Дж. Д. Бьёркен
С.Д. Дрелл

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

1
ТОМ

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

530.1
Б 96
УДК 530.145

RELATIVISTIC
QUANTUM
MECHANICS

James D. Bjorken,
Sidney D. Drell

McGraw-Hill Book Company

Релятивистская квантовая теория, т. 1. Релятивистская квантовая механика. Дж. Д. Бьёркен, С. Д. Дрелл, монография, перев. с англ., Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 296 стр.

Книга, написанная известными американскими физиками-теоретиками, представляет собой систематический курс квантовой электродинамики. Рассмотрение всех вопросов проводится на основе метода функции распространения, что позволяет сделать изложение наглядным и доступным. В книге подробно обсуждаются уравнение Дирака и свойства его решений, метод функции распространения, проблема перенормировок и электродинамика частиц с нулевым спином и др. Развитые методы применяются к неэлектромагнитным взаимодействиям элементарных частиц.
Табл. 9, илл. 82, библ. 133.

Б $\dfrac{20402-040}{053(02)\text{-}78}$ 104-78

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 6
Предисловие 8

Глава 1. **Уравнение Дирака** 11
§ 1. Формулировка релятивистской квантовой теории 11
§ 2. Предварительные замечания 13
§ 3. Уравнение Дирака 16
§ 4. Переход к нерелятивистской теории 19
Задачи 23

Глава 2. **Лоренцева инвариантность уравнения Дирака** 24
§ 5. Уравнение в ковариантной форме 24
§ 6. Доказательство ковариантности 26
§ 7. Пространственное отражение 33
§ 8. Ковариантные билинейные формы 33
Задачи 35

Глава 3. **Решения уравнения Дирака для свободной частицы** 36
§ 9. Плоские волны 36
§ 10. Проекционные операторы для энергии и спина 41
§ 11. Физический смысл решений в виде плоских волн и волновых пакетов 44
Задачи 51

Глава 4. **Преобразование Фолди — Ваутхайзена** 52
§ 12. Введение 52
§ 13. Преобразование для свободной частицы 53
§ 14. Общее преобразование 54
§ 15. Атом водорода 58
Задачи 66

Глава 5. **Теория дырок** 68
§ 16. Проблема решений с отрицательной энергией 68
§ 17. Зарядовое сопряжение 71
§ 18. Поляризация вакуума 74
§ 19. Обращение времени и другие симметрии 75
Задачи 79

Глава 6. **Метод функции распространения** 81
§ 20. Введение 81
§ 21. Нерелятивистский пропагатор 81
§ 22. Формальное определение и свойства функции Грина 88
§ 23. Функция распространения в теории позитрона 94
Задачи 103

Глава 7. **Приложение теории к описанию основных электродинамических явлений** 104
§ 24. Рассеяние электронов в кулоновском поле 104
§ 25. Теоремы о вычислении следов; усредненное по спинам сечение рассеяния в кулоновском потенциале 108
§ 26. Кулоновское рассеяние позитронов 110
§ 27. Рассеяние электрона на дираковском протоне 112
§ 28. Поправки высших порядков к рассеянию электронов протонами 120
§ 29. Тормозное излучение 124
§ 30. Комптоновское рассеяние 131
§ 31. Аннигиляция электронной пары в гамма-лучи 135
§ 32. Рассеяние электрона и позитрона на электроне 139
§ 33. Поляризационные эффекты при рассеянии электронов 143
Задачи 148

Глава 8. **Поправки высших порядков к матрице рассеяния** 150
§ 34. Рассеяние электрона позитроном в четвертом порядке . . . 150
§ 35. Поляризация вакуума 156
§ 36. Перенормировка внешних фотонных линий 163
§ 37. Собственная масса электрона 164
§ 38. Перенормировка электронного пропагатора 166
§ 39. Поправки к вершине 169
§ 40. Лэмбовский сдвиг 179
Задачи 183

Глава 9. **Уравнение Клейна — Гордона** 184
§ 41. Введение 184
§ 42. Пропагатор для уравнения Клейна — Гордона 186
§ 43. Введение электромагнитных потенциалов 188
§ 44. Амплитуды рассеяния 190
§ 45. Процессы рассеяния низшего порядка 192
§ 46. Процессы высшего порядка 195
§ 47. Нерелятивистский предельный переход в уравнении Клейна — Гордона 199
Задачи 207

Глава 10. **Неэлектромагнитные взаимодействия** 208
§ 48. Введение 208
§ 49. Сильные взаимодействия 209

§ 50. Формализм изотопического спина 220
§ 51. Сохраняющиеся токи 224
§ 52. Приближенные методы; нуклон-нуклонное рассеяние 225
§ 53. Мезон-нуклонное рассеяние 229
§ 54. Проекционные операторы для изоспина и углового момента 232
§ 55. Сечения рассеяния пионов на нуклоне 234
§ 56. Электромагнитная структура мезонов и нуклонов 238
§ 57. Слабые взаимодействия 244
§ 58. Бета-распад 245
§ 59. Теория двухкомпонентного нейтрино 255
§ 60. Распад μ-мезона 258
§ 61. Распад π-мезона 261
§ 62. Два типа нейтрино 266
§ 63. Гипотеза о сохраняющемся векторном токе 267
§ 64. Частично сохраняющийся аксиальный ток 271
Задачи 276
Приложение А. Обозначения 278
Приложение Б. Правила Фейнмана 282
Дополнения редактора перевода 288
Литература 291

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Эта книга написана двумя выдающимися физиками-теоретиками из Стенфордского центра физики высоких энергий, внесших своими исследованиями существенный вклад в развитие физики элементарных частиц. Вышедшая в 1964 году, эта книга широко используется, и ссылки на нее постоянно и часто встречаются в мировой научной литературе. Уже это оправдывает появление книги на русском языке, несмотря на то, что наша литература по квантовой теории поля достаточно богата как оригинальными, так и переводными монографиями.

Книга состоит из двух частей, существенно различающихся по характеру изложения и рассчитанных на различный контингент читателей. Первая часть носит более элементарный характер, ее цель объяснить и научить читателя методам, которыми практически пользуются для получения практических результатов в квантовой электродинамике, теории слабых взаимодействий, а также некоторых качественных результатов в теории сильных взаимодействий. Основой для этого является метод, восходящий к первым работам Фейнмана, — метод функций распространения Для наглядности авторы исходят из определения функций распространения в пространстве и времени и применяют их к решению конкретных задач. Порой это приводит к более длинным выкладкам, чем если бы раз и навсегда сформулировать общее правило написания амплитуд рассеяния по диаграммам Фейнмана, но авторы предпочитают прагматическим правилам детальное прослеживание пространственно-временной картины процесса.

Во второй части авторы исходят из формального гамильтонова метода квантования. Ради его четкости они предпочитают в случае электродинамики пользоваться методом, явно-неинвариантным относительно лоренцевых и калибровочных преобразований. Инвариантность оправдывается на другом этапе. Затем строится теория возмущений и подробно исследуется схема перенормировок с использованием метода Вейнберга. Подробно исследуются: аналитические свойства амплитуд, особенности Ландау, метод дисперсионных соотношений. В общем, вторая часть книги достаточно полно отражает состояние квантовой теории поля к моменту написания книги.

За истекшие с момента написания книги десять с лишним лет в физике элементарных частиц и теории поля произошел существенный прогресс. Он практически не затронул квантовую электродинамику, поэтому в этой своей части книга не устарела. В области же слабых и сильных взаимодействий возникли существенно новые теоретические идеи и методы (в их разработке активное участие принимали и авторы этой книги). Учесть «на ходу» эти изменения невозможно — они требуют отдельной монографии. Эта же монография не теряет своей ценности и, помимо ее уже не меняющихся от времени разделов, останется введением к будущей, так же как ее первая часть,— ко второй. Поэтому мы ограничились небольшим количеством дополнений, идейно непосредственно примыкающих к содержанию книги, относящихся к взаимодействию электронов с адронами и мюонами.

В. Б. Берестецкий

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предложенный в 1949 г. Р. Фейнманом подход к релятивистской квантовой теории, основанный на методе функции распространения, позволил сформулировать квантовую электродинамику в интуитивно привлекательной и практически удобной форме и в то же время оказался весьма плодотворным для широкого класса задач в теории элементарных частиц. Процедура перенормировок, на которой основана вера теоретиков в предсказания квантовой электродинамики, зависит на самом деле от анализа диаграмм Фейнмана. То же относится и к значительному прогрессу, достигнутому в доказательстве аналитических свойств, необходимых для написания дисперсионных соотношений. Можно, наконец, пойти еще дальше и принять крайнюю точку зрения, согласно которой набор всех диаграмм Фейнмана и есть теория.

В этой книге и в следующем томе «Релятивистские квантовые поля» мы не выступаем в защиту этой точки зрения, как, впрочем, вообще не пытаемся отстоять какую-либо единственную точку зрения в ущерб всем остальным. Сейчас никто не может позволить себе подобной роскоши ввиду неудовлетворительного положения, сложившегося в физике элементарных частиц. В особенности нам не хотелось бы приуменьшить значение прогресса, достигнутого в формальной теории поля и дисперсионной теории мезон-нуклонного взаимодействия при низких энергиях. Тем не менее основное ударение мы делаем на развитие правил Фейнмана, которые следуют непосредственно из волнового уравнения для дираковского электрона, если это уравнение проинтегрировать с граничными условиями, вытекающими из теории дырок.

Взяться за написание книги (превратившейся затем в целых две), излагающей именно такой подход, нас побудили три основные причины:

1. Фейнмановские диаграммы и правила вычислений выражают результаты квантовой теории поля в форме, удобной для анализа экспериментальных данных. Хотя формулировка теории в терминах диаграмм может означать использование теории воз-

мущений, пример проблемы многих тел показывает, что графические методы пригодны для описания явлений, не поддающихся анализу с помощью теории возмущений (как, например, сверхпроводимость и бозе-газ, состоящий из твердых сфер).

2. Вполне может случиться, что правила Фейнмана в некой видоизмененной форме окажутся долговечнее, чем сложная математическая конструкция локальной квантовой теории поля, основанная на таком идеализированном понятии, как поле, заданное в фиксированных точках пространства-времени. Поэтому мы будем в первую очередь развивать фейнмановские правила независимо от формализма теории поля. С течением времени может выясниться, что формализм этот есть скорее надстройка, чем фундамент теории.

3. Такой путь построения — более прямой и менее формальный и, возможно, не столь трудный для понимания, как дедуктивный теоретико-полевой подход. Он должен вооружить методами вычисления и анализа фейнмановских диаграмм круг физиков, значительно более широкий, чем круг теоретиков, владеющих методом вторичного квантования. В особенности мы имели в виду наших коллег экспериментаторов и студентов, интересующихся физикой элементарных частиц. Мы полагаем, что такое изложение предмета окажется полезным.

Первоначально мы намеревались написать одну книгу, но со временем она превратилась в два тома. В первом томе «Релятивистская квантовая механика» мы излагаем метод функции распространения для дираковских частиц, фотонов и подчиняющихся уравнению Клейна — Гордона мезонов, и проводим ряд вычислений для иллюстрации разнообразной полезной техники и приемов, используемых в теории электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий. Сюда относятся определение и проведение процедуры перенормировок и вычисление радиационных поправок, таких как лэмбовское смещение в низшем приближении. Для чтения этой книги достаточно владеть курсом нерелятивистской квантовой механики, например, в объеме книги Л. Шиффа «Квантовая механика» (Москва, ИЛ, 1957).

Во втором томе «Релятивистские квантовые поля» мы излагаем каноническую теорию поля и затем, построив с помощью техники Лемана — Шиманчика — Циммермана (LSZ) замкнутые выражения для функций распространения и амплитуд рассеяния, вновь возвращаемся к диаграммам Фейнмана. Показано, что разложение амплитуды рассеяния в ряд теории возмущений, полученное в рамках канонической теории поля, совпадает с рассмотренным в первом томе разложением по правилам Фейнмана. Путем дальнейшего анализа диаграмм мы исследуем аналитические свойства фейнмановских амплитуд в любом порядке по константе связи и разъясняем дисперсионные методы.

В заключение мы доказываем перенормируемость квантовой электродинамики в любом порядке по взаимодействию.

Не останавливаясь более подробно на материале, изложенном в курсе, перечислим основные вопросы, которые в нем не освещены. Полностью отсутствует изложение принципа действия и предложенная Швингером формулировка квантовой теории поля, основанная на вариационном подходе. Мы прибегаем к вариации действия только при исследовании свойств симметрии. Опущено подробное обсуждение еще двух вопросов: существенного прогресса, достигнутого в аксиоматической квантовой теории поля, с одной стороны, и не связанного с теорией поля S-матричного подхода — с другой. За исключением содержащегося в первом томе обсуждения лэмбовского сдвига и спектра атома водорода, проблема связанных состояний не рассматривается. Дисперсионные соотношения лишь в минимальной степени используются в динамических вопросах. Не приводится формулировка квантовой теории поля для массивных векторных мезонов, так же как и теории поля, содержащей связи с производными. Кроме того, мы не подготовили библиографию всех существенных оригинальных работ по рассмотренным в нашем труде вопросам. Отмеченные пробелы могут быть восполнены с помощью изданных в последнее время монографий и учебников [1 — 20].

В заключение мы обязаны поблагодарить многих студентов и наших коллег, которые были чуткими слушателями и неоценимыми критиками в тот период, когда наши лекции превращались в написанные главы, профессора Леонарда Шиффа, воодушевившего нас на написание этих книг и оказавшего затем поддержку, а также Розмари Стэмпфель и Элен Манн за блестящую оформительскую работу.

Джеймс Д. Бьеркен
Сидней Д. Дрелл

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

§ 1. Формулировка релятивистской квантовой теории

Поскольку принципы специальной теории относительности являются в настоящее время общепринятыми, правильно построенная квантовая теория должна удовлетворять релятивистским требованиям: законы движения, справедливые в одной инерциальной системе, должны быть справедливы во всех инерциальных системах. На математическом языке это означает, что релятивистская квантовая теория должна быть сформулирована в ковариантной относительно преобразований Лоренца форме.

Переходя от нерелятивистской к релятивистской квантовой механике, мы попытаемся сохранить принципы, лежащие в основе нерелятивистской теории. Ниже мы кратко напоминаем эти принципы [1]):

1. Для заданной физической системы существует вектор состояния Φ, который содержит всю информацию о рассматриваемой системе. Излагая на первых порах одночастичную релятивистскую теорию, мы обычно будем иметь дело с координатным представлением вектора состояния, т. е. с волновой функцией $\psi(q_1, \ldots, q_n; s_1, \ldots, s_n; t)$. Волновая функция $\psi(q, s, t)$ является комплексной функцией от всех классических степеней свободы $q_1, \ldots, q_n$, времени t и дополнительных степеней свободы, таких как спин s_i, имеющих квантовомеханическую природу. Сама волновая функция не имеет прямой физической интерпретации, однако квадрат ее модуля, $|\psi(q_1, \ldots, q_n; s_1, \ldots, s_n; t)|^2 \geqslant 0$, интерпретируется как вероятность того, что в момент времени t система характеризуется набором переменных $q_1, \ldots, q_n; s_1, \ldots, s_n$. Из вероятностной интерпретации очевидным образом следует, что для физически допустимых волновых функций ψ величина $|\psi|^2$ должна быть конечной для любых значений $q_1, \ldots, q_n; s_1, \ldots, s_n$ в любой момент времени t.

2. Любой наблюдаемой физической величине соответствует линейный эрмитов оператор. В частности, канонической

[1]) Подробнее см. курсы [21—24].

переменной импульса p_i отвечает в координатном пространстве следующий оператор:

$$p_i \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

3. Физическая система является собственным состоянием оператора Ω, если

$$\Omega\Phi_n = \omega_n\Phi_n, \tag{1.1}$$

где Φ_n — n-е собственное состояние, отвечающее собственному значению ω_n. Для эрмитова оператора ω_n — действительная величина. В координатном представлении уравнение (1.1) имеет вид

$$\Omega(q,\ s,\ t)\psi_n(q,\ s,\ t) = \omega_n\psi_n(q,\ s,\ t).$$

4. Постулат о разложении гласит, что произвольная волновая функция, или вектор состояния, физической системы может быть разложена по полной ортонормированной системе собственных функций ψ_n полного набора коммутирующих операторов. Следовательно мы можем записать

$$\psi = \sum_n a_n\psi_n,$$

а условие ортонормированности имеет вид

$$\sum_s \int (dq_1 \ldots)\,\psi_n^*(q_1 \ldots,\ s_1 \ldots,\ t)\,\psi_m(q_1 \ldots,\ s_1 \ldots,\ t) = \delta_{nm}.$$

Величина $|a_n|^2$ есть вероятность того, что система находится в n-м собственном состоянии.

5. Результатом измерения наблюдаемой физической величины является одно из ее собственных значений. В частности, если физическая система описывается волновой функцией $\psi = \sum a_n\psi_n$, где $\Omega\psi_n = \omega_n\psi_n$, измерение наблюдаемой физической величины Ω дает собственное значение ω_n с вероятностью $|a_n|^2$. Среднее значение наблюдаемой Ω по большому числу измерении проведенных в одинаково приготовленных системах, дается выражением

$$\langle\Omega\rangle_\psi = \sum_s \int (dq_1 \ldots)\,\psi^*(q_1 \ldots,\ s_1 \ldots,\ t)\,\Omega\psi(q_1 \ldots,\ s_1 \ldots,\ t) = \\ = \sum_n |a_n|^2\,\omega_n.$$

6. Развитие физической системы во времени описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{1.2}$$

в котором гамильтониан H является линейным эрмитовым оператором. Для замкнутой физической системы гамильтониан не зависит явно от времени, т. е. $\partial H/\partial t = 0$, и в этом случае его собственные состояния являются возможными стационарными состояниями системы. Принцип суперпозиции следует из линейности гамильтониана H, а сохранение вероятности из свойства эрмитовости H:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_s \int (dq_1 \ldots)\psi^*\psi = \frac{i}{\hbar}\sum_s \int (dq_1 \ldots)[(H\psi)^*\psi - \psi^*(H\psi)] = 0. \tag{1.3}$$

Мы постараемся сохранить перечисленные шесть известных принципов в качестве фундамента релятивистской квантовой теории.

§ 2. Предварительные замечания

Простейшей физической системой является свободная изолированная частица, нерелятивистский гамильтониан которой имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m}. \tag{1.4}$$

Переход к квантовой механике осуществляется путем замены

$$H \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla, \tag{1.5}$$

которая приводит к нерелятивистскому уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi(q, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(q, t). \tag{1.6}$$

Уравнения (1.4) и (1.6) нековариантны и потому не могут быть признаны удовлетворительными. Их левые и правые части поразному преобразуются при лоренцевых преобразованиях. Согласно специальной теории относительности полная энергия E и импульс (p_x, p_y, p_z) преобразуются как компоненты четырехмерного вектора[1])

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right),$$

квадрат длины которого равен

$$\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu p^\mu \equiv p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} \equiv m^2c^2, \tag{1.7}$$

---

[1]) При этом $p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right)$, $x_\mu = (ct, -\mathbf{x})$. (*Прим. ред.*)

где m — масса покоя частицы, а c — скорость света в вакууме. Более подробное обсуждение используемых в книге ковариантных обозначений содержится в приложении А. Отметим, что соответствие (1.5) между классическими величинами и операторами ковариантно относительно преобразований Лоренца, ибо оно устанавливает связь между двумя контравариантными 4-векторами[1]) $p^\mu \to i\hbar\, \partial/\partial x_\mu$.

Рассуждая подобным образом, естественно в качестве гамильтониана релятивистской свободной частицы взять выражение

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}; \tag{1.8}$$

тогда релятивистский аналог (1.6) будет выглядеть так:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}\, \psi. \tag{1.9}$$

Тут мы сразу сталкиваемся с проблемой интерпретации квадратного корня из оператора в правой части (1.9). Если разложить корень в ряд, мы получим уравнение, содержащее все степени оператора дифференцирования; следовательно, теория нелокальна. В таких теориях имеются серьезные трудности и они представляют собой весьма непривлекательный вариант уравнения Шредингера, в которое пространственные координаты и время входят несимметричным образом.

В целях математической простоты (а возможно, за неимением убедительной физической картины) мы избавимся от квадратного корня из оператора в уравнении (1.9), записав

$$H^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{1.10}$$

Другой, эквивалентный способ — дважды подействовать операторами, входящими в (1.9). Тогда, пользуясь тем[2]), что при $[A, B] = 0$ из $A\psi = B\psi$ следует $A^2\psi = B^2\psi$, мы получаем уравнение

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2\nabla^2c^2 + m^2c^4)\, \psi,$$

в котором нетрудно узнать классическое волновое уравнение

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0, \tag{1.11}$$

где

$$\Box \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

---

[1]) Согласно нашим определениям $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ и $\nabla^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

[2]) Мы будем всюду использовать обозначение $[A, B] \equiv AB - BA$ для коммутатора и $\{A, B\} \equiv AB + BA$ — для антикоммутатора.

Прежде чем продолжить исследование уравнения (1.11), заметим, что, возводя в квадрат выражение для энергии, мы ввели добавочный корень, отвечающий отрицательной энергии:

$$H = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

Для того чтобы получить простое уравнение, мы пожертвовали положительно определенной энергией, и возникла трудность, связанная с существованием «лишних» решений с отрицательной энергией. Трудность эта оказывается преодолимой (мы узнаем об этом из гл. 5), и решениям с отрицательной энергией можно дать физическую интерпретацию. Эти решения связаны с античастицами, существование которых в природе является сильным экспериментальным подтверждением обсуждаемой схемы. Поэтому будем пока рассматривать соотношение (1.10) и вытекающее из него уравнение (1.11).

Наша первая задача состоит в построении сохраняющегося потока, поскольку уравнение (1.11) есть уравнение второго порядка и отличается от уравнения Шредингера (1.2), которое является основой для вероятностной интерпретации нерелятивистской теории. Аналогично тому, как находится сохраняющийся поток для уравнения Шредингера, помножим (1.11) на ψ^*, затем сопряженное уравнение помножим на ψ и результаты вычтем один из другого:

$$\psi^*\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi - \psi\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi^* = 0,$$

$$\nabla^\mu\left(\psi^*\nabla_\mu\psi - \psi\nabla_\mu\psi^*\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\right] + \operatorname{div}\frac{\hbar}{2im}\left[\psi^*(\nabla\psi) - \psi(\nabla\psi^*)\right] = 0. \quad (1.12)$$

Величине $\left(\frac{i\hbar}{2mc^2}\right)\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$ хотелось бы придать смысл плотности вероятности ρ. Это, однако, невозможно, поскольку она не является положительно определенной. Поэтому, следуя историческому пути развития [25], мы на время откажемся от уравнения (1.11) в надежде найти уравнение, содержащее первую производную по времени и допускающее, как и уравнение Шредингера, непосредственную вероятностную трактовку. Мы еще вернемся к уравнению (1.11). Хотя в дальнейшем нам удастся найти уравнение первого порядка, окажется все же невозможным сохранить положительно определенную одночастичную плотность вероятности и одновременно придать физический смысл отрицательному корню (1.10). Поэтому уравнение (1.11), которое часто называют уравнением Клейна — Гордона, претендует на роль релятивистского квантового уравнения ничуть не меньше, чем уравнение, к изучению которого мы сейчас приступаем.

§ 3. Уравнение Дирака

Наше изложение будет следовать историческим работам Дирака 1928 г. [26, 23] по поиску релятивистски-ковариантного уравнения вида (1.2) с положительно определенной плотностью вероятности. Поскольку такое уравнение содержит производную по времени первого порядка, естественно попытаться построить гамильтониан, содержащий первые производные по пространственным координатам. Подобное уравнение может выглядеть так:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3}\right) + \beta m c^2 \psi \equiv H\psi. \qquad (1.13)$$

Входящие сюда коэффициенты α_i не могут быть просто числами, так как тогда уравнение не будет инвариантно даже относительно обычных пространственных вращений. Кроме того, если мы хотим оставаться в рамках сформулированных в § 1 общих требований, волновая функция ψ не может быть скаляром. Действительно, для того чтобы в фиксированный момент времени t интеграл по всему пространству от плотности вероятности $\rho = \psi^* \psi$ был инвариантом, величина ρ должна быть временно́й компонентой сохраняющегося 4-вектора.

Чтобы избавить уравнение (1.13) от этих недостатков, Дирак предложил рассматривать его как матричное уравнение. По аналогии со спиновыми волновыми функциями в нерелятивистской квантовой механике волновая функция ψ задается в виде столбца с N компонентами

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_N \end{pmatrix},$$

а постоянные коэффициенты α_i и β — в виде матриц размерности $N \times N$. В итоге уравнение (1.13) заменяется на систему N уравнений первого порядка

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_{\tau=1}^{N} \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\sigma\tau} \psi_\tau + \sum_{\tau=1}^{N} \beta_{\sigma\tau} m c^2 \psi_\tau \equiv$$
$$\equiv \sum_{\tau=1}^{N} H_{\sigma\tau} \psi_\tau. \qquad (1.14)$$

Мы далее всюду используем матричные обозначения и опускаем индексы суммирования. Тогда система (1.14) внешне выглядит как уравнение (1.13), но теперь (1.13) следует понимать как матричное уравнение.

Для того чтобы можно было считать уравнение (1.13) отправным пунктом для дальнейшего построения теории, оно должно удовлетворять трем условиям. Во-первых, оно должно приводить к правильной связи между энергией и импульсом свободной частицы

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

во-вторых, допускать уравнение непрерывности и вероятностную интерпретацию волновой функции ψ и, в-третьих, быть лоренц-ковариантным. Сейчас мы рассмотрим первые два из этих требований.

Правильное соотношение между энергией и импульсом следует из уравнения (1.13) в том случае, если каждая из компонент ψ_σ волновой функции ψ удовлетворяет уравнению второго порядка Клейна — Гордона

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi_\sigma}{\partial t^2} = (-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4)\,\psi_\sigma. \tag{1.15}$$

Квадрируя уравнение (1.13), находим

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\sum_{i,\,j=1}^{3}\frac{\alpha_j\alpha_i + \alpha_i\alpha_j}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\,\partial x^j} + $$
$$+ \frac{\hbar mc^3}{i}\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \beta^2m^2c^4\psi.$$

Мы можем привести это уравнение к виду (1.15), если матрицы α_i и β подчиняются следующей алгебре:

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}, \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = 1. \tag{1.16}$$

Какими еще свойствами должны обладать матрицы α_i и β, и можем ли мы построить эти четыре матрицы в явном виде? Матрицы α_i и β должны быть эрмитовыми, тогда входящий в уравнение (1.14) гамильтониан $H_{\sigma\tau}$ будет эрмитовым оператором, как того требуют сформулированные в § 1 постулаты. Поскольку согласно (1.16) $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$, собственные значения α_i и β равны ± 1. Из соотношений антикоммутации вытекает, что след, т. е. сумма диагональных элементов, каждой из матриц α_i и β равен нулю. Например

$$\alpha_i = -\beta\alpha_i\beta$$

Под знаком Sp матрицы можно циклически переставлять, $\operatorname{Sp} AB = \operatorname{Sp} BA$; отсюда получаем

$$\operatorname{Sp} \alpha_i = + \operatorname{Sp} \beta^2 \alpha_i = + \operatorname{Sp} \beta \alpha_i \beta = - \operatorname{Sp} \alpha_i = 0.$$

Поскольку след есть сумма собственных значений, число собственных значений, равных $+1$, должно совпадать с числом собственных значений, равных -1, и, следовательно, матрицы α_i и β четной размерности. Наименьшая четная размерность, $N = 2$, не подходит, так как ей отвечает набор лишь из трех антикоммутирующих друг с другом матриц Паули σ_i и единичной матрицы. Минимальная размерность N, допускающая построение матриц α_i и β, равна четырем, и именно случай $N = 4$ мы будем изучать. В одном из конкретных представлений матрицы α_i и β имеют вид

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

где σ_i — известные матрицы Паули размерности 2×2, а 1 в матрице β означает единичную матрицу 2×2.

Для получения закона сохранения тока в дифференциальной форме мы, во-первых, вводим эрмитово-сопряженную волновую функцию $\psi^+ = (\psi_1^* \ldots \psi_4^*)$ и умножаем (1.13) слева на ψ^+:

$$i\hbar \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^{3} \psi^+ \alpha_k \frac{\partial}{\partial x^k} \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi. \tag{1.18}$$

Затем построим уравнение, эрмитово-сопряженное к (1.13), и умножим его справа на ψ:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi^+}{\partial x^k} \alpha_k \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi; \tag{1.19}$$

здесь $\alpha_i^+ = \alpha_i$, $\beta^+ = \beta$. Вычитая (1.19) из (1.18), находим

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^+ \psi = \sum_{k=1}^{3} \frac{\hbar c}{i} \frac{\partial}{\partial x^k} \psi^+ \alpha_k \psi,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{1.20}$$

В этом уравнении мы отождествили с плотностью вероятности и с трехмерным вектором плотности тока вероятности следующие величины:

$$\rho = \psi^{+}\psi = \sum_{\sigma=1}^{4} \psi_{\sigma}^{*}\psi_{\sigma}, \tag{1.21}$$

$$j^{k} = c\psi^{+}\alpha_{k}\psi. \tag{1.22}$$

Интегрируя (1.20) по всему пространству и используя теорему Грина[1]), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^{3}x\, \psi^{+}\psi = 0. \tag{1.23}$$

Это равенство поддерживает нашу интуитивную интерпретацию величины $\rho = \psi^{+}\psi$ как положительно определенной плотности вероятности.

Обозначения в уравнении (1.20) подчеркивают, что плотность тока вероятности $\mathbf{j}$ является вектором, если равенство (1.22) инвариантно по отношению к поворотам трехмерной системы координат. На самом деле нам нужно доказать справедливость гораздо более общего утверждения.

Чтобы обеспечить ковариантность уравнения непрерывности и возможность вероятностной интерпретации, плотность вероятности и плотность тока вероятности в уравнении (1.20) должны образовывать четырехмерный вектор по отношению к преобразованиям Лоренца. Кроме того, прежде чем признать уравнение Дирака (1.13) удовлетворяющим нашим требованиям, мы должны показать его лоренцеву ковариантность.

§ 4. Переход к нерелятивистской теории

Прежде чем углубляться в проблему лоренцевой инвариантности уравнения Дирака, полезно убедиться в том, что это уравнение имеет физический смысл.

Можно начать просто с рассмотрения свободного электрона и подсчитать число решений для электрона в покое. В этом случае уравнение (1.13) упрощается и принимает вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta mc^{2}\psi,$$

поскольку де-бройлевская длина волны бесконечно велика и волновая функция постоянна во всем пространстве. В частном представлении (1.17) для матрицы β нетрудно выписать четыре

---

[1]) Равенство $\int\limits_{V} \operatorname{div} \mathbf{A}\, dv = \oint\limits_{\Sigma} \mathbf{A}\, d\mathbf{S}$ в отечественной литературе принято называть теоремой Остроградского — Гаусса. (*Прим. перев.*)

решения этого уравнения:

$$\psi^1 = \exp\left\{-\frac{imc^2}{\hbar}t\right\}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \psi^2 = \exp\left\{-\frac{imc^2}{\hbar}t\right\}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\psi^3 = \exp\left\{+\frac{imc^2}{\hbar}t\right\}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \psi^4 = \exp\left\{+\frac{imc^2}{\hbar}t\right\}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{1.24}$$

из которых первые два отвечают положительной энергии, а два других — отрицательной.

Посторонние решения с отрицательной энергией, к которым приводит квадратичная форма $H^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, являются основной трудностью, однако преодоление этой трудности приводит к такому важному триумфу теории, как античастицы. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 5. Пока же ограничимся «допустимыми» решениями с положительной энергией. В частности, покажем, что для них имеется разумный переход к двухкомпонентной теории спина Паули. Для этой цели мы введем взаимодействие с внешним электромагнитным полем, описываемым 4-потенциалом,

$$A^\mu\colon\ (\Phi,\ \mathbf{A}).$$

Взаимодействие проще всего ввести путем калибровочно-инвариантной замены

$$p^\mu \to p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu, \tag{1.25}$$

которая производится в классической релятивистской механике при описании взаимодействия точечной частицы, обладающей зарядом e, с внешним полем. В нашем случае замена согласно (1.5)

$$p^\mu \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \mathrm{p}^\mu$$

и (1.25) приводят уравнение Дирака (1.13) к виду

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\alpha\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \beta mc^2 + e\Phi\right)\psi. \tag{1.26}$$

Уравнение (1.26) описывает «минимальное» взаимодействие дираковской частицы, рассматриваемой как точечный заряд, с внешним электромагнитным полем. Чтобы подчеркнуть аналогию с классикой, мы записали гамильтониан в (1.26) в виде $H = H_0 + H'$, где $H' = -e\alpha\cdot\mathbf{A} + e\Phi$. Матрица $c\alpha$ является операторным аналогом скорости в классическом выражении для энергии взаимодействия точечного заряда:

$$H'_{\text{класс}} = -\frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} + e\Phi.$$

Это операторное соответствие $\mathbf{v}_{\text{опер}} = c\boldsymbol{\alpha}$ легко прослеживается и в выражении (1.22) для тока вероятности Оно следует также из релятивистского обобщения соотношений Эренфеста [21—23]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,\mathbf{r}] = c\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}_{\text{опер}}$$

и

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,\boldsymbol{\pi}] - \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = e\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_{\text{опер}}\times\mathbf{B}\right], \tag{1.27}$$

где $\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$ — оператор, соответствующий импульсу, и

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

— напряженности электрического и магнитного полей.

Уравнение (1.27) есть операторное уравнение для движения точечного заряда e. Введение более общего взаимодействия в уравнение (1.26) привело бы, по аналогии с классической теорией, к появлению магнитного дипольного члена и членов более высокой мультипольности.

Переходя в уравнении (1.26) к нерелятивистскому пределу, удобно воспользоваться представлением (1.17) и выразить волновую функцию через двухкомпонентные столбцы $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\chi}$:

$$\psi = \begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

Тогда уравнение (1.26) примет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\begin{pmatrix}\tilde{\chi}\\ \tilde{\varphi}\end{pmatrix} + e\Phi\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\tilde{\chi}\end{pmatrix}.$$

В нерелятивистском пределе наибольшей из фигурирующих в задаче энергий является энергия покоя mc^2. Поэтому мы запишем

$$\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{pmatrix} = \exp\left\{-\frac{imc^2}{\hbar}t\right\}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

где функции φ и χ медленно меняются со временем и удовлетворяют паре матричных уравнений

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\begin{pmatrix}\chi\\ \varphi\end{pmatrix} + e\Phi\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Если кинетическая энергия и энергия взаимодействия малы по сравнению с mc^2, второе из уравнений (1.30) приводится к виду

$$\chi = \frac{\sigma \cdot \pi}{2mc}\varphi. \tag{1.31}$$

Уравнение (1.31) позволяет говорить о χ как о «малой» компоненте волновой функции ψ по сравнению с «большой» компонентой φ. В нерелятивистском приближении χ имеет по отношению к φ малость порядка $v/c \ll 1$. Подставляя (1.31) в первое из уравнений (1.30), мы получаем двухкомпонентное спинорное уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(\frac{\sigma \cdot \pi\ \sigma \cdot \pi}{2m} + e\Phi\right)\varphi. \tag{1.32}$$

Преобразуем это уравнение, используя следующее тождество для спиновых матриц Паули:

$$\sigma \cdot \mathbf{a}\ \sigma \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\sigma \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

или, в нашем случае,

$$\sigma \cdot \pi\ \sigma \cdot \pi = \pi^2 + i\sigma \cdot \pi \times \pi = \pi^2 - \frac{e\hbar}{c}\sigma \cdot \mathbf{B}. \tag{1.33}$$

Тогда мы получаем уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc}\sigma \cdot \mathbf{B} + e\Phi\right]\varphi, \tag{1.34}$$

в котором легко узнать уравнение Паули [21—23].

Уравнение (1.34) дает нам уверенность в том, что мы пошли по верному пути, приняв уравнения (1.13) и (1.26) за отправную точку для построения теории релятивистского электрона. Две компоненты φ соответствуют двум степеням свободы электрона со спином половина; правильное значение магнитного момента электрона, отвечающее гиромагнитному отношению $g = 2$, получается автоматически. Чтобы явно убедиться в этом, преобразуем уравнение (1.34), сохранив в нем только члены первого порядка по взаимодействию со слабым однородным магнитным полем $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = {}^1/_2\mathbf{B} \times \mathbf{r}$:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}\right]\varphi. \tag{1.35}$$

Здесь $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ — орбитальный угловой момент, $\mathbf{S} = {}^1/_2\hbar\sigma$ — оператор спина электрона с собственными значениями $\pm\hbar/2$, а множитель при члене, описывающем взаимодействие спина с полем $\mathbf{B}$, дает правильное значение магнитного момента электрона, отвечающее значению g, равному 2.

Вдохновленные успешным переходом к нерелятивистскому пределу в уравнении Дирака, мы двинемся дальше и установим лоренцеву ковариантность теории Дирака. Затем мы должны исследовать дальнейшие физические следствия этой теории; в первую очередь надо дать физическую интерпретацию решениям с «отрицательной энергией».

ЗАДАЧИ

1. Запишите уравнения Максвелла в дираковской форме (1.13), используя шестикомпонентные амплитуды поля. Какие матрицы соответствуют матрицам α и β? (См. [27, 4*].)
2. Проверьте, что матрицы (1.17) удовлетворяют алгебре (1.16)
3. Проверьте соотношение (1.33).
4. Проверьте соотношение (1.27).

ГЛАВА 2

ЛОРЕНЦЕВА ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

§ 5. Уравнение Дирака в ковариантной форме

Уравнение Дирака и лежащее в основе его физической интерпретации уравнение непрерывности должны быть ковариантными относительно преобразований Лоренца. Напомним сначала, что мы подразумеваем под преобразованием Лоренца [28].

Два наблюдателя O и O', находящиеся в разных инерциальных системах отсчета, приписывают одному и тому же физическому событию разные пространственные координаты и время. Соответствие между координатами x^μ, которыми описывает событие наблюдатель O, и координатами $(x^\mu)'$, которыми пользуется для описания того же события наблюдатель O', задается преобразованием Лоренца

$$(x^\nu)' = \sum_{\mu=0}^{3} a^\nu_\mu x^\mu \equiv a^\nu_\mu x^\mu. \tag{2.1}$$

Это линейное однородное преобразование и коэффициенты a^ν_μ зависят только от относительных скоростей и ориентаций двух систем отсчета O и O'. Основным инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца является интервал собственного времени

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = dx^\mu\, dx_\mu. \tag{2.2}$$

Инвариантность этой величины следует из физического наблюдения, состоящего в том, что скорость света в вакууме одна и та же во всех лоренцевых системах отсчета. Равенства (2.1) и (2.2) приводят к следующему соотношению для коэффициентов преобразования:

$$a^\nu_\mu a^\mu_\sigma = \delta^\nu_\sigma. \tag{2.3}$$

Соотношения (2.1) и (2.3) служат определением как собственного, так и несобственного преобразований Лоренца. В первом случае определитель, составленный из коэффициентов преобразования, удовлетворяет условию

$$\det a = +1.$$

Собственное преобразование Лоренца может быть представлено как бесконечная последовательность инфинитезимальных преобразований. Собственные преобразования Лоренца включают в себя переходы между различными инерциальными системами координат, движущимися в произвольных направлениях, и обычные трехмерные вращения. Несобственные преобразования Лоренца — это дискретные преобразования пространственного отражения и обращения времени. Их нельзя представить как последовательность инфинитезимальных преобразований. Матрицы несобственных преобразований удовлетворяют условию

$$\det a = -1,$$

справедливому как для пространственного отражения, так и для обращения времени.

Наша задача — установить соответствие между заданной серией наблюдений, произведенных над дираковской частицей наблюдателем O, и теми же наблюдениями, осуществленными наблюдателем O', находящимся в другой системе отсчета. Иначе говоря, мы ищем закон преобразования, связывающий волновые функции $\psi(x)$ и $\psi'(x')$, относящиеся к наблюдателям O и O' соответственно. Этот закон преобразования позволяет наблюдателю O' найти $\psi'(x')$ по известной функции $\psi(x)$. Согласно требованию лоренцевой ковариантности этот закон преобразования должен приводить к волновым функциям, которые являются решениями уравнения Дирака, имеющего один и тот же вид во всех системах отсчета. Неизменная форма уравнения Дирака есть выражение лоренцевой инвариантности лежащего в его основе соотношения между энергией и импульсом

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2,$$

на которое опирались приведенные в гл. 1 рассуждения.

Для обсуждения свойств ковариантности желательно записать уравнение Дирака в четырехмерных обозначениях, обеспечивающих симметрию между ct и x^i. С этой целью умножим (1.13) на β/c и введем обозначения

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда получаем

$$i\hbar\left(\gamma_0\frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\psi - mc\psi = 0. \qquad (2.4)$$

Вновь введенные матрицы γ^μ позволяют придать изящную форму коммутационным соотношениям (1.16):

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{1}$ означает единичную матрицу размерности 4×4; в дальнейшем мы не будем каждый раз это оговаривать. Из определения этих матриц ясно, что γ^i антиэрмитова, причем $(\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}$, а γ^0 эрмитова. В представлении (1.17) они имеют вид

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Удобно ввести обозначения с «крышкой» [1]):

$$\hat{A} = \gamma^\mu A_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu A^\nu = \gamma^0 A^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}$$

и, в частности,

$$\hat{\nabla} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\gamma^0}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla.$$

Тогда уравнение (2.4) в сокращенном виде выглядит так:

$$(i\hbar\hat{\nabla} - mc)\,\psi = 0, \tag{2.7}$$

или, вводя $\mathrm{p}^\mu = i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$,

$$(\hat{\mathrm{p}} - mc)\,\psi = 0. \tag{2.8}$$

Введение электромагнитного взаимодействия путем «минимальной» замены (1.25) дает

$$\left(\hat{\mathrm{p}} - \frac{e\hat{A}}{c} - mc\right)\psi = 0.$$

Такая замена никак не влияет на свойства ковариантности, поскольку p^μ и A^μ, а следовательно, и их разность являются 4-векторами.

§ 6. Доказательство ковариантности

Для доказательства ковариантности уравнения Дирака относительно преобразований Лоренца мы должны установить, что выполняются следующие два условия. Во-первых, должно существовать явное правило, по которому наблюдатель O' мог

---

[1]) Авторы используют «перечеркнутые» обозначения:

$$A\!\!\!/ = \gamma^\mu A_\mu$$

однако мы сочли возможным заменить их обозначениями, принятыми в отечественной литературе. (*Прим. перев.*)

бы, зная волновую функцию $\psi(x)$, относящуюся к наблюдателю O, найти волновую функцию $\psi'(x')$, описывающую то же самое состояние и относящуюся к наблюдателю O'. Во-вторых, в соответствии с принципом относительности, $\psi'(x')$ должна быть решением уравнения, которое имеет вид (2.7) в штрихованной системе координат:

$$\left(i\hbar\tilde{\gamma}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} - mc\right)\psi'(x') = 0.$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\mu}$ удовлетворяют условиям антикоммутации (2.5), поэтому из эрмитовости гамильтониана следует, что $(\tilde{\gamma}^0)^+ = \tilde{\gamma}^0$ и $(\tilde{\gamma}^i)^+ = -\tilde{\gamma}^i$. Длинное алгебраическое доказательство [29] приводит к тому, что все такие матрицы $\tilde{\gamma}^{\mu}$ размерности 4×4 эквивалентны с точностью до унитарного преобразования U:

$$\tilde{\gamma}^{\mu} = U^+\gamma^{\mu}U, \qquad U^+ = U^{-1},$$

поэтому мы не будем делать различия между $\tilde{\gamma}^{\mu}$ и γ^{μ} и запишем

$$(\hat{p}' - mc)\,\psi'(x') = 0, \tag{2.9}$$

где

$$\hat{p}' = i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}.$$

Мы потребуем, чтобы преобразование между ψ и ψ' было линейным, так как и уравнение Дирака, и преобразование Лоренца для координат (2.1) являются линейными. Введем это преобразование в следующем виде:

$$\psi'(x') = \psi'(ax) = S(a)\,\psi(x) = S(a)\,\psi(a^{-1}x'), \tag{2.10}$$

где $S(a)$ — матрица размерности 4×4, действующая на четырехкомпонентный вектор $\psi(x)$. Она зависит от относительных скоростей и пространственных ориентаций систем O и O'. Матрица S должна иметь обратную матрицу, так чтобы наблюдатель O, зная функцию $\psi'(x')$, которую наблюдатель O' использует для описания заданного физического состояния, мог построить свою волновую функцию $\psi(x)$:

$$\psi(x) = S^{-1}(a)\,\psi'(x') = S^{-1}(a)\,\psi'(ax). \tag{2.11}$$

Столь же правильно будет, воспользовавшись (2.10), представить $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = S(a^{-1})\,\psi'(ax).$$

Отсюда следует равенство

$$S(a^{-1}) = S^{-1}(a).$$

Главная задача — найти S. Матрица S должна удовлетворять равенствам (2.10) и (2.11). Если такая матрица S существует, наблюдатель O' по заданному значению $\psi(x)$ сможет найти $\psi'(x')$, воспользовавшись (2.10).

Равенство (2.11) позволяет наблюдателю O' переписать для функции $\psi'(x')$ уравнение Дирака (2.7), относящееся к наблюдателю O. Затем O' может проверить, удовлетворяет ли $\psi'(x')$ его собственному уравнению (2.9). После умножения слева на $S(a)$ он получит

$$\left[i\hbar S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-mc\right]\psi'(x')=0.$$

Используя (2.1), можно записать

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}=a^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}.$$

Следовательно, уравнение в «штрихованных» координатах имеет вид

$$\left[i\hbar S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a)a^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}-mc\right]\psi'(x')=0.$$

Это уравнение имеет инвариантную форму, т. е. совпадает с (2.9), если можно найти матрицу S, обладающую следующим свойством:

$$S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a)a^{\nu}_{\mu}=\gamma^{\nu},$$

или, что то же самое,

$$a^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}=S^{-1}(a)\gamma^{\nu}S(a). \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) есть основное соотношение, определяющее S. Если мы покажем, что уравнение (2.12) имеет решение, и найдем это решение, ковариантность уравнения Дирака будет доказана. По существующей терминологии волновую функцию, преобразующуюся согласно (2.10) и (2.12), называют четырехмерным лоренцевым спинором [1]). Мы подчеркиваем, что S будет иметь *новые свойства, не описываемые обычным тензорным исчислением*, поскольку можно ожидать, что билинейные формы, которые можно составить из ψ, такие, например, как ток вероятности (1.20), окажутся 4-векторами.

Сначала мы построим S для инфинитезимального собственного преобразования Лоренца

$$a^{\nu}_{\mu}=g^{\nu}_{\mu}+\Delta\omega^{\nu}_{\mu},\qquad a^{\nu\mu}=g^{\nu\mu}+\Delta\omega^{\nu\mu}, \tag{2.13а}$$

где

$$\Delta\omega^{\nu\mu}=-\Delta\omega^{\mu\nu}. \tag{2.13б}$$

---

[1]) Или биспинором. (*Прим. перев.*)

Последнее равенство следует из условия (2.3) для интервала собственного времени. Каждый из шести отличных от нуля независимых матричных элементов матрицы $\Delta\omega$ генерирует инфинитезимальное преобразование Лоренца; например, элемент

$$\Delta\omega^{01} = \Delta v / c$$

отвечает переходу к системе координат, движущейся со скоростью Δv вдоль оси x, а

$$\Delta\omega^1_2 = -\Delta\omega^{12} = \Delta\varphi$$

отвечает повороту на угол $\Delta\varphi$ вокруг оси z, и т. д.

Разлагая S по степеням $\Delta\omega^{\nu\mu}$ и сохраняя только линейные по инфинитезимальным генераторам члены, получаем

$$S = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} \quad \text{и} \quad S^{-1} = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}, \tag{2.14}$$

где согласно (2.13б)

$$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}.$$

Каждый из шести коэффициентов $\sigma_{\mu\nu}$ есть матрица той же размерности 4×4, что и оператор S и единичная матрица 1. Подставляя (2.13) и (2.14) в (2.12) и удерживая только члены первого порядка по $\Delta\omega^{\mu\nu}$, находим

$$\Delta\omega^\nu_\mu \gamma^\mu = -\frac{i}{4}(\Delta\omega)^{\alpha\beta}(\gamma^\nu\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\gamma^\nu).$$

Отсюда, учитывая антисимметрию генераторов $\Delta\omega^{\mu\nu}$, получаем

$$2i\left(g^\nu_\alpha\gamma_\beta - g^\nu_\beta\gamma_\alpha\right) = \left[\gamma^\nu, \sigma_{\alpha\beta}\right]. \tag{2.15}$$

Теперь задача об установлении ковариантности уравнения Дирака относительно собственных преобразований Лоренца сведена к нахождению шести матриц $\sigma_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих условию (2.15). Самое простое предположение относительно $\sigma_{\alpha\beta}$ состоит в том, что они являются антисимметризованными произведениями двух матриц. Используя (2.5), мы находим, что

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{2.16}$$

и есть искомая матрица. Согласно (2.14) матрица S для инфинитезимального преобразования имеет вид

$$S = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\Delta\omega^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}. \tag{2.17}$$

Завершая решение нашей задачи, получим конечное собственное преобразование Лоренца как последовательность инфинитезимальных преобразований. Сначала построим преобразование (2.1) из (2.13). Запишем

$$\Delta\omega_\mu^\nu = \Delta\omega \left(I_n\right)_\mu^\nu. \tag{2.18}$$

Здесь $\Delta\omega$ — бесконечно малый параметр, или «угол поворота» вокруг оси с направлением n, а величина I_n представляет собой матрицу 4×4, действующую на пространственные координаты и время и отвечающую повороту на единичный угол вокруг оси n. Индексы ν и μ нумеруют соответственнно строки и столбцы этой матрицы. Так, например, для перехода к штрихованной системе координат, движущейся вдоль оси x с бесконечно малой скоростью, $c\Delta\omega = \Delta v$, имеем

$$I_\mu^\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

При этом

$$I_1^0 = I_0^1 = -I^{01} = +I^{10} = -1.$$

Используя следующее алгебраическое свойство:

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I^3 = +I,$$

мы можем представить конечное преобразование к системе отсчета, равномерно движущейся вдоль оси x, в виде

$$x^{\nu'} = \lim_{N\to\infty} \left(g + \frac{\omega}{N} I\right)_{\alpha_1}^{\nu} \left(g + \frac{\omega}{N} I\right)_{\alpha_2}^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_N} =$$
$$= (e^{\omega I})_\mu^\nu x^\mu = (\operatorname{ch}\omega I + \operatorname{sh}\omega I)_\mu^\nu x^\mu = (1 - I^2 + I^2 \operatorname{ch}\omega + I \operatorname{sh}\omega)_\mu^\nu x^\mu,$$

откуда для отдельных компонент получаем

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & -\operatorname{sh}\omega & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\omega & \operatorname{ch}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

или

$$\begin{gathered} x^{0'} = (\operatorname{ch}\omega)(x^0 - \operatorname{th}\omega x^1), \quad x^{1'} = (\operatorname{ch}\omega)(x^1 - \operatorname{th}\omega x^0), \\ x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Связь угла лоренцева поворота ω с относительной скоростью v дается равенствами

$$\operatorname{th}\omega = \frac{v}{c}, \qquad \operatorname{ch}\omega = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Этот результат можно обобщить на случай движения вдоль любого направления или пространственного вращения вокруг любой оси. Шесть матриц I_{μ}^{ν}, генерирующих шесть независимых лоренцевых поворотов, являются четырехмерными обобщениями поворотов трехмерного пространства, хорошо известными из нерелятивистской теории.

Перейдем теперь к построению матрицы S, определяющей конечное преобразование спинора $\psi(x)$. Из (2.14) и (2.18) имеем

$$\psi'(x') = S\psi(x) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{4}\frac{\omega}{N}\sigma_{\mu\nu}I_n^{\mu\nu}\right)^N \psi(x) = \\ = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu}I_n^{\mu\nu}\right)\psi(x). \qquad (2.22)$$

Если вновь обратиться к преобразованию частного вида (2.19), получим

$$\psi'(x') = e^{-(i/2)\,\omega\sigma_{01}}\psi(x), \qquad (2.23)$$

где x' и x связаны друг с другом равенствами (2.21).

Аналогично для поворота на угол φ вокруг оси z имеем

$$I^{12} = -I^{21} = -1$$

и

$$\psi'(x') = e^{(i/2)\,\varphi\sigma^{12}}\psi(x), \qquad (2.24)$$

где в представлении (1.17)

$$\sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix},$$

а σ_3 есть обычная матрица Паули размерности 2×2

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы замечаем сходство преобразования (2.24) с поворотом двухкомпонентного спинора Паули $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x') = e^{(i/2)\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\varphi(x). \qquad (2.25)$$

Входящие в (2.18) ковариантные «угловые» переменные $\omega^{\mu\nu}$ играют в преобразовании Лоренца ту же роль, что угол поворота и направление $\boldsymbol{\omega}$ в трехмерном вращении. Появление в (2.24) половинного угла, фигурирующего и в (2.25), есть отражение двузначного характера закона преобразования спиноров при вращении; нужно совершить поворот на 4π, чтобы значение спинора вернулось к начальному. Поэтому все наблюдаемые величины в теории Дирака должны быть либо билинейными по $\psi(x)$, либо выражаться через другие четные степени $\psi(x)$.

Для пространственных вращений матрица $S = S_R$ унитарна, поскольку матрица σ_{ij} эрмитова и

$$S_R^{+} = e^{-(i/4)\,\sigma^{+ij}\omega_{ij}} = e^{-(i/4)\,\sigma^{ij}\omega_{ij}} = S_R^{-1}.$$

Это несправедливо для матрицы $S = S_L$, осуществляющей переход к движущейся системе координат. Например, для преобразования (2.23)

$$S_L = e^{-(i/2)\omega\sigma_{01}} = e^{-(\omega/2)\alpha_1} = S_L^+ \neq S_L^{-1}.$$

Однако S_L обладает следующим свойством:

$$S_L^{-1} = \gamma_0 S_L^+ \gamma_0,$$

которое можно установить, разлагая S_L в степенной ряд. Поскольку $[\gamma_0, \sigma^{ij}] = 0$, это свойство можно обобщить на вращения и записать

$$S^{-1} = \gamma_0 S^+ \gamma_0. \tag{2.26}$$

Уравнение непрерывности также ковариантно. Вектор плотности тока вероятности (1.21) и (1.22) в обозначениях (2.4) выглядит так:

$$j^\mu(x) = c\psi^+(x)\gamma^0\gamma^\mu\psi(x)$$

Под действием (2.1) он переходит в

$$j^{\mu\prime} = c\psi'^+(x')\gamma^0\gamma^\mu\psi'(x') = c\psi^+(x)S^+\gamma_0\gamma^\mu S\psi(x) =$$
$$= c\psi^+(x)\gamma_0 S^{-1}\gamma^\mu S\psi(x) = ca^\mu_\nu\psi^+(x)\gamma_0\gamma^\nu\psi(x) = a^\mu_\nu j^\nu(x). \tag{2.27}$$

Очевидно, что $j^\mu(x)$ является лоренцевым 4-вектором и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial j^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0$$

инвариантно. Кроме того, плотность вероятности $j^0(x) = c\rho(x)$ преобразуется как временная компонента сохраняющегося 4-вектора. Мы уже упоминали об этом свойстве в § 3 как о желаемом. Оно необходимо для того, чтобы интеграл

$$\int \psi^+(x)\psi(x)\,d^3x$$

представлял собой релятивистский инвариант.

Поскольку входящая в (2.27) комбинация $\psi^+\gamma_0$ встречается очень часто, введем для нее специальное обозначение

$$\bar\psi(x) = \psi^+\gamma_0. \tag{2.28}$$

Функцию $\bar\psi(x)$ называют сопряженным спинором[1]). Преобразование Лоренца для $\bar\psi(x)$ задается равенством

$$\bar\psi'(x') = \bar\psi(x)S^{-1}. \tag{2.29}$$

---

[1]) Или дираковски-сопряженным. (*Прим. ред.*)

§ 7. Пространственное отражение

Теперь пора расширить наше изложение и принять во внимание существование несобственного преобразования Лоренца — пространственного отражения:

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \quad t' = t.$$

Для ковариантности вновь необходимо, чтобы уравнение (2.12) имело решение, однако в данном случае его нельзя построить из инфинитезимальных преобразований. Но оказывается, что уравнение (2.12) легко решить непосредственно. Матрица преобразования имеет вид

$$a_\mu^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\nu\mu}. \qquad (2.30)$$

Если ввести для оператора инверсии координат обозначение $S = P$, то уравнение (2.12) будет выглядеть так[1]):

$$P^{-1}\gamma^\nu P = g^{\nu\nu}\gamma^\nu. \qquad (2.31)$$

Ему можно удовлетворить, положив

$$P = e^{i\varphi}\gamma_0. \qquad (2.32)$$

Фазовый множитель не представляет физического интереса, и его значения сводятся либо к ± 1, либо к $\pm i$. К такому выбору мы приходим, потребовав, чтобы при четырехкратной инверсии спинор переходил сам в себя по аналогии с вращением на угол 4π. Очевидно, что задаваемый равенством (2.32) оператор P унитарен, $P^{-1} = P^+$, и, кроме того, он удовлетворяет уравнению (2.26). Равенство (2.32) означает, что

$$\psi'(x') = \psi'(-\mathbf{x}, t) = e^{i\varphi}\gamma_0\psi(\mathbf{x}, t). \qquad (2.33)$$

В нерелятивистском пределе ψ стремится к собственному состоянию P и из (1.24) и (2.6) видно, что в покое состояния с положительной и отрицательной энергией имеют разные собственные значения P, или, как говорят, разные внутренние четности.

Рассмотрение других несобственных преобразований, таких как обращение времени, более сложно; оно приводится в гл. 5.

§ 8. Ковариантные билинейные формы

Составляя произведения из матриц γ, можно построить 16 линейно независимых матриц $\Gamma^n_{\alpha\beta}$, которые часто встречаются в

[1]) Здесь суммирование по ν не подразумевается. (*Прим. ред.*)

приложениях теории Дирака. Эти матрицы имеют вид

$$\Gamma^S = 1, \quad \Gamma^V_\mu = \gamma_\mu, \quad \Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu},$$
$$\Gamma^P = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 \equiv \gamma^5, \quad \Gamma^A_\mu = \gamma_5\gamma_\mu. \tag{2.34}$$

Используя соотношения антикоммутации (2.5), нетрудно доказать линейную независимость матриц Γ. Будем рассуждать следующим образом:

1. Каждая из матриц Γ^n удовлетворяет условию $(\Gamma^n)^2 = \pm 1$.

2. Для каждой из матриц Γ^n, за исключением Γ^S, существует другая матрица Γ^m такая, что

$$\Gamma^n\Gamma^m = -\Gamma^m\Gamma^n.$$

Отсюда следует, что след матрицы Γ^n равен нулю:

$$\mathrm{Sp}\,\Gamma^n = \mathrm{Sp}\,\Gamma^n(\Gamma^m)^2 = -\mathrm{Sp}\,\Gamma^m\Gamma^n\Gamma^m = -\mathrm{Sp}\,\Gamma^n(\Gamma^m)^2 = 0.$$

3. Для заданных матриц Γ^a и Γ^b, $a \neq b$, существует матрица $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ такая, что

$$\Gamma^a\Gamma^b = \Gamma^n.$$

Это свойство можно установить непосредственной проверкой.

4. Предположим, что существует набор чисел a_n такой, что

$$\sum_n a_n\Gamma^n = 0.$$

Умножим это равенство на $\Gamma^m \neq \Gamma^S$ и вычислим след; используя свойство 3, мы получим, что $a_m = 0$. Если $\Gamma^m = \Gamma^S$, то $a_S = 0$ и все коэффициенты, таким образом, обращаются в нуль. Тем самым линейная независимость Γ^n установлена. Отсюда следует, что любую матрицу размерности 4×4 можно представить в виде комбинации матриц Γ^n.

Теперь мы можем записать преобразование Лоренца для билинейных форм $\bar\psi(x)\Gamma^n\psi(x)$, построенных из 16 матриц Γ^n. Заметим прежде, что

$$\gamma^\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma^\mu = 0 \tag{2.35}$$

и поэтому

$$[\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}] = 0,$$

или

$$[S, \gamma_5] = 0, \tag{2.36}$$

что справедливо для всех собственных преобразований Лоренца. Частным случаем (2.35) является равенство

$$P\gamma_5 = -\gamma_5 P. \tag{2.37}$$

С помощью вычислений, схожих с (2.27), находим

$$\bar\psi'(x')\,\psi'(x') = \bar\psi(x)\,\psi(x) \text{ — скаляр},$$

$$\bar\psi'(x')\,\gamma_5\psi'(x') = \bar\psi(x)\,S^{-1}\gamma_5 S\psi(x) = \det|a|\,\bar\psi(x)\,\gamma_5\psi(x) \text{ — псевдоскаляр},$$

$$\bar\psi'(x')\,\gamma^\nu\psi'(x') = a^\nu_\mu\bar\psi(x)\,\gamma^\mu\psi(x) \text{ — вектор},$$

$$\bar\psi'(x')\,\gamma_5\gamma^\nu\psi'(x') = \det|a|\,a^\nu_\mu\bar\psi(x)\,\gamma_5\gamma^\mu\psi(x) \text{ — псевдовектор},$$

$$\bar\psi'(x')\,\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = a^\mu_\alpha a^\nu_\beta\bar\psi(x)\,\sigma^{\alpha\beta}\psi(x) \text{ — тензор второго ранга}. \quad (2.38)$$

ЗАДАЧИ

1. Проверьте равенство (2.26).
2. Проверьте законы преобразования (2.38).
3. Задан спинор $u(p)$ для свободной частицы. С помощью преобразования Лоренца выразить через $u(p)$ спинор $u(p+q)$ в случае, когда $q_\mu \to 0$ и $p\cdot q \to 0$.
4. Показать, что существуют четыре матрицы Γ^μ размерности 4×4 такие, что

$$\operatorname{Re}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0, \qquad \{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \qquad [i\Gamma_\mu\partial/\partial x_\mu - m]\,\psi(x) = 0,$$

т. е. уравнение Дирака не содержит мнимых коэффициентов.

ГЛАВА 3

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

§ 9. Плоские волны

Мы убедились в том, что дираковская теория лоренц-ковариантна и для решений с положительной энергией имеется разумный переход к нерелятивистскому пределу.

Для более глубокого понимания физической природы решений уравнения Дирака надо рассмотреть уравнение для свободной частицы. Четыре решения для частицы в покое даются формулами (1.24), которые можно переписать в следующем виде:

$$\psi^r(x) = w^r(0)\, e^{-(i\varepsilon_r mc^2/\hbar)\,t}, \quad r = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{3.1}$$

где

$$\varepsilon_r = \begin{cases} +1, & r = 1,\ 2, \\ -1, & r = 3,\ 4. \end{cases}$$

В представлении (1.17) для матриц Дирака входящие сюда спиноры равны

$$w^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Первая пара решений описывает две спиновые степени свободы электрона, подчиняющегося уравнению Паули. Другой паре решений ($r = 3,\ 4$) с отрицательной энергией еще предстоит дать физическую интерпретацию. Все четыре решения являются собственными функциями оператора $\sigma_z = \sigma_{12}$ с собственными значениями $+1$ и -1. Решения для свободной частицы с произвольной скоростью можно получить с помощью преобразования Лоренца (2.10). Переходя к системе координат, движущейся со скоростью $-\mathbf{v}$ относительно системы, в которой электрон покоится, мы получим волновую функцию свободного электрона, движущегося со скоростью $+\mathbf{v}$.

Для того чтобы явно выразить зависимость от 4-радиус-вектора частицы, надо записать входящую в (3.1) экспоненту в инвариантной форме:

$$\exp\left(-i\varepsilon_r \frac{mc^2}{\hbar} t\right) = \exp\left(-i\varepsilon_r \frac{p_\mu^{(0)} x^\mu}{\hbar}\right) = \exp\left(-i\varepsilon_r \frac{p_\mu x^{\mu'}}{\hbar}\right), \quad (3.3)$$

где $x^{\mu'} = a^\mu_\nu x^\nu$ и $p^\mu = a^\mu_\nu p^{\nu(0)} = a^\mu_0 mc$; мы будем везде пользоваться обозначением $p^0 = E/c = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2} > 0$. При собственных преобразованиях Лоренца и пространственном отражении решения с положительной и отрицательной энергией преобразуются независимо, не перепутываясь друг с другом. Это видно из выражения (3.3), поскольку 4-импульс свободной частицы времениподобен, $p^\mu p_\mu = mc^2 > 0$. Следовательно, 4-вектор p_μ лежит внутри светового конуса в p-пространстве. Преобразования Лоренца, дополненные пространственной инверсией, не переводят ось p^0 из одной полости светового конуса в другую, поэтому сохраняется разделение решений на решения с положительной и отрицательной энергией.

Согласно (2.23) спиноры преобразуются с помощью оператора

$$S = e^{-(i/2)\,\omega\sigma_{01}}, \quad (3.4)$$

где для простоты мы выбрали направление скорости вдоль оси x. Входящий в (3.4) лоренцев угол ω равен

$$\omega = \operatorname{arcth}\left(-\frac{v}{c}\right) = -\operatorname{arcth}\left(\frac{v}{c}\right)$$

и отличается по знаку от (2.21), так как мы производим преобразование к системе координат, движущейся вдоль оси x со скоростью $-\mathbf{v}$.

Применяя преобразование (3.4) к спинорам (3.2), получаем

$$w^r(\mathbf{p}) = e^{-(i\omega/2)\,\sigma_{01}} w^r(0) = \left(\operatorname{ch}\frac{\omega}{2} - \alpha_1 \operatorname{sh}\frac{\omega}{2}\right) w^r(0) =$$

$$= \operatorname{ch}\frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\operatorname{th}\frac{\omega}{2} \\ 0 & 1 & -\operatorname{th}\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & -\operatorname{th}\frac{\omega}{2} & 1 & 0 \\ -\operatorname{th}\frac{\omega}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w^r(0). \quad (3.5)$$

Из формул (3.2) для $w^r(0)$ ясно, что спинор $w^r(\mathbf{p})$ есть просто столбец с номером r этой матрицы преобразования. Используя тригонометрические формулы

$$-\operatorname{th}\frac{\omega}{2}=\frac{-\operatorname{th}\omega}{1+\sqrt{1-\operatorname{th}^2\omega}}=\frac{v/c}{1+\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{pc}{E+mc^2}$$

и

$$\operatorname{ch}\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}, \tag{3.6}$$

можно выразить $w^r(\mathbf{p})$ через энергию и импульс частицы.

Можно обобщить (3.5) для произвольного направления скорости $\mathbf{v}$. Для этого в (2.19) следует заменить матрицу I на

$$I^\mu_\nu=\begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha & -\cos\beta & -\cos\gamma \\ -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы скорости $\mathbf{v}$. Тогда

$$\sigma_{\mu\nu}I_n^{\mu\nu}=2(\sigma_{01}\cos\alpha+\sigma_{02}\cos\beta+\sigma_{03}\cos\gamma)=-2i\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Используя (3.6), получаем отсюда

$$S=\exp\left(-\frac{\omega}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{p_zc}{E+mc^2} & \frac{p_-c}{E+mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{p_+c}{E+mc^2} & \frac{-p_zc}{E+mc^2} \\ \frac{p_zc}{E+mc^2} & \frac{p_-c}{E+mc^2} & 1 & 0 \\ \frac{p_+c}{E+mc^2} & \frac{-p_zc}{E+mc^2} & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{3.7}$$

здесь $p_\pm=p_x\pm ip_y$. Общий вид решения для свободной частицы есть

$$\psi^r(x)=w^r(\mathbf{p})\,e^{-i\varepsilon_r(p_\mu x^\mu/\hbar)}, \tag{3.8}$$

где в представлении (1.17) для матриц γ спинор $w^r(\mathbf{p})$ есть столбец с номером r в матрице (3.7).

Спиноры $w^r(\mathbf{p})$ удовлетворяют следующим полезным соотношениям:

$$(\not{p}-\varepsilon_r mc)\,w^r(\mathbf{p})=0, \tag{3.9а}$$

$$\bar{w}^r(\mathbf{p})\,w^{r'}(\mathbf{p})=\delta_{rr'}\varepsilon_r, \tag{3.9б}$$

$$\sum_{r=1}^{4}\varepsilon_r w^r_\alpha(\mathbf{p})\,\bar{w}^r_\beta(\mathbf{p})=\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.9в}$$

Уравнение (3.9а), получаемое применением дираковского оператора $(i\hat{\nabla} - m)$ к функциям (3.8), есть уравнение Дирака для свободной частицы в импульсном пространстве. Для $r = 1, 2$ имеем $\varepsilon_r = +1$ и $(\hat{p} - mc) w^r(\mathbf{p}) = 0$. Это уравнение для двух решений с положительной энергией, задаваемых двумя первыми столбцами матрицы (3.7). В нерелятивистском пределе их третьи и четвертые компоненты являются «малыми» и в отсутствие внешнего поля эти решения переходят в (1.29) и (1.31). Для решений с отрицательной энергией «большие» и «малые» компоненты меняются местами. Мы ввели также сопряженный спинор согласно определению (2.28):

$$\bar{w}^r(\mathbf{p}) \equiv w^{r+}(\mathbf{p}) \gamma_0.$$

Он удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\bar{w}^r(\mathbf{p})(\hat{p} - \varepsilon_r mc) = 0, \tag{3.10}$$

которое получается, если взять эрмитово-сопряженное от уравнения (3.9а), умножить его справа на γ^0 и воспользоваться равенствами $(\gamma^0)^2 = +1$ и $\gamma^0 \gamma^{\mu+} \gamma^0 = \gamma^\mu$.

Соотношение (3.9б) является ковариантным условием нормировки. Как было показано в предыдущей главе, билинейная форма $\bar{w}^r(\mathbf{p}) w^{r'}(\mathbf{p})$ представляет собой лоренцев скаляр (см. (2.39)), поэтому достаточно проверить выполнимость (3.9б) для решений (3.2), описывающих покоящуюся частицу. Плотность вероятности $w^{r+}(\mathbf{p}) w^r(\mathbf{p})$ не является инвариантом, а преобразуется как временна́я компонента 4-вектора (см. (2.27)). Пользуясь для вычислений столбцами матрицы (3.7), находим

$$w^{r+}(\varepsilon_r \mathbf{p}) w^{r'}(\varepsilon_{r'} \mathbf{p}) = \frac{E}{mc^2} \delta_{rr'}. \tag{3.11}$$

Отсюда видно, что нужно ввести в плотность вероятности нормировочный фактор mc^2/E для компенсации лоренцева сжатия элемента объема вдоль направления движения и обеспечения инвариантной нормировки 4-вектора плотности тока. Обратим внимание на то, что (3.9б) есть соотношение ортогональности между спинором и сопряженным спинором с одними и теми же значениями импульса $\mathbf{p}$, в то время как согласно (3.11) спинор с положительной энергией ортогонален эрмитово-сопряженному спинору с отрицательной энергией и противоположным импульсом. Таким образом, две плоские волны с одним и тем же импульсом $\mathbf{p}$, но противоположными энергиями, ортогональны, т. е. $\psi^{r+}(x) \psi^{r'}(x) = 0$, если $r = 1, 2$, а $r' = 3, 4$, либо наоборот.

Соотношение (3.9в) есть условие полноты для четырех дираковских спиноров при заданном значении импульса. Для свободной покоящейся частицы оно очевидно. Чтобы доказать его для произвольного значения импульса, сделаем преобразование

Лоренца к системе покоя, а затем воспользуемся спинорами (3.2):

$$\sum_{r=1}^{4} \varepsilon_r \bar{w}^r_\alpha(\mathbf{p}) w^r_\beta(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^{4} \varepsilon_r S_{\alpha\gamma}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right) w^r_\gamma(0)\, \bar{w}^r_\lambda(0)\, S^{-1}_{\lambda\beta}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right) =$$
$$= S_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma\lambda}S^{-1}_{\lambda\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

То обстоятельство, что в соотношении полноты фигурирует $\bar{w}$, а не w^+, есть следствие равенства

$$S^+ = \gamma^0 S^{-1}\gamma^0,$$

которое в свою очередь отражает тот факт, что преобразование Лоренца не является унитарным.

Действуя на решения (3.2), которые описывают покоящийся электрон, поляризованный в направлении z, операторами поворота

$$S = e^{(i/2)\varphi\sigma\cdot\mathbf{s}},$$

можно получить состояния, поляризованные в произвольном направлении $\mathbf{s}$. Такие состояния определяются равенством

$$\sigma\cdot\mathbf{s}w = w,$$

где спинор w описывает частицу, поляризованную вдоль направления единичного вектора $\mathbf{s}$. Благодаря структуре входящей в (2.24) матрицы σ конкретный вид спиноров близок к виду двухкомпонентных спиноров Паули.

Для дальнейшего изложения удобно ввести несколько иные обозначения. Обозначим посредством $u(p, s)$ спинор, являющийся решением уравнения Дирака с положительной энергией, импульсом p^μ и спином s^μ. Спинор $u(p, s)$ удовлетворяет уравнению

$$(\hat{p} - mc)_{\alpha\beta}\, u_\beta(p, s) = 0. \tag{3.12}$$

Четырехмерный вектор спина s^μ определяется с помощью трехмерного вектора поляризации $\mathbf{s}^{(0)}$ в системе покоя следующим образом:

$$s^\mu = a^\mu_\nu s^{(0)\nu};$$

здесь $s^{(0)\nu} = (0, \mathbf{s}^0)$, а a^μ_ν — коэффициенты преобразования к системе покоя, т. е. $p^\mu = a^\mu_\nu p^{(0)\nu}$, где $p^{(0)\nu} = (mc, 0)$. Заметим, что $s_\mu s^\mu = -1$, $p^{(0)\mu}s^{(0)\mu} = 0$ и, следовательно, $p^\mu s_\mu = 0$. В системе покоя спинор u удовлетворяет уравнению

$$\sigma\cdot\mathbf{s}^{(0)}u(p^{(0)}, s^{(0)}) = u(p^{(0)}, s^{(0)}). \tag{3.13}$$

Аналогично обозначим посредством $v(p, s)$ решение с отрицательной энергией

$$(\hat{p} + mc)\, v(p, s) = 0 \tag{3.14}$$

и поляризацией в системе покоя, равной $-\mathbf{s}^{(0)}$. В системе покоя для v имеем

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}^{(0)} v\,(p^{(0)}, s^{(0)}) = -\,v\,(p^{(0)}, s^{(0)}). \tag{3.15}$$

Спиноры $u(p, s)$ и $v(p, s)$ связаны со спинорами $w^r(\mathbf{p})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} w^1(\mathbf{p}) &= u\,(p, u_z), & w^3(\mathbf{p}) &= v\,(p, -u_z), \\ w^2(\mathbf{p}) &= u\,(p, -u_z), & w^4(\mathbf{p}) &= v\,(p, u_z); \end{aligned} \tag{3.16}$$

здесь u_z^μ — 4-вектор, который в системе покоя имеет вид

$$u_z^{(0)\,\mu} = (0, \mathbf{u}_z^{(0)}) = (0, 0, 0, 1).$$

Таким образом, любой спинор характеризуется импульсом p_μ, знаком энергии и поляризацией в системе покоя $s_\mu^{(0)}$.

§ 10. Проекционные операторы для энергии и спина

Для практических вычислений удобно иметь операторы, которые осуществляют проектирование на спинор с заданным знаком энергии и поляризацией. Эти проекционные операторы являются четырехмерными аналогами нерелятивистских двумерных операторов

$$P_\pm = \frac{1 \pm \sigma_z}{2},$$

проектирующих произвольное состояние на состояния со спином вверх и спином вниз.

Пусть задано некоторое решение уравнения Дирака в виде плоской волны с импульсом $\mathbf{p}$. Мы ищем четыре оператора, которые выделяют из этого решения четыре независимых решения, отвечающих положительной и отрицательной энергии и двум значениям проекции спина на заданное направление. Желательно, чтобы эти операторы были записаны в ковариантной форме; тогда мы сможем без труда переходить из одной лоренцевой системы в другую, что очень важно в практических расчетах.

Четыре проекционных оператора обозначаются символами $P_r(\mathbf{p}) \equiv P(p_\mu, u_z, \varepsilon)$ и по определению обладают следующими свойствами:

$$P_r(\mathbf{p})\, w^{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'} w^{r'}(\mathbf{p}),$$

или, что то же самое,

$$P_r(\mathbf{p})\, P_{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'} P_r(\mathbf{p}). \tag{3.17}$$

Оператор, проектирующий на состояния с положительной и отрицательной энергией и данным импульсом $\mathbf{p}$, можно получить сразу в ковариантной форме непосредственно из уравнения (3.9а). Обозначим его посредством

$$\Lambda_r(p) = \frac{\varepsilon_r \hat{p} + mc}{2mc}$$

либо

$$\Lambda_{\pm}(p) = \frac{\pm p + mc}{2mc}. \tag{3.18}$$

Используя равенство $\hat{p}\hat{p} = p^2 = mc^2$, можно убедиться в том, что

$$\Lambda_r(p)\Lambda_{r'}(p) = \frac{mc^2(1 + \varepsilon_r\varepsilon_{r'}) + mc\hat{p}(\varepsilon_r + \varepsilon_{r'})}{4m^2c^2} = \left(\frac{1 + \varepsilon_r\varepsilon_{r'}}{2}\right)\Lambda_r(p),$$

т. е.

$$\Lambda_+^2(p) = \Lambda_+(p), \quad \Lambda_+(p)\Lambda_-(p) = 0.$$

Отметим также равенство

$$\Lambda_+(p) + \Lambda_-(p) \cancel{= 1}.$$

Аналогичные спиновые операторы проще всего получить в системе покоя, а затем попытаться придать им ковариантный вид. В качестве оператора проектирования на состояние со спином вверх естественно взять $(1 + \sigma_z)/2$. Для того чтобы в двумерном спиновом операторе $(1 + \sigma_z)/2$ избавиться от явной зависимости от направления z, его переписывают в виде следующего скаляра:

$$\frac{1 + \sigma \cdot \mathbf{u}_z^{(0)}}{2}.$$

Для придания дираковскому спиновому проекционному оператору скалярной формы используем 4-вектор $u_z^{(0)\mu}$ и запишем

$$\frac{1 + \sigma_z}{2} = \frac{1 + \gamma_5\gamma_3 u_z^{(0)\,3}\gamma_0}{2} = \frac{1 + \gamma_5 \hat{u}_z^{(0)}\gamma_0}{2}.$$

Это выражение можно преобразовать к ковариантному виду, исключив матрицу γ_0. В системе покоя действие матрицы γ_0 на дираковский спинор сводится к умножению на ± 1. Принимая во внимание (3.14) и (3.15), получаем следующее выражение для дираковского инвариантного спинового проекционного оператора:

$$\Sigma(u_z) = \frac{1 + \gamma_5 \hat{u}_z}{2},$$

или, для произвольного 4-вектора спина s^μ, удовлетворяющего условию $s^\mu p_\mu = 0$,

$$\Sigma(s) = \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}}{2}. \tag{3.19}$$

В системе покоя имеем

$$\Sigma\left(u_z^{(0)}\right) w^1(0) = \frac{1+\gamma_5 \hat{u}_z^{(0)}}{2} w^1(0) = \frac{1+\sigma_z}{2} w^1(0) = w^1(0) \tag{3.20}$$

и

$$\Sigma\left(-u_z^{(0)}\right) w^2(0) = w^2(0).$$

Аналогично для спиноров с отрицательной энергией

$$\Sigma\left(-u_z^{(0)}\right) w^3(0) = \frac{1-\gamma_5 \hat{u}_z^{(0)}}{2} w^3(0) = \frac{1+\gamma_5 \hat{u}_z^{(0)} \gamma_0}{2} w^3(0) = \\ = \frac{1+\sigma_z}{2} w^3(0) = w^3(0) \tag{3.21}$$

и

$$\Sigma\left(u_z^{(0)}\right) w^4(0) = w^{(4)}(0).$$

Для спиноров u и v, определенных согласно (3.16), эти равенства выглядят так:

$$\Sigma(u_z)\, u(p, u_z) = u(p, u_z),$$
$$\Sigma(u_z)\, v(p, u_z) = v(p, u_z),$$
$$\Sigma(-u_z)\, u(p, u_z) = \Sigma(-u_z)\, v(p, u_z) = 0.$$

Вследствие ковариантности проекционного оператора Σ для любого вектора поляризации s^μ ($s^\mu p_\mu = 0$) можно записать

$$\Sigma(s)\, u(p, s) = u(p, s),$$
$$\Sigma(s)\, v(p, s) = v(p, s), \tag{3.22}$$
$$\Sigma(-s)\, u(p, s) = \Sigma(-s)\, v(p, s) = 0.$$

Имея в своем распоряжении четыре проекционных оператора $\Lambda_\pm(p)$ и $\Sigma(\pm s)$, мы можем полностью характеризовать движение свободной частицы ее 4-импульсом p_μ, знаком энергии ε и поляризацией s^μ, причем $s^\mu p_\mu = 0$. Для этого мы построим из (3.18) и (3.19) четыре проекционных оператора:

$$P_1(\mathbf{p}) = \Lambda_+(p)\,\Sigma(u_z), \qquad P_3(\mathbf{p}) = \Lambda_-(p)\,\Sigma(-u_z),$$
$$P_2(\mathbf{p}) = \Lambda_+(p)\,\Sigma(-u_z), \qquad P_4(\mathbf{p}) = \Lambda_-(p)\,\Sigma(u_z).$$

Заметим, что для векторов, удовлетворяющих условию $s^\mu p_\mu = 0$,

$$[\Sigma(s),\ \Lambda_\pm(p)] = 0,$$

поскольку $\hat{p}$ антикоммутирует как с γ_5, так и с $\hat{s}$. Следовательно, построенные операторы $P_r(\mathbf{p})$ удовлетворяют определению (3.17).

Мы будем очень часто обращаться к этим операторам для получения приемов быстрого и эффективного счета. Они позволяют пользоваться свойствами полноты и тем самым избавляют нас от необходимости явно выписывать все матрицы и компоненты спиноров.

Чтобы получить релятивистски-инвариантную теорию, мы ввели решения с отрицательной энергией и импульсом $\mathbf{p}$, которые, согласно (3.8), являются собственными функциями оператора импульса $\mathbf{p}$ с собственным значением $-\mathbf{p}$. Подобным же образом, согласно (3.19) и (3.21), решения с отрицательной энергией, описывающие состояния со спином вверх и спином вниз, переходят в системе покоя в собственные функции оператора σ_z с собственными значениями, равными -1 и $+1$ соответственно. Физическая причина такого «соответствия наоборот» для решений с отрицательной энергией станет ясной, когда мы в гл. 5 рассмотрим теорию дырок.

