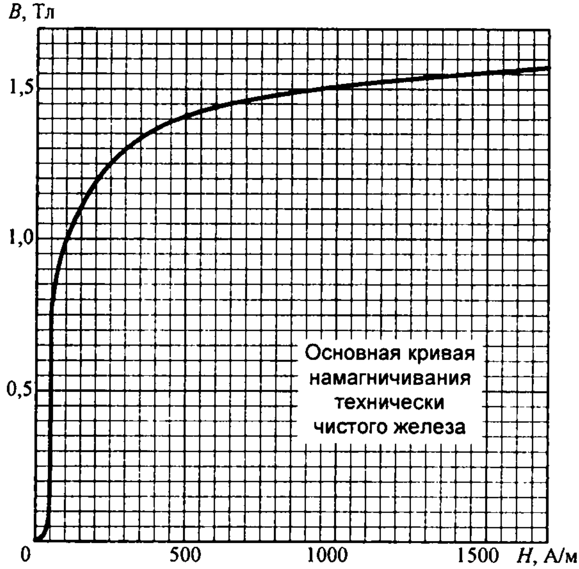

Рис. 78

Задача 3.63. Рамка площадью $S = 150$ см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с частотой $n = 2,4\ \frac{\text{об}}{\text{с}}$. Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет угол $\alpha = 30^0$ с направлением магнитного поля. Максимальная ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\max}$ во вращающейся рамке равна $0,09$ В. Какова индукция магнитного поля B?

Дано:
$S = 0,015$ м^2
$n = 2,4\ \frac{\text{об}}{\text{с}}$
$\alpha = 30°$
$\mathscr{E}_{\max} = 0,09$ В

$B - ?$

Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции определяется по закону Фарадея:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет все время угол α с направлением вектора магнитной индукции поля. Кроме того, при вращении рамки меняется магнитный поток, пронизывающий рамку. Используя формулу (3.63), закон изменения магнитного потока запишем в виде:

$$\Phi = BS \sin\alpha \cos\omega t, \qquad (2)$$

где $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость вращения рамки.

Из уравнений (1) и (2) найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\mathscr{E}_i = -BS\sin\alpha\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = BS\omega\sin\alpha\sin\omega t.$$

Максимального значения ЭДС достигнет при $\sin\omega t = 1$.

Отсюда $\mathscr{E}_{\max} = BS2\pi n\sin\alpha$.

Следовательно, $B = \dfrac{\mathscr{E}_{\max}}{S2\pi n\sin\alpha}$,

$$[B] = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{м}^2}\cdot\frac{\text{А}}{\text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{А}} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \text{Тл},\ B = 0{,}8\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 0{,}8$ Тл.

3.5 Электромагнитные колебания и волны

Основные формулы

• Уравнение колебаний в контуре без активного сопротивления (незатухающие колебания)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \tag{3.76}$$

где q – электрический заряд; ω_0 – собственная частота контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{3.77}$$

где L – индуктивность контура; C – электроемкость конденсатора.

• Решением уравнения (3.76) является функция:

$$q = q_0\cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{3.78}$$

где q_0 – амплитуда колебаний заряда на конденсаторе; α – начальная фаза колебаний.

• Формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \tag{3.79}$$

где T – период незатухающих электрических колебаний в контуре.

• Уравнение затухающих колебаний

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0, \tag{3.80}$$

где β – коэффициент затухания

$$\beta=\frac{R}{2L}. \tag{3.81}$$

При условии, что $\beta^2<\omega_0^2$, т. е. $\frac{R^2}{4L^2}<\frac{1}{LC}$, решение уравнения (3.80) имеет вид:

$$q=q_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha), \tag{3.82}$$

где

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}. \tag{3.83}$$

• Логарифмический декремент затухания

$$K=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\beta T, \tag{3.84}$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующие моментам времени, отличающимся на период.

• Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$\mathrm{v}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{3.85}$$

где $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – скорость распространения света в вакууме, ε_0 – электрическая постоянная, μ_0 – магнитная постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды, μ – магнитная проницаемость среды.

• Связь между мгновенными значениями E и H

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E=\sqrt{\mu\mu_0}H, \tag{3.86}$$

где E, H – модули напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

• Уравнение плоской электромагнитной волны

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \tag{3.87}$$

где E_0 – амплитуда напряженности электрического поля волны, ω – циклическая частота, $k = \omega / \mathrm{v}$ – волновое число, φ – начальная фаза, v – фазовая скорость распространения волны.

• Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \tag{3.88}$$

• Вектор Умова–Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}], \tag{3.89}$$

где $\vec{S}$ – плотность потока электромагнитной энергии.

Задача 3.64. Идеальный контур Томсона состоит из конденсатора емкостью $C = 25$ нФ и катушки с индуктивностью $L = 1{,}015$ Гн. Пластинам конденсатора сообщен заряд $q_0 = 2{,}5$ мкКл. Как изменяются разность потенциалов U на обкладках конденсатора и значения тока I в цепи в пределах одного периода колебаний? Постройте графики зависимости U и I от времени.

Дано:
$C = 25 \cdot 10^{-9}$ Ф
$L = 1{,}015$ Гн
$q_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл

$U(t)$ – ?
$I(t)$ – ?

Решение. Колебательный контур без активного сопротивления ($R = 0$) является идеальным и называется контуром Томсона. Уравнение незатухающих электромагнитных колебаний в таком контуре имеет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Уравнение имеет решение в виде:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где q_0 – амплитуда незатухающих колебаний заряда на конденсаторе; ω_0 – собственная частота колебаний; α – начальная фаза колебаний (в дальнейшем, для простоты, будем полагать $\alpha = 0$).

Период незатухающих электромагнитных колебаний определяется по формуле Томсона (3.79):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Учитывая, что $I = \dfrac{dq}{dt}$, запишем закон изменения тока в контуре:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega_0 \sin\omega_0 t = -I_0 \sin\omega_0 t\,,$$

где $I_0 = q_0\omega_0$ – амплитуда колебаний силы тока.

Найдем ω_0 и I_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad [\omega_0] = \frac{1}{\sqrt{\text{Гн}\cdot\Phi}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}}\cdot\dfrac{\text{Кл}}{\text{В}}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\text{с}\cdot\text{Кл}\cdot\text{с}}{\text{Кл}}}} = \text{с}^{-1},$$

$$\omega_0 = 0{,}63\cdot10^4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 2\pi\cdot10^3\ \frac{\text{рад}}{\text{с}},\ I_0 = q_0\omega_0,$$

$$I_0 = -15{,}7\cdot10^{-3}\ \text{А}.$$

Следовательно, уравнение изменения тока в цепи примет вид:

$J(t) = -15{,}7\cdot10^{-3}\sin 2\pi\cdot10^3 t$, А.

Так как напряжение на пластинах конденсатора $U_c = \dfrac{q}{C}$, то уравнение для изменения U будет иметь вид:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0\cos\omega_0 t}{C} = U_0\cos\omega_0 t\,,$$

где $U_0 = \dfrac{q_0}{C}$, $U_0 = 100$ В – амплитудное значение напряжения.

Следовательно, $U(t) = 100\cos 2\pi\cdot10^3 t$, В.

Для построения графиков составим табл. 4:

Таблица 4

t	$T/8$	$T/4$	$T/2$
I, мА	-11,1	-15,7	0
U, В	70,7	0	-100

Примечание: период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, $T = \dfrac{2\pi}{2\pi \cdot 10^3} = 10^{-3}$ с.

На рис. 79 представлены графики зависимости силы тока и напряжения от времени.

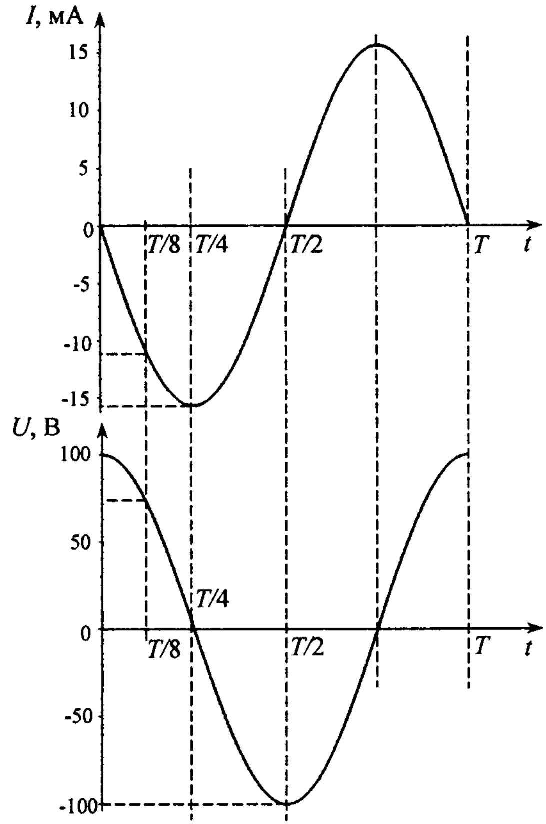

Рис. 79

Ответ: $J(t) = -15{,}7 \cdot 10^{-3}\sin 2\pi \cdot 10^3 t$, А; $U(t) = 100\cos 2\pi \cdot 10^3 t$, В.

Задача 3.65. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 0,2 мкФ, катушки с индуктивностью L = 5,07 мГн и сопротивления R = 11,1 Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за два периода колебаний?

Решение. В колебательном контуре, имеющем активное сопротивление R, возникают затухающие электромагнитные колебания.

Дифференциальное уравнение таких колебаний имеет вид (3.80):

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0.$$

Дано:

$C=0{,}2\cdot10^{-6}$ Ф

$L=5{,}07\cdot10^{-3}$ Гн

$R=11{,}1$ Ом

$t=2T$

$n-?$

Решением этого уравнения является функция

$$q=q_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha),$$

где q_0 – амплитудное значение заряда на пластинах конденсатора в момент времени t = 0; $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ – частота затухающих колебаний; $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ – собственная частота колебаний в контуре; $\beta=R/(2L)$ – коэффициент затухания; α – начальная фаза колебаний (для удобства примем $\alpha=0$).

Разность потенциалов на обкладках конденсатора

$$U=\frac{q}{C}=\frac{q_0}{C}e^{-\beta t}\cos\omega t,$$

где $q_0/C=U_0$ – амплитуда колебаний разности потенциалов на пластинах конденсатора в момент времени t = 0.

Следовательно,

$$U=U_0e^{-\beta t}\cos\omega t.$$

Тогда за два периода амплитуда колебаний уменьшится в n раз:

$$n=\frac{U(t)}{U(t+2T)}=e^{\beta 2T}.$$

Период T для затухающих колебаний:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

Величина $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \approx 10^3$ намного меньше $\frac{1}{LC} \approx 10^9$, поэтому для периода T можно применить приближенную формулу Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$, $T = 0,2\cdot 10^{-3}$ с.

Тогда

$n = e^{\beta 2T} = e^{\frac{R}{2L}2T} = e^{\frac{RT}{L}}$, $n = 1,55$.

Ответ: $n = 1,55$.

Задача 3.66. Найдите логарифмический декремент затухания K колебаний в контуре, состоящем из конденсатора емкостью C = 2,22 нФ и катушки из медной проволоки диаметром d = 0,5 мм. Катушка имеет 400 витков проволоки.

Дано:

$C = 2,22\cdot 10^{-9}$ Ф

$d = 5\cdot 10^{-4}$ м

$N = 400$

$K - ?$

Решение. Логарифмический декремент затухания K определяется по формуле (3.84):

$$K = \ln\left(\frac{q(t)}{q(t+T)}\right) = \beta T, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания;

$$T = 2\pi\Big/\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \approx 2\pi\sqrt{LC}, \quad (2)$$

так как затухание за один период колебаний мало.

Таким образом, задача сводится к нахождению R и L.

Индуктивность катушки, согласно (3.71),

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S, \quad (3)$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; $\mu = 1$ (катушка без сердечника) – магнитная проницаемость среды; l – длина катушки; $n = N/l$ – число витков на единицу длины катушки; S – площадь поперечного сечения катушки.

Пусть D – диаметр катушки, тогда $S = \pi D^2 / 4$. Длина катушки $l = ND$. Тогда

$$L = \mu_0 \frac{\pi N D^2}{4d}. \tag{4}$$

Активное сопротивление проволоки

$$R = \rho \frac{l_{пр}}{S_{пр}} = \rho \frac{4ND}{d^2}, \tag{5}$$

где $l_{пр} = N \cdot \pi D$ (число витков, умноженное на длину одного витка); $S_{пр} = \pi d^2 / 4$.

Используя уравнения (4) и (5), для коэффициента затухания запишем:

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{8\rho}{\pi \mu_0 D d}, \tag{6}$$

где $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м – удельное сопротивление меди.

Период колебаний найдем из выражений (2), (4):

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi \mu_0 C N D^2}{4d}}.$$

Логарифмический декремент затухания определим из (1), (6):

$$K = 8\rho\sqrt{\frac{\pi C N}{\mu_0 d^3}},$$

$$[K] = \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \sqrt{\frac{\text{Ф} \cdot \text{м}}{\text{Гн} \cdot \text{м}^3}} = \text{Ом} \cdot \sqrt{\frac{\text{Кл} \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}} = \text{Ом} \cdot \sqrt{\frac{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{В}^2 \cdot \text{с}}} = \text{Ом} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{Ом}^2}} = 1,$$

$$K = 0,018.$$

Ответ: $K = 0,018$.

Задача 3.67. В контуре вследствие затухания теряется 99% энергии. Колебательный контур содержит емкость C = 0,55 нФ и индуктивность L = 10 мГн. За какое время происходит потеря энергии в контуре, если логарифмический декремент затухания K = 0,005?

Дано:
$n = 0{,}99$
$C = 0{,}55 \cdot 10^{-9}$ Ф
$L = 10^{-2}$ Гн
$K = 0{,}005$

$t - ?$

Решение. Потерю энергии в колебательном контуре можно записать как отношение:

$$n = \frac{W_0 - W}{W_0},$$

где $W_0 = CU_0^2/2$, $W = CU^2/2$.

Тогда

$$n = \frac{U_0^2 - U^2}{U_0^2} = 0{,}99, \quad n = 1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 = 0{,}99, \quad \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 = 0{,}01.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{U_0}{U}\right)^2 = 100,$$

$$\frac{U_0}{U} = 10. \qquad (1)$$

С другой стороны, для затухающих колебаний разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону:

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t,$$

т. е. за время t амплитуда изменилась и стала равной

$$\frac{U_0}{U} = e^{\beta t}. \qquad (2)$$

Выразим коэффициент затухания через логарифмический декремент из соотношения

$$K = \beta T, \quad \beta = \frac{K}{T}. \qquad (3)$$

Таким образом, из уравнений (1)–(3) запишем:

$$10 = e^{\frac{Kt}{T}}. \qquad (4)$$

Прологарифмируем равенство (4) и вычислим время затухания:

$$\ln 10 = \frac{Kt}{T}, \quad t = \frac{T \cdot \ln 10}{K},$$

где $T = 2\pi\sqrt{LC}$ – период колебаний.

Искомое время $t = \dfrac{2\pi\sqrt{LC}\cdot\ln 10}{K}$,

$$[t] = \sqrt{\text{Гн}\cdot\text{Ф}} = \sqrt{\frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{В}}} = \sqrt{\frac{\text{с}\cdot\text{Кл}\cdot\text{с}}{\text{Кл}}} = \text{с},\ t = 6{,}8\cdot10^{-3}\ \text{с}.$$

Ответ: $t = 6{,}8\cdot10^{-3}$ с.

Задача 3.68. Для какого момента времени t отношение $W_\text{м}/W_\text{эл}$ энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля равно 3?

Дано:
$W_\text{м}/W_\text{эл} = 3$

$t - ?$

Решение. Энергия магнитного поля (3.74)

$$W_\text{м} = \frac{LI^2}{2}, \tag{1}$$

где

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}, \tag{2}$$

L – индуктивность катушки.

Энергия электрического поля конденсатора (3.29)

$$W_\text{эл} = \frac{CU^2}{2}, \tag{3}$$

где

$$U = U_0\cos\omega t \tag{4}$$

– изменение напряжения на обкладках конденсатора.

Дифференцируя выражение (4) и подставляя его в (2), получим:

$$I = C\frac{dU}{dt} = -CU_0\omega\sin\omega t. \tag{5}$$

С учетом уравнений (5) и (4) формулы (1) и (3) примут вид

$$W_\text{м} = \frac{LC^2U_0^2\omega^2\sin^2\omega t}{2}, \tag{6}$$

$$W_{эл} = \frac{CU_0^2 \cos^2 \omega t}{2}. \tag{7}$$

Поделив уравнение (6) на (7), найдем отношение энергий:

$$\frac{W_м}{W_{эл}} = \frac{LC\omega^2 \sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = LC\omega^2 \operatorname{tg}^2 \omega t. \tag{8}$$

Кроме того, для колебательного контура известно, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{9}$$

Подставив в формулу (8) выражение (9), получим

$W_м / W_{эл} = \operatorname{tg}^2 \omega t$.

По условию задачи

$W_м / W_{эл} = 3$.

Значит, $\operatorname{tg} \omega t = \sqrt{3}$, или $\omega t = \pi / 3$, так как $\omega = 2\pi / T$, где T – период колебаний, то $\frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{T}{6}$.

Ответ: $t = T / 6$.

Задача 3.69. Ток в колебательном контуре изменяется по закону $I = -0,04 \sin 400 \cdot \pi t$, А. Емкость конденсатора C = 0,63 мкФ. Найдите период T колебаний, индуктивность контура L, максимальную энергию $W_м$ магнитного поля и максимальную энергию $W_{эл}$ электрического поля.

Дано:

$C = 0,63 \cdot 10^{-6}$ Ф

$L - ?$ $T - ?$

$W_м - ?$ $W_{эл} - ?$

Решение. Закон изменения тока в цепи со временем получим, продифференцировав уравнение (3.78):

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin \omega t = -CU_0 \omega \sin \omega t. \tag{1}$$

Сопоставляя уравнение (1) с заданным в условии задачи, находим период колебаний: $T = 2\pi / \omega = 2\pi / (400\pi)$, $T = 5$ мс.

С другой стороны, по формуле Томсона (3.79)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

можно определить индуктивность катушки L:

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C},\ [L] = \frac{\text{с}^2}{\text{Ф}} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{В}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Гн},\ L = 1\ \text{Гн}.$$

Ток максимален, когда $\sin 400\pi t = -1$, т. е. $I_{max} = 0{,}04$ А.

Тогда максимальная энергия магнитного поля

$$W_\text{м} = \frac{L\, I_{max}^2}{2},\ [W_m] = \text{Гн} \cdot \text{А}^2 = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^2}{\text{А}} = \text{Дж},\ W_\text{м} = 0{,}8\ \text{мДж}.$$

Поскольку колебания в контуре не затухают ($R = 0$), то по закону сохранения энергии максимальная энергия электрического поля $W_\text{эл} = W_\text{м} = 0{,}8$ мДж.

Ответ: $L = 1$ Гн; $T = 5$ мс; $W_\text{эл} = W_\text{м} = 0{,}8$ мДж.

Задача 3.70. Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U = 25\cos 10^4 \pi t$, В. Индуктивность катушки L = 10,13 мГн. Найдите период T колебаний, емкость С конденсатора, закон изменения со временем тока I в цепи и длину волны λ, соответствующую этому контуру.

Дано:
$L = 10{,}13 \cdot 10^{-3}$ Гн

$T - ?$ $C - ?$
$I(t) - ?$ $\lambda - ?$

Решение. В общем виде уравнение изменения напряжения на пластинах конденсатора

$$U = U_0 \cos \omega t.$$

Сравнивая его с уравнением, данным в условии задачи, находим собственную частоту колебаний в контуре $\omega = 10^4 \pi$.

Учитывая, что $\omega = 2\pi / T$, находим период $T = 0{,}2$ мс.

Из формулы Томсона вычисляем емкость конденсатора:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},\ C = \frac{T^2}{4\pi^2 L},\ [C] = \frac{\text{с}^2}{\text{Гн}} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф},$$

$$C = 0{,}1\ \text{мкФ}.$$

Закон изменения со временем тока в цепи

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega \sin \omega t = -CU_0\omega \sin \omega t .$$

Подставляя числовые значения емкости $C = 0{,}1$ мкФ, амплитуды напряжения $U_0 = 25$ В и собственной частоты колебаний $\omega = 10^4 \pi$ с$^{-1}$, получаем:

$J(t) = -78{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 10^4 \pi t$, А.

Длина волны, соответствующая контуру, $\lambda = cT$, где c – скорость света ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с), $\lambda = 60$ км.

Ответ: $T = 0{,}2$ мс; $C = 0{,}1$ мкФ; $J(t) = -78{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 10^4 \pi t$, А; $\lambda = 60$ км.

Задача 3.71. Колебательный контур настроен на длину волны λ = 1500 м и состоит из катушки индуктивности L = 60 мкГн и плоского конденсатора с площадью пластин S = 400 см^2. Расстояние между пластинами d = 0,02 см. Найдите диэлектрическую проницаемость ε среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора.

Дано:
$\lambda = 1500$ м
$L = 6 \cdot 10^{-5}$ Гн
$S = 4 \cdot 10^{-2}$ м^2
$d = 2 \cdot 10^{-4}$ м

$\varepsilon - ?$

Решение. Длина волны, на которую настроен контур,

$$\lambda = cT, \tag{1}$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитных волн. Период колебаний определим по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \cdot \tag{2}$$

Таким образом,

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} \cdot \tag{3}$$

Из выражения (3) найдем емкость конденсатора:

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} . \tag{4}$$

С другой стороны, емкость плоского конденсатора можно найти по формуле

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} , \tag{5}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; S – площадь пластины и d – расстояние между пластинами конденсатора.

Решая уравнения (4) и (5), найдем диэлектрическую проницаемость среды:

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 L S}, \quad [\varepsilon] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{Ф} \cdot \text{Гн} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{с}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{А}}{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{Кл}} = 1, \quad \varepsilon = 6.$$

Ответ: $\varepsilon = 6$.

Задача 3.72. Катушка сопротивлением 8,2 Ом включена в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Длина катушки l = 100 см и площадь поперечного сечения S = 40 см². Число витков на катушке N = 3000. Найдите сдвиг фаз φ между напряжением и током.

Дано:
$R = 8{,}2$ Ом
$\nu = 50$ Гц
$l = 1$ м
$S = 4 \cdot 10^{-3}$ м²
$N = 3000$

$\varphi - ?$

Решение. Для решения удобно использовать векторную диаграмму (рис. 80), изобразив амплитуды напряжений:

$$U_{Rm} = R\,I_m, \quad U_{Cm} = I_m/(\omega C), \quad U_{Lm} = \omega L I_m,$$

и их векторную сумму, равную, согласно второму правилу Кирхгофа:

$$U_L + U_R + U_C = \mathcal{E}_m \cos\omega t,$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos\omega t$ – внешняя переменная ЭДС, зависящая от времени по гармоническому закону.

Из рис. 80 видно, что сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

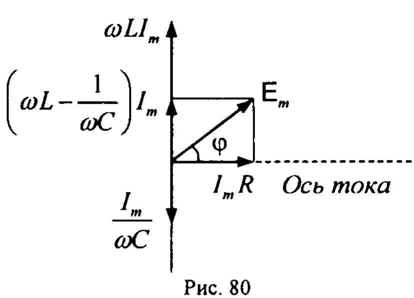

Рис. 80

Поскольку цепь не содержит конденсатора, то формула примет упрощенный вид:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}. \qquad (1)$$

Циклическая частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu\,, \tag{2}$$

а индуктивность катушки

$$L = \mu\mu_0 n^2 lS\,. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi\nu\cdot\mu\mu_0 n^2 lS}{R}\,, \tag{4}$$

где $\mu = 1$ – магнитная проницаемость воздуха; $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; l – длина катушки. Так как число витков на единицу длины катушки $n = N/l$, то формула (4) примет вид:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi\nu\mu_0 N^2 S}{l\,R}\,,\ [\varphi] = \frac{\text{Гц}\cdot\text{Гн}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{Ом}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}} = 1,\ \varphi = 60^0\,.$$

Ответ: $\varphi = 60^0$.

4. ОПТИКА. ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

4.1. Геометрическая оптика

Основные формулы

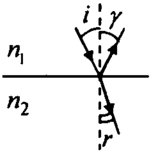

Рис. 81

● При падении луча света (рис. 81) на границу двух сред наблюдаются явления отражения и преломления света.

● Закон отражения света

$$i=\gamma, \tag{4.1}$$

где i – угол падения луча, γ – угол отражения.

● Закон преломления света при прохождении через границу раздела двух сред

$$\frac{\sin i}{\sin r}=n_{21}=\frac{n_2}{n_1}, \tag{4.2}$$

где i – угол падения луча, r – угол преломления, n_{21} – относительный показатель преломления, n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления первой и второй сред. Если $n_2<n_1$, то угол $r>i$; при $i=i_{пр}$ угол $r=90°$.

● Явление полного отражения

$$\sin i_{пр}=\frac{n_2}{n_1}, \tag{4.3}$$

где $i_{пр}$ – предельный угол полного отражения. Все лучи, падающие на границу двух сред под углом $i>i_{пр}$, полностью отражаются.

● Абсолютный показатель преломления

$$n=\frac{c}{v}, \tag{4.4}$$

где c – скорость света в вакууме, v – скорость света в среде.

● Оптическая сила тонкой линзы

$$D=\frac{1}{F}=\left(\frac{n_л}{n_{ср}}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{4.5}$$

где F – фокусное расстояние линзы; $n_л$ – абсолютный показатель преломления вещества линзы; $n_{ср}$ – абсолютный показатель преломления окружающей среды (одинаковой с обеих сторон линзы).

В приведенной формуле радиусы выпуклых поверхностей (R_1 и R_2) берутся со знаком плюс, вогнутых – со знаком минус:

● Формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}, \tag{4.6}$$

где d – расстояние от оптического центра линзы до предмета; f – расстояние от оптического центра линзы до изображения.

Для собирающих линз величина F положительная, для рассеивающих линз величина F отрицательная. Если изображение мнимое, то величина f – отрицательная.

● Увеличение в линзе

$$\Gamma=\frac{h}{h_0}=\frac{f}{d}, \tag{4.7}$$

где h и h_0 – линейные размеры изображения и предмета.

Задача 4.1. На плоскопараллельную стеклянную ($n=1{,}5$) пластинку толщиной $d=8$ см падает под углом $i=60°$ луч света. Определите боковое смещение луча x, прошедшего сквозь эту пластинку.

Дано:
$n=1{,}5$
$d=8\cdot10^{-2}$ м
$i=60°$
x - ?

Решение. Вышедший из пластинки луч будет параллелен падающему, т. е. плоскопараллельная пластинка не изменяет направления падающих на нее лучей, а только смещает их относительно первоначального хода. Это смещение x и надо определить.

Из ΔABD (рис. 82)

$$x=AB\sin(i-r). \tag{1}$$

Из ΔAOB найдем:

$$AB=\frac{AO}{\cos r}=\frac{d}{\cos r}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$x = \frac{d\sin(i-r)}{\cos r}. \qquad (3)$$

Угол r найдем, используя закон преломления (4.2):

$$\sin i = n\sin r, \quad \sin r = \frac{\sin i}{n} = 0{,}58, \quad r = 35°45',$$

$\cos r = 0{,}81$.

Подставив числовые данные в формулу (3), получим $x = 0{,}04$ м.

Ответ: $x = 0{,}04$ м.

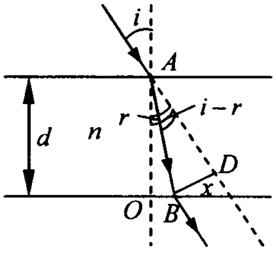

Рис. 82

Задача 4.2. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Предельный угол полного отражения на границе стекло–жидкость $i_{пр} = 65°$ (рис. 83). Определите показатель преломления жидкости.

Дано:
$n = 1{,}5$
$i_{пр} = 65°$

$n_ж$ - ?

Решение. Для полного отражения справедлива формула (4.3):

$$\sin i_{пр} = \frac{n_ж}{n},$$

откуда $n_ж = n\sin i_{пр}$,

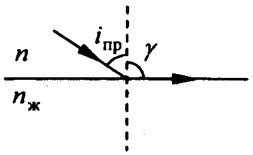

Рис. 83

$n_ж = 1{,}36$.

Ответ: $n_ж = 1{,}36$.

Задача 4.3. Луч света выходит из стекла в вакуум (рис. 84). Предельный угол полного отражения для этого луча $i_{пр} = 42°$. Определите скорость света в стекле.

Дано:
$n_в = 1$
$i_{пр} = 42°$
$c = 3\cdot10^8$ м/с

---

v_c - ?

Решение. Для полного отражения запишем формулу (4.3):

$$\sin i_{пр} = \frac{n_в}{n_c} = \frac{1}{n_c}. \qquad (1)$$

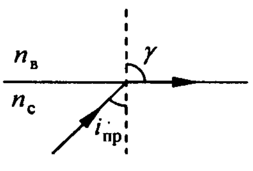

Рис. 84

По определению (4.4) абсолютный показатель преломления

$$n = \frac{c}{v_c}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим $\sin i_{пр} = \dfrac{v_c}{c}$.

Тогда $v_c = c \sin i_{пр}$, $v_c = 2{,}01 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $v_c = 2{,}01 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 4.4. Луч света переходит из стекла ($n_c = 1{,}5$) в воздух, падая на стеклянную поверхность под углом: 1) $i_1 = 42°$; 2) $i_2 = 60°$. Найдите углы преломления r_1 и r_2 в каждом случае.

Дано:
$n_c = 1{,}5$
$n_в = 1$
$i_1 = 42°$
$i_2 = 60°$

---

r_1 - ? r_2 - ?

Решение. Так как стекло есть среда оптически более плотная, чем воздух ($n_c > n_в$), может случиться так, что угол падения луча $i > i_{пр}$. Тогда падающий луч полностью отразится обратно в стекло. Поэтому сначала по формуле (4.3) определим $i_{пр}$ для стекла:

$$\sin i_{пр} = \frac{1}{n_c}, \text{ откуда } i_{пр} \approx 41°8'.$$

Так как $i_1 < i_{пр}$, то луч света выйдет из стекла в воздух (рис. 85). Угол r_1 найдем из закона преломления (4.2):

$$n_c \sin i_1 = \sin r_1, \text{ откуда } r_1 \approx 75°.$$

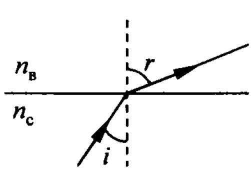

Рис. 85

Поскольку $i_2 > i_{пр}$, то наступит явление полного отражения. Это будет означать, что преломленного луча нет.

Ответ: 1) $r_1 = 75°$;
2) преломленного луча нет.

Задача 4.5. На какую максимальную глубину надо погрузить в воду точечный источник света, чтобы круглый плот радиусом $R = 3$ м не пропускал свет в пространство над поверхностью воды? Показатель преломления воды $n_в = 1{,}33$. Центр плота находится над источником света (рис. 86).

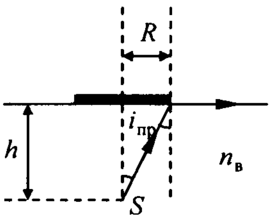

Рис. 86

Дано:
$R = 3$ м
$n_в = 1{,}33$

h_{max} - ?

Решение. Для того чтобы лучи не могли выйти из воды, они должны падать на поверхность раздела вода–воздух под углами $i \geq i_{пр}$. Согласно формуле (4.3),

$$\sin i_{пр} = \frac{1}{n_в}. \tag{1}$$

Из рис. 86 следует, что:

$$\operatorname{tg} i_{пр} = \frac{R}{h}. \tag{2}$$

$h = h_{max}$, если $i = i_{пр}$.

Из (1) найдем $i_{пр} = \arcsin\dfrac{1}{n_в}$.

Из (2) найдем $h_{max} = \dfrac{R}{\operatorname{tg} i_{пр}} = \dfrac{R}{\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{1}{n_в}\right)}$, $h_{max} = 2{,}63$ м.

Ответ: $h_{max} = 2{,}63$ м.

Задача 4.6. Радиусы кривизны поверхностей собирающей линзы $R_1 = R_2 = 20$ см. Определите: а) фокусное расстояние линзы в воздухе; б) фокусное расстояние этой же линзы, погруженной в жидкость ($n_ж = 1{,}7$). Показатель преломления материала линзы $n_л = 1{,}5$.