§ 11. Физический смысл решений в виде плоских волн и волновых пакетов

Теперь мы можем построить локализованные волновые пакеты путем *суперпозиции решений в виде плоских волн*. В силу принципа суперпозиции эти пакеты также будут решениями уравнения Дирака для свободной частицы, поскольку уравнение Дирака линейно. Займемся изучением пакетов, чтобы достичь более глубокого понимания физического смысла решений для свободной частицы.

Начнем с того, что построим пакет только из решений с положительной энергией:

$$\psi^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_{\pm s} b(p, s)\, u(p, s)\, e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}. \qquad (3.23)$$

Для нормировки коэффициентов разложения $b(p, s)$ на единичную вероятность обратимся к соотношениям ортогональности (3.11). Получим [1])

$$\int d^3x\, \psi^{(+)+}(\mathbf{x}, t)\, \psi^{(+)}(\mathbf{x}, t) =$$
$$= \int d^3p \frac{mc^2}{E} \sum_{\pm s, \pm s'} b^*(p, s')\, b(p, s)\, u^+(p, s')\, u(p, s) =$$
$$= \int d^3p \sum_{\pm s} |b(p, s)|^2 = 1. \qquad (3.24)$$

[1]) Приведем известные свойства δ-функции Дирака, используемые при выводе (3.24),

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(s-a)x} = 2\pi\delta(s-a), \qquad \int ds\, \delta(s-a)\, f(s) = f(a),$$

Средний ток для такого волнового пакета дается средним значением оператора скорости

$$\mathbf{J}^{(+)} = \int \psi^{(+)+} c\alpha\psi^{(+)} d^3x. \tag{3.25}$$

Вычислим $\mathbf{J}^{(+)}$, воспользовавшись следующим важным соотношением между тремя 4-векторами, которые можно построить из решений для свободной частицы:

если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ есть два любых решения уравнения Дирака

$$(\hat{p} - mc)\psi(x) = 0,$$

то

$$c\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 = \frac{1}{2m}[\bar{\psi}_2 p^\mu\psi_1 - (p^\mu\bar{\psi}_2)\psi_1] - \frac{i}{2m}p_\nu(\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1). \tag{3.26}$$

Чтобы доказать (3.26), заметим, что для любых двух 4-векторов a^μ и b^μ справедливо равенство

$$\hat{a}\hat{b} = a_\mu b_\nu\left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\right] = \\ = a^\mu b_\mu - ia^\mu b^\nu\sigma_{\mu\nu}. \tag{3.27}$$

Далее, исходя из уравнения Дирака, напишем

$$0 = \bar{\psi}_2(-\overleftarrow{\hat{\mathbf{p}}} - mc)\hat{a}\psi_1 + \bar{\psi}_2\hat{a}(\overrightarrow{\hat{\mathbf{p}}} - mc)\psi_1 = \\ = -2mc\bar{\psi}_2\hat{a}\psi_1 + \bar{\psi}_2(a^\mu\overrightarrow{\mathbf{p}}_\mu - ia^\mu\overrightarrow{\mathbf{p}}^\nu\sigma_{\mu\nu} - \overleftarrow{\mathbf{p}}^\mu a_\mu + i\overleftarrow{\mathbf{p}}^\mu a^\nu\sigma_{\mu\nu})\psi_1,$$

где $\bar{\psi}\overleftarrow{\hat{\mathbf{p}}} = \mathbf{p}_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu$. Отсюда (3.26) получается приравниванием коэффициентов при произвольном векторе a^μ.

Равенство (3.26) известно как разложение Гордона [31]. Оно выражает дираковский ток как сумму тока переноса, аналогичного нерелятивистскому, и спинового тока.

где интегрирование проводится по интервалу, включающему точку $s = a$, и предполагается, что в этом интервале функция $f(s)$ не имеет особенностей;

$$\delta\left(\frac{s}{c}\right) = |c|\,\delta(s), \quad |c| \neq 0.$$

Понятие δ-функции является математически строгим; оно обосновывается в теории обобщенных функций; см., например, [30].

Используя (3.26) при $\psi_2 = \psi_1 = \psi$ и (3.23), для тока (3.25) находим

$$J_l^{(+)} = \int d^3x \int \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{\sqrt{EE'}} \sum_{\pm s,\, \pm s'} b^*(p', s')\, b(p, s)\, e^{i(p'-p)^\mu x_\mu/\hbar} \times$$
$$\times \frac{1}{2m} \bar{u}(p', s')\left[(p'_l + p_l) + i\sigma_l^\nu (p'_\nu - p_\nu)\right] u(p, s) =$$
$$= \int d^3p \frac{p_l c^2}{E} \sum_{\pm s} |b(p, s)|^2, \quad (3.28)$$

или, учитывая нормировку (3.24),

$$\mathbf{J}^{(+)} = \langle c\boldsymbol{\alpha}\rangle_+ = \left\langle \frac{c^2\mathbf{p}}{E} \right\rangle_+ = \langle \mathbf{v}_{\text{групп}}\rangle_+, \quad (3.29)$$

где символ $\langle\ \rangle_+$ означает среднее значение по пакету с положительной энергией. Таким образом, средний ток для произвольного пакета, построенного только из решений с положительной энергией, есть просто классическая групповая скорость. Подобное утверждение хорошо известно из нерелятивистской шредингеровской теории.

Теперь мы перейдем к важному отличию, присущему релятивистской теории. В шредингеровской теории в выражение для тока входит оператор $\mathbf{p}/m$, который является константой для свободного движения. В теории Дирака, однако, ток не пропорционален импульсу и, в то время как из соотношений Эренфеста (1.27) следует, что для свободного движения $d\mathbf{p}/dt = 0$, оператор скорости $c\alpha$ не является константой, поскольку $[\alpha, H] \neq 0$. Действительно, собственные функции оператора $c\alpha$ должны строиться из решений как с положительной, так и с отрицательной энергией, так как собственные значения $c\alpha^i$ равны $\pm c$, тогда как согласно (3.29) $|\langle c\alpha^i\rangle_+| < c$.

Включим в наше рассмотрение решения с отрицательной энергией и построим волновой пакет из полного набора решений для свободной частицы. Обобщением (3.23) будет

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_{\pm s} \left[b(p, s)\, u(p, s)\, e^{-ip^\mu x_\mu/\hbar} + \right.$$
$$\left. + d^*(p, s)\, v(p, s)\, e^{+ip^\mu x_\mu/\hbar} \right]. \quad (3.30)$$

Нормировка снова производится на единичную вероятность. В результате несложных вычислений получаем

$$\int d^3x\, \psi^+(\mathbf{x}, t)\, \psi(\mathbf{x}, t) = \int d^3p \sum_{\pm s} \left[|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2 \right] = 1.$$

Поток для такого пакета равен [1])

$$J^k = \int d^3p \left\{ \sum_{\pm s} [|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2] \frac{p^k c^2}{E} + \right.$$
$$+ i \sum_{\pm s, \pm s'} b^*(-p, s') d^*(p, s) e^{2ix_0p_0/\hbar} \bar{u}(-p, s') \sigma^{k0} v(p, s) -$$
$$\left. - i \sum_{\pm s, \pm s'} b(-p, s') d(p, s) e^{-2ix_0p_0/\hbar} \bar{v}(p, s') \sigma^{k0} u(-p, s) \right\}. \quad (3.31)$$

Кроме независящей от времени групповой скорости, в этом выражении появились перекрестные члены между решениями с положительной и отрицательной энергией, которые быстро осциллируют во времени с частотой

$$\frac{2p_0c}{\hbar} > \frac{2mc^2}{\hbar} = 2 \cdot 10^{21} \textit{ сек}^{-1}.$$

Эти быстрые осцилляции, или «дрожание» («zitter-bewegung» [32]), пропорциональны амплитуде, с которой входит в пакет решение с отрицательной энергией. Пока в нашем изложении мы еще не выяснили физический смысл этих решений, однако можно задаться вопросом, когда следует ожидать присутствия этих решений в пакете со значительной амплитудой. Из общего вида решения для свободной частицы видно, что поскольку величины $b(p, s)$ не зависят от времени, то в отсутствие внешнего воздействия в волновом пакете, первоначально построенном только из решений с положительной энергией, не появятся компоненты с отрицательной энергией. Однако пакет, описывающий электрон, так или иначе локализованный в конечной области в начальный момент времени, содержит, вообще говоря, решения с обоими знаками энергии.

Рассмотрим, например, решение

$$\psi(\mathbf{r}, 0, s) = (\pi d^2)^{-3/4} e^{-1/2 r^2/d^2} w^1(0), \quad (3.32)$$

которое отвечает гауссовскому распределению плотности вокруг начала координат с полушириной $\sim d$ в момент времени $t = 0$. В любой последующий момент времени t это решение может быть представлено в виде пакета (3.30) с коэффициентами b и

[1]) Несмотря на некоторую непоследовательность, мы везде будем пользоваться обозначением

$$u(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, -\mathbf{p}, s) = u(-p, s)$$

и аналогичными обозначениями для коэффициентов разложения b, d^* и т. д.

d^*, задаваемыми своими начальными значениями при $t = 0$, т. е.

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_{\pm s} \left[b(p, s)\, u(p, s)\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} + d^*(p, s)\, v(p, s)\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \right] = (\pi d^2)^{-3/4} e^{-\frac{1}{2} r^2/d^2} w^1(0).$$

Производя преобразование Фурье и используя

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3r\, e^{-r^2/2d^2} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = (2\pi d^2)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} l^2 d^2/\hbar^2},$$

получаем

$$\sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_{\pm s} \left[b(p, s')\, u(p, s') + d^*(-p, s')\, v(-p, s') \right] = \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2} \right)^{3/4} e^{-\frac{1}{2} p^2 d^2/\hbar^2} w^1(0).$$

Из соотношений ортогональности (3.11) находим

$$\begin{aligned} b(p, s) &= \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2} \right)^{3/4} e^{-p^2 d^2/2\hbar^2} u^+(p, s)\, w^1(0), \\ d^*(-p, s) &= \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2} \right)^{3/4} e^{-p^2 d^2/2\hbar^2} v^+(-p, s)\, w^1(0). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Таким образом, амплитуда решения с отрицательной энергией d^* в пакете (3.32) отлична от нуля. По отношению к амплитуде решения с положительной энергией b она подавлена как верхняя, или «малая», компонента v по отношению к верхней, или «большой», компоненте u, т. е. по порядку величины в $pc/(E + mc^2)$ раз. Отсюда ясно, что амплитуды решений с отрицательной энергией существенны при значениях импульса $\sim mc$. Однако из (3.33) видно, что пакет сформирован в основном из состояний с импульсом $p \lesssim \hbar/d$. Поэтому для того, чтобы вклад состояний с отрицательной энергией стал существен, пакет должен быть локализован в области с размерами, сравнимыми с комптоновской длиной волны электрона, т. е.[1]) с $d \sim \hbar/mc$.

Этот результат можно получить из размерных соображений с помощью соотношения $\Delta p\, \Delta x \sim \hbar$, не пользуясь гауссовской формой распределения. Когда речь идет о задачах, где электрон «размазан» по области, много большей его комптоновской длины волны, можно вообще не принимать во внимание существование решений с отрицательной энергией и тем не менее надеяться получить обладающие физическим смыслом и довольно точные результаты. Такое приближение становится непри-

[1]) Понятие пространственной координаты дираковского электрона с положительной энергией обсуждается в работе [33].

менимым, если электрон локализован в области с размерами порядка $\hbar/mc$. При этом амплитуды решений с отрицательной энергией делаются существенными, в токе возникают «дрожащие» члены и мы сталкиваемся с такими парадоксами и дилеммами, разрешить которые в рамках развитой нами теории дираковского электрона оказывается невозможным. Знаменитым

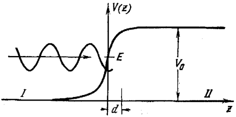


Рис. 3.1. Потенциальный барьер, удерживающий электрон с энергией E в области I слева.

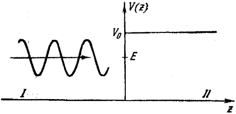


Рис. 3.2. Электростатический потенциал, представленный для простоты стенкой с резким краем, на которую из области I падает движущаяся вправо свободная электронная волна с энергией E. При $V_0 > E + mc^2$ отраженный от потенциала поток превосходит падающий; это один из примеров парадокса Клейна.

примером такого рода трудности является парадокс Клейна [34], который можно пояснить на следующем примере.

Чтобы локализовать электроны, мы должны создать сильное внешнее поле, удерживающее их в заданной области. Предположим, например, что мы хотим удержать свободный электрон с энергией E в области I слева от точки начала координат $z = 0$ в одномерном потенциале, изображенном на рис. 3.1. Если мы потребуем, чтобы электрон не проникал в область II, лежащую правее точки $z = 0$, глубже, чем на расстояние d, то потенциал V должен на интервале $z \lesssim d$ быстро возрастать до значения $V_0 > E$; тогда решение будет в области II спадать с характерной длиной $\lesssim d$. Все будет происходить так, как в шредингеровской теории, до тех пор, пока интервал, на котором мы хотим удержать электрон, не сожмется до размеров $\sim \hbar/mc$, а разность $V_0 - E$ не превысит величины mc^2.

Чтобы понять, что произойдет далее, рассмотрим потенциал с резким краем, изображенный на рис. 3.2, и вычислим отраженный и прошедший поток для электрона (с волновым вектором k_1 и спином, направленным по оси z), налетающего слева на область действия этого потенциала. Решения с положительной энергией для падающей и отраженной волн в области I имеют вид

$$\begin{gathered}\psi_{\text{inc}} = ae^{ik_1z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{ck_1\hbar}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi_{\text{ref}} = be^{-ik_1z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{ck_1\hbar}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} + b'e^{-ik_1z}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{ck_1\hbar}{E+mc^2} \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{3.34}$$

Прошедшая волна представляет собой решение уравнения Дирака в постоянном внешнем потенциале $e\Phi = V_0$. Оно отличается от решения для свободной частицы лишь заменой $p_0 = (1/c)(E - V_0)$, поэтому в области II имеем

$$\hbar^2k_2^2c^2 = (E - V_0)^2 - m^2c^4 = (E - mc^2 - V_0)(E + mc^2 - V_0).$$

Следовательно, прошедшую волну с положительной энергией $E > 0$ можно записать как

$$\psi_{\text{trans}} = de^{ik_2z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{c\hbar k_2}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} + d'e^{ik_2z}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\dfrac{c\hbar k_2}{E - V_0 + mc^2} \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Амплитуды d и d' определяются из условия непрерывности решения на границе потенциала, которое в свою очередь следует из сохранения потока. Имеем

$$\begin{aligned} &a + b = d, \\ &a - b = \frac{k_2}{k_1}\,\frac{E + mc^2}{E - V_0 + mc^2}\,d \equiv rd, \\ &b' = d' = 0 \quad \text{(переворота спина не происходит).} \end{aligned} \tag{3.36}$$

При $V_0 > 0$ и $|E - V_0| < mc^2$ волновой вектор в области II чисто мнимый: $k_2 = +i|k_2|$ и решение в этой области представляет собой затухающую экспоненту с характерной длиной затухания $d > \hbar/mc$. Если мы, однако, захотим уменьшить глубину проникновения электрона в область II и увеличим высоту потенциального барьера, сделав его выше, чем $V_0 = E + mc^2$, прошедшая волна станет осциллирующей. Нетрудно вычислить прошедший и отраженный ток. Получаем

$$\frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{inc}}} = \frac{4r}{(1+r)^2}, \quad \frac{j_{\text{ref}}}{j_{\text{inc}}} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2} = 1 - \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{inc}}}. \tag{3.37}$$

Хотя по форме эти результаты напоминают предсказания нерелятивистской теории, следует заметить, что поскольку $V_0 > E + mc^2$, то, согласно (3.36), $r < 0$.

Мы получили результат, противоречащий нашим обычным представлениям: прошедший поток оказался отрицательным, а отраженный поток больше падающего. Что представляет собой поток в области II, который на рис. 3.2 направлен справа налево из области II в область I?

В надежде локализовать решение внутри интервала, равного комптоновской длине волны электрона $\hbar/mc$, мы сделали потенциальный барьер выше, чем $E + mc^2$, но в итоге получили не затухающее, а осциллирующее решение. Как следует понимать это явление? Его можно понять, только выяснив физический смысл решений с отрицательной энергией. Из рассмотрения волновых пакетов ясно, что решения с отрицательной энергией существенны, когда частица локализована в области размером $\hbar/mc$. С другой стороны, из приведенного примера видно, что именно на таких растояниях наша физическая картина перестает соответствовать действительности.

Мы займемся разрешением этих вопросов, начиная с гл. 5. Прежде обратимся к широкой (хотя и ограниченной) области физических явлений, в которых приложенные поля являются слабыми и медленно меняются в масштабе, где единицей длины служит величина $\hbar/mc^2$, а единицей энергии — величина mc^2. Мы надеемся найти здесь множество разнообразных применений уравнения Дирака и теории электрона с положительной энергией.

ЗАДАЧИ

1. Получить (3.11) непосредственно из уравнения Дирака.
2. Доказать, что равенство (3.9) справедливо независимо от конкретного представления для дираконских спиноров.
3. Получить выражение для потока (3.31).
4. Показать, что (3.36) есть следствие сохранения потока.
5. Найти уровни энергии дираковской частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме глубиной V_0 и шириной a.
6. Проверьте следующее условие полноты:

$$\sum_{r=1}^{4} w_\alpha^r(\varepsilon^r \mathbf{p})\, w_\beta^{r+}(\varepsilon^r \mathbf{p}) = \frac{E}{m}\,\delta_{\alpha\beta}.$$

ГЛАВА 4

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОЛДИ — ВАУТХАЙЗЕНА

§ 12. Введение

Если не принимать в расчет проблему отрицательных энергий, то уравнение Дирака дает вполне удовлетворительное описание электрона. Оно имеет разумный нерелятивистский предел и приводит к правильному значению магнитного момента. Теперь мы займемся исследованием взаимодействия дираковского электрона с заданным внешним потенциалом. В первую очередь нас будет интересовать область низких энергий, свободная от трудностей, связанных с решениями с отрицательной энергией. При рассмотрении волновых пакетов в предыдущей главе мы подчеркивали, что роль этих решений практически очень мала в таких вопросах, как, например, задача об атоме водорода, когда электрон локализован на боровской орбите с радиусом [1]) $1/\alpha m \gg 1/m$.

Мы убедимся в том, что стационарные уровни энергии атома водорода, полученные с помощью уравнения Дирака, чрезвычайно близки к наблюдаемым. Однако, прежде чем приступить к поиску собственных значений в кулоновском потенциале, будет весьма поучительно сформулировать дираковскую теорию в такой форме, когда взаимодействие электрона с внешним полем представлено суммой членов, каждый из которых имеет наглядный нерелятивистский смысл.

Рассмотрим поэтому последовательный метод, предложенный Фолди и Ваутхайзеном [35], а именно каноническое преобразование, при котором уравнение Дирака превращается в пару двухкомпонентных уравнений. Одно из них в нерелятивистском пределе переходит в уравнение Паули, другое описывает состояния с отрицательной энергией.

[1]) Ниже мы везде будем полагать $\hbar = c = 1$. Комптоновская длина волны электрона равна $1/m = 3{,}86 \cdot 10^{-11}$ *см*, а его энергия покоя $m = 0{,}511$ *Мэв*. Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi \cong 1/137$. В этих единицах

$$0{,}511 \text{ Мэв} = \frac{10^{11}}{3{,}86} \text{ см}^{-1} = \frac{10^{21}}{1{,}29} \text{ сек}^{-1} = m.$$

§ 13. Преобразование для свободной частицы

В качестве первого примера проделаем преобразование Фолди — Ваутхайзена над уравнением Дирака для свободной частицы. Для этой цели удобнее записать уравнение Дирака в гамильтоновой форме, используя для матриц α представление (1.17). Мы ищем унитарное преобразование U_F, которое освободит уравнение от всех операторов типа α, связывающих между собой «большие» и «малые» компоненты. Любой такой оператор будем называть нечетным; те же операторы, которые не связывают между собой «большие» и «малые» компоненты, назовем четными. Согласно этому определению операторы α, γ, γ_5 и т. д. являются нечетными, а операторы 1, β, σ и т. д. — четными.

Записывая U_F в виде

$$U_F = e^{+iS},$$

где оператор S эрмитов и не зависит от времени, получаем следующее унитарное преобразование:

$$\psi' = e^{+iS}\psi$$

и

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = e^{+iS}H\psi = e^{+iS}He^{-iS}\psi' = H'\psi'.$$

Мы требуем, чтобы H' не содержал нечетных операторов.

Поскольку $H = \alpha\cdot\mathbf{p} + \beta m$, причем $\{\alpha, \beta\} = 0$, наша задача совершенно эквивалентна задаче о нахождении унитарного преобразования, которое приводит двухкомпонентный спиновый гамильтониан $\mathcal{H} = \sigma_x B_x + \sigma_z B_z$ к виду, содержащему лишь четные операторы (такие, как 1 и σ_z). Как известно, такое преобразование есть просто поворот вокруг оси y, и ему отвечает оператор $e^{(i/2)\sigma_y\theta_0} = e^{{}^1\!/_2\sigma_z\sigma_x\theta_0}$, где $\operatorname{tg}\theta_0 = B_x/B_z$. Поэтому можно предположить, что в нашем случае искомый оператор имеет вид

$$e^{iS} = e^{\beta\alpha\cdot\mathbf{p}\theta(\mathbf{p})} = \cos|\mathbf{p}|\theta + \frac{\beta\alpha\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\sin|\mathbf{p}|\theta;$$

здесь правая часть равенства получена разложением экспоненты в ряд по степеням θ. При таком выборе преобразования имеем

$$\begin{aligned} H' &= \left(\cos|\mathbf{p}|\theta(\mathbf{p}) + \frac{\beta\alpha\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\sin|\mathbf{p}|\theta(\mathbf{p})\right)(\alpha\cdot\mathbf{p} + \beta m)\times \\ &\quad\times\left(\cos|\mathbf{p}|\theta - \frac{\beta\alpha\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\sin|\mathbf{p}|\theta\right) = \\ &= (\alpha\cdot\mathbf{p} + \beta m)\left(\cos|\mathbf{p}|\theta - \frac{\beta\alpha\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\sin|\mathbf{p}|\theta\right)^2 = \\ &= (\alpha\cdot\mathbf{p} + \beta m)\exp(-2\beta\alpha\cdot\mathbf{p}\theta) = \\ &= \alpha\cdot\mathbf{p}\left(\cos 2|\mathbf{p}|\theta - \frac{m}{|\mathbf{p}|}\sin 2|\mathbf{p}|\theta\right) + \\ &\quad + \beta(m\cos 2|\mathbf{p}|\theta + |\mathbf{p}|\sin 2|\mathbf{p}|\theta). \end{aligned}$$

Чтобы избавиться от нечетного оператора, положим

$$\operatorname{tg} 2|\mathbf{p}|\theta = \frac{|\mathbf{p}|}{m}.$$

Тогда преобразованный гамильтониан

$$H' = \beta\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \tag{4.1}$$

в чем легко убедиться, глядя на изображенный на рис. 4.1 треугольник. Мы получили тот самый гамильтониан, который был

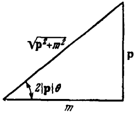


Рис. 4.1. Треугольник, отвечающий преобразованию Фолди — Ваутхайзена.

отвергнут в гл. 1, с той, однако, существенной разницей, что теперь в наше рассмотрение включены решения с отрицательной энергией.

§ 14. Общее преобразование

Обратимся теперь к общему случаю, когда электрон находится в заданном внешнем электромагнитном поле, и найдем соответствующий оператор S. Гамильтониан имеет вид

$$H = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m + e\Phi = \beta m + \mathcal{O} + \mathcal{E}; \tag{4.2}$$

здесь $\mathcal{O} = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} - e\mathbf{A})$, $\mathcal{E} = e\Phi$ и $\beta\mathcal{O} = -\mathcal{O}\beta$, $\beta\mathcal{E} = +\mathcal{E}\beta$.

Входящие в (4.2) внешние поля, а следовательно, и сам гамильтониан могут зависеть от времени. Преобразование S тоже, вообще говоря, зависит от времени, поэтому невозможно построить оператор S, который удалял бы из гамильтониана нечетные операторы во всех порядках, как в (4.1). Мы довольствуемся разложением преобразованного гамильтониана в степенной ряд по $1/m$, сохранив в разложении члены вплоть до имеющих порядок (кинетическая энергия$/m)^3$ и (кинетическая энергия) (энергия поля)$/m^2$.

Преобразование, как и прежде, вводится равенством

$$\psi' = e^{iS}\psi.$$

Далее имеем

$$i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\psi' = H\psi = He^{-iS}\psi' = e^{-iS}\left(i\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right) + \left(i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\right)\psi'.$$

Таким образом,

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \left[e^{iS}\left(H - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS}\right]\psi' = H'\psi'.$$

Оператор S разлагается в ряд по степеням $1/m$, следовательно, в нерелятивистском пределе он «мал». Поэтому выражение, стоящее в квадратных скобках, можно разложить в ряд, построенный из многократных коммутаторов, используя для этого следующее соотношение [1]):

$$e^{+iS}He^{-iS} = H + i[S, H] + \frac{(i)^2}{2!}[S, [S, H]] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(i)^n}{n!}[S, [S, \ldots, [S, H]\ldots]] + \ldots$$

Поскольку $S = O(1/m)$, то с требуемой точностью имеем

$$H' = H + i[S, H] - \frac{1}{2}[S, [S, H]] - \frac{i}{6}[S, [S, [S, H]]] +$$
$$+ \frac{1}{24}[S, [S, [S, [S, H]]]] - \dot{S} - \frac{i}{2}[S, \dot{S}] + \frac{1}{6}[S, [S, \dot{S}]].$$

Начнем построение S с рассмотрения членов нулевого порядка малости по $1/m$:

$$H' = \beta m + \mathscr{E} + \mathcal{O} + i[S, \beta]m. \tag{4.3}$$

Мы требуем, чтобы выражение (4.3) не содержало нечетных операторов. Руководствуясь результатом, полученным для свободной частицы, положим $S = -i\beta\mathcal{O}/2m$. Тогда с требуемой

---

[1]) Чтобы убедиться в справедливости этого разложения, рассмотрим

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S}He^{-i\lambda S} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n}\right)_{\lambda=0}. \tag{a}$$

Отсюда последовательно получаем

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda} = e^{i\lambda S}i[S, H]e^{-i\lambda S}$$

и

$$\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n} = e^{i\lambda S}i^n[S, [S, \ldots, [S, H]\ldots]]e^{-i\lambda S}.$$

Результат подставляем снова в (a) и полагаем $\lambda = 1$.

точностью получим

$$\frac{i}{1!}[S,\ H] = -\mathcal{O} + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\ \mathcal{E}] + \frac{1}{m}\beta\mathcal{O}^2,$$

$$\frac{i^2}{2!}[S,\ [S,\ H]] = -\frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},\ [\mathcal{O},\ \mathcal{E}]] - \frac{1}{2m^2}\mathcal{O}^3,$$

$$\frac{i^3}{3!}[S,\ [S,\ [S,\ H]]] = \frac{\mathcal{O}^3}{6m^2} - \frac{1}{6m^3}\beta\mathcal{O}^4,$$

$$\frac{i^4}{4!}[S,\ [S,\ [S,\ [S,\ H]]]] = \frac{\beta\mathcal{O}^4}{24m^3},$$

$$-\dot{S} = +\frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m},$$

$$-\frac{i}{2}[S,\ \dot{S}] = -\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O},\ \dot{\mathcal{O}}].$$

Собирая вместе все члены, имеем

$$H' = \beta\left(m + \frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^4}{8m^3}\right) + \mathcal{E} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},\ [\mathcal{O},\ \mathcal{E}]] - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O},\ \dot{\mathcal{O}}] +$$
$$+ \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m} = \beta m + \mathcal{E}' + \mathcal{O}'. \quad (4.4)$$

Члены с нечетными операторами (они обозначены посредством $\mathcal{O}'$) имеют в (4.4) порядок $1/m$. Чтобы еще повысить их порядок малости, проделаем второе преобразование Фолди — Ваутхайзена, пользуясь тем же самым рецептом:

$$S' = \frac{-i\beta}{2m}\mathcal{O}' = \frac{-i\beta}{2m}\left(\frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\ \mathcal{E}] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m}\right).$$

В результате преобразования получим

$$H'' = e^{iS'}\left(H' - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS'} = \beta m + \mathcal{E}' + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}',\ \mathcal{E}'] + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}'}{2m} =$$
$$= \beta m + \mathcal{E}' + \mathcal{O}'',$$

где $\mathcal{O}''$ — величина порядка $O(1/m^2)$. Наконец, с помощью третьего канонического преобразования

$$S'' = \frac{-i\beta\mathcal{O}''}{2m}$$

можно избавиться и от $\mathcal{O}'$. Окончательно получаем

$$H''' = e^{iS''}\left(H'' - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS''} = \beta m + \mathcal{E}' =$$
$$= \beta\left(m + \frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^4}{8m^3}\right) + \mathcal{E} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},\ [\mathcal{O},\ \mathcal{E}]] - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O},\ \dot{\mathcal{O}}].$$

Вычисляя произведения операторов с нужной нам точностью, находим

$$\frac{\mathcal{O}^2}{2m} = \frac{(\alpha \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2}{2m} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m}\sigma \cdot \mathbf{B},$$

$$\frac{1}{8m^2}([\mathcal{O}, \mathcal{E}] + i\dot{\mathcal{O}}) = \frac{e}{8m^2}(-i\alpha \cdot \nabla\Phi - i\alpha \cdot \dot{\mathbf{A}}) = \frac{ie}{8m^2}\alpha \cdot \mathbf{E},$$

$$\left[\mathcal{O}, \frac{ie}{8m^2}\alpha \cdot \mathbf{E}\right] = \frac{ie}{8m^2}[\alpha \cdot \mathbf{p}, \alpha \cdot \mathbf{E}] =$$

$$= \frac{ie}{8m^2}\sum_{i, j}\alpha_i\alpha_j\left(-i\frac{\partial E^j}{\partial x^i}\right) + \frac{e}{4m^2}\sigma \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} =$$

$$= \frac{e}{8m^2}\operatorname{div}\mathbf{E} + \frac{ie}{8m^2}\sigma \cdot \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{e}{4m^2}\sigma \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p}.$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении гамильтониан имеет вид

$$H''' = \beta\left[m + \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3}\right] + e\Phi - e\frac{1}{2m}\beta\sigma \cdot \mathbf{B} -$$
$$- \frac{ie}{8m^2}\sigma \cdot \operatorname{rot}\mathbf{E} - \frac{e}{4m^2}\sigma \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} - \frac{e}{8m^2}\operatorname{div}\mathbf{E}. \quad (4.5)$$

Каждый отдельный член в (4.5) имеет четкий физический смысл. Выражение в квадратных скобках является разложением

$$\sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2}$$

с требуемой точностью; этот член учитывает релятивистскую зависимость массы от импульса. Следующие два члена дают энергию электрического заряда и магнитного диполя во внешнем поле. Четвертый и пятый члены, взятые вместе, являются эрмитовыми; их можно отождествить с энергией спин-орбитального взаимодействия. Они имеют привычный вид, если электрическое поле центрально-симметричное. Тогда $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ и

$$\sigma \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\sigma \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\sigma \cdot \mathbf{L}.$$

Таким образом, эти два члена сводятся к

$$H_{\text{spin-orbit}} = \frac{e}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\sigma \cdot \mathbf{L}. \quad (4.6)$$

Этот результат согласуется с классическим. Действительно, если перейти в систему, в которой частица покоится, возникает магнитное поле $\mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}$, в котором энергия взаимодействия будет равна

$$-\frac{e}{2m}\sigma \cdot \mathbf{B}' = \frac{e}{2m^2}\sigma \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{E}).$$

Однако соответствующий член в (4.5) имеет лишний множитель $^1/_2$ («томасовская половинка»). Появление этого множителя указывает на то, что гиромагнитное отношение для магнитного момента электрона, связанного с орбитальным движением, имеет обычное значение $g=1$.

Наконец, последний член, известный под названием дарвиновского, можно связать со шредингеровским «дрожанием». Поскольку координата электрона испытывает флуктуации на расстояних порядка $\delta r \simeq 1/m$, электрон «чувствует» несколько «размазанный» кулоновский потенциал; поправка составляет

$$\langle\delta V\rangle = \langle V(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})\rangle - \langle V(\mathbf{r})\rangle = \left\langle \delta\mathbf{r}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{2}\sum_{ij}\delta r_i\,\delta r_j\frac{\partial^2 V}{\partial r_i\,\partial r_j}\right\rangle \approx$$
$$\approx \frac{1}{6}\delta r^2\nabla^2 V \approx \frac{1}{6m^2}\nabla^2 V, \quad (4.7)$$

что качественно совпадает с дарвиновским членом.

§ 15. Атом водорода[1])

Перейдем к рассмотрению решений уравнения Дирака, отвечающих связанным состояниям, и в первую очередь найдем уровни энергии электрона в кулоновском поле. Уравнение Дирака для электрона в кулоновском поле имеет вид

$$H\psi = [\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m + V(r)]\,\psi = E\psi, \quad (4.8)$$

где $V(r) = -Z\alpha/r$. Для разделения переменных воспользуемся тем, что угловой момент частицы в центральном поле сохраняется. Действительно, оператор $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} + {}^1/_2\boldsymbol{\sigma}$ коммутирует с гамильтонианом (4.8), и поэтому можно построить собственные функции, отвечающие определенным собственным значениям H, J^2 и J_z. Для нахождения этих функций обратимся к нашему опыту работы с матрицами Паули и вспомним, что в представлении, использованном в гл. 3, матрица

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

диагональна при условии, что ее элементами считаются матрицы Паули размерности 2×2. Поэтому, если выразить ψ через двухкомпонентные спиноры

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

---

[1]) Задача о движении электрона в кулоновском поле была впервые решена в работах [36]. Подробное рассмотрение применений уравнения Дирака в атомной физике и соответствующие ссылки можно найти в книгах [37, 38].

то угловые переменные в φ и χ отделяются точно так же, как и двухкомпонентной теории Паули. Угловая часть двухкомпонентных решений является собственной функцией J^2, J_z, L^2 и S^2 и может быть двух типов.

При $j = l + 1/2$

$$\varphi^{(+)}_{j,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l + 1/2 + m}{2l+1}}\, Y_l^{m-1/2} \\ \sqrt{\dfrac{l + 1/2 - m}{2l+1}}\, Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix}. \tag{4.9а}$$

При $j = l - 1/2$

$$\varphi^{(-)}_{j,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l + 1/2 - m}{2l+1}}\, Y_l^{m-1/2} \\ -\sqrt{\dfrac{l + 1/2 + m}{2l+1}}\, Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix}, \tag{4.9б}$$

где фаза шаровых функций задана условием $Y^*_{l,m} = (-1)^m Y_{l,-m}$, а решения $\varphi^{(-)}$ существуют только при $l > 0$. Оба эти решения удовлетворяют следующим уравнениям на собственные значения:

$$J^2\varphi^{(\pm)}_{jm} = j(j+1)\varphi_{jm},$$

$$\mathbf{L}\cdot\sigma\varphi^{(\pm)}_{jm} = (J^2 - L^2 - 3/4)\varphi^{(\pm)}_{jm} = -(1+\kappa)\varphi^{(\pm)}_{jm},$$

где

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1) = -(j+1/2), & j = l + 1/2; \\ +l = +(j+1/2), & j = l - 1/2. \end{cases}$$

При заданном j решения $\varphi^{(+)}_{jm}$ и $\varphi^{(-)}_{jm}$ обладают противоположной четностью, поскольку отличаются на единицу по l. Они могут быть получены друг из друга с помощью нечетного скалярного оператора. Этот оператор должен быть линейной комбинацией функций $Y_1^m(\theta, \varphi)$, так как он меняет значение l на 1 и потому должен быть пропорциональным $\mathbf{r}$. В нашем распоряжении имеется единственный псевдовектор σ, и, пользуясь им, мы строим псевдоскаляр $\sigma\cdot\mathbf{r}/r$. Далее находим

$$\varphi^{(+)}_{jm} = \frac{\sigma\cdot\mathbf{r}}{r}\varphi^{(-)}_{jm}. \tag{4.10}$$

Общее решение для центрального поля при заданных j и m можно представить в виде

$$\psi_{jm} = \begin{pmatrix} \dfrac{iG_j^+}{r}\varphi^{(+)}_{jm} + \dfrac{iG_j^-}{r}\varphi^{(-)}_{jm} \\ \dfrac{F_j^+}{r}\varphi^{(-)}_{jm} + \dfrac{F_j^-}{r}\varphi^{(+)}_{jm} \end{pmatrix}.$$

Это решение можно разбить на два, каждое с определенной четностью. Поскольку потенциал $V(r)$ инвариантен по отношению к пространственной инверсии, собственным функциям можно наряду с определенными значениями j и m приписать также определенную четность. Пользуясь этим свойством, мы построим четные и нечетные решения; при преобразовании $\mathbf{x}'=-\mathbf{x}$ они ведут себя следующим образом:

$$\psi'(\mathbf{x}')=\beta\psi(\mathbf{x})=\pm\psi(\mathbf{x}'). \tag{4.11}$$

Эти решения даются формулой

$$\psi^l_{jm}=\begin{pmatrix} \dfrac{iG_{lj}}{r}\varphi^l_{jm} \\ \dfrac{F_{lj}}{r}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}}{r}\varphi^l_{jm}\end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

где введены обозначения

$$G_{lj}\begin{cases} G^+_l, & j=l+{}^1/_2; \\ G^-_l, & j=l-{}^1/_2;\end{cases} \qquad F_{lj}=\begin{cases} F^+_l, & j=l+{}^1/_2; \\ F^-_l, & j=l-{}^1/_2;\end{cases}$$

$$\varphi^l_{jm}=\begin{cases} \varphi^+_{jm}, & j=l+{}^1/_2; \\ \varphi^-_{jm}, & j=l-{}^1/_2,\end{cases}$$

и использовано равенство (4.10). В соответствии с (4.11) четность этих решений равна $(-1)^l$. Для получения из (4.8) уравнений для радиальных функций воспользуемся следующими тождествами:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\frac{f(r)}{r}\varphi^l_{jm}&=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}}{r^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}\;\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\frac{f(r)}{r}\varphi^l_{jm}=\\ &=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}}{r^2}\left(\frac{1}{i}r\frac{\partial}{\partial r}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}\right)\frac{f(r)}{r}\varphi^l_{jm}=\\ &=\left[\frac{1}{i}\frac{d}{dr}\frac{f(r)}{r}-i(1+\kappa)\frac{f(r)}{r^2}\right]\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}}{r}\right)\varphi^l_{jm}.\end{aligned}$$

В итоге имеем следующие уравнения для радиальных функций:

$$\begin{aligned}\left(E-m+\frac{Z\alpha}{r}\right)G_{lj}(r)&=-\frac{dF_{lj}(r)}{dr}+\frac{\kappa}{r}F_{lj}(r),\\ \left(E+m+\frac{Z\alpha}{r}\right)F_{lj}(r)&=+\frac{dG_{lj}(r)}{dr}+\frac{\kappa}{r}G_{lj}(r).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Решения этих уравнений, отвечающие связанным состояниям, можно найти обычными методами [36—38]. Мы приведем лишь некоторые результаты.

Уровни энергии даются выражением

$$E_n=m\left[1+\left(\frac{Z\alpha}{n-(j+{}^1/_2)+\sqrt{(j+{}^1/_2)^2-Z^2\alpha^2}}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{4.14}$$

в котором квантовое число $n = 1, 2, \ldots, \infty$ пробегает целые положительные значения, а угловой момент изменяется в пределах от 0 до $j + {}^1/_2 \leqslant n$, причем должно быть выполнено условие $0 \leqslant l \leqslant n - 1$. Разлагая (4.14) в ряд по степеням $(Z\alpha)^2$, мы убеждаемся в том, что число n соответствует главному квантовому числу в нерелятивистской теории

$$E_n \approx m\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n}\left(\frac{1}{j + {}^1/_2} - \frac{3}{4n}\right)\right] + O\left((Z\alpha)^6\right)\right\}. \tag{4.15}$$

Положив в (4.14) $n = 1$ и $j = {}^1/_2$, получим энергию основного уровня

$$E_0 = m\sqrt{1 - Z^2\alpha^2} \approx m - {}^1/_2 Z^2\alpha^2 m - {}^1/_8 Z^4\alpha^4 m + \ldots$$

Выпишем также отвечающие этому уровню нормированные волновые функции со спином вверх и спином вниз

$$\psi_{n=1,\, j={}^1/_2,\, \uparrow}(r, \theta, \varphi) =$$

$$= \frac{(2mZ\alpha)^{3/2}}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\Gamma(1+2\gamma)}}(2mZ\alpha r)^{\gamma-1}e^{-mZ\alpha r}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{i(1-\gamma)}{Z\alpha}\cos\theta \\ \dfrac{i(1-\gamma)}{Z\alpha}e^{i\varphi}\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\psi_{n=1,\, j={}^1/_2,\, \downarrow}(r, \theta, \varphi) =$$

$$= \frac{(2mZ\alpha)^{3/2}}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\Gamma(1+2\gamma)}}(2mZ\alpha r)^{\gamma-1}e^{-mZ\alpha r}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{i(1-\gamma)}{Z\alpha}\sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \dfrac{-i(1-\gamma)}{Z\alpha}\cos\theta \end{pmatrix},$$

где $\gamma = \sqrt{1 - Z^2\alpha^2}$. В нерелятивистском пределе $\gamma \to 1$, $(1-\gamma)/Z\alpha \to 0$ и эти функции переходят в шредингеровские волновые функции, умноженные на двухкомпонентные спиноры. В релятивистском случае при $r \to 0$ функции имеют слабую сингулярность вида $(2mZ\alpha r)^{-(Z^2\alpha^2)/2}$, которая становится существенной лишь на расстояниях

$$r \sim \frac{1}{2mZ\alpha}e^{-2/Z^2\alpha^2}.$$

Если $Z\alpha \geqslant 1$, то величина γ мнимая и решения при $r \to 0$ осциллируют; это явление напоминает нам о парадоксе Клейна. При этом исчезает «щель» между решениями с положительной и отрицательной энергией и мы снова не можем придать решению физический смысл.

Уровни энергии, задаваемые формулой (4.14), принято обозначать, как в нерелятивистском случае, т. е. посредством орбитального момента l, фигурирующего в ψ^l_{jm}, и полного момента j. В таблице мы приводим несколько первых уровней.

Уровни	n	l	j	E_{nl}
$1S_{1/2}$	1	0	$1/2$	$m\sqrt{1-Z^2\alpha^2}$
$2S_{1/2}$	2	0	$1/2$	$m\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-Z^2\alpha^2}}{2}}$
$2P_{1/2}$	2	1	$1/2$	$m\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-Z^2\alpha^2}}{2}}$
$2P_{3/2}$	2	1	$3/2$	$\dfrac{m}{2}\sqrt{4-Z^2\alpha^2}$

Уровни $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ вырождены, будучи собственными состояниями с противоположной четностью, отвечающими одному и тому же значению n и j. Уровень $2P_{3/2}$ расположен выше, чем $2P_{1/2}$; разность энергий между ними, равная $[m(Z\alpha)^4/32](1+O((Z\alpha)^2)+\ldots)$, представляет собой энергию тонкой структуры. Тонкая структура есть следствие спин-орбитального взаимодействия (4.6). Из формулы (4.15) видно, что чем больше j при заданном n, тем выше лежит уровень.

Как согласуются эти предсказания с наблюдаемым на опыте спектром атома водорода? До 1947 г. согласие с опытом было вполне удовлетворительным (с учетом сверхтонкого расщепления, обусловленного взаимодействием спина электрона со спином протона). Однако в 1947 г. измерение тонкой структуры атома водорода, произведенное Лэмбом и Резерфордом [1]), подтвердило возникшее еще раньше подозрение в том, что уровень $2S_{1/2}$ сдвинут вверх относительно уровня $2P_{1/2}$ (рис. 4.2). Это так называемое смещение Лэмба, которое снимает вырождение уровней с одинаковыми значениями j и n, но разными l, происходит благодаря взаимодействию электронов с флуктуациями квантованного поля излучения. Имеются очень точные измерения и расчеты как сверхтонкого расщепления, так и лэмбовского смещения; согласие теории с экспериментом хорошее [41].

Сверхтонкая структура возникает благодаря взаимодействию протона с *магнитным моментом* электрона [42] (см. также [37]). В результате каждый уровень расщепляется на две компоненты

---

[1]) Ссылки на последующие работы можно найти в [37, 40].

в соответствии с двумя возможными значениями полного момента атома. Этот момент складывается из полного момента электрона j и полуцелого спина протона. Найдем энергию сверхтонкого расщепления для S-состояний. Для этой цели оказывается достаточным нерелятивистское описание электрона. Взаимодействие имеет вид

$$H' = + \frac{|e|}{2m} \sigma \cdot \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{B} = \frac{g_p e}{2M_p} \int d^3r' \rho(r') \nabla \times (\mathbf{I} \times \nabla) \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|};$$

здесь $\mathbf{I}$ — оператор спина протона ($I_z = \pm 1/2$), а $\rho(r')$ — плотность магнитного момента протона (мы не считаем протон

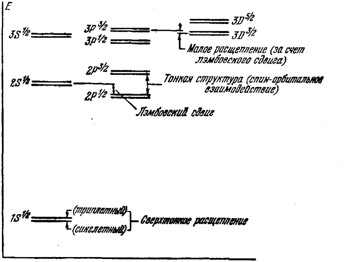


Рис. 4.2. Нижние уровни энергии атома водорода. Схема изображена без соблюдения масштаба.

точечной частицей). Используя тождество $\nabla \times (\mathbf{I} \times \nabla) = \mathbf{I}\nabla^2 - (\mathbf{I} \cdot \nabla) \nabla$ и тот факт, что для сферически-симметричной волновой функции

$$\nabla_i \nabla_j \to \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2,$$

получаем

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3} g_p \frac{e}{2M_p} \int d^3r' \rho(r') \mathbf{I} \nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{2}{3} g_p \frac{e}{2M_p} \mathbf{I} \rho(r).$$

Тогда для сдвига уровня по нерелятивистской теории имеем

$$\Delta E_n = (\psi_n H' \psi_n) = \frac{2}{3}\frac{g_p e^2}{4mM_p}\,\sigma\cdot\mathbf{I}\int d^3r\,\psi_n^*(r)\,\rho(r)\,\psi_n(r) \approx$$

$$\approx \frac{1}{6}\frac{g_p e^2}{mM_p}\,\sigma\cdot\mathbf{I}\,|\psi_n(0)|^2 = \frac{1}{2}m\alpha^2\left[\frac{4}{3}g_p\frac{Z^3\alpha^2}{n^3}\left(\frac{m}{M_p}\right)\sigma\cdot\mathbf{I}\right].$$

Далее

$$\sigma\cdot\mathbf{I} = \begin{cases} +\,{}^1/_2 & \text{для триплетных состояний,} \\ -\,{}^3/_2 & \text{для синглетных состояний.} \end{cases}$$

Таким образом, расщепление δ_n n-го уровня равно

$$\delta_n = \frac{1}{2}m\alpha^2\left[\frac{8}{3}g_p\frac{Z^3\alpha^2}{n^3}\left(\frac{m}{M_p}\right)\right].$$

По сравнению с тонкой структурой оно в m/M_p раз меньше.

Велтон [43] предложил простое качественное описание смещения Лэмба, основанное на рассмотрении взаимодействия нерелятивистского электрона с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля. Поскольку динамика нормального колебания электромагнитного поля эквивалентна динамике гармонического осциллятора, то после квантования каждое нормальное колебание приобретает «нулевую энергию», равную $\omega/2$. В результате этого квантового эффекта флуктуирующие электромагнитные поля имеются, даже если внешнее поле отсутствует. Хотя средние значения напряженностей поля равны нулю, их среднеквадратичные значения отличны от нуля. Взаимодействие электрона с этим полем приводит к среднеквадратичным флуктуациям координаты электрона. Нам надо оценить амплитуду таких «качаний» связанного электрона. Как мы выяснили при рассмотрении дарвиновского члена (4.7), они приводят к появлению у электрона добавочной энергии взаимодействия. Эта энергия возникает за счет «размазывания» действующего на электрон кулоновского поля и равна ${}^1/_6\langle(\delta r)^2\rangle\nabla^2 V$. В наинизшем порядке соответствующий сдвиг уровня электрона есть

$$\Delta E_n^{\mathrm{Lamb}} = {}^1/_6\langle(\delta r)^2\rangle\int d^3r\,\psi_n^*\nabla^2 V(r)\,\psi_n = \frac{2\pi}{3}Z\alpha\,\langle(\delta r)^2\rangle\,|\psi_n(0)|^2. \quad (4.16)$$

Чтобы оценить $\langle(\delta r)^2\rangle$, будем считать электрон классической нерелятивистской заряженной частицей. Уравнение движения для колебаний электрона вокруг равновесного положения имеет вид

$$\delta\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\,\mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ — флуктуирующее электромагнитное поле. Для фурье-компонент имеем

$$\delta r_\omega = -\frac{eE_\omega}{m\omega^2}.$$

Отсюда для среднеквадратичных значений получаем

$$\langle(\delta r_\omega)^2\rangle = \frac{e^2 \langle E_\omega{}^2\rangle}{m^2\omega^4}$$

и

$$\langle(\delta r)^2\rangle = \frac{e^2}{m^2} \int \frac{d\omega}{\omega^4} \langle E_\omega^2\rangle. \qquad (4.17)$$

Для определения среднеквадратичной напряженности рассмотрим полную энергию вакуумного поля

$$\frac{1}{2} \int d^3x\,(E^2 + B^2) = \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{k} \frac{1}{2}\,\omega,$$

где два значения λ отвечают двум поперечно-поляризованным состояниям, а сумма по k распространяется на все колебания в некотором большом объеме пространства

$$L^3 = \int d^3x, \quad \sum_k \to \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k.$$

Поскольку для свободных электромагнитных волн $\int d^3x\, E^2 = \int d^3x\, B^2$ и $\omega = |\mathbf{k}|$, среднеквадратичная напряженность поля в вакууме равна

$$\langle E^2\rangle = \frac{1}{L^3} \int d^3x\, E^2 = 2\,\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k\, \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2\pi^2} \int d\omega\, \omega^3 = \int d\omega\, \langle E_\omega^2\rangle.$$

Подстановкой последнего звена этой цепочки равенств в (4.17) находим

$$\langle(\delta r)^2\rangle = \frac{e^2}{2\pi^2 m^2} \int \frac{d\omega}{\omega}, \qquad (4.18)$$

где интегрирование производится от 0 до ∞. Вследствие того, что наше рассмотрение электрона является слишком грубым, интеграл расходится на обоих пределах. Этого не происходит при правильном релятивистском описании электрона, локализованного в атоме водорода. Волны, длина которых больше боровского радиуса $(Z\alpha m)^{-1}$, оказываются несущественными, так как имеется минимальная частота вынужденных колебаний $\omega_{\min} \sim mZ\alpha$, отвечающая характерным атомным размерам. Происходит также высокочастотное обрезание на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона $1/m$, обусловленное релятивистской структурой электрона. Эта структура, которой отвечает уже знакомая нам амплитуда «дрожания», приводит к тому, что частоты выше, чем $\omega_{\max} \sim m$, несущественны для рассматриваемого процесса. Поэтому в качестве оценки мы примем

$$\int \frac{d\omega}{\omega} \sim \ln \frac{1}{Z\alpha}$$

и из (4.18) получим для среднеквадратичной амплитуды колебаний электрона в поле вакуума

$$\langle(\delta r)^2\rangle = \frac{2\alpha}{\pi}\left(\ln \frac{1}{Z\alpha}\right)\left(\frac{1}{m}\right)^2. \qquad (4.19)$$

Окончательное выражение для сдвига уровня, получаемое из (4.16), имеет вид

$$\Delta E_n = \frac{4Z\alpha^2}{3}\left(\frac{1}{m}\right)^2 \ln \frac{1}{Z\alpha} |\psi_n(0)|^2 =$$

$$= \left[\frac{8}{3\pi}\frac{Z^4\alpha^3}{n^3}\left(\ln\frac{1}{Z\alpha}\right)\right]\left(\frac{1}{2}\alpha^2 m\right)\delta_{l0} \simeq$$

$$\simeq 1000 \text{ Мгц} \quad \text{для} \quad n=2,\ Z=1,\ l=0.$$

В итоге мы объяснили почти весь наблюдаемый на опыте сдвиг уровня $2S_{1/2}$ атома водорода; сдвиги уровней с $l \neq 0$ хотя и не равны нулю, однако значительно меньше из-за обращения в нуль волновой функции в начале координат.

ЗАДАЧИ

1. Получите соотношение (4.10).

2. В уравнении Дирака, описывающем взаимодействие протона или нейтрона с внешним электромагнитным полем, имеется дополнительный член, отвечающий тому, что эти частицы обладают аномальным магнитным моментом:

$$\left(\hat{p} - e_l\hat{A} + \frac{\mathrm{k}_l e}{4M_l}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - M_l\right)\psi(x) = 0,$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}A^\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu}A^\nu.$$

а) Для протона $l = p$, $e_p = |e|$; для нейтрона $l = n$, $e_n = 0$. Проверьте, что значения $\mathrm{k}_p = 1{,}79$ и $\mathrm{k}_n = -1{,}91$ отвечают наблюдаемым магнитным моментам этих частиц, а также то, что уравнение с добавочным взаимодействием по-прежнему лоренц-ковариантно. Убедитесь в том, что гамильтониан эрмитов и вероятность сохраняется.

б) Проделайте преобразование Фолди — Ваутхайзена для нейтрона, сохранив члены того же порядка, что в (4.5). Укажите физический смысл каждого отдельного члена. Найдите сечение рассеяния нейтронов в электростатическом поле. Как можно измерить это сечение? (См. [44].)

3. Найдите точные уровни энергии и волновые функции для дираковского электрона в однородном статическом магнитном поле (см. [45]).

4. Рассчитайте в наинизшем по α^2 приближении линейный эффект Зеемана для электрона в атоме водорода. Как изменятся зеемановские уровни, если гиромагнитное отношение для электрона станет отличным от значения $g = 2$ (дать ответ в первом порядке по разности $g - 2$)?

5. Обсудите прецессию спина заряженной дираковской частицы с аномальным магнитным моментом k в статическом магнитном поле. В частности, покажите, что разность между частотами прецессии спина частицы и ее вектора скорости пропорциональна $(g-2)$ или k. Как этот результат зависит от массы частицы? (См. работы [46].)

6. Постройте добавочный член в гамильтониане, отвечающий аномальному электрическому дипольному моменту дираковской частицы. Что произойдет с этим членом при пространственной инверсии? Как он повлияет на уровни атома водорода? (См. [47].)

7. За счет мезонных эффектов (обсуждаемых в гл. 10) заряд протона распределен по области с линейными размерами 10^{-13} *см*. Найдите влияние такого распределения заряда на уровни энергии водородного атома, считая среднеквадратичный радиус распределения равным $r \approx 0{,}8 \cdot 10^{-13}$ *см*. Сравните результат с лэмбовским сдвигом.

ГЛАВА 5

ТЕОРИЯ ДЫРОК

§ 16. Проблема решений с отрицательной энергией

В нашем изложении мы уже не раз касались решений уравнения Дирака с отрицательной энергией. Например, была найдена доля таких решений в локализованном волновом пакете. Однако до сих пор мы старались избегать вопроса об их физическом смысле [48, 49]. Теперь наступила пора заняться этой проблемой.

Сам факт существования решений с отрицательной энергией требует существенного пересмотра дираковской теории, поскольку надо запретить радиационные переходы электронов с атомных уровней в состояния с отрицательной энергией и дальнейший ничем не ограниченный каскад. Эта трудность отсутствует, если полностью пренебречь взаимодействием электронов с полем излучения. В этом случае можно найти стационарные решения, как было сделано в предыдущей главе; определить уровни энергии и вероятности перехода, которые в целом хорошо согласуются с экспериментом. Однако вопрос о том, как удержать электрон от скатывания в состояние с отрицательной энергией, остается принципиальным как для теории, так и для практических вычислений, если их надо выполнить с точностью, требующей учета взаимодействия с излучением. Вероятность перехода электрона из основного состояния атома водорода в состояние с отрицательной энергией может быть найдена с помощью полуклассической теории излучения с использованием полученных в гл. 4 волновых функций. Вероятность перехода в энергетический интервал от $-mc^2$ до $-2mc^2$ приближенно равна

$$\sim \frac{2\alpha^6}{\pi} \frac{mc^2}{\hbar} \approx 10^8 \textit{ сек}^{-1}$$

и становится бесконечной для переходов на все состояния с отрицательной энергией. Но это явный абсурд!

Чтобы спасти уравнение Дирака, мы должны найти интерпретацию состояний с отрицательной энергией, отличную от той, которую предлагает одночастичная шредингеровская теория. Эта задача была решена Дираком в 1930 г. Он сформулировал так называемую «теорию дырок», в которой дилемма, поставленная существованием решений с отрицательной энергией, разрешается просто путем заполнения электронами всех состояний с отрицательной энергией в соответствии с принципом запрета Паули. Тогда состояние вакуума есть состояние, в котором все уровни с отрицательной энергией заполнены электронами, а все уровни с положительной энергией свободны. Тем самым, например, обеспечивается стабильность основного состояния атома водорода, поскольку согласно принципу Паули ни один добавочный электрон не может попасть в «море» с отрицательной энергией.

Из предположения о заполненном электронами море с отрицательной энергией вытекает множество следствий. Электрон с отрицательной энергией может поглотить излучение и перейти в состояние с положительной энергией, как схематически показано на рис. 5.1. В результате мы будем наблюдать электрон

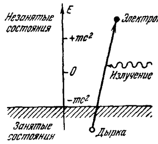


Рис. 5.1. Рождение пары: электрон с отрицательной энергией поглощает излучение и попадает в состояние с положительной энергией.

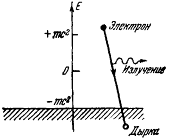


Рис. 5.2. Аннигиляция пары: электрон с положительной энергией опускается в состояние с отрицательной энергией с испусканием излучения.

с зарядом $-|e|$ и энергией $+E$ и дырку в море с отрицательной энергией. Дырка означает *отсутствие* электрона с зарядом $-|e|$ и энергией $-E$, и, сравнив это состояние с вакуумным, наблюдатель скажет, что имеется частица с зарядом $+|e|$ и энергией $+E$; эта частица называется *позитроном*. Такова основа объяснения процесса рождения пар в теории дырок.

Соответственно дырка в море с отрицательной энергией, или позитрон, является ловушкой для электрона с положительной энергией, и в этом состоит объяснение процесса аннигиляции электрон-позитронной пары с испусканием излучения, который изображен на рис. 5.2.

Следует понимать, что, приняв теорию дырок, мы совершили переход к многочастичной теории, *описывающей частицы обоих знаков заряда*. Теперь волновая функция уже не имеет простой вероятностной интерпретации, как в одночастичной теории, поскольку она должна описывать процессы рождения и уничтожения электрон-позитронных пар.

Вспомним, однако, что мы отвергли уравнение Клейна — Гордона и перешли к уравнению Дирака потому, что хотели построить одночастичную теорию. Поэтому законно будет спросить, а почему бы нам не отказаться и от уравнения Дирака? Наше нежелание поступить подобным образом имеет ту простую причину, что с помощью уравнения Дирака мы уже получили впечатляющее количество «правильных» результатов, к которым относятся спектр атома водорода и гиромагнитное отношение для электрона. Более того, позитроны, *предсказываемые* теорией Дирака, наблюдаются на опыте.

Таким образом, мы строили теорию так, как в свое время было намечено Дираком, и сначала получили желаемое уравнение, а теперь подвергли теорию пересмотру и отказались от тех предположений, которые послужили первоначальным толчком к ее развитию. История физики знает множество примеров такого пути развития. Поэтому мы сохраним уравнение Дирака и его интерпретацию, основанную на теории дырок, но откажемся от одночастичной трактовки вероятности, к которой мы так стремились. Заметим, что теперь можно вновь вернуться к уравнению второго порядка Клейна — Гордона и спасти его, придав новый физический смысл волновой функции.

По сравнению с уравнением Клейна — Гордона преимущество уравнения Дирака состоит в том, что оно правильно описывает электрон со спином $1/2$ и гиромагнитным отношением $g=2$. Уравнение Клейна — Гордона, как будет показано в гл. 9, применимо для бесспиновых частиц, таких как пионы. Инвариантом для обоих уравнений является квадратичное соотношение между энергией и импульсом свободной частицы $p_\mu p^\mu = m^2$. В обоих случаях требуется дать такое толкование решений с отрицательной энергией, которое обеспечивает стабильность основных состояний. Отсюда с неизбежностью следует существование античастиц. Частицы (для уравнения Дирака электроны с массой m и зарядом $-|e|$) описываются решениями с положительной энергией, а античастицы (позитроны с массой m и зарядом $+|e|$) описываются заново истолкованными решениями с отрицательной энергией.

§ 17. Зарядовое сопряжение

Следствием теории дырок является новая фундаментальная симметрия в природе: каждая частица имеет античастицу, в частности, из существования электронов вытекает существование позитронов. Теперь нам надо найти для этой симметрии формальное выражение, которое можно было бы использовать для получения в явном виде волновой функции позитрона из волновой функции соответствующего электрона с отрицательной энергией.

Согласно нашей физической картине дырка в море с отрицательной энергией, означающая *отсутствие* энергии $-E$ $(E > 0)$ и заряда $+e$ (для электрона $e < 0$), эквивалентна *присутствию* позитрона с энергией $+E$ и зарядом $-e$. Поэтому имеется однозначное соответствие между решениями с отрицательной энергией уравнения Дирака

$$(i\hat{\nabla} - e\hat{A} - m)\,\psi = 0 \qquad (5.1)$$

и собственными функциями позитрона. Поскольку по своему физическому смыслу позитроны вводятся как положительно заряженные электроны, волновая функция позитрона ψ_c должна быть решением с положительной энергией уравнения

$$(i\hat{\nabla} + e\hat{A} - m)\,\psi_c = 0. \qquad (5.2)$$

Можно пойти обратным путем, более близким к историческому, и начать с уравнения (5.2) для позитронов. Нигде в наших рассуждениях знак заряда e не играл существенной роли. В этом случае отсутствие решений уравнения (5.2) с отрицательной энергией будет означать существование электронов. Итак, имеется однозначное соответствие между решениями уравнений (5.1) и (5.2) для обоих значений знака заряда, и тем самым мы приходим к необходимости построения оператора, переводящего эти уравнения друг в друга.

Прежде всего мы замечаем, что для перехода от (5.1) к (5.2) необходимо изменить относительный знак членов $i\hat{\nabla}$ и $\hat{A}$. Этого проще всего добиться путем операции комплексного сопряжения: $i\partial/\partial x^{\mu} = -(i\partial/\partial x^{\mu})^*$ и $A_{\mu} = +A_{\mu}^*$. В результате уравнение (5.1) переходит в

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + eA_{\mu}\right)\gamma^{\mu *} + m\right]\psi^* = 0. \qquad (5.3)$$

Если бы теперь мы смогли найти несингулярную матрицу, обозначаемую $C\gamma^0$, подчиняющуюся алгебре

$$(C\gamma^0)\,\gamma^{\mu *}\,(C\gamma^0)^{-1} = -\,\gamma^{\mu}, \qquad (5.4)$$

то уравнение приобрело бы желаемый вид

$$(i\hat{\nabla} + e\hat{A} - m)(C\gamma^0\psi^*) = 0,$$

где функция

$$C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T = \psi_c \tag{5.5}$$

есть волновая функция позитрона. Существование матрицы C может быть установлено прямым построением. Покажем это в представлении (2.6), в котором $\gamma^0\gamma^{\mu *}\gamma^0 = \gamma^{\mu T}$, так что равенство (5.4) превращается в $C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu$, или

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}.$$

В этом представлении матрица C должна коммутировать с γ_1 и γ_3 и антикоммутировать с γ_0 и γ_2. Подходящей является матрица

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^+ = -C^T. \tag{5.6}$$

Этого достаточно для построения матрицы C в любом заданном представлении; матрица C в новом представлении получается из (5.6) с помощью унитарного преобразования, осуществляющего переход от одного представления к другому. Заметим, что оператор C (5.6) определен с точностью до фазового множителя, подобно рассмотренному ранее оператору пространственной инверсии. Для нашего рассмотрения фаза волновой функции не представляет физического интереса и мы не будем заниматься этим вопросом.

Теперь мы подробно остановимся на действии введенного оператора $\psi_c = C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\psi^*$ на собственные функции свободной частицы с отрицательной энергией. Волновая функция покоящегося электрона с отрицательной энергией и спином вниз имеет вид

$$\psi^4 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}e^{+imt}.$$

Соответствующее решение для позитрона есть

$$i\gamma^2\psi^{4*} = i\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-imt} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt} = \psi^1. \tag{5.7}$$

Таким образом, отсутствие покоящегося электрона с отрицательной энергией и спином вниз эквивалентно присутствию покоящегося позитрона с положительной энергией и спином вверх. Если внешнего поля нет, то нет и никакой разницы между электроном и позитроном и из (5.7) мы видим, что путем преобразования (5.5) просто получается другое электронное решение.

Применяя то же преобразование к собственному состоянию с произвольными спином и импульсом и используя условия $[C, \gamma^5] = 0$ и $\gamma_5^T = \gamma_5 = \gamma_5^*$, находим

$$\psi_c = C\bar{\psi}^T = C\gamma_0\psi^* = C\gamma_0 \left(\frac{\varepsilon \not{p} + m}{2m}\right)^* \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}\right)^* \psi^* =$$
$$= C\left(\frac{\varepsilon \not{p}^T + m}{2m}\right)\left(\frac{1 - \gamma_5 \not{s}^T}{2}\right)\gamma_0\psi^* = \left(\frac{-\varepsilon \not{p} + m}{2m}\right)\left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}\right)\psi_c. \quad (5.8)$$

Снова мы видим, что произведение операций комплексного сопряжения и матричного умножения на $C\gamma_0 = i\gamma^2$ переводит решение с отрицательной энергией, 4-импульсом p_μ и поляризацией s_μ в решение с положительной энергией и *теми же самыми* p_μ и s_μ. Для спиноров, отвечающих свободным частицам, равенства (5.5) имеют вид

$$e^{i\phi(p, s)} v(p, s) = C\bar{u}^T(p, s),$$
$$e^{i\phi(p, s)} u(p, s) = C\bar{v}^T(p, s).$$

Отсюда видно, что $v(p, s)$ и $u(p, s)$ являются **зарядово-сопряженными** спинорами (с точностью до фазы $\phi(p, s)$).

Напомним, что мы строили решения так, что

$$p_0 = +\sqrt{p^2 + m^2} = E > 0.$$

Заметим также, что s не меняет знак при зарядовом сопряжении, а спин меняет знак, в чем мы убедились на примере (5.7). Как уже говорилось в § 10, эта разница связана с тем, что спиновый проекционный оператор имеет в системе покоя вид $(1 + \gamma_0\, \boldsymbol{\sigma}\cdot \mathbf{s}/2)$, где $s^\mu = (0, \mathbf{s})$ и изменение знака происходит за счет матрицы γ_0.

Оператор в равенстве (5.5) осуществляет явное построение волновой функции позитрона. С его помощью можно ввести такую операцию, относительно которой уравнение Дирака инвариантно. Для этого требуется определить добавочный оператор, изменяющий знак электромагнитного поля. Тогда формально дираковская теория будет инвариантна относительно следующей последовательности операций: 1) комплексное сопряжение, 2) умножение на $C\gamma_0$ и 3) замена $+A_\mu$ на $-A_\mu$. При этом уравнение (5.1) ((5.2)) для электрона (позитрона) переходит в то же самое уравнение для позитрона (электрона). Это преобразование называется зарядовым сопряжением и обозначается $\mathbb{C}$.

Физический смысл зарядового сопряжения состоит в том, что каждому физически реализуемому состоянию электрона в поле $A_\mu(x)$ отвечает физически реализуемое состояние позитрона в поле $-A_\mu(x)$. Таким образом, операция $\mathbb{C}$ заменяет электроны с положительной энергией и спином вверх на позитроны с положительной энергией и спином вверх. Это достигается путем преобразования решений с положительной энергией уравнения (5.1) в решения с отрицательной энергией этого же уравнения, что согласно теории дырок означает переход к позитрону.

То, что динамика позитрона в поле $-A_\mu$ в точности такая же, как электрона в поле $+A_\mu$, неудивительно из классических соображений. Новый и удивительный результат теории дырок состоит в том, что из существования электронов с массой m и зарядом e *с необходимостью* следует существование позитронов с той же массой m и зарядом $-e$.

Существование в природе электронов с двумя знаками заряда и одной и той же массой есть один из самых сильных доводов в пользу по крайней мере частичной правильности релятивистской квантовой теории.

§ 18. Поляризация вакуума

Теория дырок, устраняя трудности, связанные с отрицательной энергией, приводит, однако, к новым принципиальным препятствиям, которые приходится преодолевать, и новым физическим предсказаниям, требующим экспериментальной проверки. Рассмотрим, к примеру, влияние вакуума на определение заряда электрона и взаимодействие между двумя зарядами.

Между электроном с положительной энергией и электронами из моря с отрицательной энергией имеется электростатическое отталкивание. Поэтому электрон поляризует вакуум вокруг себя. Суммарная плотность заряда электрона $\rho_0(\mathbf{r})$ и поляризованного вакуума $\rho_p(\mathbf{r})$, измеренная относительно вакуума, схематически изображена на рис. 5.3.

Заряд электрона, измеренный с помощью макроскопического внешнего поля или удаленного пробного заряда, равен $\int d^3r\,[\rho_0(\mathbf{r})+\rho_p(\mathbf{r})]=e_0$ и представляет собой «физический» заряд. Однако, если проводить измерения с помощью пробного заряда, находящегося на расстояниях $r_0<R$, то измеренное значение заряда будет становиться все более отрицательным до тех пор, пока в пределе $r_0\to 0$ не станет равным $\int d^3r\,\rho_0(\mathbf{r})=e_0$, т. е. значению «голого» заряда, причем $|e_0|>|e|$.

Это явление наблюдается в спектре атома водорода. Электронные s-уровни расположены ниже, чем уровни с $l\neq 0$, так как в состояниях с $l=0$ электрон находится ближе к протону. Этот эффект поляризации вакуума, вычисление которого будет проведено в гл. 8, слегка уменьшает смещение Лэмба. В той же главе мы рассмотрим вопрос о связи «голого» заряда изолированного электрона со значением заряда, наблюдаемым на больших расстояниях.

В связи с теорией дырок возникает еще один вопрос: какой смысл имеет введенный нами бесконечный отрицательный полный заряд вакуума? Пока мы оставим этот вопрос в стороне,

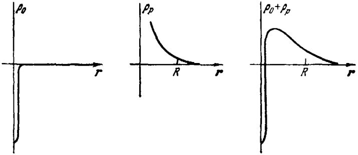


Рис. 5.3. Влияние поляризации вакуума на плотность заряда электрона. Величина ρ_0 представляет собой плотность заряда «голого» электрона, а ρ_p есть плотность заряда поляризационного облака, образованного виртуальными электрон-позитронными парами.

заметив лишь, что электрическое поле от этого распределенного заряда не имеет выделенного направления. Наблюдаемыми являются только неоднородности в распределении, обусловленные поляризацией вакуума.

§ 19. Обращение времени и другие симметрии

Рассмотрим теперь преобразования пространственной инверсии и обращения времени. Кроме них, имеется еще одна операция симметрии, также не относящаяся к собственным преобразованиям Лоренца, — это калибровочная инвариантность электромагнитного взаимодействия. Однако инвариантность относительно калибровочных преобразований автоматически обеспечивается введением взаимодействия в виде $p_\mu - eA_\mu$. Проверка этого утверждения производится в точности, как в шредингеровской теории.

Напомним, что, как было установлено в § 7, операцию пространственной инверсии можно записать следующим образом:

$$P\psi(\mathbf{x}, t) = \psi'(\mathbf{x}', t) = e^{i\varphi}\gamma^0\psi(\mathbf{x}, t), \quad \text{где} \quad \mathbf{x}' = -\mathbf{x}. \tag{5.9}$$

Для решений в виде плоских волн пространственная инверсия состоит в изменении знаков импульсов при неизменных значениях спинов, т. е. происходит так, как следует ожидать из классических соображений. Такое преобразование волновой функции в сочетании со следующим хорошо известным преобразованием над 4-потенциалом электромагнитного поля:

$$\left.\begin{aligned} P\Phi(\mathbf{x}, t) &= \Phi'(\mathbf{x}', t) = \Phi(\mathbf{x}, t), \\ P\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{A}'(\mathbf{x}', t) = -\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \end{aligned}\right. \quad \text{где} \quad \mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \tag{5.10}$$

оставляет неизменными уравнение Дирака и значения всех наблюдаемых физических величин. Физическое содержание инвариантности дираковской теории относительно пространственной инверсии можно пояснить следующим образом.

Рассмотрим некоторую серию наблюдений над состоянием, *описываемым волновой функцией* $\psi(x, t)$. *Заснимем наши* наблюдения на кинопленку, причем съемочную камеру направим на плоское зеркало, в котором отражается экспериментальная установка. Тогда мы сможем сказать, что динамика явления, которое мы наблюдаем, инвариантна относительно пространственной инверсии, если в заснятом в зеркале кинофильме показана физически возможная последовательность явлений, т. е. если, смотря этот фильм, невозможно установить, видим ли мы зеркальное отражение или само явление. Поэтому вместо пространственной инверсии достаточно рассматривать зеркальное отражение, хотя эти операции и не тождественны. При зеркальном отражении меняется знак только у координат, направление которых перпендикулярно к плоскости зеркала; чтобы получить преобразование инверсии, надо еще произвести поворот на угол π вокруг нормали к поверхности зеркала. Однако такой поворот уже включен в собственные преобразования Лоренца.

Переходя к обсуждению симметрии относительно обращения времени, мы для выяснения ее физического содержания опять воспользуемся мысленной киносъемкой последовательности наблюдений над состоянием, описываемым волновой функцией $\psi(x)$. Просмотрим теперь отснятый кинофильм в обратном направлении, от конца к началу. Можно утверждать, что динамика наблюдаемого явления инвариантна относительно обращения времени, если показанный в обратном порядке фильм изображает физически возможную последовательность наблюдений. Эта инвариантность будет обеспечена при условии, что мы можем заменить t на $t' = -t$ и проделать такое преобразование, которое приводит уравнение Дирака к прежнему виду с прежней физической интерпретацией. Преобразованная волновая функция будет описывать первоначальный электрон, движущийся назад во времени, и она будет физически возможной, поскольку будет удовлетворять уравнению Дирака.

Для построения искомого преобразования обращения времени запишем уравнение Дирака в гамильтоновой форме

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = H\psi = [\alpha\cdot(-i\nabla - e\mathbf{A}) + \beta m + e\Phi]\,\psi(\mathbf{x}, t) \quad (5.11)$$

и определим преобразование $\mathfrak{T}$ такое, что при $t' = -t$ $\psi'(t') = \mathfrak{T}\psi(t)$. Тогда (5.11) переходит в [1])

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left(\mathfrak{T}i\mathfrak{T}^{-1}\right)\psi'(t') = -\,\mathfrak{T}H\mathfrak{T}^{-1}\psi'(t'). \quad (5.12)$$

Инвариантность относительно обращения времени означает, что

$$\text{либо}\ \ \mathfrak{T}H(t)\mathfrak{T}^{-1} = -H(t'), \quad \text{либо}\ \ \mathfrak{T}i\mathfrak{T}^{-1} = -i.$$

Для выяснения поведения H при действии оператора $\mathfrak{T}$ мы должны сперва установить закон преобразования 4-потенциала электромагнитного поля A_μ при замене $t' = -t$. Поскольку $\mathbf{A}$ обусловлен токами, которые меняют знак при обращении времени, мы потребуем

$$\mathbf{A}'(t') = -\mathbf{A}(t)$$

и аналогично

$$\Phi'(t') = +\Phi(t) \quad (5.13)$$

вследствие того, что Φ обусловлен зарядами; кроме того, $\nabla' = +\nabla$, так как $\mathbf{x}' = +\mathbf{x}$. Теперь ясно, что для приведения уравнения (5.12) к первоначальному виду необходимо, чтобы преобразование $\mathfrak{T}\ldots\mathfrak{T}^{-1}$ заменяло i на $-i$; следовательно, $\mathfrak{T}$ можно представить в виде оператора комплексного сопряжения, умноженного слева на некоторую постоянную матрицу размерности 4×4:

$$\psi'(t') = T\psi^*(t). \quad (5.14)$$

Тогда имеем

$$i\frac{\partial\psi'(t')}{\partial t'} = \left\{\left(-T\alpha^*T^{-1}\right)[-i\nabla' - e\mathbf{A}'(t')] + \right.$$
$$\left. + \left(T\beta^*T^{-1}\right)m + e\Phi'(t')\right\}\psi'(t').$$

В представлении (1.17), которым мы обычно пользуемся, это означает, что матрица T должна коммутировать с α_2 и β и антикоммутировать с α_1 и α_3. Таким образом, нашим требованиям

[1]) Мы опускаем несущественную здесь зависимость от $\mathbf{x}$.

удовлетворяет матрица

$$T = -i\alpha_1\alpha_3 = +i\gamma^1\gamma^3, \tag{5.15}$$

где фазовый множитель выбран произвольно.

Чтобы показать, что преобразование $\mathfrak{T}$ соответствует тому, что мы подразумеваем под обращением времени в классической физике, применим (5.14) и (5.15) к решению в виде плоской волны для свободной частицы с положительной энергией:

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\hat{p}+m}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\hat{s}}{2}\right)\psi(\mathbf{x}, t) = T\left(\frac{\hat{p}^*+m}{2m}\right)T^{-1}T\left(\frac{1+\gamma_5\hat{s}^*}{2}\right)\times$$
$$\times T^{-1}\psi'(\mathbf{x}, t') = \left(\frac{\hat{p}'+m}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\hat{s}'}{2}\right)\psi'(\mathbf{x}, t'), \tag{5.16}$$

где $p' = (p_0, -\mathbf{p})$ и $s' = (s_0, -\mathbf{s})$ и, следовательно, проектирование производится на решение, отвечающее свободной частице с измененными на обратные значениями трехмерных векторов импульса $\mathbf{p}$ и спина $\mathbf{s}$. Эта операция, известная как вигнеровское обращение времени, была впервые введена в 1932 г. [51].

Поскольку теория инвариантна относительно операций пространственной инверсии и обращения времени, мы, если пожелаем, можем использовать эти операции при построении волновой функции позитрона. Объединяя (5.9), (5.14) и (5.15) с (5.5), находим простое соответствие между волновой функцией позитрона

$$\psi_{PCT}(x') = PC\gamma_0(\mathfrak{T}\psi(x))^* = PC\mathfrak{T}\psi(x) =$$
$$= ie^{i\varphi}\gamma_5\psi(x), \quad \text{где} \quad x'_\mu = -x_\mu, \tag{5.17}$$

и волновой функцией электрона, умноженной на $ie^{i\varphi}\gamma_5$ и описывающей электрон, движущийся в обратном направлении в пространстве и времени.

Для собственного состояния свободной частицы $\psi(x)$, характеризующегося определенными значениями импульса и спина (p^μ, s^μ) и $\varepsilon = -1$ имеем

$$\psi_{PCT}(x') = ie^{i\varphi}\gamma_5\left(\frac{-\hat{p}+m}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\hat{s}}{2}\right)\psi(x) =$$
$$= \left(\frac{\hat{p}+m}{2m}\right)\left(\frac{1-\gamma_5\hat{s}}{2}\right)\psi_{PCT}(x'). \tag{5.18}$$

Уравнение (5.18) отличается от (5.8) только направлением спина, и поэтому мы можем представить волновую функцию позитрона с положительной энергией как волновую функцию электрона с отрицательной энергией, умноженную на $ie^{i\varphi}\gamma_5$ и отвечающую движению в обратном направлении в пространстве-времени.

Чтобы убедиться в справедливости высказанного утверждения для произвольного решения во внешнем электромагнитном поле, надо вернуться к уравнению для отрицательных собственных значений энергии

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla - e\mathbf{A}) + \beta m + e\Phi]\,\psi = -E\psi \qquad (5.19)$$

и произвести преобразование (5.17). Из (5.10) и (5.13) можно видеть, что при комбинированной операции инверсии пространства и обращения времени $A'_\mu(x') = +A_\mu(x)$ и $x'_\mu = -x_\mu$; следовательно, (5.19) приобретает желаемый вид

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla' + e\mathbf{A}'(x')) + \beta m - e\Phi'(x')]\,\psi_{PCT}(x') = +E\psi_{PCT}(x').$$

Интерпретация позитронов как электронов с отрицательной энергией, движущихся в обратном направлении в пространстве-времени, составляет основу теории позитронов Штюкельберга — Фейнмана [52—54]. Мы будем часто пользоваться этой теорией в последующих главах для построения теории рассеяния.

В заключение обратим внимание на то, что выбранный нами вид взаимодействия электронов с электромагнитным полем был продиктован опытом, накопленным нами в классической электродинамике и в нерелятивистской электродинамике электронов. С другой стороны, существование рассмотренных нами принципов симметрии зависит от вида взаимодействия. Например, введенное в задачах к гл. 4 взаимодействие аномального магнитного момента протонов и нейтронов добавляет в уравнение Дирака член вида $\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi$. Его присутствие не влияет ни на одну из рассмотренных симметрий. Распространяя дираковскую теорию на другие частицы со спином $^1/_2$, такие как μ-мезон и нуклоны, весьма естественно предположить, что инвариантность относительно преобразований $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{C}$ и P справедлива и для них.

Большая заслуга Ли и Янга [55] состоит в осознании того, что это и в самом деле всего лишь предположение, которое надо проверять на опыте. Они высказали гипотезу, что во взаимодействиях типа β-распада нарушается инвариантность P и $\mathfrak{C}$. Однако инвариантность относительно операции $\mathfrak{T}\mathfrak{C}P$ обеспечивается гораздо более слабыми предположениями об инвариантности относительно *собственных* преобразований Лоренца и правильной связи спина со статистикой.

ЗАДАЧИ

1. В борновском приближении покажите, что скорость радиационного перехода электрона из основного состояния атома водорода в незаполненные состояния с отрицательной энергией, лежащие в интервале от $-mc^2$ до $-2mc^2$, составляет приблизительно $2\alpha^6 mc^2/\pi\hbar \approx 10^8$ *сек*$^{-1}$.

2. Разрешите парадокс Клейна, изложенный в гл. 3, с помощью теории дырок.

3. Покажите, что если γ_μ и γ'_μ являются двумя представлениями матриц γ, связанными между собой унитарным преобразованием $\gamma_\mu = U\gamma'_\mu U^{-1}$, то $C' = (U^T)^{-1} CU$, где C и C' есть соответствующие матрицы зарядового сопряжения. Справедливы ли для C' соотношения (5.6)?

Аналогичным образом устраните зависимость преобразования (5.15) от конкретного представления матриц γ.

4. Для того чтобы оператор $\mathfrak{T}$ был оператором симметрии в дираковской теории, правила интерпретации волновых функций $\psi'(t')$ и $\psi(t)$ должны быть одними и теми же. Это означает, что наблюдаемые величины, построенные из билинейных форм, составленных из ψ' и ψ'^{+}, должны иметь тот же самый смысл, что и наблюдаемые, построенные из ψ (иногда имеется различие в знаке).

а) Проверьте это утверждение для тока

$$j'_\mu(x') = j^\mu(x)$$

и для

$$\langle \mathbf{r}\rangle' = \langle \mathbf{r}\rangle, \quad \langle \mathbf{p}'\rangle = -\langle \mathbf{p}\rangle.$$

б) Повторите эти выкладки для зарядового сопряжения C. В частности, покажите, что

$$\bar{\psi}_c(x)\gamma_\mu\psi_c(x) = +\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x),$$

и объясните это равенство, исходя из теории дырок.

ГЛАВА 6

МЕТОД ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

§ 20. Введение

Мы переходим к общему рассмотрению процессов рассеяния. Наша цель — иметь возможность вычислять, в принципе точно, вероятности переходов и сечения в дираковской теории электронов и позитронов; на практике вычисления обычно проводятся в низших порядках по параметрам взаимодействия. Возможность изменения числа частиц в таких процессах, как рождение электрон-позитронных пар или аннигиляция, выводит нас за рамки применимости нерелятивистской теории. Тем не менее мы будем как можно дольше откладывать решение грандиозной задачи построения формализма квантовой теории поля для описания процессов рождения и аннигиляции.

С этой целью мы, следуя Фейнману [53, 54], воспользуемся методом функции распространения (пропагатора). В этом методе процесс рассеяния описывается интегральными уравнениями. Граничные условия, которым удовлетворяют их решения, включают в себя согласно Штюкельбергу — Фейнману интерпретацию позитронов как электронов с отрицательной энергией, движущихся назад во времени. Такой подход позволяет сформулировать однозначные правила для расчета любого физического процесса[1]). Начнем с напоминания о методе функции распространения для нерелятивистского уравнения Шредингера.

§ 21. Нерелятивистский пропагатор

В задачах рассеяния наше внимание больше сосредоточено на нестационарных решениях, которые развиваются во времени из заданных в отдаленный момент начальных значений, чем на стационарных решениях, т. е. плоских волнах. Характерная постановка задачи такова: по заданному в отдаленный начальный момент времени волновому пакету, описывающему

[1]) Теоретико-полевое обоснование этих правил содержится в [50].

приближающуюся к источнику потенциала частицу, определить, как будет выглядеть волна в далеком будущем.

При рассмотрении процессов рассеяния удобно пользоваться принципом Гюйгенса. Если волновая функция $\psi(\mathbf{x}, t)$ известна в некоторый определенный момент времени t, то в любой более поздний момент времени t' ее можно найти, считая, что в момент t каждая точка $\mathbf{x}$ является источником сферических волн. Амплитуда волны, пришедшей в точку $\mathbf{x}'$ в момент времени t' из точки $\mathbf{x}$, будет пропорциональна исходной амплитуде $\psi(\mathbf{x}, t)$. Если обозначить коэффициент пропорциональности посредством $iG(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$, то согласно принципу Гюйгенса в точку $\mathbf{x}'$ в момент времени t' придет волна [1])

$$\psi(\mathbf{x}', t') = i \int d^3x\, G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)\, \psi(\mathbf{x}, t), \quad t' > t, \tag{6.1}$$

где функция $G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$ называется функцией Грина, или пропагатором. Согласно принципу Гюйгенса $G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$ характеризует влияние функции $\psi(\mathbf{x}, t)$ на $\psi(\mathbf{x}', t')$. Знание G дает нам возможность построить физическое состояние, которое получается развитием во времени из любого наперед заданного начального состояния. Таким образом, нахождение функции Грина эквивалентно полному решению уравнения Шредингера.

Мы, однако, должны еще дать функции G формальное определение. Пока мы лишь провозгласили ее существование, исходя из физических соображений. Остановимся на этих соображениях подробнее, чтобы уяснить суть метода функции распространения.

Рассмотрим сначала решение в виде свободной волны. Движение свободной частицы полностью известно, поэтому нет ничего удивительного в том, что соответствующую функцию Грина G_0 для свободного движения можно получить в замкнутом виде. Если теперь ввести потенциал, G_0 видоизменится. Пусть $V(\mathbf{x}_1, t_1)$ представляет собой потенциал, который в момент t_1 «включается» на очень короткий промежуток времени Δt_1. До момента t_1 мы будем иметь волновую функцию свободной частицы φ, а соответствующим пропагатором будет G_0. Согласно уравнению Шредингера $V(\mathbf{x}_1, t_1)$ действует как источник новых волн

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t_1} - H_0\right) \psi(\mathbf{x}_1, t_1) = V(\mathbf{x}_1, t_1)\, \psi(\mathbf{x}_1, t_1). \tag{6.2}$$

[1]) Поскольку уравнение Шредингера является уравнением первого порядка по времени, принцип Гюйгенса применим к нему без модификации, данной Кирхгофом.

Правая часть отлична от нуля в течение времени Δt_1 и в это время она вызывает дополнительное изменение ψ по сравнению с тем, которое происходит в отсутствие V. Эту добавочную волну $\Delta\psi(\mathbf{x}_1, t_1)$ находим интегрированием (6.2) с точностью до первого порядка по Δt_1:

$$\Delta\psi(\mathbf{x}_1, t_1) = -iV(\mathbf{x}_1, t_1)\varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\Delta t_1. \tag{6.3}$$

Согласно принципу Гюйгенса и (6.1) найденная добавочная волна приводит в свою очередь в более поздний момент времени t' к новой добавке к $\psi(\mathbf{x}', t')$, равной

$$\Delta\psi(\mathbf{x}', t') = \int d^3x_1\, G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_1, t_1)\, V(\mathbf{x}_1, t_1)\,\varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\,\Delta t_1. \tag{6.4}$$

Таким образом, результатом развития во времени произвольного пакета φ, заданного в отдаленном прошлом, является волна

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}', t') = \varphi(\mathbf{x}', t') + \int d^3x_1\, G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_1, t_1)\, V(\mathbf{x}_1, t_1)\,\varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\,\Delta t_1 = \\ = i\int d^3x\Big[G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) + \\ + \int d^3x_1\,\Delta t_1 G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_1, t_1)\, V(\mathbf{x}_1, t_1)\, G_0(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}, t)\Big]\varphi(\mathbf{x}, t).\end{aligned} \tag{6.5}$$

Сравнивая это выражение с (6.1), находим

$$\begin{aligned}G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) + \\ + \int d^3x_1\,\Delta t_1 G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_1, t_1)\, V(\mathbf{x}_1, t_1)\, G_0(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}, t).\end{aligned} \tag{6.6}$$

Иллюстрацией этого равенства могут служить изображенные на рис. 6.1 пространственно-временные диаграммы. Первому члену, который описывает распространение свободной частицы из точки $(\mathbf{x}, t)$ в $(\mathbf{x}', t')$, отвечает рис. 6.1, *а*. Диаграмма 6.1, *б* изображает свободное движение из $(\mathbf{x}, t)$ в $(\mathbf{x}_1, t_1)$, рассеяние в точке $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и свободное движение из $(\mathbf{x}_1, t_1)$ в $(\mathbf{x}', t')$.

В момент времени $t_2 > t_1$ мы можем на время Δt_2 включить другой потенциал $V(\mathbf{x}_2, t_2)$. Тогда по аналогии с (6.4) $V(\mathbf{x}_2, t_2)$ дает при $t' > t_2$ добавочный вклад в $\psi(\mathbf{x}', t')$, равный

$$\begin{aligned}\Delta\psi(x') = \int d^3x_2\, G_0(x'; 2)\, V(2)\,\psi(2)\,\Delta t_2 = \\ = i\int d^3x\, d^3x_2\,\Delta t_2 G_0(x'; 2)\, V(2)\Big[G_0(2; x) + \\ + \int d^3x_1\,\Delta t_1 G_0(2; 1)\, V(1)\, G_0(1; x)\Big]\varphi(x);\end{aligned} \tag{6.7}$$

здесь смысл сокращенных обозначений очевиден. Иллюстрацией первого члена, который отвечает однократному рассеянию в $(\mathbf{x}_2, t_2)$, служит рис. 6.1, *в*; второй член описывает поправку на двукратное рассеяние и изображается диаграммой 6.1, *г*.

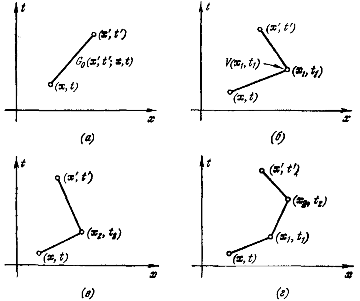


Рис. 6.1. Пространственно-временные диаграммы для распространения из точки $(\mathbf{x}, t)$ в $(\mathbf{x}', t')$. Диаграмма (*а*) отвечает свободной частице, (*б*) — однократному рассеянию на потенциале $V(\mathbf{x}_1, t_1)$ в точке $(\mathbf{x}_1, t_1)$, (*в*) соответствует однократному рассеянию в точке $(\mathbf{x}_2, t_2)$ и (*г*) отвечает двукратному рассеянию.

Для нахождения полной волны, приходящей в точку $(\mathbf{x}', t')$, надо подставить выражение (6.5) для $\psi(2)$ в правую часть (6.7) и полученный результат сложить с (6.5):

$$\psi(x') = \varphi(x') + \int d^3x_1\, \Delta t_1 G_0(x';\ 1)\, V(1)\, \varphi(1) + \\ + \int d^3x_2\, \Delta t_2 G_0(x';\ 2)\, V(2)\, \varphi(2) + \\ + \int d^3x_1\, \Delta t_1\, d^3x_2\, \Delta t_2 G_0(x';\ 2)\, V(2)\, G_0(2;\ 1)\, V(1)\, \varphi(1). \qquad (6.8)$$

Не проводя дальнейших выкладок, нетрудно записать ответ для волны, приходящей в точку $(\mathbf{x}', t')$, в случае, когда потенциал V был включен в течение n подобных интервалов:

$$\psi(x') = \varphi(x') + \sum_i \int d^3x_i\, \Delta t_i G_0(x';\, x_i)\, V(x_i)\, \varphi(x_i) +$$

$$+ \sum_{\substack{ij\\(t_i>t_j)}} \int d^3x_i\, \Delta t_i\, d^3x_j\, \Delta t_j G_0(x';\, x_i)\, V(x_i)\, G_0(x_i;\, x_j)\, V(x_j)\, \varphi(x_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{ijk\\(t_i>t_j>t_k)}} \int d^3x_i\, \Delta t_i\, d^3x_j\, \Delta t_j\, d^3x_k\, \Delta t_k \times$$

$$\times G_0(x';\, x_i)\, V(x_i)\, G_0(x_i;\, x_j)\, V(x_j)\, G_0(x_j;\, x_k)\, V(x_k)\, \varphi(x_k) + \ldots \quad (6.9)$$

Сравнивая (6.9) с (6.5) и (6.6), получаем соответствующее выражение для функции Грина G:

$$G(x';\, x) = G_0(x';\, x) + \sum_i \int d^3x_i\, \Delta t_i\, G_0(x';\, \mathbf{x}_i, t_i)\, V(\mathbf{x}_i, t_i)\, G_0(\mathbf{x}_i, t_i;\, x) +$$

$$+ \sum_{\substack{ij\\(t_i>t_j)}} \int d^3x_i\, \Delta t_i\, d^3x_j\, \Delta t_j\, G_0(x';\, \mathbf{x}_i, t_i)\, V(\mathbf{x}_i, t_i) \times$$

$$\times G_0(\mathbf{x}_i, t_i;\, \mathbf{x}_j, t_j)\, V(\mathbf{x}_j, t_j)\, G_0(\mathbf{x}_j, t_j;\, x) + \ldots \quad (6.10)$$

Мы можем снять ограничения, связанные с упорядочением времени ($t_i > t_j$ и т. д.), если условимся считать $G_0(\mathbf{x}', t';\, \mathbf{x}, t) = 0$ при $t' < t$. Такое граничное условие означает, что волны распространяются только вперед во времени. Соответствующий пропагатор G_0 принято называть запаздывающим. Физически это означает, что гюйгенсовское возмущение $\Delta\psi$ от i-й итерации (в момент времени t_i) начинает распространяться только с момента t_i.

В пределе, когда взаимодействия происходят непрерывно, суммы по временным интервалам могут быть заменены интегралами по dt и мы получаем

$$G(x';\, x) = G_0(x';\, x) + \int d^4x_1\, G_0(x';\, x_1)\, V(x_1)\, G_0(x_1;\, x) +$$

$$+ \int d^4x_1\, d^4x_2\, G_0(x';\, x_1)\, V(x_1)\, G_0(x_1;\, x_2)\, V(x_2)\, G_0(x_2;\, x) + \ldots, \quad (6.11)$$

где

$$d^4x = d^3x\, dx_0 = d^3x\, dt.$$

Предполагается, что ряд (6.11), отвечающий многократному рассеянию, сходится[1]) и тогда результат его суммирования можно представить в виде уравнения

$$G(x'; x) = G_0(x'; x) + \int d^4x_1 G_0(x'; x_1) V(x_1) G(x_1; x). \quad (6.12)$$

Заметим, что не только $G_0(x'; x)$, но также и $G(x'; x)$ обращается в нуль при $t' < t$ в соответствии с нашим простейшим принципом причинности.

Уравнение (6.12) позволяет методом итераций выразить G через V и G_0 и тем самым построить волновую функцию $\psi(x', t')$, если она известна в более ранний момент времени. В частности, для решения задачи рассеяния мы должны найти волну в отдаленном будущем по заданному волновому пакету $\varphi(\mathbf{x}, t)$, описывающему частицу, которая в отдаленном прошлом приближается к области взаимодействия. Чтобы задача рассеяния была поставлена правильно, взаимодействие в начальный момент должно отсутствовать; тогда φ будет решением уравнения для свободной частицы и требуемые начальные условия удовлетворены.

Математически такую постановку задачи удобно осуществить путем локализации взаимодействия во времени[2]), адиабатически включая $V(\mathbf{x}, t)$ при $t \to -\infty$; тогда в отдаленном прошлом точное решение ψ приближается к φ и рассеянная волна отсутствует. В более поздний момент времени $\psi(\mathbf{x}', t')$ дается выражением (6.1):

$$\psi(\mathbf{x}', t') = \lim_{t \to -\infty} i \int d^3x\, G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (6.13)$$

Выражая G через G_0 согласно (6.12), находим

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}', t') &= \lim_{t \to -\infty} i \int d^3x \Big[G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) + \\ &\quad + \int d^4x_1 G_0(\mathbf{x}', t'; 1) V(1) G(1; \mathbf{x}, t)\Big] \varphi(\mathbf{x}, t) = \\ &= \varphi(\mathbf{x}', t') + \int d^4x_1\, G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_1, t_1) V(\mathbf{x}_1, t_1) \psi(\mathbf{x}_1, t_1). \quad (6.14)\end{aligned}$$

В действительности не получено никакого решения, поскольку неизвестная функция ψ фигурирует под знаком интеграла в правой части. Мы, однако, имеем такую формулировку задачи, ко-

[1]) Здесь мы пренебрегаем возможностью существования в потенциале V связанных состояний.

[2]) С таким же успехом можно строить волновые пакеты, локализованные в пространстве и удаленные в начальный момент времени от области взаимодействия.

торая включает требуемые граничные условия и позволяет немедленно получить приближенное решение, если возмущающий потенциал V мал.

Мы в первую очередь интересуемся видом рассеянной волны при $t' \to \infty$. В этом предельном случае частица покидает область взаимодействия и ψ снова становится решением уравнения для свободной частицы. Чтобы это условие выполнялось, мы, как и прежде, адиабатически выключаем взаимодействие при $t' \to +\infty$. Вся информация о рассеянной волне заключена в амплитудах перехода при $t' \to +\infty$ в различные конечные свободные состояния

$$\varphi_f(x', t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}' - i\omega_f t'} \tag{6.15}$$

из заданной падающей волны φ_i; в частности, мы можем пользоваться плоскими волнами[1]). Амплитуда перехода для заданных (f, i) является элементом матрицы рассеяния и дается выражением

$$\begin{aligned} S_{fi} = \lim_{t' \to \infty} \int \varphi_f^*(\mathbf{x}', t') \psi_i^{(+)}(\mathbf{x}', t')\, d^3x' = \\ = \lim_{t' \to \infty} \int d^3x' \varphi_f^*(\mathbf{x}', t') \Big[\varphi_i(\mathbf{x}', t') + \\ + \int d^4x\, G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) V(\mathbf{x}, t) \psi_i^{(+)}(\mathbf{x}, t) \Big] = \\ = \delta^3(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) + \lim_{t' \to \infty} \int d^3x'\, d^4x\, \varphi_f^*(\mathbf{x}', t') G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) \times \\ \times V(\mathbf{x}, t) \psi_i^{(+)}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{6.16}$$

где $\psi_i^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ есть такое решение волнового уравнения (6.14), которое при $t \to -\infty$ переходит в плоскую волну с импульсом $\mathbf{k}_i$. Под сокращенной записью $t \to \pm\infty$ мы подразумеваем, что t стремится к такому большому конечному значению, когда частицы находятся вне области взаимодействия (иначе говоря,

---

[1]) В (6.15) решение в виде плоской волны нормировано на δ-функцию. Иногда пользуются нормировкой в ящике; при этом

$$(2\pi)^{-3/2} \to V^{-1/2},$$

где V — объем ящика, в котором заключено физическое взаимодействие. Если пользоваться нормировкой в ящике, то δ-функция в (6.16) заменяется δ-символом Кронекера

$$\delta_{\mathbf{k}_f \mathbf{k}_i} = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{k}_f = \mathbf{k}_i, \\ 0 & \text{при } \mathbf{k}_f \neq \mathbf{k}_i. \end{cases}$$

когда V выключается). В частности, $t \to \pm\infty$ может означать времена, когда частицы рождаются и регистрируются.

Путем итерации уравнения (6.14) мы можем разложить $\psi^{(+)}$ в ряд многократного рассеяния, члены которого будут отвечать диаграммам, изображенным на рис. 6.1.

§ 22. Формальное определение и свойства функции Грина

С физической точки зрения мы подготовили все необходимое для решения задачи рассеяния. Теперь мы построим формальный математический аппарат, позволяющий получать эти решения. Наша цель — исследовать дифференциальное уравнение, определяющее G, и, в частности, получить явное решение для G_0. Тогда можно будет произвести разложение G, о котором говорилось выше. Начнем с уравнения (6.1), справедливого при $t' > t$, и перепишем его в виде, справедливом при любых t' и t:

$$\theta(t'-t)\,\psi(x') = i\int d^3x\, G(x';\, x)\,\psi(x); \tag{6.17}$$

здесь $\theta(t'-t)$ — единичная ступенчатая функция, определенная согласно

$$\theta(t'-t) = \begin{cases} 1, & t' > t, \\ 0, & t' < t. \end{cases} \tag{6.18}$$

Она имеет следующее очень полезное интегральное представление:

$$\theta(\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\varepsilon}. \tag{6.19}$$

Расположение контура интегрирования в комплексной плоскости ω показано на рис. 6.2.

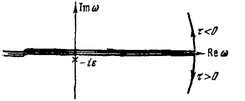


Рис. 6.2. Контур интегрирования в комплексной плоскости для единичной функции-ступеньки $\theta(\tau)$.

При $\tau > 0$ контур замыкается бесконечной полуокружностью в нижней полуплоскости, чтобы обеспечить экспоненциальное затухание подынтегрального выражения, и значение интеграла равно 1 согласно теореме Коши. При $\tau < 0$ контур замыкается в верхней полуплоскости и значение интеграла равно нулю, поскольку полюс в точке $-i\varepsilon$ оказывается вне контура. Вследствие того, что $\theta(\tau)$ испытывает единичный скачок при $\tau = 0$, ее производная есть δ-функция

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau}. \tag{6.20}$$

Теперь, пользуясь (6.17), мы попытаемся получить для функции $G(x'; x)$ дифференциальное уравнение и исследовать ее формальные свойства. Как известно, $\psi(x')$ удовлетворяет уравнению Шредингера, поэтому применим к (6.17) оператор $\left[i\frac{\partial}{\partial t'} - H(x')\right]$:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t'} - H(x')\right]\theta(t'-t)\,\psi(x') = i\delta(t'-t)\,\psi(x') =$$
$$= i\int d^3x \left[i\frac{\partial}{\partial t'} - H(x')\right] G(x'; x)\,\psi(x). \tag{6.21}$$

Поскольку это равенство справедливо для любого решения ψ, из него можно получить уравнение для шредингеровской функции Грина

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t'} - H(x')\right] G(x'; x) = \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\,\delta(t'-t) = \delta^4(x'-x). \tag{6.22}$$

Это уравнение вместе с граничным условием, отвечающим распространению вперед во времени,

$$G(x'; x) = 0 \quad \text{при} \quad t' < t, \tag{6.23}$$

определяет запаздывающую функцию Грина, или пропагатор, соответствующий уравнению (6.17).

Для свободной частицы, когда гамильтониан есть $H_0(x') = -\frac{1}{2m}\nabla^2_{x'}$, уравнение для функции Грина может быть решено явно. В этом случае $G_0(x'; x)$ зависит только от разности координат точек $(\mathbf{x}', t')$ и $(\mathbf{x}, t)$. Это связано с тем, что волна в $(\mathbf{x}', t')$ от единичного источника, расположенного в $\mathbf{x}$ и включаемого в момент t, зависит лишь от интервала $(\mathbf{x}' - \mathbf{x}; t' - t)$, а функция $G_0(x'; x)$ есть не что иное, как амплитуда этой волны. Рассмотрим фурье-преобразование

$$G_0(x'; x) = G_0(x'-x) = \int \frac{d^3p\, d\omega}{(2\pi)^4}\, e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) - i\omega(t'-t)}\, G_0(\mathbf{p}, \omega). \tag{6.24}$$

Уравнение (6.22), записанное для $G_0(\mathbf{p}, \omega)$, имеет вид

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{2m}\nabla^{2'}\right) G_0(x';\, x) = \\ = \int \frac{d^3p\, d\omega}{(2\pi)^4}\left(\omega - \frac{p^2}{2m}\right) G_0(\mathbf{p}, \omega)\, e^{-i\omega(t'-t) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} = \\ = \int \frac{d^3p\, d\omega}{(2\pi)^4} e^{-i\omega(t'-t) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}.$$

Следовательно, для $\omega \neq p^2/2m$

$$G_0(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\omega - p^2/2m}. \tag{6.25}$$

Это выражение необходимо дополнить правилом обращения с особенностью в нуле знаменателя. Оно вытекает из граничного условия запаздывания (6.23).

Вспоминая сказанное по поводу представления θ-функции в виде (6.19), введем в знаменатель бесконечно малую положительную мнимую добавку и проведем интегрирование в (6.24).

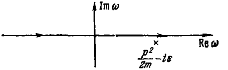


Рис. 6.3. Особенность функции $G_0(\mathbf{p}, \omega)$.

Особенность лежит ниже действительной оси, как показано на рис. 6.3, и мы получаем

$$G_0(x' - x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t'-t)}}{\omega - (p^2/2m) + i\varepsilon} = \\ = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) - i\frac{p^2}{2m}(t'-t)}\theta(t'-t) = \\ = -i\theta(t'-t)\int d^3p\, \varphi_p(\mathbf{x}', t')\, \varphi_p^*(\mathbf{x}, t), \tag{6.26}$$

где в последней форме записи использовано обозначение (6.15).

Полученное равенство — один из примеров (для случая плоских волн) выражения функции Грина в виде суммы по полному набору собственных функций соответствующего дифференциального уравнения[1]). В общем случае, если мы можем по-

[1]) Функцию Грина для свободной частицы можно записать в замкнутой форме

$$G_0(\mathbf{x}', t';\, \mathbf{x}, t) = -i\left(\frac{m}{2\pi i(t'-t)}\right)^{3/2}\left\{\exp\left[\frac{im\,|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|^2}{2(t'-t)}\right]\right\}\theta(t'-t).$$

строить полный набор нормированных решений уравнения Шредингера, который удовлетворяет условию полноты

$$\sum_n \psi_n(\mathbf{x}', t)\,\psi_n^*(\mathbf{x}, t) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{6.27}$$

где $\sum\limits_n$ обозначает как сумму, так и интеграл по непрерывному спектру, то функция

$$G(x'; x) = -i\theta(t' - t)\sum_n \psi_n(x')\,\psi_n^*(x) \tag{6.28}$$

удовлетворяет уравнению (6.22) с требуемым граничным условием. Выражение (6.26) для G_0 получается отсюда как частный случай, если учесть, что для непрерывного спектра $\sum\limits_n \to \int d^3p$.

Из вида выражений (6.26) и (6.28) следует, что та же самая функция Грина, которая описывает развитие решения уравнения Шредингера в прямом направлении во времени, описывает развитие комплексно-сопряженного решения в обратной временно́й последовательности. Умножая (6.28) на $\psi_m(x)$, интегрируя по $\mathbf{x}$ и используя ортонормированность собственных функций, мы вновь приходим к уравнению (6.17):

$$i\int d^3x\, G(x'; x)\,\psi_m(x) = \theta(t' - t)\sum_n \psi_n(x')\int d^3x\,\psi_n^*(x)\,\psi_m(x) =$$
$$= \theta(t' - t)\,\psi_m(x').$$

Проделаем ту же операцию, но только умножая на $\psi_m^*(x')$ и интегрируя по $\mathbf{x}'$. Получим

$$i\int d^3x'\,\psi_m^*(x')\,G(x'; x) = \theta(t' - t)\,\psi_m^*(x). \tag{6.29}$$

Мы используем эти соотношения для получения различных полезных представлений S-матрицы.

Из (6.17) и определения (6.16) можно получить компактное выражение для S-матрицы через точный пропагатор:

$$S_{fi} = i\lim_{t'\to\infty}\lim_{t\to-\infty}\int d^3x'\,d^3x\,\varphi_f^*(x')\,G(x'; x)\,\varphi_i(x). \tag{6.30}$$

Однако такая запись еще не приносит пользы, поскольку мы, вообще говоря, не умеем находить точный пропагатор. Из (6.28)

Эта формула напоминает выражение, получаемое в теории броуновского движения для вероятности того, что частица, находившаяся в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t, под влиянием случайных воздействий достигнет точки $\mathbf{x}'$ в момент времени t'. Единственное отличие состоит в замене (t, t') на $(-it, -it')$. Та же самая замена переводит уравнение Шредингера в уравнение диффузии.

ясно, какая богатая информация заключена в $G(x'; x)$. В $G(x'; x)$ с равными весами входят все решения уравнения Шредингера, включая те, которые отвечают связанным состояниям. Поэтому нет ничего удивительного в том, что найти G очень трудно.

Поступим так же, как мы действовали, когда из интуитивных соображений получали равенство (6.11). Тогда мы воспользовались методом итераций, начав с функции Грина для свободной частицы.

Записав H в виде $H = H_0 + V$, перегруппируем члены в уравнении (6.22):

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t'} - H_0(x')\right] G(x'; x) = \delta^4(x' - x) + V(x')\, G(x'; x) =$$
$$= \int d^4x''\, \delta(x' - x'')\,[\delta^4(x'' - x) + V(x'')\, G(x''; x)]. \tag{6.31}$$

В правой части в член, содержащий взаимодействие, мы ввели δ-источник. Тогда интеграл в (6.31) можно выразить через свободный пропагатор и в итоге мы получим

$$G(x'; x) = \int d^4x''\, G_0(x'; x'')\,[\delta^4(x'' - x) + V(x'')\, G(x''; x)] =$$
$$= G_0(x'; x) + \int d^4x''\, G_0(x'; x'')\, V(x'')\, G(x''; x), \tag{6.32}$$

что согласуется с (6.12). Подставляя (6.32) в (6.30) и используя равенства (6.17) и (6.29) для свободных частиц, имеем

$$S_{fi} = \int d^3x\, \varphi_f^*(x)\, \varphi_i(x) + \lim_{t \to -\infty} \int d^4x_1\, d^3x\, \varphi_f^*(x_1)\, V(x_1)\, G(x_1; x)\, \varphi_i(x) =$$
$$= \delta_{fi} - i\int d^4x_1\, \varphi_f^*(1)\, V(1)\, \varphi_i(1) -$$
$$- i\int d^4x_1\, d^4x_2\, \varphi_f^*(1)\, V(1)\, G_0(1, 2)\, V(2)\, \varphi_i(2) -$$
$$- i\int d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_3\, \varphi_f^*(1)\, V(1)\, G_0(1,2)\, V(2)\, G_0(2,3)\, V(3)\, \varphi_i(3) + \ldots \tag{6.33}$$

Этот ряд многократного рассеяния почленно совпадает с рядом, получаемым из (6.16). Как и (6.16), его можно просуммировать, воспользовавшись решением точного уравнения Шредингера. Для этого заметим, что в первом звене равенств (6.33) можно, обратившись к (6.17) и выключив взаимодействие, записать

$$\lim_{t \to -\infty} \int d^3x\, G(x''; x)\, \varphi_i(x) = \lim_{t \to -\infty} \int d^3x\, G(x''; x)\, \psi_i(x) = -i\psi_i(x''),$$

Тогда уравнение (6.33) переходит в

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i\int d^4x''\, \varphi_f^*(x'')\, V(x'')\, \psi_i^{(+)}(x''), \tag{6.34}$$

где $\psi_i^{(+)}(x'')$ есть решение, которое при $t'' \to -\infty$ переходит в свободную волну (см. (6.14)):

$$\psi_i^{(+)}(x'') = \varphi_i(x'') + \int d^4x\, G_0(x''; x)\, V(x)\, \psi_i^{(+)}(x).$$

Уравнения (6.34) вместе с (6.14) и (6.30) вместе с (6.32) являются эквивалентными формами записи S-матрицы; оба эти представления приводят к ряду многократного рассеяния (6.33).

В практических вычислениях мы будем обычно сохранять только первый или два первых неисчезающих для данного взаимодействия члена в выражении (6.33) для S-матрицы. Насколько это правомерно, зависит от малости взаимодействия V и быстроты сходимости данного ряда по степеням константы взаимодействия.

Общим свойством S-матрицы, которое следует из сохранения вероятности, является унитарность. Из вводных замечаний к гл. 1 мы помним, что из эрмитовости гамильтониана вытекает сохранение вероятности. Поэтому скалярное произведение не зависит от времени и мы имеем

$$\int d^3x\, \psi_i^{(+)*}(x)\, \psi_j^{(+)}(x) = \lim_{t\to-\infty} \int d^3x\, \psi_i^{(+)*}(x)\, \psi_j^{(+)}(x) = \\ = \lim_{t\to-\infty} \int d^3x\, \varphi_i^*(x)\, \varphi_j(x) = \delta_{ji}. \tag{6.35}$$

В частности, для плоских волн

$$\delta_{fi} = \delta^3(\boldsymbol{k}_f - \boldsymbol{k}_i).$$

Мы также можем вычислить это скалярное произведение в далеком будущем, и тогда, согласно (6.16) и условию полноты (6.27) для функций φ, решения $\psi_i^{(+)}$ допускают разложение по плоским волнам с элементами S-матрицы в качестве коэффициентов разложения:

$$\lim_{t'\to+\infty} \psi_i^{(+)}(x') = \sum_n \varphi_n(x')\, S_{ni}, \tag{6.36}$$

$\left(\text{где } \sum_n = \int d^3p \text{ для представления плоских волн}\right)$.

Подставляя (6.36) в левую часть (6.35), находим

$$\sum_n S_{ni} S_{nj}^* = \delta_{ji} \tag{6.37}$$

или, в матричных обозначениях, $S^+S = 1$.

Если, подобно φ_n в (6.36), функции $\psi_i^{(+)}(x)$ образуют **полный** набор, то $S^{+}=S^{-1}$ и мы приходим к выводу об **унитарности** S-матрицы[1]).

§ 23. Функция распространения в теории позитрона

Теперь мы обобщим рассмотренный в рамках нерелятивистской теории метод функции распространения на случай релятивистской теории электрона. Отправным пунктом нам послужит представление о нерелятивистском пропагаторе $G(x'; x)$ как амплитуде вероятности распространения волны-частицы из x в x'. Эта амплитуда, определяемая выражением (6.11), является суммой амплитуд, n-й член которой есть произведение величин, изображенных на диаграмме рис. 6.4. На этом рисунке каждая линия соответствует амплитуде $G_0(x_i, x_{i-1})$ свободного распространения волны, испущенной в точке x_{i-1} до точки x_i. В точке x_i (обозначаемой кружка́ми) эта волна рассеивается с амплитудой вероятности $V(x_i)$ на единицу объема в четырехмерном пространстве-времени и превращается в новую волну, распространяющуюся с амплитудой $G_0(x_{i+1}; x_i)$ вперед во времени до следующего взаимодействия. Затем полученная таким способом амплитуда суммируется по всем точкам в пространстве-времени, в которых может произойти взаимодействие. Можно сказать, что взаимодействие в i-й точке, или вершине, уничтожает частицу, дошедшую до точки x_i, и создает частицу, которая распространяется до точки x_{i+1}, где $t_{i+1} \geqslant t_i$.

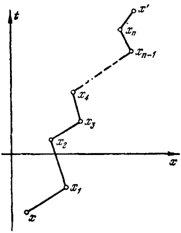


Рис. 6.4. Вклад n-го порядка в $G(x, x')$.

Такую картину мы сохраним и в дираковской теории дырок. Она хорошо соответствует релятивистской теории, поскольку описывает процесс одновременно в пространстве и во времени, в противоположность гамильтонову формализму, в котором упор делается на временно́м ходе процесса. Наша цель состоит в том, чтобы по аналогии с нерелятивистским методом функции

[1]) Если имеются связанные состояния, то сумма в (6.27) должна включать дискретный спектр. Это никак не влияет на доказательство унитарности.

распространения получить правила расчета различных процессов в дираковской теории дырок. Однако задача осложняется существованием процессов рождения и аннигиляции, которые также должны быть включены в описание. Основное правило, которым мы будем руководствоваться в такой ситуации, состоит просто в том, что вычисления с пропагатором должны согласовываться с динамикой уравнения Дирака, общими постулатами, сформулированными в гл. 1, и поправками, внесенными в них при обсуждении позитронов в гл. 5. В этой и последующих главах мы будем полагаться больше на интуитивные соображения, чем строгие выводы[1]).

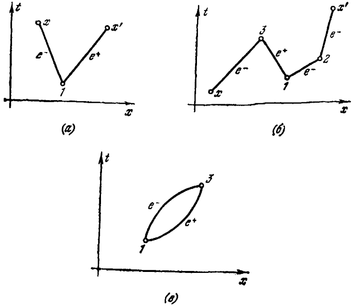


Рис. 6.5. Примеры пространственно-временных диаграмм в теории позитрона. Диаграмма (*а*) отвечает рождению пары, (*б*) — рассеянию и (*в*) — замкнутой петле.

Посмотрим на картинки типичных процессов, описываемых в теории позитронов. Помимо процессов рассеяния типа изображенного на рис. 6.4, имеется еще рождение пар и аннигиляция, иллюстрацией которых служит рис. 6.5. Диаграмма 6.5, *а*

[1]) Строгий вывод этих правил дается в систематическом, но сложном изложении формальной квантовой теории поля в цитированной выше книге [50].

изображает рождение электрон-позитронных пар в потенциале, действующем в точке 1; две частицы затем распространяются до точек x и x' соответственно. Диаграмма 6.5, *б* изображает электрон, распространение которого начинается в точке x и заканчивается в x'. Между этими точками потенциал в точке 1 рождает пару; позитрон из этой пары аннигилирует с первоначальным электроном в поле, действующем в точке 3; электрон из пары распространяется до точки 2, где он разрушается потенциалом. Этот потенциал рождает электрон, достигающий x'. На диаграмме 6.5, *в* показано рождение пары в точке 1 и распространение ее до точки 3, где происходит аннигиляция в поле.

Из этих диаграмм видно, что нам надо иметь не только амплитуду рождения электрона, скажем в точке 1, распространения его из 1 в 2 и уничтожения в точке 2, как в нерелятивистском случае, но также и амплитуду рождения, распространения и уничтожения позитрона. Если эти амплитуды для позитронов будут найдены, можно попытаться сопоставить каждому из изображенных на рис. 6.5 процессов свою амплитуду вероятности и построить полную амплитуду любого заданного процесса путем суммирования или интегрирования по всем промежуточным траекториям, которые дают вклад в этот процесс. Так, например, в рассеяние дают вклад траектории двух типов, изображенные на рис. 6.4 и 6.5, *б*.

Мы должны определить позитронную амплитуду в соответствии со сформулированной в предыдущей главе теорией дырок. Поскольку существование позитрона рассматривается как отсутствие электрона с отрицательной энергией из заполненного моря, мы можем считать уничтожение позитрона в точке 3 на рис. 6.5 эквивалентным рождению в этой точке электрона с отрицательной энергией. Отсюда следует возможность того, что амплитуда рождения позитрона в 1 и уничтожения его в 3 связана с амплитудой рождения электрона с отрицательной энергией в 3 и уничтожения его в 1. Тогда диаграммы рис. 6.5 соответствуют распространению вперед во времени электронов с положительной энергией и назад во времени электронов с отрицательной энергией. Диаграмму 6.5, *а*, которая описывает рождение пары, можно рассматривать как рождение в точке x' электрона с отрицательной энергией, распространение его назад во времени до точки 1, где он уничтожается, и распространение вперед во времени электрона с положительной энергией до точки x. В процессе рассеяния электрон, распространившийся до точки 3, может либо рассеяться на потенциале в положительном направлении в пространстве-времени, как на рис. 6.4, и распространяться далее с положительной энергией, либо рассеяться с отрицательной энергией назад в точке 1, как на рис. 6.5, *б*.

Вдобавок к электронным траекториям в виде зигзагов вперед и назад во времени имеются еще траектории в форме замкнутых петель типа показанной на рис. 6.5, *в*. В теории дырок этой траектории отвечает следующий процесс: в точке *1* электрон из моря с отрицательной энергией рассеивается на потенциале и попадает в состояние с положительной энергией, а затем в точке *3* он рассеивается обратно в море. На языке функции распространения мы скажем, что электрон, родившийся в *1*, рассеивается назад во времени в *3* и уничтожается в *1*. Процессы такого типа нельзя пренебрегать. Их требует формализм теории, а эксперимент, как мы в дальнейшем убедимся, подтверждает их существование.

Начнем осуществление намеченной программы с построения функции Грина для описания распространения электронов и позитронов. Будем руководствоваться результатами рассмотрения позитронов в гл. 5 и итогами исследования метода функции распространения в нерелятивистской теории в настоящей главе.

Нерелятивистский пропагатор определялся уравнением (6.22). По аналогии определим релятивистский пропагатор $S'_F(x';\, x)$ как решение уравнения

$$\sum_{\lambda=1}^{4}\left[\gamma_\mu\left(i\frac{\partial}{\partial x'_\mu}-eA^\mu(x')\right)-m\right]_{\alpha\lambda} S'_{F_{\lambda\beta}}(x';\, x)=\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x'-x). \quad (6.38)$$

Определенный таким образом пропагатор есть матрица той же размерности 4×4, что и матрицы γ. Перепишем (6.38) в матричных обозначениях, опуская индексы:

$$(i\hat{\nabla}'-e\hat{A}'-m)\,S'_F(x',\, x)=\delta^4(x'-x). \quad (6.39)$$

Другое отличие от (6.22) состоит в том, что в (6.38) оператор $i\frac{\partial}{\partial t'}-H(x')$ умножается на γ^0, чтобы получить ковариантный оператор $(i\hat{\nabla}'-e\hat{A}'-m)$.

Пропагатор для свободной частицы

$$(i\hat{\nabla}'-m)\,S_F(x',\, x)=\delta^4(x'-x) \quad (6.40)$$

можно найти путем фурье-преобразования к импульсному пространству. Как и в нерелятивистском случае (6.24), он зависит только от разности $(x'-x)$, поэтому [1])

$$S_F(x',\, x)=S_F(x'-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ip\cdot(x'-x)}S_F(p). \quad (6.41)$$

[1]) Здесь и далее мы пользуемся четырехмерным обозначением

$$p\cdot x=p_\mu x^\mu=p_0t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}.$$

Подстановка в (6.40) дает

$$\sum_{\lambda=1}^{4} (\hat{p} - m)_{\alpha\lambda} S_{F_{\lambda\beta}}(p) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Разрешая это уравнение относительно $S_F(p)$ и вновь возвращаясь к матричным обозначениям, имеем

$$S_F(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} \equiv \frac{1}{\hat{p} - m}, \quad \text{если} \quad p^2 \neq m^2. \tag{6.42}$$

Для полноты определения необходимо указать, как поступать с сингулярностью при $p^2 = m^2$, т. е. при $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm E$. Из нерелятивистской теории мы помним, что ответ на этот вопрос следует из граничных условий, налагаемых на $S_F(x' - x)$ при интегрировании (6.41).

По своему физическому смыслу $S_F(x' - x)$ есть волна, вызываемая в точке x' единичным источником, расположенным в точке x. Значительная часть фурье-компонент такого локализованного точечного источника содержит значения импульса, большие, чем m, обратная комптоновская длина волны электрона. Следует поэтому ожидать, что наряду с электронами такой источник будет создавать позитроны. Однако в теории дырок имеется необходимое физическое условие, состоящее в том, что волна, распространяющаяся из точки x в будущее, содержит электронные и позитронные компоненты только с положительной энергией. Позитроны и электроны с положительной энергией описываются волновыми функциями с положительно-частотной зависимостью от времени. Например,

$$\begin{aligned} \psi_c^{(+)}(x) &= C\bar{v}^T(p)\, e^{-ip\cdot x}, \\ \psi^{(+)}(x) &= u(p)\, e^{-ip\cdot x} \end{aligned} \tag{6.43}$$

есть соответственно (ненормированные) волновые функции позитронов и электронов с импульсом p^μ и $p^0 > 0$. Поэтому $S_F(x' - x)$ может содержать в будущем, при $x_0' > x_0$, только положительно-частотные компоненты.

Чтобы обеспечить это, вернемся к фурье-разложению $S_F(x' - x)$ (6.41) и (6.42) и проведем интегрирование по dp_0 вдоль изображенного на рис. 6.6 контура в комплексной плоскости p_0. При $t' > t$ контур замыкается в нижней полуплоскости и содержит только положительно-частотный полюс при $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = E$. В результате имеем

$$S_F(x' - x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \int\limits_C \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t' - t)}}{p^2 - m^2} (\hat{p} + m) =$$

$$= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} e^{-iE(t' - t)} \frac{E\gamma_0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m}{2E}, \quad t' > t. \tag{6.44}$$

Отсюда видно, что волна в точке $(\mathbf{x}', t')$ содержит только положительно-частотные компоненты. При $t' < t$ контур можно замкнуть сверху, захватив полюс в точке $p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Это дает

$$S_F(x' - x) =$$
$$= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} e^{+iE(t'-t)} \frac{(-E\gamma_0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m)}{2E}, \quad (t' < t). \tag{6.45}$$

Следовательно, при $t' < t$ пропагатор содержит волны только с отрицательными частотами.

Такие волны с отрицательной энергией, отсутствующие в нерелятивистской теории, оказываются здесь неизбежными. Любой другой выбор контура C в (6.44) приводит либо к распространяющимся в будущее волнам с отрицательной энергией, либо к волнам с положительной энергией, распространяющимся в прошлое. Более того, появление волн с отрицательной энергией, распространяющихся в прошлое, является достоинством: они представляют собой позитроны с положительной энергией.

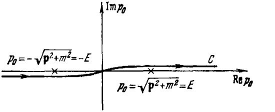


Рис. 6.6. Расположение особенностей относительно контура интегрирования для величины $S_F(p)$.

Это станет более очевидным, когда мы применим метод функции распространения к задачам рассеяния. Причиной появления волн с отрицательной энергией является полюс при $p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, который отсутствовал в нерелятивистской теории.

Выбор контура C можно фиксировать введением в знаменатель (6.42) малой положительной комплексной добавки или просто заменой $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$, подразумевая предел при $\varepsilon \to 0+$:

$$S_F(x' - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} (\hat{p} + m). \tag{6.46}$$

Формулы (6.44) и (6.45) можно объединить путем введения проекционных операторов (3.18) и замены $\mathbf{p}$ на $-\mathbf{p}$

в отрицательно-частотной части:

$$S_F(x'-x) = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{E}\right)[\Lambda_+(p)\,e^{-ip\cdot(x'-x)}\,\theta(t'-t) + \\ + \Lambda_-(p)\,e^{+ip\cdot(x'-x)}\,\theta(t-t')], \qquad (6.47)$$

где $p_0 = E > 0$. Другую, эквивалентную форму записи мы получим, если воспользуемся нормированными решениями в виде плоских волн

$$\psi_p^r(x) = \sqrt{\frac{m}{E}}\,(2\pi)^{-3/2}\,w^r(\mathbf{p})\,e^{-i\varepsilon_r p\cdot x}.$$

Тогда для $S_F(x'-x)$ находим

$$S_F(x'-x) = -i\theta(t'-t)\int d^3p\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x')\,\bar\psi_p^r(x) + \\ + i\theta(t-t')\int d^3p\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x')\,\bar\psi_p^r(x) \qquad (6.48)$$

и с помощью (3.11) убеждаемся в том, что $S_F(x'-x)$ описывает развитие решения с положительной энергией $\psi^{(+)}$ от прошедшего к будущему и решения с отрицательной энергией в обратном направлении:

$$\theta(t'-t)\,\psi^{(+)}(x') = i\int S_F(x'-x)\,\gamma_0\psi^{(+)}(x)\,d^3x, \qquad (6.49)$$

$$\theta(t-t')\,\psi^{(-)}(x') = -i\int S_F(x'-x)\,\gamma_0\psi^{(-)}(x)\,d^3x. \qquad (6.50)$$

Определенную таким образом функцию $S_F(x'-x)$ принято называть фейнмановским пропагатором. Он был впервые введен в теорию позитронов в 1942 г. Штюкельбергом и, независимо, в 1948 г. — Фейнманом, который использовал его во многих расчетах.

С помощью свободного пропагатора $S_F(x'-x)$ мы можем формально построить полную функцию Грина и элементы S-матрицы, т. е. амплитуды различных процессов рассеяния с участием электронов и позитронов в присутствии внешних полей. Для этого надо проделать такие же выкладки, как в нерелятивистском случае.

Точный фейнмановский пропагатор $S_F'(x'-x)$ удовлетворяет уравнению (6.39) и по аналогии с (6.31) и (6.32) может быть представлен в виде суперпозиции свободных фейнмановских пропагаторов. Имеем

$$(i\hat\nabla_{x'} - m)\,S_F'(x';x) = \int d^4y\,\delta^4(x'-y)\,[\delta^4(y-x) + e\hat A(y)\,S_F'(y;x)].$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$S'_F(x';\,x) = S_F(x'-x) + e\int d^4y\, S_F(x'-y)\,\hat{A}(y)\,S'_F(y,\,x). \qquad (6.51)$$

Подобно (6.14), точное решение уравнения Дирака

$$(i\hat{\nabla}_x - m)\,\Psi(x) = e\hat{A}\Psi(x) \qquad (6.52)$$

с фейнмановскими граничными условиями имеет вид

$$\Psi(x) = \psi(x) + e\int d^4y\, S_F(x-y)\,\hat{A}(y)\,\Psi(y). \qquad (6.53)$$

Рассеянная волна в (6.53) содержит только положительные частоты в будущем и отрицательные в прошлом в соответствии с (6.48):

$$\Psi(x) - \psi(x) \to \int d^3p \sum_{r=1}^{2} \psi_p^r(x)\Big[-ie\int d^4y\, \bar{\psi}_p^r(y)\,\hat{A}(y)\,\Psi(y)\Big]$$
$$\text{при } t\to+\infty, \qquad (6.54)$$

$$\Psi(x) - \psi(x) \to \int d^3p \sum_{r=3}^{4} \psi_p^r(x)\Big[+ie\int d^4y\, \bar{\psi}_p^r(y)\,\hat{A}(y)\,\Psi(y)\Big]$$
$$\text{при } t\to-\infty. \qquad (6.55)$$

Таким образом, полученная нами формулировка задачи рассеяния (6.54) согласуется с тем требованием теории дырок, что электроны не могут после рассеяния во внешнем поле $A^\mu(y)$ попасть в море с отрицательной энергией; доступными для них оказываются только незаполненные состояния с положительной энергией. Уравнение (6.55) показывает, что волны, рассеянные *назад, от будущего к прошедшему,* имеют отрицательные энергии.

Из (6.54) и (6.55) следует, что элементы S-матрицы можно отождествить с коэффициентами при свободных решениях $\psi^r(x)$, т. е.

$$S_{fi} = \delta_{fi} - ie\varepsilon_f\int d^4y\, \bar{\psi}_f(y)\,\hat{A}(y)\,\Psi_i(y). \qquad (6.56)$$

Здесь $\psi_f(y)$ представляет собой конечную свободную волну с квантовыми числами f; $\varepsilon_f = +1$ для решения, положительно-частотного в будущем, и $\varepsilon_f = -1$ для отрицательно-частотного в прошлом решения. В соответствии с налагаемым на решение (6.53) фейнмановским граничным условием $\Psi_i(y)$ это падающая волна, которая при $y_0\to-\infty$ переходит в $\psi_i(y)$, падающую волну с квантовыми числами i и положительной частотой, или при $y_0\to+\infty$ — в отрицательно-частотную волну, распространяющуюся из будущего в прошедшее.

В уравнениях (6.56) и (6.53) заключены правила вычисления амплитуд рождения пар и аннигиляции (см. рис. 6.5), так же как и амплитуды — «обычного» процесса рассеяния (см. рис. 6.4).

Рассмотрим сначала обычный процесс рассеяния электрона. Тогда $\Psi_i(y)$ при $y_0 \to -\infty$ переходит в падающую плоскую волну с положительной энергией $\psi_i^{(+)}(y)$ и вклад n-го порядка в (6.56) равен

$$- ie^n \iint d^4y_1 \ldots d^4y_n \bar{\psi}_f^{(+)}(y_n) \hat{A}(y_n) S_F(y_n - y_{n-1}) \hat{A}(y_{n-1}) \ldots$$
$$\ldots S_F(y_2 - y_1) \hat{A}(y_1) \psi_i^{(+)}(y_1). \quad (6.57)$$

Ряд (6.57) содержит как диаграммы типа изображенной на рис. 6.4, так и такие, как на рис. 6.5, *б*.

Для расчета рождения пары мы подставляем в (6.56) вместо $\Psi_i(y)$ решение, которое при $t \to +\infty$ переходит в плоскую волну с отрицательной энергией. В частности, в случае рождения электрон-позитронной пары с квантовыми числами $(\mathbf{p}_-, s_-)$ и $(\mathbf{p}_+, s_+)$ соответственно (где $p_{0\pm} > 0$), мы подставляем в (6.56) вместо $\Psi_i(y)$ решение уравнения (6.53), которое при $t \to +\infty$ переходит в плоскую волну с отрицательной энергией и квантовыми числами $(+\mathbf{p}_+, +s_+, \varepsilon = -1)$, т. е.

$$\psi_i^{(-)}(y) = \sqrt{\frac{m}{E_+}} (2\pi)^{-3/2} v(p_+, s_+) e^{+ip_+ \cdot x}.$$

В качестве $\bar{\psi}_f$ мы возьмем решение с положительной энергией, характеризуемое $(\mathbf{p}_-, s_-, \varepsilon = 1)$. Согласно тем основным правилам, к которым мы пришли при обсуждении теории дырок, отсутствие электрона с отрицательной энергией, 4-импульсом $-p_+$ и спином $-s_+$ воспринимается как присутствие позитрона с 4-импульсам p_+ и поляризацией s_+. В методе функции распространения мы отождествили амплитуду рождения позитрона в точке x, распространения его вперед в пространстве-времени из области взаимодействия и достижения им точки x', куда он попадает в виде плоской волны, характеризуемой $(\mathbf{p}_+, s_+)$, с амплитудой распространения электрона с отрицательной энергией, 4-импульсом $-p_+$ и спином $-s_+$ из точки x' назад в область взаимодействия, где он уничтожается в точке x. Таким образом, чтобы связать с процессом рождения пары амплитуды перехода, надо проследить за путем электрона с отрицательной энергией назад во времени в область взаимодействия; там он рассеивается в поле и испускается с положительной энергией, распространяясь вперед во времени. Соответствующие фейнмановские диаграммы в двух низших порядках изображены на рис. 6.7, причем амплитуда во втором порядке в свою очередь разлагается на две, отличающиеся временнóй последовательностью двух актов рассеяния.

Аналогичным образом для нахождения амплитуды аннигиляции пары мы подставляем место $\Psi_i(y)$ решение уравнения (6.53), которое при $y \to \infty$ переходит в $\psi_i^{(+)}(y)$. Оно отвечает электрону с положительной энергией, который распространяется до взаимодействия вперед во времени, а затем рассеивается назад и испускается в состоянии с отрицательной энергией. В n-м приближении амплитуда того, что электрон рассеется в заданное «конечное» состояние $\psi_f^{(-)}$, характеризуемое квантовыми числами $(\mathbf{p}_+, s_+, \varepsilon = -1)$, равна

$$ie^n \int d^4y_1 \ldots d^4y_n \bar{\psi}_f^{(-)}(y_n) \hat{A}(y_n) S_F(y_n - y_{n-1}) \ldots \hat{A}(y_1) \psi_i^{(+)}(y_1). \tag{6.58}$$

На языке теории дырок это амплитуда n-го порядка рассеяния электрона в конечное состояние с отрицательной энергией, 4-импульсом $-p_+$ и спином $-s_+$. Это состояние при $t = -\infty$ должно быть пустым, т. е. должна быть дырка, или позитрон, с 4-импульсом p_+ и спином, или поляризацией s_+.

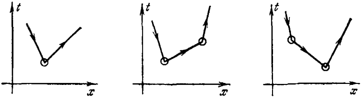


Рис. 6.7. Пространственно-временные фейнмановские диаграммы для рождения пары в первом и во втором порядках. Вклад второго порядка в свою очередь разлагается на две части в соответствии с временной последовательностью двух актов рассеяния.

Наконец, для описания рассеяния позитрона «падающая» волна с положительной частотой в (6.56) и (6.58) должна быть заменена решением с отрицательной частотой и квантовыми числами $(\mathbf{p}'_+, s'_+, \varepsilon = -1)$. Оно отвечает испускаемому позитрону с импульсом и спином $(\mathbf{p}'_+, s_+)$.

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что в нерелятивистском пределе $S_F(x', x)$ сводится к шредингеровскому запаздывающему пропагатору для свободной частицы.
2. Непосредственной проверкой убедитесь в справедливости (6.48).
3. Проверьте равенства (6.49) и (6.50) и получите аналогичные формулы для сопряженных спиноров $\bar{\psi}^{(+)}$ и $\bar{\psi}^{(-)}$.
4. Получите явное выражение для $S_F(x)$. Выясните поведение этой функции при $x \to \infty$, $x \to 0$ и на световом конусе.
5. Пусть в нашем формализме вакуум заменяется на ферми-газ фермиевским импульсом k_F. Как при этом изменится фейнмановский пропагатор? Найдите изменение S_F в пределе малой плотности.

ГЛАВА 7

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ К ОПИСАНИЮ ОСНОВНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

§ 24. Рассеяние электронов в кулоновском поле

В этой главе мы используем метод функции распространения для проведения различных практических вычислений. Когда у нас накопится достаточный опыт работы с амплитудами распространения, мы путем естественного и правдоподобного обобщения перейдем к амплитудам, описывающим взаимодействие между несколькими частицами. Наш план изложения такой же, как в оригинальных работах Фейнмана [53]: сначала будут получены правила для нахождения вероятностей перехода и сечений основных процессов, представляющих физический интерес, а затем мы обратимся к некоторым формальным операциям квантовой теории поля.

Мы начнем с задачи о рассеянии электрона в заданном кулоновском поле. Матричный элемент перехода, отвечающий этому процессу, дается выражением (6.56):

$$S_{fi} = -ie\int d^4x\,\bar{\psi}_f(x)\,\hat{A}(x)\,\Psi_i(x), \qquad f \neq i; \tag{7.1}$$

здесь $e < 0$ — заряд электрона. Мы должны привести S_{fi} к более конкретному и явному виду. В низшем порядке $\Psi_i(x)$ сводится к падающей плоской волне $\psi_i(x)$, описывающей электрон с импульсом p_i и спином s_i:

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{m}{E_iV}}\,u(p_i, s_i)\,e^{-ip_i\cdot x}, \tag{7.2}$$

где функция $\psi(x)$ нормирована на единичную вероятность в ящике объемом V. Аналогично

$$\bar{\psi}_f(x) = \sqrt{\frac{m}{E_fV}}\,\bar{u}(p_f, s_f)\,e^{ip_f\cdot x}. \tag{7.3}$$

Кулоновский потенциал точечного заряда $-Ze > 0$ задается выражением

$$A_0(x) = \frac{-Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{A}(x) = 0.$$

Таким образом,

$$S_{fi} = \frac{iZe^2}{4\pi}\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}}\,\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0 u(p_i, s_i)\int\frac{d^4x}{|\mathbf{x}|}e^{i(p_f-p_i)\cdot x}. \tag{7.4}$$

Интегрирование по времени дает $2\pi\delta(E_f - E_i)$, что выражает равенство энергий начального и конечного состояний в статическом потенциале. Интеграл по пространственным координатам есть хорошо известное фурье-преобразование кулоновского потенциала

$$\int\frac{d^3x}{|\mathbf{x}|}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2},$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$. Наш матричный элемент принимает вид

$$S_{fi} = iZe^2\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}}\frac{\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0 u(p_i, s_i)}{|\mathbf{q}|^2}2\pi\delta(E_f - E_i). \tag{7.5}$$

Число конечных состояний в интервале импульсов d^3p_f есть $V\,d^3p_f/(2\pi)^3$, и, таким образом, отнесенная к одной частице вероятность перехода в эти состояния равна

$$|S_{fi}|^2\frac{V\,d^3p_f}{(2\pi)^3} =$$
$$= \frac{Z^2(4\pi\alpha)^2 m^2}{E_i V}\frac{|\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0 u(p_i, s_i)|^2}{|\mathbf{q}|^4}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 E_f}[2\pi\delta(E_f - E_i)]^2. \tag{7.6}$$

Квадрат δ-функции требует некоторых пояснений. Если бы мы рассматривали переходы, происходящие в течение заданного промежутка времени $(-T/2, T/2)$, то δ-функция по энергии оказалась бы размазанной; это означает, что

$$2\pi\delta(E_f - E_i) \Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{i(E_f - E_i)t} = 2\frac{\sin(T/2)(E_f - E_i)}{E_f - E_i}. \tag{7.7}$$

Из (7.7) видно, что для большого, но конечного T

$$[2\pi\delta(E_f - E_i)]^2 \Rightarrow 4\frac{\sin^2(T/2)(E_f - E_i)}{(E_f - E_i)^2}.$$

Если последнее выражение рассматривать как функцию E_f, то площадь под кривой, изображающей эту функцию, равна $2\pi T$; поэтому можно отождествить

$$[2\pi\delta(E_f - E_i)]^2 = [2\pi\delta(0)]\,2\pi\delta(E_f - E_i) = 2\pi T\delta(E_f - E_i). \tag{7.8}$$

Или, еще проще[1]),

$$2\pi\delta(0)=T. \tag{7.9}$$

Эвристически этот результат можно получить прямо из определения

$$2\pi\delta(E_f-E_i)\underset{(T\to\infty)}{=}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{i(E_f-E_i)t}.$$

Следовательно,

$$2\pi\delta(0)\underset{(T\to\infty)}{=}\int_{-T/2}^{T/2} dt = T.$$

Возвращаясь к (7.6) и деля обе части этого равенства на время, получаем, что число переходов R за единицу времени в интервал импульсов d^3p_f равно

$$R=\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{E_iV}\,\frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0u(p_i,s_i)|^2}{|\mathbf{q}|^4}\,\frac{d^3p_f}{E_f}\,\delta(E_f-E_i).$$

Сечение определяется как скорость перехода R, отнесенная к потоку падающих частиц $J^a_{\text{inc}}=\bar{\psi}_i(x)\gamma^a\psi_i(x)$, где a обозначает компоненту вектора вдоль направления скорости падающих частиц $\mathbf{v}_i=\mathbf{p}_i/E_i$. Согласно принятому в (7.2) условию нормировки поток равен $|J_{\text{inc}}|=|\mathbf{v}_i|/V$. Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$, приходящееся на единичный телесный угол $d\Omega$, есть

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\int\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{v}_i|E_i}\,\frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0u(p_i,s_i)|^2}{|\mathbf{q}|^4}\,\frac{p_f^2\,dp_f}{E_f}\,\delta(E_f-E_i). \tag{7.10}$$

Пользуясь равенством

$$p_f\,dp_f=E_f\,dE_f,$$

окончательно получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0u(p_i,s_i)|^2, \tag{7.11}$$

что в нерелятивистском пределе согласуется с формулой Резерфорда.

Обычно поляризация конечных частиц не регистрируется, а поляризация начальных частиц не задается. Если падающий пучок имеет остаточную поляризацию, то для этого, как правило, имеются веские причины и экспериментатор в конечном

[1]) Если падающие и рассеянные частицы описывать волновыми пакетами, то удается избежать появления не вполне корректно определенных квадратов δ-функций. Тогда равенству (7.9) можно дать строгое обоснование (см. [56]).

итоге их обнаружит, как это произошло в случае с поляризованными электронами от β-распада. Когда подобная информация отсутствует, различным начальным поляризационным состояниям априорно приписывается равная вероятность. Это означает, что наблюдаемое сечение представляет собой сечение (7.11), просуммированное по конечным спиновым состояниям и усредненное по начальным, т. е.

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}=\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{2\,|\mathbf{q}|^4}\sum_{\pm\, s_f,\, s_i}|\bar{u}(p_f,\ s_f)\,\gamma^0 u(p_i,\ s_i)|^2. \qquad (7.12)$$

Сумму по спинам можно переписать в виде

$$\sum_{\pm\, s_f,\, s_i}\bar{u}_\alpha(p_f,\ s_f)\,\gamma^0_{\alpha\beta}u_\beta(p_i,\ s_i)\,u^+_\lambda(p_i,\ s_i)\,\gamma^{0+}_{\lambda\delta}\gamma^{0+}_{\delta\sigma}u_\sigma(p_f,\ s_f)=$$
$$=\sum_{\pm\, s_f,\, s_i}\bar{u}_\alpha(p_f,\ s_f)\,\gamma^0_{\alpha\beta}u_\beta(p_i,\ s_i)\,\bar{u}_\delta(p_i,\ s_i)\,\gamma^0_{\delta\sigma}u_\sigma(p_f,\ s_f),$$

где, как обычно, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Это частный случай общего соотношения, которым мы будем часто пользоваться:

$$|\bar{u}(f)\,\Gamma u(i)|^2=[\bar{u}(f)\,\Gamma u(i)]\,[\bar{u}(i)\,\bar{\Gamma} u(f)]; \qquad (7.13)$$

здесь $\bar{\Gamma}=\gamma^0\Gamma^+\gamma^0$. Например,

$$\overline{\gamma^\mu}=\gamma^\mu,$$
$$\overline{i\gamma^5}=i\gamma^5,$$
$$\overline{\gamma^\mu\gamma^5}=\gamma^\mu\gamma^5$$

и

$$\overline{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\cdots\hat{p}}=\hat{p}\cdots\hat{c}\hat{b}\hat{a}.$$

Суммирование по спинам можно заменить вычислением следов, если воспользоваться проекционными операторами (3.18):

$$\sum_{\pm\, s_i}u_\beta(p_i,\ s_i)\,\bar{u}_\lambda(p_i,\ s_i)=\sum_{r=1}^{4}\varepsilon_r w^r_\beta(\mathbf{p}_i)\,\bar{w}^r_\gamma(\mathbf{p}_i)\left(\frac{\hat{p}_i+m}{2m}\right)_{\gamma\lambda}=$$
$$=\left(\frac{\hat{p}_i+m}{2m}\right)_{\beta\lambda}=[\Lambda_+(p_i)]_{\beta\lambda}.$$

Тогда сумма по спинам в (7.12) переходит в

$$\sum_{\alpha,\,\beta}\ \sum_{\pm\, s_f}\bar{u}_\alpha(p_f,\ s_f)\left(\gamma^0\frac{\hat{p}_i+m}{2m}\gamma^0\right)_{\alpha\beta}u_\beta(p_f,\ s_f)=$$
$$=\sum_{\alpha,\,\beta}\left(\gamma^0\frac{\hat{p}_i+m}{2m}\gamma^0\right)_{\alpha\beta}\left(\frac{\hat{p}_f+m}{2m}\right)_{\beta\alpha},$$

где мы применили тот же самый прием. Последнее выражение представляет собой след, т. е. сумму диагональных элементов матрицы

$$\gamma_0 \frac{(\hat{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(\hat{p}_f + m)}{2m}.$$

Поэтому (7.12) можно записать в виде

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{2|\mathbf{q}|^4} \operatorname{Sp} \gamma_0 \frac{(\hat{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(\hat{p}_f + m)}{2m}. \tag{7.14}$$

§ 25. Теоремы о вычислении следов; усредненное по спинам сечение рассеяния в кулоновском потенциале

Теперь мы сделаем некоторое отступление и установим ряд полезных свойств матриц Дирака. Эти свойства позволяют вычислять сечения, не производя никаких действий с матрицами Дирака. Они выводятся из коммутационных соотношений для матриц γ и справедливы независимо от выбора конкретного представления для этих матриц. Мы перечислим эти свойства в виде ряда теорем.

Теорема 1.

След нечетного числа матриц γ равен нулю.

Доказательство. Для нечетного n

$$\operatorname{Sp} \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n = \operatorname{Sp} \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n \gamma_5 \gamma_5 = \operatorname{Sp} \gamma_5 \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n \gamma_5;$$

здесь мы воспользовались тем, что след не меняется при циклической перестановке, в частности, $\operatorname{Sp} AB = \operatorname{Sp} BA$. Последовательно переставляя первую из матриц γ_5 направо, мы n раз получим знак минус, возникающий из свойства антикоммутации $\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0$. В итоге для нечетного n имеем

$$\operatorname{Sp} \hat{a}_1 \cdots a_n = (-1)^n \operatorname{Sp} \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n \gamma_5 \gamma_5 = 0. \tag{7.15}$$

Теорема 2.

$$\begin{gathered} \operatorname{Sp} 1 = 4, \\ \operatorname{Sp} \hat{a}\hat{b} = \operatorname{Sp} \hat{b}\hat{a} = {}^1/_2 \operatorname{Sp} (\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}) = a \cdot b \operatorname{Sp} 1 = 4a \cdot b. \end{gathered} \tag{7.16}$$

Теорема 3.

$$\operatorname{Sp} \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n = a_1 \cdot a_2 \operatorname{Sp} \hat{a}_3 \cdots \hat{a}_n - a_1 \cdot a_3 \operatorname{Sp} \hat{a}_2 \hat{a}_4 \cdots \hat{a}_n + \cdots \\ \cdots + a_1 \cdot a_n \operatorname{Sp} \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_{n-1}. \tag{7.17}$$

В частности,

$$\operatorname{Sp} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4 = 4 [a_1 \cdot a_2 a_3 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4 a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_3 a_2 \cdot a_4].$$

Доказательство. Пользуясь равенством $\hat{a}_1 \hat{a}_2 = -\hat{a}_2 \hat{a}_1 + 2a_1 a_2$, мы переставим $\hat{a}_1$ вправо по отношению к $\hat{a}_2$, т. е.

$$\operatorname{Sp} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n = 2a_1 \cdot a_2 \operatorname{Sp} \hat{a}_3 \cdots \hat{a}_n - \operatorname{Sp} \hat{a}_2 \hat{a}_1 \hat{a}_3 \cdots \hat{a}_n.$$

Действуя далее аналогичным образом, получим

$$\operatorname{Sp} \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n = 2a_1 \cdot a_2 \operatorname{Sp} \hat{a}_3 \cdots \hat{a}_n - \ldots + 2a_1 \cdot a_n \operatorname{Sp} \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_{n-1} - \\ - \operatorname{Sp} \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n \hat{a}_1.$$

Наконец, воспользовавшись свойством цикличности следа, мы вновь переставим $\hat{a}_1$ влево относительно других матриц γ; тем самым теорема доказана.

Эта теорема в особенности полезна для упрощения сложного следа, хотя при $n > 6$ следует, если это возможно, прибегать к более изощренным приемам, чтобы избежать лавинообразного роста числа членов.

Теорема 4.

$$\begin{gathered} \operatorname{Sp} \gamma_5 = 0, \\ \operatorname{Sp} \gamma_5 \hat{a} \hat{b} = 0, \\ \operatorname{Sp} \gamma_5 \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} = 4i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta, \end{gathered} \tag{7.18}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = +1$, если перестановка ($\alpha$, β, γ, δ) получается из (0, 1, 2, 3) в результате четного числа транспозиций, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -1$, если число транспозиций нечетно; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, если среди индексов имеются совпадающие.

Доказательство. Первые два равенства немедленно следуют из того, что $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Для получения третьего надо рассмотреть отдельные компоненты. Чтобы данный член вносил ненулевой вклад, все компоненты векторов a, b, c, d должны быть различны, а полный вклад представляет собой сумму по различным комбинациям компонент, причем знак каждого из слагаемых определяется знаком перестановки. Общий знак задается из

$$\operatorname{Sp} \gamma_5 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 a^0 b^1 c^2 d^3 = i\varepsilon_{0123} a^0 b^1 c^2 d^3 \operatorname{Sp} \gamma_5^2 = 4i\varepsilon_{0123} a^0 b^1 c^2 d^3.$$

Теорема 5 [1]**.**

$$\begin{gathered} \gamma_\mu \gamma^\mu = 4, \\ \gamma_\mu \hat{a} \gamma^\mu = -2\hat{a}, \\ \gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b, \\ \gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma^\mu = -2\hat{c} \hat{b} \hat{a}, \\ \gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} \gamma^\mu = 2[\hat{d} \hat{a} \hat{b} \hat{c} + \hat{c} \hat{b} \hat{a} \hat{d}]. \end{gathered} \tag{7.19}$$

Теорема 6.

$$\operatorname{Sp} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_{2n} = \operatorname{Sp} a_{2n} \cdots a_1. \tag{7.20}$$

---

[1]) Хотя соотношения 5 не относятся непосредственно к следам, но ими приходится пользоваться в тех же расчетах, где необходимо вычислять следы. Поэтому мы для удобства их здесь приводим. Их доказательство предлагается в качестве полезного упражнения.

Доказательство. При рассмотрении зарядового сопряжения в гл. 5 было показано, что существует матрица C, обладающая свойством $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$. Далее

$$\operatorname{Sp} \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_{2n} = \operatorname{Sp} C\hat{a}_1 C^{-1} C\hat{a}_2 C^{-1} \cdots C\hat{a}_{2n} C^{-1} =$$
$$= (-1)^{2n} \operatorname{Sp} \hat{a}_1^T \hat{a}_2^T \cdots \hat{a}_{2n}^T = \operatorname{Sp} [\hat{a}_{2n} \cdots \hat{a}_1]^T = \operatorname{Sp} \hat{a}_{2n} \cdots \hat{a}_1.$$

Возвращаясь к задаче о кулоновском рассеянии и используя теорему 1, получаем из (7.14)

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{2\,|\mathbf{q}|^4} [\operatorname{Sp} \gamma^0 \hat{p}_i \gamma^0 \hat{p}_f + m^2 \operatorname{Sp} (\gamma^0)^2].$$

Применяя теоремы 3 и 2, находим окончательное выражение для дифференциального сечения рассеяния

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{2\,|\mathbf{q}|^4} (8E_i E_f - 4p_i \cdot p_f + 4m^2). \tag{7.21}$$

Можно выразить дифференциальное сечение через энергию рассеиваемой частицы $E = E_i = E_f$ и угол рассеяния θ. Для этого воспользуемся кинематическими соотношениями

$$p_i \cdot p_f = E^2 - \mathbf{p}^2 \cos\theta = m^2 + 2\beta^2 E^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

и

$$|\mathbf{q}|^2 = 4p^2 \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Тогда

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4\mathbf{p}^2\beta^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - \beta^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{7.22}$$

Это так называемое сечение Мотта [57]; оно переходит в резерфордовское при $\beta \to 0$.

§ 26. Кулоновское рассеяние позитронов

Переходя к рассмотрению рассеяния позитронов в кулоновском поле, мы прежде всего заметим, что в низшем порядке по α сечение рассеяния такое же, как для электронов. В этом проще всего убедиться, записав матричный элемент. Из формулы (6.56) и сопровождающих ее пояснений следует

$$S_{fi} = ie \int d^4x\, \bar{\psi}_f(x)\, \hat{A}(x)\, \Psi_i^{(-)}(x). \tag{7.23}$$

Здесь начальное состояние относится к будущему и должно интерпретироваться как электрон с отрицательной энергией и 4-импульсом $-p_i$, движущийся назад во времени (см. рис. 7.1).

В низшем порядке в качестве волновой функции подставляем плоскую волну:

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{m}{E_f V}}\, v(p_f, s_f)\, e^{+ip_f\cdot x}. \tag{7.24}$$

Аналогично конечное состояние в (7.23) представляет собой электрон с отрицательной энергией, распространяющийся в прошлое. Его волновая функция есть

$$\psi_f(x) = \sqrt{\frac{m}{E_i V}}\, v(p_i, s_i)\, e^{+ip_i\cdot x}. \tag{7.25}$$

Она описывает налетающий позитрон, который до рассеяния имеет импульс $\mathbf{p}_i$ и поляризацию s_i. Подставляя (7.24) и (7.25) в выражение для S-матрицы, имеем

$$S_{fi} = -\frac{iZe^2}{4\pi}\,\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}}\,\bar{v}(p_i, s_i)\,\gamma^0 v(p_f, s_f)\int \frac{d^4x}{|\mathbf{x}|}\, e^{i(p_f - p_i)\cdot x}.$$

Полученное выражение аналогично (7.4).

Вследствие инвариантности относительно зарядового сопряжения можно в том же порядке по e вместо (7.23) записать

$$S_{fi} = +ie\int d^4x\, \bar{\psi}_{ci}(x)\,\hat{A}\psi_{cf}(x) = -ie\int d^4x\, \psi_i^T(x)\, C^{-1}\hat{A}C\bar{\psi}_f^T(x) =$$

$$= +ie\int d^4x\, \bar{\psi}_f(x)\,\hat{A}\,\psi_i(x),$$

что приводит к прежнему результату. При таком описании позитрон распространяется вперед во времени и $\psi_{ci}(x) = C\gamma^0\psi_f^*(x)$ есть волновая функция начального позитрона.

Повторяя вычисления, посредством которых была получена формула (7.12), находим выражение для дифференциального сечения

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{e^+} =$$

$$= \frac{2Z^2\alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4}\sum_{\pm s_f,\, s_i} |\bar{v}(p_i, s_i)\,\gamma^0 v(p_f, s_f)|^2. \tag{7.26}$$

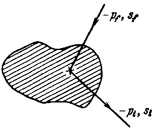


Рис. 7.1. Кулоновское рассеяние позитронов.

Сумму по спинам, как и прежде, можно привести к следу, используя следующее соотношение для позитронных спиноров (см. (3.9)):

$$\sum_{\pm s_i} v_\alpha(p_i, s_i)\,\bar{v}_\beta(p_i, s_i) = -\left(\frac{-\hat{p}_i + m}{2m}\right)_{\alpha\beta}.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{e^+}=\frac{Z^2\alpha^2}{2|\mathbf{q}|^4}\,\mathrm{Sp}\,\gamma^0(\hat{p}_i-m)\,\gamma^0(\hat{p}_f-m),$$

что совпадает с (7.14) с точностью до замены m на $-m$.

Поскольку полученное нами выражение для сечения рассеяния электронов было четным по m, мы убеждаемся в том, что в низшем порядке по α сечения рассеяния для позитронов и электронов равны друг другу. Мы могли получить этот результат из инвариантности относительно зарядового сопряжения. В гл. 5 было показано, что каждому решению для электрона в потенциале A_μ отвечает решение для позитрона в потенциале $-A_\mu$, т. е. рассеяние электрона в потенциале $-e/4\pi r$ есть то же самое, что рассеяние позитрона в потенциале $+e/4\pi r$; однако, поскольку вычисленное сечение зависит только от e^4, знак A^μ не играет роли.

Для поправок порядка e^6, которые возникают как произведение амплитуд первого и второго порядка, изображенных на рис. 7.2, это заключение несправедливо. Такие поправки имеют разные знаки для электронов и позитронов.

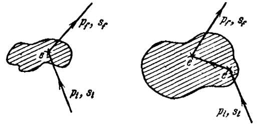


Рис. 7.2. Кулоновское рассеяние электронов.

Нетрудно также заметить, что сечение для позитронов получается из сечения для электронов путем замены $p_i \leftrightarrow -p_f$; это общее свойство теории позитронов, именуемое «правилом подстановки» («substitution rule»). Оно тесно связано с методом функции распространения. Примеры применения этого правила еще не раз встретятся нам в дальнейшем.

§ 27. Рассеяние электрона на дираковском протоне

Рассмотрим теперь рассеяние электрона не в фиксированном кулоновском поле, а на протоне (пока мы будем считать протон бесструктурной дираковской частицей). Как изменится полученный нами результат?

Зная протонный ток $J^\mu(x)$, можно с помощью уравнений Максвелла найти создаваемое им поле. Амплитуда рассеяния электрона в этом поле дается S-матрицей (7.1). Повторив предыдущие рассуждения, мы получим скорость перехода и сечение рассеяния в низшем порядке по α.

Итак, сначала найдем создаваемое протоном электромагнитное поле. Потенциал определяется из уравнения

$$\Box A^\mu(x) = J^\mu(x), \tag{7.27}$$

где для удобства мы выбрали лоренцеву калибровку. Чтобы проинтегрировать это уравнение и найти $A^\mu(x)$, мы, как и для случая электрона, вводим функцию Грина, или пропагатор. Пропагатор $D_F(x-y)$ определяется уравнением

$$\Box D_F(x-y) = \delta^4(x-y). \tag{7.28}$$

Его фурье-преобразование имеет вид

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq\cdot(x-y)} D_F(q^2),$$

где $D_F(q^2) = -1/q^2$ для $q^2 \neq 0$.

Как и для фермионов, необходимо задать поведение в полюсе при $q^2 = 0$. По аналогии с дираковским пропагатором, рассмотренным в гл. 6, мы добавляем к q^2 бесконечно малую положительную мнимую часть; это эквивалентно введению малой отрицательной мнимой массы (см. (6.46)):

$$D_F(q^2) = \frac{-1}{q^2 + i\varepsilon}. \tag{7.29}$$

Такой способ обращения с полюсной особенностью означает выделение излучения с положительной частотой или энергией, распространяющегося вперед во времени. Когда мы рассматриваем рассеяние излучения веществом, например, преломление света при прохождении пузырьковой камеры, мы должны позаботиться о том, чтобы волны с положительной частотой, отвечающие квантам с положительной энергией, испускались без отрицательно-частотного сопровождения. Соответствующий фейнмановский пропагатор задается формулой

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq\cdot(x-y)} \left(\frac{-1}{q^2 + i\varepsilon}\right), \tag{7.30}$$

а определяемый из (7.27) потенциал имеет вид

$$A^\mu(x) = \int d^4y\, D_F(x-y) J^\mu(y). \tag{7.31}$$

Подстановка этого выражения вместе с решениями в виде плоских волн для электронов в элемент S-матрицы (7.1) дает

$$S_{fi} = -i \int d^4x\, d^4y\, [e\bar{\psi}_f(x)\, \gamma_\mu \psi_i(x)]\, D_F(x-y)\, J^\mu(y). \quad (7.32)$$

Теперь мы должны решить, какое выражение следует выбрать в качестве протонного тока $J^\mu(y)$. Естественный с физической точки зрения выбор вытекает из принципа соответствия. В качестве тока перехода берется матричный элемент

$$J^\mu(y) = e_p \bar{\psi}_f^p(y)\, \gamma^\mu \psi_i^p(y), \quad (7.33)$$

где $e_p = -e > 0$ — заряд протона, а $\psi_i^p(y)$ и $\bar{\psi}_f^p(y)$ представляют собой решения в виде плоских волн для начального и конечного свободных протонов. Они имеют тот же вид, что (7.2) и (7.3), с той разницей, что масса протона есть M, а его начальные и конечные импульс и энергия — P_i, P_f и $\mathscr{E}_i$, $\mathscr{E}_f$ соответственно. Тогда для тока имеем

$$J^\mu(y) = -\sqrt{\frac{M^2}{\mathscr{E}_f \mathscr{E}_i}}\, \frac{e}{V}\, e^{i(P_f - P_i)\cdot y}\, \bar{u}(P_f, S_f)\, \gamma^\mu u(P_i, S_i). \quad (7.34)$$

Потенциал $A^\mu(x)$, определяемый уравнениями (7.31) и (7.33), принято называть потенциалом Мёллера [58] для дираковского протона. В нерелятивистском приближении такой выбор тока перехода в качестве источника $A^\mu(x)$ был принят Гайзенбергом и применен им к переходам электрона при расчете излучения атомов с помощью матричной механики (см., например, [22, 59]).

Подставляя (7.34) в (7.32) и используя (7.30), мы без труда вычисляем интегралы и получаем для элемента S-матрицы

$$S_{fi} = \frac{-ie^2}{V^2} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) \sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}} \sqrt{\frac{M^2}{\mathscr{E}_f \mathscr{E}_i}} \times$$
$$\times [\bar{u}(p_f, s_f)\, \gamma_\mu u(p_i, s_i)]\, \frac{1}{(p_f - p_i)^2 + i\varepsilon}\, [\bar{u}(P_f, S_f)\, \gamma^\mu u(P_i, S_i)]. \quad (7.35)$$

Симметрия полученного результата по переменным электрона и протона подтверждает правильность выбора тока в форме (7.33). Если бы мы в качестве исходного пункта наших вычислений взяли выражение (7.1) для амплитуды рассеяния протона в поле, создаваемом током электрона, и выбрали (7.33) в качестве тока электрона, то мы должны были бы прийти к тому же самому результату.

Сравнение с выражением (7.5) показывает, что различие между рассеянием электрона в кулоновском поле и на протоне сводится к замене выражения $Z\gamma^0/|\mathbf{q}|^2$ на

$$\gamma_\mu \left(\frac{-1}{q^2 + i\varepsilon}\right) \sqrt{\frac{M^2}{\mathscr{E}_f \mathscr{E}_i}}\, \bar{u}(P_f, S_f)\, \gamma^\mu u(P_i, S_i)$$

и V — на $(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$, что выражает сохранение импульса.