Дано:
$R_1 = R_2 = 0{,}2$ м
$n_ж = 1{,}7$
$n_л = 1{,}5$
$n_в = 1$

а) F_1 -? б) F_2 -?

Решение. Формула тонкой линзы (4.5)

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\pm\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2}\right).$$

а) Применим данную формулу для случая, когда линза находится в воздухе. Учтем, что радиусы $R_1 = R_2 = R$:

$$\frac{1}{F_1} = \left(\frac{n_л}{n_в} - 1\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \left(\frac{n_л}{n_в} - 1\right)\frac{2}{R}, \text{ откуда } F_1 = \frac{R}{2\left(\frac{n_л}{n_в} - 1\right)}, \; F_1 = 0{,}2 \text{ м}.$$

б) Применим выражение (4.5) для случая, когда линза погружена в жидкость: $\frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_л}{n_ж} - 1\right)\frac{2}{R}$, откуда $F_2 = \frac{R}{2\left(\frac{n_л}{n_ж} - 1\right)}$, $F_2 = -0{,}85$ м, т. е. линза будет рассеивающей.

Ответ: а) $F_1 = 0{,}2$ м; б) $F_2 = -0{,}85$ м.

Задача 4.7. Двояковыпуклая линза, оптическая сила которой $D = 8$ дптр, дает изображение предмета на экране, удаленном на расстояние $f = 75$ см, равное $h = 10$ см. Определите положение и высоту предмета. Постройте его изображение.

Дано:
$D = 8$ дптр
$f = 0{,}75$ м
$h = 0{,}1$ м

d - ?
h_0 - ?

Решение. Запишем формулу тонкой линзы (4.6):

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \tag{1}$$

и формулу увеличения изображения в линзе (4.7):

$$Г = \frac{h}{h_0} = \frac{f}{d}. \tag{2}$$

Из (1) находится расстояние от предмета до линзы:

$$d = \frac{f}{Df - 1}, \; d = 0{,}15 \text{ м}.$$

Из (2) определяется высота предмета:

$$h_0 = \frac{hd}{f}, \quad h_0 = 0{,}02 \text{ м}.$$

Изображение предмета в линзе показано на рис. 87.

Ответ: $d = 0{,}15$ м; $h_0 = 0{,}02$ м.

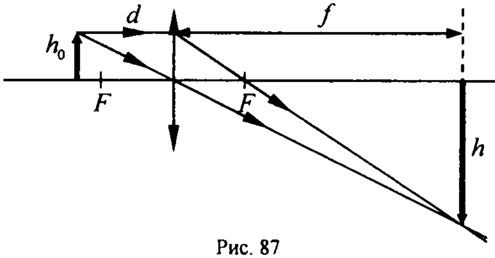

Рис. 87

Задача 4.8. Свеча находится на расстоянии $l = 3{,}5$ м от экрана. Между свечой и экраном помещают собирающую линзу, которая дает на экране четкое изображение свечи при двух положениях линзы. Найдите фокусное расстояние линзы F, если расстояние между положениями линзы $r = 0{,}5$ м.

Дано:
$l = 3{,}5$ м
$r = 0{,}5$ м

F - ?

Решение. Поскольку изображение свечи в I и II случаях (рис. 88) получается на экране, следовательно, оно действительное, тогда свеча должна находиться в I положении между фокусом и двойным фокусом, а во II положении – за двойным фокусом.

Применим формулы тонкой линзы

для I положения: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}$, где $d_1 + f_1 = l$, $f_1 = l - d_1$; (1)

для II положения: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}$, где $d_2 = d_1 + r$, $f_2 = l - d_1 - r$. (2)

Выражения (1), (2) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{l - d_1}, \\ \frac{1}{F} = \frac{1}{d_1 + r} + \frac{1}{l - d_1 - r}. \end{cases} \quad (3)$$

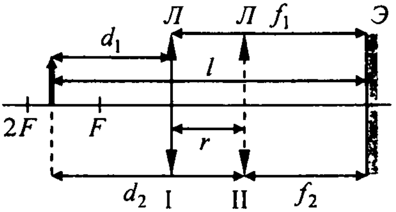

Рис. 88

Решая систему уравнений (3), получим:

$$F = \frac{l^2 - r^2}{4l}, \ F = 0{,}86 \text{ м}.$$

Ответ: $F = 0{,}86$ м.

4.2. Волновая оптика

4.2.1. Интерференция света

Основные формулы

● Условие максимального усиления света при интерференции (интерференционный максимум)

$$\Delta = \pm k\lambda, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{4.8}$$

где $\Delta = n_2L_2 - n_1L_1$ – оптическая разность хода двух световых лучей; n_1 и n_2 – показатели преломления сред, проходимых световыми лучами 1 и 2; λ – длина световой волны в вакууме; k – порядок интерференционного максимума.

● Условие максимального ослабления света при интерференции (интерференционный минимум)

$$\Delta = \pm\frac{2k+1}{2}\lambda, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{4.9}$$

где k – порядок интерференционного минимума.

● Разность фаз колебаний $\Delta\varphi$ связана с оптической разностью хода интерферирующих лучей соотношением

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}. \tag{4.10}$$

● Расстояние Δx между интерференционными полосами на экране, полученными от двух когерентных источников света:

$$\Delta x = \frac{l\lambda}{d}, \tag{4.11}$$

где l – расстояние от экрана до источника света; d – расстояние между источниками ($d << l$).

● Оптическая разность хода световых лучей Δ, отраженных от двух поверхностей тонкой пластинки, по обе стороны которых находятся одинаковые среды, равна:

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}, \qquad (4.12)$$

где h – толщина пластинки; n – показатель преломления вещества пластинки; i – угол падения луча; λ – длина световой волны в вакууме; n_1 – показатель преломления среды.

Добавочная разность хода $\lambda/2$ учитывает изменение фазы волны на π при отражении ее от оптически более плотной среды.

● Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете

$$r_к = \sqrt{k\lambda R}, \ (k = 0, 1, 2, 3, ...), \qquad (4.13)$$

а радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете

$$r_к = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, \ (k = 1, 2, 3, ...), \qquad (4.14)$$

где R – радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной пластинкой; λ – длина световой волны в среде между линзой и пластинкой; k – порядковый номер кольца ($k = 0$ соответствует центральному темному пятну).

В проходящем свете расположение светлых и темных колец обратно их расположению в отраженном свете.

Задача 4.9. Луч света, идущий в воздухе, проходит слой скипидара ($n_с = 1{,}48$) толщиной $h = 2$ мм. Насколько изменится оптическая разность хода преломленного и непреломленного лучей, если световая волна падает под углом $i = 45°$ к поверхности жидкости?

Дано:
$n_в = 1$
$n_с = 1{,}48$
$h = 2 \cdot 10^{-3}$ м
$i = 45°$

Δ - ?

Решение. На рис. 89 показан ход светового луча. Путь луча в воздухе толщиной h равен

$$S_1 = \frac{h}{\cos i}. \qquad (1)$$

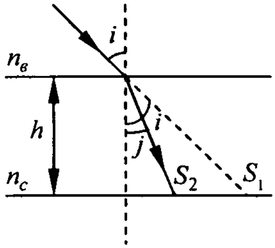

Рис. 89

Путь луча в скипидаре толщиной h равен

$$S_2 = \frac{h}{\cos r}. \qquad (2)$$

Согласно формулам (4.8) и (4.9) для оптической разности хода волн, запишем:

$$\Delta = S_2 n_с - S_1 n_в = S_2 n_с - S_1. \qquad (3)$$

Используя закон преломления света, найдем угол преломления r:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_с}{n_в}, \quad \sin r = \frac{n_в \sin i}{n_с} = \frac{\sin i}{n_с}, \quad r = \arcsin\frac{\sin i}{n_с}. \qquad (4)$$

Выражения (1), (2), (4) подставим в (3), получим

$$\Delta = h\left(\frac{n}{\cos r} - \frac{1}{\cos i}\right), \quad \Delta = 0{,}54 \text{ мм}.$$

Ответ: увеличится на 0,54 мм.

Задача 4.10. Разность фаз колебаний двух интерферирующих лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм равна $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Определите разность хода этих лучей.

Дано:
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м
$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$

Δ - ?

Решение. Разность фаз колебаний можно определить, используя формулу (4.10):

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} \quad \text{или} \quad \frac{3\pi}{2} = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}.$$

Тогда разность хода лучей

$$\Delta = \frac{3\lambda}{4}, \quad \Delta = 3{,}75 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta = 375$ нм.

Задача 4.11. В опыте с зеркалами Френеля расстояние d между мнимыми изображениями источника света равно 0,5 мм, расстояние l от них до экрана равно 5 м. В красном свете ширина интерференционных полос равна 5,5 мм. Определите длину волны λ красного света.

Дано:
$d = 5 \cdot 10^{-4}$ м
$l = 5$ м
$\Delta x = 5{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
λ - ?

Решение. В данном опыте свет падает расходящимся пучком на два плоских зеркала, расположенных друг от друга под углом, мало отличающимся от $180°$. Интерференционная картина получается при наложении двух когерентных пучков, отраженных от плоских зеркал.

Расстояние между интерференционными полосами определяется по формуле (4.11)

$$\Delta x = \frac{l\lambda}{d},$$

откуда находится длина волны:

$$\lambda = \frac{d\Delta x}{l}, \quad \lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 4.12. Какую наименьшую толщину должна иметь пленка из скипидара, разлитого на воде, если на нее под углом $i = 30°$ падает белый свет и она в отраженном свете окажется красной? Длина волны красных лучей $\lambda = 0{,}63$ мкм.

Дано:
$i = 30°$
$n_1 = 1$
$n_2 = 1{,}33$
$n = 1{,}48$
$\lambda = 6{,}3 \cdot 10^{-7}$ м
$h_{\min}$ - ?

Решение. На рис. 90 показан ход луча света в пленке.

В точках А и В падающий пучок света частично отражается и частично преломляется. При отражении в точке А, т. е. от среды оптически более плотной ($n > n_1$), происходит изменение фазы волны на π, что соответствует изменению разности хода на $\lambda/2$. При отражении в точке В, т. е. от среды оптически менее плотной ($n > n_2$), изменения фазы волны не происходит.

Оптическая разность хода с учетом потери полуволны для лучей $1'$ и $2'$ равна:

$$\Delta = \left(AC + BC\right)n - ADn_1 - \frac{\lambda}{2}.$$

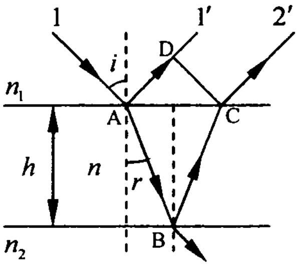

Рис. 90

Легко видеть, что $AC = BC = \dfrac{h}{\cos r}$, $AD = 2h \sin i \operatorname{tg} r$. Тогда

$$\Delta = 2h\left(\frac{n - n_1 \sin i \sin r}{\cos r}\right) - \frac{\lambda}{2}.$$

Учитывая, что

$\sin r = \dfrac{n_1 \sin i}{n}$ и $\cos r = \dfrac{\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i}}{n}$, получаем:

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin i} - \frac{\lambda}{2}. \qquad (1)$$

Запишем условие максимума освещенности при интерференции:

$$\Delta = 2k\frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует:

$$2h\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2},$$

$$2h\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (3)$$

При $k = 0$ $h = h_{\min}$ и уравнение (3) запишется в виде:

$$2h_{\min}\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i} = \frac{\lambda}{2},$$

откуда $h_{\min} = \dfrac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i}}$, $h_{\min} = 0{,}15$ мкм.

Ответ: $h_{\min} = 0{,}15$ мкм.

Задача 4.13. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между вторым и двадцатым темными кольцами $\Delta r_{2,20} = 4{,}8$ мм. Найдите расстояние между девятым и шестнадцатым темными кольцами Ньютона.

Дано:
$\Delta r_{2,20} = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$ м

$\Delta r_{9,16}$ - ?

Решение. Радиус темного кольца в отраженном свете определяется формулой (4.13): $r_к = \sqrt{k\lambda R}$. Отсюда

$$\Delta r_{2,20} = \sqrt{20\lambda R} - \sqrt{2\lambda R} = \sqrt{\lambda R}\left(\sqrt{20} - \sqrt{2}\right), \quad (1)$$

$$\Delta r_{9,16} = \sqrt{16\lambda R} - \sqrt{9\lambda R} = \sqrt{\lambda R}\left(\sqrt{16} - \sqrt{9}\right) = \sqrt{\lambda R}.$$

Из (1) $\sqrt{\lambda R} = \dfrac{\Delta r_{2,20}}{\sqrt{20} - \sqrt{2}}$, тогда $\Delta r_{9,16} = 1{,}56$ мм.

Ответ: $\Delta r_{9,16} = 1{,}56$ мм.

Задача 4.14. Плосковыпуклая линза с показателем преломления $n = 1{,}6$ выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус третьего светового кольца в отраженном свете ($\lambda = 0{,}6$ мкм) равен 0,9 мм. Определите фокусное расстояние линзы. Установка для наблюдения колец Ньютона расположена в воздухе.

Дано:
$n = 1{,}6$
$n_{ср} = 1$
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$r_3 = 9 \cdot 10^{-4}$ м

F - ?

Решение. Согласно формуле тонкой линзы (4.5),

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Для плосковыпуклой линзы $R_2 = \infty$, поэтому

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R_1}. \quad (1)$$

Радиус линзы R_1 можно найти из формулы (4.14) для светлых колец Ньютона в отраженном свете: $r_к = \sqrt{\dfrac{(2k-1)\lambda}{2} R_1}$, тогда при $k = 3$

$$r_3 = \sqrt{\frac{5}{2}\lambda R_1} \text{ и } R_1 = \frac{2r_3^2}{5\lambda}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получаем: $F = \dfrac{2r_3^2}{5(n-1)\lambda}$, $F = 0{,}9$ м.

Ответ: $F = 0{,}9$ м.

Задача 4.15. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм, падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Пространство между линзой ($n_1 = 1{,}55$) и плоской прозрачной пластинкой ($n_2 = 1{,}5$) заполнено жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}6$. Найти радиус кривизны линзы R, если радиус четвертого ($k = 4$) светлого кольца в проходящем свете $r_4 = 1 \cdot 10^{-3}$ м.

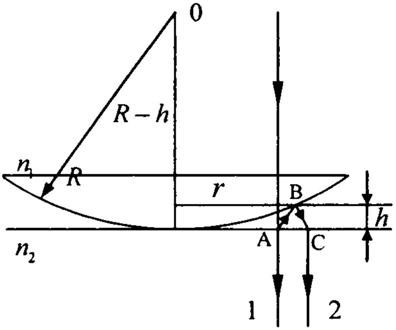

Рис. 91

Дано:
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$n_1 = 1{,}55$
$n_2 = 1{,}5$
$n = 1{,}6$
$r_4 = 1 \cdot 10^{-3}$ м
$k = 4$

R - ?

Решение. В тонкой жидкой пленке неодинаковой толщины каждый луч разделяется на два когерентных. В проходящем свете k-й максимум образуется вследствие интерференции луча 1, прошедшего через точку А в пластинку, и части этого луча (луч 2), отразившейся в точках А и В и прошедшей в пластинку через точку С. Так как $n > n_2$ и $n > n_1$, то при отражении в точках А и В потери полуволны не происходит. Следовательно, приобретаемая лучами 1 и 2 оптическая разность хода

$$\Delta = 2hn. \qquad (1)$$

Для определения h воспользуемся рисунком 91, из которого следует, что радиус интерференционного кольца

$$r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh}, \text{ тогда } h = \frac{r^2}{2R}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая условие максимума, находим

$$2\frac{r^2 n}{2R} = 2k\frac{\lambda}{2}.$$

Откуда радиус кривизны линзы $R = \dfrac{r^2 n}{k\lambda}$, $R \approx 66 \cdot 10^{-2}$ м.

Ответ: $R \approx 66$ см.

4.2.2. Дифракция света

Основные формулы

- Радиусы зон Френеля:

а) для плоской волны

$$\rho_k = \sqrt{k r_0 \lambda}, \ (k = 1, 2, 3, ...), \tag{4.15}$$

где ρ – радиус зоны; k – номер зоны; r_0 – расстояние от круглого отверстия в непрозрачном экране до точки наблюдения, расположенной на оси отверстия; λ – длина световой волны;

б) для сферической волны

$$\rho_k = \sqrt{\frac{R r_0 k \lambda}{(R + r_0)}}, \ (k = 1, 2, 3, ...), \tag{4.16}$$

где R – радиус волновой поверхности.