Формула (7.35) дает амплитуду электрон-протонного рассеяния в наинизшем порядке по α; она не учитывает эффектов более высокого порядка, которые приводят к искажению плоских волн в выражении для тока. Выражению (7.35) удобно сопоставить фейнмановскую диаграмму, изображенную на рис. 7.3.

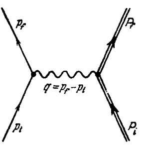


Рис. 7.3. Рассеяние электрона на протоне.

Одинарная сплошная линия со стрелкой, указывающей направление времени, отвечает электрону, а двойная — протону. Волнистая линия описывает электромагнитное взаимодействие, которому в матричном элементе отвечает величина, обратная квадрату переданного импульса или обратная оператору Даламбера (см. (7.27)) в импульсном представлении. Мы будем говорить, что эта линия описывает «виртуальный фотон», посредством которого электрон и протон обмениваются 4-импульсом $q = p_f - p_i = P_i - P_f$. Амплитуда распространения виртуального фотона между двумя токами есть $-(q^2 + i\varepsilon)^{-1}$. Точкам или вершинам, из которых исходит и в которые входит фотон, сопоставляется фактор $e\gamma^\mu$, который стоит в обкладках из спиноров $\sqrt{m/E}\, u(p, s)$, отвечающих свободным реальным начальным и конечным частицам. Каждой линии и каждому пересечению линий на диаграмме отвечает свой единственный член в выражении для S-матрицы. Кроме того, S-матрица всегда содержит четырехмерную δ-функцию, выражающую общий для всего процесса закон сохранения энергии-импульса.

Для вычисления сечения вернемся к рис. 7.3 и формуле (7.35) и прежде всего путем деления $|S_{fi}|^2$ на время наблюдения T и пространственный объем области взаимодействия найдем скорость перехода, отнесенную к единичному объему. Получаем

$$w_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{TV} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)\frac{1}{V^4}\frac{m^2}{E_f E_i}\frac{M^2}{\mathscr{E}_f \mathscr{E}_i}|\mathfrak{M}_{fi}|^2, \tag{7.36}$$

где величина

$$\mathfrak{M}_{fi} = [\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_\mu u(p_i, s_i)]\frac{e^2}{q^2 + i\varepsilon}[\bar{u}(P_f, S_f)\gamma^\mu u(P_i, S_i)]$$

представляет собой лоренц-инвариантный матричный элемент и будет в дальнейшем именоваться инвариантной амплитудой.

Переходя от (7.35) к (7.36), мы представили квадрат δ-функции в виде, аналогичном, но несколько более общем, чем (7.8), а именно

$$[(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i)]^2=(2\pi)^4\delta^4(0)(2\pi)^4\times$$
$$\times\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i)+VT(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i). \quad (7.37)$$

Далее разделим скорость перехода, отнесенную к единичному объему, на поток падающих частиц $|J_{\text{inc}}|$ и на плотность частиц мишени, которая согласно использованной в (7.2) нормировке равна $1/V$.

Наконец, чтобы получить физическое сечение, необходимо просуммировать по заданному набору конечных состояний электрона и протона, отвечающему условиям наблюдения. Число конечных состояний с заданным спином, приходящееся на интервал импульсов $d^3p_f\,d^3P_f$, есть

$$V\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}V\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3}. \quad (7.38)$$

Таким образом, сечение перехода в конечное состояние, лежащее в интервале τ, равно

$$d\sigma=\int_\tau V^2\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3}\frac{V}{|J_{\text{inc}}|}w_{fi}=$$
$$=\int_\tau\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3}\frac{mM}{E_f\mathscr{E}_f}\frac{mM}{E_i\mathscr{E}_i}\frac{(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i)}{|J_{\text{inc}}|V}|\mathfrak{M}_{fi}|^2. \quad (7.39)$$

Можно еще просуммировать это выражение по спиновым состояниям конечных частиц и усреднить по начальным спинам для случая, когда поляризация отсутствует.

Теперь мы можем отметить некоторые общие для всех процессов рассеяния черты. Физика явления заключена в квадрате инвариантной амплитуды $|\mathfrak{M}_{fi}|^2$. Каждой из внешних фермионных линий, т. е. каждой падающей или испускаемой дираковской частице, отвечает фактор m/E. Фазовый объем каждой из конечных частиц дается фактором $d^3p_f/(2\pi)^3$. Таким образом, мы видим, что за счет каждой из конечных частиц появляется выражение $(m/E)\,[d^3p/(2\pi)^3]$. Оно представляет собой лоренцинвариантный объем в импульсном пространстве, в чем нетрудно убедиться из следующего равенства:

$$\frac{d^3p}{2E}=\int_0^\infty dp_0\,\delta(p_\mu p^\mu-m^2)\,d^3p=\int_{-\infty}^{\infty}d^4p\,\delta(p_\mu p^\mu-m^2)\,\theta(p_0), \quad (7.40)$$
$$\theta(p_0)=\begin{cases}1, & p_0>0,\\ 0, & p_0<0.\end{cases}$$

Здесь $\theta(p_0)$ — введенная в (6.18) функция-ступенька; она лоренц-инвариантна, если 4-вектор p^μ временниподобен, как в нашем случае. Общий для всего процесса закон сохранения энергии-импульса выражается δ-функцией $(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)$. Наконец, имеется фактор $1/V|J_{\text{inc}}|$; поток $|J_{\text{inc}}|$ для коллинеарных пучков есть число частиц на единицу площади, пересекающихся друг с другом за единицу времени, т. е.

$$|J_{\text{inc}}| = \frac{|\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\mathscr{V}}_i|}{V}.$$

В сочетании с нормировочными множителями для обеих налетающих частиц величина $V|J_{\text{inc}}|$ образует лоренц-инвариантное выражение

$$\frac{mM}{E_i\mathscr{E}_i|\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\mathscr{V}}_i|} = \frac{mM}{|\mathbf{p}_i|\mathscr{E}_i + |\mathbf{P}_i|E_i} = \frac{mM}{\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m^2M^2}}. \tag{7.41}$$

Отсюда видно, что полное сечение инвариантно относительно преобразования Лоренца, совершаемого вдоль направления налетающих пучков. Таким образом, можно записать равенство (7.39) в инвариантной форме

$$d\sigma = \int_\tau \frac{mM}{\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m^2M^2}} |\mathfrak{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) \times \\ \times \frac{m\, d^3p_f}{(2\pi)^3 E_f} \frac{M\, d^3P_f}{(2\pi)^3 \mathscr{E}_f}. \tag{7.42}$$

Полученное выражение содержит величины самой общей природы; в дальнейшем мы будем опускать детали их появления. Нормировочный объем V не вошел в конечный ответ. Тот же ответ был бы получен и при других нормировочных условиях, не содержащих объем V.

Если сталкивающиеся пучки не коллинеарны, удобнее рассматривать непосредственно число событий в единицу времени dN/dt, которое находится из (7.36) и оказывается равным

$$\frac{dN}{dt} = \int d^3x\, \rho_e(\mathbf{x}, t)\, \rho_p(\mathbf{x}, t) \int \frac{mM}{E_i\mathscr{E}_i} |\mathfrak{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \times \\ \times \delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i) \frac{m\, d^3p_f}{(2\pi)^3 E_f} \frac{M\, d^3P_f}{(2\pi)^3 \mathscr{E}_f}.$$

Здесь $\rho_e(\mathbf{x}, t)$ и $\rho_p(\mathbf{x}, t)$ — число электронов и протонов в единице объема; эти величины появились взамен двух факторов $(1/V)$, которые нормируют выражение (7.36) на единичную вероятность в объеме V.

Как уже говорилось, выражение (7.42) отвечает переходу из заданного начального спинового состояния электрона и протона в заданное конечное. Если поляризации не регистрируются, мы должны провести усреднение по начальным спиновым состояниям и суммирование по конечным. В результате получим

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{S_f, S_i, s_f, s_i} \left| \bar{u}(p_f, s_f)\gamma^\mu u(p_i, s_i) \frac{e^2}{q^2 + i\varepsilon} \bar{u}(P_f, S_f)\gamma_\mu u(P_i, S_i)\right|^2 =$$
$$= \frac{1}{4} \operatorname{Sp} \frac{(\hat{p}_f + m)}{2m} \gamma^\mu \frac{(\hat{p}_i + m)}{2m} \gamma^\nu \operatorname{Sp} \frac{(\hat{P}_f + M)}{2M} \gamma_\mu \frac{(\hat{P}_i + M)}{2M} \gamma_\nu \frac{e^4}{(q^2)^2}.$$

Вычисление первого следа с использованием теорем, приведенных в § 25, дает

$$\operatorname{Sp} \frac{(\hat{p}_f + m)}{2m} \gamma^\mu \frac{(\hat{p}_i + m)}{2m} \gamma^\nu = \frac{1}{4m^2} \operatorname{Sp} (\hat{p}_f \gamma^\mu \hat{p}_i \gamma^\nu + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu) =$$
$$= \frac{1}{m^2} \left[p_f^\mu p_i^\nu + p_i^\mu p_f^\nu - g^{\mu\nu} (p_f \cdot p_i - m^2) \right].$$

Второй след имеет тот же вид, и после некоторых алгебраических преобразований получаем следующий конечный ответ:

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{2m^2 M^2 (q^2)^2} [(P_f \cdot p_f)(P_i \cdot p_i) + (P_f \cdot p_i)(P_i \cdot p_f) -$$
$$- m^2 (P_f \cdot P_i) - M^2 (p_f \cdot p_i) + 2M^2 m^2]. \tag{7.43}$$

Сечение рассеяния неполяризованных частиц получается подстановкой этого выражения в формулу (7.42). Полезно вычислить $d\sigma$ в лабораторной системе, в которой начальный протон покоится. В этой системе имеем $p_f = (E', \mathbf{p}')$, $p_i = (E, \mathbf{p})$ и $P_i = (M, 0)$.

Чтобы найти дифференциальное сечение рассеяния электрона в элемент телесного угла $d\Omega'$ в направлении, задаваемом полярным углом θ, проведем интегрирование по фазовому пространству, воспользовавшись равенством (7.40). Записав $d^3p' = p'^2\, dp'\, d\Omega = p'E'\, dE'\, d\Omega'$, получим

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega'} = \frac{2}{|\mathbf{p}|} \int \frac{m^2 M p'\, dE'}{(2\pi)^2} |\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 d^4 P_f\, \delta(P_f^2 - M^2)\, \theta(P_f^0) \times$$
$$\times \delta^4 (P_f + p' - P_i - p) =$$
$$= \frac{2}{|\mathbf{p}|} \frac{m^2 M}{(2\pi)^2} \int p'\, dE' |\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 \delta\left((p' - P_i - p)^2 - M^2\right) \theta\left(P_i^0 + E - E'\right) =$$
$$= \frac{m^2 M}{2\pi^2 p} \int_M^{M+E} p'\, dE' |\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 \delta(2m^2 - 2(E' - E) M - 2E'E + 2pp' \cos\theta) =$$
$$= \frac{m^2 M}{4\pi^2} \frac{p'}{p} \frac{|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2}{M + E - (pE'/p') \cos\theta}, \tag{7.44}$$

причем условие сохранения энергии, выражаемое δ-функцией, имеет вид

$$E'(M + E) - p'p \cos\theta = EM + m^2, \tag{7.45}$$

и для получения конечного ответа мы воспользовались формулой $\int dx\,\delta(f(x)) = |df(x)/dx|^{-1}$.

Если энергия электрона много меньше массы протона, $E \ll M$, мы, пренебрегая $E/M \ll 1$, вновь приходим к прежнему результату для рассеяния в статическом кулоновском поле. В этом предельном случае (7.44) переходит в формулу Мотта (7.21):

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega'} = \frac{m^2}{4\pi^2}|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2, \quad \frac{E}{M} \ll 1,$$

а условие (7.45) дает $E' = E$.

Из (7.43) имеем

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 = \frac{8\pi^2\alpha^2}{m^2q^4}(2E^2 + m^2 - p_f \cdot p_i), \quad \frac{E}{M} \ll 1.$$

Если отдача протона становится существенной, электрон можно рассматривать как ультрарелятивистский и пренебрегать поправками по массе электрона. Из (7.43) и (7.44) видно, что линейные (и вообще нечетные) члены по m/E отсутствуют, так что поправки имеют порядок $(m/E)^2$. Пренебрегая этими поправками, имеем

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega'} = \frac{m^2}{4\pi^2}\frac{E'/E}{1 + (2E/M)\sin^2(\theta/2)}|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2, \quad \frac{m}{E} \ll 1.$$

Вычисляя в этом предельном случае $|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2$, удобно записать P_f в виде $P_f = P_i + p_i - p_f$, что дает

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 = \frac{8\pi^2\alpha^2}{m^2M^2q^4}[2P_i \cdot p_f P_i \cdot p_i + p_i \cdot p_f(P_i \cdot p_i - P_i \cdot p_f - M^2)] =$$
$$= \frac{8\pi^2\alpha^2EE'}{m^2 16E^2E'^2\sin^4(\theta/2)}\left[2 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{q^2}{M^2} - 1\right)\right] =$$
$$= \frac{\pi^2\alpha^2}{m^2EE'\sin^4(\theta/2)}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \quad \frac{m}{E} \ll 1,$$

где $q^2 = (p_f - p_i)^2 = -4EE'\sin^2(\theta/2)$.

Таким образом, дифференциальное сечение равно

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega'} = \frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{\cos^2(\theta/2) - (q^2/2M^2)\sin^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)[1 + (2E/M)\sin^2(\theta/2)]}, \quad \frac{m}{E} \ll 1. \tag{7.46}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (7.45) в пределе $m^2 \to 0$:

$$E'E(1 - \cos\theta) = M(E - E').$$

Формула (7.45) получена в предположении, что по своим свойствам протон представляет собой тяжелый электрон с массой M. Однако такое описание является неполным, поскольку оно не учитывает структуру протона и его аномальный магнитный момент, т. е. свойства, имеющие мезонную природу. Более полное описание протона требует изменений в формуле (7.46), которые становятся существенными при высоких энергиях, превышающих несколько сотен *Мэв*. Мы еще вернемся к этому вопросу в гл. 10.

§ 28. Поправки высших порядков к рассеянию электронов протонами

Проведенное рассмотрение рассеяния электронов протонами справедливо только в наинизшем неисчезающем порядке по e^2. Чтобы получить поправки следующего, более высокого порядка по e^2, мы должны вернуться к выражению (6.57) и рассмотреть амплитуду второго порядка по взаимодействию между электроном и протоном. Она дается выражением

$$S_{fi}^{(2)} = -ie^2 \int d^4x\, d^4y\, \bar{\psi}_f(x)\, \hat{A}(x)\, S_F(x-y)\, \hat{A}(y)\, \psi_i(y), \quad (7.47)$$

где, как и прежде, электромагнитный потенциал создается током протона. Чтобы установить форму этого тока, посмотрим, каков вид тока электрона во втором порядке. Формула (7.47) описывает взаимодействие этого тока с $A_\mu(x)$ и $A_\nu(y)$. Как и в первом порядке (см. 7.35)), амплитуда $S_{fi}^{(2)}$ должна быть симметричной по току электрона и протона. Ток электрона во втором порядке имеет вид

$$i\bar{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu S_F(x-y)\,\gamma_\nu\psi_i(y) = \bar{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu \Big\{ \sum_{n:\ p_0>0} \theta(x_0-y_0)\,\psi_n(x)\,\bar{\psi}_n(y) -$$
$$- \sum_{n:\ p_0<0} \theta(y_0-x_0)\,\psi_n(x)\,\bar{\psi}_n(y) \Big\}\, \gamma_\nu\psi_i(y).$$

Множитель i необходим для того, чтобы ток во втором порядке можно было представить как линейную комбинацию произведений двух токов перехода. Опираясь на подобные наводящие соображения, запишем, следуя (7.31),

$$A_\mu(x)\,A_\nu(y) = e_p^2 \int d^4w\, d^4z\, D_F(x-w)\, D_F(y-z)\, \bar{\psi}_f^p(w)\,\gamma_\mu \times$$
$$\times \Big\{ \sum_{n:\ p_0>0} \theta(w_0-z_0)\,\psi_n^p(w)\,\bar{\psi}_n^p(z) -$$
$$- \sum_{n:\ p_0<0} \theta(z_0-w_0)\,\psi_n^p(w)\,\bar{\psi}_n^p(z) \Big\}\, \gamma_\nu\psi_i^p(z) =$$
$$= ie_p^2 \int d^4w\, d^4z\, D_F(x-w)\, D_F(y-z)\, \bar{\psi}_f^p(w)\,\gamma_\mu S_F^p(w-z)\,\gamma_\nu\psi_i^p(z). \quad (7.48)$$

Здесь $D_F(x-w)\,D_F(y-z)$ представляют собой фейнмановские пропагаторы для двух внешних фотонных линий, изображенных на рис. 7.4, *а*.

Фотоны распространяются между электронной и протонной вершинами, изображенными в виде точек, которым отвечают факторы $e\gamma_\lambda$ и $e_p\gamma_\sigma$ соответственно. Внутренним электронной и протонной линиям соответствуют фермионные пропагаторы

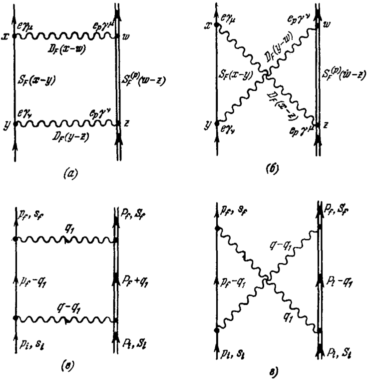


Рис. 7.4. Вклад четвертого порядка в электрон-протонное рассеяние.

$S_F(x-y)$ и $S_F^p(w-z)$. Таким образом, мы имеем пример соответствия между диаграммами Фейнмана и элементами S-матрицы, записанными в координатном представлении. Чтобы получить полное выражение для $S_{fi}^{(2)}$, необходимо добавить в протонный ток еще один член, отражающий неразличимость двух фотонов. Электрон, взаимодействующий с фотоном в точке x, не различает, испустился ли этот фотон из точки w или z, и наряду с процессом, изображенным на рис. 7.4, *а* следует учитывать процесс, показанный на рис. 7.4, *б*.

Фотонные фейнмановские пропагаторы обеспечивают распространение вперед во времени только положительных частот. Однако взаимодействие содержит все различные упорядочения четырех точек x, y, w и z во времени, и фотон в точке w может быть как первым, так и вторым испущенным или поглощенным электроном.

Для симметризации переменных двух неразличимых фотонов, которыми обмениваются электрон и протон, мы добавим к (7.48) член

$$ie_p^2 \int d^4w\, d^4z\, D_F(x-z)\, D_F(y-w)\, \bar{\psi}_f^p(w)\, \gamma_\nu S_F^p(w-z)\, \gamma_\mu \psi_i^p(z).$$

Тогда (7.47) принимает вид

$$S_{fi}^{(2)} = e^2 e_p^2 \int d^4x\, d^4y\, d^4w\, d^4z\, \bar{\psi}_f(x)\gamma_\mu S_F(x-y)\gamma_\nu \psi_i(y) \times$$
$$\times \{D_F(x-w)\, D_F(y-z)\, \bar{\psi}_f^p(w)\, \gamma^\mu S_F^p(w-z)\, \gamma^\nu \psi_i^p(z) +$$
$$+ D_F(x-z)\, D_F(y-w)\, \bar{\psi}_f^p(w)\, \gamma^\nu S_F^p(w-z)\, \gamma^\mu \psi_i^p(z)\}. \qquad (7.49)$$

Оба члена в (7.49) удовлетворяют одним и тем же правилам получения элементов S-матрицы в координатном представлении из соответствующих диаграмм Фейнмана.

Заметим, что сформулированные нами правила содержат пока неясность[1]) в отношении множителей i. Мы сопоставляли S-матрице общий множитель $(-i)$ и, кроме того, записывали протонный пропагатор S_F^p с множителем i. В высших порядках всем протонным пропагаторам S_F^p будет приписываться множитель i по тем же причинам, что и в разобранном примере. Можно ввести единое правило для всех фермионных пропагаторов, если сопоставлять iS_F каждой электронной линии, а каждой величине $\hat{A}$ приписывать множитель $(-i)$, т. е.

$$-ie\hat{A}S_F e\hat{A}S_F \ldots e\hat{A} = (-ie\hat{A})\, iS_F\, (-ie\hat{A}) \ldots (-ie\hat{A}).$$

Тогда общий множитель $(-i)$ войдет в лишнюю (по сравнению с S_F) величину $\hat{A}$. Таким образом, каждой вершине γ^μ на электронной линии мы приписываем фактор $(-i)$. Можно также сопоставить $(-i)$ каждой протонной вершине, если компенсировать этот множитель фактором i перед каждым фотонным пропагатором D_F. Тогда мы получаем единое правило относительно множителей i: $(-i)$ отвечает каждой вершине, а i — каждой линии на диаграмме. В дальнейшем мы будем следовать этому правилу.

Для практических вычислений удобно перейти к импульсному представлению. Для этого применим преобразование Фурье ко всем фигурирующим в формуле (7.49) величинам. Предпола-

[1]) Для устранения возможных сомнений относительно общего множителя, равного 2, рекомендуется решить задачу 2 в конце этой главы.

гается, что волновые функции внешних частиц (т. е. начальных и конечных электронов и протонов) являются плоскими волнами, как в (7.2), (7.3) и (7.34). Тогда, например, первый член в (7.49) перейдет в

$$\frac{e^4}{V^2}\int d^4x\, d^4y\, d^4z\, d^4w \sqrt{\frac{m^2}{E_fE_i}}\sqrt{\frac{M^2}{\mathscr{E}_f\mathscr{E}_i}}\, \frac{d^4q_1\, d^4q_2\, d^4p\, d^4P}{(2\pi)^4(2\pi)^4(2\pi)^4(2\pi)^4}\, \frac{e^{-iq_1\cdot(x-w)}}{q_1^2+i\varepsilon}\times$$
$$\times\frac{e^{-iq_2\cdot(y-z)}}{q_1^2+i\varepsilon}\left[e^{ip_f\cdot x}\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_\mu \frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{\hat{p}-m+i\varepsilon}\gamma_\nu u(p_i, s_i)e^{-ip_i\cdot y}\right]\times$$
$$\times\left[e^{iP_f\cdot w}\bar{u}(P_f, S_f)\gamma^\mu \frac{e^{-iP\cdot(w-z)}}{\hat{P}-M+i\varepsilon}\gamma^\nu u(P_i, S_i)e^{-iP_i\cdot z}\right]. \quad (7.50)$$

Проведем интегрирование по всем пространственным координатам. Интегрирование по каждой из пространственных координат дает множитель $(2\pi)^4$ и δ-функцию, выражающую сохранение энергии-импульса в вершине, отвечающей этой координате. Далее можно проинтегрировать по импульсам; в результате (7.50) примет вид

$$\frac{e^4}{V^2}\sqrt{\frac{m^2}{E_fE_i}}\sqrt{\frac{M^2}{\mathscr{E}_f\mathscr{E}_i}}(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i)\int\frac{dq_1}{(2\pi)^4}\frac{1}{q_1^2+i\varepsilon}\times$$
$$\times\frac{1}{(q-q_1)^2+i\varepsilon}\left[\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_\mu\frac{1}{\hat{p}_f-\hat{q}_1-m+i\varepsilon}\gamma_\nu u(p_i, s_i)\right]\times$$
$$\times\left[\bar{u}(P_f, S_f)\gamma^\mu\frac{1}{\hat{P}_f+\hat{q}_1-M+i\varepsilon}\gamma^\nu u(P_i, S_i)\right], \quad (7.51)$$

где, как и прежде, $q \equiv p_f - p_i$.

Обратите внимание на δ-функцию, отражающую общий закон сохранения энергии-импульса, и на интегрирование по 4-импульсу q_1, текущему вдоль замкнутой петли фейнмановской диаграммы в импульсном представлении, изображенной на рис. 7.4, *в*. Множители $(2\pi)^4$ сократились, за исключением одного, стоящего при четырехмерной δ-функции, и компенсирующего его множителя $(2\pi)^{-4}$, входящего в интеграл по d^4q_1.

Можно установить соответствие между всеми остальными выражениями, входящими в (7.51), и фейнмановской диаграммой подобно тому, как это было сделано для диаграммы низшего порядка, показанной на рис. 7.3. Каждая вершина вносит множитель $-ie\gamma_\mu$, а каждая внешняя частица — множитель $\sqrt{m/E}$. Новым здесь является фактор $i[\hat{p}-m+i\varepsilon]^{-1}$, который в матричном порядке ставится между вершинами и представляет собой пропагатор, относящийся к виртуальному промежуточному фермиону.

Достаточно небольшого опыта, чтобы научиться, глядя на заданную диаграмму Фейнмана, сопоставить ей выражение типа

(7.51). Амплитуда диаграммы Фейнмана, изображенной на рис. 7.4, *г*, отличается от (7.51) заменой блока, относящегося к протону, на

$$\bar{u}(P_f, S_f)\gamma^\nu \frac{1}{\hat{P}_i - \hat{q}_i - M + i\varepsilon}\gamma^\mu u(P_i, S_i). \tag{7.52}$$

Окончательное вычисление амплитуд (7.51) и (7.52) не является тривиальным; оно требует проведения сложного четырехмерного интегрирования. В статическом пределе, когда протон рассматривается как точечный кулоновский источник, интеграл был вычислен Далицем [60]. В этом случае возникают трудности, связанные с бесконечным радиусом кулоновского взаимодействия. Мы не будем проводить дальнейших вычислений.

§ 29. Тормозное излучение

Может оказаться, что один из двух квантов, участвующих в обмене, изображенном на рис. 7.4, *в* и *г*, удовлетворяет условию Эйнштейна $q^2 = 0$. Тогда он может быть испущен в виде свободного излучения, называемого тормозным. Для изучения влияния, оказываемого таким взаимодействием с полем излучения на процесс рассеяния, мы вновь воспользуемся эвристическими соображениями, близкими к приведенным в книге Шиффа [22]. Это позволит без большого труда получить полезные результаты, совпадающие с теми, которые получаются на основе строгого квантового рассмотрения излучения, излагаемого в [50].

Четырехмерный потенциал «фотона» с 4-импульсом k_μ и поляризацией ε^μ записывается в виде плоской волны

$$A^\mu(x, k) = \frac{\varepsilon^\mu}{\sqrt{2kV}}\left(e^{-ik\cdot x} + e^{ik\cdot x}\right), \tag{7.53}$$

где $k_\mu k^\mu = 0$. ε^μ является единичным 4-вектором поляризации, удовлетворяющим условию поперечности

$$\varepsilon_\mu k^\mu = 0. \tag{7.54}$$

Существует лоренцева система отсчета, в которой ε^μ является чистым пространственноподобным вектором, т. е. $\varepsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$, $\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = 1$; в произвольной лоренцевой системе 4-вектор ε^μ пространственноподобен и нормирован условием

$$\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = -1. \tag{7.55}$$

Нормировочная постоянная в (7.53) выбрана так, что энергия волны A^μ равна $\omega = k_0 = |\mathbf{k}|$. Чтобы убедиться в этом, вычислим

$$U = \frac{1}{2}\int d^3x\,(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \int d^3x\,\mathbf{B}^2.$$

Поскольку

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = i\sqrt{k/2V}\,\mathbf{k}^e \times \boldsymbol{\varepsilon}\,(e^{-ikx} - e^{ikx}) = \sqrt{2k/V}\,\mathbf{k}^e \times \boldsymbol{\varepsilon} \sin k \cdot x$$

и, согласно (7.54) и (7.55),

$$\mathbf{k}^e \times \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{k}^e \times \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{k}^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - (\varepsilon^0)^2 = +1,$$

имеем

$$U = \frac{2k}{V} \int d^3x \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = k = \omega.$$

Рассмотрим амплитуду рассеяния, описывающую излучение такого «фотона» во время рассеяния. Для простоты вернемся к статическому приближению, заменив протон статическим кулоновским полем, как в (7.4), и найдем S_{fi} в наинизшем неисчезающем порядке по e.

Диаграммы Фейнмана для этого процесса, изображенные на рис. 7.5, отвечают процессу второго порядка. Одна вершина соответствует взаимодействию электрона с кулоновским полем, а

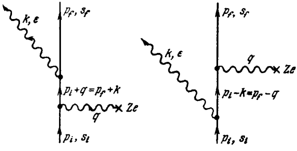


Рис. 7.5. Тормозное излучение электрона в кулоновском поле.

другая — испусканию тормозного кванта. Испускание излучения в первом порядке в отсутствие внешнего поля запрещено законом сохранения энергии и импульса: $k^2 = 0 \neq (p_f - p_i)^2 < 0$.

Во втором порядке элемент S-матрицы имеет вид

$$S_{fi} = e^2 \int d^4x\, d^4y\, \bar{\psi}_f(x) \{ -i\hat{A}(x, k)\, iS_F(x-y) (-i\gamma^0) A_0^{\text{кул}}(y) + \\ + (-i\gamma^0) A_0^{\text{кул}}(x)\, iS_F(x-y) [-i\hat{A}(y, k)] \} \psi_i(y), \quad (7.56)$$

где

$$A_0^{\text{кул}}(x) = \frac{-Ze}{4\pi |\mathbf{x}|},$$

а два члена соответствуют различному порядку расположения вершин, как показано на рис. 7.5.

Как обычно, удобно перейти в (7.56) к импульсному представлению, произведя фурье-преобразование всех входящих в эту формулу величин и проинтегрировав по пространственным координатам. В результате этой, теперь уже привычной нам операции получаем

$$S_{fi} = \frac{-Ze^3}{V^{3/2}} 2\pi\delta(E_f + k - E_i) \frac{1}{\sqrt{2k}} \sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \bar{u}(p_f, s_f) \times$$
$$\times \left[(-i\hat{\varepsilon}) \frac{i}{\hat{p}_f + \hat{k} - m} (-i\gamma_0) + (-i\gamma_0) \frac{i}{\hat{p}_i - \hat{k} - m} (-i\hat{\varepsilon})\right] u(p_i, s_i), \tag{7.57}$$

где $q = p_f + k - p_i$. Имеется еще дополнительный вклад от первого члена в (7.53), содержащий δ-функцию $\delta(E_i + k - E_f)$. Этот член описывает поглощение энергии в процессе рассеяния и не дает вклада в рассматриваемый нами процесс, в котором налетающий электрон передает энергию полю излучения и испускается с энергией $E_f = E_i - k < E_i$. Отметим новую черту, появившуюся в (7.57), которая пополняет наши растущие знания *о фейнмановских амплитудах: вершине испускания свободного фотона с поляризацией* ε_μ соответствует множитель $(-i\hat{\varepsilon})$ и фактор $1/\sqrt{2kV}$ возникает как нормировочный множитель *фотонной «волновой функции»*.

Сечение тормозного излучения можно получить из S-матрицы (7.57). Мы ограничимся предельным случаем $k \to 0$, т. е. испусканием очень мягкого фотона. Более общий результат, известный под названием формулы Бете — Гайтлера, можно найти в большинстве других учебников. В нашем предельном случае выражение в квадратных скобках в формуле (7.57) принимает вид

$$-i\bar{u}(p_f, s_f)\left[\hat{\varepsilon} \frac{(\hat{p}_f + \hat{k} + m)\gamma_0}{(p_f + k)^2 - m^2} + \gamma_0 \frac{(\hat{p}_i - \hat{k} + m)\hat{\varepsilon}}{(p_i - k)^2 - m^2}\right] u(p_i, s_i) \approx$$
$$\approx -i\bar{u}(p_f, s_f)\left\{\frac{[2\varepsilon\cdot p_f - (\hat{p}_f - m)\hat{\varepsilon}]\gamma_0}{2k\cdot p_f} + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma_0[2\varepsilon\cdot p_i - \hat{\varepsilon}(\hat{p}_i - m)]}{-2k\cdot p_i}\right\} u(p_i, s_i) =$$
$$= -i\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_0 u(p_i, s_i)\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f} - \frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right), \tag{7.58}$$

где мы пренебрегли величиной $k \to 0$ в знаменателе и на последнем этапе воспользовались свойствами (3.9) дираковских спиноров. В пределе $k \to 0$ матричный элемент тормозного излучения содержит амплитуду упругого рассеяния в качестве сомножителя. Чтобы вычислить сечение, мы берем из (7.57) и (7.58) квадрат модуля S_{fi}, делим его на поток $|\mathbf{v}|/V$ и на $2\pi\delta(0)$ и получаем скорость перехода, а затем производим суммирование по конечным состояниям $(V^2 d^3k\, d^3p_f)/(2\pi)^6$, лежащим в интересующей нас области фазового пространства. Для неполяризованных электронов требуется также просуммировать по конечным и усреднить по начальным спиновым состояниям электрона. В итоге получаем

$$d\sigma = \frac{Z^2e^6m^2}{2k\,|\mathbf{v}_i|\,E_fE_i} \int \left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f} - \frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right)^2 \frac{|\bar u(p_f\,s_f)\,\gamma_0 u(p_i,s_i)|^2}{|\mathbf{q}|^4} \times$$
$$\times 2\pi\delta(E_f + k - E_i)\,\frac{d^3k\,d^3p_f}{(2\pi)^6}$$

Выделяя члены, соответствующие упругому рассеянию (7.11), находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_e \frac{e^2}{2k\,(2\pi)^3}\,k^2\,d\Omega_k\,dk\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f} - \frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right)^2 \theta\,(E_i - m - k). \tag{7.59}$$

Это сечение соответствует тому, что электрон окажется в телесном угле $d\Omega_f$, а фотон с поляризацией ε будет испущен с импульсом $\mathbf{k}$, лежащим в интервале $d\Omega_k\,dk$. Таким образом, сечение рассеяния с испусканием мягкого фотона разбивается на два множителя, один из которых есть сечение упругого рассеяния электрона при той же энергии и в тот же телесный угол.

Из (7.59) видно, что энергетический спектр фотона имеет вид dk/k, поэтому вероятность испускания фотона с нулевой энергией бесконечно велика. Это явление называется «инфракрасной катастрофой». Для преодоления возникшей трудности необходим тщательный анализ экспериментальных условий, в которых наблюдается тормозное излучение. Суть дела состоит в том, что любой регистрирующий прибор имеет конечное разрешение по энергии, поэтому если он детектирует неупруго рассеянные электроны в некотором конечном интервале энергии, включающем точку $k = 0$, то он регистрирует также и упруго рассеянные электроны.

Для корректного сравнения с экспериментом необходимо учесть как упругое так и неупругое сечения, вычисленные в одном и том же порядке по e^2. Поскольку вклад тормозного излучения (7.59) имеет порядок e^2 по отношению к вкладу упругого рассеяния, необходимо учесть в том же порядке по e^2 радиационные поправки к $(d\sigma/d\Omega_f)_{el}$. Последние содержат члены двух типов. Во-первых это члены, описывающие кулоновское рассеяние электрона во втором порядке; соответствующие диаграммы Фейнмана изображены на рис. 7.4, *а, б*. Во-вторых, необходимо учесть взаимодействие электрона с самим собой через поле излучения.

Фейнмановские диаграммы для этого процесса, приведенные на рис. 7.6, изображают виртуальный фотон, испускаемый электроном и вновь поглощаемый им же, вместо того, чтобы провзаимодействовать с кулоновским источником (или протоном), как на рис. 7.4, *a*. Отвечающая этим диаграммам амплитуда содержит расходящийся член, который в точности компенсирует расходимость в (7.59) при $k = 0$. Нам необходимо накопить достаточно опыта, прежде чем браться за решение столь тонкого вопроса, как вычисление этой амплитуды.

Рис. 7.6. Радиационные поправки к кулоновскому рассеянию.

Прежде чем закончить обсуждение формулы (7.59), найдем еще сечение испускания мягкого тормозного кванта в интервал энергии ΔE, который не содержит в себе точку, соответствующую упругому процессу. Начнем с суммирования по поляризациям фотона, для чего воспользуемся весьма удобной техникой, предложенной Фейнманом [54]. Заметим, что точное выражение (7.57) для матрицы рассеяния обращается в нуль, если заменить поляризацию фотона ε^μ на его 4-импульс k^μ. Это свойство сохраняется также и в приближении мягких фотонов (7.59). Оно является следствием сохранения тока $\partial j_\mu(x)/\partial x_\mu = 0$, которое в импульсном представлении выглядит как $k_\mu j^\mu(k) = 0$. Сохранение тока тесно связано с калибровочной инвариантностью электродинамики, поскольку в импульсном пространстве калибровочное преобразование имеет вид $A^\mu(k) \to A^\mu(k) + k^\mu \Lambda(k)$ и добавочный член, пропорциональный k^μ, не должен менять конечный результат.

Чтобы воспользоваться этим свойством, запишем

$$\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu J^{\mu\nu} = \left(\frac{\varepsilon \cdot p_f}{k \cdot p_f} - \frac{\varepsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right)^2 \tag{7.60}$$

и выберем систему координат, в которой $k^\mu = (k^0, k^1, 0, 0)$, где $k^1 = k^0 = k$. Так как величина (7.60) является скаляром, ее можно вычислять в произвольной лоренцевой системе отсчета; в частности, мы выберем такую систему, в которой скалярный потенциал в (7.53) обращается в нуль, $A^0(x) = 0$. В этой сисхеме потенциал $\mathbf{A}(x)$ поперечен и в соответствии с (7.54) и (7.55) можно задать две поперечные поляризации в виде

$$\varepsilon^{(1)} = (0,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$\varepsilon^{(2)} = (0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Суммируя (7.60) по поляризациям, имеем

$$\sum_{\text{pol}} \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu J^{\mu\nu} = J^{22} + J^{33} = J^{00} - J^{11} - \sum_{\mu=0}^{3} J^\mu_\mu.$$

Поскольку, как отмечалось выше, $k_\mu J^{\mu\nu} = k_\nu J^{\mu\nu} = 0$, то $J^{0\nu} = J^{1\nu}$, $J^{\nu 0} = J^{\nu 1}$ и, следовательно, $J^{00} = J^{11}$. Отсюда получаем

$$\sum_{\text{pol}} \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu J^{\mu\nu} = - J^\mu_\mu,$$

где мы вновь вернулись к принятому ранее соглашению о суммировании. Сумма по поляризациям приобрела явно ковариантный вид. Полученная форма записи является весьма общей; она основана только на сохранении тока. Таким образом, если a^μ и b^μ — сохраняющиеся токи, т. е. $k \cdot a(k) = k \cdot b(k) = 0$, то суммирование по поляризациям дает

$$\sum_{\text{pol}} \left[\varepsilon_\mu(k)\, a^\mu(k)\right]\left[\varepsilon_\nu(k)\, b^\nu(k)\right] = -a \cdot b. \tag{7.61}$$

Применяя (7.61) к (7.59), получаем сечение тормозного излучения, просуммированное по поляризациям. Интегрируя по всем углам вылета фотона и энергиям в интервале $0 < k_{\min} \leqslant k \leqslant k_{\max} \ll E_i$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega_f} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{\text{el}} \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} k\, dk \int d\Omega_k \left[\frac{2p_f \cdot p_i}{k \cdot p_f\, k \cdot p_i} - \frac{m^2}{(k \cdot p_f)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p_i)^2}\right] = \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{el}} \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \left[\frac{2(1 - \boldsymbol{\beta}_f \cdot \boldsymbol{\beta}_i)}{(1 - \mathbf{k}^e \cdot \boldsymbol{\beta}_f)(1 - \mathbf{k}^e \cdot \boldsymbol{\beta}_i)} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{m^2}{E_f^2 (1 - \mathbf{k}^e \cdot \boldsymbol{\beta}_f)^2} - \frac{m^2}{E_i^2 (1 - \mathbf{k}^e \cdot \boldsymbol{\beta}_i)^2}\right],\end{aligned} \tag{7.62}$$

где $\boldsymbol{\beta}_i$ и $\boldsymbol{\beta}_f$ — начальная и конечная скорости электрона, причем $\beta_i = \beta_f = \beta$ в предельном случае мягкого фотона и $\boldsymbol{\beta}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_f = \beta^2 \cos\theta_f$ для рассеяния на угол θ_f. Интегрирование двух последних членов в (7.62) производится элементарно:

$$\int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \frac{m^2}{E^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k}^e)^2} = \frac{m^2}{E^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dz \frac{1}{(1 - \beta z)^2} = 1.$$

Первый интеграл легко берется с помощью другого приема, также введенного Фейнманом [54]. Он состоит в параметризации подынтегрального выражения путем дополнительного интегрирования согласно формуле

$$\frac{1}{ab}=\int\limits_0^1 \frac{dx}{[ax+b(1-x)]^2}. \tag{7.63}$$

Применение этого приема дает

$$\begin{aligned}
2\int \frac{d\Omega_k}{4\pi}\,\frac{1-\boldsymbol{\beta}_f\cdot\boldsymbol{\beta}_i}{(1-\mathbf{k}^e\cdot\boldsymbol{\beta}_f)(1-\mathbf{k}^e\cdot\boldsymbol{\beta}_i)} &=\\
=2(1-\boldsymbol{\beta}_f\cdot\boldsymbol{\beta}_i)\int\limits_0^1 dx\int\frac{d\Omega_k}{4\pi}\,\frac{1}{[1-\mathbf{k}^e\cdot(\boldsymbol{\beta}_f x+\boldsymbol{\beta}_i(1-x))]^2} &=\\
=2(1-\boldsymbol{\beta}_f\cdot\boldsymbol{\beta}_i)\int\limits_0^1 dx\,\frac{1}{1-[\boldsymbol{\beta}_f x+\boldsymbol{\beta}_i(1-x)]^2} &=\\
=2(1-\beta^2\cos\theta)\int\limits_0^1 dx\,\frac{1}{[1-\beta^2+4\beta^2\sin^2(\theta/2)\,x\,(1-x)]} &\approx\\
\approx\begin{cases} 2\left(1+\frac{4}{3}\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+O(\beta^4), & \beta\ll 1,\\ 2\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)+O\left(\frac{m^2}{q^2}\right), & \frac{m^2}{q^2}\ll 1,\end{cases}&\\
q^2=(p_f-p_i)^2\approx -4E^2\sin^2\frac{\theta}{2}.&
\end{aligned}$$

Таким образом, сечение тормозного излучения мягких квантов равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{el}}\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{k_{\max}}{k_{\min}}\begin{cases}\frac{4}{3}\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}+O(\beta^4), & \text{NR},\\ \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)-1+O\left(\frac{m^2}{q^2}\right), & \text{ER};\end{cases} \tag{7.64}$$

здесь первое выражение справедливо для нерелятивистских (NR), а второе для ультрарелятивистских (ER) электронов. Чтобы получить конечный результат при $k_{\min}\to 0$, формулу (7.64) необходимо объединить с формулой для радиационных поправок к $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{el}}$.

§ 30. Комптоновское рассеяние

Теперь мы можем рассмотреть взаимодействие с полем плоской волны (7.53) во втором порядке. Пусть (7.53) описывает начальный падающий фотон, который поглощается электроном в одной вершине, а

$$A'_\mu(x', k') = \frac{1}{\sqrt{2k'V}}\, \varepsilon'_\mu \left(e^{-ik'\cdot x'} + e^{ik'\cdot x'}\right) \tag{7.65}$$

описывает конечный фотон, испускаемый в другой вершине. Этот процесс называется комптоновским рассеянием. Он происходит на свободном электроне с сохранением энергии и импульса

$$k + p_i = k' + p_f. \tag{7.66}$$

Амплитуда комптоновского рассеяния во втором порядке отличается от (7.56) тем, что она содержит $\gamma_\mu A^\mu(Z, k')$ вместо $\gamma_0 A_0^{\text{кул}}$. Подставляя (7.53) и (7.65) в S-матрицу второго порядка и переходя с помощью преобразования Фурье к импульсному представлению, получим

$$S_{fi}^{\text{компт}} = \frac{e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}}\,\frac{1}{\sqrt{2k\cdot 2k'}}\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_f + k' - p_i - k)\,\bar{u}(p_f, s_f)\,\times$$
$$\times\left[(-i\hat{\varepsilon}')\frac{i}{\hat{p}_i + \hat{k} - m}(-i\hat{\varepsilon}) + (-i\hat{\varepsilon})\frac{i}{\hat{p}_i - \hat{k}' - m}(-i\hat{\varepsilon}')\right]u(p_i, s_i). \tag{7.67}$$

Соответствующие диаграммы Фейнмана изображены на рис. 7.7. В (7.67) опущены три добавочных члена, которые отличаются

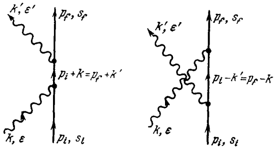


Рис. 7.7. Комптоновское рассеяние.

либо знаком k, либо k', либо, наконец, знаками k и k'. Два из них обращаются в нуль, поскольку содержат четырехмерную δ-функцию, налагающую следующие условия на 4-импульсы:

$$p_i = p_f + k + k', \quad p_f = p_i + k + k',$$

которым невозможно удовлетворить. Эти условия соответствуют кинематически запрещенному процессу распада свободного электрона на свободный электрон и два фотона. В третьем члене с переставленными k и k' требуется выполнение условия $k' + p_i = k + p_f$, которое отвечает переходу фотона в результате рассеяния из начального состояния с 4-импульсом k' в конечное с 4-импульсом k. Это кинематическое условие не может быть выполнено совместно с (7.66), поэтому данный член также должен быть отброшен. Оставленный в (7.67) член возникает из слагаемого $e^{-ik\cdot x}$ в (7.53), которое отвечает поглощению в точке x фотона с 4-импульсом k^μ, и из слагаемого $e^{+ik'\cdot x}$ в (7.65), соответствующего испусканию в x' фотона с 4-импульсом k'.

Заметим, что выражение (7.67) для $S_{fi}^{\text{компт}}$ симметрично относительно перестановки

$$k,\ \varepsilon \leftrightarrow -k',\ \varepsilon'.$$

Это свойство известно как кросс-симметрия. Данная симметрия является точной во всех порядках по взаимодействию [50]. Она играет важную роль в физике элементарных частиц.

Вычисление сечения комптоновского рассеяния производится по уже знакомой нам схеме; единственная серьезная трудность заключается в спинорной алгебре. Сечение рассеяния $d\sigma$ получается возведением амплитуды (7.67) в квадрат, делением ее на $(2\pi)^4\delta^4(0)$, в результате чего получается скорость перехода, делением на поток падающих частиц $|\mathbf{v}|/V$ и на число частиц в единице объема мишени $1/V$ и, наконец, суммированием по фазовому объему $[V^2/(2\pi)^6]\, d^3p_f d^3k'$:

$$d\sigma = \frac{e^4 m}{(2\pi)^2\, 2kE_i\,|\mathbf{v}|} \int \frac{m\, d^3p_f}{E_f} \frac{d^3k'}{2k'}\, \delta^4(p_f + k' - p_i - k) \times$$
$$\times \left| \bar{u}(p_f, s_f)\left(\hat{\varepsilon}' \frac{1}{\hat{p}_i + \hat{k} - m}\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}\frac{1}{\hat{p}_i - \hat{k}' - m}\hat{\varepsilon}'\right) u(p_i, s_i)\right|^2. \quad (7.68)$$

В лабораторной системе, в которой электрон покоится, величина $m/kE_i|\mathbf{v}|$ есть просто $1/k$. Интеграл по импульсу электрона отдачи и по телесному углу рассеянного фотона $d\Omega_{k'}$, в направлении угла рассеяния θ, в лабораторной системе вычисляется с помощью равенства (7.40):

$$d\Omega_{k'} \int \frac{k'^2\, dk'}{2k'} \frac{m d^3p_f}{E_f}\, \delta^4(p_f + k' - p_i - k) =$$
$$= m\, d\Omega_{k'} \int_0^\infty k'\, dk'\, \delta[(k + p_i - k')^2 - m^2]\, \theta(k + m - k') =$$
$$= m\, d\Omega_{k'} \int_0^{k+m} k'\, dk'\, \delta[2m(k - k') - 2kk'(1 - \cos\theta)] = \frac{k'^2}{2k}\, d\Omega_{k'}, \quad (7.69)$$

где k' и k связаны условием Комптона, налагаемым δ-функцией в (7.69):

$$k' = \frac{k}{1 + (k/m)(1 - \cos\theta)} = \frac{k}{1 + (2k/m)\sin^2(\theta/2)}. \qquad (7.70)$$

Формула (7.68) принимает теперь следующий вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \left| \bar{u}(p_f, s_f)\left(\hat{\varepsilon}' \frac{1}{\hat{p}_i + \hat{k} - m}\hat{\varepsilon} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \hat{\varepsilon}\frac{1}{\hat{p}_i - \hat{k}' - m}\hat{\varepsilon}'\right) u(p_i, s_i)\right|^2. \qquad (7.71)$$

Она дает дифференциальное сечение для случая, когда электроны и фотоны поляризованы как в начальном, так и в конечном состояниях. Спинорную структуру матричного элемента можно упростить выбором специальной калибровки, в которой начальный и конечный фотоны поперечно поляризованы в лабораторной системе отсчета, т. е.

$$\varepsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon}), \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{k} = 0,$$
$$\varepsilon^{\mu'} = (0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \mathbf{k}' = 0.$$

При таком выборе $\varepsilon \cdot p_i = \varepsilon' \cdot p_i = 0$ и спинорная часть матричного элемента сводится к

$$\bar{u}(p_f, s_f)\left(\hat{\varepsilon}' \frac{\hat{p}_i + \hat{k} + m}{2k \cdot p_i}\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}\frac{\hat{p}_i - \hat{k}' + m}{-2k' \cdot p_i}\hat{\varepsilon}'\right) u(p_i, s_i) =$$
$$= -\bar{u}(p_f, s_f)\left(\frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{k}}{2k \cdot p_i} + \frac{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}'\hat{k}'}{2k' \cdot p_i}\right) u(p_i, s_i),$$

где мы переставили $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\varepsilon}'$ справа налево и, как и прежде, воспользовались следующим свойством дираковских спиноров: $(\hat{p}_i + m)\hat{\varepsilon}u(p_i, s_i) = \hat{\varepsilon}(-\hat{p}_i + m)u(p_i, s_i) = 0$.

Подставляя полученный результат в (7.71), суммируя по спиновым состояниям s_f конечного электрона и усредняя по начальным спиновым состояниям s_i, получаем с помощью (7.13) сечение для неполяризованного электрона

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{\pm s_i,\, s_f} \frac{d\sigma}{d\Omega} =$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2 \mathrm{Sp}\, \frac{\hat{p}_f + m}{2m}\left(\frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{k}}{2k \cdot p_i} + \frac{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}'\hat{k}'}{2k' \cdot p_i}\right)\frac{\hat{p}_i + m}{2m}\left(\frac{\hat{k}\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}'}{2k \cdot p_i} + \frac{\hat{k}'\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{2k' \cdot p_i}\right). \qquad (7.72)$$

В этой формуле мы сталкиваемся со следами от произведений большого числа матриц γ, вплоть до восьми. Имеются три отличных друг от друга следа, которые необходимо вычислить; из циклической симметрии следа и теоремы 6 § 26 следует, что два перекрестных члена, имеющие в знаменателе $(k \cdot p_i)(k' \cdot p_i)$, равны друг другу. Для упрощения сложных следов, содержащих один и тот же вектор более одного раза, обычно бывает целесообразно переставить сомножители таким образом, чтобы одинаковые векторы оказались рядом; тогда, пользуясь равенством $\hat{a}\hat{a} = a^2$, можно избавиться от двух матриц γ.

С помощью этого приема вычисление следов в (7.72) производится следующим образом:

$$T_1 = \mathrm{Sp}(\hat{p}_f + m)\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{k}(\hat{p}_i + m)\hat{k}\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}' =$$

$$= \mathrm{Sp}\,\hat{p}_f\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{k}\hat{p}_i\hat{k}\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}' =$$

(члены, пропорциональные m^2, выпадают, поскольку $k^2 = 0$)

$$= \mathrm{Sp}\,2k \cdot p_i\hat{p}_f\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{k}\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}' = 2k \cdot p_i\,\mathrm{Sp}\,\hat{p}_f\hat{\varepsilon}'\hat{k}\hat{\varepsilon}' =$$

$$= 8k \cdot p_i(k \cdot p_f + 2k \cdot \varepsilon' p_f \cdot \varepsilon') =$$

(здесь мы воспользовались теоремой 3)

$$= 8k \cdot p_i[k' \cdot p_i + 2(k \cdot \varepsilon')^2].$$

Здесь был учтен закон сохранения энергии-импульса $k + p_i = k' + p_f$, откуда

$$k' \cdot p_i = k \cdot p_f \quad \text{и} \quad \varepsilon' \cdot p_f = \varepsilon' k. \tag{7.73}$$

Подобным же образом вычисляем след

$$T_2 = \mathrm{Sp}(\hat{p}_f + m)\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}'\hat{k}'(\hat{p}_i + m)\hat{k}'\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon},$$

который отличается от T_1 только заменой $\varepsilon,\ k \longleftrightarrow \varepsilon',\ -k'$, поэтому

$$T_2 = 8k' \cdot p_i[k \cdot p_i - 2(k' \cdot \varepsilon)^2].$$

Для последнего следа с помощью тех же приемов находим

$$T_3 = \mathrm{Sp}(\hat{p}_f + m)\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{k}(\hat{p}_i + m)\hat{k}'\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} =$$

$$= \mathrm{Sp}(\hat{p}_i + m)\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{k}(\hat{p}_i + m)\hat{k}'\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} + \mathrm{Sp}(\hat{k} - \hat{k}')\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{k}\hat{p}_i\hat{k}'\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} =$$

$$= \mathrm{Sp}(\hat{p}_i + m)\hat{k}(\hat{p}_i + m)\hat{k}'\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} + 2k \cdot \varepsilon'\,\mathrm{Sp}(-1)\hat{k}\hat{p}_i\hat{k}'\hat{\varepsilon}' -$$

$$- 2k' \cdot \varepsilon\,\mathrm{Sp}(-1)\hat{\varepsilon}\hat{k}\hat{p}_i\hat{k}' =$$

$$= 2k \cdot p_i\,\mathrm{Sp}\,\hat{p}_i\hat{k}'\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} - 8(k \cdot \varepsilon')^2 k' \cdot p_i + 8(k' \cdot \varepsilon)^2 k \cdot p_i =$$

$$= 8(k \cdot p_i)(k' \cdot p_i)[2(\varepsilon' \cdot \varepsilon)^2 - 1] - 8(k \cdot \varepsilon')^2 k' \cdot p_i + 8(k' \cdot \varepsilon)^2 k \cdot p_i.$$

Подставляя результаты вычислений следов в (7.72), получаем формулу Клейна — Нишины [61] для сечения комптоновского рассеяния

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left[\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}+4(\varepsilon'\cdot\varepsilon)^2-2\right], \tag{7.74}$$

где k' и k связаны друг с другом углом рассеяния согласно (7.70).

В низкоэнергетическом пределе $k\to 0$ получаем классическое томсоновское сечение

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{k\to 0}=\frac{\alpha^2}{m^2}(\varepsilon\cdot\varepsilon')^2,$$

где величина

$$\frac{\alpha}{m}=\frac{e^2}{4\pi mc^2}=2{,}8\cdot 10^{-13}\ \text{см}$$

есть классический радиус электрона.

Если угол рассеяния $\theta\to 0$, то $k\to k'$ и из формулы (7.74) мы видим, что для рассеяния вперед сечение оказывается томсоновским при всех энергиях. Наконец, для неполяризованных фотонов сечение получается суммированием по конечным поляризациям ε' и усреднением по начальным поляризациям ε. Это производится в точности так же, как в классической электродинамике, и мы можем позаимствовать оттуда конечный результат

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left(\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}-\sin^2\theta\right).$$

Полное сечение нетрудно получить интегрированием по телесному углу фотона. Вводя $z=\cos\theta$ и используя (7.70), находим

$$\bar{\sigma}=\frac{\pi\alpha^2}{m^2}\int_{-1}^{+1}dz\left\{\frac{1}{[1+(k/m)(1-z)]^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{[1+(k/m)(1-z)]}-\frac{1-z^2}{[1+(k/m)(1-z)]^2}\right\}. \tag{7.75}$$

При низких энергиях сечение вновь переходит в томсоновское

$$\bar{\sigma}=\frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m^2}\quad\text{при}\quad\frac{k}{m}\to 0.$$

При высоких энергиях полное сечение равно

$$\bar{\sigma}\approx\frac{\pi\alpha^2}{km}\left[\ln\frac{2k}{m}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{m}{k}\ln\frac{k}{m}\right)\right].$$

Доминирующим является логарифмический член, возникающий от второго слагаемого в (7.75).

§ 31. Аннигиляция электронной пары в гамма-лучи

Если повернуть диаграммы Фейнмана для комптоновского рассеяния и расположить их, как показано на рис. 7.8, то мы получим другой интересный физический процесс. Это двухфотонная аннигиляция электрон-позитронной пары.

Соответствующий матричный элемент в импульсном пространстве с указанными на рис. 7.8 обозначениями имеет вид

$$S_{fi}^{(\text{pair})} = \frac{e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m^2}{E_+E_-2k_12k_2}}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_+-p_-)\,\bar{v}(p_+,s_+)\times$$
$$\times\left[(-i\hat{\varepsilon}_2)\frac{i}{\hat{p}_- - \hat{k}_1 - m}(-i\hat{\varepsilon}_1)+\right.$$
$$\left.+(-i\hat{\varepsilon}_1)\frac{i}{\hat{p}_- - \hat{k}_2 - m}(-i\hat{\varepsilon}_2)\right]u(p_-,s_-). \quad (7.76)$$

Он симметричен относительно перестановки двух фотонов, что согласуется с требованиями статистики Бозе. Этот процесс имеет

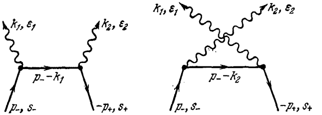


Рис. 7.8. Аннигиляция пары.

следующую интерпретацию на языке фейнмановских пропагаторов: родившийся в прошлом электрон переходит в результате рассеяния в состояние с отрицательной энергией $-p_+$ и распространяется назад в прошлое. По пути он испускает два фотона, т. е. дважды отдает энергию полю излучения. Это наинизший по e^2 порядок, в котором может происходить данный процесс, поскольку при однофотонной аннигиляции пары нарушается закон сохранения энергии-импульса. Чтобы обеспечить симметрию $S_{fi}^{(\text{pair})}$ относительно перестановки двух фотонов, необходимо учитывать обе изображенные на рис. 7.8 диаграммы.

Возвращаясь к амплитуде комптоновского рассеяния, мы замечаем большое сходство между (7.76) и (7.67). Действительно, при замене

$$\begin{aligned} &\varepsilon,\ k \leftrightarrow \varepsilon_1,\ -k_1,\\ &\varepsilon',\ k' \leftrightarrow \varepsilon_2,\ +k_2,\\ &p_i,\ s_i \leftrightarrow p_-,\ s_-,\\ &p_f,\ s_f \leftrightarrow -p_+,\ +s_+ \end{aligned} \quad (7.77)$$

эти амплитуды переходят друг в друга. Мы имеем в данном случае пример общего правила [50], справедливого во всех порядках теории возмущений, которое связывает между собой процесс

$$A+B\to C+D$$

и, например, процесс

$$A+\bar{C}\to\bar{B}+D,$$

где $\bar{B}$ означает античастицу по отношению к B и т. д.

Другой пример применения этого правила, называемого кросс-симметрией, относится к связи между амплитудой тормозного излучения (7.56), которой соответствуют диаграммы на рис. 7.5, и амплитудой рождения пары в кулоновском поле, изображенной на рис. 7.9.

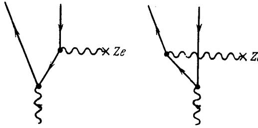


Рис. 7.9. Рождение пары в кулоновском поле.

Дифференциальное сечение получается из матричного элемента (7.76) уже знакомым нам способом. Для неполяризованного позитрона, сталкивающегося с покоящимся в лабораторной системе неполяризованным электроном, оно имеет вид

$$d\bar{\sigma}=\frac{e^4}{(2\pi)^2}\int\frac{m}{E_+\beta_+}\frac{(-1)}{4}\,\mathrm{Sp}\,\frac{m-\hat{p}_+}{2m}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_2\hat{k}_1\hat{\varepsilon}_1}{2p_-\cdot k_1}+\frac{\hat{\varepsilon}_1\hat{k}_2\hat{\varepsilon}_2}{2p_-\cdot k_2}\right)\frac{\hat{p}_-+m}{2m}\times$$
$$\times\left(\frac{\hat{\varepsilon}_1\hat{k}_1\hat{\varepsilon}_2}{2p_-\cdot k_1}+\frac{\hat{\varepsilon}_2\hat{k}_2\hat{\varepsilon}_1}{2p_-\cdot k_2}\right)\frac{d^3k_1}{2k_1}\frac{d^3k_2}{2k_2}\,\delta^4(k_1+k_2-p_--p_+),\qquad(7.78)$$

где $\beta_+=p_+/E_+$ есть скорость налетающего позитрона, множитель $^1/_4$ возник в результате усреднения по начальным спиновым состояниям электрона и позитрона, а знак минус возник за счет принятой нами нормировки волновой функции позитрона (см. формулы (3.9)). Матричный элемент упростился благодаря выбору поперечной калибровки, согласно которой в лабораторной системе имеем

$$\varepsilon_1\cdot p_-=\varepsilon_2\cdot p_-=0.$$

В силу кросс-симметрии эта калибровка совпадает с использованной нами при расчете эффекта Комптона. Таким образом, нет необходимости заново вычислять следы, можно воспользоваться (7.72) и (7.73), произведя замену (7.77). Остается только избавиться от δ-функции, учтя при этом кинематические соотношения в лабораторной системе отсчета:

$$\int \frac{d^3k_1}{2k_1}\frac{d^3k_2}{2k_2}\delta^4(k_1+k_2-p_+-p_-)=$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{2}k_1\,dk_1\,d\Omega_{k_1}\delta[(p_++p_-)^2-2k_1\cdot(p_++p_-)]\theta(E_++E_--k_1)=$$

$$=\frac{d\Omega_{k_1}}{2}\int_0^{E_++m} k_1\,dk_1\,\delta[2m^2+2mE_+-2k_1(m+E_+-p_+\cos\theta)]=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{m(m+E_+)}{(m+E_+-p_+\cos\theta)^2}d\Omega_{k_1}. \qquad (7.79)$$

Подставляя результаты вычисления следов и интегрирования по фазовому пространству в (7.78), получаем сечение аннигиляции пары, выраженное через энергии и углы в лабораторной системе:

$$\frac{d\bar\sigma}{d\Omega_{k_1}}=-\frac{\alpha^2(m+E_+)}{8p_+(m+E_+-p_+\cos\theta)^2}\left[-\frac{k_2}{k_1}-\frac{k_1}{k_2}+4(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)^2-2\right]=$$

$$=\frac{\alpha^2(m+E_+)}{8p_+(m+E_+-p_+\cos\theta)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{E_+-p_+\cos\theta}{m}+\frac{m}{E_+-p_+\cos\theta}+2-4(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)^2\right], \qquad (7.80)$$

где в соответствии с налагаемыми в (7.78) и (7.79) кинематическими ограничениями

$$k_1=\frac{m(m+E_+)}{m+E_+-p_+\cos\theta}$$

и

$$k_2=m+E_+-k_1=\frac{E_+-p_+\cos\theta}{m}k_1.$$

Полное сечение получается суммированием $d\sigma/d\Omega_{k_1}$ по поляризациям конечных фотонов и интегрированием по телесному углу $d\Omega_{k_1}$. Последнее требует определенной осторожности, поскольку конечное состояние содержит две тождественные частицы. Формула (7.80) означает, что один из фотонов испускается в элемент телесного угла $d\Omega_{k_1}$; вследствие их неразличимости это может быть любой из двух фотонов. Если бы мы проинтегрировали $d\sigma/d\Omega_{k_1}$ по всему телесному углу 4π, мы учли бы каждое различимое состояние дважды. Поэтому при вычислении полного сечения мы возьмем половину этого интеграла

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\int \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k_1}}\, d\Omega_{k_1}. \qquad (7.81)$$

Из (7.81) и (7.80) нетрудно получить полное сечение в пределе низких и высоких энергий: если $\mathbf{p}_+ \to 0$, то $\mathbf{k}_1 \to -\mathbf{k}_2$ и усреднение по поляризациям дает $(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2 \to 1/2$; следовательно [1],

$$\bar{\sigma} = \frac{\alpha^2 \pi}{\beta_+^2 m^2}\left[1 + O\left(\beta_+^2\right)\right], \quad \beta_+ \ll 1.$$

В ультрарелятивистском случае имеем

$$\bar{\sigma} = \frac{\pi\alpha^2}{mE_+}\left[\ln\frac{2E_+}{m} - 1 + O\left(\frac{m}{E_+}\ln\frac{E_+}{m}\right) + \ldots\right],$$

где в ведущий член вносят равные вклады первые два члена в (7.80), а сумма двух других членов в (7.80) имеет фактор малости m/E_+. Впервые этот результат был получен Дираком в 1930 г. [62].

§ 32. Рассеяние электрона и позитрона на электроне

Рассеяние электрона электроном описывается почти так же, как рассеяние электрона протоном. Однако в первом случае имеется дополнительная диаграмма, возникающая вследствие тождественности электронов. Две диаграммы для рассеяния электрона электроном изображены на рис. 7.10, там же указана необходимая кинематика. Соответствующая амплитуда рассеяния, аналогичная амплитуде (7.35) для электрон-протонного рассеяния, имеет следующий вид (спиновые индексы опущены):

$$S_{fi}^{M} = \frac{-e^2 m^2}{V^2\sqrt{E_1 E_2 E_1' E_2'}}\left[i\,\frac{\bar{u}\left(p_1'\right)\left(-i\gamma_\mu\right)u\left(p_1\right)\bar{u}\left(p_2'\right)\left(-i\gamma^\mu\right)u\left(p_2\right)}{\left(p_1 - p_1'\right)^2} - \right.$$
$$\left. - i\,\frac{\bar{u}\left(p_1'\right)\left(-i\gamma_\mu\right)u\left(p_2\right)\bar{u}\left(p_2'\right)\left(-i\gamma^\mu\right)u\left(p_1\right)}{\left(p_1 - p_1'\right)^2}\right](2\pi)^4\delta^4\left(p_1' + p_2' - p_1 - p_2\right). \qquad (7.82)$$

Разные относительные знаки первого и второго членов обусловлены статистикой Ферми, согласно которой амплитуда должна быть антисимметричной относительно перестановки двух конечных электронов. Она, кроме того, антисимметрична относительно

[1]) При $\beta_+ \to 0$ это приближение для $\bar{\sigma}$ является плохим. Плоские волны для электрона и позитрона следует заменить кулоновскими волновыми функциями.

перестановки начальных электронов, что также соответствует требованиям статистики.

В силу аналогичных аргументов амплитуда рассеяния двух тождественных бозонов должна быть симметричной относительно перестановок как начальных, так и конечных частиц. Примером может служить изображенная на рис. 7.8 амплитуда аннигиляции электрон-позитронной пары, которая, как мы видели, симметрична относительно двух фотонов.

Мы не ввели в формулу (7.82) никакого добавочного нормировочного множителя типа $1/\sqrt{2}$ или 2, связанного с появлением обменного члена. Присутствие тождественных частиц в начальном или конечном состоянии не влияет на правила получения дифференциального сечения из амплитуды S_{fi}. Надо, однако, помнить о множителе 1/2 в формуле (7.81). Если в конечном состоянии имеются две тождественные частицы, этот множитель должен быть включен в интегрирование по углам при получении полного сечения. Для тождественных частиц в начальном состоянии никаких дополнительных множителей не появляется, поскольку начальный поток не меняется.

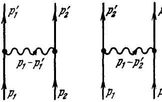


Рис. 7.10. Рассеяние электрона на электроне.

Рассеяние электрона на электроне дает нам простой и ясный пример справедливости этого правила. Для рассеяния вперед с малой передачей импульса $(p_1 - p_1')^2$ можно пренебречь вторым, обменным членом в (7.82). В этом предельном случае амплитуда сводится к комптоновской — результат, который не зависит от статистики.

Выражение для дифференциального сечения рассеяния неполяризованных электронов получается из (7.82) обычным способом. В системе центра инерции дифференциальное сечение равно

$$d\bar{\sigma} = \frac{e^4 m^4}{(2\pi)^2 E^4 (2\beta)} \int \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{[(p_1' - p_1)^2]^2} \operatorname{Sp}\left(\frac{\hat{p}_1' + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \right) \times \right.$$
$$\times \operatorname{Sp}\left(\frac{\hat{p}_2' + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \gamma^\nu \right) - \frac{1}{(p_1' - p_1)^2 (p_2' - p_1)^2} \times$$
$$\times \operatorname{Sp}\left[\frac{(\hat{p}_1' + m)}{2m} \gamma_\mu \frac{(\hat{p}_1 + m)}{2m} \gamma_\nu \frac{(\hat{p}_2' + m)}{2m} \gamma^\mu \frac{(\hat{p}_2 + m)}{2m} \gamma^\nu \right] +$$
$$\left. + (p_1' \leftrightarrow p_2') \right\} \delta^4 (p_1' + p_2' - p_1 - p_2)\, d^3p_1'\, d^3p_2', \quad (7.83)$$

где E обозначает энергию, а β — скорость каждого из электронов в системе центра инерции.

Обратите внимание на то, что в качестве относительной скорости начальных электронов в системе центра инерции фигурирует величина 2β. Для релятивистских электронов ее предельное значение равно удвоенной скорости света. Здесь нет никакого противоречия со специальной теорией относительности, поскольку скорость каждого из электронов в системе отсчета другого не превышает скорости света. Символ $(p_1' \leftrightarrow p_2')$ означает два дополнительных члена, которые получаются из первых двух в формуле для $d\bar{\sigma}$ путем взаимной перестановки p_1' и p_2'.

В формуле (7.83) вклад от интерференции между прямым и обменным членами содержит только один очень длинный след. На рис. 7.11 дано графическое представление квадратов матричных элементов в форме замкнутых петель. Разница между

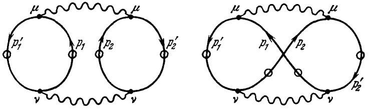


Рис. 7.11. Графическое представление квадратов матричных элементов для рассеяния электрона на электроне. Кружки на линиях показывают на отсутствие фактора $(p^2 - m^2)^{-1}$.

прямым и обменным членами состоит в том, что первый содержит две петли и два следа, а второй — одну петлю и один след. Иногда такие диаграммы бывают полезны для установления порядка индексов μ, ν и выписывания спинорных факторов.

Вычисление следов в формуле (7.83) производится с помощью теорем, приведенных в § 26. В частности, теорема 5 позволяет упростить след из восьми матриц γ в интерференционном члене. Например, переходя для простоты к релятивистским энергиям $E \gg m$ и пренебрегая членами, пропорциональными m^2, получим

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{p}_1'\gamma_\mu\hat{p}_1\gamma_\nu\hat{p}_2'\gamma^\mu\hat{p}_2\gamma^\nu) = -2\,\mathrm{Sp}\,(\hat{p}_1'\gamma_\mu\hat{p}_1\hat{p}_2\gamma^\mu\hat{p}_2') = \\ = -8p_1\cdot p_2\,\mathrm{Sp}\,\hat{p}_1'\hat{p}_2' = -32\,(p_1\cdot p_2)\,(p_1'\cdot p_2').$$

Дифференциальное сечение, выраженное через энергию в системе центра масс E и угол рассеяния θ, имеет вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = \frac{\alpha^2}{8E^2}\left[\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{2}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} + \frac{1+\sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)}\right], \quad (7.84)$$

где первое и третье слагаемые представляют собой квадраты матричных элементов для двух диаграмм, изображенных на рис. 7.10, а второе слагаемое дает вклад от интерференции этих диаграмм.

При получении этого результата были использованы следующие кинематические соотношения: $p_1 \cdot p_2 = p_1' \cdot p_2' = 2E^2$, $p_1' p_2 = p_1 \cdot p_2' = 2E^2 \cos^2(\theta/2)$ и $p_1 \cdot p_1' = p_2 \cdot p_2' = 2E^2 \sin^2(\theta/2)$, которые справедливы, если пренебрегать членами порядка m^2. Выражение (7.84) есть ультрарелятивистский предел формулы Мёллера [58] в системе центра инерции.

Обратимся теперь к рассеянию позитронов на электронах. В силу кросс-инвариантности можно получить сечение из формулы Мёллера заменой, аналогичной (7.77). Диаграммы Фейнмана для этого процесса, известного как рассеяние Баба [63], изображены на рис. 7.12.

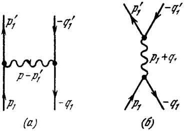


Рис. 7.12. Рассеяние электрона на позитроне.

Путем замены

$$
\begin{aligned}
p_1 &\leftrightarrow p_1, \\
p_1' &\leftrightarrow p_1', \\
p_2 &\leftrightarrow -q_1', \\
p_2' &\leftrightarrow -q_1
\end{aligned}
\tag{7.85}
$$

и изменения общего знака в соответствии с (6.56) получаем амплитуду рассеяния позитрона на электроне

$$
S_{fi}^B = \frac{e^2 m^2}{V^2} \frac{1}{(E_{p_1} E_{p_1'} E_{q_1} E_{q_1'})^{1/2}} \left[i \, \frac{\bar{u}(p_1')(-i\gamma_\mu) u(p_1) \bar{v}(q_1)(-i\gamma^\mu) v(q_1')}{(p_1 - p_1')^2} - \right.
$$
$$
\left. - i \, \frac{\bar{u}(p_1')(-i\gamma_\mu) v(q_1') \bar{v}(q_1)(-i\gamma^\mu) u(p_1)}{(p_1 + q_1)^2} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + q_1' - p_1 - q_1).
\tag{7.86}
$$

Первый член описывает прямое рассеяние; он аналогичен первому члену в амплитуде рассеяния электрона на электроне (7.82). Аннигиляционный член соответствует второму, обменному члену в (7.82). Знак минус между двумя членами возникает вследствие перехода из (7.82) заменой согласно свойству кросс-симметрии.

Антисимметрия амплитуды (7.82) по отношению к перестановке двух начальных либо двух конечных электронов превращается в (7.86) в антисимметрию между входящим электроном с положительной энергией (p_1) и «входящим электроном» с отрицательной энергией ($-q_1'$), движущимся назад во времени, либо между выходящими электронами p_1' и $-q_1$. Чтобы дать интерпретацию этой антисимметрии в терминах теории дырок, заметим, что до взаимодействия начальное состояние содержит электрон p_1 с положительной энергией и море состояний с отрицательной энергией, заполненное, за исключением дырки, в состоянии с отрицательной энергией $-q_1$. В частности, это море содержит электрон с отрицательной энергией в состоянии $-q_1'$, поэтому согласно статистике Ферми начальное состояние должно быть антисимметричным по отношению к перестановке $p_1 \leftrightarrow -q_1'$; подобные рассуждения применимы и к конечному состоянию. Антисимметризация должна быть произведена также по всем остальным частицам из моря, но, поскольку они не фигурируют в (7.86), форма этого выражения никак не меняется от такой антисимметризации.

Сечение рассеяния позитрона на электроне в системе центра инерции получается из (7.83) заменой (7.85) и вычислением следов, производимым так же, как для мёллеровского рассеяния. В ультрарелятивистском случае это дает

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_B = \frac{\alpha^2}{8E^2}\left[\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{2\cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1+\cos^2\theta}{2}\right]. \tag{7.87}$$

§ 33. Поляризационные эффекты при рассеянии электронов

В качестве примера практического применения введенных в гл. 3 спиновых проекционных операторов вернемся к рассмотренному в § 26 сечению Мотта и проведем вычисления для случая поляризованного пучка падающих электронов. В гл. 10 мы увидим, что электроны, возникающие от распада μ-мезонов, поляризованы, причем их спины антипараллельны направлению движения.

Сечение кулоновского рассеяния электронов, имеющих импульс p_i и спин s_i, причем $s_i \cdot p_i = 0$, просуммированное по конечным спиновым состояниям $\pm s_f$, определяется формулой (см. (7.11))

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}\sum_{\pm s_f} |\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0 u(p_i, s_i)|^2. \tag{7.88}$$

Для того чтобы при получении сечения по формуле (7.88) воспользоваться методом взятия следов, введем согласно (3.19) и

(3.22) спиновые проекционные операторы

$$\Sigma(s_i)=\frac{1+\gamma_5\hat{s}_i}{2},$$
$$\Sigma(s_i)\,u(p_i,\ s_i)=u(p_i,\ s_i), \tag{7.89}$$
$$\Sigma(s_i)\,u(p_i,\ -s_i)=0.$$

Повторяя переход от (7.13) к (7.14), получим [1])

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}\sum_{\pm s_f,\, s_i}\{\bar{u}(p_f,\ s_f)\,\gamma_0\Sigma(s_i)\,u(p_i,\ s_i)\}\,\{\bar{u}(p_i,\ s_i)\,\gamma_0u(p_f,\ s_f)\}=$$
$$=\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}\,\mathrm{Sp}\,\gamma_0\left(\frac{1+\gamma_5\hat{s}_i}{2}\right)\frac{(\hat{p}_i+m)}{2m}\,\gamma_0\frac{(\hat{p}_f+m)}{2m}. \tag{7.90}$$

Из (7.15) и (7.18) следует, что след, содержащий вектор спина, равен нулю и мы вновь тем самым возвращаемся к формуле Мотта (7.22). Полученный нами результат о совпадении сечений для поляризованного и неполяризованного начальных пучков справедлив только в наинизшем порядке теории возмущений, но в общем случае он неверен [64].

Приведем пример наблюдаемого поляризационного эффекта. Рассмотрим снова налетающий электрон, спин которого ориентирован вдоль направления движения, и вычислим поляризацию рассеянного электрона как функцию угла рассеяния. Начальный вектор поляризации s_i удовлетворяет условиям

$$s_i^2=-1=(s_i^0)^2-\mathbf{s}_i\cdot\mathbf{s}_i \tag{7.91}$$

и

$$s_i\cdot p_i=0 \quad \text{или} \quad s_i^0=\mathbf{s}_i\cdot\boldsymbol{\beta}_i,$$

где

$$\boldsymbol{\beta}_i=\frac{\mathbf{p}_i}{E_i}. \tag{7.92}$$

Объединяя (7.91) и (7.92), имеем

$$|\mathbf{s}_i|=\frac{1}{\sqrt{1-(\boldsymbol{\beta}_i\cdot\mathbf{s}_i^e)^2}}; \tag{7.93}$$

здесь $\mathbf{s}_i^e$ обозначает единичный вектор в направлении $\mathbf{s}_i$. Электрон, спин которого направлен вдоль вектора $\boldsymbol{\beta}_i$, называют правополяризованным с поляризацией s_{iR}. Для такого электрона имеем

$$\boldsymbol{\beta}_i\cdot\mathbf{s}_{iR}^e=\beta_i \quad \text{и}$$
$$|\mathbf{s}_{iR}|=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}}=\frac{E_i}{m_i}, \quad s_{iR}^0=\beta_i\,|\mathbf{s}_{iR}|. \tag{7.94}$$

[1]) Можно, конечно, ввести $\Sigma(s)$ дважды — как в матричный элемент, так и в сопряженный к нему, но в этом нет необходимости.

Аналогично, электрон со спином, антипараллельным вектору $\boldsymbol{\beta}_i$, называют левополяризованным с поляризацией $s_{iL} = -s_{iR}$, и для него

$$\boldsymbol{\beta}_i \cdot \mathbf{s}^e_{iL} = -\beta_i$$

и

$$|\mathbf{s}_{iL}| = \frac{E_i}{m_i}, \quad s^0_{iL} = -\beta_i |\mathbf{s}_{iL}|.$$

Такие же соотношения справедливы и для рассеянного электрона с той разницей, что всюду индекс i следует заменить на f. Векторы $s_{iR} = -s_{iL}$ с правой и левой поляризацией образуют очень удобный базис, которым мы в дальнейшем будем часто пользоваться. Собственные состояния оператора $\Sigma(s)$ (7.89), отвечающие собственным значениям $s = \pm s_R = \mp s_L$, называют состояниями с положительной и отрицательной спиральностями [65].

Поляризация рассеянных электронов характеризуется величиной

$$P = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}, \tag{7.95}$$

где N_R означает число рассеянных частиц с положительной спиральностью (или с правой поляризацией), а N_L — с отрицательной спиральностью (левой поляризацией). Величины N_R, N_L и P являются, вообще говоря, функциями энергии и угла рассеяния.

Поляризация рассеянных электронов при кулоновском рассеянии правополяризованного пучка определяется согласно (7.11) и (7.95):

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{|\bar{u}(p_f\ s_{fR})\gamma_0 u(p_i\ s_{iR})|^2 - |\bar{u}(p_f\ s_{fL})\gamma_0 u(p_i\ s_{iR})|^2}{|\bar{u}(p_f\ s_{fR})\gamma_0 u(p_i\ s_{iR})|^2 + |\bar{u}(p_f\ s_{fL})\gamma_0 u(p_i\ s_{iR})|^2} = \\ &= \left\{ \mathrm{Sp}\left[\gamma_0 \frac{(1+\gamma_5 \hat{s}_{iR})}{2} \frac{(\hat{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(1+\gamma_5 \hat{s}_{fR})}{2} \frac{(\hat{p}_f + m)}{2m}\right] - \right. \\ &\quad \left. - \mathrm{Sp}\left[\gamma_0 \frac{(1+\gamma_5 \hat{s}_{iR})}{2} \frac{(\hat{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(1-\gamma_5 \hat{s}_{fR})}{2} \frac{(\hat{p}_f + m)}{2m}\right]\right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \mathrm{Sp}\left[\gamma_0 \frac{(1+\gamma_5 \hat{s}_{iR})}{2} \frac{(\hat{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(\hat{p}_f + m)}{2m}\right]\right\}^{-1} = \\ &= \frac{\mathrm{Sp}\left[\gamma_0 \gamma_5 \hat{s}_{iR} \frac{(\hat{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \gamma_5 \hat{s}_{fR} \frac{(\hat{p}_f + m)}{2m}\right]}{\mathrm{Sp}\left[\gamma_0 \frac{(\hat{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(\hat{p}_f + m)}{2m}\right]}. \end{aligned} \tag{7.96}$$

Мы снабдили поляризацию P_R индексом, который указывает на то, что начальный пучок был полностью правополяризован.

Как и в (7.90), все члены, линейные по s_{iR} либо по s_{fR}, исчезают. След в знаменателе уже вычислялся ранее и дается выражением (7.21); числитель упрощается путем «протаскивания» матриц γ_5 друг к другу и применения (7.17). После простых преобразований и подстановки (7.94) получаем следующий результат:

$$P_R = 1 - \left[\frac{2m^2 \sin^2(\theta/2)}{E^2\cos^2(\theta/2) + m^2\sin^2(\theta/2)}\right]. \tag{7.97}$$

В ультрарелятивистском пределе, когда $m/E \to 0$, или $\beta \to 1$, имеем $P_R \to 1$, т. е. в пределе высоких энергий кулоновское рассеяние не приводит к деполяризации начальных электронов.