- В случае дифракции в параллельных лучах от одной щели шириной a при нормальном падении света положение минимумов освещенности на экране определяется углом φ, отсчитанным от нормали к поверхности щели и удовлетворяющим условию

$$a \sin\varphi = \pm k\lambda, \ (k = 1, 2, 3, ...). \tag{4.17}$$

- Положение главных максимумов при нормальном падении света на дифракционную решетку

$$d \sin\varphi = \pm k\lambda, \ (k = 0, 1, 2, 3, ...), \tag{4.18}$$

где d – постоянная (период) дифракционной решетки; φ – угол между нормалью к поверхности дифракционной решетки и направлением дифрагирующих лучей; k – порядок дифракционного спектра.

Задача 4.16. На круглое отверстие диаметром $d = 4$ мм падает нормально параллельный пучок лучей ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии $r_o = 1$ м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения поместить экран?

Дано:
$d = 4 \cdot 10^{-3}$ м
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м
$r_o = 1$ м
k - ?

Решение. Радиус отверстия (рис. 92) соответствует радиусу k-й зоны Френеля при условии, что отверстие пропускает k зон, т. е.

$$\rho_k = \frac{d}{2}. \qquad (1)$$

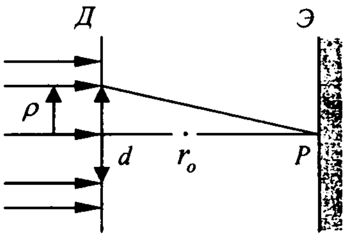

Рис. 92

Используя формулу (4.15)

$$\rho_k = \sqrt{k r_0 \lambda}$$

и выражение (1), получим:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{k r_0 \lambda}, \quad k = \frac{d^2}{4 \lambda r_0}, \quad k = 8 \text{ зон.}$$

Поскольку число открытых зон четно, то центр дифракционной картины будет темным.

Ответ: $k = 8$, пятно темное.

Задача 4.17. Сферическая волна, распространяющаяся от точечного монохроматического источника света ($\lambda = 600$ нм), встречает на своем пути диафрагму с круглым отверстием. Определите, при каком радиусе r отверстия центр дифракционной картины, наблюдаемый на экране, будет максимально освещенным. Считать расстояние от источника света до диафрагмы и от диафрагмы до экрана равным $a = 1$ м.

Дано:
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$a = 1$ м
r - ?

Решение. Применим формулу (4.16), полагая, что $R = r_o = a$ (рис. 93). Радиус отверстия будет соответствовать радиусу k-й зоны Френеля:

$$r = \rho_k = \sqrt{\frac{R r_o k \lambda}{(R + r_o)}} = \sqrt{\frac{a^2 k \lambda}{2a}} = \sqrt{\frac{k \lambda a}{2}}.$$

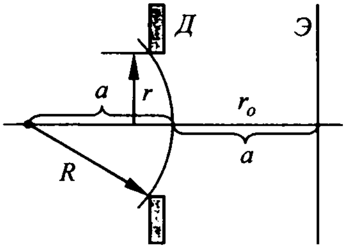

Рис. 93

Чтобы центр дифракционной картины был максимально освещен, в отверстие должна укладываться только одна зона Френеля, т. е. $k = 1$.

Тогда $r = \sqrt{\frac{a\lambda}{2}}$, $r = 0{,}55$ мм.

Ответ: $r = 0{,}55$ мм.

Задача 4.18. Монохроматический свет ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падает нормально на круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. На каком расстоянии от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы в отверстии помещалась одна зона Френеля, две зоны Френеля?

Дано:
$\lambda = 5\cdot 10^{-7}$ м
$d = 0{,}01$ м
1) $k = 1$
2) $k = 2$
---
r_o - ?

Решение. Освещенность центра дифракционной картины, наблюдаемой на экране, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон четное, то в центре дифракционной картины будет темное пятно, если нечетное – светлое.

Используя формулу (4.15) $\rho_k = \sqrt{kr_0\lambda}$, запишем выражение для r_0: $r_0 = \dfrac{\rho_k^2}{k\lambda}$.

В первом случае $\rho_1 = \dfrac{d}{2}$, $r_0 = \dfrac{d^2}{4\lambda}$, $r_0 = 50$ м.

Во втором случае $\rho_2 = \dfrac{d}{2}$, $r_0 = \dfrac{d^2}{8\lambda}$, $r_0 = 25$ м.

Ответ: 1) $r_o = 50$ м; 2) $r_o = 25$ м.

Задача 4.19. На щель шириной $a = 4\lambda$ падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Сколько минимумов будет наблюдаться на экране в дифракционном спектре?

Дано:
$a = 4\lambda$

N - ?

Решение. Из условия (4.17) определим, под каким углом будут наблюдаться минимумы света:

$a\sin\varphi = \pm k\lambda$, отсюда $\sin\varphi = \pm\dfrac{k\lambda}{a}$.

При $k = 1$ $\sin\varphi_1 = \pm\dfrac{\lambda}{4\lambda} = \pm\dfrac{1}{4}$, $\varphi_1 \approx \pm 15°$.

При $k = 2$ $\sin\varphi_2 = \pm\dfrac{2\lambda}{4\lambda} = \pm\dfrac{1}{2}$, $\varphi_2 = \pm 30°$.

При $k = 3$ $\sin\varphi_3 = \pm\dfrac{3\lambda}{4\lambda} = \pm\dfrac{3}{4}$, $\varphi_3 \approx \pm 49°$.

При $k=4$ $\sin\varphi_4 = \pm\frac{4\lambda}{4\lambda} = \pm 1$, $\varphi_4 = \pm 90°$.

Очевидно, что при $k \geq 4$ $\sin\varphi > 1$, что не имеет смысла.

Ответ: $N = 6$ (3 слева и 3 справа от максимума нулевого порядка).

Задача 4.20. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определите расстояние l от щели до экрана, если ширина центрального дифракционного максимума $A = 1$ см.

Дано:
$a = 10^{-4}$ м
$\lambda = 5\cdot10^{-7}$ м
$A = 10^{-2}$ м

l - ?

Решение. Ширина центрального дифракционного максимума – это расстояние между первыми дифракционными минимумами.

Из рис. 94 видно, что

$\frac{A}{2} = l\,\mathrm{tg}\,\varphi$, т. е.

$$l = \frac{A}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}. \qquad (1)$$

Угол φ найдем, используя формулу (4.17):

$a\sin\varphi = k\lambda$, при $k = 1$ $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, тогда

$$\varphi = \arcsin\frac{\lambda}{a}. \qquad (2)$$

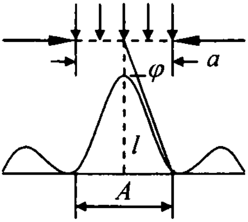

Рис. 94

Подставляя (2) в (1), получим: $l = \dfrac{A}{2\,\mathrm{tg}\left(\arcsin\dfrac{\lambda}{a}\right)}$,

$l = 1$ м.

Ответ: $l = 1$ м.

Задача 4.21. Найдите постоянную дифракционной решетки d, если при наблюдении в монохроматическом свете ($\lambda = 600$ нм) максимум пятого порядка отклонен на угол $\varphi = 18°$. Какое число штрихов N нанесено на единицу длины этой решетки?

Дано:
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$\varphi = 18°$
$k = 5$
d - ? N - ?

Решение. Согласно условию наблюдения главных максимумов дифракционной решетки (4.18),

$d \sin\varphi = k\lambda$, откуда $d = \dfrac{5\lambda}{\sin\varphi}$, $d = 9{,}7 \cdot 10^{-6}$ м.

Число штрихов N, приходящихся на единицу длины решетки, связано с периодом решетки d соотношением $N = \dfrac{1}{d}$, откуда

$N = 103006$ $м^{-1} = 103$ $мм^{-1}$.

Ответ: $d = 9{,}7 \cdot 10^{-6}$ м; $N = 103$ $мм^{-1}$.

Задача 4.22. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет. Определите угол дифракции для линии $\lambda_1 = 550$ нм в четвертом порядке, если этот угол для линии $\lambda_2 = 600$ нм в третьем порядке составляет $30°$.

Дано:
$\lambda_1 = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м
$\lambda_2 = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$\varphi_2 = 30°$
$k_1 = 4$
$k_2 = 3$
φ_1 - ?

Решение. По формуле дифракционной решетки (4.18) для λ_1 имеем:

$$d \sin\varphi_1 = 4\lambda_1; \qquad (1)$$

для λ_2

$$d \sin\varphi_2 = 3\lambda_2. \qquad (2)$$

Поделим правые и левые части уравнения (1) на уравнение (2):

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{4\lambda_1}{3\lambda_2}, \text{ откуда } \sin\varphi_1 = \frac{4\lambda_1 \sin\varphi_2}{3\lambda_2}.$$

Подставляя численные данные, получим: $\varphi_1 = 37°42'$.

Ответ: $\varphi_1 = 37°42'$.

Задача 4.23. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница ($\lambda_2 = 0{,}4$ мкм) спектра третьего порядка?

Дано:
$k_1 = 2$
$k_2 = 3$
$\lambda_2 = 4 \cdot 10^{-7}$ м
λ_1 - ?

Решение. Накладывание двух спектральных линий при наблюдении дифракционной картины означает, что угол дифракции φ для них одинаковый. Запишем формулу (4.18) для этих длин волн:

$$d \sin \varphi = k_1 \lambda_1,$$

$$d \sin \varphi = k_2 \lambda_2,$$

следовательно: $k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$,

$$\lambda_1 = \frac{k_2 \lambda_2}{k_1}, \quad \lambda_1 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 6 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 4.24. На дифракционную решетку длиной $l = 15$ мм, содержащую $N = 3000$ штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 570$ нм. Определите максимально возможный порядок спектра, наблюдаемый с помощью этой решетки.

Дано:
$\lambda = 5{,}7 \cdot 10^{-7}$ м
$N = 3000$
$l = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м
k_{max} - ?

Решение. Максимально возможный порядок дифракционного спектра определяется из условия максимумов дифракционной решетки:

$$d \sin \varphi = k\lambda. \qquad (1)$$

Поскольку значение $\sin \varphi$ не может превышать единицу, то

$$k_{max} \lambda = d. \qquad (2)$$

Постоянная дифракционной решетки

$$d = \frac{l}{N}. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) получим $k_{max} = \dfrac{l}{N\lambda}$, $k_{max} = 8$.

Ответ: $k_{max} = 8$.

4.2.3. Поляризация света

Основные формулы

- Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_Б = \frac{n_2}{n_1}, \tag{4.19}$$

где $i_Б$ – угол падения луча на границу раздела двух прозрачных диэлектриков, при котором отраженный свет полностью линейно поляризован; n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления диэлектриков.

- Закон Малюса

$$J = J_0 \cos^2 \varphi, \tag{4.20}$$

где J – интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор; J_0 – интенсивность поляризованного света, падающего на анализатор; φ – угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

- Степень поляризации света

$$P = \frac{(J_{max} - J_{min})}{(J_{max} + J_{min})}, \tag{4.21}$$

где J_{max}, J_{min} – максимальная и минимальная интенсивности света, соответствующие двум взаимно перпендикулярным компонентам вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ (светового вектора).

Задача 4.25. Пучок естественного света, идущий в воздухе, падает на поверхность глицерина ($n = 1,47$). Определить углы падения и преломления пучка, если отраженный пучок полностью поляризован.

Дано:
$n = 1,47$

i - ?
r - ?

Решение. Свет, отраженный от поверхности диэлектрика (см. рис. 95), полностью поляризован в том случае, если он падает под углом Брюстера, для которого, согласно (4.19),

$$\operatorname{tg} i_Б = \frac{n_2}{n_1},$$

где $n_1 = 1$ (показатель преломления воздуха), $n_2 = n$ (показатель преломления глицерина).

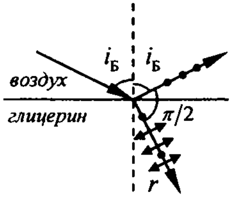

Рис. 95

Тогда $\operatorname{tg} i_Б = n$, $i = i_Б \operatorname{arctg} n$, $i = 55°50'$.

Чтобы определить угол преломления, воспользуемся законом преломления (4.2): $\dfrac{\sin i}{\sin r} = n$, тогда

$\sin r = \dfrac{\sin i}{n}$, отсюда $r \approx 34°10'$.

Задачу можно решить и другим способом. Вспомним, что при падении света под углом Брюстера $i_Б$ отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Тогда $i_Б + r = 90°$ и угол преломления $r = 90° - i_Б$, $r = 34°10'$. Естественно, мы получаем то же самое значение угла.

Ответ: $i \approx 55°50'$; $r \approx 34°10'$.

Задача 4.26. Найдите угол $i_Б$ полной поляризации при отражении света от стекла ($n_с = 1{,}57$), помещенного в воду ($n_в = 1{,}33$). Определите скорость света в воде (рис. 96).

Дано:
$n_с = 1{,}57$
$n_в = 1{,}33$

$i_Б$ - ?
v - ?

Решение. Согласно закону Брюстера (4.19),

$\operatorname{tg} i_Б = \dfrac{n_2}{n_1}$,

при этом $n_2 = n_с$, $n_1 = n_в$.

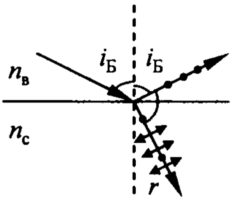

Рис. 96

Тогда $\operatorname{tg} i_Б = \dfrac{n_с}{n_в}$, отсюда $i_Б \approx 50°$.

Абсолютный показатель преломления среды (4.4): $n = c/\text{v}$, тогда, зная $n_в$, найдем скорость распространения света в воде: $\text{v} = \dfrac{c}{n_в}$, $\text{v} = 2{,}2 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $i_Б \approx 50°$; $\text{v} = 2{,}2 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 4.27. Предельный угол полного отражения пучка света на границе раздела жидкости с воздухом равен $45°$. Найдите угол Брюстера для падения луча из воздуха на поверхность этой жидкости.

Дано:
$i = 45°$
$i_Б$ - ?

Решение. Предельный угол полного отражения для границы раздела жидкость–воздух определяется соотношением (4.3): $\sin i = \frac{1}{n}$, тогда $n = \frac{1}{\sin 45°}$, $n = 1,4$.

По закону Брюстера (4.19) $\operatorname{tg} i_Б = n$, тогда $i_Б = \operatorname{arctg} n$, $i_Б \approx 54,7°$.

Ответ: $i_Б \approx 54,7°$.

Задача 4.28. Найдите угол φ между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, проходящего через поляризатор и анализатор, уменьшается в 5 раз.

Дано:
$\frac{J_2}{J_o} = \frac{1}{5}$
φ - ?

Решение. Естественный свет можно представить как наложение двух некогерентных волн, которые поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеют одинаковые интенсивности, т. е.

$$J_0 = 0,5J_\perp + 0,5J_\parallel,$$

где J_0 – интенсивность естественного света; $J_\perp$ и $J_\parallel$ – составляющие интенсивностей поляризованного света, у которых колебания вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля параллельны и перпендикулярны к плоскостям падения.

Поляризатор пропускает колебания, параллельные его главной плоскости, интенсивность которых $J_\parallel$, и полностью задерживает колебания, перпендикулярные этой плоскости, интенсивность которых $J_\perp$. Интенсивность естественного света J_0 после прохождения поляризатора уменьшается и становится равной $J_1 = 0,5J_0$ (рис. 97).

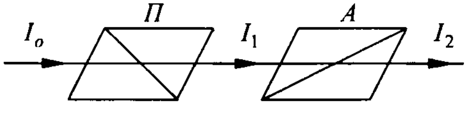

Рис. 97

После прохождения света через анализатор, согласно закону Малюса (4.20), луч имеет интенсивность

$J_2 = J_1\cos^2\varphi = 0{,}5J_0\cos^2\varphi$.

По условию $\dfrac{J_2}{J_0} = \dfrac{1}{5}$ или $\dfrac{J_2}{J_0} = 0{,}5\cos^2\varphi$, тогда $\cos^2\varphi = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$ и $\varphi = 50{,}8°$.

Ответ: $\varphi = 50{,}8°$.

Задача 4.29. Две призмы Николя расположены так, что угол между их главными плоскостями составляет $60°$.

1. Во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через одну призму Николя?

2. Во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через обе призмы Николя?

При прохождении каждой призмы потери на отражение и поглощение света составляют 6%.

Дано:
$\varphi = 60°$
$k = 0{,}06$

1) $\dfrac{J_1}{J_0}$ - ?

2) $\dfrac{J_2}{J_0}$ - ?

Решение. 1) Интенсивность естественного света J_0, прошедшего через призму-поляризатор, уменьшается и становится равной J_1. Без учета потерь $J_1 = 0{,}5J_0$; учтя потери на отражение и поглощение,

$$J_1 = 0{,}5J_0(1-k).$$

Найдем относительное уменьшение интенсивности света, прошедшего через первую призму:

$$\frac{J_0}{J_1} = \frac{J_0}{0{,}5J_0(1-k)} = \frac{2}{(1-k)}, \quad \frac{J_0}{J_1} = \frac{2}{1-0{,}06} = 2{,}13. \qquad (1)$$

Таким образом, интенсивность уменьшится в 2,13 раза.

2) Плоскополяризованный луч, полученный с помощью первой призмы, падает на вторую призму Николя. Его интенсивность определяется законом Малюса (4.20): $J_2 = J_1\cos^2\varphi$. Учитывая потери интенсивности во второй призме, получим:

$$J_2 = J_1(1-k)\cos^2\varphi.$$

Тогда $\dfrac{J_0}{J_2} = \dfrac{J_0}{J_1(1-k)\cos^2\varphi}$, заменяя $\dfrac{J_0}{J_1}$ по формуле (1), получим:

$$\frac{J_0}{J_2}=\frac{2}{(1-k)^2\cos^2\varphi},\quad \frac{J_0}{J_2}=\frac{2}{(1-0,06)^2\cos^2 60^\circ}=9,05\,.$$

Таким образом, после прохождения света через две призмы Николя интенсивность его уменьшается в 9,05 раза.

Ответ: 2,13; 9,05.

Задача 4.30. Степень поляризации частично поляризованного света равна 0,8. Во сколько раз отличается амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, прошедшего через поляризатор, от амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности?

Дано:

$P=0,8$

$\dfrac{E_{max}}{E_{min}}$ - ?

Решение. Согласно формуле (4.21), степень поляризации определяется выражением:

$$P=\frac{(J_{max}-J_{min})}{(J_{max}+J_{min})}.$$

Поскольку интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора E, т. е. $I\sim E^2$, то

$$P=\frac{\left(E_{max}^2-E_{min}^2\right)}{\left(E_{max}^2+E_{min}^2\right)}=\frac{\left(\dfrac{E_{max}}{E_{min}}\right)^2-1}{\left(\dfrac{E_{max}}{E_{min}}\right)^2+1},\quad P\left[\left(\frac{E_{max}}{E_{min}}\right)^2+1\right]=\left(\frac{E_{max}}{E_{min}}\right)^2-1,$$

$$\left(\frac{E_{max}}{E_{min}}\right)^2=\frac{P+1}{1-P}.$$

Подставляя численные данные, найдем

$$\frac{E_{max}}{E_{min}}=3.$$

Ответ: отношение амплитуд $\dfrac{E_{max}}{E_{min}}=3$.

4.3. Квантовая природа излучения

4.3.1. Тепловое излучение

Основные формулы

- Энергетическая светимость тела

$$R_э = \frac{\Phi_э}{S} = \frac{1}{S}\frac{dW_э}{dt} = \frac{N}{S}, \ [R_э] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}, \qquad (4.22)$$

где $\Phi_э$ – поток излучения; S – площадь излучающей поверхности; $dW_э$ – энергия, излучаемая поверхностью S за время dt; N – мощность излучения с поверхности S.

- Энергетическая светимость абсолютно черного тела определяется формулой Стефана–Больцмана:

$$R_э = \sigma T^4, \qquad (4.23)$$

где T – термодинамическая температура, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ – постоянная Стефана–Больцмана.

- Если излучающее тело не является абсолютно черным, то

$$R'_э = K\sigma T^4, \qquad (4.24)$$

где K – коэффициент черноты ($K < 1$ для серого тела).

- Закон смещения Вина: длина волны λ_{max}, на которую приходится максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости в спектре абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре, т. е.

$$\lambda_{max} = b/T, \qquad (4.25)$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К – постоянная Вина.

Задача 4.31. Температура внутренней поверхности электрической печи $T = 700°\text{C}$. Определите мощность излучения печи через небольшое отверстие диаметром $d = 5{,}0$ см, рассматривая его как излучение абсолютно черного тела.

Дано:
$T = 973$ К
$d = 5 \cdot 10^{-2}$ м

N - ?

Решение. Из закона Стефана–Больцмана (4.23)

$$R_э = \sigma T^4. \qquad (1)$$

Согласно формуле (4.22),

$$N = R_э S,\tag{2}$$

где площадь отверстия

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.\tag{3}$$

Подставляя (3) и (1) в (2), получим $N = \sigma T^4 \dfrac{\pi d^2}{4}$, $N = 99,7$ Вт,

$$[N] = \frac{Вт \cdot К^4 \cdot м^2}{м^2 \cdot К^4} = Вт.$$

Ответ: $N = 99,7$ Вт.

Задача 4.32. Найдите солнечную постоянную K, т. е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Дано:
$T = 5800$ К
$R_с = 6,96 \cdot 10^8$ м
$r = 1,496 \cdot 10^{11}$ м

K - ?

Решение. По условию задачи излучение Солнца близко к излучению абсолютно черного тела, тогда по закону Стефана–Больцмана его энергетическая светимость

$$R_э = \sigma T^4.\tag{1}$$

Мощность излучения Солнца:

$$N = R_э S_с,\tag{2}$$

где $S_с$ – площадь поверхности Солнца,

$$S_с = 4\pi R_с^2.\tag{3}$$

Подставляя (1) и (3) в (2), получим:

$$N = 4\pi R_с^2 \sigma T^4.\tag{4}$$

По условию задачи мощность, излучаемая Солнцем, падает на внутреннюю поверхность сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Солнца до Земли, поэтому площадь этой сферы будет

$$S = 4\pi r^2.\tag{5}$$

По определению солнечная постоянная $K = \dfrac{N}{S}$. С учетом уравнений (4), (5) получим:

$$K=\frac{4\pi R_c^2\sigma T^4}{4\pi r^2}=\frac{R_c^2\sigma T^4}{r^2},\ [K]=\frac{\text{м}^2\cdot\text{Вт}\cdot\text{К}^4}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},\ K=1,38\frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $K=1,38\frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$.

Задача 4.33. Мощность излучения расплавленного свинца, взятого при температуре плавления, площадь поверхности которого $S=40$ см^2, равна $N=17,6$ Вт. Найдите отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры.

Дано:
$T=600$ К
$S=4\cdot10^{-3}$ м^2
$N=17,6$ Вт
K - ?

Решение. Расплавленный свинец ведет себя как серое тело. По формуле (4.24) его энергетическая светимость $R'_э=K\sigma T^4$, а мощность излучения $N=R'_эS$, т. е.

$$R'_э=\frac{N}{S}. \qquad (1)$$

Если бы поверхность свинца была абсолютно черной, то по закону Стефана–Больцмана (4.23) энергетическая светимость была бы

$$R_э=\sigma T^4, \qquad (2)$$

где T – температура плавления свинца.

Используя формулы (1) и (2), получаем:

$$K=\frac{R'_э}{R_э}=\frac{N}{S\sigma T^4},\ [K]=\frac{\text{м}^2\cdot\text{Вт}\cdot\text{К}^4}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4\cdot\text{Вт}}=1,\ K=0,6.$$

Ответ: $K=0,6$.

Задача 4.34. Пренебрегая потерями тепла на теплопроводность, подсчитайте мощность электрического тока, необходимую для накаливания вольфрамовой нити диаметром 1 мм и длиной 20 см до температуры 3500 К. Коэффициент черноты вольфрама для данной температуры $K=0,35$. Какой ток потечет через лампу, если напряжение в сети 220 В?

Дано:
$T=3500$ К
$d=1\cdot10^{-3}$ м
$l=0,2$ м
$K=0,35$
$U=220$ В
N - ? I - ?

Решение. Поскольку нить излучает как серое тело, то, согласно формуле (4.24), энергетическая светимость

$$R'_э=K\sigma T^4, \qquad (1)$$

а мощность излучения нити

$$N=R'_эS, \qquad (2)$$

где S – площадь поверхности вольфрамовой нити, равная

$$S = \pi dl. \qquad (3)$$

Подставляя (1), (3) в (2), получим:

$$N = K\sigma T^4 \pi dl, \ [N] = \frac{\text{Вт}\cdot\text{К}^4\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4} = \text{Вт}, \ N = 1870 \text{ Вт}.$$

С другой стороны, мощность тока $N = IU$, тогда

$$I = \frac{N}{U}, \ [I] = \frac{\text{Вт}}{\text{В}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}}{\text{В}} = \text{А}, \ I = 8{,}5 \text{ А}.$$

Ответ: $N = 1870$ Вт; $I = 8{,}5$ А.

Задача 4.35. На какую длину волны λ_{max} приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела при температуре $t = 0°$ С?

Дано:
$T = 273$ К

λ_{max} - ?

Решение. Согласно закону Вина (4.25)

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T},$$

где $b = 2{,}9\cdot 10^{-3}$ м · К – постоянная Вина.

Тогда $\lambda_{max} = 10{,}6$ мкм.

Ответ: $\lambda_{max} = 10{,}6$ мкм.

Задача 4.36. Энергетическая светимость абсолютно черного тела $R_э = 10 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$. Определите длину волны λ_{max}, соответствующую максимуму спектральной плотности энергетической светимости этого тела.

Дано:
$R_э = 10^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$
$b = 2{,}9\cdot 10^{-3}$ м · К

λ_{max} - ?

Решение. Согласно закону смещения Вина (4.25)

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}. \qquad (1)$$

По закону Стефана–Больцмана (4.23) $R_э = \sigma T^4$, тогда

$$T = \sqrt[4]{\frac{R_э}{\sigma}}. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получим:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{\sqrt[4]{R_э/\sigma}}, \ [\lambda_{max}] = \frac{м \cdot К}{\sqrt[4]{\frac{Вт}{м^2} \cdot \frac{м^2 \cdot К^4}{Вт}}} = м, \ \lambda_{max} = 4{,}47 \text{ мкм}.$$

Ответ: $\lambda_{max} = 4{,}47$ мкм.

Задача 4.37. Черное тело находится при температуре $T_1 = 3000$ К. При остывании тела длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 8$ мкм. Определите температуру T_2, до которой тело охладилось.

Дано:
$T_1 = 3000$ К
$\Delta\lambda = 8 \cdot 10^{-6}$ м

T_2 - ?

Решение. Из закона Вина (4.25) имеем:

$$\lambda_{max\,1} = \frac{b}{T_1} \text{ и } \lambda_{max\,2} = \frac{b}{T_2}.$$

Изменение длины волны, на которую приходится максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости,

$$\Delta\lambda = \lambda_{max\,2} - \lambda_{max\,1} = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1},$$

откуда

$$T_2 = \frac{b}{\Delta\lambda + \frac{b}{T_1}}, \ [T_2] = \frac{м \cdot К}{м + \frac{м \cdot К}{К}} = К, \ T_2 = 323 \text{ К}.$$

Ответ: $T_2 = 323$ К.

Задача 4.38. Черное тело нагрели от температуры $T_1 = 600$ К до $T_2 = 2400$ К. Как изменилась длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости?

Дано:
$T_1 = 600$ К
$T_2 = 2400$ К

$\Delta\lambda$ - ?

Решение. Из закона Вина (4.25)

$$\lambda_{max\,1} = \frac{b}{T_1} \text{ и } \lambda_{max\,2} = \frac{b}{T_2}.$$

Тогда $\Delta\lambda = \lambda_{max\,2} - \lambda_{max\,1} = \dfrac{b}{T_2} - \dfrac{b}{T_1}$,

$\Delta\lambda = -3{,}62 \cdot 10^{-6}$ м.

Ответ: уменьшилась на 3,62 мкм.

Задача 4.39. Принимая Солнце за абсолютно черное тело и учитывая, что максимальное значение его плотности энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_{max} = 500$ нм, определите массу, теряющуюся Солнцем за 10 мин за счет излучения.

Дано:
$\lambda_{max} = 5 \cdot 10^{-7}$ м
$t = 600$ с
$R_c = 6{,}95 \cdot 10^8$ м

Δm - ?

Решение. Из закона Вина (4.25) определим температуру поверхности Солнца:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \text{ тогда } T = \frac{b}{\lambda_{max}}. \qquad (1)$$

Мощность, излучаемая Солнцем, равна

$$N = R_э S. \qquad (2)$$

Энергетическую светимость $R_э$ найдем по закону Стефана–Больцмана для абсолютно черного тела (4.23):

$$R_э = \sigma T^4. \qquad (3)$$

Площадь поверхности Солнца

$$S = 4\pi R_c^2. \qquad (4)$$

Подставляя (1), (3), (4) в (2), получим:

$$N = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_{max}}\right)^4 4\pi R_c^2.$$

Найдем изменение энергии Солнца ΔW за счет излучения за время t:

$$\Delta W = Nt = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_{max}}\right)^4 4\pi R_c^2 t. \qquad (5)$$

С другой стороны, по закону взаимосвязи массы и энергии

$$\Delta W = \Delta m c^2, \qquad (6)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света, а Δm – изменение массы Солнца. Приравнивая правые части уравнений (5) и (6), получаем:

$$\Delta m c^2 = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_{max}}\right)^4 4\pi R_c^2 t, \text{ откуда } \Delta m = \frac{4\pi R_c^2 t\sigma b^4}{\lambda_{max}^4 c^2}, \ \Delta m = 2{,}6 \cdot 10^{12} \text{ кг},$$

$$[\Delta m] = \frac{м^2 \cdot с \cdot \dfrac{Вт}{м^2 К^4} \cdot м^4 \cdot К^4}{м^4 \cdot м^2/с^2} = \frac{с^3 Вт}{м^2} = \frac{с^3 Дж}{с \cdot м^2} = \frac{Н \cdot м \cdot с^2}{м^2} = \frac{кг \cdot м^2 \cdot с^2}{с^2 \cdot м^2} = кг.$$

Ответ: $\Delta m = 2{,}6 \cdot 10^{12}$ кг.

4.3.2. Квантово-оптические явления

Основные формулы

- Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (4.26)$$

где ν – частота света; λ – длина световой волны; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

- Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + E_{k(\max)}, \qquad (4.27)$$

где $h\nu$ – энергия поглощенного фотона; A – работа выхода электрона; $E_{k(\max)}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

- Давление света на поверхность

$$P = \frac{E_o(1+\rho)}{c} = \omega(1+\rho), \qquad (4.28)$$

где E_o – количество энергии, падающей на единицу поверхности в единицу времени; ρ – коэффициент отражения; c – скорость света в вакууме; ω – объемная плотность энергии.

- Эффект Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2k\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (4.29)$$

где $\Delta\lambda$ – комптоновское изменение длины волны; θ – угол рассеяния; $k = 0{,}242 \cdot 10^{-11}$ м – комптоновская длина волны.

Задача 4.40. Красная граница фотоэффекта для металла $\lambda_к = 6{,}2 \cdot 10^{-5}$ см. Найдите величину запирающего напряжения $U_з$ для фотоэлектронов при освещении металла светом длиной волны $\lambda = 330$ нм.

Дано:
$\lambda_к = 6{,}2 \cdot 10^{-7}$ м
$\lambda = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ м

$U_з$ - ?

Решение. Запирающим напряжением $U_з$ при фотоэффекте называют напряжение на электродах, которое способно полностью остановить, затормозить электроны, вылетевшие из металла. Это напряжение должно быть таким, чтобы работа соответствующего электрического поля $A_з$ была равна кинетической энергии E_k вылетевших из металла электронов:

$$A_з = E_k \text{ или } eU_з = E_k. \qquad (1)$$

Кинетическую энергию E_k определим из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта (4.27):

$$h\nu = A + E_k, \text{ тогда } E_k = h\nu - A. \qquad (2)$$

Работу выхода электрона из металла A можно определить, если известна красная граница фотоэффекта $\lambda_к$, т. е. предельная длина волны, при которой еще возможен фотоэффект:

$$A = h\nu_к = h\frac{c}{\lambda_к}. \qquad (3)$$

Подставляя выражения (2), (3) в (1), получим:

$$eU_з = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda_к}, \text{ откуда } U_з = \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_к}\right), \qquad (4)$$

$[U] = \dfrac{Дж \cdot с \cdot м}{с \cdot Кл \cdot м} = \dfrac{Дж}{Кл} = В$. Подставив в уравнение (4) численные данные, найдем запирающее напряжение: $U_з$ = 1,76 В.