Если начальный пучок был не полностью, а лишь частично поляризован вдоль направления движения, можно ожидать, что результат (7.97) перейдет в

$$P = pP_R. \tag{7.98}$$

Здесь p означает поляризацию начальных электронов, т. е.

$$p \equiv p_R - p_L,$$

где p_R есть доля электронов с положительной спиральностью, а $p_L = 1 - p_R$ — доля частиц с отрицательной спиральностью. Чтобы убедиться в справедливости (7.98), заметим, что выражение (7.96) линейно по спиновым проекционным операторам начального и конечного электронов. Поэтому с помощью равенства

$$p_R\frac{1+\gamma_5 \not{s}_{iR}}{2} + p_L\frac{1-\gamma_5 \not{s}_{iR}}{2} = \frac{1+p\gamma_5 \not{s}_{iR}}{2}$$

получаем требуемый результат

$$P = p\left[1 - \frac{2m^2 \sin^2(\theta/2)}{E^2\cos^2(\theta/2) + m^2\sin^2(\theta/2)}\right]. \tag{7.99}$$

В частном случае $p = 0$ формула (7.99) показывает, что неполяризованный начальный пучок остается неполяризованным в результате кулоновского рассеяния.

Полученным результатам можно сопоставить наглядную геометрическую картину. Определим следующим образом угол α между направлением спина движущегося электрона, описываемого спинором $u(p, s)$, и произвольным направлением, задаваемым единичным вектором $n^\mu = (0, \mathbf{n})$:

$$\cos\alpha \equiv \langle \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\rangle = \frac{u^+(p, s)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,u(p, s)}{u^+(p, s)\,u(p, s)} =$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\,\bar{u}(p, s)\,\gamma_5 \not{n} u(p, s), \tag{7.100}$$

где $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{p}/E$.

Для вычисления матричного элемента (7.100), мы вновь введем проекционные операторы и воспользуемся методом взятия следов. Тогда с помощью (7.93) получим

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{Sp}\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2}\right)\gamma_5\not{n} =$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{n} = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{s}^e)^2}}\,\mathbf{s}^e\cdot\mathbf{n}. \quad (7.101)$$

Отсюда видно, что если $\mathbf{s}^e$ и $\boldsymbol{\beta}$ перпендикулярны, то $|\cos\alpha| \leqslant \sqrt{1-\beta^2}$. Следовательно, в состоянии со спином, перпендикулярным скорости, среднее значение спина, определяемое выражением (7.100), обращается в нуль при $\beta \to 1$. С другой стороны, для случая, когда спин $\mathbf{s}$ направлен вдоль скорости, т. е. для спиральных состояний, получаем

$$\cos\alpha = \mathbf{s}^e\cdot\mathbf{n} \quad (7.102)$$

и проекция спина на направление $\mathbf{n}$, параллельное либо антипараллельное $\mathbf{s}$, равна ± 1. Обозначая в этом случае $\alpha = \delta$, имеем

$$\cos\delta = \pm 1. \quad (7.103)$$

Среднее значение $\cos\alpha$ для пучка рассеянных электронов дается выражением

$$\langle\cos\alpha\rangle = \sum_{\pm s} w(p,\ s)\cos\alpha, \quad (7.104)$$

где $w(p, s)$ есть вероятность перехода в заданное конечное состояние с импульсом p и спином s. Сумму в (7.104) проще всего вычислить, просуммировав по двум спиральным состояниям. Для проекции спина на направление движения из (7.103), (7.104) и (7.95) находим

$$\langle\cos\delta\rangle = w(s_R,\ p) - w(s_L,\ p) = P. \quad (7.105)$$

Таким образом, поляризация определяет косинус угла между векторами спина и импульса. Для кулоновского рассеяния поляризованного начального пучка электронов с $P = 1$ из (7.105) и (7.99) получаем в пределе больших энергий, $E \gg m$, или малых углов рассеяния, $\theta \ll 1$,

$$\langle\delta\rangle \sim \frac{m}{E}\theta, \quad (7.106)$$

т. е. угол между векторами спина и импульса рассеянного пучка составляет равную m/E долю от угла рассеяния [66].

Расчеты поляризационных эффектов в ультрарелятивистском случае проще всего проводить, предварительно упростив поляризационные проекционные операторы в пределе $m/E \to 0$. Покажем, как упрощается в этом предельном случае поляризационный проекционный оператор для продольно-поляризованных электронов со спином $\mathbf{s}$, параллельным импульсу $\mathbf{p}$. Из (7.93) и (7.94) имеем

$$s^{\mu} = \frac{1}{m\beta} p^{\mu} - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} g^{\mu 0} \to \frac{p^{\mu}}{m}$$

при $\beta \to 1$. Отсюда для проекционного оператора получаем

$$\left(\frac{1 \pm \gamma_5 \hat{s}_R}{2}\right)\left(\frac{\hat{p}+m}{2m}\right) \to \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\right)\left(\frac{\hat{p}+m}{2m}\right).$$

Аналогично

$$\left(\frac{1 \pm \gamma_5 \hat{s}_R}{2}\right)\left(\frac{m-\hat{p}}{2m}\right) \to \left(\frac{1 \mp \gamma_5}{2}\right)\left(\frac{m-\hat{p}}{2m}\right). \qquad (7.107)$$

Дальнейшее упрощение в (7.107) достигается путем перехода к ультрарелятивистскому пределу в энергетическом проекционном операторе. Ранее из формулы (7.99) мы заключили, что в пределе $m/E \to 0$ кулоновское рассеяние не приводит к деполяризации электронов. Теперь этот результат может быть получен совсем просто. Найдем амплитуду рассеяния для случая, когда начальный релятивистский электрон имеет правую поляризацию

$$u(p_i, s_i) = \frac{(1+\gamma_5)}{2} u(p_i, s_i),$$

а конечный — левую

$$u(p_f, s_f) = \frac{(1-\gamma_5)}{2} u(p_f, s_f).$$

Для взаимодействия вида γ^{μ} амплитуда пропорциональна

$$\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_{\mu} u(p_i, s_i) = \bar{u}(p_f, s_f)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\gamma_{\mu}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) u(p_i, s_i) =$$
$$= \bar{u}(p_f, s_f)\gamma_{\mu}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) u(p_i, s_i) = 0.$$

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что решения в виде плоских волн, нормированные согласно (7.2) и (7.3), обладают требуемыми трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца. В частности, учтя преобразование Лоренца нормировочного объема V, покажите, что величина $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ является скаляром, а величина $\psi^{+}(x)\psi(x)$ — временной компонентой 4-вектора.

2. Постройте амплитуду рассеяния электрона на протоне, отвечающую изображенному на диаграммах рис. 7.4, *г* и *в* обмену двумя фотонами. Покажите, что в статическом пределе при бесконечной массе протона она совпадает с изображенным на диаграмме рис. 7.2 вторым борновским приближением для рассеяния электрона в кулоновском поле.

3. Постройте амплитуду тормозного излучения при рассеянии электрона на протоне и покажите, что в статическом пределе она переходит в амплитуду (7.57) тормозного излучения в кулоновском поле. Убедитесь в том, что

между этими двумя амплитудами имеется такое же соответствие, как между амплитудами (7.5) и (7.35) для упругого рассеяния.

4. Получите формулу Бете — Гайтлера для сечения тормозного излучения протона при произвольной энергии [67].

5. Выведите формулу Бете — Гайтлера для сечения образования электрон-позитронной пары фотоном в кулоновском поле. Покажите, что амплитуда этого процесса связана с амплитудой тормозного излучения кросс-симметрией.

6. Из формулы (7.80) найдите полное сечение процесса $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$ при произвольной энергии и покажите, что ответ согласуется с приведенными в тексте предельными значениями для (7.81) при низких и высоких энергиях.

7. Выразите дифференциальное сечение электрон-электронного рассеяния в наинизшем борновском приближении через энергии и углы в лабораторной системе.

8. Вычислите сечение поглощения света связанным атомным электроном для атомов с таким небольшим Z, что $Z\alpha = Z/137 \ll 1$ и $E_{\text{связ}} \ll mc^2$. Считать, что частота света удовлетворяет условию $\hbar\omega \gg E_{\text{связ}}$. В этих упрощающих предположениях найдите дифференциальное сечение для двух предельных случаев:

а) нерелятивистский предел, $E_{\text{связ}} \ll \hbar\omega \ll mc^2$;

б) ультрарелятивистский предел, $\hbar\omega \gg mc^2$.

9. Суммы по спинам в (7.99) и (7.105) были вычислены путем сложения вкладов состояний с положительной и отрицательной спиральностями. В качестве базиса можно было использовать любую другую пару независимых спиновых состояний. Покажите, что конечный результат не зависит от выбора базиса.

10. Проверьте формулу (7.97) для поляризации при рассеянии в кулоновском поле.

ГЛАВА 8

ПОПРАВКИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ К МАТРИЦЕ РАССЕЯНИЯ

§ 34. Рассеяние электрона позитроном в четвертом порядке

Рассмотренные в предыдущих примерах правила построения элементов S-матрицы можно распространить и на более высокие порядки теории возмущений по константе связи, однако тут возникает ряд новых проблем. Рассмотрим, например, вклады порядка e^4 в электрон-позитронное рассеяние. Для построения соответствующей амплитуды нарисуем все возможные диаграммы Фейнмана с четырьмя электромагнитными вершинами, отвечающие данному процессу. Затем выпишем матричный элемент, следуя изложенным ранее правилам.

Некоторые из этих диаграмм (всего их 18) изображены на рис. 8.1. Диаграмма (*а*) описывает двухфотонный обмен между электроном и позитроном и вносит в амплитуду вклад, аналогичный выражениям (7.47) и (7.48) для электрон-протонного рассеяния:

$$S_{fi}^{(4a)} = -(-ie)^4 \int d^4w\, d^4x\, d^4y\, d^4z \left[\bar{\psi}_f^{(+)}(x)\, \gamma_\mu iS_F(x-y)\, \gamma_\nu \psi_i^{(+)}(y)\right] \times \\ \times iD_F(x-w)\, iD_F(y-z) \left[\bar{\psi}_{i'}^{(-)}(z)\, \gamma^\nu iS_F(z-w)\, \gamma^\mu \psi_{f'}^{(-)}(w)\right], \qquad (8.1)$$

где индексы i и f, i' и f' означают соответственно квантовые числа электрона и позитрона. Диаграмма (*б*) отвечает аннигиляционному члену и имеет знак минус по отношению к (8.1):

$$S_{fi}^{(4б)} = +(-ie)^4 \int d^4w\, d^4x\, d^4y\, d^4z \left[\bar{\psi}_f^{(+)}(x)\, \gamma_\mu iS_F(x-y)\, \gamma_\nu \psi_{f'}^{(-)}(y)\right] \times \\ \times iD_F(x-w)\, iD_F(y-z) \left[\bar{\psi}_{i'}^{(-)}(z)\, \gamma^\nu iS_F(z-w)\, \gamma^\mu \psi_i^{(+)}(w)\right]. \qquad (8.2)$$

Происхождение знака минус между двумя амплитудами здесь такое же, как в низшем порядке (7.82); он возникает за счет антисимметризации волновых функций по начальным электронным состояниям с положительной и отрицательной энергией.

Диаграмма (рис. 8.1, *в*) отвечает такому процессу, когда возникший при аннигиляции фотон рождает пару, которая перед переходом в конечное состояние перерассеивается. Амплитуду

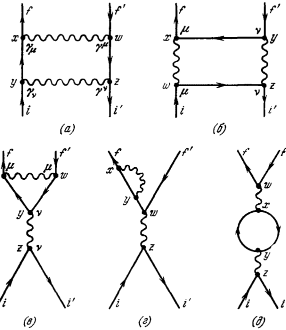


Рис. 8.1. Некоторые диаграммы четвертого порядка для рассеяния электрона на позитроне.

этого процесса запишем по известным нам правилам: каждой вершине сопоставляется величина $-ie\gamma_\mu$ и инвариантное интегрирование $\int d^4x$, каждой внутренней линии отвечает пропагатор $iS_F(x-y)$, свободным начальным и конечным частицам соответствуют волновые функции. Таким образом, получаем

$$S_{fi}^{(4в)} = +(-ie)^4 \int d^4w\, d^4x\, d^4y\, d^4z\, iD_F(x-w)\, iD_F(y-z) \times$$
$$\times \left[\bar{\psi}_f^{(+)}(x)\, \gamma_\mu i S_F(x-y)\, \gamma_\nu i S_F(y-w)\, \gamma^\mu \psi_{f'}^{(-)}(w)\right] \times$$
$$\times \left[\bar{\psi}_{i'}^{(-)}(z)\, \gamma^\nu \psi_i^{(+)}(z)\right]. \qquad (8.3)$$

В пояснениях нуждается только выбор общего знака перед амплитудой (8.3). Он определяется требованием статистики

Ферми — Дирака, согласно которой два электронных состояния должны быть антисимметричными по отношению к перестановке электронов. Один из возможных способов упорядочения во времени четырех вершин диаграммы (*а*) показан на рис. 8.2 вместе с соответствующим вариантом для диаграммы (*в*).

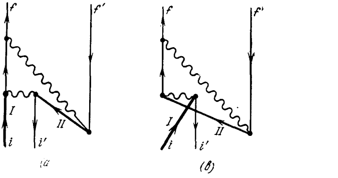


Рис. 8.2. Возникновение, благодаря статистике Ферми, относительного знака минус между диаграммами рис. 8.1, *а* и 8.1, *в*.

Эти две диаграммы отличаются перестановкой электронных линий *I* и *II*. Относительный знак минус между (8.1) и (8.3) обеспечивает требуемую антисимметрию полного матричного элемента относительно перестановки двух тождественных фермионов. Член (8.3) имеет такой же знак, какой вносил в выражение (7.86) вклад аннигиляционной диаграммы (рис. 7.15, *б*) в низшем порядке.

Когда мы симметризуем амплитуду относительно перестановки двух фотонов, то оказывается необходимым включить также диаграмму вида (*г*); действительно, фотоны, входящие в вершины w и y на рис. 8.1, *в*, могли быть испущены и из вершин z и x соответственно. Это приводит к следующему члену 4-го порядка в S-матрице:

$$S_{fi}^{(4г)} = + (-ie)^4 \int d^4w\, d^4x\, d^4y\, d^4z\, iD_F(x-y)\, iD_F(w-z) \times$$
$$\times \left[\bar{\psi}_f^{(+)}(x)\, \gamma_\mu iS_F(x-y)\, \gamma^\mu iS_F(y-w)\, \gamma_\nu \psi_{f'}^{(-)}(w)\right] \times$$
$$\times \left[\bar{\psi}_{i'}^{(-)}(z)\, \gamma^\nu \psi_i^{(+)}(z)\right], \quad (8.4)$$

который имеет такой же знак, что и (8.3).

Диаграмма (*д*) на рис. 8.1 отвечает такому процессу, когда рождающийся при аннигиляции фотон образует пару, которая, прежде чем перейти в конечное состояние, вновь взаимодействует аннигиляционным образом. Те блоки диаграмм (*в*) и (*д*) на рис. 8.1, которые расположены выше вершины y, связаны между собой так же, как диаграммы рассеяния электрона на позитроне во втором порядке, изображенные на рис. 8.1. Поэтому естественно ожидать, что, как и в (7.86), вклады в S-матрицу диаграмм (*в*) и (*д*) имеют противоположные знаки. Тогда для вклада диаграммы (*д*) можно записать

$$S_{fi}^{(4\partial)} = -(-ie)^4 \int d^4w\, d^4x\, d^4y\, d^4z \left[\bar{\psi}_f^{(+)}(w)\, \gamma_\mu \psi_{f'}^{(-)}(w)\right] \times \\ \times iD_F(w-x) \left[\gamma^\nu_{\alpha\beta} iS_F(y-x)_{\beta\lambda}\, \gamma^\mu_{\lambda\tau} iS_F(x-y)_{\tau\alpha}\right] \times \\ \times iD_F(y-z) \left[\bar{\psi}_{i'}^{(-)}(z)\, \gamma_\nu \psi_i^{(+)}(z)\right]. \quad (8.5)$$

Независимый способ выбора общего знака в (8.5) состоит в задании соответствующего упорядочения во времени, как было сделано на рис. 8.2.

Требования симметрии и антисимметрии, которыми мы до сих пор руководствовались, приводят к дополнительному классу диаграмм; пример такой диаграммы приведен на рис. 8.3. Она возникает из диаграммы рис. 8.1, *д* в результате симметризации по двум фотонам. Действительно, фотон, входящий в вершину w, мог быть испущен как в z, так и в x. Такие несвязные диаграммы, т. е. диаграммы, содержащие полностью изолированную часть, которая не связана ни с одной из начальных или конечных частиц, не принималась во внимание в наших расчетах. Диаграмма на рис. 8.3 изображает электрон, распространяющийся до точки x; там он испускает фотон и рассеивается обратно в точку y, где он уничтожает и себя, и испущенный фотон. Пользуясь языком теории дырок, можно сказать, что такой процесс представляет собой флуктуацию, когда электрон, находящийся в море с отрицательной энергией, испускает виртуальный фотон и переходит в незанятое состояние с положительной энергией, а затем вновь поглощает испущенный фотон и возвращается в море с отрицательной энергией. Такие флуктуации происходят постоянно; происходящие в вакууме процессы служат фоном, по отношению к которому определяется амплитуда рассеяния. Мы отделяем вклад всех несвязанных «пузырей», которые вносят лишь некий фазовый множитель во все интересующие нас диаграммы.

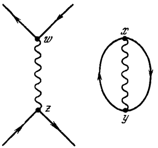


Рис. 8.3. Пример несвязной диаграммы.

Дадим следующую сводку правил построения амплитуд процессов высших порядков:

1. Нарисовать все связные диаграммы.
2. Каждой диаграмме сопоставить амплитуду, причем каждой вершине сопоставить фактор

$$-ie\gamma_\mu \int d^4x.$$

3. Каждой внутренней линии с концами в вершинах x и y сопоставить пропагатор $iS_F(x-y)$ или $iD_F(x-y)$ для фермиона и фотона соответственно. Для фотона ввести еще дополнительный множитель $g_{\mu\nu}$, связывающий матрицы γ^μ и γ^ν в вершинах, соединяемых фотонной линией.
4. Ввести волновые функции для каждой внешней линии, т. е. линии, отвечающей падающей или рассеянной частице.

Эти правила совпадают с полученными ранее при рассмотрении низших порядков теории возмущений. Новым является лишь условие, согласно которому учитываются только связные диаграммы. Наконец, добавим еще правила относительно знаков:

5. Два члена, которые отличаются друг от друга перестановкой двух тождественных фермионов, имеют относительный знак минус. Для двух электронов с положительной энергией примером служит амплитуда (7.82), которой соответствуют изображенные на рис. 7.10 диаграммы, а для одного электрона с положительной и другого с отрицательной энергиями примером является амплитуда (7.86), которой отвечают диаграммы на рис. 7.12. Это правило приводит к дополнительному знаку минус в амплитуде (8.5), которой соответствует диаграмма с замкнутой петлей, изображенная на рис. 8.1, *д*. В общем случае множитель (-1) привносится в амплитуду каждой замкнутой фермионной петлей на диаграмме Фейнмана.
6. В соответствии с (6.56) амплитуда имеет общий множитель $(-1)^{\bar{n}}$, где $\bar{n}$ — число позитронов в начальном состоянии.

Прежде чем сравнивать теорию с экспериментом, остается решить еще существенный вопрос о вычислении интегралов, в особенности для диаграмм четвертого порядка. Диаграммы (*а*) и (*б*) на рис. 8.1 вместе с двумя диаграммами с перекрестными фотонными линиями, получаемыми из (*а*) и (*б*) перестановкой вершин x и y, приводят к трудному для вычисления четырехмерному интегралу типа (7.51). Мы не будем заниматься вычислением таких интегралов.

При рассмотрении диаграмм (*в*) и (*д*) на рис. 8.1 удобно перейти к импульсному представлению и связать эти диаграммы с соответствующей диаграммой низшего порядка, изображенной на рис. 7.12, *б*, которая дает вклад во второй член амплитуды (7.86). Переходя к импульсному представлению, находим, что

$S_{fi}^{(4в)}$ отличается от второго члена в (7.86) заменой тока

$$\bar{u}(p_1')e\gamma_\mu v(q_1') \to \bar{u}(p_1')\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(-i)}{k^2+i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu)\times$$
$$\times\frac{i}{\hat{p}_1'-\hat{k}-m+i\varepsilon}e\gamma_\mu\frac{i}{-\hat{q}_1'-\hat{k}-m+i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu)v(q_1'), \quad (8.6)$$

и $S_{fi}^{(4г)}$ отличается тем, что в качестве волновой функции конечного электрона подставляется выражение

$$\bar{u}(p_1')\to\bar{u}(p_1')\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i}{k^2+i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu)\times$$
$$\times\frac{i}{\hat{p}_1'-\hat{k}-m+i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu)\frac{i}{\hat{p}_1'-m+i\varepsilon}, \quad (8.7)$$

и, наконец, амплитуда $S_{fi}^{(4д)}$ отличается подстановкой вместо фотонного пропагатора следующего выражения:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+q_1)^2+i\varepsilon}\to(-1)\left[\frac{(-i)}{(p_1+q_1)^2+i\varepsilon}\right]^2\times$$
$$\times\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Sp}(-ie\gamma_\mu)\frac{i}{\hat{k}-m+i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu)\frac{i}{\hat{k}-\hat{p}_1-\hat{q}_1-m+i\varepsilon}\equiv$$
$$\equiv\frac{(-i)}{(p_1+q_1)^2+i\varepsilon}I_{\mu\nu}(p_1+q_1)\frac{(-i)}{(p_1+q_1)^2+i\varepsilon}. \quad (8.8)$$

Блоки диаграмм, которым соответствуют выписанные выражения, приведены на рис. 8.4.

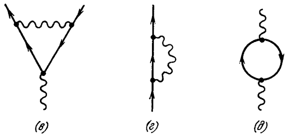


Рис. 8.4. Диаграммы Фейнмана, иллюстрирующие: (в) — поправку к вершине (см. рис. 8.1, в); (г) — электронную собственно-энергетическую часть (рис. 8.1, г); (д) — поляризацию вакуума (рис. 8.1 д).

Все остальные диаграммы четвертого порядка содержат вклады диаграмм трех рассмотренных типов. К сожалению, такие замкнутые петли приводят к выражениям, которые расходятся при $k\to\infty$. Перейдем теперь к последовательному исследованию и вычислению этих диаграмм.

§ 35. Поляризация вакуума

Самую сильную расходимость содержит выражение (8.8), которое отвечает замкнутой электронной петле, изображенной на рис. 8.4, ∂. Вклад этой диаграммы называют фотонной собственно-энергетической частью второго порядка. Соответствующий интеграл содержит два электронных пропагатора, поэтому в числителе остается вторая степень k и интеграл квадратично расходится.

Достаточно правдоподобный способ устранения квадратичной расходимости основан на использовании условия калибровочной инвариантности. Подобные рассуждения уже приводились ранее перед формулой (7.60). Калибровочное преобразование $A_\mu(q) \to A_\mu(q) + q_\mu \Lambda(q)$ не должно изменять конечного результата вычисления физической амплитуды. Посмотрим, к каким следствиям для интеграла (8.8) приводит это требование.

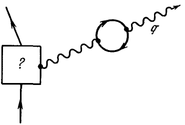


Рис. 8.5. Поправка к электромагнитному процессу за счет поляризации вакуума.

Пусть фотон на диаграмме рис. 8.4, ∂ является реальным, т. е. имеет $q^2 = 0$, как, например, тормозной фотон, или фотон, участвующий в комптон-эффекте. Как изображено на рис. 8.5, электронная петля дает поправки порядка e^2 к току, текущему через блок, взаимодействующий с $A_\mu(q)$ (на рисунке этот блок обозначен вопросительным знаком). Калибровочная инвариантность требует, чтобы произведение q_μ на ток обращалось в нуль. Таким образом, для (8.8) имеем

$$q^\mu I_{\mu\nu}(q) = 0 \tag{8.9}$$

при условии

$$q^2 = 0.$$

Произведение $q^\mu I_{\mu\nu}(q)$ можно записать следующим образом:

$$q^\mu I_{\mu\nu}(q) = -e^2 \,\mathrm{Sp} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \hat{q} \frac{1}{\hat{k} - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{k} - \hat{q} - m + i\varepsilon} =$$

$$= -e^2 \,\mathrm{Sp} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k} - \hat{q} - m + i\varepsilon} [(\hat{k} - m + i\varepsilon) -$$

$$- (\hat{k} - \hat{q} - m + i\varepsilon)] \frac{1}{\hat{k} - m + i\varepsilon} \gamma_\nu =$$

$$= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \,\mathrm{Sp} \left(\frac{1}{\hat{k} - \hat{q} - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\hat{k} - m + i\varepsilon} \right) \gamma_\nu. \tag{8.10}$$

Если бы интеграл сходился, мы могли бы в первом члене положить $k' = k - q$ и в результате вычитания двух одинаковых интегралов получить нуль. Однако интеграл расходится, и выражение (8.10) оказывается неопределенным. Чтобы продвинуться дальше, обрежем выражение (8.8) на высоких частотах путем замены [1])

$$I_{\mu\nu}(q, m^2) \to \bar{I}_{\mu\nu}(q) = \\ = I_{\mu\nu}(q, m^2) + \sum_i C_i(M_i^2)\, I_{\mu\nu}(q, M_i^2) \equiv \sum_i c_i I_{\mu\nu}(q, m_i^2), \quad (8.11)$$

где M_i^2 — большие массы, а постоянные C_i выбраны так, чтобы интегралы сходились. Такой способ обрезания не является единственным и выбран лишь для математической определенности. Если какие-либо физические наблюдаемые величины окажутся зависящими от параметров обрезания, теорию придется признать несостоятельной. Во всяком случае, существование расходящихся выражений наводит на подозрения о существовании при больших импульсах (или, что то же самое, на малых расстояниях) трудностей в теории.

Обратим внимание на следующее важное преимущество метода обрезания (8.11): он обеспечивает выполнение условия калибровки (8.9). Если бы мы произвели обрезание в каждом отдельном пропагаторе, условие калибровочной инвариантности не было бы соблюдено.

Вычисление величины $\bar{I}_{\mu\nu}(q)$, удовлетворяющей условию (8.9), проще всего производится путем представления знаменателя пропагатора в экспоненциальной форме с помощью тождества

$$\frac{i}{\hat{k} - m + i\varepsilon} = \frac{i(\hat{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = (\hat{k} + m)\int_0^\infty dz\, e^{iz(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \quad (8.12)$$

Это дает

$$I_{\mu\nu}(q) = -4(-ie)^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \\ \times [k_\mu (k-q)_\nu + k_\nu (k-q)_\mu - g_{\mu\nu}(k^2 - k\cdot q - m^2)] \times \\ \times \exp\{iz_1[k^2 - m^2 + i\varepsilon] + iz_2[(k-q)^2 - m^2 + i\varepsilon]\}, \quad (8.13)$$

где было произведено взятие следа и изменен порядок интегрирования. Дополняя показатель экспоненты до полного квадрата

[1]) См. [54, 68]. Альтернативный метод преобразования расходящихся интегралов, который впервые привел к калибровочно-инвариантному результату, развит в работе [69].

путем замены переменной интегрирования согласно

$$l = k - \frac{qz_2}{z_1+z_2} = k - q + \frac{qz_1}{z_1+z_2}, \tag{8.14}$$

производим интегрирование по импульсу с помощью равенства [1])

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\,[1,\,l_\mu,\,l_\mu l_\nu]\,e^{il^2(z_1+z_2)} = \frac{1}{16\pi^2 i\,(z_1+z_2)^2}\left[1,\,0,\,\frac{ig_{\mu\nu}}{2\,(z_1+z_2)}\right]. \tag{8.15}$$

В результате получаем

$$\bar{I}_{\mu\nu} = -i\sum_l c_l\,\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty dz_1\int_0^\infty \frac{dz_2}{(z_1+z_2)^2}\times$$
$$\times\left\{\exp\left[i\left(q^2\frac{z_1z_2}{z_1+z_2} - (m_l^2 - i\varepsilon)(z_1+z_2)\right)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{2\,(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} + g_{\mu\nu}\left[\frac{-i}{(z_1+z_2)} - \frac{q^2z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} + m_l^2\right]\right\}. \tag{8.16}$$

Член, пропорциональный $(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)$, автоматически удовлетворяет условию калибровки (8.9), в то время как последние три члена, пропорциональные $g_{\mu\nu}$, этому условию не удовлетворяют. Однако можно показать, что они уничтожаются, т. е.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dz_1\,dz_2}{(z_1+z_2)^2}\sum_i c_i\left[m_i^2 - \frac{i}{(z_1+z_2)} - \frac{q^2z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}\right]\times$$
$$\times\left\{\exp i\left[q^2\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)} - (m_i^2 - i\varepsilon)(z_1+z_2)\right]\right\} =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dz_1\,dz_2}{(z_1+z_2)^2}\sum_i c_i\left[m_i^2 - \frac{i}{\lambda\,(z_1+z_2)} - \frac{q^2z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}\right]\times$$
$$\times\left\{\exp i\lambda\left[q^2\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)} - (m_i^2 - i\varepsilon)(z_1+z_2)\right]\right\} =$$
$$= i\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dz_1\,dz_2}{\lambda\,(z_1+z_2)^2}\sum_i c_i\exp\left\{i\lambda\left[\frac{q^2z_1z_2}{(z_1+z_2)} - (m_i^2 - i\varepsilon)(z_1+z_2)\right]\right\}. \tag{8.17}$$

---

[1]) Это равенство проще всего выводится в прямоугольной системе координат. Если повернуть контур интегрирования на 45°, каждый из интегралов превращается в гауссовский, например,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl_0}{2\pi}\,e^{il_0^2(a+i\varepsilon)} = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}}.$$

Здесь по ходу выкладок мы сделали замену $z_i \to \lambda z_i$. Полагая далее в подынтегральном выражении $\lambda z_i \to z_i$, убеждаемся, что интеграл не зависит от λ; следовательно, (8.17) есть тождественный нуль.

Оставшийся вклад в $\bar{I}_{\mu\nu}$ вычисляется с помощью того же самого приема, состоящего во введении масштабного множителя. Воспользуемся тождеством

$$1 = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\,\delta\left(1 - \frac{z_1 + z_2}{\lambda}\right). \tag{8.18}$$

Тогда

$$\bar{I}_{\mu\nu}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\lambda\, dz_1\, dz_2\, z_1 z_2}{\lambda (z_1 + z_2)^4} \times$$

$$\times\, \delta\left(1 - \frac{z_1 + z_2}{\lambda}\right)\sum_i c_i \exp\left\{i\left[\frac{q^2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} - (m_i^2 - i\varepsilon)(z_1 + z_2)\right]\right\} =$$

$$= \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dz_1\, dz_2 \frac{d\lambda}{\lambda} z_1 z_2 \delta(1 - z_1 - z_2) \times$$

$$\times \sum_i c_i \exp\left[i\lambda\left[q^2 z_1 z_2 - m_i^2 + i\varepsilon\right]\right], \tag{8.19}$$

где мы опять сделали замену $z_i \to \lambda z_i$.

К сожалению, интеграл по λ логарифмически расходится, и мы вычислим его с помощью процедуры обрезания. Выбирая в (8.11) $C_1 = -1$, $C_i = 0$ $(i > 1)$, находим

$$\bar{I}_{\mu\nu} = I_{\mu\nu}(m^2) - I_{\mu\nu}(M^2) \approx$$

$$\approx \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\int_0^1 dz\, z(1 - z)\ln\frac{M^2}{m^2 - q^2 z(1 - z)} =$$

$$= \frac{i\alpha}{3\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\left[\ln\frac{M^2}{m^2} - 6\int_0^1 dz\, z(1-z)\ln\left(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z)\right)\right]. \tag{8.20}$$

Чтобы понять физический смысл результата (8.20), рассмотрим вклад замкнутой петли, изображенной на рис. 8.1, ∂, в рассеяние. Включение этого вклада в амплитуду второго порядка (7.86) дает согласно (8.8) фотонный пропагатор, который может быть записан в виде суммы двух членов

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{(-i)}{q^2}\bar{I}_{\mu\nu}(q)\frac{(-i)}{q^2}. \tag{8.21}$$

Подставляя сюда (8.20) и опуская члены, пропорциональные q_μ и q_ν, которые равны нулю вследствие сохранения тока в электронных вершинах, находим

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dz\, z(1-z)\ln\left(1-\frac{q^2 z(1-z)}{m^2-i\varepsilon}\right)\right]. \quad (8.22)$$

Мы получили фотонный пропагатор, включающий поправки порядка α. Выражение (8.22) описывает вклад электронной петли в амплитуду для любой диаграммы Фейнмана с обменом фотоном между двумя сохраняющимися токами. В предельном случае $q^2\to 0$ изменение в пропагаторе сводится к умножению его на величину Z_3, определенную согласно

$$Z_3\approx 1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}. \quad (8.23)$$

Поэтому, например, амплитуда кулоновского рассеяния принимает при малых переданных импульсах вид

$$\frac{ie^2\bar u\gamma_0 u}{q^2}\to ie^2\frac{\bar u\gamma_0 u}{q^2}\left(1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}\right)=\frac{ie_R^2\bar u\gamma_0 u}{q^2}. \quad (8.24)$$

Отсюда мы заключаем, что параметр e^2, фигурирующий в уравнении Дирака, на самом деле больше, чем $4\pi/137$, поскольку измеряемая величина e_R^2 должна равняться $4\pi/137$. Заряд e_R называется перенормированным, а e — голым зарядом. В любом процессе с обменом фотоном независимо от переданного импульса присутствует перенормировочная константа

$$e_R^2\equiv Z_3 e^2\cong\left(1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}\right). \quad (8.25)$$

Следовательно, перенормировка заряда электрона происходит также и за счет статической поляризуемости вакуума. Поэтому *расходимости в вычислениях вплоть до порядка e^2 исчезают*, если сечения выражать через наблюдаемые заряды e_R^2. Наблюдаемые, зависящие от импульса поправки возникают за счет второго члена в (8.22), который исчезает в статическом пределе при $q\to 0$. Вклад этого члена конечен и не зависит от выбранного способа обрезания. От способа обрезания зависит только соотношение между голым и физическим зарядом. Например, *при малых* переданных импульсах, $|q^2/m^2|\ll 1$, зависящая от импульса поправка к амплитуде кулоновского рассеяния (8.24) имеет вид

$$ie\,\frac{\bar u\gamma_0 u}{q^2}\left(1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}\right)\approx ie_R^2\,\frac{\bar u\gamma_0 u}{q^2}\left[1-\frac{\alpha_R}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}+O\left(\alpha_R^2\right)\right]. \quad (8.26)$$

Она может быть следующим образом выражена в виде дополнительного взаимодействия в координатном пространстве:

$$\left(1-\frac{\alpha_R}{15\pi m^2}\nabla_x^2\right)\frac{e_R^2}{4\pi r}=\frac{e_R^2}{4\pi r}+\frac{\alpha_R e_R^2}{15\pi m^2}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}). \qquad (8.27)$$

Такое взаимодействие приводит в первом порядке к следующему сдвигу ΔE_{nl} атомных уровней водородоподобного атома с зарядом Z:

$$\Delta E_{nl}=\frac{-Ze_R^2\alpha_R}{15\pi m^2}|\psi_{nl}(0)|^2=-\left(\frac{1}{2}Z^2\alpha^2 m\right)\frac{8Z^2\alpha^3}{15\pi n^3}\delta_{l0}. \qquad (8.28)$$

Для $n=2$, $l=0$ и $Z=1$ имеем

$$\nu=\frac{\Delta E}{\hbar}=-27 \text{ Мгц}.$$

Знаки выражений (8.26) и (8.27) именно такие, какие следовало ожидать из изложенного в гл. 5. Для рассеяния электронов с малой передачей импульса, $|q^2|\ll m^2$, и соответственно большим прицельным параметром взаимодействие пропорционально полному заряду. При рассеянии с малым прицельным параметром и большим переданным импульсом, $q^2=-|\mathbf{q}|^2$, электрон проникает в глубь поляризационного облака и сила взаимодействия возрастает.

Вычисления возникающего при этом изменения в законе Кулона впервые были проведены в 1935 г. [70]. Полученные предсказания проверялись в опытах по измерению лэмбовского сдвига уровней $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ атома водорода. Вместо ожидавшейся разности уровней $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$, равной 27 *Мгц*, в 1947 г. было получено значение порядка 1000 *Мгц*; такое расхождение связано в первую очередь с вакуумными флуктуациями поля излучения, обсуждавшимися в гл. 4.

Проведенные в течение последних десяти лет весьма точные измерения и вычисления лэмбовского смещения уровней атома водорода с $n=0$ согласуются с точностью до 0,2 *Мгц*, что подтверждает существование сдвига в 27 *Мгц* за счет поляризации вакуума. Это является убедительным свидетельством как в пользу теории дырок для уравнения Дирака, которая приводит к вкладам диаграмм в виде замкнутых петель, так и в пользу принятого нами простого выбора вершины взаимодействия электрона с фотоном.

Проверка теории при больших q^2, которые соответствуют малым расстояниям, остается пока задачей эксперимента, который должен указать на необходимость внесения изменений в теорию при больших q^2. При рассеянии с большим переданным импульсом,

$$|\mathbf{q}|=-q^2\gg m^2,$$

поправки в (8.22) логарифмически возрастают и фотонный пропагатор в первом порядке по неперенормированному заряду α принимает вид

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\left(1+\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|\mathbf{q}|^2}{m^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}\right). \qquad (8.29)$$

Когда переданный импульс достигает предела обрезания M^2, поправка компенсирует перенормировочную константу для заряда и можно предположить, что в пределе бесконечных энергий взаимодействие определяется голым зарядом, как изображено на рис. 5.3. Это интересное, но недоказанное предположение[1]).

Если импульс q виртуального фотона является времениподобным и q^2 превышает $4m^2$, как для диаграммы рождения пары, изображенной на рис. 8.1, ∂, поправка в пропагаторе (8.22) оказывается комплексной с мнимой частью, равной [54]

$$\frac{+ig_{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)\int_0^1 dz\,z(1-z)\,i\pi\theta\left[z(1-z)-\frac{m^2}{q^2}\right]=$$

$$=+\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\,\frac{i\alpha}{3}\left(1+\frac{2m^2}{q^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\,\theta\left(1-\frac{4m^2}{q^2}\right). \qquad (8.30)$$

Чтобы понять природу мнимой части, вспомним об унитарности шредингеровской S-матрицы. Мы уже обсуждали это свойство в гл. 6, когда рассматривали нерелятивистский пропагатор. Условие унитарности, которое записывается в виде

$$S^+S=1,\ \text{т. е.}\ \sum_n S^*_{nf}S_{nl}=\delta_{fl}, \qquad (8.31)$$

позволяет дать вероятностную интерпретацию решениям задачи рассеяния. Согласно условию унитарности сумма всех вероятностей переходов из заданного начального состояния равна единице. В теории, включающей позитроны, частицы могут рождаться и уничтожаться и сумма по состояниям n должна включать все электронные, позитронные и фотонные конечные состояния, в которые может перейти данное начальное состояние. При этом сохраняется смысл (8.31) как условия сохранения вероятности. Поскольку (8.31) является тождеством по e, S-матрица должна удовлетворять условию (8.31) в каждом порядке теории возмущений по константе взаимодействия. Если

[1]) См. замечания в § 18. Подробное обсуждение оснований для такого предположения и вытекающих из него следствий содержится в работах [71, 72, 3].

мы произведем разложение

$$S_{fi} = \delta_{fi} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \ldots, \tag{8.32}$$

то условие унитарности примет вид

$$S_{fi}^{(1)} + S_{if}^{(1)*} = 0, \tag{8.33а}$$

$$S_{fi}^{(2)} + S_{if}^{(2)*} = -\sum_n S_{nf}^{(1)*} S_{ni}^{(1)}, \tag{8.33б}$$

$$S_{fi}^{(3)} + S_{if}^{(3)*} = -\sum_n \left[S_{nf}^{(1)*} S_{ni}^{(2)} + S_{nf}^{(2)*} S_{ni}^{(1)}\right], \tag{8.33в}$$

$$S_{fi}^{(4)} + S_{if}^{(4)*} = -\sum_n \left[S_{nf}^{(1)*} S_{ni}^{(3)} + S_{nf}^{(2)*} S_{ni}^{(2)} + S_{nf}^{(3)*} S_{ni}^{(1)}\right]. \tag{8.33г}$$

Если начальное состояние i представляет собой свободные электрон и позитрон, то $S_{fi}^{(1)} = 0$, поскольку реакция $e^- + e^+ \to 1\gamma$ запрещена законом сохранения энергии-импульса. Соотношению (8.33б) удовлетворяет амплитуда (7.86), которая обладает требуемым свойством антиэрмитовости. Равенство (8.33г) выражает отличную от нуля эрмитову часть амплитуды четвертого порядка через вклады второго порядка. Именно этому вкладу четвертого порядка отвечает формула (8.30); вследствие действительности (8.30) соответствующая часть амплитуды эрмитова. Присутствие в (8.30) ступенчатой функции $\theta(1 - 4m^2/q^2)$ указывает, что это выражение отлично от нуля только при таких значениях импульса, при которых, помимо виртуальных пар в виде замкнутых петель, в конечном состоянии может рождаться реальная пара [1]). Наилучшее доказательство унитарности S-матрицы в любом порядке теории возмущений дается в квантовой теории поля [50].

§ 36. Перенормировка внешних фотонных линий

До сих пор мы обсуждали вклад замкнутой петли (8.8) в пропагатор виртуального фотона. Замкнутые электронные петли внесут поправки также и во внешние фотонные линии. В этом случае фотон можно представлять себе как испущенный некоторым удаленным источником; соответствующая диаграмма изображена на рис. 8.6.

Вакуумный пузырь, включенный в эту диаграмму, приводит в соответствии с (8.23) и (8.24) к появлению перенормировочной константы Z_3 в матричном элементе, записанном без учета по-

[1]) Величина мнимой части (8.30) как раз такая, что полная вероятность всех переходов из начального состояния равна единице с точностью до α^2. Подробнее см. [73].

правок. Однако при этом ток источника остается неперенормированным. Если фактор $\sqrt{Z_3}$ сопоставить с источником, а другой фактор $\sqrt{Z_3}$ — с интересующим нас блоком, то голый заряд e в каждой вершине заменится на $\sqrt{Z_3}e = e_R$. Таким образом, правило обращения с реальными внешними фотонами состоит в том, чтобы пренебрегать поправками ко всем внешним линиям и заменять e на e_R в каждой внешней вершине. Это эквивалентно вычислению всех поправочных диаграмм к внешним линиям, включая замкнутые поляризационные петли, и последующему делению на $\sqrt{Z_3}$ для каждой внешней фотонной линии.

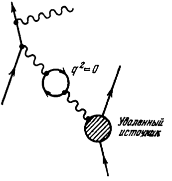


Рис. 8.6. Обмен реальным фотоном между двумя токами, макроскопически разделенными в пространстве.

В дальнейшем при записи формул мы будем предполагать, что перенормировка уже произведена: $e^2/4\pi$ будет обозначать 1/137, а голый заряд, если он нам потребуется, обозначим как e_0.

§ 37. Собственная масса электрона

Диаграмму рис. 8.4, *г* называют электронной собственно-энергетической частью порядка e^2. Соответствующая амплитуда дается интегралом (8.7), а именно

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\not p - \not k - m + i\varepsilon} \gamma^\nu. \quad (8.34)$$

Выражение (8.34) расходится, поскольку знаменатель содержит k лишь в третьей степени (k во второй степени из фотонного пропагатора и k из электронного). Величина λ представляет собой малую массу фотона, введенную для предотвращения инфракрасных расходимостей.

Пользуясь представлением (8.12) и проводя вычисления, аналогичные (8.16), получаем

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dz_1\,dz_2}{(z_1+z_2)^2} \left[2m - \frac{\not p z_1}{z_1+z_2}\right] \times$$
$$\times \exp\left[i\left(\frac{p^2 z_1 z_2}{z_1+z_2} - m^2 z_2 - \lambda^2 z_1\right)\right]. \quad (8.35)$$

Выражение (8.35) для $\Sigma(p)$ пригодно как для внутренних электронных линий с произвольными p^2 и $\hat{p}$ на диаграммах Фейнмана, так и для внешних линий. В последнем случае $p^2 = m^2$ и, кроме того, $\hat{p}$ располагается после спинора для свободной частицы, как в (8.7). Тогда можно воспользоваться уравнением Дирака и положить $\hat{p} = m$. Далее, как и при расчете поляризации вакуума, применяем тождество (8.18), заменяем $z_i \to \gamma z_i$ и получаем

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz\,[2m - \hat{p}(1-z)]\int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma}\exp\{i\gamma[p^2 z(1-z) - m^2 z - \lambda^2(1-z) + i\varepsilon]\}. \tag{8.36}$$

Интеграл

$$J(p, m, \lambda) = \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma}\exp\{i\gamma[p^2 z(1-z) - m^2 z - \lambda^2(1-z) + i\varepsilon]\}$$

расходится логарифмически; мы произведем обрезание, вычтя из него интеграл $J(p, m, \Lambda)$, где Λ — большая масса.

Применим тождество

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{iax} - e^{ibx}\right) = \ln\frac{b}{a}. \tag{8.37}$$

Тогда пропагатор после обрезания примет вид

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz\,[2m - \hat{p}(1-z)]\times \\ \times \ln\frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2 z + \lambda^2(1-z) - p^2 z(1-z) - i\varepsilon} = \\ = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz\,[2m - \hat{p}(1-z)]\ln\frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2 z^2} + \\ + \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz\,[2m - \hat{p}(1-z)]\ln\frac{m^2 z^2 + \lambda^2(1-z)}{m^2 z + \lambda^2(1-z) - p^2 z(1-z)} \approx \\ \approx \frac{3\alpha m}{4\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha}{4\pi}(\hat{p} - m)\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + \\ + \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz\,[2m - \hat{p}(1-z)]\ln\frac{m^2 z^2 + \lambda(1-z)}{m^2 z + \lambda^2(1-z) - p^2 z(1-z)}\end{aligned} \tag{8.38}$$

Вся зависимость от обрезания содержится в первых двух членах, от которых мы освободимся путем перенормировки[1]). При $p^2 - m^2 \gg m\lambda$ интеграл легко вычисляется и мы получаем

$$\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz\,[2m - \hat{p}(1-z)]\ln\frac{m^2 z}{m^2 - p^2(1-z)} =$$
$$= \frac{\alpha m}{\pi}\left(\frac{m^2-p^2}{p^2}\right)\ln\frac{m^2-p^2}{m^2} -$$
$$- \frac{\alpha}{4\pi}\hat{p}\left(\frac{m^2-p^2}{p^2}\right)\left[1 + \left(\frac{m^2+p^2}{p^2}\right)\ln\frac{m^2-p^2}{m^2}\right]. \quad (8.39)$$

Вблизи «массовой поверхности», т. е. когда $p^2 \approx m^2$ (однако $p^2 - m^2 \gg m\lambda$) и когда Σ стоит рядом со спинором для свободной частицы ($\hat{p} = m$), имеем

$$\Sigma(p) \approx \frac{3\alpha}{4\pi}m\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha}{4\pi}(\hat{p} - m)\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 4\ln\frac{m^2-p^2}{m^2}\right). \quad (8.40)$$

Обратим внимание на логарифмическую особенность при $p^2 \to m^2$. При $p^2 > m^2$ величина Σ становится комплексной, что отвечает существованию процесса распада виртуального электрона на электрон и фотон. С аналогичным явлением для фотонного пропагатора мы уже знакомы. При $p^2 - m^2 \ll m\lambda$ последний логарифм в (8.40) заменяется на $\ln(\lambda/m)$. В этом можно убедиться путем прямого вычисления[2]) интеграла в (8.38) в пределе $p^2 \to m^2$.

§ 38. Перенормировка электронного пропагатора

Изменение, внесенное в предыдущем параграфе в электронный пропагатор, состоит, согласно (8.34), в замене

$$\frac{i}{\hat{p}-m} \to \frac{i}{\hat{p}-m} + \frac{i}{\hat{p}-m}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\hat{p}-m} = \frac{i}{\hat{p}-m-\Sigma(p)} + O(\alpha^2). \quad (8.41)$$

Из (8.40) имеем

$$\Sigma(p) = \delta m - \left[Z_2^{-1} - 1 + C(p)\right](\hat{p} - m), \quad (8.42)$$

где

$$\delta m = \frac{3\alpha m}{4\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2},$$
$$Z_2^{-1} - 1 + C(p) \approx \frac{\alpha}{4\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 4\ln\frac{m^2-p^2}{m^2}\right),$$
$$m\lambda \ll p^2 - m^2 \ll m^2.$$

[1]) Выделенный в (8.38) конечный член однозначно определяется из условия обращения его в нуль на массовой поверхности при $p^2 = m^2$.

[2]) Вычисление полного вклада второго порядка в электронную собственно-энергетическую часть содержится в работах [2, 74].

Величина $C(p)$ выбрана так, чтобы при $\hat{p} = m$ функция $C(p) = 0$; таким образом, она не зависит от параметра обрезания Λ. При $\hat{p} = m$ получаем

$$Z_2^{-1} - 1 = \frac{\alpha}{4\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - 2\ln\frac{m^2}{\lambda^2}\right). \tag{8.43}$$

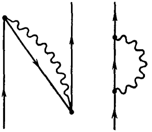
Теперь, используя (8.42), можно переписать (8.41) в следующем виде:

$$\frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma(p)} = \frac{iZ_2}{(\hat{p} - m)[1 + Z_2C(p)] - Z_2\delta m} = \frac{iZ_2}{(\hat{p} - m - \delta m)[1 + C(p)]} + O(\alpha^2). \tag{8.44}$$

Мы отождествим величину $m_{\text{ph}} = m + \delta m$ с физической массой электрона; параметр m в уравнении Дирака представляет собой, как и голый заряд, другую неизмеряемую величину. Необходимость перенормировки массы возникает уже в классической электродинамике.

Действительно, масса, измеряемая в опытах со свободными электронами, есть сумма массы m, входящей в выражение для лоренцевой силы, и электромагнитной собственной массы электрона [75]. Для классического электрона с радиусом $\sim a$ электромагнитная собственная энергия составляет $\sim \alpha/a$. Тогда для наблюдаемой массы получим величину $\sim (m + \alpha/a) = m_{\text{ph}}$. В случае точечного заряда $a \to 0$ и поправка к массе становится бесконечной. То же самое происходит в теории Дирака, однако здесь поправка расходится, как логарифм, содержащий параметр обрезания, в то время как в классической теории собственная энергия расходится линейно при $a \to 0$. Ослабление расходимости следует из теории дырок.

Как впервые показал Вайскопф [76], диаграмма рождения виртуальной пары с показанным на рис. 8.7, *а* упорядочением во времени компенсирует ведущую расходимость диаграммы, приведенной на рис. 8.7, *б*.



(а) (б)

Рис. 8.7. Различные упорядочения во времени для собственно-энергетической части второго порядка.

Хотя формально поправка к массе является бесконечной, однако для значений параметра обрезания $\Lambda \ll me^{2\pi/3\alpha} \sim \sim 10^{100}\, m$ она мала. Заметим, что масса Вселенной оценивается величиной $\sim 10^{80}\, m$ [77].

Систематический способ проведения процедуры перенормировки массы состоит в следующем. Надо переписать уравнение

Дирака в терминах физической массы и рассматривать разность между голой, или затравочной, массой и физической массой как дополнительное взаимодействие. Таким образом, запишем

$$(i\hat{\nabla} - m_{\mathrm{ph}})\,\psi = e\hat{A}\psi + (m - m_{\mathrm{ph}})\,\psi = e\hat{A}\psi - \delta m\psi. \qquad (8.45)$$

Дополнительному взаимодействию отвечает диаграмма на рис. 8.8. Этот член сокращается с первым членом в (8.40), и при $\hat{p} \to m_{\mathrm{ph}}$ пропагатор приводится к виду, содержащему свободный пропагатор в качестве сомножителя.

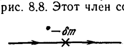


Рис. 8.8. Массовый контрчлен.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что перенормировка массы уже произведена, т. е. считать включенной диаграмму, изображенную на рис. 8.8. Обозначение m мы сохраним за физической массой электрона.

Остается еще поправка к пропагатору, заключенная в Z_2 и в функции $C(p)$, выбранной так, что при $\hat{p} = m$ функция $C(p) = 0$. В частности, при $\hat{p} \approx m$ пропагатор имеет вид

$$\frac{i}{\hat{p} - m} \to \frac{iZ_2}{\hat{p} - m}, \qquad (8.46)$$

т. е. отличается фактором Z_2, который в этом смысле аналогичен фактору Z_3 в фотонном пропагаторе. В данном случае Z_2 также можно включить в заряд e_0, входящий в обе вершины на концах электронной линии; однако в этом нет необходимости, поскольку, как мы увидим, поправки к самим вершинам сокращаются с Z_2. Вряд ли можно ожидать, что величина Z_2 имеет глубокое физическое содержание, так как согласно (8.43) она зависит от массы фотона.

Требуется определенная осторожность, чтобы не внести поправки во внешние линии дважды; с подобной ситуацией мы уже сталкивались в случае фотонов. Пропагатор есть величина билинейная по амплитудам поля, это видно, например, из выражения (6.48). Однако внешняя линия соответствует амплитуде поля, поэтому она перенормируется множителем $\sqrt{Z_2}$. Таким образом, если вычисления проведены с учетом всех диаграмм, дающих поправки к внешним линиям, результат следует разделить на $\sqrt{Z_2}$ в степени, равной числу внешних электронных линий.

Нерелятивистская теория возмущений дает хорошо известный пример аналогичного явления, а именно

$$\psi_n = \sqrt{Z_n}\,\varphi_n + \sum_{m \neq n} \frac{(\varphi_m, V\psi_n)}{E_n - E_m^0}\,\varphi_m, \qquad (8.47)$$

где

$$Z_n = 1 - \sum_{m \neq n} \frac{|(\varphi_m, V\psi_n)|^2}{(E_n - E_m^0)^2}. \tag{8.48}$$

Здесь также Z находится, по сути дела, из функции Грина, а волновая функция перенормируется величиной $\sqrt{Z}$.

§ 39. Поправки к вершине

Нам осталось рассмотреть только диаграмму, изображенную на рис. 8.4, *в*, которая отвечает поправке за счет обмена фотоном между электронными концами вершины γ_μ. Такую диаграмму называют вершинной частью второго порядка. Чтобы вычислить ее вклад в физические процессы, рассмотрим интеграл

$$\Lambda_\mu(p', p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\hat{p}' - \hat{k} - m + i\varepsilon} \times$$
$$\times \gamma_\mu \frac{i}{\hat{p} - \hat{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu, \tag{8.49}$$

где p' означает импульс электрона, а $-p$ — импульс физического позитрона, рожденного виртуальным фотоном, как показано на рис. 8.4, *в*. То же самое выражение (8.49) отвечает и вершинной радиационной поправке к изображенному на рис. 8.9 рассеянию электрона на внешнем потенциале. В этом случае p' вновь является импульсом конечного электрона, однако p теперь представляет собой импульс начального электрона. Таким образом, одна и та же функция (8.49) описывает поправки к различным физическим процессам.

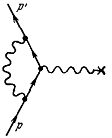


Рис. 8.9. Вершинная поправка к рассеянию во внешнем электромагнитном поле.

Амплитуда (8.49) расходится, поскольку знаменатель подынтегрального выражения содержит k лишь в четвертой степени. Кроме того, мы вновь сталкиваемся с инфракрасной расходимостью и поэтому приписываем фотону малую массу, чтобы избавиться от вклада мягких фотонов. Рассмотрим $\Lambda^\nu(p', p)$ при

$$q = p' - p \to 0,$$

считая бесконечную часть выделенной. Начальный и конечный электроны будем считать свободными, т. е. $\hat{p} = m$, $\hat{p}' = m$. В этом случае

$$\bar{u}(p) \Lambda_\mu(p, p)\, u(p) = (Z_1^{-1} - 1)\, \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p), \tag{8.50}$$

где Z_1 является константой, зависящей от масс $m^2 = p^2$, λ^2 и от обрезания, которое необходимо сделать, чтобы эта константа была конечной. Соотношение (8.50) является самым общим, поскольку единственный входящий в него 4-вектор p_ν есть то же самое, что величина $m\gamma_\nu$, стоящая в обкладках (sandwiched) из спиноров $\bar{u}(p)$ и $u(p)$.

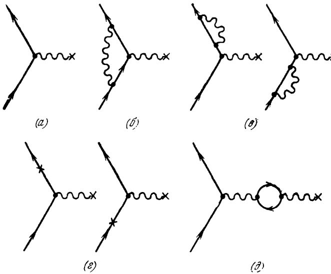


Рис. 8.10. Радиационные поправки второго порядка к рассеянию во внешнем электромагнитном поле.

Нет необходимости вычислять Z_1, так как прямое сравнение (8.49) при $p' = p$ с пропагатором $\Sigma(p)$, задаваемым формулой (8.34), показывает, что

$$\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}. \tag{8.51}$$

Здесь мы использовали следующее важное тождество:

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{1}{\not{p} - m} = -\frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - m}. \tag{8.52}$$

Оно означает, что дифференцирование свободного пропагатора по импульсу эквивалентно введению в соответствующую линию фотона с нулевой энергией. Вычисляя производную $\partial\Sigma(p)/\partial p^\mu$

непосредственно из (8.42), получаем

$$\bar{u}(p)\Lambda_\mu(p, p)u(p) = (Z_2^{-1} - 1)\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p), \tag{8.53}$$

или, согласно (8.50),

$$Z_1 = Z_2 \tag{8.54}$$

с точностью до e^2.

Следовательно, в этом порядке поправка к вершине равна

$$\Lambda_\mu(p', p) = (Z_2^{-1} - 1)\gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p', p). \tag{8.55}$$

Вся зависимость от обрезания содержится в Z_1. Величина $\Lambda_\mu^c(p', p)$ является конечной при условии, что инфракрасная катастрофа устранена введением массы фотона $\lambda > 0$. Кроме того, она удовлетворяет условию

$$\bar{u}(p)\Lambda_\mu^c(p, p)u(p) = 0 \tag{8.56}$$

и определена однозначно.

Можно считать, что Z_1 либо перенормирует заряд e в вершине, либо просто сокращает $\sqrt{Z_2}$ в перенормировке внешних линий. В этом проще всего убедиться путем рассмотрения всех диаграмм порядка не выше e^2, дающих вклад в процесс рассеяния электрона вперед на внешнем потенциале. Эти диаграммы приведены на рис. 8.10.

Ниже перечислены вклады каждой из них в пределе $q \to 0$:

$$\begin{aligned}
&(а)\ -ie\gamma_\mu,\\
&(б)\ -ie\gamma_\mu(Z_1^{-1} - 1),\\
&(в)\ +\delta m \frac{1}{\hat{p} - m}(-ie\gamma_\mu) - (Z_2^{-1} - 1)(-ie\gamma_\mu),\\
&(г)\ -\delta m \frac{1}{\hat{p} - m}(-ie\gamma_\mu),\\
&(д)\ -i(-ie\gamma_\mu)\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} = -ie\gamma_\mu(Z_3 - 1).
\end{aligned} \tag{8.57}$$

Как было показано ранее, надо еще поделить эти выражения на $\sqrt{Z_2}$ для каждой внешней электронной линии и на $\sqrt{Z_3}$ для каждой внешней фотонной линии. Сумма всех этих вкладов с точностью до порядка e^2 равна

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Z_2\sqrt{Z_3}}(-ie\gamma_\mu)\left(1 + (Z_1^{-1} - 1) - 2(Z_2^{-1} - 1) + (Z_3 - 1)\right] \approx\\
&\approx \frac{1}{Z_2\sqrt{Z_3}}(-ie\gamma_\mu)\frac{[1 + (Z_1^{-1} - 1)][1 + (Z_3 - 1)]}{[1 + (Z_2^{-1} - 1)]^2} =\\
&= -ieZ_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}\gamma_\mu = -ie_R\gamma_\mu,
\end{aligned} \tag{8.58}$$

где при последнем преобразовании мы использовали (8.25) и (8.54). Таким образом, перенормировочные константы в вершинной части и в пропагаторе полностью сократились. Перенормировка заряда целиком обусловлена поляризацией вакуума.

Целесообразность сложных обозначений, принятых при выводе (8.58), оправдывается при рассмотрении более высоких порядков. В частности, (8.51) и соотношение (8.54), согласно которому $Z_1 = Z_2$, справедливы во всех порядках (так называемое тождество Уорда). То же относится и к утверждению о том, что все расходящиеся интегралы можно включить в перенормировочные константы Z_1, Z_2 и Z_3 [50].

Мы уже указывали на наблюдаемый физический эффект, обусловленный конечной частью диаграммы поляризации вакуума. Обращаясь к конечным вкладам от вершинной и электронной собственно-энергетической частей, мы также получим интересные физические предсказания.

Рассмотрим вершинную часть $\Lambda_\mu(p', p)$, задаваемую интегралом (8.49). Его вычисление требует довольно громоздких выкладок. Прежде всего придадим электронным пропагаторам вид, содержащий в знаменателе квадраты импульсов, а затем объединим знаменатели, пользуясь либо экспоненциальным представлением, как в (8.12), и масштабным преобразованием (8.18), либо непосредственно по формуле[1])

$$\frac{1}{a_1 \cdots a_n} = (n-1)! \int_0^\infty \frac{dz_1 \cdots dz_n \delta\left(1 - \sum_i z_i\right)}{\left(\sum_i a_i z_i\right)^n}. \tag{8.59}$$

---

[1]) С помощью этого интеграла Фейнмана [54] вычисления проводятся следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4k\, f(k) \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p'-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} =$$

$$= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dz_1\, dz_2\, dz_3\, \delta(1 - z_1 - z_2 - z_3) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k\, f(k)}{\left[k^2 - 2k \cdot p' z_2 - 2k \cdot p z_3 - \lambda^2 z_1 + \left(p_1'^2 - m^2\right) z_2 + (p^2 - m^2) z_3 + i\varepsilon\right]^2} =$$

$$= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dz_1\, dz_2\, dz_3\, \delta(1 - z_1 - z_2 - z_3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k\, f(k + p' z_2 + p z_3)}{(k^2 - c + i\varepsilon)^3},$$

После интегрирования по k и обрезания расходящегося интеграла путем введения параметра Λ^2 находим

$$\Lambda_\mu(p', p) = \frac{\alpha}{4\pi}\gamma_\mu\left[\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + O(1)\right] +$$
$$+ \frac{\alpha}{2\pi}\gamma_\mu \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dz_1\,dz_2\,dz_3\,\delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 z_i\right)\times$$
$$\times \ln\frac{m^2(1-z_1)^2 + \lambda^2 z_1}{m^2(1-z_1)^2 + \lambda^2 z_1 - q^2 z_2 z_3 - i\varepsilon} -$$
$$- \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dz_1\,dz_2\,dz_3\,\delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 z_i\right)\times$$
$$\times \frac{\gamma_\nu[\hat{p}'(1-z_2) - \hat{p}z_3 + m]\gamma_\mu[\hat{p}(1-z_3) - \hat{p}'z_2 + m]\gamma^\nu}{m^2(1-z_1)^2 + \lambda^2 z_1 - q^2 z_2 z_3 - i\varepsilon}. \quad (8.60)$$

В знаменателе последнего числа перенесем, с помощью правила антикоммутации, $\hat{p}$ и $\hat{p}'$ на края, где они могут действовать на электронные спиноры, в обкладках из которых стоит Λ_μ. Далее воспользуемся соотношением Гордона (3.26). Тогда знаменатель последнего члена принимает вид

$$-\gamma_\mu\left[2m^2(1 - 4z_1 + z_1^2) + 2q^2(1-z_2)(1-z_3)\right] - 2mz_1z_2[\hat{q}, \gamma_\mu]. \quad (8.61)$$

где

$$c \equiv (p'z_2 + pz_3)\cdot(p'z_2 + pz_3) + \lambda^2 z_1 - (p'^2 - m^2)z_2 - (p^2 - m^2)z_3 =$$
$$= -p'^2 z_2(1-z_2) - p^2 z_3(1-z_3) + 2p\cdot p' z_2 z_3 + m^2(1-z_1) + \lambda^2 z_1 =$$
$$= -(p'^2 - m^2)z_2(1-z_2) - (p^2 - m^2)z_3(1-z_3) - q^2 z_2 z_3 +$$
$$+ m^2(1-z_1)^2 + \lambda^2 z_1.$$

В интеграле $\int d^4k$ сначала проводим интегрирование по dk_0. Полюсы по dk_0 расположены в точках $\pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + c}$. С помощью добавки $\mp i\varepsilon$ сместим их с контура интегрирования следующим образом:

$$k^2 - c + i\varepsilon = (k_0 - \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + c} + i\varepsilon)(k_0 + \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + c} - i\varepsilon).$$

Это дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4k\,\frac{1}{(k^2 - c + i\varepsilon)^3} = \frac{\pi^2}{2ic}.$$

Для произвольной степени знаменателя $n > 3$ ответ получается дифференцированием этого равенства по c. Поскольку знаменатель зависит только от k^2, нетрудно учесть зависимость от k_μ в знаменателе: все нечетные степени $k_\mu \to 0$, $k_\mu k_\nu \to {}^1/_4 g_{\mu\nu}k^2$ и т. д.

Интегрирование по переменным z_i в общем случае сопряжено с трудностями, хотя его все же удалось провести аналитически[1]). Мы ограничимся двумя предельными случаями, когда $|q|^2 \ll m^2$ и $|q|^2 \gg m^2$. В первом случае с точностью до членов порядка q^2 включительно имеем

$$\gamma_\mu + \Lambda^c_\mu(p', p) \approx \gamma_\mu\left[1 + \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8}\right)\right] + \frac{\alpha}{8\pi m}[\hat{q}, \gamma_\mu]. \quad (8.62)$$

При $|q|^2 \gg m^2$ получаем только члены, зависящие от λ:

$$\gamma_\mu + \Lambda^c_\mu(p', p) \approx \gamma_\mu\left\{1 - \frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{m}{\lambda}\left[\ln\frac{(-q^2)}{m^2} - 1 + O\left(\frac{m^2}{q^2}\right)\right]\right\}. \quad (8.63)$$

Складывая эти результаты с вкладом от поляризации вакуума, мы получаем радиационную поправку порядка α к рассеянию электрона во внешнем поле, которое является источником фотона q. Из (8.26) заключаем, что в пределе малых переданных импульсов поляризация вакуума добавляет постоянную $-{}^1/_5$ к $-{}^3/_8$ в (8.62) и не влияет на члены, содержащие инфракрасную расходимость и магнитный момент.

Последний член в (8.62) приводит к добавке к магнитному моменту электрона, равной $\alpha/2\pi$. Действительно, в статическом пределе он следующим образом видоизменяет взаимодействие электрона с внешним полем:

$$\begin{aligned} -ie\bar{u}(p')\left(\gamma_\mu + \frac{i\alpha}{2\pi}\frac{\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m}\right)u(p)A^\mu(q) &= \\ = -ie\bar{u}(p')\left[\frac{(p+p')_\mu}{2m} + \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m}\right]u(p)A^\mu(q). &\quad (8.64) \end{aligned}$$

Поправочный фактор $(1 + \alpha/2\pi)$ к магнитному моменту электрона был впервые получен Швингером [78] в 1948 г. и его существование было подтверждено экспериментально [79].

Затем появилась возможность экспериментально наблюдать поправку порядка α^2 к магнитному моменту. Ее теоретическое значение [80] равно $-(\alpha^2/\pi^2)$ (0,328), что согласуется с современными экспериментальными данными[2]). Теоретический результат был получен из рассмотрения вершинных диаграмм с двумя виртуальными фотонами[3]).

---

[1]) См. [54]. Для случая, когда электроны находятся вне массовой поверхности $p^2 \neq m^2$, $p'^2 \neq m^2$, см. [74].

[2]) Последнее экспериментальное значение для μ равно [81]

$$\mu = 1 + \alpha/2\pi - [0{,}327 \pm 0{,}005]\,\alpha^2/\pi^2.$$

[3]) После издания английского оригинала книги для аномального магнитного момента электрона были получены значительно более точные экспериментальные и теоретические значения. Экспериментальное значение в настоя-

Другие члены в (8.62) и (8.63) приводят к появлению инфракрасной расходимости в сечении рассеяния электрона. Однако эта расходимость исчезает, если учесть вклад, вносимый в сечение тормозным излучением мягких фотонов. Любая экспериментальная установка имеет конечное разрешение по энергии, поэтому, если детектируются электроны, имеющие разброс по энергии ΔE, то число зарегистрированных событий отвечает сумме упругого сечения и сечения тормозного излучения, приводящего к электронам с энергией, отличающейся от энергии упруго рассеянных электронов не более чем на ΔE.

Проверим с точностью до членов порядка e^2 утверждение о том, что такая сумма упругого и неупругого сечений конечна и свободна от инфракрасной расходимости. Для этого сопоставим выражения (7.64), (8.62) и (8.63). С точностью до порядка e^2 «инфракрасная» часть упругого сечения имеет вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\lambda = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{m}{\lambda} \chi(q^2)\right], \tag{8.65}$$

где

$$\chi(q^2) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\frac{q^2}{m^2}, & -\frac{q^2}{m^2} \ll 1, \\ \ln\frac{(-q^2)}{m^2} - 1, & -\frac{q^2}{m^2} \gg 1. \end{cases} \tag{8.66}$$

Здесь $(d\sigma/d\Omega)_0$ представляет собой вклад наинизшего порядка в упругое сечение. Сечение тормозного излучения согласно (7.64) равно

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{торм}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \chi(q^2). \tag{8.67}$$

Мы видим, однако, что выражения (8.65) и (8.67) нельзя складывать непосредственно, поскольку обрезание по фотонам с малой энергией введено в них различным способом.

Для преодоления этой трудности необходимо либо вновь получить сечение тормозного излучения, введя конечную массу фотона, либо заново вычислить поправки к вершине, наложив запрет на излучение фотонов с энергией меньше $k_{\min}$. Мы выберем вторую возможность, чтобы избежать трудностей, связанных с появлением реальных продольных квантов при отличной от нуля массе фотона λ. Следует, однако, иметь в виду, что обрезание с помощью параметра $k_{\min}$ является нековариантной операцией, поэтому, проводя перенормировку вершины таким способом, необходимо соблюдать осторожность в выделении перенормированных частей. Именно по этой причине мы ранее про-

---

щее время принимается равным $(1159656{,}7 \pm 0{,}5)\cdot 10^{-9}$, а разность между экспериментальным значением и теоретическим с учетом второго порядка по α составляет (см. [81]) $(1{,}68 \pm 0{,}33)(\alpha/\pi)^3$. (*Прим. перев.*)

вели перенормировку с помощью инвариантной массы фотона λ. Для упрощения математических выкладок положим $k_{\min} \gg \lambda$. Итак, вернемся к выражению (8.49) и преобразуем фотонный

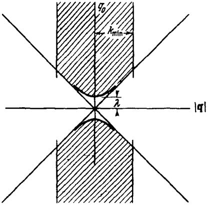


Рис. 8.11. Области в импульсном пространстве, в которых пропагаторы подвергаются изменению благодаря инфракрасному обрезанию.

пропагатор таким образом, чтобы при $k < k_{\min}$ амплитуда обращалась в нуль. Это означает, что задаваемый формулой (7.30) фотонный пропагатор $D_F(x-y, \lambda)$,

$$D_F(x-y,\ \lambda) = i\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3\, 2\,|q_0|}\, e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\,|q_0|\,|x_0-y_0|} = \\ = -\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{-iq\cdot(x-y)}}{q^2-\lambda^2+i\varepsilon}, \tag{8.68}$$

мы преобразуем к виду

$$D_F(x-y,\ k_{\min}) = i\int\limits_{|\mathbf{q}|>k_{\min}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3\, 2\,|\mathbf{q}|}\, e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\,|q_0|\,|x_0-y_0|} \approx \\ \approx D_F(x-y,\ \lambda) - i\int\limits_{|\mathbf{q}|<k_{\min}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3\, 2\,|q_0|}\, e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\,|q_0|\,|x_0-y_0|} = \\ = D_F(x-y,\ \lambda) + \int\limits_{|\mathbf{q}|<k_{\min}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi}\, e^{-iq\cdot(x-y)}\, \frac{1}{q^2-\lambda^2+i\varepsilon}, \tag{8.69}$$

где

$$q_0 = \sqrt{\mathbf{q}^2+\lambda^2}, \quad k_{\min} \gg \lambda. \tag{8.70}$$

Области в импульсном пространстве, в которых обрезание изменяет пропагаторы, изображены на рис. 8.11.

Соответствующее изменение $\delta\Lambda_\mu(p', p)$ в вершине (8.49) равно

$$\delta\Lambda_\mu(p', p) = \Lambda_\mu(p', p, \lambda) - \Lambda_\mu(p', p, k_{\min}) = \\ = -ie^2 \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_{\min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \times \\ \times \frac{\gamma_\nu(\not p' - \not k + m)\gamma_\mu(\not p - \not k + m)\gamma^\nu}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)[(p'-k)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \quad (8.71)$$

Это выражение не содержит ультрафиолетовой расходимости благодаря ограниченности области интегрирования.

Для вычисления (8.71) проведем сначала интегрирование по k_0. Выберем контур интегрирования в комплексной плоскости k_0, как показано на рис. 8.12, и воспользуемся теоремой Коши.

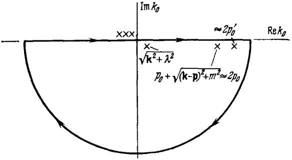


Рис. 8.12. Особенности на плоскости k_0, учитываемые при вычислении $\delta\Lambda_\mu(p', p)$.

Контур охватывает три простых полюса, которые указаны на том же рисунке. В предельном случае $k_{\min} \ll m$ в интеграл дает вклад только вычет в полюсе, расположенном в точке $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}$. Выражение для $\delta\Lambda_\mu(p', p)$ принимает вид

$$\delta\Lambda_\mu(p', p) = -e^2 \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_{\min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \frac{\gamma_\nu(\not p' + m)\gamma_\mu(\not p + m)\gamma^\nu}{(2k\cdot p)(2k\cdot p')} = \\ = -e^2\gamma_\mu \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_{\min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \frac{p\cdot p'}{(k\cdot p)(k\cdot p')}. \quad (8.72)$$

Подчеркнем еще раз, что $\delta\Lambda_\mu$ ставится в обкладки из спиноров.

Перенормировка оказывается теперь весьма тонкой операцией, поскольку обрезание проведено нековариантным способом. Благодаря тому, что равенство (8.51) по-прежнему справедливо, можно вновь воспользоваться утверждением о том, что если собственно-энергетические части корректно учтены, то проводить перенормировку Λ_μ не требуется ($Z_1 = Z_2$). Однако из-за изменения и фотонном пропагаторе величина Σ тоже меняется. Действительно,

$$\delta\Sigma(p) = \Sigma(p, \lambda) - \Sigma(p, k_{\min}) =$$
$$= -ie^2 \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_{\min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}. \tag{8.73}$$

Поскольку мы ищем изменение перенормировочной константы Z_2 (в δm не содержится инфракрасной расходимости), выражение (8.73) должно быть вычислено с точностью до членов порядка $p^2 - m^2$ включительно.

Сначала, как и для вершины, проведем интегрирование по k_0 в первом порядке[1]) по $p^2 - m^2$:

$$\delta\Sigma(p) = -e^2 \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_{\min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \frac{\gamma_\mu(\hat{p}+m)\gamma^\mu}{\lambda^2 - 2k\cdot p + (p^2 - m^2)} =$$
$$= +e^2 \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_{\min}} \frac{d^3k\,(p^2 - m^2)\,\gamma_\mu(\hat{p}+m)\gamma^\mu}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}\,(\lambda^2 - 2k\cdot p)} +$$
$$+ O((p^2 - m^2)^2) + O(k_{\min}) \approx$$
$$\approx +e^2 \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_{\min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \frac{m^2}{(k\cdot p)^2} (\hat{p} - m). \tag{8.74}$$

Таким образом, с учетом изменений в фотонном пропагаторе вершина меняется на величину

$$\delta\Lambda_\mu + \frac{1}{2}\delta\Sigma(p') \frac{1}{\hat{p}' - m} \gamma_\mu + \frac{1}{2}\gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - m} \delta\Sigma(p) =$$
$$= -\gamma_\mu e^2 \int\limits_{|\mathbf{k}|<k_{\min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \times$$
$$\times \left[\frac{p\cdot p'}{(p\cdot k)(p'\cdot k)} - \frac{m^2}{2(p\cdot k)^2} - \frac{m^2}{2(p'\cdot k)^2}\right]. \tag{8.75}$$

---

[1]) Член $O(k_{\min})$ вносит в δm пренебрежимо малое изменение.

Мы взяли половину вклада собственно-энергетических частей, изображенных на рис. 8.10, *в* и 8.10, *г*, так как поправка $\sqrt{Z_2} \approx 1 + {}^1/_2(Z_2 - 1)$ относится к волновым функциям внешних частиц.

Вычисление (8.75) в нерелятивистском пределе $|q^2/m^2| \ll 1$ дает

$$\delta\Lambda_\mu^c(p', p) = \gamma_\mu \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{2k_{\min}}{\lambda} - \frac{5}{6}\right). \tag{8.76}$$

Таким образом, из (8.62) и (8.71) имеем

$$\Lambda_\mu^c(p', p, k_{\min}) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} + \frac{2q^2}{3m^2} \gamma_\mu \left(\ln \frac{m}{2k_{\min}} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right)\right]. \tag{8.77}$$

При $|q^2/m^2| \gg 1$ для членов с инфракрасной расходимостью получаем

$$\delta\Lambda_\mu^c(p', p) = -\gamma_\mu \frac{\alpha}{\pi} \left[\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) - 1\right] \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \ln \frac{E}{k_{\min}}\right) \tag{8.78}$$

и, следовательно, из (8.63) и (8.71) находим

$$\Lambda_\mu^c(p', p, k_{\min}) = -\gamma_\mu \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{E}{k_{\min}} \left[\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) - 1\right]. \tag{8.79}$$

Отсюда мы видим, что при обрезании с помощью $k_{\min}$ для инфракрасной части сечения упругого рассеяния вместо (8.65) имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{k_{\min}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{E}{k_{\min}} \chi(q^2)\right]. \tag{8.80}$$

Добавляя сюда сечение тормозного излучения (8.67), получаем инфракрасную часть сечения рассеяния с учетом излучения фотонов с энергией меньше, чем $k_{\max}$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{инфракр}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{E}{k_{\max}} \chi(q^2)\right]. \tag{8.81}$$

Результат не зависит от $k_{\min}$ и λ [82, 83].

§ 40. Лэмбовский сдвиг

Можно считать, что поправка к рассеянию (8.77) возникает благодаря добавочному «эффективному потенциалу», который действует между электроном и источником фотонов. В качестве последнего возьмем ядро с зарядом Ze. Изменение энергии атомных уровней за счет этого добавочного взаимодействия представляет собой лэмбовский сдвиг, который мы можем теперь обсудить более подробно, чем в гл. 4, где были приведены простые физические соображения.

Эффективное взаимодействие в импульсном пространстве между электроном и источником тока $eA^{\mu}(q)$ складывается из (8.77) и вклада от поляризации вакуума (8.26):

$$\bar{u}(p')\left\{\gamma_{\mu}\left[1+\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{2k_{\min}}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\,i\,\frac{\alpha}{4\pi m}\sigma_{\mu\nu}q^{\nu}\right\}u(p)\,eA^{\mu}(q). \qquad (8.82)$$

Выражение (8.82) описывает поправки порядка α к оператору тока электрона $\bar{u}(p')\gamma_{\mu}u(p)$, обусловленные фотонами с импульсами, большими, чем $k_{\min}$. Оно справедливо при малых переданных импульсах $q_{\mu}=p'_{\mu}-p_{\mu}$, удовлетворяющих условию $|q^2/m^2|\ll 1$. Для электрона в кулоновском поле ядра с зарядом Ze источник тока есть $eA^{\mu}(q)=-(Ze^2/|\mathbf{q}|,0)$ и (8.82) принимает вид

$$-u^{+}(p')\left\{\frac{Ze^2}{|\mathbf{q}|^2}\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\frac{|\mathbf{q}|^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{2k_{\min}}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\,\frac{\alpha}{4\pi m}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q}\right\}u(p). \qquad (8.83)$$

Первый член не зависит от спина и является фурье-преобразованием эффективного потенциала, имеющего вид

$$-\frac{Z\alpha}{r}+\frac{4\alpha}{3}\frac{Z\alpha}{m^2}\left(\ln\frac{m}{2k_{\min}}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right)\delta^3(r).$$

В водородоподобном атоме он приводит к сдвигу энергии уровней, который в первом порядке теории возмущений равен

$$\Delta E_n^{>}=\frac{4\alpha}{3}\frac{Z\alpha}{m^2}|\psi_{nlm}(0)|^2\left(\ln\frac{m}{2k_{\min}}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right). \qquad (8.84)$$

Этот сдвиг обусловлен фотонами с импульсами, большими, чем $k_{\min}$. К нему надо еще добавить вклад от мягких фотонов с импульсами меньше $k_{\min}$.

Естественно ожидать, что параметр обрезания имеет порядок $k_{\min}\lesssim(Z\alpha)m$, т. е. соответствующая длина волны фотона велика по сравнению с атомными размерами. Нельзя выбрать $k_{\min}$ произвольно малым, так как при $p^2-m^2\sim(Z\alpha)^2m^2$ пропагатор связанного электрона отличается по виду от пропагатора свободной частицы. Для электрона в атоме имеем

$$p^{\mu}\sim(m+V,\ \mathbf{p}),$$

где

$$V\sim(Z\alpha)^2m \quad \text{и} \quad |\mathbf{p}|\sim Z\alpha m.$$

В проведенном ранее вычислении собственно-энергетической части $\Sigma(p)$, так же как и вершины Λ_{μ} (см. (8.74)), мы предполагаем

$$k\cdot p\approx k_{\min}m\gg p^2-m^2\sim(Z\alpha)^2m^2.$$

Для фотонов с импульсами меньше $k_{\min}$ релятивистские поправки должны быть малыми, т. е. содержать более высокие степени $Z\alpha$, и можно решить задачу в нерелятивистском приближении, как было впервые сделано Бете [84].