Ответ: $U_з$ = 1,76 В.

Задача 4.41. На идеально отражающую поверхность площадью $S = 5$ см^2 за время $t = 3$ мин нормально падает монохроматический свет, энергия которого $W = 9$ Дж. Определите световое давление, оказываемое на поверхность.

Дано:
$S = 5 \cdot 10^{-4}$ м^2
$t = 180$ с
$\rho = 1$
$W = 9$ Дж

P - ?

Решение. Давление, производимое светом, определяется формулой (4.28):

$$P = \frac{E_0(1+\rho)}{c}, \qquad (1)$$

где E_o – количество энергии, падающей на единицу поверхности в единицу времени, т. е.

$$E_0 = \frac{W}{St}. \qquad (2)$$

В случае идеально отражающей поверхности (зеркальной) коэффициент отражения $\rho = 1$. Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\rho = 1$, получим:

$$P = \frac{2W}{Stc}, \; [P] = \frac{Дж \cdot с}{м^2 \cdot с \cdot м} = \frac{Дж}{м^3} = \frac{Н \cdot м}{м^3} = \frac{Н}{м^2} = Па. \qquad (3)$$

Подставим численные данные в (3): $P = 667$ нПа.

Ответ: $P = 667$ нПа.

Задача 4.42. Угол рассеяния фотона с энергией 1,2 МэВ на свободном электроне $60°$. Найдите длину волны рассеянного фотона.

Дано:
$\varepsilon = 1{,}2$ МэВ $=$
$= 1{,}92 \cdot 10^{-13}$ Дж
$\theta = 60°$

λ' - ?

Решение. Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии определяется формулой (4.29): $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2k\sin^2\dfrac{\theta}{2}$, тогда

$$\lambda' = \lambda + 2k\sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (1)$$

Выразим λ через энергию фотона (4.26): $\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$, т. е. $\lambda = \dfrac{hc}{\varepsilon}$, и, подставив в (1), получим:

$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon} + 2k\sin^2\frac{\theta}{2},\ [\lambda'] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Дж}} + \text{м} = \text{м}. \qquad (2)$$

После подстановки численных данных получим:

$\lambda' = 2{,}25 \cdot 10^{-12}$ м.

Ответ: $\lambda' = 2{,}25 \cdot 10^{-12}$ м.

4.4. Физика атома и атомного ядра

4.4.1. Постулаты Бора и оптические спектры излучения

Основные формулы

- Согласно теории Бора, существуют стационарные состояния атома, в которых он не излучает энергии, при этом момент импульса электрона кратен $\hbar$:

$$m\text{v}_n r_n = n\hbar, \qquad (4.30)$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – постоянная Планка, деленная на 2π; m – масса электрона; r_n – радиус n-й орбиты электрона; v_n – его скорость; n – главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, ...$).

- При переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается или поглощается порция энергии:

$$\hbar\omega = E_p - E_n, \qquad (4.31)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота; E_p и E_n – энергетические уровни с квантовыми числами p и n; ν – частота излучения.

- Для водорода и водородоподобных ионов частоты излучаемых или поглощаемых фотонов определяются формулой Бальмера:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = RcZ^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \qquad (4.32)$$

где c – скорость света в вакууме; Z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева; $R = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{м}^{-1}$ – постоянная Ридберга; λ – длина волны излучения. Число n_1 определяет серию, n_2 – отдельную линию этой серии.

Замечание. Имеет место множество задач, в которых рассматриваются спектры водородоподобных ионов, т. е. ионов, имеющих по одному электрону: однократно ионизированный гелий He^+, двукратно ионизированный литий Li^{++} и т. д. Это означает, что у He^+ число $Z = 2$, а у Li^{++} – $Z = 3$.

- Энергия электрона, находящегося на n-й орбите:

$$E_n = -\frac{e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}, \qquad (4.33)$$

где e – заряд электрона, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Задача 4.43. Электрон находится на третьей боровской орбите атома водорода. Определите: 1) радиус этой орбиты; 2) скорость электрона на этой орбите; 3) частоту вращения электрона на этой орбите; 4) потенциальную энергию электрона; 5) кинетическую энергию электрона; 6) полную энергию электрона на этой орбите.

Дано:
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$Z = 1$
$n = 3$

1) r_3 - ? 2) v_3 - ?
3) ν - ? 4) E_p - ?
5) E_k - ? 6) E - ?

Решение. На электрон, движущийся в атоме по n-й орбите, действует кулоновская сила:

$$F = \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}, \qquad (1)$$

где Z – порядковый номер элемента.

Эта сила сообщает электрону нормальное ускорение:

$$a_н = \frac{v_n^2}{r_n}, \qquad (2)$$

где v_n – скорость электрона на n-й орбите.

По второму закону Ньютона

$$F = ma_{н}. \qquad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3), получим:

$$m\frac{v_n^2}{r_n} = \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}. \qquad (4)$$

С другой стороны, согласно первому постулату Бора (4.30)

$$m v_n r_n = n\hbar. \qquad (5)$$

Решая уравнения (4) и (5), найдем:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_o \hbar^2}{me^2 Z}\cdot n^2, \qquad (6)$$

$$[r_n] = \frac{\text{Ф}\cdot\text{Дж}^2\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{Кл}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Дж}^2\cdot\text{с}^2}{\text{В}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{Кл}^2} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{м},$$

$$v_n = \frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 \hbar}\cdot\frac{1}{n}, \qquad (7)$$

$$[v_n] = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{Ф}\cdot\text{Дж}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{Кл}\cdot\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для третьей боровской орбиты $n = 3$, тогда

$r_3 = 476{,}1\cdot 10^{-12}$ м, $v_3 = 0{,}731\cdot 10^6$ м/с.

Период обращения электрона по орбите

$$T = \frac{2r_n\pi}{v_n},$$

а частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v_n}{2r_n\pi}.$$

Тогда, используя уравнения (6) и (7), получим:

$$\nu = \frac{me^4 Z^2}{32\varepsilon_0^2\pi^3\hbar^3 n^3},\ [\nu] = \frac{\text{кг}\cdot\text{Кл}^4\text{м}^2}{\text{Ф}^2\text{Дж}^3\text{с}^3} = \frac{\text{кг}\cdot\text{Кл}^4\text{м}^2\text{В}^2}{\text{Кл}^2\text{Дж}\cdot\text{с}^3\text{В}^2\text{Кл}^2} = \frac{\text{м}^2\text{кг}}{\text{с}^3\text{Дж}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{Гц},$$

для $n = 3$ частота вращения $\nu = 2{,}42\cdot 10^{14}$ Гц.

Зная скорость движения электрона по n-й орбите (7), определим его кинетическую энергию:

$$E_k = \frac{mv_n^2}{2}, \text{ или } E_k = \frac{me^4 Z^2}{32\varepsilon_o^2\pi^2\hbar^2 n^2}, \qquad (8)$$

$$[E_k]=\frac{кг\cdot Кл^4\cdot м^2}{Ф^2\cdot Дж^2\cdot с^2}=\frac{Кл^4}{Ф^2\cdot Дж}=\frac{Кл^4\cdot В^2}{Кл^2\cdot В\cdot Кл}=Кл\cdot В=Дж.$$

При $n=3$ получим: $E_k=2{,}43\cdot 10^{-19}$ Дж $=1{,}5$ эВ.

Потенциальная энергия E_p – это энергия взаимодействия электрона с ядром: $E_p=-\dfrac{e^2Z}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$, или, подставляя формулу (6) для r_n, запишем:

$$E_p=-\frac{me^4Z^2}{16\varepsilon_0^2\pi^2\hbar^2n^2}. \qquad (9)$$

При $n=3$ получим $E_p=-3{,}0$ эВ.

Полная энергия атома E является суммой кинетической энергии вращения электрона и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром:

$$E=E_k+E_p. \qquad (10)$$

Подставляя (8), (9) в (10), получим:

$$E=-\frac{me^4Z^2}{32\varepsilon_0^2\pi^2\hbar^2n^2} \text{ или } E=-1{,}5 \text{ эВ}. \qquad (11)$$

Ответ: $r_3=476{,}1\cdot 10^{-12}$ м; $v_3=0{,}731\cdot 10^6$ м/с; $\nu=2{,}42\cdot 10^{14}$ Гц; $E_k=1{,}5$ эВ; $E_p=-3{,}0$ эВ; $E=-1{,}5$ эВ.

Задача 4.44. На дифракционную решетку с периодом $d=5$ мкм нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Оказалось, что в спектре дифракционный максимум пятого порядка, наблюдаемый под углом $\varphi=7°$, соответствовал одной из линий серии Лаймона. Определите главное квантовое число, соответствующее энергетическому уровню, с которого произошел переход.

Дано:
$d=5\cdot 10^{-6}$ м
$k=5$
$\varphi=7°$
$Z=1$
$n_1=1$

n_2 - ?

Решение. Из условия главных максимумов для дифракционной решетки (4.18)

$$d\sin\varphi=k\lambda$$

можно определить длину световой волны:

$$\lambda=\frac{d\sin\varphi}{k}. \qquad (1)$$

Связь длины волны света с номерами орбит электрона в атоме водорода устанавливается формулой Бальмера (4.32):

$$\nu = cRZ^2\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right), \text{ так как } \nu = \frac{c}{\lambda}, \text{ то } \frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right), \qquad (2)$$

где Z – порядковый номер элемента (для водорода $Z = 1$). Для серии Лаймона $n_1 = 1$ и формула (2) примет вид:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(1-\frac{1}{n_2^2}\right). \qquad (3)$$

Подставив в (3) выражение (2), получим:

$$\frac{k}{d\sin\varphi} = R\left(1-\frac{1}{n_2^2}\right), \text{ откуда } n_2 = \left(1-\frac{k}{Rd\sin\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Проведем численный расчет и проверим размерность:

$$n_2 = \left(1-\frac{5}{1{,}097\cdot 10^7\ \text{м}^{-1}\cdot 5\cdot 10^{-6}\ \text{м}\cdot 0{,}122}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2.$$

Переход произошел со второго энергетического уровня на первый.

Ответ: $n_2 = 2$.

Задача 4.45. Определите потенциал ионизации φ_i и первый потенциал возбуждения φ_1 атома водорода.

Дано:
$Z = 1$
$R = 1{,}1\cdot 10^7\,\text{м}^{-1}$

φ_i - ?
φ_1 - ?

Решение. Потенциалом ионизации φ_i называют ту наименьшую разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем электрическом поле электрон, чтобы при столкновении с данным невозбужденным атомом ионизировать его. Работа по удалению электрона из атома A_i должна равняться работе сил электрического поля, ускоряющего электрон, поэтому

$$A_i = e\varphi_i. \qquad (1)$$

С другой стороны, работа ионизации A_i равна кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом водорода при переходе электрона с первой орбиты на бесконечно удаленную. Тогда, применив формулу Бальмера (3.32) и положив в ней $n_1 = 1$, $n_2 = \infty$, получим:

$$A_i = h\nu = hcRZ^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty^2}\right) = hcRZ^2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$\varphi_i = \frac{hcRZ^2}{e}, \ \varphi_i = 13{,}6 \text{ В}. \qquad (3)$$

Первый потенциал возбуждения φ_1 есть та наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с возбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние. Для атома водорода это соответствует переходу электрона с первой боровской орбиты на вторую. Снова приравняв работу сил ускоряющего электрического поля $e\varphi_1$ кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом при его переходе в первое возбужденное состояние (4.32), положив $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, получим:

$$e\varphi_1 = h\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hcRZ^2, \text{ отсюда}$$

$$\varphi_1 = \frac{3hcRZ^2}{e}, \ [\varphi_1] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{Кл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{Кл}}{\text{Кл}} = \text{В}, \ \varphi_1 = 10{,}2 \text{ В}.$$

Ответ: $\varphi_i = 13{,}6$ В; $\varphi_1 = 10{,}2$ В.

Задача 4.46. Найдите длину волны λ фотона, соответствующего переходу электрона со второй орбиты на первую для двукратно ионизированного атома лития.

Дано:
$Z = 3$
Li^{++}
$n_1 = 1$,
$n_2 = 2$

λ - ?

Решение. Согласно второму постулату Бора, частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой (4.31): $\hbar\omega = E_p - E_n$, где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, а $\omega = 2\pi\nu$, тогда $h\nu = E_p - E_n$.

В нашем случае $p = 2$, $n = 1$, т. е. $h\nu = E_2 - E_1$.

В водородоподобных ионах частоты излучаемых фотонов определяются формулой Бальмера (4.32): $\nu = \dfrac{c}{\lambda} = RcZ^2\left(\dfrac{1}{n_1^2} - \dfrac{1}{n_2^2}\right)$, тогда

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = RZ^2\frac{3}{4}, \ \lambda = \frac{4}{3RZ^2}. \qquad (1)$$

Для двукратно ионизированного атома лития $Z = 3$, тогда $\lambda = 13{,}5$ нм.

Ответ: $\lambda = 13{,}5$ нм.

Задача 4.47. Какую разность потенциалов прошел электрон, если, сталкиваясь с атомом ртути, переводит его в первое возбужденное состояние? Частота излучения фотона, соответствующая переходу атома ртути в нормальное состояние, равна: $\nu = 5{,}63 \cdot 10^{14}$ Гц.

Дано:
$\nu = 5{,}63 \cdot 10^{14}$ Гц

U - ?

Решение. Электрон, ускоренный электрическим полем, приобретает кинетическую энергию

$\Delta E_к = eU$.

Эту энергию электрон передает атому, переводя его в возбужденное состояние:

$$\Delta E_к = h\nu .$$

Таким образом, $eU = h\nu$, откуда $U = \dfrac{h\nu}{e}$, $[U] = \dfrac{Дж \cdot с}{с \cdot Кл} = В$, $U = 2{,}3$ В.

Ответ: $U = 2{,}3$ В.

4.4.2. Волновые свойства вещества

Основные формулы

- Длина волны де Бройля частицы с импульсом p

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\mathrm{v}}, \tag{4.34}$$

где m – масса частицы; v – ее скорость; h – постоянная Планка.

- Когда скорость частицы сравнима со скоростью света в вакууме:

$$p = m\mathrm{v} = \frac{m_o\mathrm{v}}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \text{ и } \lambda = \frac{h}{m_o\mathrm{v}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} . \tag{4.35}$$

- Иногда импульс частицы удобно выражать через ее кинетическую энергию E_k. В классическом случае

$$p = \sqrt{2m_oE_k} , \tag{4.36}$$

в релятивистском случае

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_k(E_k + 2E_o)} , \tag{4.37}$$

где $E_o = m_oc^2$ – энергия покоя частицы.

• Соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar \text{ и } \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (4.38)$$

где Δp_x – неопределенность проекции импульса частицы на ось x; Δx – неопределенность ее координаты; ΔE – неопределенность энергии; Δt – время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

Задача 4.48. Найдите длину волны де Бройля λ для пучка протонов, прошедших разность потенциалов $U_1 = 1$ В, $U_2 = 1$ МВ.

Дано:
$U_1 = 1$ В
$U_2 = 1 \cdot 10^6$ В
$m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

λ_1 - ?
λ_2 - ?

Решение. Пучок элементарных частиц обладает свойством плоской волны, распространяющейся в направлении перемещения этих частиц. Длина волны, соответствующая этому пучку, определяется соотношением де Бройля (4.34):

$$\lambda = \frac{h}{m\text{v}}. \quad (1)$$

Если скорость частиц соизмерима со скоростью света, то масса

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{\text{v}^2}{c^2}}} \quad (2)$$

зависит от скорости движения.

Найдем скорость протонов, прошедших разность потенциалов U_1 и U_2. Для этого учтем, что после прохождения ускоряющей разности потенциалов кинетическая энергия протона увеличивается: $eU = \frac{m\text{v}^2}{2}$. Отсюда $\text{v} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$.

При $U_1 = 1$ В получим $\text{v}_1 = 1{,}38 \cdot 10^4$ м/с, что гораздо меньше скорости света.