Согласно второму порядку старой теории возмущений сдвиг энергии, обусловленный тем, что электрон в состоянии n испустит и вновь поглотит фотон, равен

$$\Delta E_n^{<} = e^2 \int\limits_0^{k_{\min}} \frac{d^3k}{2k\,(2\pi)^3} \sum_{m,\,\varepsilon} \frac{\langle n \mid \alpha \cdot \varepsilon e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mid m\rangle \langle m \mid \alpha \cdot \varepsilon e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mid n\rangle}{E_n - k - E_m}, \quad (8.85)$$

где суммирование производится по поперечным поляризациям фотона и по всем электронным состояниям. Выберем теперь $k_{\min}$, удовлетворяющим условию

$$(Z\alpha)^2 m \ll k_{\min} \ll (Z\alpha) m$$

(например, положим $k_{\min} \approx (Z\alpha)^{3/2} m$) и воспользуемся дипольным приближением, которое может показаться до некоторой степени сомнительным. Электронные состояния являются нерелятивистскими, поэтому α можно заменить на $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$. Тогда можно провести интегрирование по k, которое дает

$$\Delta E_n^{<} = \frac{2\alpha}{3} \Bigg[-k_{\min} \langle n \mid \mathbf{v}^2 \mid n\rangle + \\ + \sum_m \frac{E_m - E_n}{m^2} \ln \frac{\mid E_m - E_n + k_{\min} \mid}{\mid E_m - E_n \mid} \mid \langle n \mid \mathbf{p} \mid m\rangle \mid^2 \Bigg]. \quad (8.86)$$

Теперь для этой части вычислений необходимо произвести перенормировку массы. Поскольку электромагнитная масса электрона δm уже содержится в его экспериментальной массе m, в гамильтониане появится массовый контрчлен вида

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2(m - \delta m)} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right)^2 \delta m.$$

Он приводит к сдвигу энергии

$$\delta E_n = \frac{1}{2} \delta m \langle n \mid \mathbf{v}^2 \mid n\rangle,$$

который имеет ту же структуру, что и первый член в (8.86). Поэтому последний включается в перенормировку массы. Пользуясь тем, что $k_{\min} \gg E_n - E_m$, получаем нерелятивистскую часть лэмбовского сдвига в виде

$$\Delta E_n^{<} = \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \sum_m (E_m - E_n) \ln \frac{k_{\min}}{\mid E_n - E_m \mid} \mid \langle n \mid \mathbf{p} \mid m\rangle \mid^2 = \\ = \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \sum_m (E_m - E_n) \ln \frac{k_{\min}}{\bar{E}} \mid \langle n \mid \mathbf{p} \mid m\rangle \mid^2. \quad (8.87)$$

Последнее равенство служит определением величины $\bar{E}$, которая по порядку величины ожидается $\sim (Z\alpha)^2 m$. Теперь суммирование по состояниям проводится с помощью следующего коммутационного соотношения:

$$\sum_m (E_m - E_n) \langle n | \mathbf{p} | m \rangle^2 = \frac{1}{2} \langle n | [[\mathbf{p}, H], \mathbf{p}] | n \rangle.$$

Оно дает

$$\Delta E_n^< = \frac{\alpha}{3\pi m^2} \ln \frac{k_{\min}}{\bar{E}} \langle n | \nabla^2 V | n \rangle = \frac{4\alpha (Z\alpha)}{3m^2} \ln \frac{k_{\min}}{\bar{E}} | \psi_{nlm}(0) |^2. \quad (8.88)$$

Объединяя найденное выражение с (8.84), получаем сдвиг энергии s-состояний водородоподобного атома с точностью порядка $\alpha (Z\alpha)^4$:

$$\Delta E_n = \frac{4\alpha (Z\alpha)^4}{3\pi n^3} \left(\ln \frac{m}{2\bar{E}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) m. \quad (8.89)$$

Величина $\bar{E}$ была найдена Бете и др. [85] и в соответствии с нашими ожиданиями оказалась равной 8,9 $\alpha^2 m$ для водорода. Для получения полного лэмбовского сдвига с точностью порядка $\alpha (Z\alpha)^4$ к (8.89) следует еще добавить вклад аномального магнитного момента из (8.83).

Неудивительно, если читатель окажется неудовлетворенным проведенным рассмотрением, в особенности использованием дипольного приближения, и тем, как мы обошлись с $k_{\min}$. Любознательному читателю мы рекомендуем ознакомиться с недавней работой Эриксена и Йенни [86], в которой фотоны не разделяются на мягкие и жесткие.

В этой главе было показано, как расширить на одну степень по α сверх низшего порядка правила написания элементов S-матрицы. Мы встретились с трудностями, связанными с появлением расходящихся выражений, и преодолели эти трудности, показав, что имеется хорошо определенный способ отделения расходящихся выражений и включения их в константы, которые перенормируют заряд и массу электрона, а также волновые функции, описывающие распространение электрона и фотона. Имеются ясные физические основания для проведения перенормировок.

К параметру массы в уравнении Дирака должна быть добавлена электромагнитная масса, поскольку она уже содержится в массе, измеряемой на опыте. Необходимо также перенормировать заряд, чтобы учесть эффект статической поляризации вакуума. Наконец, требуется перенормировать волновую функцию аналогично тому, как это делается в обычной нерелятивистской теории возмущений (см. (8.47) и (8.48)). Тем самым учитывается поправка на амплитуду наблюдения электрона в сопровождении флуктуаций, вызванных взаимодействием.

Перенормировка является довольно тонкой операцией, так как величины Z_1, Z_2, Z_3 и δm, к несчастью, расходятся. Однако, как мы видим, величины физических эффектов оказываются в итоге конечными и независящими от обрезания. Более того, они согласуются с опытом, как, например, в случае лэмбовского сдвига и аномального магнитного момента электрона [41, 81].

В этом месте естественно спросить, какие новые проблемы возникнут при переходе к еще более высоким порядкам по α. Оказывается, что никаких, за исключением необходимости проводить дополнительную вычислительную работу. Мы уже ввели все необходимые перенормировки. Изложенные в этой главе идеи и методы достаточны для того, чтобы, вычисляя S-матрицу в любом (конечном) порядке по α, получать единственные, конечные и независящие от обрезания амплитуды любых физических процессов (см. [50]).

ЗАДАЧИ

1. Проверьте унитарность амплитуды электрон-протонного рассеяния вплоть до порядка e^4. Для этого найдите абсорбтивную часть (7.51), которая отвечает промежуточным электрону и протону на массовой поверхности, и покажите с помощью (8.33), что она равна соответствующему произведению амплитуд второго порядка. Покажите также, что диаграммы на рис. 7.6 и 7.7 не приводят ни к каким другим абсорбтивным частям.

2. Проверьте унитарность амплитуды рассеяния до порядка e^3, связав мнимую часть поправки к вершине (8.60) с соответствующим произведением амплитуды электрон-позитронного рассеяния второго порядка и вершины $e\gamma_\mu$.

3. Покажите, что собственная масса, вычисленная из (8.35) с параметром обрезания Λ таким, что $\Lambda \ll m$, линейно растет с ростом Λ и отвечает классической собственной энергии заряда, распределенного с радиусом $a \sim 1/\Lambda$.

4. Закончите вычисление лэмбовского сдвига в порядке $\alpha(Z\alpha)^4$, добавив к (8.89) член из (8.83), отвечающий аномальному магнитному моменту. Проведите вычисления для s- и p-состояний.

5. Постройте амплитуду рассеяния фотона на фотоне порядка e^4 и покажите, что она удовлетворяет калибровочной инвариантности и конечна.

6. Докажите теорему Фарри [88], согласно которой диаграмма в виде замкнутой петли с нечетным числом исходящих фотонных линий равна нулю. Из этой теоремы следует, что рассеяние света во внешнем поле (дельбрюковское рассеяние) в наинизшем порядке квадратично по напряженности поля.

7. Путем явного вычисления убедитесь, что во втором порядке $Z_1 = Z_2$. Проведите обрезание фотонного пропагатора, чтобы сохранить калибровочную инвариантность.

8. Докажите (8.59).

9. Проверьте (8.76) и (8.78).

10. Найдите радиационные поправки порядка $\alpha \ln(q^2/m^2)$ и $\alpha \ln(E/k_{\min})$ к рассеянию электрона в кулоновском поле при больших энергиях и переданных импульсах.

ГЛАВА 9

УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА — ГОРДОНА

§ 41. Введение

Можно использовать метод функции распространения и развить соответствующую технику вычислений для процессов с участием частиц со спином 0. Мы попытаемся описать такие частицы скалярной волновой функцией $\varphi(x)$, имеющей всего одну компоненту. Тем самым мы приходим к уравнению Клейна — Гордона для свободной частицы

$$(\Box + m^2)\,\varphi(x) = 0. \tag{9.1}$$

В гл. 1 это уравнение было отвергнуто, так как оказалось невозможным определить сохраняющуюся положительно-определенную вероятность. Однако в результате дальнейшего рассмотрения первоначальные мотивы, заставившие нас отказаться от (9.1), исчезли. Поэтому мы вновь возвращаемся к этому уравнению, приняв фейнмановскую интерпретацию состояний с отрицательной энергией, движущихся назад во времени. Спин частицы несуществен для такой интерпретации, и мы убедимся в том, что она справедлива для частиц с нулевым спином, так же как и для электронов.

Аналогично тому, что было для электронов, мы придем к следующей картине: наряду, например, с π^+-мезоном, который описывается решением уравнения Клейна — Гордона с положительной энергией, появляется также π^--мезон, интерпретируемый как π^+-мезон с отрицательной энергией, движущийся назад во времени.

Теперь отвлечемся на некоторое время и задумаемся над тем, к каким частицам в природе можно применять уравнение Клейна — Гордона. Стабильные элементарные частицы с нулевым спином неизвестны, однако π-мезоны и K-мезоны являются почти стабильными кандидатами. Экспериментально обнаружено [89, 15], что они одновременно рождаются и уничтожаются в большом количестве, например, в следующих реакциях (p — протон, n — нейтрон, Λ^0 — нейтральная лямбда-частица, π^+ —

положительно заряженный π-мезон и т. д.):

$$p+p\to p+n+\pi^+, \quad \pi^-+p\to \Lambda^0+K^0,$$
$$\to p+p+\pi^0, \quad K^-+p\to \Lambda^0+\pi^0, \qquad (9.2)$$
$$\to p+\Lambda^0+K^+, \quad \to \Sigma^-+\pi^+.$$

Поэтому волновое уравнение для этих мезонов с нулевым спином должно учитывать возможные процессы рождения и аннигиляции. Нельзя проследить за мировыми линиями таких частиц во время процесса рассеяния, как это было возможно для электронов, взаимодействующих с фотонами. В частности, нельзя проследить за мировыми линиями заряженных π- и K-мезонов даже в случае взаимодействия с фотонами, так как имеется вклад диаграмм типа изображенной на рис. 9.1.

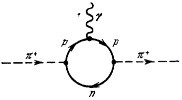


Рис. 9.1. Вклад в электромагнитную структуру π-мезона.

Возможность рождения и уничтожения одиночных бесспиновых частиц, подтверждаемая на опыте, приводит к тому, что теория взаимодействия таких частиц должна быть многочастичной. Лучше всего здесь подходит формализм квантовой теории поля, но опять, как и для взаимодействия электронов и фотонов, мы сможем понять многие явления и провести большое количество расчетов с помощью метода функции распространения, расширенного на случай мезонов, связанных с источником, которому отвечал бы добавочный член в правой части (9.1).

Если включить слабые взаимодействия, то мезоны с нулевым спином уничтожаются [89, 15] также в реакциях, например, следующего типа (μ — мю-мезон, ν — нейтрино):

$$\pi^+\to\mu^++\nu,$$
$$K^+\to\pi^++\pi^++\pi^-, \qquad (9.3)$$
$$\to\pi^0+\mu^++\nu.$$

Вследствие того, что взаимодействие, отвечающее за подобные слабые распады (9.3), мало, заряженные π- и K-мезоны имеют очень большое время жизни, $\tau \sim 10^{-8}$ *сек*, которое значительно превосходит естественную единицу времени $\hbar/mc^2 < 10^{-23}$ *сек*, образованную из величин $\hbar$, c и масс π- или K-мезона. Поэтому в первом порядке теории возмущений по степеням константы слабого взаимодействия можно пренебречь распадами (9.3) и конечным временем жизни $\tau \sim 10^{-8}$ *сек* при рассмотрении амплитуд процессов сильного взаимодействия типа (9.2). В этом приближении π- и K-мезоны считаются стабильными частицами и описываются начальными и конечными свободными волновыми функциями.

Нейтральные π^0- и K^0-мезоны, которые мы также хотим включить в рассмотрение, имеют меньшее время жизни и распадаются в основном по следующим каналам [89, 15]:

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma, \qquad \tau_{\pi^0} \sim 10^{-16} \text{ сек},$$
$$K^0 \to \pi^+ + \pi^-, \quad \tau_{K^0} \sim 10^{-10} \text{ сек}.$$

Однако по сравнению с характерным временем 10^{-23} *сек* эти процессы протекают все же очень медленно, и отвечающее за них взаимодействие достаточно рассматривать лишь в наинизшем порядке. Поэтому π^0 и K^0 также будут рассматриваться как стабильные в процессах сильного взаимодействия типа (9.2).

Кроме взаимодействий типа (9.2) и (9.3), в которых участвуют частицы со спином 0, заряженные π- и K-мезоны взаимодействуют с фотонами и внешним электромагнитным полем. Для того чтобы подчеркнуть сначала сходство с электродинамикой дираковского электрона, мы в этой главе ограничимся рассмотрением электродинамики частиц со спином 0. Метод функции распространения для этих частиц будет развит на основе тех же физических принципов, что и в теории электронов. С целью рассмотрения поведения мезонов во внешних полях при низкой энергии, например связанных состояний π-мезоатомов, мы осуществим нерелятивистский переход в уравнении Клейна — Гордона и дадим его нерелятивистскую интерпретацию. Более общая проблема слабых и сильных взаимодействий рассматривается в следующей главе.

§ 42. Пропагатор для уравнения Клейна — Гордона

Решения уравнения Клейна — Гордона удовлетворяют уравнению непрерывности, которое, согласно (1.12), имеет вид

$$\frac{\partial j^\mu(x)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(i\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - i\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\right) = 0.$$

По теореме о дивергенции интеграл

$$Q = \int d^3x\, j_0(x) = i \int d^3x\, \varphi^* \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi, \tag{9.4}$$

где введено полезное сокращенное обозначение

$$a \overleftrightarrow{\partial_0} b \equiv a\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right) b,$$

сохраняется для решений уравнения (9.1).

Решения уравнения Клейна — Гордона в виде плоских волн с положительными и отрицательными частотами образуют в совокупности полный набор. Нормированные в ящике объемом V они имеют вид

$$\mathfrak{F}^{\pm}(x) = \frac{e^{\mp ip\cdot x}}{\sqrt{2\omega_p V}},$$

где $\omega_p = p_0 > 0$ и $p^2 = m^2$ в соответствии с условием Эйнштейна. Решения, нормированные в непрерывном спектре, записываются следующим образом:

$$f_p^{\pm}(x) = e^{\mp ip\cdot x}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_p}} \tag{9.5}$$

для положительно- и отрицательно-частотных решений соответственно. Они удовлетворяют условиям ортонормированности:

$$\begin{aligned} &\int d^3x\, f_{p'}^{(\pm)*}(x)\, i\overleftrightarrow{\partial_0} f_p^{(\pm)}(x) = \pm\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}'),\\ &\int d^3x\, f_{p'}^{(\pm)*}(x)\, i\overleftrightarrow{\partial_0} f_p^{(\mp)}(x) = 0. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Обратим внимание, что для суперпозиции положительно-частотных решений, т. е. для

$$\varphi^{(+)}(x) = \int d^3p\, a_+(p)\, f_p^{(+)}(x), \tag{9.7а}$$

величина Q положительна,

$$Q = i\int d^3x\, \varphi^{(+)*}(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi^{(+)}(x) = +\int d^3p\,|\,a_+(p)\,|^2, \tag{9.7б}$$

а для решений с отрицательной частотой, т. е. для

$$\varphi^{(-)}(x) = \int d^3p\, a_-^*(p)\, f_p^{(-)}(x), \tag{9.8а}$$

эта величина отрицательна,

$$Q = i\int d^3x\, \varphi^{(-)*}(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi^{(-)}(x) = -\int d^3p\,|\,a_-(p)\,|^2. \tag{9.8б}$$

Именно в этом пункте заключается трудность для вероятностной интерпретации решений уравнения Клейна — Гордона, так как для произвольной суперпозиции решений в виде плоских волн величина Q принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Займемся построением фейнмановского пропагатора для уравнения Клейна — Гордона. Для этого найдем решения уравнения

$$(\Box_{x'} + m^2)\,\Delta_F(x'-x) = -\,\delta^4(x'-x), \tag{9.9}$$

которое описывает распространение вперед во времени положительно частотных и назад во времени отрицательно-частотных частей волн. Действуя по аналогии с теорией Дирака (см. (6.40)—(6.46)), перейдем путем фурье-преобразования к импульсному представлению, в котором Δ_F имеет вид

$$\Delta_F(x'-x)=\int d^4p\,\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{p^2-m^2+i\varepsilon}. \qquad (9.10)$$

Благодаря малой мнимой добавке к массе пропагатор (9.10) удовлетворяет требуемому граничному условию, которое состоит в том, что только положительные частоты распространяются вперед во времени, а отрицательные — назад. Как было показано в гл. 6, контур интегрирования в (9.10) однозначно задается этим условием.

Проверим, что контур интегрирования в (9.10) выбран правильно. Для этого проведем интегрирование по dp_0, используя теорему Коши. Получим

$$\begin{aligned}\Delta_F(x'-x)&=-i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\,2\omega_p}\,e^{-i\omega_p|t'-t|}\,e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}=\\&=-i\int d^3p\,f_p^{(+)}(x')\,f_p^{(+)*}(x)\,\theta(t'-t)-\\&\quad-i\int d^3p\,f_p^{(-)}(x')\,f_p^{(-)*}(x)\,\theta(t-t').\end{aligned} \qquad (9.11)$$

Возьмем волну общего вида, содержащую как положительные, так и отрицательные частоты,

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x). \qquad (9.12)$$

Тогда из (9.6) и (9.11) прямым вычислением находим, что $\Delta_F(x'-x)$ обеспечивает распространение вперед во времени только волн с положительными частотами

$$-i\theta(t'-t)\,\varphi^{(+)}(\mathbf{x}',t')=\int d^3x\,\Delta_F(x'-x)\,i\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi^{(+)}(\mathbf{x},t) \qquad (9.13)$$

и назад во времени волн с отрицательными частотами

$$-i\theta(t-t')\,\varphi^{(-)}(\mathbf{x}',t')=-\int d^3x\,\Delta_F(x'-x)\,i\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi^{(-)}(\mathbf{x},t). \qquad (9.14)$$

Формулы (9.13) и (9.14) аналогичны (6.49) и (6.50) для уравнения Дирака.

§ 43. Введение электромагнитных потенциалов

Взаимодействие мезона со спином 0 с электромагнитным полем вводится, как и для уравнения Дирака, с помощью минимальной замены

$$p^\mu\to p^\mu-eA^\mu(x). \qquad (9.15)$$

Сначала будем считать $A^\mu(x)$ приложенным внешним потенциалом. Вводя (9.15) в уравнение (9.1), получаем

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\mu}-eA^\mu\right)^2-m^2\right]\phi(x)=0. \tag{9.16}$$

Для уравнения (9.16) по-прежнему имеется сохраняющийся поток, который по аналогии с (1.12) равен

$$j^\mu=\phi^*(x)\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\mu}-eA^\mu(x)\right)\phi(x)\right]-\\ -\phi(x)\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\mu}+eA^\mu(x)\right)\phi^*(x)\right]. \tag{9.17}$$

Соответствующий сохраняющийся заряд имеет вид

$$Q=\int d^3x\,\phi^*(x)\,[i\overleftrightarrow{\partial_0}-2eA^0(x)]\,\varphi(x). \tag{9.18}$$

Амплитуда рассеяния на этом потенциале плоской волны, описывающей падающий заряженный мезон, дается решением уравнения (9.16). Принимая фейнмановское граничное условие, согласно которому вперед во времени распространяются рассеянные волны только с положительными частотами, а назад — с отрицательными, мы интегрируем (9.16) с помощью фейнмановского пропагатора (9.10):

$$(\Box_x+m^2)\,\phi(\mathbf{x},t)=-ie\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}A^\mu+A^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\phi+e^2A_\mu A^\mu\phi, \tag{9.19}$$

$$\phi(\mathbf{x},t)=\varphi(\mathbf{x},t)+\int d^4y\,\Delta_F(x-y)\,V(y)\,\phi(y),$$

где

$$V(y)=ie\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}A^\mu(y)+A^\mu(y)\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)-e^2A_\mu(y)\,A^\mu(y).$$

Уравнение (9.19) аналогично уравнению (6.53) для дираковских частиц, и решения обоих уравнений имеют близкий физический смысл. Мы требуем, чтобы в результате рассеяния в будущее распространялись только волны с положительными частотами, отвечающие частицам с положительной энергией. Выполнение этого требования обеспечивается интегрированием с фейнмановским пропагатором в (9.19). Если воспользоваться (9.11), интегрирование дает

$$\phi(\mathbf{x},t)=\\ =\varphi(\mathbf{x},t)-i\int d^3p\,f_p^{(+)}(x)\int d^4y\,\theta(t-y_0)\,f_p^{(+)*}(y)\,V(y)\,\phi(y)-\\ -i\int d^3p\,f_p^{(-)}(x)\int d^4y\,\theta(y_0-t)\,f_p^{(-)*}(y)\,V(y)\,\phi(y). \tag{9.20}$$

Это выражение содержит также волны с отрицательными частотами, которые распространяются назад, в прошлое. Однако с точки зрения экспериментатора, наблюдающего за показаниями приборов, поглощение в прошлом частицы с отрицательной энергией и зарядом e равносильно испусканию частицы с положительной энергией и зарядом $-e$. Таким образом, мы приходим к фундаментальному предсказанию, допускающему экспериментальную проверку, которое состоит в том, что для каждой частицы в природе существует противоположно заряженная античастица.

Частица может не нести заряда и в этом случае она может оказаться тождественной своей античастице, Такая частица существует в природе — это π^0, нейтральный π-мезон со спином 0. Хотя π^0 не участвует в задаваемом (9.15) электромагнитном взаимодействии, пропагатор свободных π^0-мезонов может быть построен в полной аналогии с изложенным в § 42. Поскольку для π^0 ток и заряд (9.4) равны нулю, то в отсутствие взаимодействий π^0 будет описываться действительным решением $\varphi = \varphi^*$ свободного уравнения Клейна — Гордона. Тогда фейнмановский пропагатор (9.11) будет, как и для заряженных мезонов, соответствовать распространению положительно-частотной части φ вперед во времени, а отрицательно-частотной — назад.

§ 44. Амплитуды рассеяния

Направляя мировые линии в разные стороны, т. е. вперед и назад во времени, как показано на рис. 9.2, мы тем самым включаем в рассмотрение, помимо амплитуд собственно рассеяния,

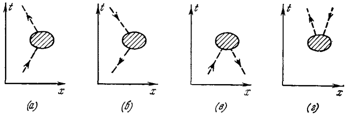


Рис. 9.2. Диаграммы для рассеяния частицы и античастицы, рождения и аннигиляции пары.

еще и амплитуды рождения и аннигиляции пар частица-античастица в полной аналогии с изложенным ранее для электронов.

Вычисление амплитуды рассеяния или перехода производится путем последовательной итерации уравнения (9.19). Количество итераций определяется требуемой точностью получения ϕ. Свободное решение φ в (9.19) представляет собой нормированную свободную волну в отсутствие рассеяния. Амплитуда перехода в состояние, в котором частица обладает заданным импульсом p'_+, получается путем проектирования рассеянной в результате взаимодействия волны на нормированную свободную волну с импульсом p'_+. Вероятность перехода дается тогда квадратом модуля этой амплитуды.

В обычном рассеянии мезонов (рис. 9,2, *а*) мы имеем после рассеяния при $t \to \infty$ волны с положительными частотами и амплитуда рассеяния находится путем выделения из рассеянной волны (9.20) положительно-частотной проекции:

$$S_{p'_+,\, p_+} = \lim_{t\to\infty} \int d^3x\, f^{(+)*}_{p'_+}\, i\overleftrightarrow{\partial_0}\, \phi(x) = \\ = \delta^3(\mathbf{p}'_+ - \mathbf{p}_+) - i \int d^4y\, f^{(+)*}_{p'_+}(y)\, V(y)\, \phi(y); \qquad (9.21)$$

здесь $\phi(y)$ дается уравнением (9.19), в котором свободная волна с положительной частотой $f^{(+)}_{p_+}(y)$ отвечает падающему мезону. Вероятность перехода равна $|S_{p'_+,\, p_+}|^2$.

Для процесса рождения пары (рис. 9,2, *г*) мы вновь, как и в (9.21), выделяем волны с положительными частотами, однако на этот раз $\phi(y)$ представляет собой рассеянную волну, возникшую из падающей волны с отрицательной частотой $f^{(-)}_{p_-}(y)$ в (9.19). В соответствии с (9.14) волна с отрицательной частотой является «падающей» при $y_0 \to +\infty$, поскольку посредством пропагатора $\Delta_F(x - y)$ она распространяется только назад во времени. В полной аналогии с основными правилами, выведенными в гл. 6 для случая позитронов, мы сопоставим распространению назад решения с отрицательной частотой и квантовыми числами p_- испускание антимезона, например π^--мезона, с положительной энергией и 4-импульсом p_-.

Для нахождения амплитуды аннигиляции пары, изображенной на рис. 9.2, *в*, мы выделяем при $t \to -\infty$ отрицательно-частотную часть рассеянной волны (9.20):

$$S_{p_-,\, p_+} = -\lim_{t\to -\infty} \int d^3x\, f^{(-)*}_{p_-}(x)\, i\overleftrightarrow{\partial_0}\, \phi(y) = \\ = -i \int d^4y\, f^{(-)*}_{p_-}(y)\, V(y)\, \phi(y); \qquad (9.22)$$

здесь $\phi(y)$ дается уравнением (9.19), в котором налетающий π^+-мезон описывается волной $f^{(+)}_{p_+}(y)$ с положительной частотой и 4-импульсом p_+. Как обычно, налетающему π^--мезону с положительной энергией и 4-импульсом p_- соответствует волна с отрицательной частотой $f^{(-)*}_{p_-}(y)$, распространяющаяся от взаимодействия $V(y)$ назад в прошлое.

Наконец, рассеяние π^--мезона (или антимезона), изображенное на рис. 9,2, *б*, дается формулой (9.22), где по-прежнему $\phi(y)$ определяется уравнением (9.19). Однако «падающая» отрицательно-частотная волна π^+-мезона описывается теперь функцией $f_{p'_-}^{(-)}(y)$, которая соответствует конечному π^--мезону, испускаемому после рассеяния с положительной энергией и 4-импульсом p'_-, т. е.

$$S_{p_-,\, p'_-} = \delta^3(\mathbf{p}_- - \mathbf{p}'_-) - i \int d^4y\, f_{p_-}^{(-)*}(y)\, V(y)\, \phi(y). \qquad (9.23)$$

Сравнение с методом функции распространения для позитронов, изложенным в гл. 6, показывает, что полученные сейчас правила написания элементов S-матрицы по своему физическому смыслу совпадают с рассмотренными в гл. 6.

Практические правила вычисления вероятностей переходов под действием электромагнитного взаимодействия могут быть получены путем рассмотрения нескольких простых примеров, как было сделано в гл. 7 для электронов.

§ 45. Процессы рассеяния низшего порядка

В качестве первого примера рассмотрим кулоновское рассеяние π^+-мезона в низшем порядке по e. В этом приближении член $e^2 A_\mu A^\mu$ в (9.19) может быть отброшен.

Амплитуда перехода для диаграммы на рис. 9.3 находится из (9.21), где надо положить $\phi(y) \approx f_{p_i}^{(+)}(y)$. При $q \equiv p_f - p_i \neq 0$

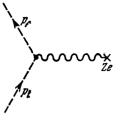


Рис. 9.3. Кулоновское рассеяние π^+-мезона.

член с δ-функцией равен нулю и мы получаем

$$S_{p_f,\, p_i} = \frac{-ie}{(2\pi)^3} \int d^4y\, \frac{1}{\sqrt{2\omega_f \cdot 2\omega_i}} \times$$
$$\times\, e^{iq\cdot y} (p_f + p_i)_\mu A^\mu(y) =$$
$$= -\frac{ie\,(p_f + p_i)_\mu}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_f \cdot 2\omega_i}} A^\mu(q), \qquad (9.24)$$

где

$$A^\mu(q) \equiv \int d^4y\, e^{iq\cdot y} A^\mu(y).$$

Форма тока в (9.24) напоминает независящую от спина часть в разложении Гордона для тока электрона. Подставляя в (9.24) выражение для $A^\mu(q)$ в случае статического кулоновского потенциала

$$A^\mu(q) = \frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2}\, 2\pi\delta(\omega_f - \omega_i)\, g^{\mu 0}, \qquad (9.25)$$

мы получаем сечение путем обычной процедуры возведения в квадрат, суммирования по конечным состояниям и деления на падающий поток. По аналогии с (7.10) находим

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^3}{|\mathbf{v}|} d^3p_f \, 2\pi\delta(\omega_f - \omega_i) \left[\frac{Ze^2(\omega_f + \omega_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_f \cdot 2\omega_i}} \, \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \right]^2$$

и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4p^2\beta^2 \sin^4(\theta/2)} . \qquad (9.26)$$

Полученное выражение отличается от соответствующей формулы (7.22) для электронов отсутствием множителя $[1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)]$, который связан со спином.

Подобный результат получается и для кулоновского рассеяния π^--мезонов. Из формулы (9.23), в которой $f^{(-)*}_{p_-}(y)$ описывает π^--мезон с импульсом p_- до рассеяния и $\phi(y) \approx f^{(-)}_{p'_-}(y)$ отвечает конечному π^-, испускаемому после рассеяния (как показано на рис. 9.4), мы находим

$$S_{p_-,\, p'_-} = + \frac{ie\left(p_- + p'_-\right)_\mu A^\mu(q)}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_- \cdot 2\omega'_-}}, \qquad (9.27)$$

где $q \equiv p'_- - p_-$ по-прежнему обозначает переданный импульс. Формулы (9.24) и (9.27) отличаются только знаком, что связано с разными знаками заряда, π^+ и π^-, и приводят к одинаковому сечению (9.26).

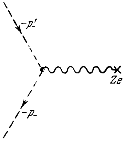


Рис. 9.4. Кулоновское рассеяние π^--мезона.

Урок, извлеченный нами из проведенного вычисления, состоит в том, что π-мезонной вершине ставится в соответствие фактор $e\left(p_\mu + p'_\mu\right)$ вместо $e\gamma_\mu$ для электрона. Волновая функция нормируется множителем $1/\sqrt{2\omega}$, который заменяет $\sqrt{m/E}$ для электрона, и, разумеется, спиноры в данном случае отсутствуют.

Правила для члена $e^2 A_\mu A^\mu$ во взаимодействии V (9.19) мы получим из рассмотрения комптоновского рассеяния заряженного мезона. «Внешний потенциал» в данном случае складывается из поглощенных и испущенных фотонов, описываемых с использованием «нормировки в непрерывном спектре» в виде суммы двух членов (см. (7.53)):

$$A_\mu(x) = \frac{\varepsilon_\mu(l, \lambda)\, e^{-il\cdot x}}{\sqrt{2l(2\pi)^3}} + \frac{\varepsilon_\mu(l, \lambda)\, e^{il\cdot x}}{\sqrt{2l\,(2\pi)^3}} . \qquad (9.28)$$

где l и λ отвечают импульсу и поляризации.

Поскольку комптоновская амплитуда в низшем порядке пропорциональна e^2, члены в V, линейные по e, необходимо проитерировать один раз. Тогда S-матрица, имеющая порядок e^2 и отвечающая диаграммам на рис. 9.5, будет равна

$$S_{fi} = (-ie)^2 \int d^4y\, d^4z\, f_{p'}^{(+)*}(y)\, i\left[\frac{\partial}{\partial y_\mu} A_\mu(y) + A_\mu(y)\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] \times \\ \times i\Delta_F(y-z)\, i\left[\frac{\partial}{\partial z_\nu} A_\nu(z) + A_\nu(z)\frac{\partial}{\partial z_\nu}\right] f_p^{(+)}(z) + \\ + ie^2 \int d^4y\, f_{p'}^{(+)*}(y)\, A_\mu(y)\, A^\mu(y)\, f_p^{(+)}(y). \quad (9.29)$$

Подставляя сюда A_μ из (9.28) и сохраняя только перекрестные члены между выражением

$$\frac{\varepsilon_\mu e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k}},$$

которое описывает поглощение фотона, характеризуемого (k, λ), и выражением

$$\frac{\varepsilon'_\mu e^{ik'\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'}},$$

которое отвечает испусканию фотона с (k', λ'), после интегрирования по пространственным координатам находим

$$S_{fi} = \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega' \cdot 2\omega \cdot 2k' \cdot 2k}} (2\pi)^4 \delta^4(p + k - p' - k') \times \\ \times \left[\varepsilon \cdot (2p + k) \frac{i}{(p+k)^2 - m^2} \varepsilon' \cdot (2p' + k') + \right. \\ \left. + \varepsilon \cdot (2p' - k) \frac{i}{(p-k')^2 - m^2} \varepsilon' \cdot (2p - k') - 2i\varepsilon \cdot \varepsilon'\right]. \quad (9.30)$$

Полезно убедиться в правильности (9.30) путем проверки инвариантности этой амплитуды относительно калибровочного преобразования. Такой проверке мы уже подвергали в гл. 7 амплитуды для электронов. Легко установить, что S_{fi} обладает инвариантностью как по отношению к калибровочному преобразованию

$$\varepsilon^\mu \to \varepsilon^\mu + \lambda k^\mu, \quad (9.31)$$

примененному к начальному фотону, так и по отношению к преобразованию

$$\varepsilon'_\mu \to \varepsilon'_\mu + \lambda' k'_\mu \quad (9.32)$$

над конечным фотоном.

В выражении (9.30) удобно выбрать калибровку

$$\varepsilon \cdot p = \varepsilon' \cdot p = 0,$$

которая соответствует поперечной поляризации фотонов в лабораторной системе, т. е. в системе, где начальный мезон покоится и имеет 4-импульс $p = (m, 0)$. Тогда в (9.30) оказывается отличным от нуля только вклад от члена $A_\mu A^\mu$, так как $\varepsilon \cdot k = \varepsilon' \cdot k' = 0$. Далее, по хорошо знакомой нам схеме переходим

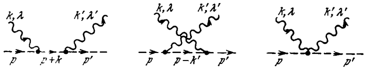


Рис. 9.5. Комптоновское рассеяние π-мезона.

от амплитуды к дифференциальному сечению. Для этого возводим (9.30) в квадрат, устраняем одну степень $(2\pi)^4\delta^4(p + k - p' - k')$, умножаем на фазовый объем конечных частиц

$$d^3p'\, d^3k'$$

и на $(2\pi)^3$ — величину, обратную начальному потоку в лабораторной системе, а также на $(2\pi)^3$— величину, обратную плотности частиц в мишени. В итоге имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{m^2} \frac{(\varepsilon \cdot \varepsilon')^2}{[1 + (k/m)(1 - \cos\theta)]^2}.$$

Отсюда в пределе малой энергии фотона $k \to 0$ получаем классический томсоновский предел. Суммируя по поляризациям конечного фотона ε' и усредняя для неполяризованного света по начальным поляризациям, получаем

$$\left(\frac{\overline{d\sigma}}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2 (1 + \cos^2\theta)}{2m^2 [1 + (k/m)(1 - \cos\theta)]^2}. \tag{9.33}$$

§ 46. Процессы высшего порядка

Мы можем продолжить аналогию с методом функции распространения для электрона и вывести из разобранных примеров правила вычисления диаграмм высшего порядка. Основные отличия от правил для электрона состоят в следующем:

1. В вершине рассеяния мезона из состояния p_μ в состояние p'_μ (см. рис. 9.6) с любым направлением линий вперед и назад по времени следует произвести замену

$$-ie\gamma^\mu \to -ie\,(p^\mu + p^{\mu\prime}). \tag{9.34}$$

2. Добавочный член $A_\mu A^\mu$ во взаимодействии (9.19) вносит вклад[1])

$$2ie^2 g_{\mu\nu}. \tag{9.35}$$

Примером является амплитуда (9.30). Множитель i появляется благодаря тому, что параметром разложения для этого члена служит e^2. Поэтому в порядке e^n в результате n-кратной итерации (9.19) возникает множитель $(-i)^n$, когда мы вычисляем вклад от (9.34) в этом порядке. Если член $A_\mu A^\mu$ входит в вычисления m раз, появляется множитель $(-i)^{n-m}(-1)^m = (-i)^{n-2m}(i)^m$; следовательно, в (9.35) возникает i. Необходимо постоянно помнить, что параметром разложения является e, а не порядок взаимодействия.

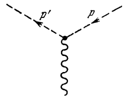


Рис. 9.6. Диаграмма для вершины, отвечающей взаимодействию вида $e\varphi^* (p' + p)_\mu \varphi A^\mu$.

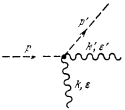


Рис. 9.7. Диаграмма для взаимодействия вида $e^2 A_\mu A^\mu \varphi^* \varphi$.

Появление множителя 2 в (9.35) связано с тем, что всегда есть два способа сопоставить двум множителям в $A_\mu A^\mu$ кванты, которые уничтожаются, рождаются или рассеиваются в вершине (см. рис. 9.7). К амплитуде взаимодействия, которая соответствует сумме всех диаграмм, вносящих вклад в данном порядке по e, можно применить критерий калибровочной инвариантности. Мы уже пользовались этим критерием для проверки (9.30). Таким образом, мы имеем полезный и очень простой способ проверки правильности вычисления относительных вкладов от членов $\mathbf{p} \cdot A + A \cdot \mathbf{p}$ и $A \cdot A$ в (9.19).

3. Пропагатор внутренней линии, которой соответствует импульс p, мы заменяем согласно

$$\frac{i}{\hat{p} - m + i\varepsilon} = \frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \to \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \tag{9.36}$$

т. е. делаем замену $\hat{p} + m \to 1$.

[1]) Имеется исключение из этого правила — двум испускаемым из одной точки фотонам, образующим замкнутую петлю, соответствует множитель 1/2 (см. задачу 9.11).

4. Для внешних линий мы заменяем электронные спиноры следующим образом:

$$\sqrt{\frac{m}{E}}\, u(p) \to \frac{1}{\sqrt{2\omega}}. \qquad (9.37)$$

Все остальные множители i и 2π в точности такие же, как для электронов. Остается лишь вопрос об относительном знаке минус. В случае электронов мы, руководствуясь принципом Паули, производили антисимметризацию относительно перестановки двух тождественных частиц. С другой стороны, эксперимент свидетельствует о том, что π-мезоны являются бозонами, т. е. по ним имеется симметрия согласно статистике Бозе — Эйнштейна. В частности, в реакции

$$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

два π^+-мезона испускаются в относительном s-состоянии. Кроме того, есть серьезные теоретические основания, впервые указанные Паули, для связи между спином и статистикой. Эта связь такова, что частицы с полуцелым спином подчиняются принципу запрета (являются фермионами), а по частицам с целым спином имеется симметрия (они являются бозонами).

Вопрос о связи спина со статистикой рассматривается в квантовой теории поля [90]. Пока мы просто примем, что частицы со спином 0 являются бозонами и подчиняются условию симметрии. Это означает, что между диаграммами, отличающимися перестановкой бозонов, должен быть относительный знак плюс вместо минуса для случая фермионов.

Теперь не будет множителей (-1) для замкнутых петель или между диаграммами рассеяния и аннигиляции. Мы вводили их в диаграммы для электронов, как, например, в амплитуды (8.2) и (8.5), соответствующие диаграммам на рис. 8.1, *б* и 8.1, *д*, исходя из принципа Паули в теории дырок. Для бозонов нет заполненного моря с отрицательной энергией и относительные знаки следует получать путем иных рассуждений.

В кулоновском рассеянии одинаковых бозонов между двумя диаграммами, изображенными на рис. 9.8, имеется знак плюс. Амплитуда рассеяния бозона на антибозоне получается отсюда заменой знака энергии для двух линий; например, с помощью подстановки

$$q_2 \leftrightarrow -p_2 \qquad (9.38)$$

мы получаем амплитуды для двух диаграмм, изображенных на рис. 9.9.

Относительный знак двух амплитуд, соответствующих диаграммам на рис. 9.9, остается положительным, если замена

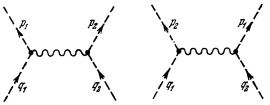


Рис. 9.8. Кулоновское рассеяние π^+-мезона на π^+-мезоне.

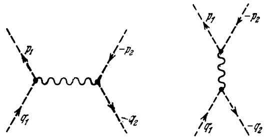


Рис. 9.9. Кулоновское рассеяние π^+-мезона на π^--мезоне.

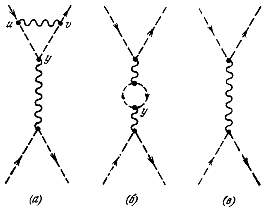


Рис. 9.10. Вклады четвертого порядка в кулоновское рассеяние $\pi^+ - \pi^-$.

(9.38) является единственным изменением при переходе от диаграмм рассеяния (рис. 9.8) к диаграммам аннигиляции (рис. 9.9). Формула (9.38) есть пример правила подстановки (кросс-симметрии), с которым мы уже встречались для электронов (см., например, (7.85)). Теперь мы распространили его на амплитуды для бозонов.

Это правило приводит к положительному относительному знаку всех трех амплитуд, изображенных на рис. 9.10. Ниже вершины y диаграммы 9.10, *а* и 9.10, *в* одинаковы, поэтому их относительный знак положителен. Поскольку за счет введения на диаграмме 9.10, *а* дополнительного по сравнению с диаграммой 9.10, *в* взаимодействия между линиями u и v не возникает знака минус, мы приходим к выводу, что замкнутая петля на диаграмме 9.10, *б* не приводит к появлению множителя (-1).

Электромагнитное взаимодействие бозонов со спином 0, например π- и K-мезонов, в более высоких порядках, а также перенормировки можно рассмотреть в полной аналогии с предыдущей главой. Однако мы не будем вдаваться в детальное рассмотрение этих явлений, так как для сравнения с экспериментальными данными необходимо учесть значительно более сильное взаимодействие π- и K-мезонов друг с другом и с ядрами. Обсуждению этого неэлектромагнитного взаимодействия посвящена следующая глава.

§ 47. Нерелятивистский предельный переход в уравнении Клейна — Гордона

Существуют физические явления, для изучения которых весьма желательно иметь приближенное описание π-мезонов в рамках обычной одночастичной квантовой механики с вероятностной интерпретацией. Такой подход можно применять, например, к взаимодействию заряженных π-мезонов с атомными электрическими и магнитными полями в веществе, а также к пионным атомам. Для анализа таких явлений мы попробуем сделать переход к нерелятивистскому уравнению Шредингера.

В самом начале гл. 1 мы отказались от уравнения второго порядка Клейна — Гордона вследствие невозможности построить точную одночастичную квантовую теорию с вероятностной интерпретацией. Мы отдали предпочтение уравнению Дирака, которое содержит первую производную по времени, как и нерелятивистское уравнение Шредингера. Однако затем мы убедились в том, что одночастичная картина для уравнения Дирака справедлива лишь для очень ограниченного круга явлений, таких, например, как слабые медленно меняющиеся поля, когда имеется широкая щель $\sim 2mc^2$ между спектрами положительной и отрицательной энергии. Именно такую физическую ситуацию мы сейчас рассмотрим, когда будем строить приближенную одночастичную теорию на основании уравнения Клейна — Гордона.

В качестве первого шага приведения уравнения Клейна — Гордона к форме уравнения Шредингера, т. е. к виду, содержащему только первые производные по времени, перейдем от (9.1) к паре уравнений первого порядка [91].

Введем определение

$$\xi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv \dot{\varphi} \tag{9.39}$$

и перепишем (9.1) в виде

$$\dot{\xi} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial t} = (\nabla^2 - m^2)\,\varphi. \tag{9.40}$$

Удобно ввести две линейные комбинации:

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{i}{m}\dot{\varphi}\right), \quad \chi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{i}{m}\dot{\varphi}\right), \tag{9.41}$$

которые имеют простые нерелятивистские пределы. Для свободной частицы с положительной энергией покоя имеем

$$\varphi \sim e^{-imt} = \frac{i}{m}\dot{\varphi} \tag{9.42}$$

и в этом пределе

$$\theta = \varphi \sim e^{-imt}, \quad \chi = 0. \tag{9.43}$$

Для частицы с отрицательной энергией, или античастицы, решение в том же пределе имеет вид

$$\theta = 0 \quad \text{и} \quad \chi = \varphi \sim e^{+imt}. \tag{9.44}$$

Таким образом, θ играет роль, аналогичную большим компонентам, а χ — малым компонентам дираковского спинора. В терминах θ и χ уравнение Клейна — Гордона записывается так:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{\nabla^2}{2m}(\theta + \chi) + m\theta, \\ i\frac{\partial \chi}{\partial t} &= +\frac{\nabla^2}{2m}(\theta + \chi) - m\chi. \end{aligned} \tag{9.45}$$

Введем более компактное двухкомпонентное обозначение

$$\Phi = \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{9.46}$$

Тогда получим уравнение

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H_0 \Phi, \tag{9.47}$$

где гамильтониан свободной частицы имеет вид

$$H_0 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\frac{\nabla^2}{2m} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m. \tag{9.48}$$

Хотя уравнение (9.47) имеет шредингеровскую форму, оно, как и уравнение (9.1), не приводит к положительно-определенной сохраняющейся вероятности, так как H_0 не является эрмитовым оператором. Неэрмитова матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ в члене, отвечающем кинетической энергии, связывает вместе «большие» и «малые» компоненты.

Пренебрегая ∇^2 в низшем порядке для медленно движущейся частицы, мы приходим к уравнению Шредингера и к решениям (9.43) и (9.44) для положительной и отрицательной частот соответственно. Заимствуя из гл. 4 технику Фолди — Ваутхайзена для теории Дирака, мы можем последовательно включить поправки, возникающие за счет члена, отвечающего кинетической энергии. В данном случае матрица $\rho \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ является неэрмитовым аналогом матрицы α, а $\eta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — аналогом β, где α и β — матрицы, осуществляющие преобразование уравнения Дирака. Рассуждая так же, как при выводе (4.1), положим

$$\Phi' = e^{iS}\Phi, \tag{9.49}$$

где

$$S = \eta\rho\Theta(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Theta(\mathbf{p}). \tag{9.50}$$

Отсюда находим, что при

$$\Theta(\mathbf{p}) = -\frac{i}{2}\operatorname{arctg}\frac{\mathbf{p}^2/2m}{m+\mathbf{p}^2/2m} \tag{9.51}$$

нечетные операторы ρ исчезают из гамильтониана (здесь $\mathbf{p} \equiv \frac{1}{i}\nabla$). Преобразование, задаваемое формулами (9.49)—(9.51), является неунитарным, и с его помощью неэрмитов гамильтониан (9.48) приводится к следующему виду:

$$H_0' \equiv e^{iS}H_0e^{-iS} = \eta\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}. \tag{9.52}$$

В такой форме решения с положительной и отрицательной энергией полностью разделяются, а соотношение между энергией и импульсом оказывается точно таким же, как для свободных электронов. Единственное отличие (9.52) от (4.1) состоит в том, что в (9.52) нет удвоения числа решений за счет спиновой степени свободы. Поскольку гамильтониан H_0' эрмитов, в этом представлении можно дать вероятностную интерпретацию решениям Φ'. Для решений с положительной частотой

$$\Phi'^{(+)}(x) = e^{-i\omega_p t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}a^{(+)}(\mathbf{x}) \tag{9.53}$$

имеем

$$\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}\,a^{(+)}(\mathbf{x}) = \omega_p a^{(+)}(\mathbf{x}). \tag{9.54}$$

При этом плотность вероятности дается выражением

$$P(\mathbf{x}) = |a^{(+)}(\mathbf{x})|^2, \tag{9.55}$$

а энергия равна

$$\omega_p = \int \Phi'^{(+)*}(x) H_0'(x) \Phi'^{(+)}(x) d^3x. \tag{9.56}$$

Для решений с отрицательными частотами запишем

$$\Phi'^{(-)}(x) = e^{i\omega_p t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} a^{(-)}(\mathbf{x}). \tag{9.57}$$

Собственные значения энергии находятся из уравнения, аналогичного (9.54):

$$\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}\, a^{(-)}(\mathbf{x}) = \omega_p a^{(-)}(\mathbf{x}), \tag{9.58}$$

а для вероятности имеем выражение типа (9.55):

$$P(\mathbf{x}) = |a^{(-)}(\mathbf{x})|^2. \tag{9.59}$$

Однако теперь благодаря присутствию η в (9.52) среднее от гамильтониана равно собственному значению энергии взятому со знаком минус:

$$\omega_p = -\int \Phi'^{(-)*}(\mathbf{x}) H_0'(x) \Phi'^{(-)}(x) d^3x. \tag{9.60}$$

Мы отождествим $\Phi'^{(-)*}(x)$ с волновой функцией античастицы, так как из (9.52) для свободной частицы имеем $H_0' = H_0'^{*}$ и согласно методу функции распространения (см. 9.11), (9.10) и (9.5)) вперед во времени распространяется подвергнутое комплексному сопряжению решение с отрицательной энергией.

Если имеется внешнее электромагнитное поле, то уравнение Клейна — Гордона уже не удается привести к диагональному виду, т. е. разбить на отдельные уравнения для положительных и отрицательных частот. Однако, действуя так же, как при переходе от (4.2) к (4.4), можно добиться приближенной диагонализации для случая слабых, медленно меняющихся полей. Введем, как обычно, взаимодействие с полем в уравнение (9.1) путем минимальной замены

$$p_\mu \to p_\mu - eA_\mu.$$

Тогда уравнение Клейна — Гордона, записанное в двухкомпонентной форме (9.48), примет вид

$$i\frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{\pi^2}{2m} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m + e\varphi(x) \right\} \Phi(x),$$

где $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$. Определение φ здесь такое же, как в (9.46) и (9.41), с заменой (9.39) на

$$\xi = \left[\frac{\partial}{\partial t} + ie\varphi(x)\right]\phi$$

($\phi = A^0$). Если в (4.2) мы отождествим

$$\begin{aligned} \beta &= \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{O} &= \rho \frac{\pi^2}{2m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\pi^2}{2m}, \\ \mathcal{E} &= e\varphi + \eta \frac{\pi^2}{2m}, \end{aligned} \tag{9.61}$$

то придем к (4.4) с заменой β на η. В частном случае статического внешнего поля получим приближенное уравнение Шредингера, содержащее члены до порядка $1/m^4$:

$$i \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = H'\Phi', \qquad \Phi' = e^{iS}\Phi$$

с гамильтонианом

$$H' = \eta \left(m + \frac{\pi^2}{2m} - \frac{\pi^4}{8m^3} + \ \ldots \right) + e\varphi + \frac{1}{32m^4} [\pi^2, [\pi^2, e\varphi]] + \ \ldots \tag{9.62}$$

Первый член представляет собой разложение $\sqrt{m^2 + \pi^2}$ *и описывает* релятивистский эффект увеличения массы; такой же член был в теории Дирака. Последнее слагаемое в (9.62) — это дарвиновский член; он служит поправкой к классическому электростатическому взаимодействию точечного заряда $e\varphi(\mathbf{x})$ подобно поправке на «дрожание» в дираковской теории. Однако, в отличие от (4.5) и (4.7), здесь он впервые появляется в порядке $1/m^4$.

До тех пор, пока мы ограничиваемся физическими задачами, для которых процедура Фолди — Ваутхайзена является сходящейся, и несколько первых членов ряда (4.4) или (9.62) дают результаты, близкие к точным, мы можем рассматривать взаимодействия мезонов в рамках нерелятивистской квантовой механики. С точностью до удержанных в H' членов решения с положительной и отрицательной частотой в этом представлении разделяются и гамильтониан оказывается эрмитовым, поэтому возможна традиционная вероятностная интерпретация, основанная на приведенных в гл. 1 постулатах.

Воспользовавшись (9.62) и записывая в этом представлении решения с положительной частотой по аналогии с (9.53):

$$\Phi_n'^{(+)}(x) = e^{-iE_n t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \psi_n^{(+)}(\mathbf{x}), \tag{9.63}$$

получаем

$$\left[\left(m + \frac{\pi^2}{2m} - \frac{\pi^4}{8m^3} + \ \ldots \right) \right] + e\varphi + \\ + \frac{1}{32m^4} [\pi^2, [\pi^2, e\varphi]] \ \ldots] \, \psi_n^{(+)}(\mathbf{x}) = E_n \psi_n^{(+)}(\mathbf{x}). \tag{9.64}$$

Плотность вероятности равна

$$P(\mathbf{x}) = |\Phi_n'^{(+)}(x)|^2 = |\psi_n^{(+)}(\mathbf{x})|^2, \tag{9.65}$$

а собственное значение энергии E_n совпадает, как и в (9.56), со средним значением гамильтониана:

$$E_n = \int \psi_n^{(+)*}(\mathbf{x}) H'(\mathbf{x}, e) \psi_n^{(+)}(\mathbf{x}) d^3x, \tag{9.66}$$

где $H'(\mathbf{x}, e)$ — оператор, стоящий в левой части (9.64):

$$H'(\mathbf{x}, e) \equiv \left(m + \frac{\pi^2}{2m} - \frac{\pi^4}{8m^3} + \ldots\right) + e\varphi + \frac{1}{32m^4}[\pi^2, [\pi^2, e\varphi]] + \ldots \tag{9.67}$$

Решения с отрицательной частотой запишем в виде (9.57):

$$\Phi_n'^{(-)}(x) = e^{+iE_nt}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \psi_n^{(-)}(\mathbf{x}). \tag{9.68}$$

Тогда из (9.62) найдем

$$H'^*(\mathbf{x}, -e) \psi_n^{(-)}(\mathbf{x}) = E_n \psi_n^{(-)}(\mathbf{x}). \tag{9.69}$$

Мы вновь сопоставляем античастице комплексно-сопряженное от решения с отрицательной энергией, так как $\psi_n^{(-)*}(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$H'(\mathbf{x}, -e) \psi_n^{(-)*}(\mathbf{x}) = E_n \psi_n^{(-)*}(\mathbf{x}),$$

что отличается от (9.64) только знаком при e. Плотность вероятности равна

$$P(\mathbf{x}) = |\Phi_n^{(-)'}(x)|^2 = |\psi_n^{(-)}(\mathbf{x})|^2. \tag{9.70}$$

Среднее значение гамильтониана вновь, как и в (9.60), равно взятому со знаком минус собственному значению энергии:

$$E_n = -\int \Phi_n'^{(-)*}(x) H' \Phi_n'^{(-)}(x) d^3x. \tag{9.71}$$

Поскольку решения с положительной и отрицательной частотой отличаются только знаком заряда в (9.64) и (9.69), появляется привлекательная возможность переопределить в рассматриваемом представлении Фолди - Ваутхайзена вероятности и средние значения энергии путем введения диагональной матрицы $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ уже встречавшейся нам ранее:

$$Q_n(x) \equiv \Phi_n'^*(x) \eta \Phi_n'(x), \tag{9.72}$$

$$E_n = \int \Phi_n'^*(x) \eta H' \Phi_n'(x) d^3x. \tag{9.73}$$

Такое переопределение не сказывается на (9.65) и (9.66) для решений с положительной частотой, но меняет знаки в (9.70) и (9.71) для решений с отрицательной частотой. Собственные значения энергии теперь совпадают со средними значениями H, которые по аналогии с обычной квантовой механикой стали положительными как для решений с положительной, так и с отрицательной частотой. Однако теперь $Q(x) \geqslant 0$ для решений с положительной частотой и $Q(x) \leqslant 0$ для решений с отрицательной частотой и интерпретируется как плотность заряда для частиц и античастиц соответственно.

Мы можем и далее развивать представление Фолди — Ваутхайзена, которое с точностью до удержанных в H' членов и при условии сходимости ряда по $1/m$ совпадает с формализмом обычной квантовой механики. Например, из (9.62) можно найти уровни энергии и вероятности переходов для π-мезоатома с учетом релятивистской зависимости массы и дарвиновских поправок. Кроме того, связь с классикой и соотношения Эренфеста получаются из

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = i\langle [H, O]\rangle + \left\langle \frac{\partial O}{\partial t}\right\rangle. \tag{9.74}$$

Интерпретация в терминах одночастичной плотности вероятности применима только тогда, когда путем преобразования Фолди — Ваутхайзена удается разделить решения с положительными и отрицательными частотами. Ею нельзя пользоваться в задачах с сильными и быстро меняющимися полями, где необходимо учитывать появление $\pi^+\pi^-$-пар. В предположении, что определения (9.72) и (9.73) справедливы и в общем случае, мы можем вернуться к исходному представлению и исследовать структуру выражений для заряда и энергии. Для этого выполним следующее преобразование:

$$\Phi = e^{-iS}\Phi'. \tag{9.75}$$

Здесь необходимо соблюдать осторожность, так как преобразование, связывающее оба представления, не является унитарным. Из (9.50) и (9.51) следует, что для свободной частицы

$$S = -S^{+}. \tag{9.76}$$

Учитывая, что $\eta S = -S\eta$, находим для энергии

$$\omega_p = \int \Phi_p'^{*}(x)\,\eta H_0'\Phi_p'(x)\,d^3x = \int \Phi_p^{*}(x)\,e^{-iS^{+}}\eta H_0' e^{iS}\Phi_p(x)\,d^3x =$$

$$= \int \Phi_p^{*}(x)\,\eta e^{-iS}H_0' e^{iS}\Phi_p(x)\,d^3x = \int \Phi_p^{*}(x)\,\eta H_0\Phi_p(x)\,d^3x. \tag{9.77}$$

Таким образом, выражение для энергии не меняет своего вида. Аналогично, используя (9.46) и (9.41), получаем для заряда

$$\int Q(x)\,d^3x = \int \Phi_p'^{*}(x)\,\eta\Phi_p'(x)\,d^3x = \int \Phi_p^{*}(x)\,\eta\Phi_p(x)\,d^3x =$$
$$= \int [\theta^{*}(x)\,\theta(x) - \chi^{*}(x)\,\chi(x)]\,d^3x = \frac{i}{2m}\int \varphi^{*}(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(x)\,d^3x, \quad (9.78)$$

что после умножения на $2m$ совпадает с полученным ранее выражением (9.4) для сохраняющегося заряда.

Близкие результаты получаются с учетом взаимодействия. В этом случае преобразование Фолди — Ваутхайзена имеет, как и в гл. 4, вид

$$\Phi' = \cdots e^{iS''}e^{iS'}e^{iS}\Phi,$$

где каждая из матриц $S^{(\prime)}$ удовлетворяет условиям

$$S^{(\prime)+} = -S^{(\prime)}, \quad S^{(\prime)}\eta = -\eta S^{(\prime)}.$$

Поэтому плотность заряда, определенная, как в (9.78), с матрицей η, вновь принимает простой вид в исходном представлении и совпадает с выражением (9.17) для плотности заряда. Аналогично для уровней энергии π^+- и π^--мезонов в статическом внешнем поле имеем

$$E = \int \Phi'^{*}(x)\,\eta H'(x)\,\Phi'(x)\,d^3x = \int \Phi^{*}(x)\,\eta H(x)\,\Phi(x)\,d^3x \quad (9.79)$$

Полученные простые соотношения между средними значениями в двух представлениях наводят на мысль о введении матрицы $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в общее определение среднего значения:

$$\langle O'\rangle \equiv \int \Phi'^{*}(x)\eta O'(x)\Phi'(x)\,d^3x = \int \Phi^{*}(x)\eta O(x)\Phi(x)\,d^3x = \langle O\rangle; \quad (9.80)$$

здесь $O'(x) \equiv e^{iS}O(x)\,e^{-iS}$.

Без матрицы η мы не получили бы такой простой связи между выражениями в двух представлениях. Введение матрицы η в определение (9.80) соответствует умножению на (-1) средних значений, наблюдаемых для системы в состоянии с отрицательной частотой. Это связано с требованием, чтобы решения с отрицательной частотой распространялись назад во времени и процессы испускания и поглощения менялись местами. При этом физические наблюдаемые оказываются связанными со взятыми со знаком минус параметрами решений с отрицательной энергией.

Для позитронов распространение назад во времени отрицательных частот обеспечивается теорией дырок; для бозонов нет теории дырок и мы должны либо довольствоваться тем, что дает метод функции распространения, либо обратиться к формализму квантовой теории поля.

В заключение подчеркнем, что мы дали вероятностную интерпретацию решениям тех физических задач, относящихся к бозонам, для которых последовательность преобразований Фолди —Ваутхайзена сходится. В частности, для свободных частиц мы построили точное преобразование, разделяющее решения, соответствующие положительным и отрицательным частотам, или частицам и античастицам. Поэтому мы поступали правильно, когда в (9.21), (9.22) и (9.24) рассматривали S-матрицу как амплитуду вероятности.

Заряд, которым бозон отличается от антибозона, не обязательно должен быть электрическим, а может иметь совсем другую природу. Существуют, например, мезоны K^0 и $\bar{K}^0$, которые электрически нейтральны, но являются античастицами по отношению друг к другу, различаясь знаком заряда, называемого «странностью» [50]. Кроме того, бозон может вообще не нести никакого заряда и в этом случае он совпадает со своей античастицей, как π^0-мезон. В этом случае волновая функция является действительной и $Q(x) \equiv 0$.

ЗАДАЧИ

1. Вычислите в первом борновском приближении в лабораторной системе дифференциальное сечение кулоновского рассеяния π^+-мезона на K^--мезоне.
2. Вычислите в системе центра инерции дифференциальное сечение рассеяния π^+-мезона на π^+-мезоне и сравните с формулой (7.84) для рассеяния электрона на электроне.
3. Вычислите дифференциальные сечения тормозного излучения π^+-мезона в кулоновском поле и рождения пары $\pi^+\pi^-$ и сравните с формулами Бете — Гайтлера.
4. Найдите полное сечение рождения пары $\pi^+\pi^-$ в ультрарелятивистском пределе $E \gg mc^2$ и сравните с аналогичным результатом для электрон-позитронной пары.
5. Вычислите вклад пар $\pi^+\pi^-$ в поляризацию вакуума и дайте интерпретацию знаку полученного ответа.
6. Найдите электромагнитную собственную энергию π^+-мезона и сравните с аналогичной величиной для электрона.
7. Проверьте, что для заряженных π-мезонов, как и для электронов, перенормировочные константы для волновой функции и вершины во втором порядке равны друг другу, т е. $Z_1 = Z_2$, $\Lambda_\mu(p, p) = -\partial\Sigma(p)/\partial p^\mu$.
8. Найдите уровни энергии π^--мезона в кулоновском поле.
9. Установите классическое соответствие для уравнения Шредингера для π-мезона с помощью выводимых из (9.74) соотношений Эренфеста.
10. Постройте фейнмановский пропагатор для векторных мезонов, удовлетворяющих свободному волновому уравнению
$$\left\{(\Box + m^2) g_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right\}\phi^\nu = 0.$$
11. Приведите аргументы в пользу правила 4 из приложения Б, «Электродинамика бозонов со спином 0». Покажите, что с точностью до порядка e^4 это правило приводит к унитарной амплитуде упругого $\pi^+ - \pi^-$-рассеяния.

ГЛАВА 10

НЕЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 48. Введение

В этой главе мы применим метод функции распространения, развитый для электромагнитного взаимодействия частиц со спином 0 и $^1/_2$, к другим типам взаимодействия элементарных частиц. Эти взаимодействия делятся на три различных класса. Во-первых, имеется гравитационное взаимодействие, которое в обычных лабораторных условиях характеризуется чрезвычайно малой безразмерной константой, равной $(M_1M_2G/\hbar c) \approx 10^{-40}$, и которым мы будем пренебрегать. Ко второму классу относятся слабые взаимодействия, приводящие к превращениям одних частиц в другие, например β-распад и распады π^--, K^-- и μ-мезонов (см. § 50). Слабые взаимодействия в области малых и средних энергий ($\lesssim 1$ *Гэв*) могут быть охарактеризованы безразмерной константой, имеющей величину от 10^{-5} до 10^{-6}. Наконец, существуют сильные взаимодействия с константой $\gtrsim 1$. Сильное взаимодействие ответственно за силы, которые удерживают нуклоны в ядре и за рождение частиц π, K, Λ, Σ и Ξ в реакциях типа (9.2).

Теория слабых и сильных взаимодействий не развита до того уровня, чтобы вызванные ими эффекты могли быть рассчитаны из общего принципа, такого, как, например, принцип эквивалентности и требование ковариантности в теории тяготения или принцип «минимального электромагнитного взаимодействия» (на основе которого электромагнитное взаимодействие вводится путем замены [92] $\mathbf{p}_\mu \to \mathbf{p}_\mu - eA_\mu$). Не имея подобной фундаментальной исходной идеи, мы для выбора возможного вида взаимодействия вынуждены обратиться непосредственно к экспериментальным данным, а также к принципам симметрии и в первую очередь к лоренцевой инвариантности.

«Что представляют собой вершины?» — это центральный вопрос, возникающий при рассмотрении слабых и сильных взаимодействий, и к нему мы сейчас переходим. Мы будем действовать в рамках метода функции распространения и ограничимся вычислениями в низшем порядке по параметрам взаимодействия. Это очень серьезное ограничение, если мы претендуем на детальное описание экспериментальных данных. Для сильных взаимодействий параметр разложения превышает единицу; в теории слабых взаимодействий в ее современном несовершенном виде диаграммы высших порядков зависят от параметра обрезания в интегралах, отвечающих замкнутым петлям, причем эта зависимость такова, что расходимости не удается перенести в перенормировочные константы, как это было сделано в гл. 8 для электродинамики.

§ 49. Сильные взаимодействия

В 1935 г. Юкава [93] установил аналогию между сильными, короткодействующими ядерными силами и электромагнитными силами между частицами. Если кулоновское взаимодействие обусловлено обменом виртуальным квантом, или фотоном, то, может быть, ядерные силы тоже вызваны обменом виртуальной частицей, которая должна иметь целый спин. Для частицы со спином 0 и массой μ мы можем воспользоваться пропагатором Клейна — Гордона (9.36). Тогда амплитуда рассеяния первого порядка, отвечающая диаграмме на рис. 10.1, примет вид

$$\mathfrak{M} \sim \frac{g_0^2}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \tag{10.1}$$

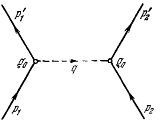


Рис. 10.1. Нуклон-нуклонное взаимодействие за счет обмена одним π^0-мезоном.

В формуле (10.1) мы опустили все факторы, связанные с вершинами, в которых частица, изображенная пунктирной линией, поглощается или испускается нуклонами, изображенными сплошными линиями с начальными и конечными импульсами p_1, p_2 и p_1', p_2' соответственно. Инвариантный переданный импульс $q^2 \equiv (p_1 - p_1')^2 = (p_2' - p_2)^2$ пространственноподобен ($q^2 < 0$). В нерелятивистском пределе, когда кинетические энергии отдачи нуклонов малы по сравнению с их энергиями покоя, в (10.1) можно положить $q^2 \approx -|\mathbf{q}|^2$ и записать

$$\mathfrak{M} \sim \frac{g_0^2}{|\mathbf{q}|^2 + \mu^2}. \tag{10.2}$$

Переходя путем фурье-преобразования к координатному пространству, находим, что $\mathfrak{M}$ отвечает борновской амплитуде для рассеяния на потенциале Юкавы

$$V(r) \sim g_0^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}.$$

Радиус действия ядерных сил составляет $\sim 10^{-13}$ *см*, т. е. примерно одну треть классического радиуса электрона, поэтому частица, которой обмениваются нуклоны, должна иметь массу

$$\mu \sim \frac{3m_e}{\alpha} \sim 200 \text{ Мэв}.$$

Главным кандидатом на эту роль является π-мезон (пион) с массой ~ 140 *Мэв*, открытый в 1947 г.; сейчас известны три типа [94, 89, 15] π-мезонов, π^+, π^- и π^0, с примерно одинаковой массой. Считается, что эти π-мезоны с зарядами $+e$, $-e$ и 0 соответственно вносят основной вклад в ядерные силы на больших расстояниях, хотя более тяжелые частицы играют важную роль при столкновениях с малым прицельным параметром и большим q^2.

Экспериментально было установлено, что π-мезоны имеют спин 0 и отрицательную «внутреннюю четность». Спин заряженного π-мезона можно установить, применяя принцип детального равновесия к реакции

$$\pi^+ + d \leftrightarrow p + p.$$

Вероятности протекания этого процесса в том и другом направлениях определяются статистическими весами; отсюда находится спин π-мезона. «Внутренняя четность» определяется из наблюдения захвата π^--мезона, находящегося на K-оболочке в атоме дейтерия, с образованием двух нейтронов:

$$\pi^- + d \rightarrow n + n.$$

Из принципа запрета следует, что единственным возможным состоянием двух нейтронов с $J = 1$ является ${}^3P_1$-состояние, четность которого равна -1. Если к рассматриваемому процессу сильного взаимодействия применим закон сохранения четности, то π^--мезон тоже должен иметь отрицательную четность. При этом мы, как обычно, предполагаем, что протон и нейтрон имеют одинаковую внутреннюю четность. Это значит, что при пространственном отражении (2.33) их волновые функции преобразуются с одинаковой фазой $\varphi = 0$, т. е. $\psi'(\mathbf{x}', t) = +\gamma_0\psi(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$. Поскольку π^- захватывается со сферически-симметричной S-орбиты, то четность его волновой функции, равную -1, относят к «внутренней четности» π^-. Спин, равный 0, и отрицательная внутренняя четность являются свойствами, общими для π^+- и π^--мезонов, которые, как указывалось в гл. 9, являются античастицами друг для друга. Спин π^0 тоже равен 0, а его четность равна —1. Это следует из наблюдения распада на два фотона

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma$$

в совокупности с определением корреляции плоскостей поляризации [95] «пар Далица»

$$\pi^0 \to (e^+ + e^-) + (e^+ + e^-).$$

Получив информацию о квантовых числах π-мезонов, мы продолжим теперь рассмотрение ядерных сил, придерживаясь аналогии с электродинамикой. Начнем с исследования изображенного на рис. 10.1 процесса рассеяния протона на протоне за счет обмена одним π^0-мезоном. Будем считать, что протон 1 рассеивается в «π-мезонном поле», создаваемом протоном 2; такой подход уже использовался нами (см. (7.31)), когда мы интерпретировали рассеяние электрона на протоне как рассеяние в электромагнитном поле $A_\mu(x)$, создаваемом протоном.

Попытаемся описать этот процесс с помощью уравнения Дирака, подобного уравнению (6.52), т. е.

$$(i\hat{\nabla} - M_p)\psi_p(x) = g_0\Gamma\psi_p(x)\varphi_0(x), \tag{10.3}$$

где константа g_0 аналогична заряду e, а матрицу Дирака Γ нам предстоит определить. Для мезонного поля φ_0 можно предложить уравнение типа (7.27) и (7.33), в котором знак $\eta_0 = \pm 1$ заранее не определен:

$$(\Box + \mu_0^2)\varphi_0(x) = -g_0\bar{\psi}_p(x)\Gamma\psi_p(x)\eta_0. \tag{10.4}$$

Экспериментально установлено [96, 97], что ядерные силы с хорошей точностью сохраняют четность, следовательно, на уравнения (10.3) и (10.4) налагается требование сохранения четности, как и лоренцевой инвариантности. Тогда необходимо выбрать $\Gamma = i\gamma_5$ для того, чтобы правая часть (10.4) была псевдоскаляром, как и левая часть.

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (10.3) инвариантно относительно преобразования зарядового сопряжения, поэтому можно воспользоваться развитой в гл. 5 теорией дырок и установить соответствие между решениями с отрицательной энергией и волновыми функциями антипротонов. Волновая функция антипротона определяется соотношением вида (5.5):

$$\psi_{\bar{p}} = C\bar{\psi}_p^T$$

и удовлетворяет тому же уравнению Дирака (10.3) при условии, что мезоны π^0 и зарядово-сопряженный к нему совпадают, т. е.

$$(\varphi_0)_c = +\varphi_0.$$

Выбранная форма взаимодействия является, по всей вероятности, неправильной или по крайней мере неполной. Уравнения (10.3) и (10.4) выписаны только из соображений простоты и по аналогии с электродинамикой. Никак не обосновано, например, исключение взаимодействия, содержащего производные полей, хотя в предыдущей главе при рассмотрении взаимодействия заряженных π-мезонов с электромагнитным полем это взаимодействие учитывалось. Таким образом, уравнения (10.3) и (10.4) следует рассматривать как грубую, простую модель, ибо фантазия природы безусловно богаче той, что заложена в уравнениях (10.3) и (10.4). Достоинство этой модели состоит в том, что она позволяет установить общие свойства ядерного взаимодействия, которые сохраняются и при более общем рассмотрении.

Используя предложенную вершину π^0-p-взаимодействия, мы можем теперь вычислить амплитуду, соответствующую диаграмме на рис. 10.1. Из (10.4) найдем в первом порядке поле π^0-мезонов, созданное током перехода частицы 2. Ток имеет вид

$$-g_0\eta_0\bar{\psi}_{p_2'}(x)\,i\gamma_5\psi_{p_2}(x),$$

а искомое поле равно

$$\varphi_0(x)=-ig_0\int d^4x'\,i\Delta_F(x-x')\left[\bar{\psi}_{p_2'}(x')\,i\gamma_5\psi_{p_2}(x')\right]\eta_0. \quad (10.5)$$

Согласно (10.3) оно вызывает следующее изменение волновой функции протона 1:

$$\Delta\psi_{p_1}(x)=\int d^4x''\,S_F(x-x'')\left[g_0 i\gamma_5\psi_{p_1}(x'')\,\varphi_0(x'')\right]. \quad (10.6)$$

По формулам (6.53) и (6.56) находим амплитуду рассеяния

$$S_{fi}=(-ig_0)^2\int d^4x'\,d^4x''\left[\bar{\psi}_{p_1'}(x'')\,i\gamma_5\psi_{p_1}(x'')\right]\times$$
$$\times\, i\Delta_F(x''-x')\,\eta_0\left[\bar{\psi}_{p_2'}(x')\,i\gamma_5\psi_{p_2}(x')\right]. \quad (10.7)$$

Сравнивая (10.7) с аналогичными формулами (7.32) и (7.33), мы заключаем, что изменения в правилах графической техники состоят в замене вершины $e\gamma_\mu$ на $ig_0\gamma_5$ и пропагатора фотона $ig_{\mu\nu}D_F(x-x')$ на пропагатор π^0-мезона $+i\Delta_F(x-x')\eta_0$.

К (10.7) мы должны добавить обменный член, возникающий благодаря тождественности двух протонов (ему отвечает диаграмма на рис. 10.2). Соответствующая амплитуда равна

$$S_{fi}^{\text{ex}}=-(-ig_0)^2\int d^4x'\,d^4x''\left[\bar{\psi}_{p_2'}(x'')\,i\gamma_5\psi_{p_1}(x'')\right]\times$$
$$\times\, i\Delta_F(x''-x')\,\eta_0\left[\bar{\psi}_{p_1'}(x')\,i\gamma_5\psi_{p_2}(x')\right]. \quad (10.8)$$

Она отличается от (10.7) перестановкой волновых функций конечных протонов $\bar{\psi}_{p_2'}(x) \leftrightarrow \bar{\psi}_{p_1'}(x)$ и знаком минус, который, как и в (7.82), обеспечивает антисимметрию начальных и конечных протонных волновых функций относительно перестановки протонов.

Рассеяние нейтрона на нейтроне описывается аналогичным образом. Мы должны записать волновое уравнение для нейтрона, которое включает взаимодействие с π^0-мезоном. Кроме того, в (10.4) добавляется нейтронный источник. Мы можем опираться на экспериментально установленный факт равенства сил $p - p$ и $n - n$ с точностью до поправок, обусловленных электромагнитным взаимодействием, например кулоновским взаимодействием протонов [97, 98]. Поэтому естественно предположить, что нейтроны взаимодействуют с π^0-мезонами так же, как протоны, если не считать возможного различия в знаке, $\varepsilon_0 = \pm 1$. Таким образом, волновая функция нейтрона удовлетворяет следующему уравнению:

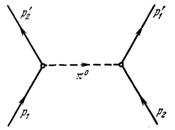


Рис. 10.2. Паулиевская диаграмма для двух протонов.

$$(i\hat{\nabla} - M_n)\,\psi_n(x) = -\,g_0\varepsilon_0 i\gamma_5\psi_n(x)\,\varphi_0(x), \tag{10.9}$$

а уравнение (10.4) заменяется на

$$(\square + \mu_0^2)\,\varphi_0(x) = -\,g_0\left[\bar{\psi}_p(x)\,i\gamma_5\psi_p(x) - \varepsilon_0\bar{\psi}_n(x)\,i\gamma_5\psi_n(x)\right]\eta_0. \tag{10.10}$$

Небольшую разность масс нейтрона и протона, $M_n - M_p \approx \approx 0{,}002\ M_p$, относят за счет электромагнитных эффектов, связанных с зарядом протона, и ею обычно пренебрегают, так же как и всеми электромагнитными взаимодействиями. Амплитуда рассеяния $n - n$, получаемая из (10.9) и (10.10), совпадает с амплитудой рассеяния $p - p$, так как $\varepsilon_0^2 = \pm 1$.

Когда мы переходим к рассмотрению рассеяния $p - n$, требуется учесть взаимодействие с заряженными π^+- и π^--мезонами. В низшем порядке в амплитуде учитывается только одномезонный обмен, которому соответствуют, кроме диаграмм без обмена зарядом (рис. 10.3, *а*), добавочные диаграммы с обменом зарядом (рис. 10.3, *б*).

При написании волнового уравнения для π^+-мезонов мы вновь будем руководствоваться экспериментально установленным равенством (с точностью до электромагнитных поправок) взаимодействий $n - p$ и $p - p$ в состояниях, разрешенных для системы $p - p$.

Уравнение для π^+-мезонов запишем по аналогии с уравнением (10.10) для π^0-мезонов:

$$(\Box + \mu_+^2)\,\varphi_+(x) = -g_+\eta_+\bar{\psi}_n(x)\,i\gamma_5\psi_p(x). \qquad (10.11)$$

Связь входящих сюда величин $\eta_+ = \pm 1$ и g_+ с соответствующими величинами η_0 и g_0 будет установлена ниже. Правая часть

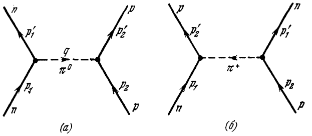


Рис. 10.3. Диаграммы без обмена зарядом и с обменом зарядом для $n - p$-рассеяния.

(10.11) приводит к появлению вершин перехода протона в нейтрон с испусканием π^+-мезона (рис. 10.4).

Возникший π^+-мезон может распространяться вперед и назад во времени. Если он распространяется назад, то, согласно

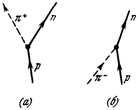


Рис. 10.4. Вершины перехода $p \to n$.

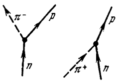


Рис. 10.5. Вершины перехода $n \to p$.

изложенному в предыдущей главе, его отождествляют с π^--мезоном, который движется вперед во времени и поглощается в вершине, как показано на рис. 10.4, *б*.

Произведя комплексное сопряжение над (10.11), получим уравнение для зарядово-сопряженной частицы, т. е. π^--мезона,

$$(\Box + \mu_+^2)\,\varphi_+^*(x) = (\Box + \mu_+^2)\,\varphi_-(x) = -g_+^*\eta_+\bar{\psi}_p(x)\,i\gamma_5\psi_n(x). \qquad (10.12)$$

Правая часть (10.12) соответствует вершинам, изображенным на рис. 10.5.

Теперь мы должны добавить в волновые уравнения для нейтрона и протона члены, соответствующие переходам, изображенным на рис. 10.4 и 10.5. Сравнивая (10.11) и (10.12) с (10.3), (10.9) и (10.10), мы приходим к следующим волновым уравнениям для протонов и нейтронов:

$$\begin{aligned}(i\hat{\nabla} - M_p)\,\psi_p(x) &= g_0 i\gamma_5\psi_p(x)\,\varphi_0(x) + g_+^* i\gamma_5\psi_n(x)\,\varphi_+(x),\\ (i\hat{\nabla} - M_n)\,\psi_n(x) &= -\,g_0\varepsilon_0 i\gamma_5\psi_n(x)\varphi_0(x) + g_+\varepsilon_+ i\gamma_5\psi_p(x)\,\varphi_-(x);\end{aligned} \tag{10.13}$$

здесь знаковый множитель $\varepsilon_+ = \pm 1$ подлежит определению.

Чтобы установить ограничения на входящие в волновые уравнения константы, рассмотрим рассеяние $n - p$ и выпишем амплитуды, отвечающие двум изображенным на рис. 10.3 диаграммам низшего порядка. Считая, что падающий нейтрон (p_1) рассеивается в мезонном поле, создаваемом протоном (p_2), получим по известным нам правилам

$$\begin{aligned}S_{fi} = (-ig_0)^2(-\varepsilon_0)\,\eta_0 \int d^4x'\, d^4x'' \left[\bar{\psi}_{p_1'}(x')\, i\gamma_5\psi_{p_1}(x')\right] \times\\ \times\, i\Delta_F(x'-x'')\left[\bar{\psi}_{p_2'}(x'')\, i\gamma_5\psi_{p_2}(x'')\right] +\\ + (-ig_+)(-ig_+^*)\,\eta_+ \int d^4x'\, d^4x'' \left[\bar{\psi}_{p_2'}(x')\, i\gamma_5\psi_{p_1}(x')\right] \times\\ \times\, i\Delta_F(x'-x'')\left[\bar{\psi}_{p_1'}(x'')\, i\gamma_5\psi_{p_2}(x'')\right].\end{aligned} \tag{10.14}$$

Если бы вместо этого мы считали, что падающий протон рассеивается в поле, создаваемом нейтроном, то получили бы амплитуду, отличающуюся от (10.14) заменой

$$\eta_+ \to \eta_+\varepsilon_+.$$

Поэтому положим

$$\varepsilon_+ = 1, \tag{10.15}$$

так как ответ не должен зависеть от нашей точки зрения.

Относительную величину констант g_+ и g_0 можно определить, исходя из наблюдаемого равенства взаимодействий $n - p$ и $p - p$ в состояниях, разрешенных для системы $p - p$ принципом запрета. Сравним рассеяние $p - p$ и $p - n$ в антисимметричных относительно перестановки двух частиц состояниях. Для этого представим себе на время, что нейтрон тождествен протону, но по-прежнему взаимодействует как с нейтральными, так и с заряженными мезонами. Тогда в амплитуду рассеяния нейтрона необходимо добавить обменные диаграммы со знаком минус, чтобы обеспечить требуемую антисимметрию состояния.

Совокупность диаграмм, приводившихся ранее на рис. 10.3 и добавленных к ним обменных диаграмм, изображена на рис. 10.6; там же указаны необходимые обозначения. Диаграмма (*в*) является обменной по отношению к (*а*), а диаграмма (*г*) — по отношению к (*б*). Сумма этих четырех диаграмм дает

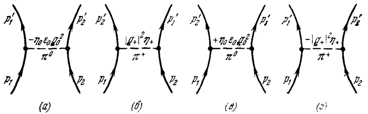


Рис. 10.6. Сумма диаграмм однопионного обмена для $p - n$-рассеяния с учетом паулиевских обменных и зарядово-обменных вкладов.