При $U_2 = 1 \cdot 10^6$ В получим $\text{v}_2 = 1{,}38 \cdot 10^7$ м/с, что близко к скорости света.

В первом случае при определении длины волны можно пользоваться формулой (1):

$$\lambda_1 = \frac{h}{m\text{v}_1}, \; [\lambda_1] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \text{м}, \; \lambda_1 = 29 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Во втором случае следует использовать релятивистскую зависимость массы от скорости: $\lambda_2 = \dfrac{h\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}{m_0 v_2}$, $\lambda_2 = 2{,}86 \cdot 10^{-14}$ м.

Ответ: $\lambda_1 = 29 \cdot 10^{-12}$ м, $\lambda_2 = 2{,}86 \cdot 10^{-14}$ м.

Задача 4.49. Найдите длину волны де Бройля λ:

а) для электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите;

б) нейтрона, движущегося со средней квадратичной скоростью при $T = 290$ К;

в) протона, движущегося в однородном магнитном поле с индукцией $B = 15$ мТл по окружности радиусом $R = 1{,}4$ м.

Дано:

а) $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$n = 3$

б) $m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
$T = 290$ К
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

в) $B = 15 \cdot 10^{-3}$ Тл
$R = 1{,}4$ м
$m = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг

λ - ?

Решение. а) Длина волны де Бройля определяется соотношением (4.34)

$$\lambda = \frac{h}{m v}. \tag{1}$$

Скорость электрона, находящегося на n-й боровской орбите, определяется формулой (4.30)

$$m v_n r_n = n\hbar. \tag{2}$$

На электрон, движущийся в атоме, действует кулоновская сила, сообщающая электрону центростремительное ускорение:

$m\dfrac{v_n^2}{r_n} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r_n^2}$, откуда радиус орбиты

$$r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m v_n^2}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получим:

$$v_n = \frac{1}{n}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o\hbar} = \frac{1}{n}\frac{e^2}{2\varepsilon_o h}. \tag{4}$$

Подсчитаем скорость электрона для $n = 3$, тогда $v_3 = 7{,}28 \cdot 10^5$ м/с. Т. к. $v_3 \ll c$, то по формуле (1) определяем длину волны: $\lambda = 1$ нм.

б) Средняя квадратичная скорость нейтрона

$\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$, $\langle v \rangle = 2{,}68 \cdot 10^3$ м/с, т. е. $\langle v \rangle << c$, поэтому длина волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{m\langle v \rangle}$, $\lambda = 148$ пм,

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

в) На протон, движущийся по окружности в магнитном поле, действует сила Лоренца, которая сообщает частице центростремительное ускорение, т. е.

$$qvB = \frac{mv^2}{R}, \text{ откуда } v = \frac{qBR}{m}, \ v = 2 \cdot 10^7 \text{ м/с},$$

$$[v] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Здесь $\lambda = \dfrac{h}{mv}$, $\lambda = 0{,}197$ пм.

Ответ: а) $\lambda = 1$ нм; б) $\lambda = 148$ пм; в) $\lambda = 0{,}197$ пм.

Задача 4.50. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 500$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 1{,}282$ пм. Принимая заряд этой частицы равным заряду электрона, определите массу частицы.

Дано:
$U = 500$ В
$\lambda = 1{,}282 \cdot 10^{-12}$ м
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

m - ?

Решение. Скорость частицы, прошедшей разность потенциалов U, можно определить по формуле из задачи 4.48:

$$eU = \frac{mv^2}{2} = E_k. \tag{1}$$

Воспользуемся также формулами расчета длины волны де Бройля релятивистской частицы (4.35) и (4.37):

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}} = \frac{h}{\sqrt{\dfrac{E_k^2}{c^2} + 2E_k m_0}}. \tag{2}$$

Используя (1), запишем:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\dfrac{(eU)^2}{c^2} + 2eUm_0}}. \tag{3}$$

Пренебрегая величиной $\frac{(eU)^2}{c^2} = 7\cdot 10^{-50}\,\text{Н}^2\text{с}^2$ ввиду ее малости, получим: $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm_0}}$ и $m_0 = \frac{h^2}{2eU\lambda^2}$, $m_0 = 1{,}672\cdot 10^{-27}$ кг,

$$[m_0] = \frac{\text{Дж}^2\cdot\text{с}^2}{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{кг}.$$

Ответ: $m_0 = 1{,}672\cdot 10^{-27}$ кг.

Задача 4.51. Оцените с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию электрона в атоме водорода.

Дано:
$m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл
$E_{\min}$ - ?

Решение. При $E = E_{\min}$ можно считать, что импульс электрона по порядку величины равен его неопределенности, т. е. $p \sim \Delta p$, а разброс расстояний электрона от ядра равным радиусу орбиты или $\Delta r \sim r$. Тогда в соответствии с принципом неопределенностей (4.38)

$$p \approx \frac{\hbar}{r}.$$

Энергия электрона в атоме может быть представлена выражением

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{2} \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r}, \text{ где } k = 1/(4\pi\varepsilon_0). \qquad (1)$$

Значение r, при котором $E = E_{\min}$, можно найти, приравняв производную $\frac{dE}{dr}$ к нулю:

$$-\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{ke^2}{r^2} = 0, \text{ откуда } r = \frac{\hbar^2}{ke^2 m}. \qquad (2)$$

После подстановки (2) в (1) получим

$$E_{\min} = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2},\ [E] = \frac{\text{кг}\cdot\text{Н}^2\cdot\text{м}^4\cdot\text{Кл}^4}{\text{Кл}^4\cdot\text{Дж}^2\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{Н}^2\cdot\text{м}^3}{\text{Дж}^2} = \frac{\text{Дж}^3}{\text{Дж}^2} = \text{Дж},$$

$$E_{\min} = -21{,}76\cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = -13{,}6\ \text{эВ}.$$

Ответ: $E_{\min} = -13{,}6$ эВ.

Задача 4.52. Определите отношение неопределенностей скорости электрона, если его координата установлена с точностью до 10^{-5} м, и пылинки массой $m = 10^{-12}$ кг, если ее координата установлена с такой же точностью.

Дано:
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$m_n = 10^{-12}$ кг
$\Delta x_e = 10^{-5}$ м
$\Delta x_n = 10^{-5}$ м

$\dfrac{\Delta v_e}{\Delta v_n}$ - ?

Решение. Неопределенность скорости электрона сравнима с самой скоростью:

$$\Delta v_e \sim v_e, \; v_e = \frac{p}{m_e}.$$

Обычно считают, что импульс частицы по порядку величины равен его неопределенности, т. е. $p \sim \Delta p$. Тогда, согласно (4.38)

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x},$$

а неопределенность скорости электрона

$$\Delta v_e \approx \frac{\hbar}{m_e \Delta x}.$$

Неопределенность скорости пылинки

$$\Delta v_п \approx \frac{\Delta p}{m_п}.$$

Согласно соотношению (4.38) $\Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{\Delta x}$, тогда

$$\Delta v_п \approx \frac{\hbar}{m_п \Delta x}.$$

Отношение $\dfrac{\Delta v_e}{\Delta v_п} = \dfrac{\Delta x_п m_п}{\Delta x_e m_e} = \dfrac{m_п}{m_e}, \dfrac{\Delta v_e}{\Delta v_п} = 1{,}1 \cdot 10^{18}$.

Ответ: $\dfrac{\Delta v_e}{\Delta v_п} = 1{,}1 \cdot 10^{18}$.

Задача 4.53. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода $E_k = 13{,}6$ эВ. Используя соотношение неопределенностей, найдите наименьшую погрешность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме.

Дано:
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$E_k = 21{,}76 \cdot 10^{-19}$ Дж

Δx - ?

Решение. Используем связь импульса с энергией:

$$E_k = \frac{p^2}{2m}, \text{ тогда } p = \sqrt{2E_k m}. \quad (1)$$

Имеем в виду, что

$$p \sim \Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получим:

$$\sqrt{2E_k m} \cong \frac{\hbar}{\Delta x}, \text{ откуда } \Delta x \cong \frac{\hbar}{\sqrt{2E_k m}}, \ \Delta x \cong 1 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

$$[\Delta x] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{Дж} \cdot \text{кг}}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{кг}}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^2/\text{с}^2}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = \text{м}.$$

Ответ: $\Delta x \approx 10^{-10}$ м.

4.4.3. Атомное ядро. Радиоактивность

Основные формулы

- Массовое число ядра (число нуклонов)

$$M = Z + N, \quad (4.39)$$

где Z – зарядовое число (число протонов); N – число нейтронов.

- Дефект массы ядра

$$\Delta m = Zm_p + (M - Z)m_n - m_я$$
$$\text{или } \Delta m = Zm_H + (M - Z)m_n - m_а, \quad (4.40)$$

где m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона; $m_я$ – масса ядра; m_H – масса атома водорода; $m_а$ – масса атома.

- Энергия связи нуклонов в ядре

$$\Delta E_{св} = \Delta m \cdot c^2, \text{ Дж или } \Delta E_{св} = 931{,}5 \cdot \Delta m, \text{ МэВ}, \quad (4.41)$$

где Δm – дефект массы ядра, измеренный в атомных единицах массы (а.е.м.); c – скорость света в вакууме.

- Энергия, выделяемая или поглощаемая в ядерной реакции:

$$\Delta E = c^2\left(\sum m_i - \sum m_k\right) \text{ или в МэВ: } \Delta E = 931\left(\sum m_i - \sum m_k\right), \quad (4.42)$$

где $\sum m_i$ – сумма масс исходных частиц; $\sum m_k$ – сумма масс образовавшихся частиц.

Для справки:

Массы частиц:

электрона – $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $= 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.;

протона – $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1{,}007$ а.е.м.;

нейтрона – $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1{,}008665$ а.е.м.

1 атомная единица массы эквивалентна 931,5 МэВ.

Электрон-вольт – 1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Массы изотопов некоторых химических элементов даны в табл. 20 (см. «Приложение»).

- Закон радиоактивного распада

$$N = N_o e^{-\lambda t}, \qquad (4.43)$$

где N – число нераспавшихся ядер радиоактивного элемента к моменту времени t; N_o – исходное число ядер; λ – постоянная распада.

- Число атомов, распавшихся за время t:

$$\Delta N = N_o - N = N_o(1 - e^{-\lambda t}). \qquad (4.44)$$

- Период полураспада (время, за которое распадается половина исходных ядер элемента)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} = 0{,}693\tau, \qquad (4.45)$$

где $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$ – среднее время жизни радиоактивного элемента, при этом исходное число ядер уменьшается в e раз.

- Активность радиоактивного элемента (число ядер, распадающихся в единицу времени)

$$a = \frac{dN}{dt} = \lambda N \text{ или } a = \lambda N_o e^{-\lambda t}.$$

Пусть $a_o = \lambda N_o$ – активность радиоактивного вещества в начальный момент времени $t = 0$. Тогда

$$a = a_o e^{-\lambda t}. \qquad (4.46)$$

Задача 4.54. При измерении периода полураспада короткоживущего радиоактивного вещества использован счетчик импульсов. В течение 1 мин было насчитано 250 импульсов, а спустя 1 ч после начала первого измерения – 92 импульса в минуту. Определите постоянную радиоактивного распада и период полураспада.

Дано:
$\Delta n_1 = 250$
$\Delta n_2 = 92$
$\Delta t_1 = 60$ с
$t_2 = 3600$ с

λ - ?
$T_{1/2}$ - ?

Решение. Число импульсов Δn, регистрируемых счетчиком за время Δt, пропорционально числу распавшихся атомов ΔN. Таким образом, при первом измерении:

$$\Delta n_1 = k\Delta N_1. \qquad (1)$$

Используя формулу (4.44) $\Delta N_1 = N_1(1-e^{-\lambda \Delta t_1})$, получим

$$\Delta n_1 = kN_1(1-e^{-\lambda \Delta t_1}), \qquad (2)$$

где N_1 – количество радиоактивных атомов к моменту начала отсчета; Δt_1 – продолжительность отсчета импульсов; k – коэффициент пропорциональности, постоянный для данного прибора.

При повторном измерении

$$\Delta n_2 = kN_2(1-e^{-\lambda \Delta t_1}). \qquad (3)$$

Разделив выражение (2) на (3), получим:

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{N_1}{N_2}. \qquad (4)$$

Согласно закону радиоактивного распада (4.43),

$$N_2 = N_1 e^{-\lambda t_2}. \qquad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим:

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{N_1}{N_1 e^{-\lambda t_2}} = e^{\lambda t_2}. \qquad (6)$$

Для нахождения λ прологарифмируем выражение (6):

$$\ln\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \lambda t_2, \text{ тогда } \lambda = \frac{\ln\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}}{t_2}, \lambda = 1 \text{ ч}^{-1}.$$

Период полураспада определяется формулой (4.45):

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, T_{1/2} = 41{,}6 \text{ мин}.$$

Ответ: $\lambda = 1$ ч$^{-1}$; $T_{1/2} = 41{,}6$ мин.

Задача 4.55. Определите период полураспада радиоактивного изотопа, если 5/8 начального количества ядер этого изотопа распалось за время $t = 849$ с.

Дано:
$t = 849$ с
$\dfrac{\Delta N}{N_0} = \dfrac{5}{8}$

$T_{1/2}$ - ?

Решение. Задача решается с помощью закона радиоактивного распада (4.44): $\Delta N = N_0\left(1-e^{-\lambda t}\right)$, тогда $\dfrac{\Delta N}{N_0} = 1-e^{-\lambda t}$, откуда $e^{-\lambda t} = 1-\dfrac{\Delta N}{N_0}$. Логарифмируя, получим: $-\lambda t = \ln\left(1-\dfrac{\Delta N}{N_0}\right) = \ln\dfrac{3}{8}$, $\lambda = \dfrac{\ln\frac{8}{3}}{t}$.

Период полураспада определим по формуле (4.45):

$T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2\cdot t}{\ln\frac{8}{3}}$, $T_{1/2} = 10$ мин.

Ответ: $T_{1/2} = 10$ мин.

Задача 4.56. Покоившееся ядро полония $^{200}_{84}\text{Po}$ испускает α-частицу со скоростью 16 Мм/с. Зная, что масса ядра отдачи $m_я = 3{,}62\cdot 10^{-25}$ кг, определите:

1) кинетическую энергию α-частицы;
2) кинетическую энергию ядра отдачи;
3) полную энергию, выделяющуюся при вылете α-частицы.

Дано:
$m_я = 3{,}62\cdot 10^{-25}$ кг
$m_\alpha = 6{,}6467\cdot 10^{-27}$ кг
$v_\alpha = 16\cdot 10^{6}$ м/с

$E_{k\alpha}$ - ? $E_{kя}$ - ? E - ?

Решение. 1) Кинетическая энергия α-частицы определяется по формуле

$E_{k\alpha} = \dfrac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$, $E_{k\alpha} = 8{,}51\cdot 10^{-17}$ Дж.

2) Чтобы определить кинетическую энергию ядра отдачи, определим его скорость, полученную после вылета α-частицы, используя для этого закон сохранения импульса:

$0 = m_\alpha v_\alpha - m_я v_я$, $v_я = \dfrac{m_\alpha v_\alpha}{m_я}$, тогда $E_{kя} = \dfrac{m_я v_я^2}{2} = \dfrac{m_\alpha E_{k\alpha}}{m_я}$,

$E_{kя} = 1{,}56\cdot 10^{-18}$ Дж.

3) Полная энергия E, выделяющаяся при вылете α-частицы, складывается из кинетической энергии α-частицы и кинетической энергии ядра отдачи, т. е. $E = E_{k\alpha} + E_{kя}$, $E = 2,41 \cdot 10^{-18}$ Дж.

Ответ: $E_{k\alpha} = 8,51 \cdot 10^{-17}$ Дж; $E_{kя} = 1,56 \cdot 10^{-18}$ Дж; $E = 2,41 \cdot 10^{-18}$ Дж.

Задача 4.57. Радиоактивный препарат, имеющий активность $a = 3,7 \cdot 10^9$ Бк, помещен в калориметр теплоемкостью $C = 4,19$ Дж/К. Найдите повышение температуры в калориметре за 1 час, если известно, что данное радиоактивное вещество испускает α-частицы с энергией $E_\alpha = 5,3$ МэВ.

Дано:
$a = 3,7 \cdot 10^9$ Бк
$C = 4,19$ Дж/К
$t = 3600$ с
$E_\alpha = 6,48 \cdot 10^{-13}$ Дж

ΔT - ?