следующую S-матрицу, построенную в предположении, что нейтрон и протон тождественны и подчиняются принципу запрета:

$$S_{fi} = -(-i)^2 [\eta_0 \varepsilon_0 g_0^2 + \eta_+ |g_+|^2] \times$$
$$\times \int d^4x'\, d^4x'' \{ [\bar{\psi}_{p_1'}(x')\, i\gamma_5 \psi_{p_1}(x')]\, i\Delta_F(x' - x'') [\bar{\psi}_{p_2'}(x'')\, i\gamma_5 \psi_{p_2}(x'')] -$$
$$- [\bar{\psi}_{p_2'}(x')\, i\gamma_5 \psi_{p_1}(x')]\, i\Delta_F(x' - x'') [\bar{\psi}_{p_1'}(x'')\, i\gamma_5 \psi_{p_2}(x'')] \}. \qquad (10.16)$$

Сравнение (10.16) с суммой (10.7) и (10.8) показывает, что из требования равенства взаимодействий $n - p$ и $p - p$ в антисимметричных состояниях, разрешенных для системы $p - p$, вытекает следующее условие на константы связи:

$$g_0^2 \eta_0 = -|g_+|^2 \eta_+ - g_0^2 \eta_0 \varepsilon_0. \qquad (10.17)$$

Это уравнение имеет два решения:

$$|g_+|^2 = 0, \quad \varepsilon_0 = -1 \qquad (10.18)$$

и

$$|g_+|^2 = 2g_0^2, \quad \varepsilon_0 = +1, \quad \eta_0 = -\eta_+. \qquad (10.19)$$

Первое из них, (10.18), отвечает обмену только нейтральными мезонами. Очевидно, что в этом случае взаимодействия $n - p$ и $p - p$ в одинаковых состояниях равны. Поскольку π^+- и π^--мезоны существуют и вершины типа изображенных на рис. 10.4 и 10.5, т. е. такие, в которых рождаются одиночные π^+- и π^--мезоны, входят в наблюдаемые реакции, например

$$\gamma + p \to n + \pi^+,$$

мы должны выбрать второе решение (10.19).

Согласно (10.19) константа связи заряженных мезонов в вершине $(p - n)$ в $\sqrt{2}$ раз больше, чем константа связи π^0-мезона в вершине $(p - p)$. В амплитуду рассеяния входит только квадрат модуля $|g_+|^2$, поэтому можно для удобства выбрать константу g_+ действительно; тогда

$$g_+ = \sqrt{2}\, g_0. \tag{10.20}$$

Условие (10.19) $\eta_+ = -\eta_0$ удобно заменить дополнительным правилом написания фейнмановских амплитуд. Положим

$$\eta_+ = +\eta_0 \tag{10.21}$$

и введем следующее дополнительное правило построения амплитуды для любой диаграммы: амплитуда умножается на (-1) если диаграмма содержит обмен нечетным числом заряженных мезонов между нуклонами. Можно показать, что это правило эквивалентно антисимметризации не только относительно перестановки линий $n - n$ и $p - p$ на диаграмме, но также и относительно перестановки линий $n - p$. Последнее утверждение следует из того, что любая диаграмма с обменом заряженным мезоном переходит в диаграмму с обменом нейтральным мезоном при перестановке линий нейтрона и протона (относительный знак минус возникает благодаря противоположным знакам величин η_0 и η_+, которые входят в пионный пропагатор). В низшем порядке это очевидно; достаточно сравнить диаграммы на рис. 10.6, *а* и *б*.

Для получения общего правила антисимметризации необходимо рассмотреть два случая. Первый из них — это обмен пионом между двумя различными нуклонными линиями; иллюстрацией служит рис. 10.7, *а*. Этот случай аналогичен тому, который мы уже рассмотрели в низшем порядке.

Другой случай — когда пион испускается и вновь поглощается одним и тем же нуклоном — немного сложнее. Рассмотрим, например, диаграмму на рис. 10.7, *б*; один из способов упорядочения этой диаграммы во времени показан на рис. 10.7, *в*. Чтобы связать эту диаграмму с той, знак которой нам известен (т. е. без линии, отвечающей π^+-мезону), мы переставим со знаком минус нейтрон и протон *I* и *II* и получим диаграмму, показанную на рис. 10.7, *г*. Диаграмма 10.7, *г* имеет тот же знак, что и 10.7, *д*, которая получается из 10.7, *е* перестановкой линий *I* и *II*. Собирая знаки минус (их два), мы видим, что если π^+ испускается и поглощается одной и той же нуклонной линией,

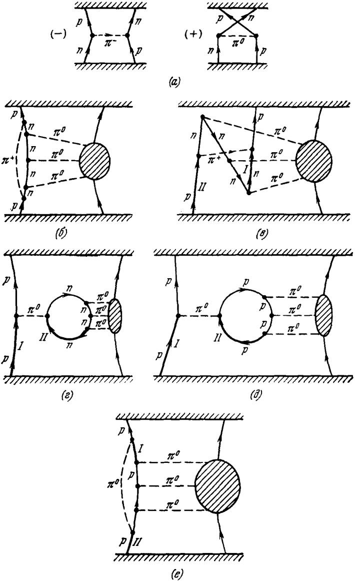


Рис. 10.7. Правила антисимметризации для обменов в системе $n - p$.

можно положить $\eta_+ = \eta_0$ и приписать диаграмме такой же знак, как у диаграммы, получаемой заменой π^+ на π^0.

Необходимо подчеркнуть, что мы путем чисто формального построения расширили правило антисимметризации, которое в случае $p-p$-рассеяния следовало из принципа запрета. По отношению к системе $n-p$, когда частицы различимы и могут рассеиваться в симметричных $^3S_1$, $^1P_1$, $^3D_{2,1,0}$ и т. д. состояниях, это правило есть не более чем удобный способ следить за знаками в приближении «зарядовой независимости», т. е. равенства взаимодействий $p-p$, $n-n$ и $n-p$ в одинаковых состояниях.

Причина введения этого формального и сложного на вид обобщения принципа запрета станет ясной в следующем параграфе, где будет дано простое единое описание протона и нейтрона как двух состояний одной частицы — нуклона. Согласно такой картине мы считаем, что при перестановке конечных p и n, как на рис. 10.3, *а* и 10.3, *б*, в амплитуде рассеяния $p-n$ появляется знак минус по аналогии со знаком минус, возникающим благодаря принципу запрета между амплитудами рассеяния $p-p$, изображенными на рис. 10.1 и 10.2[1]).

Теперь мы определили все параметры, за исключением η_0; $\varepsilon_0 = \varepsilon_+ = +1$ и $\eta_+ = \eta_0$ с дополнительным условием антисимметризации диаграмм, получаемых перестановкой протонной и нейтронной линий. Для получения η_0 заметим, что за счет взаимодействия в (10.13) протон не всегда является просто протоном, но иногда представляет собой нейтрон и π^+-мезон (см. рис. 10.4 и 10.5); следовательно, носителем электрического заряда является как протон, так и π^+-мезон. Таким образом, электромагнитные токи протона и π^+-мезона не сохраняются в отдельности.

В этом можно убедиться, вычисляя токи (нормированные на единичный заряд), из приведенных выше волновых уравнений:

$$i\frac{\partial}{\partial x_\mu} j^p_\mu(x) = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar\psi_p\gamma_\mu\psi_p) = g^*_+\bar\psi_p i\gamma_5\psi_n\varphi_+ - g_+\bar\psi_n i\gamma_5\psi_p\varphi_-,$$

$$i\frac{\partial}{\partial x_\mu} j^{\pi^+}_\mu(x) = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[i\varphi^*_+\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\right)\varphi_+\right] =$$
$$= -\eta_+ g^*_+\bar\psi_p i\gamma_5\psi_n\varphi_+ + \eta_+ g_+\bar\psi_n i\gamma_5\psi_p\varphi_-. \qquad (10.22)$$

Однако, если мы положим в (10.11)

$$\eta_+ = +1, \qquad (10.23)$$

[1]) Условие (10.21) вместе с правилом антисимметризации применимо ко всем процессам, включая те, которые определяют собственную энергию.

то закону сохранения будет удовлетворять сумма протонного и π^+-мезонного токов

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[j_\mu^p(x) + j_\mu^{\pi^+}(x)\right] = 0. \tag{10.24}$$

Мы примем (10.23), чтобы исключить возможность существования необнаруженных локальных источников и стоков электрического заряда. Тогда из (10.21) следует

$$\eta_0 = \eta_+ = +1. \tag{10.25}$$

§ 50. Формализм изотопического спина

Собирая вместе условия (10.15) и (10.19)—(10.21), а также (10.25), полученные из требования равенства амплитуд рассеяния $n - n$, $n - p$ и $p - p$ в одинаковых состояниях, мы можем переписать волновые уравнения (10.10)—(10.13) в следующей форме, содержащей только одну действительную неизвестную константу связи:

$$\begin{aligned} (i\hat{\nabla} - M_p)\psi_p &= g_0 i\gamma_5(\psi_p\varphi_0 + \sqrt{2}\,\psi_n\varphi_+), \\ (i\hat{\nabla} - M_n)\psi_n &= g_0 i\gamma_5(-\psi_n\varphi_0 + \sqrt{2}\,\psi_p\varphi_-), \end{aligned} \tag{10.26}$$

$$\begin{aligned} (\Box + \mu_0^2)\varphi_0 &= -g_0(\bar{\psi}_p i\gamma_5\psi_p - \bar{\psi}_n i\gamma_5\psi_n), \\ (\Box + \mu_+^2)\varphi_+ &= -g_0\sqrt{2}\,\bar{\psi}_n i\gamma_5\psi_p, \\ (\Box + \mu_+^2)\varphi_- &= (\Box + \mu_+^2)\varphi_+^* = -g_0\sqrt{2}\,\bar{\psi}_p i\gamma_5\psi_n. \end{aligned} \tag{10.27}$$

Сходство уравнений для протона и нейтрона наводит на мысль описать их единой нуклонной волновой функцией

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}. \tag{10.28}$$

Нуклонная волновая функция представляет собой восьмикомпонентный спинор, четыре верхних компоненты которого соответствуют протонному спинору, а четыре нижних — нейтронному. Свободное уравнение Дирака имеет диагональный вид, протонные и нейтронные компоненты не смешиваются. В приближении «зарядовой независимости», когда $M_p \approx M_n \approx M$, имеем следующее простое уравнение:

$$(i\hat{\nabla} - M)\Psi = 0.$$

Для описания входящего в (10.26) взаимодействия необходимо ввести недиагональные матрицы, которые смешивают протонные и нейтронные волновые функции. Смешивание удобно записать с помощью трех матриц Паули:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (10.29)$$

Подразумевается, что каждый из элементов этих матриц действует на все четыре компоненты ψ_p или ψ_n в (10.28), например

$$\tau_1 \Psi = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix}.$$

Мы обозначили матрицы символом $\boldsymbol{\tau}$, чтобы отличить их от спиновых матриц Паули $\boldsymbol{\sigma}$. Теперь уравнения (10.26) можно объединить и записать в виде

$$(i\hat{\nabla} - M)\Psi = g_0 i\gamma_5 \left(\tau_3 \Psi \varphi_0 + \sqrt{2}\, \tau_+ \Psi \varphi_+ + \sqrt{2}\, \tau_- \Psi \varphi_-\right); \qquad (10.30)$$

здесь

$$\begin{aligned} \tau_+ &\equiv \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_- &\equiv \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (10.31)$$

являются операторами, «повышающими» и «понижающими» заряд.

Уравнение (10.30) можно привести к более компактному виду, если ввести «вектор» $\boldsymbol{\phi}$ с тремя компонентами

$$\boldsymbol{\phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \qquad (10.32)$$

где

$$\varphi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_+ + \varphi_-), \quad \varphi_2 \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}(\varphi_+ - \varphi_-), \quad \varphi_3 \equiv \varphi_0.$$

Тогда вместо (10.30) имеем

$$(i\hat{\nabla} - M)\Psi = g_0 i\gamma_5 (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi})\Psi. \qquad (10.33)$$

Аналогичным образом, пренебрегая малой разностью масс $\pi^{\pm}$- и π^0-мезонов, т. е. полагая $\mu_0 \approx \mu_+ \approx \mu$, уравнения (10.27) можно объединить в одно приближенное уравнение для π-мезонов:

$$(\square + \mu^2)\boldsymbol{\phi} = -g_0 \bar{\Psi} i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \Psi. \qquad (10.34)$$

Прогресс, достигнутый введением компактных «изоспиновых» обозначений для пионов и нуклонов, является чисто формальным. Никакого нового физического содержания при этом не было заложено. Мы можем считать, что в воображаемом «изотопическом пространстве» Ψ образуется как спинор, а $\boldsymbol{\phi}$ как вектор. Тогда оба волновых уравнения (10.33) и (10.34) оказываются ковариантными относительно вращений в изотопическом пространстве. Ковариантность обеспечена тем, что во взаимодействии мы ограничились членами, которые дают одинаковые силы между протонами и нейтронами и между заряженными и нейтральными пионами. Обратное утверждение также справедливо: любая совокупность инвариантных относительно вращений в изотопическом пространстве волновых уравнений приводит к равенству взаимодействий в системах $n-n$, $n-p$ и $p-p$ в одинаковых состояниях [96, 97].

Именно с этой целью — построить простую схему, в которой протон и нейтрон являются двумя компонентами нуклонной волновой функции Ψ, — мы выводили правила для фейнмановских амплитуд в предыдущем параграфе.

С математической точки зрения формализм изотопического спина совпадает с формализмом трехмерного углового момента. Точно так же, как закон сохранения углового момента следует из ковариантности волнового уравнения относительно вращений в обычном трехмерном пространстве, закон сохранения изотопического спина вытекает из ковариантности (10.33) и (10.34) относительно вращений в изотопическом пространстве. Однако закон сохранения изоспина является приближенным, так как уравнения симметричны только в пренебрежении электромагнитным взаимодействием и разностями масс p и n и $\pi^{\pm}$ и π^0. В этом приближении состояния систем из мезонов и нуклонов можно диагонализовать по квадрату полного изотопического спина I^2 и третьей проекции изоспина I_3, которая связана с полным зарядом системы.

При поворотах в изотопическом пространстве нуклонная волновая функция (10.28) преобразуется как двухкомпонентный спинор, поэтому нуклону приписывается изотопический спин $^1/_2$. Третья проекция изоспина выбирается равной $+^1/_2$ для протона и $-^1/_2$ для нейтрона. Волновая функция мезона (10.32) преобразуется как вектор с третьей проекцией 0 для π^0-мезона. Таким образом, пионам приписывается $I=1$.

Мезон-нуклонное рассеяние можно рассматривать как задачу с двумя каналами $I = {^3/_2}$ и $I = {^1/_2}$ по изоспину. Мезон и нуклон связаны с этими каналами по известным правилам сложения моментов. В рассеянии $p-p$ и $n-n$ в приближении зарядовой независимости участвует только канал с $I=1$. Для системы $p-n$ $I_3=0$ и рассеяние может идти через оба канала с $I=0$ и $I=1$. Вскоре мы рассмотрим несколько примеров применения изоспина в задачах о рассеянии.

Подводя итоги, выпишем правила диаграммной техники в рассмотренной модели (10.33) и (10.34) с зарядово-независимыми взаимодействиями (сравните с § 34):

1. Нарисовать все связные диаграммы.

2. Каждой диаграмме поставить в соответствие амплитуду с фактором

$$-ig_0(i\gamma_5\tau_\alpha)\int d^4x$$

в каждой вершине.

3. Каждой внутренней нуклонной линии, соединяющей точки x и y, ставится в соответствие пропагатор $iS_F(x-y)\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ есть матрица размерности 2×2 в пространстве нуклонных изоспиноров. Каждой внутренней мезонной линии ставится в соответствие пропагатор $i\Delta_F(x-y)\delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — единичная матрица размерности 3×3, связывающая друг с другом операторы τ_α и τ_β, которые входят в вершины, соединяемые мезонной линией.

4. Для каждой внешней линии ввести волновую функцию. Для нуклонной линии полезны проекционные операторы $^1/_2(1+\tau_3)$ и $^1/_2(1-\tau_3)$ для протона и нейтрона соответственно и волновые функции $\chi_p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\chi_n=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Например, волновая функция падающего нейтрона с квантовыми числами (p, s) имеет вид

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{M}{E_p}}\,e^{-ip\cdot x}u(p, s)\chi_n=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{M}{E_p}}\,e^{-ip\cdot x}u(p, s)\left(\frac{1-\tau_3}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \qquad (10.35)$$

Для мезонной линии волновая функция содержит изотопическую часть $\boldsymbol{\phi}^e$, где $\boldsymbol{\phi}^e$ представляет собой единичный вектор в трехмерном пространстве изотопического спина пионов. Согласно (10.32) вектор $\boldsymbol{\phi}^e$, выраженный через мезонные состояния с зарядом $+$, $-$ и 0 имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}^e_+&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0),\\ \boldsymbol{\phi}^e_-&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0),\\ \boldsymbol{\phi}^e_0&=(0, 0, 1).\end{aligned} \qquad (10.36)$$

Таким образом, в вершине, в которой поглощается налетающий π^+-мезон или испускается конечный π^--мезон, соответствующий налетающему π^+-мезону с отрицательной энергией, распространяющемуся назад во времени, появляется, как в (10.30), изотопический фактор $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi}^e_+=\frac{1}{2}(\tau_1+i\tau_2)=\sqrt{2}\,\tau_+$. Для испускания конечного π^+ (или поглощения начального π^-) соответствующий фактор равен $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi}^{e*}_+=\sqrt{2}\,\tau_-$.

5. Согласно условию, принятому в конце § 49, два члена, которым соответствуют диаграммы, топологически отличающиеся только перестановкой двух нуклонных линий, имеют противоположные знаки. Каждой замкнутой нуклонной петле соответствует множитель (-1). Кроме того, в амплитуду входит множитель $(-1)^{\bar{n}}$, где $\bar{n}$ — число античастиц в начальном состоянии (см. (6.56)).

В рассмотренной модели мы слепо следовали электродинамике. Общие свойства, такие как сохранение изотопического спина в пион-нуклонных взаимодействиях, справедливы во всех порядках по взаимодействию, если пренебрегать малыми разностями масс и электромагнитными эффектами. Однако разложение взаимодействия в ряд теории возмущений по степеням константы взаимодействия g_0 полезно далеко не всегда, так как $g_0^2/4\pi \approx 14$ и эта величина вовсе не мала, как ее электродинамический аналог $\alpha \sim 1/137$. Разложение по степеням g_0 приводит к расходящемуся ряду теории возмущений вместо сходящегося.

§ 51. Сохраняющиеся токи

Вводя изотопические обозначения (10.28) и (10.32) в дифференциальный закон сохранения тока (10.23), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\bar{\Psi}\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\gamma_\mu\Psi + \left(\boldsymbol{\phi}\times\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x^\mu}\right)_3\right] = 0, \qquad (10.37)$$

где векторные обозначения относятся к изотопическому пространству. Сохраняющийся электрический заряд, получаемый интегрированием временной компоненты с $\mu = 0$ по всему пространству, равен

$$Q = \int d^3x\left[\Psi^+\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\Psi + (\boldsymbol{\phi}\times\dot{\boldsymbol{\phi}})_3\right]. \qquad (10.38)$$

Закон сохранения, следующий непосредственно из (10.33), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}J_\mu^N = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_p + \bar{\psi}_n\gamma_\mu\psi_n) = 0. \quad (10.39)$$

Его называют законом сохранения нуклонного заряда. Полный нуклонный заряд дается выражением

$$N = \int \Psi^+\Psi\, d^3x = \int\left(\psi_p^+\psi_p + \psi_n^+\psi_n\right)d^3x \qquad (10.40)$$

и в рассматриваемой модели сохраняется, так как сохраняется разность между полным числом нуклонов (протонов плюс нейтронов) и полным числом антинуклонов. Это видно, в частности, из диаграмм на рис. 10.4 и 10.5, поскольку при любом упорядочении во времени непрерывная нуклонная линия проходит через каждую вершину. Вводя (10.40) в (10.38), получаем

$$Q = \frac{N}{2} + I_3, \tag{10.41}$$

где величина

$$I_3 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Psi^+\tau_3\Psi + (\boldsymbol{\phi}\times\dot{\boldsymbol{\phi}})_3\right] \tag{10.42}$$

представляет собой третью компоненту изотопического спина. Исходя из инвариантности (10.33) и (10.34) относительно вращений в изотопическом пространстве, естественно предположить, что должна сохраняться не только проекция I_3, а все три проекции изоспина. Прямой проверкой можно убедиться, что это действительно так. Сохраняющийся изотопический ток имеет вид

$$\mathbf{J}_\mu = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi + \left(\boldsymbol{\phi}\times\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x^\mu}\right). \tag{10.43}$$

Сохраняющийся полный изоспин дается следующим выражением:

$$\mathbf{I} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Psi^+\boldsymbol{\tau}\Psi + (\boldsymbol{\phi}\times\dot{\boldsymbol{\phi}})\right]. \tag{10.44}$$

Сохранение электрического и нуклонного зарядов и изотопического спина является общим свойством теории, основанной на уравнениях (10.33) и (10.34). Законы сохранения Q и N — это строгие законы природы[1]; напротив, изотопический спин I сохраняется только в пренебрежении электроманитным и слабым взаимодействиями. Последние нарушают зарядовую независимость сильных взаимодействий, следствием которой является симметрия уравнений (10.33) и (10.34) и сохранение (10.43) и (10.44). Строго сохраняющейся величиной согласно (10.41) остается только третья проекция изоспина I_3. Таким образом, на примере рассмотрения законов сохранения мы убедились в том, что формализм изоспина позволяет полнее понять смысл уравнений.

§ 52. Приближенные методы; нуклон-нуклонное рассеяние

В качестве примеров, иллюстрирующих как применение формализма изоспина, так и некоторые общие свойства взаимодействия пионов и нуклонов, мы кратко рассмотрим два вопроса: вклад однопионного обмена в нуклон-нуклонное взаимодействие и пион-нуклонное рассеяние. Теперь мы можем записать компактное выражение для рассмотренных ранее диаграмм нуклон-нуклонного рассеяния, изображенных на рис. 10.1—10.3. Сле-

[1] Обобщением N с учетом странных частиц является барионное число B, которое означает разность между числом барионов (N, Λ, Σ, Ξ и т. д.) и антибарионов (см. [50]).

дуя полученным правилам и переходя, как обычно, к импульсному представлению, получим следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$S_{fi}=\frac{(-ig_0)^2 M^2}{(2\pi)^6\sqrt{E_1E_2E_1'E_2'}}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')\times$$
$$\times\left\{\left[\chi_1^+\bar{u}(p_1')\,i\gamma_5\boldsymbol{\tau}u(p_1)\chi_1\right]\frac{i}{(p_1'-p_1)^2-\mu^2}\left[\chi_2^+\bar{u}(p_2')\,i\gamma_5\boldsymbol{\tau}u(p_2)\chi_2\right]-\right.$$
$$\left.-\left[\chi_2^+\bar{u}(p_2')\,i\gamma_5\boldsymbol{\tau}u(p_1)\chi_1\right]\frac{i}{(p_2'-p_1)^2-\mu^2}\left[\chi_1^+\bar{u}(p_1')\,i\gamma_5\boldsymbol{\tau}u(p_2)\chi_2\right]\right\}. \quad (10.45)$$

Сравнение (10.45) с соответствующим выражением (7.82) для амплитуды электрон-электронного рассеяния показывает, что имеется соответствие

$$e\gamma_\mu\to ig_0\gamma_5\boldsymbol{\tau},\quad g_{\mu\nu}D_F(k^2)\to\Delta_F(k^2).$$

Вместо V^2 фигурирует $(2\pi)^6$, так как мы перешли к нормировке в непрерывном спектре для внешних линий. В случае рассеяния $p-p$ изотопические факторы равны

$$(\chi_p^+\boldsymbol{\tau}\chi_p)\cdot(\chi_p^+\boldsymbol{\tau}\chi_p)=(\chi_p^+\tau_3\chi_p)(\chi_p^+\tau_3\chi_p)=1 \quad (10.46)$$

и два члена в (10.45), подобно выражениям (10.7) и (10.8), отвечают прямому и обменному рассеянию двух тождественных фермионов; аналогичная ситуация имеется в рассеянии $n-n$. Для рассеяния $p-n$ изотопический фактор равен

$$(\chi_p^+\boldsymbol{\tau}\chi_p)\cdot(\chi_n^+\boldsymbol{\tau}\chi_n)=-1,\quad \text{в первом члене}$$

$$(\chi_n^+\boldsymbol{\tau}\chi_p)\cdot(\chi_p^+\boldsymbol{\tau}\chi_n)=+2\quad \text{в обменном члене.}$$

Поэтому амплитуда отличается от амплитуды рассеяния $p-p$ и $n-n$. Если, однако, мы рассмотрим рассеяние в состояние системы $p-n$, симметричное по изоспину с $I=1$ и $I_3=0$, которое имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_p(1)\chi_n(2)+\chi_n(2)\chi_p(1)], \quad (10.47)$$

то оба изотопических фактора в первом и во втором членах (10.45) становятся равными,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_p^+\boldsymbol{\tau}\chi_p\cdot\chi_n^+\boldsymbol{\tau}\chi_n+\chi_n^+\boldsymbol{\tau}\chi_p\cdot\chi_p^+\boldsymbol{\tau}\chi_n)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+2)=\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (10.48)$$

Таким образом, полученная амплитуда рассеяния $p-n$ равна умноженной на $1/\sqrt{2}$ амплитуде рассеяния $p-p$ или $n-n$ и антисимметрична относительно перестановки пространственных переменных частиц.

Для рассеяния в антисимметричное изотопическое состояние с $I=0$, $I_3=0$, которое имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_p(1)\,\chi_n(2)-\chi_n(2)\,\chi_p(1)\right], \tag{10.49}$$

изотопические факторы в (10.45) равны

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_p^+\tau\chi_p\cdot\chi_n^+\tau\chi_n-\chi_n^+\tau\chi_p\cdot\chi_p\tau\chi_n\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

для первого члена и $+3/\sqrt{2}$ для второго члена. Следовательно, амплитуда рассеяния симметрична относительно перестановки пространственных переменных (координат и спина) протона и нейтрона и антисимметрична относительно перестановки их изотопических переменных.

Эти примеры показывают, как обобщенный принцип запрета действует в системе NN. Нуклоны взаимодействуют только в состояниях, антисимметричных относительно совместной перестановки их пространственных и изотопических координат. В приближении зарядовой независимости амплитуды рассеяния $p-p$ и $n-n$ равны амплитуде рассеяния $p-n$ в симметричном изотопическом состоянии (10.47) и соответственно в антисимметричном пространственном состоянии. Это равенство вытекает из (10.45), (10.46) и (10.48), если принять во внимание, что полные сечения $p-p$ и $n-n$ получаются, как и (7.81), интегрированием только по половине фазового пространства, иначе мы учли бы протоны и нейтроны дважды; таким образом, множитель 1/2 сокращается с $(1/\sqrt{2})^2$ из (10.48).

В нерелятивистском пределе спинорная часть матричного элемента в (10.45) упрощается следующим образом:

$$\bar{u}(p_1',\,s_1')\,\gamma_5 u(p_1,\,s_1)\approx u^+(s_1')\,\frac{\sigma\cdot(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1')}{2M}\,u(\mathbf{s}_1), \tag{10.50}$$

где $u(\mathbf{s}_1)$ означает двухкомпонентный паулиевский спинор; равенство (10.50) легко проверяется, если в спинорах перейти к нерелятивистскому пределу. В этом пределе пропагатор мезона переходит в фурье-образ потенциала Юкавы:

$$\frac{1}{(p_1'-p_1)^2-\mu^2}\approx\frac{-1}{(\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_1)^2+\mu^2}=-\frac{1}{4\pi}\int d^3r\,e^{i\,(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1')\cdot\mathbf{r}}\,\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

и тогда (10.45) оказывается амплитудой рассеяния порядка g_0^2

на потенциале вида

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{f^2}{\mu^2}(1 - P_{ex})(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_1)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_1)\frac{e^{-\mu|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (10.51)$$

где

$$f^2 = \frac{g_0^2}{4\pi}\left(\frac{\mu}{2M}\right)^2,$$

а оператор P_{ex} производит перестановку волновых функций нейтрона и протона и приводит к появлению второго члена в (10.45). В соответствии с принципом запрета два нуклона должны находиться в антисимметричном относительно перестановки состоянии, иначе оператор $(1 - P_{ex})$, действуя на состояние, дает нуль. Для двух нуклонов в s-состоянии потенциал является притягивающим на конечных расстояниях $r \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > 0$, как видно из усреднения (10.51) по углам

$$V_s(r) \equiv \int \frac{d\Omega_{12}}{4\pi} V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) =$$
$$= \frac{f^2}{\mu^2}(1 - P_{ex})\frac{1}{3}\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\left[\mu^2\frac{e^{-\mu r}}{r} - 4\pi\delta^3(\mathbf{r})\right]$$

и из того наблюдения, что это состояние, будучи симметричным по пространственным координатам, должно быть антисимметричным относительно перестановки спинов либо изоспинов. Поэтому в s-состоянии

$$\left\langle \frac{1}{3}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\right\rangle_s = \left\langle \frac{1}{12}[(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2)^2 - 6][(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)^2 - 6]\right\rangle_s =$$
$$= \frac{4}{3}\left[T(T+1) - \frac{3}{2}\right]\left[S(S+1) - \frac{3}{2}\right] = -1. \quad (10.52)$$

Таким образом,

$$V_s(r) = -2f^2\left[\frac{e^{-\mu r}}{r} - \frac{4\pi}{\mu^2}\delta^3(\mathbf{r})\right]. \quad (10.53)$$

При учете нестатических поправок отталкивание в виде δ-функции «размазывается», т. е. заменяется на отталкивательный кор на малых расстояниях (a short-range repulsive core interaction). Сам по себе потенциал (10.53) не описывает дейтрон и данные по рассеянию при низких энергиях. Это неудивительно, так как нет серьезных оснований надеяться на достоверность приближения статического одномезонного обмена. Действительно, поскольку константа связи велика, $g_0^2/4\pi \sim 14$, нельзя пренебрегать вкладами от диаграмм высших порядков, которые описывают процессы с многими мезонами. Однако можно показать [99], что последние дают вклад в основном на малых расстояниях r и спадают, как $e^{-n\mu r}$, при $\mu r > 1$, где n — число участвующих в обмене мезонов.

Поэтому весьма обнадеживает то, что, как показал анализ высших парциальных волн в разложении нуклон-нуклонной амплитуды, формулы (10.45) и (10.51) хорошо описывают наблюдаемые сдвиги фаз, если положить $g_0^2/4\pi \approx 14$ в соответствии со значением этой величины, получаемым из анализа данных по мезон-нуклонному p-волновому рассеянию.

§ 53. Мезон-нуклонное рассеяние

Диаграммы Фейнмана на рис. 10.8 описывают рассеяние мезона на нуклоне в низшем порядке по $g_0^2/4\pi$. Согласно нашим

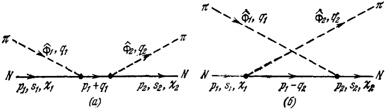


Рис. 10.8. Мезон-нуклонное рассеяние в низшем порядке, отвечающее формуле (10.54).

правилам амплитуда рассеяния дается выражением

$$S_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{M^2}{E_{p_1} E_{p_2} 2\omega_{q_1} 2\omega_{q_2}}} (2\pi)^4 \delta^4 (q_1 + p_1 - q_2 - p_2) \mathfrak{M},$$

где

$$\mathfrak{M} = (-ig_0)^2 \chi_2^+ \bar{u}(p_2, s_2) \times$$
$$\times \left[\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_2^{e*} i\gamma_5 \frac{i}{\not{p}_1 + \not{q}_1 - M} i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_1^e + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_1^e i\gamma_5 \frac{i}{\not{p}_1 - \not{q}_2 - M} i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_2^{e*} \right] \times$$
$$\times u(p_1, s_1) \chi_1. \qquad (10.54)$$

Обратите внимание на кросс-симметрию матричного элемента (10.54); он инвариантен относительно замены

$$\boldsymbol{\phi}_1^e \leftrightarrow \boldsymbol{\phi}_2^{e*}, \quad q_1 \leftrightarrow -q_2. \qquad (10.55)$$

Аналогичным свойством обладает рассмотренная ранее амплитуда (7.67) комптоновского рассеяния. Симметрия (10.55) сохраняется и во всех высших порядках [50]. Она очевидным образом следует из фейнмановских диаграмм — достаточно заметить, что для любой диаграммы, которая отвечает поглощению падающего пиона до испускания конечного, как, например, на рис. 10.8, *а*, найдется другая диаграмма, как на рис. 10.8, *б*, которая отличается от первой лишь тем, что начальный пион поглощается после испускания конечного. Мы ограничимся рассмотрением области низких энергий [100], сохраняя в $\mathfrak{M}$ члены порядка $1/M$ для рассеяния в s-волне и порядка $1/M^2$ для p-волнового рассеяния. Переходя к квадратам в знаменателях фейнмановских пропагаторов и используя соотношение

$$\bar{u}(p')\, i\gamma_5 (\hat{p} + \hat{q} + M)\, i\gamma_5 u(p) = \bar{u}(p')\, \hat{q} u(p),$$

находим

$$\mathfrak{M} = -ig_0^2 \chi_2^+ \bar{u}(p_2, s_2) \left[\frac{(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2^{e*})(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1^{e})\,\hat{q}_1}{2p_1\cdot q_1 + \mu^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1^{e})(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2^{e*})(-\hat{q}_2)}{-2p_1\cdot q_2 + \mu^2} \right] u(p_1, s_1)\,\chi_1. \qquad (10.56)$$

Проводя вычисления в системе центра инерции с указанной выше точностью, приводим (10.56) к виду

$$\mathfrak{M} \approx \frac{-ig_0^2}{M}\left[u^+(\mathbf{s}_2)\, u(\mathbf{s}_1)\left(\chi_2^+\chi_1\right)\left(\boldsymbol{\varphi}_2^{e*}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1^{e}\right)\right] -$$
$$- \frac{ig_0^2}{4M^2\omega} u^+(\mathbf{s}_2)\, \chi_2^+ \left(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2^{e*}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1^{e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}_1 - \right.$$
$$\left. - \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1^{e}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}_2^{e*}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}_2\right) u(\mathbf{s}_1)\,\chi_1. \qquad (10.57)$$

Первый член отвечает взаимодействию, которое не зависит от спина и изотопического спина. В нерелятивистском случае в борновском приближении это взаимодействие описывается потенциалом

$$V(r) = + \frac{g_0^2}{2\mu M}\,\delta^3(\mathbf{r}) = 6f^2 M\left[\frac{4\pi}{3\mu^3}\,\delta^3(\mathbf{r})\right]. \qquad (10.58)$$

По теории возмущений он приводит к огромной длине рассеяния, равной $(4Mf^2/\mu)\,1/\mu \approx 2/\mu \approx 2{,}8\cdot 10^{-13}$ *см*, где мы вновь положили $f^2 = 0{,}08$. Однако, поскольку взаимодействие является отталкивательным и имеет малый радиус (в нерелятивистском приближении (10.58) нулевой радиус), то вызванные им эффекты малы. Сильный, короткодействующий, отталкивательный потенциал типа изображенного на рис. 10.9 приводит к сдвигу s-фазы порядка $\delta \sim qa$, где радиус потенциала a дает в данном случае длину рассеяния на этом потенциале. Из поправок на отдачу нуклона можно ожидать, что $a \sim 1/M$ и, следовательно, s-волновая длина мезон-нуклонного рассеяния мала в противоположность большой амплитуде, $\sim 1/\mu$, полученной из небоснованного применения борновского приближения к (10.58). **Эксперимент** показывает, что это действительно так [15, 89, 94, 100].

Второй член в (10.57) отвечает p-волновому рассеянию. Выражение такого вида получается во втором порядке нерелятивистской теории возмущений. Если рассматривать нуклон как нерелятивистскую частицу со спином $^1/_2$, для которой спектр промежуточных состояний между поглощением начального мезона и испусканием конечного включает только состояния с положительной энергией, то можно воспользоваться (10.50) и привести вершину взаимодействия к виду $g_0(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi}^e)/2M$. Множитель $1/\omega$ в (10.57) возникает в этом приближении от энергетического знаменателя и имеет знак плюс для амплитуды, изображенной на рис. 10.8, *а*, и знак минус для амплитуды на рис. 10.8, *б*. Напротив, первый член в (10.57), отвечающий рассеянию в s-волне, возникает благодаря прямым и обратным переходам нуклона в море с отрицательной энергией в промежуточном состоянии. В этом случае при малых импульсах нуклона $\bar{v}\gamma_5 u \sim -1$ и энергетический знаменатель дает множитель — $1/2M$.

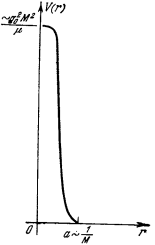


Рис. 10.9. Отталкивание на малых расстояниях для s-волнового $\pi - n$-рассеяния.

Из соотношения неопределенности $\Delta E\Delta t \sim 1$ можно ожидать, что для рассматриваемых диаграмм взаимодействие в p-состоянии имеет больший масштаб во времени, $\sim 1/\omega$, чем в s-состоянии, $\sim 1/M$. Поэтому представляется естественным, что низкоэнергетическая амплитуда рассеяния в p-состоянии имеет более сильную зависимость от энергии, чем амплитуда для s-состояния. Если в p-состоянии действует сильный притягивающий «потенциал», то может образоваться резонанс.

Как впервые указал Чью [101], решающим является вопрос о знаке потенциала в p-состоянии. Независимо от того, что использованный нами при написании (10.57) метод теории возмущений качественно необоснован, этот знак играет в рассеянии огромную роль и может служить важным количественным критерием при анализе амплитуды рассеяния в p-состоянии. Чтобы ответить на этот вопрос, удобно выделить из амплитуд проекции, которые отвечают различным каналам с фиксированными значениями полного углового момента J и полного изоспина I, так как переходы между каналами с разными J запрещены законом сохранения углового момента, а между каналами с разными I — законом сохранения изоспина (10.44) (в приближении зарядовой независимости).

§ 54. Проекционные операторы для изоспина и углового момента

Мы знаем, что согласно векторной модели сложения угловых моментов полный изотопический спин системы из одного нуклона (с $I = 1/2$) и одного мезона (с $I = 1$) может равняться либо $I = 1/2$, либо $I = 3/2$. Проекционные операторы для этих двух состояний, $P_{1/2}$ и $P_{3/2}$, будут матрицами размерности 3×3 в изотопическом пространстве мезонов, натянутом на базисные векторы (10.36), и матрицами 2×2 в пространстве нуклонных изоспиноров (10.35). Операторы $P_{1/2}$ и $P_{3/2}$ должны обладать основными свойствами проекционных операторов:

$$P_{1/2} + P_{3/2} = \mathbf{1}, \tag{10.59а}$$

$$P_{1/2}^2 = P_{1/2}, \quad P_{3/2}^2 = P_{3/2}, \tag{10.59б}$$

где $\mathbf{1}$ означает единичную матрицу в шестимерном пространстве, построенном как прямое произведение мезонного и нуклонного изотопических пространств.

Эти операторы нетрудно найти, если заметить, что диаграмма без пересечения мезонных линий, изображенная на рис. 10.8, *а*, должна приводить к чистой амплитуде с $I = 1/2$, так как она содержит только одну промежуточную нуклонную линию с $I = 1/2$ и I сохраняется в каждой вершине. Поэтому изотопические матрицы в диаграмме без пересечения должны быть пропорциональны $P_{1/2}$:

$$\langle \boldsymbol{\phi}_2^e | P_{1/2} | \boldsymbol{\phi}_1^e \rangle = \alpha \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_2^{e*} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_1^e. \tag{10.60}$$

Коэффициент α можно найти, вычисляя аналогичный матричный элемент оператора $P_{1/2}^2$ и используя равенство (10.59б):

$$\langle \boldsymbol{\phi}_2^e | P_{1/2}^2 | \boldsymbol{\phi}_1^e \rangle = \sum_{r=1}^{3} \langle \boldsymbol{\phi}_2^e | P_{1/2} | \boldsymbol{\phi}_r^e \rangle \langle \boldsymbol{\phi}_r^e | P_{1/2} | \boldsymbol{\phi}_1^e \rangle =$$

$$= \alpha^2 \sum_{r=1}^{3} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_2^{e*})(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_r^e)(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_r^{e*})(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_1^e) =$$

$$= 3\alpha \langle \boldsymbol{\phi}_2^e | P_{1/2} | \boldsymbol{\phi}_1^e \rangle = \langle \boldsymbol{\phi}_2^e | P_{1/2} | \boldsymbol{\phi}_1^e \rangle.$$

Таким образом, $\alpha = 1/3$ и

$$\langle \boldsymbol{\phi}_2^e | P_{1/2} | \boldsymbol{\phi}_1^e \rangle = \frac{1}{3} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_2^{e*} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_1^e. \tag{10.61}$$

Оператор $P_{3/2}$ находится теперь непосредственно из (10.69а):

$$\langle \boldsymbol{\phi}_2^e | P_{3/2} | \boldsymbol{\phi}_1^e \rangle = \boldsymbol{\phi}_2^{e*} \cdot \boldsymbol{\phi}_1^e - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_2^{e*}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}_1^e). \qquad (10.62)$$

Полученные результаты переносятся и на угловые моменты, так как мы вновь складываем $S = 1/2$ с $L = 1$ для мезона, находящегося в p-состоянии относительно нуклона. Орбитальными волновыми функциями π-мезона являются теперь векторы $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ по аналогии с $\boldsymbol{\phi}_1^e$ и $\boldsymbol{\phi}_2^c$ в изотопическом пространстве, и вместо (10.61) и (10.62) теперь можно записать

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_2 | Q_{1/2} | \mathbf{q}_1 \rangle &= \left[\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}_1 \right] \frac{3}{4\pi q^2}, \\ \langle \mathbf{q}_2 | Q_{3/2} | \mathbf{q}_1 \rangle &= \left[\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1 - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}_2) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}_1) \right] \frac{3}{4\pi q^2}; \end{aligned} \qquad (10.63)$$

здесь $q \equiv |\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2|$.

Эти операторы нормированы согласно

$$\int d\Omega_n \langle \mathbf{q}_2 | Q_i | \mathbf{q}_n \rangle \langle \mathbf{q}_n | Q_j | \mathbf{q}_1 \rangle = \delta_{ij} \langle \mathbf{q}_2 | Q_i | \mathbf{q}_1 \rangle, \qquad (10.64)$$

где суммирование по трем ортогональным направлениям, как и в случае изотопических проекционных операторов, мы заменили на интегрирование по сфере $\int d\Omega_n$. Подобная несущественная разница в условиях нормировки между P_i и Q_i обусловлена тем, что наблюдаемые мезоны всегда ориентированы в изопространстве вдоль одного из трех направлений (10.36), которые отвечают зарядам ± 1 и 0, в то время как направления их импульсов образуют континуум, отвечающий различным углам рассеяния.

Комбинированные проекционные операторы для собственных состояний изоспина и углового момента представляют собой произведения операторов P и Q. Они определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \mathscr{P}_{11} = P_{1/2} Q_{1/2}, \\ \mathscr{P}_2 &= \mathscr{P}_{13} = P_{1/2} Q_{3/2}, \\ \mathscr{P}_3 &= \mathscr{P}_{31} = P_{3/2} Q_{1/2}, \\ \mathscr{P}_4 &= \mathscr{P}_{33} = P_{3/2} Q_{3/2}, \end{aligned} \qquad (10.65)$$

где первый индекс оператора $\mathscr{P}_{ij}$ представляет собой удвоенное значение изоспина, а второй — удвоенное значение углового момента. Операторы $\mathscr{P}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, 4$, обладают свойствами

(10.59) и нормированы согласно

$$\sum_{r=1}^{3}\int d\Omega_n \mathscr{P}_a \left|\phi_r^e q_n\right\rangle\left\langle\phi_r^e q_n\right| \mathscr{P}_{a'} = \delta_{aa'}\mathscr{P}_a. \qquad (10.66)$$

Вводя проекционные операторы в (10.57), получаем следующее выражение для амплитуды пион-нуклонного рассеяния во втором порядке теории возмущений и в нерелятивистском приближении:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \approx &-\frac{ig_0^2}{M}u^+(\mathbf{s}_2)u(\mathbf{s}_1)\chi_2^+(P_{1/2}+P_{3/2})\chi_1 - \\ &-\frac{ig_0^2}{4M^2}\left(\frac{4\pi q^2}{3}\right)u^+(\mathbf{s}_2)\chi_2^+\left\langle \mathbf{q}_2\phi_2^e\right|\frac{9\mathscr{P}_{11}}{\omega} - \\ &-\frac{4\mathscr{P}_{33}-2\mathscr{P}_{13}-2\mathscr{P}_{31}+\mathscr{P}_{11}}{\omega}\left|\mathbf{q}_1\phi_1^e\right\rangle u(\mathbf{s}_1)\chi_1. \qquad (10.67)\end{aligned}$$

Обратите внимание на то, что амплитуда (10.67) отрицательна только для канала (3.3); это соответствует наличию притяжения лишь в канале с $I = J = 3/2$ [100, 102, 103]. Экспериментальное наблюдение резонанса в этом состоянии и малые сдвиги фаз при низкой энергии в трех других p-состояниях качественно согласуются с тем, что дает «потенциал», который приводит к амплитуде (10.67).

§ 55. Сечения рассеяния пионов на нуклоне

Сечение рассеяния получается из (10.67) и (10.54) возведением в квадрат и умножением на обычные множители, связанные с фазовым объемом. Для фиксированных начального и конечного спиновых состояний имеем

$$d\sigma = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{2\omega_{q_1}|\mathbf{v}_{q_1}-\mathbf{v}_{P_1}|}\int\left(\frac{M}{E_{P_1}}\right)\left(\frac{d^3q_2}{2\omega_{q_2}}\right)\left(\frac{M}{E_{P_2}}d^3P_2\right)\frac{1}{(2\pi)^2}\times \\ \times\delta^4(q_1+P_1-q_2-P_2),$$

что в нерелятивистском пределе в системе центра масс переходит в

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ц.м}} \approx \frac{1}{16\pi^2}|\mathfrak{M}|^2. \qquad (10.68)$$

Для конкретного процесса $d\sigma/d\Omega$ вычисляется путем подстановки в $\mathfrak{M}$ соответствующей изотопической волновой функции π-мезона ϕ_i^e, импульса $\mathbf{q}_i$ и отвечающих данному процессу нуклонных изоспиноров χ_i. Сечение, усредненное по спинам, получается, как обычно, суммированием по спинам нуклона. В качестве примера рассмотрим $\pi^+ - p$-рассеяние, в которое дает вклад только канал с $I = {}^3/_2$, так как $I_3 = {}^3/_2$. Пренебрегая вкладами всех других состояний, кроме $I = J = {}^3/_2$, получаем из (10.65)

$$\chi_p^+ \langle \mathbf{q}_2 \Phi_+^e | \mathscr{P}_{33} | \mathbf{q}_1 \Phi_+^e \rangle \chi_p = \frac{3}{4\pi q^2} \left(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 - \frac{1}{3} \sigma \cdot \mathbf{q}_2 \sigma \cdot \mathbf{q}_1 \right). \quad (10.69)$$

Суммируя по конечным и усредняя по начальным спинам нуклона, находим с помощью (10.69)

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathfrak{M}_{33}|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{g_0^2}{M^2 4} \right)^2 \left(\frac{4}{\omega} \right)^2 \sum_{\text{spins}} \left| u^+ (\mathbf{s}_2) \left(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 - \frac{1}{3} \sigma \cdot \mathbf{q}_2 \sigma \cdot \mathbf{q}_1 \right) u (\mathbf{s}_1) \right|^2 =$$

$$= \left(\frac{g_0^2}{M^2 \omega} \right)^2 \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 - \frac{1}{3} \sigma \cdot \mathbf{q}_2 \sigma \cdot \mathbf{q}_1 \right) \left(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 - \frac{1}{3} \sigma \cdot \mathbf{q}_1 \sigma \cdot \mathbf{q}_2 \right) =$$

$$= \left(\frac{g_0^2}{3M^2 \omega} \right)^2 [\mathbf{q}_2^2 \mathbf{q}_1^2 + 3 (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1)^2]. \quad (10.70)$$

Подставляя это выражение в (10.68), получаем вклад состояния с $I = J = {}^3/_2$ в дифференциальное сечение $\pi^+ - p$-рассеяния в системе центра инерции

$$\frac{d\sigma_{33} (\pi^+ \text{-} p)}{d\Omega} = \left(\frac{4f^2}{3\omega\mu^2} \right)^2 q^4 (1 + 3\cos^2\theta), \quad (10.71)$$

где, как и раньше, мы обозначили

$$f^2 = \frac{g_0^2}{4\pi} \left(\frac{\mu}{2M} \right)^2.$$

Полученное выражение (10.71) вряд ли можно считать достоверным, так как оно основано на борновском приближении, которое, как уже было показано, совершенно неприменимо для s-волнового рассеяния. Важное достоинство (10.71) состоит, однако, в том, что оно предсказывает угловое распределение вида $(1 + 3\cos^2\theta)$ в хорошем согласии с экспериментальными данными для мезонов с энергией в районе от 150 до 200 *Мэв*. Кроме того, установлено, что в этой области энергий отношения сечений близки к значениям, вычисленным с учетом одного состояния с $I = J = {}^3/_2$:

$$\sigma (\pi^+ - p \to \pi^+ - p) : \sigma (\pi^- - p \to \pi^0 - n) :$$
$$: \sigma (\pi^- - p \to \pi^- - p) = 9 : 2 \cdot 1. \quad (10.72)$$

В предположении, что в данной области энергий основной вклад в рассеяние вносит канал с $I = J = {}^3/_2$, мы попытаемся расширить применимость формулы (10.71) с помощью следующих двух общих соображений [100, 102, 103]. Во-первых, заметим, что, за исключением области энергий вблизи порога, (10.71) дает неправильную зависимость от энергии, так как $\sigma \to \infty$ при $\omega \to \infty$. Однако из условия унитарности следует ограничение сверху на величину полного сечения. В рамках метода функции распространения трудно обсуждать вопрос об унитарности S-матрицы [50], поэтому мы воспользуемся некоторыми общими результатами нерелятивистской теории рассеяния, а именно:

1. Для данного канала амплитуда рассеяния имеет вид

$$f \sim \frac{1}{q} e^{i\delta} \sin\delta = \frac{1}{q(\operatorname{ctg}\delta - i)}, \tag{10.73}$$

где q означает импульс каждой из частиц в системе центра инерции, а δ — сдвиг фазы в данном канале. Фаза δ действительна, если отсутствуют неупругие каналы с теми же квантовыми числами.

2. Вклад канала с орбитальным моментом l и полным моментом $J = l \pm {}^1/_2$ в полное сечение ограничен сверху значением

$$\sigma_{\text{tot}}^{J,\,l} \leqslant \frac{4\pi(2J+1)}{2} \frac{1}{q^2}. \tag{10.74}$$

3. При низких энергиях хорошее приближение дает разложение по эффективному радиусу:

$$q^{2l+1} \operatorname{ctg}\delta = a + b\omega + c\omega^2 + \ldots \tag{10.75}$$

Второе замечание состоит в том, что, как говорилось в § 53, благодаря малому энергетическому знаменателю, $\sim\omega$, и сравнительно большой продолжительности, $\sim 1/\omega$, p-волнового взаимодействия можно ожидать сильной энергетической зависимости фазового сдвига для p-волны. Поэтому естественно думать, что в (10.75) для канала (3.3) поправки высших порядков к борновскому приближению приведут к коэффициенту c, которым нельзя пренебречь и за счет которого усиливается притяжение, даваемое борновским приближением.

Используя (10.73) и (10.74), перепишем (10.71) в виде

$$\left(\frac{d\sigma_{33}}{d\Omega}\right)_{\pi^+ - p} = \frac{1}{q^2} \left| e^{i\delta_{33}} \sin\delta_{33} \right|^2 (1 + 3\cos^2\theta), \tag{10.76}$$

где

$$(e^{i\delta_{33}} \sin\delta_{33})_{\text{борн}} \approx + \frac{4f^2 q^3}{3\omega\mu^2}. \tag{10.77}$$

В этом порядке мы можем также записать

$$(q^3 \operatorname{ctg}\delta_{33})_{\text{борн}} = + \frac{3\omega\mu^2}{4f^2}. \tag{10.78}$$

Сравнивая с (10.75), мы видим, что для воспроизведения характера поведения борновского члена в пределе $\omega \to 0$ необходимо положить $a = 0$ и $b = +(3\mu^2/4f^2)$. Для определения следующего коэффициента c в разложении (10.75) и получения формулы, включающей поправку на эффективный радиус к длине рассеяния, мы должны выйти за пределы нашего низкоэнергетического борновского приближения.

Как мы уже отмечали, согласно (10.67) можно ожидать, что для канала (3.3) коэффициент c отрицателен, так как в этом канале в противоположность другим имеется притяжение. Полагая в качестве низкоэнергетического приближения

$$q^3 \operatorname{ctg} \delta_{33} = + \frac{3\omega\mu^2}{4f^2}\left(1 - \frac{\omega}{\omega_r}\right), \tag{10.79}$$

мы получим хорошее описание экспериментальных данных по $\pi^+ - p$-рассеянию при $f^2 = 0{,}08$, что соответствует $g_0^2/4\pi \approx 14$ и $\omega_r \approx 2{,}2\mu$.

Формула (10.79) была впервые получена Чью и Лоу [102] из мезонной теории с неподвижным нуклонным источником ($\omega/M \to 0$) и без помощи разложения по степеням константы взаимодействия, которым мы пользовались в (10.54).

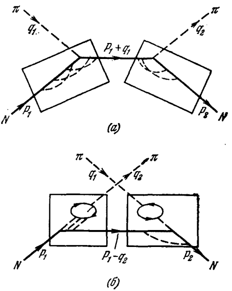


Рис. 10.10. Радиационные поправки с одной нуклонной линией в промежутке.

Сингулярность амплитуды рассеяния (10.77) в точке $\omega = 0$ в «нефизической области», граница которой расположена при $\omega = \mu$, возникает благодаря обращению в нуль энергетического знаменателя борновской амплитуды (10.54). Таким образом, фейнмановские пропагаторы в (10.56) имеют простые полюсы при энергиях мезонов в лабораторной системе $\omega_1 = -\mu^2/2M$ и $\omega_2 = +\mu^2/2M$; ω_1 и $\omega_2 \to 0$ в нерелятивистском пределе $\mu/M \to 0$.

Все диаграммы высших порядков с одной нуклонной линией, соединяющей мезонные вершины, как на рис. 10.10, также приводят к членам с полюсами при $\omega = 0$, и эти члены вносят вклад в вычеты в формулах (10.78) и (10.79) в этом полюсе.

Все другие диаграммы, изображенные, например, на рис. 10.11, дают выражения, конечные при $\omega = 0$ для внешней мезонной линии, и поэтому вносят вклад во второй член в (10.79), который отвечает приближению эффективного радиуса[1]). Строя зависимость $(q^3 \operatorname{ctg} \delta_{33})/\omega$ от ω и экстраполируя в точку $\omega = 0$, мы выделяем вклад амплитуд, изображенных на рис. 10.10, который характеризует интенсивность такого процесса, когда физический нуклон с $P^2 = M^2$ испускает или погло-

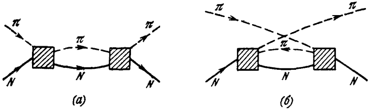


Рис. 10.11. Вклады высших порядков.

щает мезон с мнимым импульсом $|q| = i\mu$ и остается физическим нуклоном с

$$(P + q)^2 = M^2.$$

Амплитуда этого процесса является, согласно Чью и Лоу, константой связи мезон-нуклон, численное значение которой, полученное из экстраполяции, равно $f^2 = 0{,}08$ [104].

§ 56. Электромагнитная структура мезонов и нуклонов

Как мы уже отмечали, сильные взаимодействия оказывают влияние на электромагнитные свойства мезонов и нуклонов. Действительно, уже давно было известно, что протон обладает аномально большим магнитным моментом, равным $2{,}79\,\mu_Б$ (где $\mu_Б = e\hbar/2M_pc$ — ядерный магнетон Бора), вместо значения, равного $1{,}0\,\mu_Б$, предсказываемого теорией Дирака для частицы с зарядом e (здесь мы пренебрегаем радиационными поправками, рассмотренными в гл. 7 и 8). Аналогично, нейтрон имеет магнитный момент, равный $-1{,}91\,\mu_Б$, в то время как свободное уравнение Дирака приводит к нулевому магнитному моменту для нейтральной частицы.

Можно допустить существование аномальных магнитных моментов, если отказаться от принципа минимальности электро-

[1]) Это утверждение, которое кажется правдоподобным для данных фейнмановских диаграмм, строго доказывается в следующем томе [50].

магнитного взаимодействия [92]. Вместо того чтобы вводить электромагнитное взаимодействие в уравнение Дирака с помощью **замены**

$$i\hat{\nabla} \to \gamma^{\mu}\left(i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - eA_{\mu}\right), \tag{10.80}$$

мы можем добавить также дипольный член

$$i\hat{\nabla} \to \gamma^{\mu}\left(i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - eA_{\mu}\right) - \frac{\kappa\mu_{Б}}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{10.81}$$

где $\kappa_p = 1{,}79$, $\kappa_n = -1{,}91$.

Более продотворным является подход без попытки введения новых параметров, как в (10.81), с сохранением минимальной формы взаимодействия (10.80). В таком подходе считается, что все отключения от (10.80), включая аномальные магнитные моменты κ, обусловлены сильными взаимодействиями [105—108]. Подобным образом в гл. 8 было показано, что лэмбовское смещение атомных уровней и аномальный магнитный момент электрона в пределах точности современных экспериментов могут быть объяснены взаимодействием электрона с фотонами.

Не вдаваясь в детальные вычисления и опираясь только на принципы инвариантности, мы можем установить общий вид изменений, вносимых в (10.80) сильными взаимодействиями.

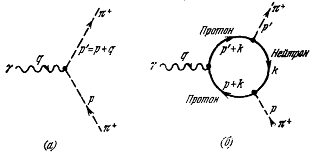


Рис. 10.12. Электромагнитная вершина заряженного пиона и радиационная поправка.

В данном случае требование лоренцевой инвариантности и сохранение электромагнитного тока налагают существенные ограничения на электромагнитную вершину частицы. Рассмотрим сначала π^+-мезон и диаграмму на рис. 10.12, *б*, которая служит «радиационной поправкой» к вершине на рис. 10.12, *а*.

Согласно нашим правилам изменение в электромагнитном токе перехода на рис. 10.12, *а*, обусловленное диаграммой на рис. 10.12, *б*, имеет вид

$$e(p_\mu + p'_\mu) \to e(p_\mu + p'_\mu) + (-ig_0\sqrt{2})^2 \times$$
$$\times (-1)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{Sp} \frac{i}{\hat{k} - M} i\gamma_5 \frac{i}{\hat{p}' + \hat{k} - M} e\gamma_\mu \frac{i}{\hat{p} + \hat{k} - M} i\gamma_5 =$$
$$= e(p_\mu + p'_\mu) + I_\mu(p', p). \qquad (10.82)$$

Значение интеграла $I_\mu(p', p)$ не представляет большого интереса, так как он является всего лишь одним из членов ряда по g_0^2, который вполне может оказаться расходящимся. Важно, однако, как эта добавка к электромагнитному току π^+-мезона ведет себя при лоренцевых преобразованиях, поскольку закон преобразования является общим для всех порядков. Из (10.82) ясно, что вычисление следа и интегрирование по импульсу приводит к величине $I_\mu(p', p)$, преобразующейся как 4-вектор. Следовательно, можно записать

$$I_\mu(p', p) = p_\mu f_1(p^2, p'^2, (p - p')^2) + p'_\mu f_2(p^2, p'^2, (p - p')^2), \quad (10.83)$$

где форм-факторы f_1 и f_2 являются скалярными функциями трех независимых скаляров p^2, p'^2 и $(p - p')^2$, входящих в интеграл. Если ограничиться рассмотрением рассеяния реального мезона на потенциале, форм-факторы становятся функциями только квадрата переданного 4-импульса $q^2 = (p' - p)^2$, так как $p^2 = p'^2 = \mu^2$.

Дальнейшее ограничение на (10.83) следует из сохранения тока: для q-й фурье-компоненты тока реального физического мезона имеем

$$q^\mu I_\mu(p', p) = (p' - p)^\mu I_\mu(p', p) = 0. \qquad (10.84)$$

Для (10.83) при $p^2 = p'^2 = \mu^2$ получаем отсюда $f_1(q^2) = f_2(q^2)$; этот результат можно получить непосредственно из (10.82) тем же способом и с той же неопределенностью, как в гл. 8 при рассмотрении поляризации вакуума.

Мы получили общий вид электромагнитного тока перехода реального π^+-мезона для рассеяния с переданным импульсом q^μ. Ток $e(p_\mu + p'_\mu)$, отвечающий точечному взаимодействию, заменяется на

$$e(p_\mu + p'_\mu) \to e(p_\mu + p'_\mu) F_\pi(q^2), \qquad (10.85)$$

где функция $F_\pi(q^2)$, которую называют форм-фактором заряженного π-мезона, зависит только от инвариантного переданного импульса. Форм-фактор нормирован на единицу при нулевом переданном импульсе, $F_\pi(0) = 1$, причем здесь предполагается, что перенормировка уже проведена, как в гл. 8, и заряд

e положен равным наблюдаемому физическому заряду π^+-мезона.

Изучение $F_\pi(q^2)$ требует применения более мощных методов, чем теория возмущений [50]. Однако даже (10.85) налагает сильное ограничение на форму дифференциального сечения рассеяния π^+-мезона электромагнитным полем. Например, в низшем порядке по α отношение сечений при разных энергиях и углах рассеяния, но при одинаковом q^2 не зависит от $F_\pi(q^2)$ и равно отношению, найденному в гл. 9 в пренебрежении сильными взаимодействиями.

Подобный результат получается также для электромагнитного тока нуклона (и странных гиперонов). Благодаря спиновой степени свободы нуклон может обладать двумя скалярными форм-факторами. Появление второго форм-фактора отвечает дополнительной возможности наличия магнитного момента у частицы со спином $^1/_2$.

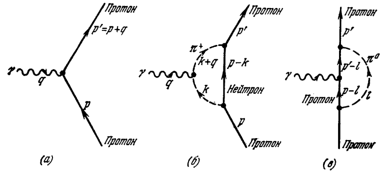


Рис. 10.13. Протонная электромагнитная вершина и радиационные поправки.

Для протона, например, диаграммы, которые надо учитывать до порядка g_2^0, изображены на рис. 10.13. Они вносят следующее изменение в протонный ток перехода:

$$\bar{u}(p')e\gamma_\mu u(p) \to \bar{u}(p')e\gamma_\mu u(p) +$$
$$+(-ig_0\sqrt{2})^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}(p')i\gamma_5\frac{i}{\not{p}-\not{k}-M}i\gamma_5 u(p)\times$$
$$\times\frac{i}{k^2-\mu^2}e(2k_\mu+q_\mu)\frac{i}{(k+q)^2-\mu^2}+$$
$$+(-ig_0)^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\bar{u}(p')i\gamma_5\frac{i}{\not{p}'-\not{l}-M}e\gamma_\mu\frac{i}{\not{p}-\not{l}-M}i\gamma_5 u(p)\frac{i}{l^2-\mu^2}\equiv$$
$$\equiv\bar{u}(p')e\Gamma_\mu(p',p)u(p). \quad (10.86)$$

Снова, как и в случае тока π^+-мезона, мы находим, что протонный ток является 4-вектором. После интегрирования по импульсам остаются 4-векторы p_μ, p'_μ и γ_μ, которые могут быть заключены в обкладки из протонных спиноров. Все остальные матрицы γ должны быть вида $\hat{p}$, $\hat{p}'$ или γ_5. Однако матрицы γ_5 можно исключить, поскольку число $\pi - N$ вершин четно и, следовательно, матрицы γ_5 можно объединить попарно и использовать свойство $\gamma_5^2 = 1$. Кроме того, все факторы $\hat{p}'$ и $\hat{p}$, в которые входят матрицы γ, можно переставить направо и налево к соответствующим спинорам $\bar{u}(p')$ и $u(p)$ и затем положить равными M (вспомните пример использования этого приема при вычислении электромагнитной вершины электрона в гл. 8).

Таким образом, мы приходим к выводу, что (10.86) имеет следующий общий вид:

$$\bar{u}(p') e\Gamma_\mu(p', p) u(p) = \\ = e\bar{u}(p')\left[p_\mu \Gamma_1(q^2) + p'_\mu \Gamma_2(q^2) + \gamma_\mu \Gamma_3(q^2)\right] u(p), \quad (10.87)$$

где $\Gamma_i(q^2)$, $i = 1, 2, 3$, — скалярные функции q^2. Те же рассуждения приводят к совпадающему с (10.87) представлению для нейтронного тока.

Из сохранения тока вытекает соотношение между тремя форм-факторами $\Gamma_i(q^2)$. По аналогии с (10.84) имеем

$$q^\mu \bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p) = 0.$$

Отсюда получаем $\Gamma_1(q^2) = \Gamma_2(q^2)$ и нуклонный ток принимает следующий наиболее общий вид:

$$\bar{u}(p') e\Gamma_\mu(p', p) u(p) = e\bar{u}(p')\left[(p_\mu + p'_\mu)\Gamma_1(q^2) + \gamma_\mu \Gamma_3(q^2)\right] u(p).$$

При рассмотрении электромагнитной структуры нуклонов обычно исключают вектор $(p_\mu + p'_\mu)$, вводя

$$\sigma_{\mu\nu}(p'^\nu - p^\nu) = \sigma_{\mu\nu} q^\nu$$

с помощью представления Гордона для тока. Поскольку спиноры $\bar{u}(p')$ и $u(p)$ удовлетворяют свободному уравнению Дирака, мы можем, используя непосредственно (3.26), получить следующую эквивалентную форму записи:

$$\bar{u}(p') e\Gamma_\mu(p', p) u(p) = \\ = e\bar{u}(p')\left[\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2M} \varkappa F_2(q^2)\right] u(p). \quad (10.88)$$

С таким выражением мы уже встречались при изучении радиационных поправок к электронной вершине (см. (8.61)). Если величина $\varkappa$ положена равной аномальной части магнитного момента в единицах ядерного магнетона ($\kappa_p = 1,79$ и $\kappa_n = -1,91$) и e означает физический заряд протона, то $F_2(0) = 1$ и $F_1(0) = 1$ для протона и $F_1(0) = 0$ для нейтрона[1]).

Пользуясь формализмом изоспина, мы можем объединить протонный и нейтронный токи в изоскалярную и изовекторную части

$$e\chi^+ \bar{u}(p') \left\{ \gamma_\mu \left[F_1^{(s)}(q^2) + \tau_3 F_1^{(v)}(q^2)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2M} \left[F_2^{(s)}(q^2) + \tau_3 F_2^{(v)}(q^2)\right] \right\} u(p)\chi \equiv$$
$$\equiv \chi^+ \left[j_\mu^{(s)}(p', p) + \tau_3 j_\mu^{(v)}(p', p) \right] \chi, \quad (10.89)$$

где

$$F_1^{(s)} = \frac{1}{2}\left(F_1^{(p)} + F_1^{(n)}\right), \qquad F_1^{(s)}(0) = \frac{1}{2},$$
$$F_1^{(v)} = \frac{1}{2}\left(F_1^{(p)} - F_1^{(n)}\right), \qquad F_1^{(v)}(0) = \frac{1}{2},$$
$$F_2^{(s)} = \frac{1}{2}\left(\kappa_p F_2^{(p)} + \kappa_n F_2^{(n)}\right), \quad F_2^{(s)}(0) = -0,06,$$
$$F_2^{(v)} = \frac{1}{2}\left(\kappa_p F_2^{(p)} - \kappa_n F_2^{(n)}\right), \quad F_2^{(v)}(0) = +1,85.$$

Для протона $\chi^+\tau_3\chi = 1$ и (10.89) переходит в протонный ток; для нейтрона $\chi^+\tau_3\chi = -1$ и (10.89) дает ток нейтрона.

Из общего вида тока перехода (10.88) и (10.89) вновь вытекают существенные ограничения на форму дифференциального сечения рассеяния протона и нейтрона электромагнитным полем. В борновском приближении по $\alpha = 1/137$, но в любом порядке по константе сильного взаимодействия получаем для дифференциального сечения рассеяния электрона на физическом протоне и нейтроне вместо (7.46) следующее выражение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \left[\left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}{4E^2 \left[1 + (2E/M) \sin^2 (\theta/2)\right] \sin^4 (\theta/2)}, \quad (10.90)$$

где θ — угол рассеяния в лабораторной системе. Форм-факторы F_1 и F_2 в отдельности находятся из сравнения результатов измерений при разных углах рассеяния и энергиях, но фиксированном q^2. Если результаты более чем трех измерений при данном

[1]) Широко используются также форм-факторы

$$G_E \equiv F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2 \quad G_M \equiv F_1 + \kappa F_2,$$

которые имеют более наглядную геометрическую интерпретацию.

q^2 отложить в виде зависимости величины

$$\left(\sin^4\frac{\theta}{2}\right)E^2\left(1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

от $\cos^2(\theta/2)$ при фиксированном q^2, то должна получиться прямая линия. Любые отклонения от нее означают ошибку в расчетах, связанных с электродинамикой явления; эти отклонения нельзя отнести за счет незнания сильных взаимодействий или погрешности в вычислении форм-факторов. Дело может, например, оказаться в неоправданности низшего приближения по α либо в более глубоких причинах.

§ 57. Слабые взаимодействия

Слабые взаимодействия [109, 15, 17], наиболее известным примером которых является β-распад, можно разделить на лептонные и нелептонные. В лептонных взаимодействиях участвуют μ-мезоны (μ^-), электроны (e^-) и два типа нейтрино (ν, ν'). К лептонным относятся следующие процессы (вместе с соответствующими реакциями для античастиц μ^+, e^+, $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}'$):

$$\beta\text{-распад} \qquad n \to p + e^- + \bar{\nu}, \tag{10.91а}$$

$$\text{распад мюона} \qquad \mu^- \to e^- + \nu' + \bar{\nu}, \tag{10.91б}$$

$$\text{распад пиона} \qquad \pi^- \to \begin{cases} \mu^- + \bar{\nu}', \\ e^- + \bar{\nu}, \end{cases} \tag{10.91в}$$

$$\mu\text{-захват} \qquad \mu^- + p \to n + \nu' \tag{10.91г}$$

и, кроме того, большое число лептонных распадов с изменением странности, благодаря которым странные частицы переходят в нуклоны, лептоны и, возможно, пионы; например,

$$K^- \to \begin{cases} \mu^- + \bar{\nu}', \\ \pi^0 + e^- + \bar{\nu}, \end{cases} \qquad \Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}.$$

Примерами нелептонных распадов, в которых всегда участвуют странные частицы, являются

$$\Lambda \to p + \pi^-, \quad K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-.$$

Мы рассмотрим лептонные взаимодействия без участия странных частиц; в настоящее время нет ясной картины слабых взаимодействий с участием странных частиц, и мы не будем касаться этого вопроса. Проблема, с которой мы сталкиваемся при рассмотрении реакций (10.91а, б, в), состоит в получении на основе имеющихся экспериментальных данных структуры вершин взаимодействия в диаграммах, описывающих эти процессы.

Два основных принципа, на которые мы опирались при рассмотрении сильных взаимодействий, теряют здесь силу: четность и изоспин не сохраняются в слабых взаимодействиях.

§ 58. Бета-распад

Фундаментальный процесс (10.91а) ответствен за β-распад в ядрах. Рассмотрим распад свободного нейтрона. Элемент S-матрицы, который отвечает распаду (см. рис. 10.14), должен быть линеен по волновым функциям, описывающим начальный нейтрон и конечные частицы, т. е.

$$S_{fi}^{(e^-)} = -i \sum_{\alpha\beta\gamma\delta=1}^{4} \int d^4x_1 \ldots$$
$$\ldots d^4x_4 \psi_\alpha^{+(p)}(x_1)\,\psi_\beta^{(n)}(x_2)\,\psi_\gamma^{+(e)}(x_3)\,\psi_\delta^{(\nu)}(x_4) \times$$
$$\times F_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, \ldots, x_4). \quad (10.92)$$

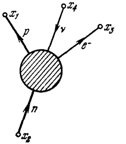


Рис. 10.14. β-распад.

Как обычно, эрмитово-сопряженные волновые функции ψ^+ отвечают испускаемым частицам (p, e^-) или налетающим античастицам (которые описываются решениями с отрицательной энергией), распространяющимся назад во времени, а ψ отвечают налетающим частицам (n) или испускаемым античастицам $(\bar{\nu})$. Поэтому, помимо β-распада, в (10.92) включены также все взаимодействия типа

$$\nu + n \rightarrow p + e^-.$$

В энергетически разрешенных ядерных переходах наблюдается обратный β-распад, или испускание позитрона

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu.$$

Этому процессу должен соответствовать матричный элемент, аналогичный (10.92):

$$S_{fi}^{(e^+)} = -i \sum_{\alpha\beta\gamma\delta=1}^{4} \int d^4x_1 \ldots d^4x_4 \psi_\alpha^{+(n)}(x_1)\,\psi_\beta^{(p)}(x_2)\,\psi_\gamma^{+(\nu)}(x_3)\,\psi_\delta^{(e)}(x_4) \times$$
$$\times \bar{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, \ldots, x_4). \quad (10.93)$$

Функции F и $\bar{F}$ в (10.92) и (10.93) должны определяться из эксперимента. Исходя из общих принципов теории, мы сделаем здесь единственное допущение, а именно

$$\bar{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2, x_3, x_4) = F^{*}_{\beta\alpha\delta\gamma}(x_2, x_1, x_4, x_3). \quad (10.94)$$

Это равенство обеспечивает выполнение принципа детального равновесия для слабых взаимодействий и означает, что без учета множителей, связанных с фазовым объемом, реакции

$$n \rightleftarrows p + e^- + \bar{\nu}, \quad \nu + n \rightleftarrows p + e^-$$

протекают с равной вероятностью справа налево и слева направо[1]). То, что должен выполняться принцип детального равновесия (10.94), следует из малости отвечающего за β-распад взаимодействия и унитарности S-матрицы. В отсутствие взаимодействия S-матрица сводится к единичной матрице δ_{fi}. Запишем S-матрицу в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} - iT_{fi}.$$

Тогда условие унитарности (8.31) примет вид

$$i\left(T_{fi} - T_{fi}^{+}\right) = \sum_n T_{fn}^{+} T_{ni}.$$

Для β-распада правая часть имеет второй порядок по константе слабого взаимодействия, а левая часть представляет собой разность двух величин первого порядка. В первом приближении членами второго порядка можно пренебречь. Это приводит к равенству (10.94), если учесть, что при $f \neq i$

$$S_{fi} = -iT_{fi}.$$

Нейтрино является безмассовой нейтральной дираковской частицей, и когда мы говорим, что в β-распаде нейтральным партнером электрона является антинейтрино, мы тем самым удовлетворяем твердо установленному на опыте закону сохранения лептонного заряда. Для реакции (10.91а) это просто вопрос определения; однако для π- и μ-распада сохранение лептонного заряда имеет четкий смысл. Наблюдаемые β-спектры указывают также на то, что спин нейтрино равен $1/2$. Позднее обнаружение распада $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}$ подтвердило этот вывод. Наконец, необходимо отметить, что отсутствие массы у нейтрино приводит к отличию в условии нормировки волновой функции нейтрино по сравнению с другими фермионами. Для решения в виде плоской волны с квантовыми числами (k, s) запишем

$$\psi^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_k (2\pi)^3}} u^{(\nu)}(k, s) e^{-ik\cdot x}; \tag{10.95}$$

здесь

$$u^{+(\nu)}(k, s) u^{(\nu)}(k, s) = 2E_k$$

и поэтому

$$\bar{u}^{(\nu)}(k, s) u^{(\nu)}(k, s) = 0.$$

[1]) В терминах теории поля это отвечает эрмитовости гамильтониана в теории возмущений.

Проекционными операторами для нейтрино являются

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{(+)}(k, s) = \sum_{s=1}^{2} u_\alpha(k, s)\bar{u}_\beta(k, s) = \hat{k},$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{(-)}(k, s) = \sum_{s=1}^{2} v_\alpha(k, s)\bar{v}_\beta(k, s) = -\hat{k}.$$

Удобно проводить нормировку, рассматривая нейтрино наравне с электроном как частицу с конечной массой, и нормировать волновую функцию согласно изложенному в гл. 3, а затем перейти к пределу $m_\nu \to 0$. Результат совпадает с (10.95).

После тридцати лет исследований функция F в (10.95) была в конце концов полностью определена при низких энергиях, т. е. для сравнительно больших относительных расстояний $x_i - x_j$ в координатном пространстве. Простейшая гипотеза относительно функции F состоит в том, что она обращается в нуль при больших относительных пространственно-временных расстояниях $x_i - x_j$. Действительно, если размер области, где F отлична от нуля, мал по сравнению с характерной длиной $\hbar/E_\beta c \sim 10^{-12}$ *см*, отвечающей энергии β-распада $E_\beta \sim 1 \div 10$ *Мэв*, то в первом приближении можно считать взаимодействие F точечным, т. е.

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2, x_3, x_4) \approx \\ \approx \mathcal{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta^{(4)}(x_1 - x_2)\,\delta^{(4)}(x_1 - x_3)\,\delta^{(4)}(x_1 - x_4), \quad (10.96)$$

где $\mathcal{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — постоянная матрица, связывающая спиноры друг с другом. Это приближение чрезвычайно хорошо согласуется со всеми имеющимися сейчас экспериментальными данными. Переходя с помощью фурье-преобразования от (10.96) к импульсному представлению, получаем

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta}(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv \\ \equiv \int d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_3\, d^4x_4 e^{i(k_1\cdot x_1 + k_2\cdot x_2 + k_3\cdot x_3 + k_4\cdot x_4)} F_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ = (2\pi)^4\,\delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)\,\mathcal{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (10.97)$$

Таким образом, взаимодействие представляет собой постоянную матрицу, умноженную на обычную δ-функцию, выражающую сохранение энергии-импульса в вершине взаимодействия. Этот результат следует сопоставить с тем, который был нами получен для нуклон-нуклонного рассеяния, обусловленного обменом π-мезонами. Тогда мы имели

$$F \sim \frac{1}{q^2 - \mu^2}, \quad (10.98)$$

что отвечает потенциалу с радиусом $\sim \hbar/\mu c$. Если бы массу π-мезона можно было сделать большой, то при малых q^2

картина стала бы аналогичной β-распаду, т. е. мы получили бы приближенно точечное взаимодействие четырех фермионов.

Если, наоборот, энергии частиц, участвующих в слабом взаимодействии, например в обратном β-распаде

$$\bar{\nu} + p \to n + e^{+},$$

возрастают, то можно ожидать, что взаимодействие станет нелокальным; возможно, что между системами $p - n$ и $e - \nu$ происходит обмен тяжелым бозоном W^{+}, как показано на рис. 10.15, либо нелокальность имеет более сложную природу [110].

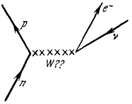


Рис. 10.15. Возможный обмен тяжелым $W^{\pm}$-бозоном при β-распаде.

Мы продолжим рассмотрение β-распада в рамках приближений (10.96) и (10.97). В области низких энергий можно пренебречь отдачей нуклона с точностью до поправок $\sim \mathbf{q}/M$ (где $\mathbf{q}$ — импульс отдачи протона), а волновые функции нейтрона и протона в (10.92) и (10.93) заменить на постоянные спиноры. После возведения в квадрат и суммирования по спинам для неполяризованных нейтронов и конечных частиц получаем

$$\frac{|S_{fi}|^2}{VT} \sim \frac{1}{(2E_e)(2E_{\bar{\nu}})} \sum_{A,B} \mathrm{Sp}\,(\hat{p}_e + m)\,\Gamma^A \hat{p}_{\bar{\nu}} \Gamma^B \times \\ \times (2\pi)^4 \delta^4 (p_e + p_{\bar{\nu}} + p_p - p_n), \qquad (10.99)$$

где p_i и E_i — 4-импульс и энергия частицы, $i = (e, \bar{\nu}, p, n)$. Величины Γ_A и Γ_B означают матрицы, структура которых определяется структурой матрицы $\mathcal{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. В системе покоя нейтрона эти матрицы постоянны, так как они зависят только от переменных нуклона. Поэтому после взятия следа в (10.99), который должен иметь следующий общий вид:

$$AE_{\bar{\nu}} + BE_eE_{\bar{\nu}} + CE_eE_{\bar{\nu}}\boldsymbol{\beta}_e \cdot \mathbf{n}_{\bar{\nu}},$$

где A, B и C являются константами, $\boldsymbol{\beta}_e \equiv \mathbf{p}_e/E_e$ и $\mathbf{n}_{\bar{\nu}} \equiv \mathbf{p}_{\bar{\nu}}/E_{\bar{\nu}}$, мы находим для вероятности перехода в заданное конечное состояние

$$\frac{|S_{fi}|^2}{VT} \sim \left(\frac{A}{E_e} + B + C\boldsymbol{\beta}_e \cdot \mathbf{n}_{\bar{\nu}}\right)(2\pi)^4 \delta^4 (p_e + p_{\bar{\nu}} + p_p - p_n). \qquad (10.100)$$

Теперь для нахождения спектра электронов необходимо умножить это выражение на фазовый объем $d^3p_e\, d^3p_{\bar{\nu}}\, dp_p$ конечного состояния и проинтегрировать по импульсам протона и нейтрино:

$$d\omega_e \sim d^3p_e \int d^3p_{\tilde{\nu}} \delta (M_n - M_p - E_e - E_{\tilde{\nu}}) \left(\frac{A}{E_e} + B + C\boldsymbol{\beta}_e \cdot \mathbf{n}_{\tilde{\nu}} \right) \sim$$
$$\sim p_e E_e (M_n - M_p - E_e)^3 \left(\frac{A}{E_e} + B \right) dE_e. \quad (10.101)$$

Таким образом, зависимость величины

$$\frac{1}{p_e E_e (M_n - M_p - E_e)^2} \frac{d\omega_e}{dE_e} \quad (10.102)$$

от энергии E_e должна даваться выражением $A/E_e + B$. Было обнаружено — не только в распаде свободного нейтрона, но и в широком классе так называемых «разрешенных» ядерных переходов, — что спектр электронов удовлетворяет этому закону[1]) и, более того, $A = 0$, т. е. величина (10.102) не зависит от энергии.