Решение. По закону сохранения энергии количество тепла, которое выделяется при распаде радиоактивного вещества:

$$Q = NE_\alpha, \qquad (1)$$

где N – число распадов за время t.

Зная активность a этого вещества, имеем

$$N = at. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим $Q = atE_\alpha$.

С другой стороны, $Q = C\Delta T$, тогда $\Delta T = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{atE_\alpha}{C}$, $\Delta T = 2,7$ К,

$$[\Delta T] = \frac{\text{Бк} \cdot \text{с} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} = \frac{\text{с} \cdot \text{К}}{\text{с}} = \text{К}.$$

Ответ: $\Delta T = 2,7$ К.

Задача 4.58. Мощность, выделяемая при распаде урана ${}^{238}_{92}\text{U}$, равна $N = 1,07 \cdot 10^{-7}$ Вт. Определите число молей, участвующих в распаде, если уран выделяет молярное количество теплоты $Q_\mu = 5,21 \cdot 10^{12} \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ за среднее время жизни атомов урана.

Дано:
$N = 1{,}07 \cdot 10^{-7}$ Вт
$Q_\mu = 5{,}21 \cdot 10^{12} \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}}$
$T_{1/2} = 1{,}4 \cdot 10^{17}$ с

ν - ?

Решение. Мощность, выделяемая при радиоактивном распаде элементом, равна $N = Q/t$, где Q – количество теплоты, которое выделяется при распаде за время t.

В нашем случае дано количество теплоты, выделенной 1 молем урана за среднее время жизни его атомов, т. е.:

$$Q_\mu = \frac{Q}{\nu} = \frac{Nt}{\nu}. \qquad (1)$$

По условию задачи $t = \tau$ – среднему времени жизни: $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$.

Используя формулу (4.45), получим:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}, \qquad (2)$$

где $T_{1/2}$ – период полураспада атома урана $^{238}_{92}U$, значение которого берется из справочных таблиц.

Подставляя (2) в (1) и учтя, что $t = \tau$, получим $Q_\mu = \dfrac{NT_{1/2}}{\nu \ln 2}$, откуда

$$\nu = \frac{NT_{1/2}}{Q_\mu \ln 2}, \quad [\nu] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{Дж/моль}} = \text{моль}, \quad \nu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ моль}.$$

Ответ: $\nu = 4 \cdot 10^{-3}$ моль.

Задача 4.59. Масса препарата радиоактивного магния ^{27}Mg равна 0,2 мкг. Определите: 1) активность изотопа; 2) удельную активность.

Дано:
$m = 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ кг
$T_{1/2} = 600$ с
$\mu = 27 \cdot 10^{-3} \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

a - ? a_m - ?

Решение. 1) Активностью радиоактивного вещества называется число распадов, которое происходит в единицу времени и определяется формулой (4.46):

$$a = \frac{dN}{dt} = \lambda N, \qquad (1)$$

где λ – постоянная распада, определяется формулой (4.45):

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}; \qquad (2)$$

N – число атомов радиоактивного вещества.

Определим N по формуле:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \qquad (3)$$

где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро.

Подставляя (2), (3) в (1), получим:

$$a = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{\mu} N_A, \ [a] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{с} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}} = \text{Бк}, \ a = 5 \cdot 10^{15} \text{ Бк}.$$

Замечание. Так как относительные атомные массы нуклидов выражаются целыми числами $\mu_{\text{отн}}$, то и молярные массы изотопов $\mu = \mu_{\text{отн}} \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ можно принять численно равными его массовому числу, т. е. $\mu = M \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. В нашем случае $M = 27$.

2) Удельная радиоактивность – это активность единицы массы вещества, т. е. $a_m = \frac{a}{m}, a_m = 25 \cdot 10^{21} \frac{\text{Бк}}{\text{кг}}$.

Ответ: $a = 5 \cdot 10^{15}$ Бк; $a_m = 25 \cdot 10^{21} \frac{\text{Бк}}{\text{кг}}$.

Задача 4.60. Ядро атома бора ${}^{10}_{5}B$ может захватывать нейтрон. В результате этого происходит расщепление бора на ядра лития и гелия. Напишите ядерную реакцию и определите энергию, освобождающуюся при этой реакции.

Дано:

$m_{{}^{10}_{5}B} = 10{,}012939$ а.е.м.

$m_{{}^{1}_{0}n} = 1{,}008665$ а.е.м.

$m_{{}^{7}_{3}Li} = 7{,}016004$ а.е.м.

$m_{{}^{4}_{2}He} = 4{,}002603$ а.е.м.

ΔE - ?

Решение. Запишем уравнение реакции:

${}^{10}_{5}B + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{7}_{3}Li + {}^{4}_{2}He$.

Изменение энергии при ядерной реакции (МэВ) определяется формулой (4.42):

$$\Delta E = 931\left(\sum m_i - \sum m_k\right). \qquad (1)$$

Найдем сумму масс исходных частиц:

$$\sum m_i = (10{,}012939 + 1{,}008665) \text{ а.е.м.} = 11{,}020939 \text{ а.е.м.} \qquad (2)$$

Теперь найдем сумму масс образовавшихся частиц:

$$\sum m_k = (7{,}016004 + 4{,}002603) \text{ а.е.м.} = 11{,}018607 \text{ а.е.м.} \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим: $\Delta E = 2{,}17$ МэВ.

Поскольку $\sum m_i > \sum m_k$, реакция сопровождается выделением энергии, если же $\sum m_i < \sum m_k$, то реакция сопровождается поглощением тепла.

Ответ: $\Delta E = 2{,}17$ МэВ.

Задача 4.61. Найдите энергию связи ядер урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ и $^{238}_{92}\mathrm{U}$. Какое из этих ядер более устойчиво?

Дано:
$m_{^{235}_{92}\mathrm{U}} = 235{,}0493$ а.е.м.
$m_{^{238}_{92}\mathrm{U}} = 238{,}05353$ а.е.м.
$m_p = 1{,}007$ а.е.м.
$m_n = 1{,}008$ а.е.м.
$m_e = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.

$\Delta E_{\text{св}}$ - ?

Решение. Энергия связи ядра любого изотопа определяется соотношением (4.41):

$$\Delta E_{\text{св}} = 931 \Delta m, \qquad (1)$$

где Δm – дефект массы, определяемый соотношением (4.40):

$$\Delta m = Z m_p + (M - Z) m_n - m_{\text{я}}, \qquad (2)$$

т. е. разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра; Z – порядковый номер изотопа; M – массовое число.

В нашем случае

$$^{235}_{92}\mathrm{U} - Z = 92,\ M = 235;\ ^{238}_{92}\mathrm{U} - Z = 92,\ M = 238. \qquad (3)$$

Масса ядра изотопа

$$m_{\text{я}} = m_{\text{а}} - Z m_e, \qquad (4)$$

где $m_{\text{а}}$ – масса изотопа и m_e – масса электрона.

Подставляя (4) в (2), получим:

$$\Delta m = Z m_p + (M - Z) m_n - m_{\text{а}} + Z m_e. \qquad (5)$$

Используя данные (3) и подставив их в (5), а затем в (1), получим:

$^{235}_{92}\mathrm{U}$: $\Delta E_{\text{св}1} = 1786$ МэВ;

$^{238}_{92}\mathrm{U}$: $\Delta E_{\text{св}2} = 1799$ МэВ.

Теперь определим энергию связи, приходящуюся на один нуклон:

$$E_o = \frac{\Delta E_{\text{св}}}{M}; \qquad (6)$$

$^{235}_{92}U$: $\Delta E_{o1} = 7{,}60$ МэВ;

$^{238}_{92}U$: $\Delta E_{o2} = 7{,}56$ МэВ.

Поскольку энергия связи ядра $^{235}_{92}\text{U}$ больше, чем у ядра $^{238}_{92}\text{U}$, ядро $^{235}_{92}\text{U}$ более устойчиво.

Ответ: $\Delta E_{св1} = 1786$ МэВ; $\Delta E_{св2} = 1799$ МэВ.

Задача 4.62. Каков КПД атомной электростанции мощностью $P = 5 \cdot 10^8$ Вт, если за $t = 1$ год было израсходовано $m = 965$ кг урана $^{235}_{92}U$? В каждом акте деления выделяется $\Delta E = 200$ МэВ энергии.

Дано:
$P = 5 \cdot 10^8$ Вт
$t = 3{,}15 \cdot 10^7$ с
$m = 965$ кг
$\Delta E = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж
$\mu = 235 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

η - ?

Решение. Число атомов, содержащихся в массе m вещества:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A,$$

где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро.

Полная энергия, выделяющаяся при распаде N атомов урана:

$$E_n = N\Delta E = \frac{m}{\mu} N_A \Delta E. \tag{1}$$

Полезная энергия, которую дает атомная электростанция за год:

$$E = Pt. \tag{2}$$

КПД есть отношение полезной энергии к полной энергии. Используя (1) и (2), получим:

$$\eta = \frac{E}{E_n} = \frac{\mu P t}{m N_A \Delta E},\ [\eta] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Вт} \cdot \text{с} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1,\ \eta = 0{,}20.$$

Ответ: $\eta = 20\%$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. М.: Наука, 1979.

2. Чертов, В. Г. Задачник по физике / В. Г. Чертов, А. А. Воробьев. М.: Высш. шк., 1981.

3. Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. СПб.: Лань, 2007. Т. 1–3.

4. Трофимова, Л. И. Курс физики / Л. И. Трофимова. М.: Высш. шк., 1985.

5. Рогачев, Н. М. Курс физики / Н. М. Рогачев. Самара: СГАУ, 2006.

6. Беликов, Б. С. Решение задач по физике / Б. С. Беликов. М.: Высш. шк., 1986.

7. Фирганг, Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е. В. Фирганг. СПб.: Лань, 2007.

8. Иродов, И. Е. Сборник задач по общей физике / И. Е. Иродов, И. В. Савельев, О. И. Замша. М.: Наука, 1972.

9. Новодворская, Е. М. Методика проведения упражнений по физике во втузе / Е. М. Новодворская, Э. М. Дмитриев. М.: Высш. школа, 1981.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Множители для образования десятичных кратных и дольных единиц

Наименование	Множитель	Русское обозначение	Международное обозначение
экса	10^{18}	Э	E
гета	10^{15}	П	P
тера	10^{12}	Т	T
гига	10^{9}	Г	G
мега	10^{6}	М	M
кило	10^{3}	к	k
гекто	10^{2}	г	h
дека	10	да	da
деци	10^{-1}	д	d
санти	10^{-2}	с	c
милли	10^{-3}	м	m
микро	10^{-6}	мк	μ
нано	10^{-9}	н	n
пико	10^{-12}	п	P
фемто	10^{-15}	ф	f
атто	10^{-18}	а	a

2. Фундаментальные физические константы

Абсолютный 0 температуры	$t = -273{,}15°C$
Атомная единица массы	1 а.е.м. $= 1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2
Заряд α -частицы	$q = 2e = 3{,}204 \cdot 10^{-19}$Кл
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda c = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12{,}5663706144 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Магнитный момент протона	$\mu_p = 1{,}4106171 \cdot 10^{-26}$ Дж/Тл
Магнитный момент электрона	$\mu_e = 9{,}28483 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Масса α-частицы	$м_\alpha = 6{,}644 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$м_n = 1{,}6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя протона	$м_p = 1{,}6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя электрона	$м_e = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ кг
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_0 = 22{,}41383 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Нормальные условия:	
атмосферное давление	$p_o = 101325$ Н/м^2
температура	$T = 273$ К
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}022045 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Вина	$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	$h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Стефана–Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4)
Постоянная Фарадея	$F = 96{,}48456 \cdot 10^3$ Кл/моль
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ м/с
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(К·моль)
Элементарный заряд	$e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$Кл

3. Астрономические постоянные

Радиус Земли	$6{,}378164 \cdot 10^{6}$ м
Средняя плотность Земли	$5{,}518 \cdot 10^{3}$ кг/м^{3}
Масса Земли	$5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}9599 \cdot 10^{8}$ м
Масса Солнца	$1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}737 \cdot 10^{6}$ м
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3{,}844 \cdot 10^{8}$ м
Среднее расстояние до Солнца	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин
Средняя плотность Солнца	$1{,}41 \cdot 10^{3}$ кг/м^{3}

4. Диаметры атомов и молекул, нм

Гелий	0,20	Кислород	0,30
Водород	0,23	Азот	0,30

5. Критические значения $T_к$ и $p_к$

Вещество	$T_к$, K	$p_к$, МПа	Вещество	$T_к$, K	$p_к$, МПа
Водяной пар	647	22,0	Азот	126	3,4
Углекислый газ	304	7,38	Водород	33	1,3
Кислород	154	5,07	Гелий	5,2	0,23
Аргон	151	4,87			

6. Давление водяного пара, насыщающего пространство при разных температурах

t, °C	$p_н$, Па	t, °C	$p_н$, Па	t, °C	$p_н$, Па
–5	400	8	1070	40	7335
0	609	9	1145	50	12302
1	656	10	1225	60	19807
2	704	12	1396	70	31122
3	757	14	1596	80	47215
4	811	16	1809	90	69958
5	870	20	2328	100	101080
6	932	25	3165	150	486240
7	1025	30	4229	200	1549890

7. Удельная теплота парообразования воды при разных температурах

t, °C	R, 10^5Дж/кг	t, °C	r, 10^5Дж/кг
0	25,0	180	20,1
10	24,7	200	19,4
20	24,5	220	18,6
30	24,0	250	17,0
50	23,8	300	14,0
70	23,2	350	8,92
90	22,8	370	4,40
100	22,6	374	1,1
120	22,0	374,15	0

8. Свойства некоторых жидкостей (при 20°C)

Вещество	Плотность, 10^3 кг/м^3	Удельная теплоемкость, Дж/ (кг·К)	Поверхностное натяжение, Н/м
Бензол	0,88	1720	0,03
Вода	1,00	4190	0,073
Глицерин	1,20	2430	0,064
Кастор. масло	0,90	1800	0,035
Керосин	0,80	2140	0,03
Ртуть	13,60	138	0,5
Спирт	0,79	2510	0,02

9. Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Плотность, 10^3, кг/м^3	Температура плавления, °С	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температурный коэффициент линейного расширения, 10^{-5}К$^{-1}$
Алюминий	2,6	659	896	322	2,3
Железо	7,9	1530	500	272	1,2
Латунь	8,4	900	386	-	1,9
Лед	0,9	0	2100	335	-
Медь	8,6	1100	395	176	1,6
Олово	7,2	232	230	58,6	2,7
Платина	21,4	1770	117	113	0,89
Пробка	0,2	-	2050	-	-
Свинец	11,3	327	126	22,6	2,9
Серебро	10,5	960	234	88	1,9
Сталь	7,7	1300	460	-	1,06
Цинк	7,0	420	391	117	2,9

10. Свойства упругости некоторых твердых тел

Вещество	Предел прочности, МПа	Модуль Юнга, ГПа
Алюминий	110	69
Железо	294	196
Медь	245	118
Свинец	20	15,7
Серебро	290	74
Сталь	785	216

11. Теплопроводность некоторых твердых тел, Вт/(м К)

Алюминий	210	Песок сухой	0,325
Войлок	0,046	Пробка	0,050
Железо	58,7	Серебро	460
Кварц плавлен.	1,37	Эбонит	0,174
Медь	390		

12. Диэлектрическая проницаемость диэлектриков

Воск	7,8		Парафин	2		Эбонит	2,6
Вода	81		Слюда	6		Парафинир. бумага	2
Керосин	2		Стекло	6			
Масло	5		Фарфор	6			

13. Удельное сопротивление проводников (при 0°С), мкОм · м

Алюминий	0,025		Нихром	1,00
Графит	0,039		Ртуть	0,94
Железо	0,087		Свинец	0,22
Медь	0,017		Сталь	0,10

14. Подвижности ионов в электролитах, 10-8м²/(В · с)

NO_3^-	6,4		Cl^-	6,8
H^+	32,6		Ag^+	5,6
K^+	6,7			

15. Работа выхода электронов из металла, эВ

W	4,5		Ag	4,74
W+Cs	1,6		Li	2,4
W+Th	2,63		Na	2,3
Pt+Cs	1,40		K	2,0
Pt	5,3		Cs	1,9

16. Показатели преломления

Алмаз	2,42		Сероуглерод	1,63
Вода	1,33		Скипидар	1,48
Лед	1,31		Стекло	1,5-1,9

СОДЕРЖАНИЕ