Принято изображать спектр электронов на графике Кюри, который представляет собой график зависимости величины

$$\left(\frac{1}{p_e E_e} \frac{d\omega_e}{dE_e} \right)^{1/2}$$

от энергии E_e. Изображаемая величина пропорциональна $(M_n - M_p - E_e)$, поэтому на графике Кюри ей соответствует прямая линия. Отсутствие в (10.100) члена, пропорционального A/E_e, объясняется конкретным видом взаимодействия, ответственного за β-распад; к этому вопросу мы еще вернемся. Член A/E_e принадлежит к так называемым «интерференционным членам Фирца». Последние явно отсутствуют во всех β-спектрах, включая спектры запрещенных β-переходов, матричные элементы которых пропорциональны скоростям нуклонов. Занятно, что спектр электронов (10.101) при $A = 0$ просто пропорционален фазовому объему $\left(E_{\tilde{\nu}}^2 p_e E_e \, dE_e \right)$ и имеет статистическую форму, как если бы вместо (10.100) матричный элемент был константой $S_{fi} \sim (2\pi)^4 \delta^4 (p_e + p_{\tilde{\nu}} + p_p - p_n)$.

Обратимся теперь к структуре матрицы $\mathcal{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в (10.97). Зафиксировав на время индексы γ и δ в (10.92), мы можем представить зависимость от индексов α и β в самом общем виде с помощью 16 независимых комбинаций матриц γ, введенных в гл. 2:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta\gamma\delta} = F_{\gamma\delta}^{(S)} 1_{\alpha\beta} + F_{\gamma\delta}^{(P)} \gamma_{\alpha\beta}^5 + \sum_{\tau=0}^{3} F_{\gamma\delta}^{(V)\,\tau} (\gamma_\tau)_{\alpha\beta} +$$
$$+ \sum_{\tau=0}^{3} F_{\gamma\delta}^{(A)\,\tau} (\gamma_5 \gamma_\tau)_{\alpha\beta} + \sum_{\lambda \neq \tau = 0}^{3} F_{\gamma\delta}^{(T)\,\lambda\tau} (\sigma_{\lambda\tau})_{\alpha\beta}.$$

[1]) *Необходимо учитывать кулоновские поправки* [111].

Согласно (2.38) матрицы 1, γ_5, γ_τ, $\gamma_5\gamma_\tau$ и $\sigma_{\lambda\tau}$ в обкладках из дираковских спиноров $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ образуют скаляр (S), псевдоскаляр (P), вектор (V) и тензор второго ранга (T) соответственно. Тогда из (10.92) и (10.96) ясно, что для ковариантности амплитуды относительно собственных преобразований Лоренца необходимо, чтобы $F^{(S)}$ и $F^{(P)}$ были линейными комбинациями матриц 1 и γ_5, $F^{(V)\tau}$ и $F^{(A)\tau}$ — линейными комбинациями матриц γ^τ, $\gamma^\tau\gamma_5$, а $F^{(T)\lambda\tau}$ — линейной комбинацией $\sigma^{\lambda\tau}$ и $\sigma^{\lambda\tau}\gamma_5$. В результате S-матрица принимает вид

$$S_{fi}^{(e^-)} = \frac{1}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{m_p m_e m_n}{2E_{\bar{\nu}}E_pE_nE_e}}\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_e+p_{\bar{\nu}}+p_p-p_n)\,\mathfrak{M},$$

где

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=S,\,P,\,A,\,T} C_i\left[\bar{u}_p(p_p)\,\Gamma_i u_n(p_n)\right]\left\{\bar{u}_e(p_e)\left[1+\alpha_i\gamma_5\right]\Gamma^i v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}})\right\} \tag{10.103}$$

и

$$\Gamma_i = (1,\ \gamma_5,\ \gamma_\mu,\ \gamma_5\gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu}),$$
$$\Gamma^i = (1,\ \gamma_5,\ \gamma^\mu,\ \gamma^5\gamma^\mu,\ \sigma^{\mu\nu}).$$

Элемент S-матрицы для обратного β-распада имеет такой же вид с точностью до замены констант C_i и α_i на комплексно-сопряженные[1]) в соответствии с (10.94) и замены спинорных индексов согласно

$$\bar{u}_p\ \cdots\ u_n \to \bar{u}_n\ \cdots\ u_p,$$
$$\bar{u}_e\ \cdots\ v_{\bar{\nu}} \to \bar{u}_\nu\ \cdots\ v_{\bar{e}}.$$

Если мы вновь пренебрежем зависимостью нуклонных спиноров от импульсов, тем самым ограничиваясь «разрешенными» переходами, выражение (10.103), записанное с помощью двухкомпонентных спиноров Паули, примет вид

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \approx (u_p^+u_n)\{&C_S\bar{u}_e(p_e)\left[1+\alpha_S\gamma_5\right]v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}}) + \\ &+ C_V\bar{u}_e(p_e)\left[1+\alpha_V\gamma_5\right]\gamma^0 v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}})\} + \\ &+ (u_p^+\sigma u_n)\{2C_T\bar{u}_e(p_e)\left[1+\alpha_T\gamma_5\right]\sigma v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}}) + \\ &\qquad + C_A\bar{u}_e(p_e)\left[1+\alpha_A\gamma_5\right]\gamma_5\gamma v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}})\}.\end{aligned} \tag{10.104}$$

[1]) Точнее говоря,

$$\alpha_i \to +\alpha_i^* \quad \text{для} \quad i=A,\ V$$
$$\alpha_i \to -\alpha_i^* \quad \text{для} \quad i=S,\ P,\ T.$$

Члены, содержащие константы C_S и C_V, вызывают разрешенные переходы (S, V) «типа Ферми» с $|\Delta S| = 0$, а два других члена (A, T) ответственны за переходы «типа Гамова — Теллера» с $|\Delta S| = 1$ для нуклонного состояния. Переходы типа Ферми можно отличить от переходов типа Гамова — Теллера в ядерном β-распаде, где уголовой момент начального и конечного состояний фиксирован; в распад свободного нейтрона дают вклад те и другие переходы.

Все члены в (10.104), пропорциональные $\alpha_i\gamma_5$, нарушают сохранение четности, и до 1956 г., когда появилась работа Ли и Янга, их исключали, чтобы не нарушать инвариантность S-матрицы относительно пространственной инверсии. Экспериментальное обнаружение несохранения четности в слабых распадах, последовавшее вслед за работой Ли и Янга [112], привело затем к полному определению всех коэффициентов α_i и C_i в ряде ключевых экспериментов [15, 17, 109].

Константы α_i в членах, нарушающих сохранение четности, определяются путем измерения продольной поляризации электрона. Один из методов нахождения этой поляризации состоит в измерении право-левой асимметрии при рассеянии β-распадного электрона на атоме. Мы определим поляризацию, как и в (7.95), согласно

$$P = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L},$$

где N_R есть число «правовинтовых» электронов, т. е. электронов с положительной спиральностью, $\langle\sigma\rangle \cdot \mathbf{n} = +1$, а N_L есть число «левовинтовых» электронов с $\langle\sigma\rangle \cdot \mathbf{n} = -1$. Как для переходов типа Ферми, так и для переходов типа Гамова — Теллера, и в ядрах, и в распаде свободного нейтрона поляризация электрона в пренебрежении отдачей нуклона и после интегрирования по углам нейтрино с хорошей точностью дается выражением

$$P = -\frac{|\mathbf{p}_e|}{E_e} = -|\boldsymbol{\beta}_e|. \tag{10.105}$$

В пределе $\beta_e \to 1$ испускаются только электроны с отрицательной спиральностью. В том же пределе спиновый проекционный оператор переходит, как и в (7.107), в $(1 - \gamma_5)/2$ и, таким образом, волновая функция левополяризованного электрона имеет вид

$$\psi^{\text{лев}} = \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi, \quad \bar{\psi}^{\text{лев}} = \bar{\psi}\frac{1 + \gamma_5}{2}, \tag{10.106}$$

Поэтому все константы α_i в (10.104) равны $+1$, ибо только в этом случае осуществляется правильный переход к релятивистскому пределу. *Поляризация при произвольном β_e находится* введением (3.19) и (7.94) в (10.99), вычислением следов и интеграла по угловым переменным нейтрино. Теперь выражение (10.104) упрощается и принимает вид

$$\mathfrak{M} = (u_p^+ u_n)\,\bar{u}_e(p_e)(1+\gamma_5)(C_S + C_V\gamma_0)\,v_{\bar\nu}(p_{\bar\nu}) + \\ + (u_p^+ \sigma u_n)\cdot \bar{u}_e(p_e)(1+\gamma_5)(2C_T\sigma + C_A\gamma)\,v_{\bar\nu}(p_{\bar\nu}), \quad (10.107)$$

где относительные величины постоянных C_S, C_V, C_T и C_A еще подлежат определению.

Возведение $\mathfrak{M}$ в квадрат и суммирование по спинам является чисто вычислительной операцией, которую рекомендуется проделать в качестве упражнения. Для неполяризованных нуклонов не возникает интерференции между переходами типа Ферми (S, V) и типа Гамова — Теллера (A, T). Более того, отсутствуют интерференционные члены между S и V, а также между A и T, так как эти варианты приводят к разным поляризациям нейтрино. Действительно, переставив факторы $(1+\gamma_5)$ направо, мы увидим, что S- и T-переходы приводят к испусканию антинейтрино с отрицательной спиральностью:

$$v_{\bar\nu}^{\text{лев}}(p_{\bar\nu}) = \frac{1+\gamma_5}{2}\, v_{\bar\nu}^{\text{лев}}(p_{\bar\nu}).$$

С другой стороны, при переходах типа V и A испускаются только антинейтрино с положительной спиральностью. Если нет интерференции между S и V или A и T, то отсутствуют также интерференционные члены Фирца, т. е. равен нулю коэффициент A в (10.100) и (10.101). В этот коэффициент дают вклад члены типа

$$m_e\, \mathrm{Sp}\, \Gamma_A \hat{p}_{\bar\nu} \Gamma_B.$$

Если Γ_A содержит четное число матриц γ, то в Γ_B их должно быть нечетное число, и наоборот; поэтому в член Фирца дают вклад только интерференционные члены, которые, как мы видели, обращаются в нуль. Если бы нейтрино испускались с поляризацией, меньшей, чем 100%, отсутствие членов Фирца означало бы, что взаимодействие содержит либо только члены типа S или V, либо только типа A или T. Однако в (10.107) входят все четыре члена, и поэтому для получения дополнительной информации о C_S, C_V, C_A и C_T необходимо указать эксперименты по измерению коэффициента C в (10.100), т. е. по измерению угловой корреляции между электроном и антинейтрино.

Рассмотрим, например, чистый переход типа Ферми, содержащий только вклады S и V. Суммирование по спиновым переменным электрона и антинейтрино дает угловое распределение испускаемого антинейтрино относительно электрона:

$$N_{\Phi}(\theta) \sim \mathrm{Sp}\,(\hat{p}_e + m)(1+\gamma_5)(C_S + \gamma_0 C_V)\,\hat{p}_{\bar{\nu}}(C_S^* + \gamma_0 C_V^*)(1-\gamma_5) = \\ = 8E_e E_{\bar{\nu}}\,[\,|C_S|^2(1-\beta_e\cos\theta) + |C_V|^2(1+\beta_e\cos\theta)], \quad (10.108)$$

где θ — угол между антинейтрино и электроном. Такое же распределение получается для обратного β-распада. Экспериментальное угловое распределение, найденное для почти чистого перехода типа Ферми в Ar^{35} путем измерения направления вылета позитрона относительно ядра отдачи, приближенно имеет вид $(1+\beta_e\cos\theta)$, что указывает на векторный характер перехода. Аналогичное вычисление для переходов типа Гамова — Теллера дает

$$N_{\Gamma\mathrm{T}}(\theta) \sim E_e E_{\bar{\nu}}\left[|C_A|^2\left(1 - \frac{1}{3}\beta_e\cos\theta\right) + 4\,|C_T|^2\left(1 + \frac{1}{3}\beta_e\cos\theta\right)\right]. \quad (10.109)$$

Измерения для чистого перехода этого типа в Ne^{23} вместе с другими данными по смешанным переходам указывает, что $|C_T/C_A| \ll 1$. Тогда в пределе $C_T/C_A = 0$ выражение (10.107) упрощается и принимает вид суммы двух членов

$$\mathfrak{M} \approx (u_p^+ u_n)\,\bar{u}_e(p_e)\,C_V\gamma^0(1-\gamma_5)\,v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}}) + \\ + (u_p^+ \sigma u_n)\cdot \bar{u}_e(p_e)(+C_A\boldsymbol{\gamma})(1-\gamma_5)\,v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}}). \quad (10.110)$$

Эта амплитуда отвечает испусканию антинейтрино с положительной спиральностью. Теперь осталось определить только амплитуды C_V и C_A и их относительную фазу. Величины C_V и C_A находятся из измерений вероятности распада нейтрона и чистого перехода типа Ферми в O^{14}. Фаза определяется из измерения углового распределения электрона относительно направления спина нейтрона при β-распаде поляризованных нейтронов; это распределение чувствительно к смеси $V - A$. Окончательный результат такой[1]:

$$\sqrt{2}\,C_V = (1{,}005 \pm 0{,}003)\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{M_p^2} \equiv G\ ^{2)},$$

$$C_A = (+\,1{,}250 \pm 0{,}009)\,C_V \equiv +\,\alpha C_V\ ^{3)}. \quad (10.111)$$

---

[1] Множитель $1/\sqrt{2}$ фигурирует по историческим причинам. Экспериментально определяется только относительная фаза C_V и C_A. Принято выбирать константу C_V действительной и положительной.

[2] Численное значение G взято из [113]. (*Прим. перев.*)

[3] См. [114]. Большинство числовых данных, приводимых далее в этой главе, взяты из данного источника. (*Прим. перев.*)

Вводя обозначения (10.111) в (10.110) и возвращаясь к релятивистской форме записи, получаем следующую инвариантную амплитуду β-распада:

$$\mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_p \gamma_\mu (1 - \alpha\gamma_5) u_n\right] \left[\bar{u}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}\right]. \quad (10.112)$$

Естественно было бы рассматривать $\mathfrak{M}$ как амплитуду в первом порядке по взаимодействию и учесть эффекты высших порядков, например такие, которым отвечают диаграммы на рис. 10.16. Однако мы не знаем, как вычислять эти амплитуды

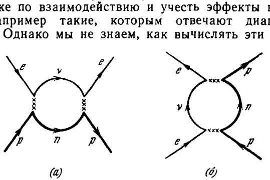


Рис. 10.16. Некоторые диаграммы высшего порядка для β-распада.

в предположении (10.96) о локальности взаимодействия. Замкнутые петли на таких диаграммах приводят к расходящимся выражениям, которые нельзя отделить и заключить в перенормировочные константы, как было сделано в гл. 8. Трудность возникает из-за отсутствия бозонных пропагаторов между нуклонными и лептонными вершинами, которые обеспечивают сходимость при больших импульсах. Хотя мы имеем дело со слабыми взаимодействиями, обладающими очень малой константой (10.111), вопрос о вкладе высших порядков не является чисто академическим, так как сечения, полученные из (10.112) для процессов рассеяния типа

$$\bar{\nu} + p \to n + e^+,$$

растут как квадрат энергии [115] и имеют порядок величины

$$G^2 E^2_{\text{ц. м}} \sim \left(\frac{E_{\text{ц. м}}}{300 M_p}\right)^4 \frac{1}{E^2_{\text{ц. м}}}. \quad (10.113)$$

Когда энергия возрастает до $E_{\text{ц. м}} \sim 300\, M_p \sim 300$ *Гэв*, слабые взаимодействия возрастают до масштабов сильных и эффекты нелокальности и вклады высших порядков начинают играть решающую роль.

§ 59. Теория двухкомпонентного нейтрино

Мы уже отмечали, что при β-распаде испускаются только антинейтрино с положительной спиральностью. Соответственно при обратном β-распаде испускаются нейтрино с отрицательной спиральностью, в чем нетрудно убедиться, если учесть, что амплитуда обратного β-распада получается из (10.112) по правилу (10.94). Поскольку нейтрино с положительной спиральностью и антинейтрино с отрицательной спиральностью отсутствуют как в β-распаде, так и во всех других слабых взаимодействиях, они представляют собой лишнюю степень свободы в уравнении Дирака для безмассовой частицы и мы можем попытаться от нее избавиться.

Уравнение Дирака для безмассовой частицы

$$i\frac{\partial \psi_\nu}{\partial t} = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi_\nu \tag{10.114}$$

не содержит матрицы β, а соотношениям антикоммутации (1.16) для трех матриц α_1, α_2, α_3

$$\{\alpha_i, \alpha_k\} = 2\delta_{ik}, \quad \alpha_i^2 = 1 \tag{10.115}$$

удовлетворяют матрицы Паули размерности 2×2. Таким образом,

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma}. \tag{10.116}$$

Напомним, что именно необходимость построить четвертую антикоммутирующую матрицу β привела к введению матриц размерности 4×4 в гл. 1.

Решение (10.114) и (10.116) в виде плоской волны с положительной энергией имеет вид

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}}\, u(p, s)\, e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}, \tag{10.117}$$

где $E = |\mathbf{p}|$, а спинор $u(p, s)$ удовлетворяет уравнению

$$Eu(p, s) = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}u(p, s). \tag{10.118}$$

Решением уравнения (10.118) в обычном представлении матриц Паули с осью z, направленной вдоль $\mathbf{p}$, является

$$u(p, +) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.119}$$

Оно описывает нейтрино с положительной спиральностью:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E}u(p, +) = +u(p, +).$$

Чтобы получить нейтрино с отрицательной спиральностью, которое наблюдается в природе, мы должны выбрать решение уравнения (10.115), в котором

$$\alpha = -\sigma, \tag{10.120}$$

вместо (10.116). В этом случае (10.118) заменяется на

$$Eu(p, -) = -\sigma \cdot \mathbf{p} u(p, -) \tag{10.121}$$

и мы имеем решение, отвечающее нейтрино с отрицательной спиральностью,

$$u(p, -) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10.122}$$

Для того чтобы лучше понять связь этих двухкомпонентных решений с уже хорошо нам знакомыми четырехкомпонентными электронными спинорами, мы вернемся к уравнению Дирака для частицы с массой m и выберем следующее представление матриц α и β:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.123}$$

которое отличается от (1.17) унитарным преобразованием

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_5\gamma_0).$$

Тогда, вводя обозначение

$$\psi = \begin{pmatrix} u(+) \\ u(-) \end{pmatrix},$$

мы можем записать уравнение Дирака (1.13) в виде

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t} u(+) &= -i\sigma \cdot \nabla u(+) - mu(-), \\ i\frac{\partial}{\partial t} u(-) &= +i\sigma \cdot \nabla u(-) - mu(+). \end{aligned} \tag{10.124}$$

В (10.124) верхние и нижние компоненты ψ перемешиваются только массовыми членами, поэтому в пределе $m \to 0$ возникают два несвязанных уравнения, соответствующие (10.114). В одном из них $\alpha = \sigma$, как в (10.116), а в другом $\alpha = -\sigma$, как в (10.120). В представлении (10.123)

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что решение

$$\psi(+) = \begin{pmatrix} u(+) \\ 0 \end{pmatrix}$$

при $m \to 0$ отвечает нейтрино с положительной спиральностью, так как

$$\gamma_5\psi(+) = +\psi(+).$$

Аналогично для

$$\psi(-)=\begin{pmatrix}0\\ u(-)\end{pmatrix}$$

имеем

$$\gamma_5\psi(-)=-\psi(-),$$

следовательно, решение $\psi(-)$ отвечает нейтрино с отрицательной спиральностью.

На возможность описания безмассовой дираковской частицы двухкомпонентным уравнением впервые указал Вейль [116] в 1929 г., однако эта идея не была серьезно воспринята, так как при переходе к двум компонентам исчезает матрица β и теряется симметрия относительно P-преобразования, задаваемого согласно (2.32) оператором $P=e^{i\varphi}\beta$.

После открытия несохранения четности в 1956 г. уравнение Вейля было воскрешено в работах Ландау, Ли и Янга и Салама [117, 118]. Они обратили внимание на то, что зарядовая четность C, которой соответствует оператор (5.5), (5.6), также не сохраняется, однако имеет место инвариантность относительно совокупности обеих операций CP, которую называют комбинированной инверсией.

Согласно (5.5) операция зарядового сопряжения состоит в замене $\psi(\mathbf{x}, t)$ на $\psi_c(\mathbf{x}, t)=C\beta\psi^*(\mathbf{x}, t)$, где матрица C удовлетворяет (5.4) и (5.6). В новом представлении этим условиям удовлетворяет матрица

$$C=-i\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & -\sigma_2\end{pmatrix}.$$

В случае двухкомпонентного нейтрино присутствие матрицы β в операторе зарядового сопряжения означает, что это преобразование уже не является операцией симметрии, однако комбинированное преобразование CP есть операция симметрии. Действительно, если $\psi(x)$ представляет собой решение (10.114), то решением оказывается и функция

$$\psi_{CP}(\mathbf{x}, t)=C\psi^*(-\mathbf{x}, t)=\mp i\sigma_2\psi^*(-\mathbf{x}, t), \qquad (10.125)$$

поскольку

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_x\right)\psi_{CP}(\mathbf{x}, t)=\mp i\sigma_2\left(i\frac{\partial}{\partial t}-i\boldsymbol{\alpha}^*\cdot\nabla_x\right)\psi^*(-\mathbf{x}, t)=$$
$$=\mp i\sigma_2\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial t}-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_{x'}\right)\psi(\mathbf{x}', t)\right]^*=0,$$

где $\mathbf{x}'=-\mathbf{x}$.

Волновая функция антинейтрино получается по аналогии с (5.7) и (5.8) для электронов. Возьмем решение с отрицательной энергией, проделаем над ним комплексное сопряжение и умножим на $i\sigma_2$. Например, решение с отрицательной энергией уравнения (10.114) с $\alpha = -\sigma$ для нейтрино с отрицательной спиральностью имеет вид ($E = +|\mathbf{p}|$)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E}}\, v(-p,\ -)\, e^{+i\,(Et+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})},$$

где

$$-Ev(-p,\ -) = -\sigma\cdot\mathbf{p}v(-p,\ -),$$
$$v(-p,\ -) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \qquad (10.126)$$

Согласно (10.125) волновая функция антинейтрино есть

$$\psi_{CP}(\mathbf{x}',\ t) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E}}\, e^{-i\,(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}')}. \qquad (10.127)$$

Она, очевидно, также является решением уравнения Вейля с отрицательной спиральностью. Таким образом, функция (10.127) действительно отвечает частице с отрицательной спиральностью, но в системе координат $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$, полученной пространственным отражением. Можно привести такую аналогию: правша кажется в зеркале левшой. Точно так же антинейтрино, обладающие отрицательной спиральностью в штрихованной системе, имеют в нештрихованной системе положительную спиральность.

§ 60. Распад μ-мезона

В распаде μ-мезона (мюона)

$$\mu^- \to e^- + \nu' + \nu$$

участвуют четыре фермиона, включая пару (e^-, $\bar{\nu}$). Такое сходство с β-распадом нейтрона позволяет предположить, что матричный элемент имеет такую же, как для β-распада, форму. По аналогии с амплитудой обратного β-распада амплитуда процесса

$$\mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu}'$$

находится из принципа детального равновесия. Вновь, как в (10.112), мы объединяем волновые функции пары (e^-, $\bar{\nu}$), считая, что имеется связь вида

$$\bar{u}_e(p)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,v_{\bar{\nu}}(\bar{k}) \qquad (10.128)$$

(кинематические обозначения указаны на рис. 10.17).

Такая связь означает, что образующиеся при распаде μ^- антинейтрино имеют положительную спиральность, а электроны полностью поляризованы против направления своего движения (позитроны от распада μ^+ полностью поляризованы по направлению движения). Поляризация нейтрино экспериментально не исследовалась, но опыты показали, что, как и предсказывает (10.128), электроны полностью поляризованы против направления своего движения [119, 120].

Элемент S-матрицы для μ-распада принимает вид

$$S_{fi} = \frac{-i}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{m_\mu}{E_P} \frac{m_e}{E_p} \frac{1}{2E_k} \frac{1}{2E_{\bar{k}}}} (2\pi)^4 \delta^4 (P - p - k - \bar{k}) \mathfrak{M},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{G} [\bar{u}_{\nu'}(k) \gamma^\mu (1 - \lambda\gamma_5) u_\mu (P)] [\bar{u}_e (p) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}} (\bar{k})]. \quad (10.129)$$

Параметр λ, определяющий поляризацию ν', и константа связи $\tilde{G}$ должны быть найдены из наблюдаемого спектра электронов и вероятности распада.

Вероятность распада μ^- для случая неполяризованных частиц получается из (10.129) путем умножения $|S_{fi}|^2$ на фазовый объем конечных частиц $d^3p\, d^3k\, d^3\bar{k}$, введения проекционных операторов для суммирования по спинам, деления на 2, что соответствует усреднению по спинам μ^-, деления на $VT = (2\pi)^4\delta^4(0)$ с целью получить вероятность перехода, нормированную на единичный объем, и, наконец, деления на плотность μ^-, равную $1/(2\pi)^3$. В результате для вероятности перехода имеем

$$d\omega = \frac{1}{2(2\pi)^5} \frac{1}{2E_P} \int \frac{d^3p}{2E_p} \frac{d^3k}{2E_k} \frac{d^3\bar{k}}{2E_{\bar{k}}} \times$$
$$\times \delta^4 (P - p - k - \bar{k}) \sum_{\text{spins}} |\mathfrak{M}|^2,$$

где

$$\sum_{\text{spins}} |\mathfrak{M}|^2 = \frac{\tilde{G}^2}{2} \operatorname{Sp} [\gamma^\mu (1 - \lambda\gamma_5) \times$$
$$\times (\hat{P} + m_\mu) \gamma^\nu (1 - \lambda^* \gamma_5) \hat{k}] \times$$
$$\times \operatorname{Sp} [(\hat{p} + m_e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \hat{\bar{k}} \gamma_\nu (1 - \gamma_5)]. \quad (10.130)$$

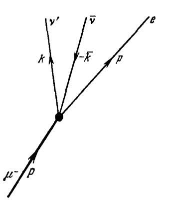


Рис. 10.17. μ-распад.

Из (10.130) следует, что в выражении для полной проинтегрированной вероятности распада все, что стоит справа от $(2E_P)^{-1}$, лоренц-инвариантно. Таким образом, величина, обратная вероятности распада, пропорциональна энергии E_P в соответствии с требованием теории относительности. В системе покоя мюона эта величина есть его время жизни.

Вычисляя следы, получаем

$$\sum_{\text{spins}} |\mathfrak{M}|^2 = 32\tilde{G}^2(1 + |\lambda|^2)(k \cdot pP \cdot \bar{k} + k \cdot \bar{k}p \cdot P) + \\ + \tilde{G}^2(\lambda + \lambda^*)\,\mathrm{Sp}\,(\hat{k}\gamma^\mu \hat{P}\gamma^\nu\gamma_5)\,\mathrm{Sp}\,(\hat{p}\gamma_\mu\hat{\bar{k}}\gamma_\nu\gamma_5). \quad (10.131)$$

Произведение двух последних следов есть скаляр, антисимметричный по k и P, по $\bar{k}$ и p и линейный по всем четырем импульсам. Можно записать его в виде

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{k}\gamma^\mu\hat{P}\gamma^\nu\gamma_5)\,\mathrm{Sp}\,(\hat{p}\gamma_\mu\hat{\bar{k}}\gamma_\nu\gamma_5) = a(k \cdot \bar{k}p \cdot P - k \cdot pP \cdot \bar{k}). \quad (10.132)$$

Для определения постоянной a зададим на время векторы k, $\bar{k}$, p, P в удобной для вычисления форме, но с условием, чтобы выражение (10.132) не обращалось в нуль. Например, при $k_\mu = \bar{k}_\mu = (1, 0, 0, 0)$ и $P_\mu = p_\mu = (0, 1, 0, 0)$ выражение (10.132) принимает вид

$$-a = \mathrm{Sp}\,(\gamma_0\gamma^\mu\gamma_1\gamma^\nu\gamma_5)\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_1\gamma_\mu\gamma_0\gamma_\nu\gamma_5).$$

При суммировании по индексам μ и ν дают вклад только две комбинации: $\mu = 2$, $\nu = 3$ и $\mu = 3$, $\nu = 2$. Таким образом,

$$-a = 2\mathrm{Sp}\,(\gamma_0\gamma_2\gamma_1\gamma_3\gamma_5)\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_1\gamma_2\gamma_0\gamma_3\gamma_5) = +32.$$

Тогда для (10.131) имеем

$$\sum_{\text{spins}} |\mathfrak{M}|^2 = 32\tilde{G}^2[|1 - \lambda|^2 k \cdot \bar{k}p \cdot P + |1 + \lambda|^2 k \cdot p\bar{k} \cdot P]. \quad (10.133)$$

Далее проинтегрируем по импульсам ненаблюдаемых нейтрино в (10.130). Поскольку $|\mathfrak{M}|^2$ линеен по k и $\bar{k}$, мы должны вычислить интеграл

$$I^{\alpha\beta} \equiv \int \frac{d^3k}{2E_k}\frac{d^3\bar{k}}{2E_{\bar{k}}}\,k^\alpha\bar{k}^\beta\delta^4(Q - k - \bar{k}), \quad (10.134)$$

где $Q \equiv P - p$. Этот интеграл преобразуется как лоренцев тензор второго ранга, и его удобнее всего вычислить в системе центра масс двух нейтрино, где Q является чистым времениподобным вектором. В данной системе после несложных вычислений находим

$$I_{(0)}^{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24}Q_0^2[g^{\alpha\beta} + 2g^{\alpha 0}g^{\beta 0}].$$

Поскольку (10.134) является тензором второго ранга, мы можем в любой лоренцевой системе записать ответ в виде

$$I^{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24}[g^{\alpha\beta}Q^2 + 2Q^\alpha Q^\beta]. \quad (10.135)$$

Объединяя (10.130), (10.133) и (10.135), получим

$$d\omega = \frac{\tilde{G}^2}{192\pi^4} \frac{p\, dE_p\, d\Omega_p}{E_p} \{ |1-\lambda|^2 6p \cdot P(m_\mu^2 + m_e^2 - 2p \cdot P) + \\ + |1+\lambda|^2 [-4(p \cdot P)^2 + 3p \cdot P(m_\mu^2 + m_e^2) - 2m_\mu^2 m_e^2] \}.$$

Интегрируя по углам вылета электрона и пренебрегая его массой покоя, т. е. полагая $m_e/E_p \to 0$, имеем следующее распределение по энергии электрона в системе покоя μ^-:

$$\left(\frac{d\omega}{dE_p}\right)^0 = \frac{\tilde{G}^2 m_\mu^2 E_p^2}{48\pi^3} \left[|1-\lambda|^2 6\left(1 - \frac{2E_p}{m_\mu}\right) + |1+\lambda|^2 \left(3 - \frac{4E_p}{m_\mu}\right) \right]. \tag{10.136}$$

Наблюдаемое распределение с хорошей точностью согласуется со значением $\lambda = +1$, т. е. нейтрино, фигурирующее в (10.129) в паре с μ^-, также имеет отрицательную спиральность[1]). Полагая $\lambda = 1$ в (10.136) и интегрируя по всем энергиям электрона $0 < E_p \leqslant {}^1/_2 m_\mu$, получаем полную вероятность распада μ-мезона

$$\omega^0 = \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{\tilde{G}^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \tag{10.137}$$

Значение константы $\tilde{G}$, найденное из измеренного времени жизни, равного

$$\tau_\mu = (2{,}197134 \pm 0{,}000077) \cdot 10^{-6} \text{ сек},$$

с точностью до 2% совпадает со значением векторной константы связи $G = \sqrt{2}\, C_V$ для ядерного β-распада (10.111) (см. [122, 123]).

Мы получили очень сильное указание на универсальность слабого взаимодействия между фермионами. Равенство констант есть дополнительный аргумент в пользу правильности принятого нами описания взаимодействия. Теперь мы обратимся к другим процессам, в которых участвуют лептонные пары (e^-, ν) или (μ^-, ν'), и проверим, относится ли связь между лептонами в этих процессах к $(V-A)$-типу (10.128).

§ 61. Распад π-мезона

При построении элемента S-матрицы для распада π-мезона (10.91) мы можем снова принять за исходный пункт $(V-A)$-связь (10.128), которая прекрасно описывает β-распад и распад

[1]) Энергетическая зависимость (10.136) при $\lambda = +1$ отвечает параметру Мишеля $\rho = 3/4$ (см. [121]).

мюона. В пользу этого предположения свидетельствуют два экспериментальных наблюдения. Во-первых, обнаружено, что μ^- в распаде $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}'$ продольно-поляризован в направлении своего движения. Тогда антинейтрино также должно быть поляризовано в направлении своего движения, т. е. иметь положительную спиральность, так как спин π^- равен нулю. В системе покоя π^--мезона частицы μ^- и $\bar{\nu}'$ испускаются с равными и противоположно направленными импульсами и должны быть одинаково продольно-поляризованы (либо обе по направлению своего движения, либо обе против), поскольку только в этом случае суммарная проекция их углового момента на направление движения будет равна нулю. Вывод о том, что антинейтрино имеет положительную спиральность, согласуется с (10.128).

Второе экспериментальное наблюдение, свидетельствующее в пользу (10.128), — это очень малое отношение вероятностей распада

$$R\left(\frac{\pi \to e + \nu}{\pi \to \mu + \nu'}\right) = 1{,}26 \cdot 10^{-4}. \tag{10.138}$$

Сильное подавление испускания электрона предсказывается (10.128) благодаря фактору $(1 - \gamma_5)$, который приводит к полностью поляризованным нейтрино с отрицательной спиральностью и антинейтрино с положительной. Переставляя этот фактор налево, получаем $\bar{u}(p)(1 + \gamma_5)$, что в пределе $v_e/c \to 1$ соответствует испусканию электронов, продольно-поляризованных только против направления движения (и позитронов, поляризованных по направлению движения).

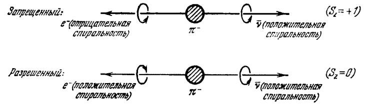


Рис. 10.18. Сохранение спина в распаде π-мезона, приводящее к тому, что как e^-, так и $\bar{\nu}$ имеют положительную спиральность.

Однако, как мы уже отмечали и как показано на рис. 10.18, в распаде π^- антинейтрино с положительной спиральностью сопровождается электроном, продольно-поляризованным по направлению своего движения. Поэтому получаемая из (10.128) вероятность распада содержит фактор подавления, равный

$$1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2 \approx \left(\frac{2m_e}{\mu}\right)^2,$$

где μ — масса пиона. Он соответствует вероятности испускания электрона, поляризованного по направлению движения. Более тяжелый μ-мезон, испускаемый с энергией

$$E_\mu = \frac{\mu^2 + m_\mu^2}{2\mu} = 1{,}04 m_\mu,$$

является нерелятивистским; его спиновый проекционный оператор существенно отличается от $(1 \pm \gamma_5)$, и заметного подавления не возникает.

Итак, мы примем (10.128) в качестве лептонного члена в матричном элементе для распада пиона и будем искать 4-вектор или аксиальный вектор, на который должен быть умножен лептонный член, чтобы получить инвариантную амплитуду перехода.

Поскольку спин π-мезона равен нулю, этот вектор должен быть построен из двух независимых 4-векторов, характеризующих распад, 4-импульса π-мезона P_μ и 4-импульса нейтрино $\bar{k}_\mu$, изображенных на рис. 10.19. Однако $\bar{k}_\mu$ не дает вклада, так как $\hat{\bar{k}} v_{\bar\nu}(\bar{k}) = 0$. Тем самым структура матричного элемента для распада π-мезона определяется однозначно; он равен

$$S_{fi}^{(\pi)} = \frac{-i}{(2\pi)^{9/2}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{2E_P}\right)\left(\frac{m_e}{E_p}\right)\left(\frac{1}{2E_{\bar{k}}}\right)} \frac{Ga}{\sqrt{2}} iP^\mu \times [\bar{u}(p)\gamma_\mu (1-\gamma_5) v_{\bar\nu}(\bar{k})](2\pi)^4 \delta^4 (P - p - \bar{k}). \tag{10.139}$$

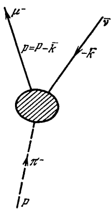


Рис. 10.19. Распад π-мезона.

Постоянная G есть константа β-распада (10.111), а коэффициент a, характеризующий полную вероятность распада, может быть разным для распада μ^- и e^-.

Повторяя выкладки, близкие к (10.130)—(10.137) (но более простые), находим для вероятности распада

$$\frac{1}{\tau_\pi} = \frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^6}\left(\frac{1}{2\mu}\right)\frac{G^2|a|^2}{2} 8 \int \frac{d^3\bar{k}}{2E_{\bar{k}}} \frac{d^3p}{2E_p} [2p\cdot P \bar{k}\cdot P - \bar{k}\cdot p P^2] \times \delta^4 (P - \bar{k} - p) = \frac{G^2|a|^2}{8\pi} \mu^3 \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \left(1 - \frac{m^2}{\mu^2}\right)^2, \tag{10.140}$$

где m — масса испускаемого электрона или мюона.

Если постоянная a одна и та же для электронного и мюонного каналов распада, то из (10.140) получаем следующее отношение вероятностей:

$$R\left(\frac{\pi\to e+\nu}{\pi\to\mu+\nu'}\right)=\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\frac{(\mu^2-m_e^2)^2}{(\mu^2-m_\mu^2)^2}=1{,}3\cdot 10^{-4},$$

что находится в хорошем согласии с экспериментально наблюдаемым значением (10.138). Это говорит в пользу связи (10.128), которая является универсальной для всех лептонных распадов. Если бы не было строгого правила отбора, налагаемого $(V-A)$-связью, согласно которому нейтрино имеют отрицательную спиральность, а антинейтрино — положительную, отношение вероятностей не было бы таким чрезвычайно малым, а было бы близко к значению, даваемому фазовым объемом

$$\frac{(\mu^2-m_e^2)^2}{(\mu^2-m_\mu^2)^2}\approx 5{,}5.$$

По экспериментально измеренному времени жизни π-мезона, равному $\tau=(2{,}6030\pm 0{,}0023)\cdot 10^{-8}$ *сек*, находим коэффициент в (10.140):

$$|a|\approx 0{,}92\ \mu. \tag{10.141}$$

Предположение об универсальности связи (10.128) для всех лептонных распадов позволяет определить поляризацию μ-мезона в распаде пиона. Зная ее, можно однозначно предсказать параметр асимметрии в распаде μ-мезона, который характеризует корреляцию между направлением вылета электрона и направлением спина μ-мезона в последовательном распаде

$$\begin{array}{l}\pi^-\to\mu^-+\bar\nu'\\ \qquad\ \ \lfloor\!\!\to e^-+\bar\nu+\nu'.\end{array}$$

Для определения асимметрии вычислим сначала поляризацию μ-мезона, испускаемого в заданный элемент телесного угла, а затем найдем спектр электронов от распада этих μ-мезонов.

Чтобы найти поляризацию μ-мезона в распаде пиона, вернемся к (10.139) и вычислим вероятность распада на мюон с заданной поляризацией s. Введем, как в (7.89) и (7.90), спиновый проекционный оператор $(1+\gamma_5\hat{s})/2$ и воспользуемся техникой вычисления следов. Тогда вместо (10.140) получим

$$d\omega_{\pi,s} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{2E_P}\frac{G^2|a|^2}{2}\int\frac{d^3\bar{k}}{2E_{\bar{k}}}\frac{d^3p}{2E_p}\times$$

$$\times 2\,\mathrm{Sp}\left[(\hat{p}+m_\mu)\left(\frac{1+\gamma_5\hat{s}}{2}\right)\hat{P}(1-\gamma_5)\hat{\bar{k}}\hat{P}\right]\delta^4(P-p-\bar{k}) =$$

$$= \frac{G^2|a|^2}{4\pi^2}\left(\frac{\mu}{E_P}\right)\mu^3\left(\frac{m_\mu}{\mu}\right)^2\int\frac{d^3p}{2E_p}\,\delta[(P-p)^2]\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m_\mu^2}{\mu^2}\right)+\frac{m_\mu s\cdot P}{\mu^2}\right\}, \qquad (10.142)$$

где P и p представляют собой 4-импульсы пиона и мюона соответственно. Вероятность распада максимальна для μ^- с положительной спиральностью, т. е. согласно (7.94) при

$$s_R\cdot P = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_\mu}\left(1-\frac{m_\mu^2}{\mu^2}\right).$$

Вероятность обращается в нуль, если μ-мезон имеет отрицательную спиральность, $s_L = -s_R$.

Для получения вероятности распада μ-мезона, обладающего заданной поляризацией s, мы возвращаемся к (10.129) и повторяем вычисления, подставляя $\lambda = +1$ и пренебрегая массой покоя электрона, т. е. полагая $m_e/E_p \to 0$. Спиновый проекционный оператор $(1+\gamma_5\hat{s})/2$ вновь позволяет свести суммирование по спинам к вычислению следов:

$$\sum_{\substack{\text{electron}\\ \text{spin}}}|\mathfrak{M}|^2 = \frac{\tilde{G}^2}{2}\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^\mu(1-\gamma_5)\left(\frac{1+\gamma_5\hat{s}}{2}\right)(\hat{P}+m_\mu)\gamma^\nu(1-\gamma_5)\hat{k}\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{Sp}\,[\hat{p}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\hat{\bar{k}}\gamma_\nu(1-\gamma_5)] = 64\tilde{G}^2 k\cdot p\bar{k}\cdot(P-m_\mu s).$$

Интегрирование по переменным ненаблюдаемого нейтрино производится, как в (10.135), и дает

$$d\omega_s = \frac{\tilde{G}^2}{48\pi^4}\frac{p\,dE_p\,d\Omega_p}{E_p}\times$$

$$\times\{-4(p\cdot P)^2+3m_\mu^2(p\cdot P)-m_\mu s\cdot p\,[m_\mu^2-4(p\cdot P)]\}.$$

В системе покоя μ-мезона имеем

$$d\omega_s^0 = \frac{\tilde{G}^2}{48\pi^4}m_\mu^2E_p^2\,dE_p\,d\Omega\left[\left(3-4\frac{E_p}{m_\mu}\right)+\frac{s\cdot p}{E_p}\left(4\frac{E_p}{m_\mu}-1\right)\right].$$

Согласно (10.142) μ^--мезон от распада пиона имеет положительную спиральность. Поэтому из (7.94) следует

$$\left\langle\frac{s\cdot p}{E_p}\right\rangle = -\mathbf{s}^e\cdot\mathbf{n} = -\cos\theta,$$

где θ — угол между направлением спина μ-мезона и направлением вылета электрона. Отсюда получаем

$$\langle d\omega^0\rangle = \frac{\tilde{G}^2}{24\pi^3} m_\mu^2 E_p^2\, dE_p\, d(\cos\theta)\left[3 - 4\frac{E_p}{m_\mu}\right](1 - \alpha\cos\theta),$$

где

$$\alpha \equiv \frac{4E_p - m_\mu}{3m_\mu - 4E_p}$$

представляет собой параметр асимметрии, значение которого совпадает с измеряемым на опыте [15—17, 109].

§ 62. Два типа нейтрино

Все рассмотренные нами лептонные взаимодействия характеризовались одним и тем же типом $(V - A)$-связи (10.128) в матричном элементе для лептонов. Это значит, что в слабых взаимодействиях μ^- и e^- переходят в нейтрино с отрицательной спиральностью. Природа, проявив скупость в том, что для устранения лишней степени свободы нейтрино позволила четности не сохраняться, оказалась необъяснимо щедра, допустив существование двух типов нейтрино, ν и ν', очень похожих и в то же время совсем разных. Нейтрино ν, связанное в вершине с электронной линией, имеет отрицательную спиральность и нулевую (либо очень малую) массу, так же как нейтрино ν', связанное с μ. Тем не менее они различны [1]).

Первое указание на то, что имеются два типа нейтрино, было получено из сравнения не слишком надежной теоретической оценки вероятности радиационного распада по каналу

$$\mu^- \to e^- + \gamma$$

с ее экспериментальным значением, которое дается отношением

$$\frac{R(\mu^- \to e^- + \gamma)}{R(\mu^- \to e^- + \bar{\nu} + \nu')} < 2{,}2 \cdot 10^{-8}.$$

Рассматриваемый процесс может идти в первом порядке теории возмущений по слабому взаимодействию, только если последнее обусловлено обменом промежуточным заряженным векторным мезоном. Приняв эту гипотезу, можно произвести расчет вероятности, рассмотрев диаграммы, изображенные на рис. 10.20.

Хотя возникающие интегралы расходятся и результаты расчета нельзя поэтому принимать буквально, трудно получить для приведенного выше отношения значение меньше, чем

---

[1]) В лучшем случае они могут оказаться двумя разными парами компонент четырехкомпонентного нейтринного спинора.

10^{-4}—10^{-5}. Однако эти диаграммы, так же как и все другие, обращаются в нуль [124], если нейтрино ν', соответствующее μ^-, отличается от нейтрино ν, отвечающего e^-.

Более надежный опыт для решения вопроса о существовании двух типов нейтрино был предложен Понтекорво и Шварцем [115]. Идея состоит в том, чтобы с помощью пучка ν' от распада пионов вызвать реакции типа

$$\nu' + \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N} + \mu \text{ или } e.$$

Рождение μ в этой реакции было экспериментально обнаружено, в то время как ни одного события с испусканием e не было

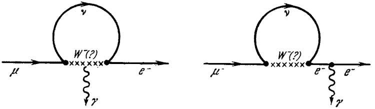


Рис. 10.20. Распад $\mu \rightarrow e + \gamma$, который возможен, если нейтрино ν и ν' тождественны.

найдено. Это говорит о существовании двух типов нейтрино. Тем самым к вопросу «Чем, кроме массы покоя, отличаются μ и e и зачем природе понадобились два заряженных лептона?», ответ на который никому не известен, теперь можно добавить еще один вопрос: «Зачем нужны два типа нейтрино?».

§ 63. Гипотеза о сохраняющемся векторном токе

Распады π- и μ-мезонов, так же как ядерный β-распад, указывают, что лептонные пары (e, ν) и (μ, ν') связаны в матричных элементах распада одной и той же связью типа $(V—A)$. Более того, из сравнения (10.112) и (10.129) с $\alpha = 1{,}25$, $\lambda = 1{,}00$ и $\bar{G} \approx G$ можно сделать вывод о большом сходстве между нуклонной и лептонной связями.

Естественно было бы ожидать, что облако сильно взаимодействующих π-мезонов, которым, в отличие от лептонов, окружены физические нуклоны, изменит векторную и аксиально-векторную константы связи, введенные для «голых» нуклонов в отсутствие сильного взаимодействия. Поэтому поразительным представляется тот факт, что векторные константы для β-распада и μ-распада совпадают с точностью до 2%. Даже константа $\alpha = 1{,}25$, которая дает отношение аксиальных частей взаимодействия для нуклонов и лептонов, оказывается достаточно близкой к единице, чтобы, основываясь на этой близости, строить интересные предположения.

Исследование электромагнитных взаимодействий электронов в гл. 8 и протонов в § 56 дает важный ключ к пониманию равенства векторного тока взаимодействия нуклонов и лептонов. Равенства (8.50) и (8.57) показывают, что вершинная функция электрона за счет радиационных поправок перенормируется фактором Z_1^{-1}. Согласно (8.46) и (8.57) дополнительный фактор Z_2 появляется также в элементах S-матрицы благодаря перенормировке волновой функции электрона. В низшем порядке по α было установлено, что $Z_1 = Z_2$ (см. (8.54)) и, следовательно, эти эффекты взаимно компенсируются; было также указано, что равенство $Z_1 = Z_2$ справедливо во всех порядках и является следствием тождества Уорда (8.51) [50].

Такое же положение имеется в электромагнитном взаимодействии протонов. Мезонные поправки, которым соответствует рис. 10.13 и формула (10.86), перенормируют электромагнитную вершину протона фактором (бесконечным в теории возмущений), аналогичным Z_1, причем он вновь компенсируется обусловленной мезонами перенормировкой протонных волновых функций. Это утверждение можно проверить с точностью до второго порядка по мезон-нуклонному взаимодействию, показав, что равенство (8.51) справедливо с учетом мезон-нуклонного взаимодействия.

Из равенства перенормировочных постоянных следует очень важный вывод: физические, наблюдаемые заряды электрона и протона равны друг другу, если равны их «голые», неперенормированные заряды, так как изменение фотонного пропагатора за счет поляризации вакуума одинаково сказывается на электроне и протоне. Это свойство уже подразумевалось ранее при рассмотрении электромагнитной структуры протона, когда величина $F_1^{(p)}(0)$ была положена равной 1 в (10.8).

Форма матричного элемента β-распада для векторной части взаимодействия

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\,\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n = \frac{G}{\sqrt{2}}\,\bar{\Psi}\gamma_\mu \tau_+ \Psi, \tag{10.143}$$

где

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2),$$

имеет большое сходство с электромагнитной вершиной протона. Это сходство становится еще более очевидным благодаря тому, что мезонные поправки не влияют на коэффициент при γ_μ для нулевого переданного импульса. Основное отличие состоит в том, что при β-переходе заряд меняется на единицу. Герштейн и Зельдович [125] и позже Фейнман и Гелл-Манн [122] предположили, что векторный «ток» в β-распаде может быть получен из электромагнитного тока путем изотопического поворота. Последний можно производить благодаря зарядовой независимости сильных взаимодействий.

Вспоминая, что согласно (10.89) электромагнитный ток нуклонов может быть записан в виде суммы изоскаляра и изовектора, правило Фейнмана — Гелл-Манна можно сформулировать следующим образом: векторный ток β-распада получается из изовекторной части электромагнитного тока j_μ^3 заменой

$$j_\mu^3 \to j_\mu^+ = \frac{G}{e\sqrt{2}}\left(j_\mu^1 + ij_\mu^2\right).$$

Это правило известно как гипотеза о сохраняющемся векторном токе. В отсутствие радиационных поправок он в точности соответствует взаимодействию (10.143). С учетом радиационных поправок векторная часть матричного элемента для β-распада получается непосредственно из (10.89):

$$j_\mu^+ = 2\frac{G}{\sqrt{2}}\,\bar{\Psi}(p')\,\tau_+\left[\gamma_\mu F_1^{(v)}(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2M}F_2^{(v)}(q^2)\right]\Psi(p). \quad (10.144)$$

Поскольку из электрон-протонного рассеяния известно, что в области $-q^2 \ll \mu^2$ форм-факторы приблизительно постоянны, они могут быть заменены своими значениями в точке $q^2 = 0$. Тогда формула (10.144) принимает вид

$$j_\mu^+ = \frac{G}{\sqrt{2}}\,\bar{u}_p(p')\left[\gamma_\mu + \frac{3{,}70\,i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2M}\right]u_n(p). \quad (10.145)$$

Мы видим, что по своему построению этот ток сохраняется, т. е.

$$(p' - p)^\mu\, j_\mu^+(q) = 0.$$

Помимо того, что константа при j_μ в (10.145) не перенормируется, другим экспериментально проверяемым следствием гипотезы о сохранении векторного тока является наличие в этой формуле второго члена, названного «слабым магнетизмом» [126] К сожалению, он имеет тот же порядок величины, что и поправки первого порядка на отдачу нуклона при β-распаде, и поэтому его трудно наблюдать на опыте. Однако слабый магнетизм был тем не менее обнаружен в блестящем эксперименте [127] по изучению β-переходов ядер B^{12} и N^{12} в основное состояние ядра C^{12}.

Согласно гипотезе о сохранении векторного тока можно получить правила диаграммной техники для слабых взаимодействий из фейнмановских правил для электродинамики. Во-первых, имеется полное соответствие между диаграммами для β-распада и электромагнитных взаимодействий. Например, электромагнитная структура описывается диаграммами на рис. 10.21 вместо диаграмм на рис. 10.13.

В диаграммах на рис. 10.21, *а* и 10.21, *в* вместо $e(1+\tau_3)/2$ фигурирует фактор $(G/\sqrt{2})\tau_+$. Диаграмма на рис. 10.21, *б* соответствует «слабому пионному току», который вновь получается

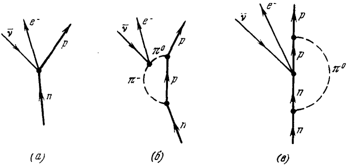


Рис. 10.21. Векторная часть вершины слабого взаимодействия согласно гипотезе о сохранении векторного тока.

из пионного электромагнитного тока вращением в изотопическом пространстве. Пионную электромагнитную вершину можно найти, взяв ток в (10.37) в качестве матричного элемента перехода; тогда вершина имеет в импульсном представлении следующий вид:

$$j_\mu^3 = -ie\left(\boldsymbol{\Phi}^{e'} \times \boldsymbol{\Phi}^{e}\right)_3 (p'_\mu + p_\mu), \qquad (10.146)$$

где $\boldsymbol{\Phi}^e$ и $\boldsymbol{\Phi}^{e'}$, p и p' представляют собой изотопические волновые функции и импульсы начального и конечного мезонов.

Очевидное различие на коэффициент 2 между (10.146) и (10.37) обусловлено тем, что в (10.37) имеются два способа сопоставления волновых функций $\boldsymbol{\Phi}(x)$ начальным и конечным частицам. Для получения вершины β-распада мы вновь заменим третью компоненту на «повышающую» компоненту и e — на $G/\sqrt{2}$; в результате получим следующее выражение для пионной вершины на рис. 10.21, *б*:

$$j_\mu^+ = -\frac{iG}{\sqrt{2}}\left[\left(\boldsymbol{\Phi}^{e'} \times \boldsymbol{\Phi}^{e}\right)_1 + i\left(\boldsymbol{\Phi}^{e'} \times \boldsymbol{\Phi}^{e}\right)_2\right]\left[p'_\mu + p_\mu\right]. \qquad (10.147)$$

Наличие во взаимодействии такого члена приводит к другому экспериментально наблюдаемому следствию, а именно существованию распада [15, 17, 109, 122, 125]

$$\pi^+ \to \pi^0 + e^- + \bar{\nu}. \tag{10.148}$$

Матричный элемент с учетом сильных взаимодействий снова связан с пионным электромагнитным током (10.85) посредством изотопического поворота. Поэтому единственное изменение, вносимое в (10.147) мезонными радиационными поправками, состоит в появлении пионного форм-фактора $F_\pi(q^2)$, который при малых q^2, участвующих в реакции (10.148), может быть положен равным 1. Тогда можно вычислить вероятность рассматриваемого распада, исходя из вершины (10.147). Расчет дает следующее значение для отношения этой вероятности к вероятности доминирующего распада [1]):

$$\frac{R(\pi^- \to \pi^0 + e^- + \bar{\nu})}{R(\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu})} \cong 10^{-8}. \tag{10.149}$$

Таким образом, гипотезу о сохранении векторного тока можно кратко сформулировать следующим образом. Лептонный ток $\bar{\psi}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu$ взаимодействует с «повышающей» компонентой сохраняющегося изотопического тока (10.43), который по аналогии с электродинамикой рассматривают как ток перехода. Экспериментально проверяемые следствия возникают благодаря тому, что эта «повышающая» компонента определяется из третьей компоненты согласно зарядовой независимости сильных взаимодействий; третья компонента может быть измерена в электромагнитных взаимодействиях.

§ 64. Частично сохраняющийся аксиальный ток

Мезонное облако, окружающее нуклоны, влияет также на аксиально-векторную, или типа Гамова — Теллера, часть β-распадного взаимодействия. Мы можем предположить, что именно с этим мезонным облаком связано происхождение числа $\alpha = 1{,}25$, характеризующего отношение аксиально-векторной константы к векторной. Величина α близка к единице, а если проделать перенормировку константы за счет связанных с мезонным облаком виртуальных эффектов по теории возмущений, то получится логарифмически расходящееся выражение. Можно поэтому сделать предположение, что для аксиально-векторного β-распадного взаимодействия имеется *приближенный* закон сохранения [128].

Поскольку в настоящее время отсутствует прогресс в объяснении величины α на основе этой не вполне отчетливой идеи, или исходя из любых иных предположений, мы не будем более

[1]) См. **Л. Б. Окунь*, ссылка [109]. (*Прим. перев.*)

обсуждать величину α. Однако, как мы сейчас увидим, идея о том, что в амплитуде слабого распада лептоны связаны с «частично» сохраняющимся аксиально-векторным нуклонным током, принесла некоторый успех в объяснении наблюдаемого времени жизни $\pi^{\pm}$-мезонов.

Простейшая радиационная поправка к аксиально-векторному току — это поправка, обусловленная одним π-мезоном; она изображена на рис. 10.22. Соответствующий член в инвариантной амплитуде β-распада имеет вид

$$\mathfrak{M}_{1\pi} = \frac{Ga}{\sqrt{2}}\left(-ig\sqrt{2}\right)\left[\bar{u}(p_p)\, i\gamma_5 u(p_n)\right]\frac{i}{q^2-\mu^2}\times$$
$$\times (iq_\mu)\left[\bar{u}(p_e)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,v(\bar{k})\right], \qquad (10.150)$$

где $Ga/\sqrt{2}$ есть константа связи в амплитуде распада $\pi^{\pm}$ (10.139), а g является константой сильного $\pi-N$-взаимодействия. Добавочный множитель $\sqrt{2}$ возникает из изотопической матрицы для испускания заряженного пиона. Кинематические обозначения введены на рис. 10.22. Возникает также ряд дополнительных вкладов первого порядка по слабому взаимодействию от диаграмм типа изображенных на рис. 10.23. Все вклады от диаграмм на рис. 10.23 можно записать в виде

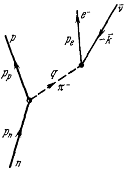


Рис. 10.22. Вклад однопионного обмена в аксиальную часть слабого взаимодействия.

$$\mathfrak{M} = \mathcal{J}_\mu^+(p_p, p_n)\,\bar{u}(p_e)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,v(\bar{k}),$$

где

$$\mathcal{J}_\mu^+(p_p, p_n) =$$
$$= \frac{G}{\sqrt{2}}\,\bar{u}(p_p)\left[\gamma_\mu\gamma_5\mathcal{F}_1(q^2) + q_\mu\gamma_5\mathcal{F}_2(q^2) + \right.$$
$$\left. + P_\mu\gamma_5\mathcal{F}_3(q^2)\right]u(p_n), \qquad (10.151)$$

$$q = p_n - p_p = p_e + \bar{k}, \quad P = p_p + p_n.$$

По своей структуре это выражение похоже на электромагнитный ток (10.87) с той разницей, что для получения аксиального вектора сюда добавлена матрица γ_5. Если мы примем, что, подобно диаграммам на рис. 10.23, все остальные вклады в $\mathcal{J}_\mu^+$ преобразуются как «повышающая» компонента изотопического вектора, то (10.151) можно упростить, показав, что

$$\mathcal{F}_3(q^2) = 0. \qquad (10.152)$$

Это равенство следует из инвариантности сильного взаимодействия относительно зарядового сопряжения и изотопической инвариантности. Чтобы его доказать, повернем сначала $\mathcal{J}^{+}_{\mu}$ в изотопическом пространстве, заменив τ_{+} в слабых вершинах диаграмм на рис. 10.23, *а* на τ_3, а также в вершине испускания π^{-}-мезона, связанного с лептонами на рис. 10.23, *б*. Благодаря

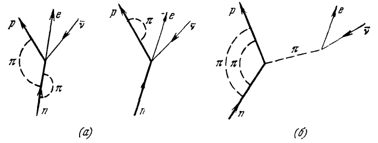


Рис. 10.23. Аксиальные вклады в β-распад.

зарядовой независимости сильных взаимодействий $\mathcal{J}^{+}_{\mu}$ переходит при этом в третью компоненту изотопического вектора; в частности, для протона

$$\mathcal{J}^{\mu}_{3}(p',\ p) = \\ = \frac{G}{\sqrt{2}}\,\bar{u}(p')\left[\gamma_\mu\gamma_5\mathcal{F}_1(q^2) + q_\mu\gamma_5\mathcal{F}_2(q^2) + P_\mu\gamma_5\mathcal{F}_3(q^2)\right]u(p), \quad (10.153)$$

где

$$q_\mu = p_\mu - p'_\mu, \quad P_\mu = p'_\mu + p_\mu.$$

Согласно зарядовой инвариантности сильного взаимодействия дополнительные вклады в (10.151) от диаграмм на рис. 10.23 должны привести к току $\mathcal{J}^{3}_{\mu}(p',\ p)$, который при замене протона на антипротон преобразуется в точности так же, как ток «голого» протона:

$$\bar{u}(p')\,\gamma_\mu\gamma_5 u(p). \quad (10.154)$$

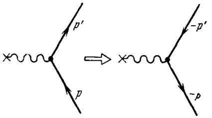


Рис. 10.24. Слабая вершина для антипротона.

Рассеянию антипротона из состояния с импульсом p в состояние с импульсом p' отвечает диаграмма на рис. 10.24. В соответствии с результатами гл. 6 можно считать, что на ней изображен протон с отрицательной энергией, движущийся назад во времени, который рассеивается из состояния $(-p')$ в состояние $(-p)$. Его аксиально-векторный ток имеет вид

$$\bar{v}(p)\gamma_\mu\gamma_5 v(p') = -u^T(p)C^{-1}\gamma_\mu\gamma_5 C\bar{u}^T(p')e^{i\phi} = \\ = -\bar{u}(p')\gamma_\mu\gamma_5 u(p)e^{i\phi}, \quad (10.155)$$

где мы использовали соотношение (5.8) (по поводу фазового множителя см. рассуждения перед (5.8)). Теперь мы должны сохранить в токе (10.153) лишь члены, обладающие теми же трансформационными свойствами, что и «голый» ток, поскольку

$$\mathcal{J}_\mu^{3c}(-p, -p') = -\mathcal{J}_\mu^3(p', p)e^{i\phi}. \quad (10.156)$$

Отсюда нетрудно получить равенство (10.152).

Все вклады диаграмм типа изображенной на рис. 10.23, *б* в аксиально-векторную часть амплитуды могут быть записаны как произведение выражения вида (10.150) на скалярную функцию q^2. Все поправки к пион-нуклонной вершине приведут к следующей форме взаимодействия:

$$\bar{u}(p_p)\gamma_5\mathcal{F}(q^2)u(p_n),$$

где $q \equiv p_n - p_p$, а $\mathcal{F}(q^2)$ является инвариантной функцией q^2. Это следует из того, что число вершин, в которые входят матрицы γ_5, всегда нечетно и все факторы $\hat{p}_p$ и $\hat{p}_n$ можно переставить направо и налево, где они, действуя на свободные дираковские спиноры, дадут M. Таким образом, диаграммы типа показанной на рис. 10.23, *б*, на которых единственный мезон из окружающего нуклон облака непосредственно связан с лептонами, дают вклад только в $\mathcal{F}_2(q^2)$ в (10.151). Выделяя из $\mathcal{F}_2(q^2)$ этот вклад, запишем

$$\mathcal{F}_2(q^2) = \tilde{\mathcal{F}}_2(q^2) - \frac{ag\sqrt{2}\,\mathcal{F}(q^2)}{q^2-\mu^2}. \quad (10.157)$$

Постоянная a связана с наблюдаемым временем жизни $\pi^\pm$-мезонов посредством (10.140), а форм-фактор $\mathcal{F}(q^2)$ в точке $q^2 = \mu^2$ может быть выражен через пион-нуклонную константу связи g, как было показано в § 55. Полагая в (10.157) константу g равной наблюдаемой константе $(\pi - N)$-связи $g^2/4\pi \approx \approx 14$, нормируем $\mathcal{F}(q^2)$ на 1 в точке $q^2 = \mu^2$:

$$\mathcal{F}(\mu^2) = 1. \quad (10.158)$$

Относительно $\tilde{\mathcal{F}}_2$ ничего не известно. Однако, поскольку $\mathcal{F}_2$ является коэффициентом при величине $q_\mu\gamma_5$, которая представляет собой поправку порядка (q/M) на отдачу нуклона, $\mathcal{F}_2$ не наблюдается в β-распаде. Из предыдущего мы знаем, что

$$\mathcal{F}_1(0) = -\alpha = -1{,}25. \quad (10.159)$$

Воспользовавшись этими предварительными замечаниями, мы можем теперь рассмотреть вопрос о частично сохраняющемся аксиально-векторном токе. Если бы аксиально-векторный ток строго сохранялся, условие

$$q^{\mu}\mathcal{J}_{\mu}^{+}(p_p,\ p_n)=0$$

в применении к (10.151) привело бы к соотношению

$$2M\mathcal{F}_1(q^2)-q^2\mathcal{F}_2(q^2)=0,$$

или

$$\mathcal{F}_2(q^2)=+\frac{2M\mathcal{F}_1(q^2)}{q^2}.$$

Поскольку $\mathcal{F}_1(0)\neq 0$, это означало бы, что $\mathcal{F}_2$ имеет полюс при $q^2=0$, что соответствует обмену безмассовой псевдоскалярной частицей. Представляется соблазнительным отождествить этот полюс с π-мезонным в (10.157) и связать нарушение точного сохранения тока с существованием массы у π-мезона.

Таким образом, используя (10.151) и (10.157), мы приходим к видоизмененной гипотезе:

$$0=\lim_{\mu\to 0} q^{\mu}\mathcal{J}_{\mu}^{+}(p_p,\ p_n)=$$
$$=\lim_{\mu\to 0}\bar{u}(p_p)\gamma_5\left[-2M\mathcal{F}_1(q^2)+q^2\tilde{\mathcal{F}}_2(q^2)-\frac{ag\sqrt{2}\ q^2\mathcal{F}(q^2)}{q^2-\mu^2}\right]u(p_n). \tag{10.160}$$

Делая дополнительное предположение, что в пределе $\mu^2\to 0$ инвариантные форм-факторы мало отличаются от своих физических значений, получаем из (10.160)

$$-2M\mathcal{F}_1(0)=+2M\alpha=+2M(1{,}25)\approx ag\sqrt{2}. \tag{10.161}$$

Отсюда следует численное предсказание

$$|a|\approx 0{,}90\mu,$$

которое с хорошей точностью согласуется со значением, получаемым из наблюдаемого времени жизни $\pi^{\pm}$-мезонов с помощью (10.141). Подобное соотношение между вероятностью распада π-мезона, постоянной Ферми G и константой взаимодействия пион-нуклон было впервые получено Гольдбергером и Трейманом [129] путем приближенных вычислений в дисперсионной теории. Впоследствии Намбу, а также Бернстейн и др. [128] получили его как следствие частичного сохранения аксиально-векторного тока.

ЗАДАЧИ

1. Исследуйте инвариантность уравнений (10.3) и (10.4) относительно операций зарядового сопряжения и обращения времени.

2. По какому закону должны при зарядовом сопряжении преобразовываться функции φ_+ и φ_-, чтобы уравнения (10.12) и (10.13) оставались инвариантны?

3. Рассмотрев диаграммы шестого порядка, проверьте согласованность условия выбора знака (10.21).

4. В приближении зарядовой независимости полезным преобразованием симметрии является G-преобразование. Оператор G-преобразования определяется следующим образом:

$$G = e^{i\pi I_y}C.$$

Установите, как преобразуются функции $\boldsymbol{\phi}$ и Ψ под действием этого оператора.

5. Проверьте, что в нерелятивистском приближении в порядке g_0^2 потенциал (10.51) приводит к амплитуде рассеяния (10.45).

6. Покажите, что потенциал (10.58) в порядке g_0^2 приводит к S-волновой части амплитуды $\pi - N$-рассеяния (10.57).

7. Используя свойства цикличности следа, покажите, что выражение (10.82) преобразуется как лоренцев 4-вектор; обобщите это утверждение для любого порядка. Интеграл $\int d^4k$ в (10.82) следует регуляризовать и расходящуюся часть выделить в перенормировочную постоянную; эта операция не влияет на трансформационные свойства.

8. Докажите, что электромагнитные форм-факторы в (10.85) и (10.89) для задач рассеяния должны быть действительны при $q^2 < 0$, если ток перехода эрмитов. Должен ли ток быть эрмитовым?

9. Рассмотрите возможные электромагитные форм-факторы π^0- и K^0-мезонов.

10. Покажите, что формула Розенблюта (10.90) дает наиболее общую зависимость от угла рассеяния при фиксированной передаче импульса для любой релятивистски-ковариантной структуры протона и электрона в приближении однофотонного обмена между электроном и протоном.

11. Покажите, что выражение второго порядка (10.82) для форм-фактора $F_\pi(q^2)$ может быть переписано в виде следующего спектрального представления:

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq'^2 \rho(q'^2)}{q'^2 - q^2 - i\varepsilon},$$

и вычислите спектральную функцию $\rho(q'^2)$.

12. Докажите, что для протона и π^+-мезона $Z_1 = Z_2$ с точностью до членов порядка e^2 и g^2; получите отсюда равенство их перенормированных зарядов при условии равенства «голых» зарядов.

13. Рассчитайте фоторождение π-мезонов в низшем порядке по e и g. Проверьте калибровочную инвариантность.

14. Вычислите электромагнитную собственную энергию нейтрона и протона во втором порядке, используя (10.89) и аппроксимируя форм-факторы их статическими значениями, т. е. полагая $F(q^2) \to F(0)$. Возникающие при этом интегралы необходимо регуляризовать. Можно ли таким способом получить положительную разность масс нейтрона и протона? (См. [130].)

15. Постройте S-матрицу процесса $\pi^0 \to 2\gamma$, удовлетворяющую условиям калибровочной и релятивистской инвариантности, и найдите вероятность рас-

пада. Вычислите относительную вероятность рождения пары Далица: $\pi^0 \to \gamma + e^+ + e^-$. Наконец, рассмотрите распад на две пары Далица и покажите, что по корреляции плоскостей этих пар можно определить четность π^0-мезона (см. [131]).

16. Проверьте, что формула (10.105) дает правильное значение поляризации электрона, равное $-|\beta_e|$, если матричный элемент β-распада описывается формулой (10.107).

17. Проверьте в низшем порядке по G^2 формулу (10.113) для энергетичной зависимости сечения реакции $\bar{\nu} + p \to n + e^+$. Вычислите это сечение, используя пропагатор промежуточного W-бозона и общий вид форм-факторов в вершинах.

18. Проверьте, что для уравнения Вейля (10.114) имеется операция обращения времени.

19. Вычислите спектр электронов в μ-распаде с учетом всех пяти типов связи S, T, P, V и A и сравните с формулой (10.136).

20. Если μ-распад происходит через W-мезон с конечной массой, как изображено на рис. 10.15 для случая β-распада, спектр (10.135) меняется. Найдите это изменение и свяжите его с изменением параметра Мишеля (см. [55]).

21. Определите вероятность реакции (10.148) и проверьте значение отношения (10.149).

22. Вычислите парциальные вероятности распадов

$$K^0 \to \pi^- + e^+ + \nu,$$

$$K^0 \to \pi^- + \mu^+ + \nu'.$$

23. Вычислите парциальную вероятность образования пары Далица в распаде

$$\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma,$$

$$\Sigma^0 \to \Lambda^0 + e^+ + e^-.$$

Обсудите возможность определения относительной четности Σ^0 и Λ^0 в этом распаде (см. [132]).

24. Какова общая структура амплитуды слабого распада

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-?$$

Найдите параметр асимметрии для случая поляризованных Λ^0.

25. Вычислите параметр асимметрии и поляризацию электрона в β-распаде поляризованных нейтронов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Координаты и импульсы

Совокупность пространственно-временных координат $(t,\ x,\ y,\ z) \equiv (t,\ \mathbf{x})$ образует 4-вектор со следующими контравариантными компонентами (c и $\hbar$ положены равными 1):

$$x^{\mu} \equiv (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \equiv (t,\ x,\ y,\ z).$$

Ковариантные компоненты получаются изменением знака пространственных координат:

$$x_{\mu} \equiv (x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) \equiv (t,\ -x,\ -y,\ -z) = g_{\mu\nu}x^{\nu},$$

где

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Принято условие суммирования, согласно которому по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование (если не оговорено обратное). Если два одинаковых индекса (по которым должно быть произведено суммирование) оказались либо оба внизу, либо оба наверху, то в вычислениях была, по-видимому, допущена ошибка. Квадрат «длины» 4-радиус-вектора равен

$$x^2 = x_{\mu}x^{\mu} = t^2 - \mathbf{x}^2.$$

Аналогично определяется 4-импульс

$$p^{\mu} = (E,\ p_x,\ p_y,\ p_z).$$

Скалярное произведение двух 4-импульсов дается выражением

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^{\mu}p_{2\mu} = E_1E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2.$$

Подобным же образом определяется произведение

$$x \cdot p = t \cdot E - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$$

Для 4-векторов $\bar{p}$ приняты нежирные обозначения, а для трехмерных векторов $\mathbf{p}$ — жирные.

Оператор импульса имеет в координатном представлении вид

$$\mathbf{p}^{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{1}{i}\nabla\right) \equiv i\nabla^{\mu}$$

и преобразуется как контравариантный 4-вектор:

$$p^\mu p_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv -\square.$$

В этих единицах комптоновская длина волны частицы равна $1/m$ ($\approx 3{,}86\cdot 10^{-11}$ *см* для электрона), а ее энергия покоя есть m ($\approx 0{,}511$ *Мэв* для электрона).

4-потенциал электромагнитного поля определен согласно

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}) = g^{\mu\nu}A_\nu.$$

Тензор электромагнитного поля определяется следующим образом:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}A^\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu}A^\nu.$$

Напряженности электрического и магнитного полей в нековариантных обозначениях имеют вид

$$\mathbf{E} = (F^{01}, F^{02}, F^{03}),$$
$$\mathbf{B} = (F^{23}, F^{31}, F^{12}).$$

Матрицы Дирака и спиноры

Дираковский спинор для частицы с импульсом p и поляризацией s обозначается посредством $u_\alpha(p, s)$, а для античастицы — посредством $v_\alpha(p, s)$. В обоих случаях энергия $p_0 \equiv E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ положительна. Также в обоих случаях вектор s^μ который в системе покоя имеет вид

$$s^\mu = (0, \mathbf{s}^{(0)}), \quad \mathbf{s}^{(0)}\cdot\mathbf{s}^{(0)} = 1,$$

описывает направление спина частицы в системе покоя.

Матрицы γ, входящие в уравнение Дирака, удовлетворяют условию антикоммутации

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

и связаны с матрицами $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ посредством равенств

$$\boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}, \quad \gamma_0 = \beta.$$

Обычно используется представление

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^i\} = \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

представляют собой матрицы Паули размерности 2×2, а $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть единичная матрица той же размерности. Часто встречаются следующие комбинации:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5.$$

В этом представлении компоненты $\sigma^{\mu\nu}$ равны

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix},$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$ в циклическом порядке и

$$\sigma^{0i} = i\alpha^i = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для широко употребляемого «скалярного произведения» матрицы γ с обычным 4-вектором используются обозначения [1])

$$\gamma_\mu A^\mu \equiv \hat{A} = \gamma^0 A^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A},$$

$$p_\mu \gamma^\mu \equiv \hat{p} = E\gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma},$$

$$\mathrm{p}_\mu \gamma^\mu \equiv i\hat{\nabla} = i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla = i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Спиноры u и v удовлетворяет уравнению Дирака

$$(\hat{p} - m)\, u(p, s) = 0,$$

$$(\hat{p} + m)\, v(p, s) = 0.$$

Их явное выражение дается формулой (3.7), однако для большинства приложений достаточно знать проекционные операторы. Введем дираковски-сопряженные спиноры

$$\bar{u} = u^+ \gamma^0,$$

$$\bar{v} = v^+ \gamma^0,$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\bar{u}(p, s)(\hat{p} - m) = 0,$$

$$\bar{v}(p, s)(\hat{p} + m) = 0.$$

Проекционные операторы имеют вид

$$u_\alpha(p, s)\, \bar{u}_\beta(p, s) = \left[\frac{\hat{p} + m}{2m} \cdot \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}}{2}\right]_{\alpha\beta},$$

$$v_\alpha(p, s)\, \bar{v}_\beta(p, s) = -\left[\frac{m - \hat{p}}{2m} \cdot \frac{1 + \gamma_5 \hat{s}}{2}\right]_{\alpha\beta}. \qquad \text{(A.1)}$$

Имеются следующие условия нормировки:

$$\bar{u}(p, s)\, u(p, s) = 1,$$

$$\bar{v}(p, s)\, v(p, s) = -1 \qquad \text{(A.2)}$$

и условие полноты

$$\sum_s \left[u_\alpha(p,s)\, \bar{u}_\beta(p, s) - v_\alpha(p, s)\, \bar{v}_\beta(p, s)\right] = \delta_{\alpha\beta}.$$

При вычислении следов необходимо строить величины, эрмитово-сопряженные по отношению к данным матричным элементам. Для таких величин имеем

$$[\bar{u}(p', s')\, \Gamma\, u(p, s)]^+ = \bar{u}(p, s)\, \bar{\Gamma}(p', s'),$$

где

$$\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^+ \gamma^0.$$

---

[1]) См. примечание на стр. 26. *(Прим. перев.)*

Например,

$$\bar{\gamma}^{\mu} = \gamma^0 \gamma^{\mu +} \gamma^0 = \gamma^{\mu},$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu +} \gamma^0 = \sigma^{\mu\nu},$$
$$\overline{i\gamma^5} = \gamma^0 (i\gamma^5)^+ \gamma^0 = i\gamma^5.$$

Суммирование выражений (A.1) по спинам дает проекционные операторы для состояний с данной энергией:

$$[\Lambda_+ (p)]_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\pm s} u_\alpha (p, s)\, \bar{u}_\beta (p, s) = \left(\frac{\hat{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta},$$
$$[\Lambda_- (p)]_{\alpha\beta} \equiv - \sum_{\pm s} v_\alpha (p, s)\, \bar{v}_\beta (p, s) = \left(\frac{-\hat{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta}. \qquad (A.3)$$

Полезным тождеством является разложение Гордона для тока

$$\bar{u} (p') \gamma^{\mu} u (p) = \bar{u} (p') \left[\frac{(p + p')^{\mu}}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu}{2m} \right] u (p).$$

Теоремы о следах и соотношения для матриц γ

$$\hat{a}\hat{b} = a \cdot b - i\sigma_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu}.$$

След нечетного числа матриц γ равен нулю:

$$\mathrm{Sp}\, \gamma_5 = 0,$$
$$\mathrm{Sp}\, 1 = 4,$$
$$\mathrm{Sp}\, \hat{a}\hat{b} = 4a \cdot b,$$
$$\mathrm{Sp}\, \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3\hat{a}_4 = 4\, [a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4 \cdot a_2 \cdot a_3],$$
$$\mathrm{Sp}\, \gamma_5 \hat{a}\hat{b} = 0,$$
$$\mathrm{Sp}\, \gamma_5 \hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} = 4i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta},$$
$$\gamma_\mu \hat{a} \gamma^{\mu} = -2\hat{a},$$
$$\gamma_\mu \hat{a}\hat{b} \gamma^{\mu} = 4a \cdot b,$$
$$\gamma_\mu \hat{a}\hat{b}\hat{c} \gamma^{\mu} = -2\hat{c}\hat{b}\hat{a}.$$

Другие соотношения приведены в § 25.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

Сечения процессов даются выражениями, которые можно разделить на две части: во-первых, это квадрат абсолютной величины амплитуды $\mathfrak{M}$, которая должна быть лоренцевым скаляром и в которой заключена информация о физике процесса, и, во-вторых, фазовый объем и кинематические факторы. Дифференциальное сечение $d\sigma$ процесса с участием только бесспиновых частиц и фотонов записывается следующим образом:

$$d\sigma = \frac{1}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}\left(\frac{1}{2\omega_{p_1}}\right)\left(\frac{1}{2\omega_{p_2}}\right)|\mathfrak{M}|^2 \frac{d^3k_1}{2\omega_1(2\pi)^3}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n(2\pi)^3}\times$$

$$\times (2\pi)^4\delta^4\left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^{n} k_i\right)S. \qquad (\text{Б.1})$$

где, как обычно, $\omega_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$, а $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ представляют собой скорости начальных коллинеарных частиц. Затем это выражение интегрируется по всем нерегистрируемым импульсам $k_1 \ldots k_n$ конечных частиц. Статистический фактор S для реакции с m тождественными частицами в конечном состоянии равен

$$S = \prod_i \frac{1}{m_i!}.$$

Для дираковских частиц [1]) фактор $1/2\omega_p$ следует заменить на m/E_p и вновь учесть статистический фактор S; остальные факторы те же.

Дифференциальная вероятность распада частицы с массой M в ее системе покоя равна

$$d\omega = d\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{2M}|\mathfrak{M}|^2 \frac{d^3k_1}{2\omega_1(2\pi)^3}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4\left(p - \sum_{i=1}^{n} k_i\right)S,$$

где все величины определены, как и прежде. Если в конечном состоянии имеются фермионы, то вновь $1/2\omega_i \to m/E_i$; если начальная частица является фермионом, фактор $1/2M$ отсутствует.

---

[1]) Если нормировать дираковские спиноры на $2m$ вместо 1, как в формуле (А.2), выражение (Б.1) можно применять и для фермионов. В этом случае проекционные операторы для состояний с определенной энергией имеют вид $(m \pm \not{p})$ вместо (А.3).

При необходимости производится суммирование по конечным поляризациям и усреднение по начальным.

Для нахождения инвариантной амплитуды $\mathfrak{M}$ необходимо изобразить все фейнмановские диаграммы, отвечающие рассматриваемому процессу, за исключением диаграмм в виде изолированных вакуумных петель и собственно-энергетических поправок к внешним линиям. Амплитуда $\mathfrak{M}(G)$, соответствующая диаграмме G, строится путем сопоставления каждому элементу диаграммы определенного фактора в амплитуде. Факторами, не зависящими от конкретных деталей взаимодействия, являются:

1. Каждому бозону со спином 0, входящему в диаграмму, соответствует фактор $\sqrt{Z}$. Фактор $\sqrt{Z}$ находится путем вычисления точного мезонного пропагатора $\Delta_F'(p)$ в пределе $p^2 \to \mu^2$; $\Delta_F'(p) \to Z\Delta_F(p)$ при $p^2 \to \mu^2$.

2. Каждой внешней фермионной линии, входящей в диаграмму, соответствует $\sqrt{Z_2}\,u(p, s)$ либо $\sqrt{Z_2}\,v(p, s)$ в зависимости от того, отвечает эта линия начальному или конечному состоянию; аналогично каждой фермионной линии, выходящей из диаграммы, соответствует $\sqrt{Z_2}\,\bar{u}(p, s)$ либо $\sqrt{Z_2}\,\bar{v}(p, s)$. Величина Z_2 определяется путем предельного перехода

$$\lim_{\hat{p}\to m} S_F'(p) = Z_2 S_F(p).$$

3. Каждой внешней фотонной линии сопоставляется фактор $\varepsilon_\mu\sqrt{Z_3}$, где при $q^2 \to 0$

$$\left(D_F'(q)\right)_{\mu\nu} \to \frac{-Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \text{калибровочно-инвариантные члены.}$$

В вычислениях, проводимых в низшем порядке по теории возмущений, эти величины Z можно положить равными единице. В высших порядках они вместе с вершинными поправками перенормируют заряды, заменяя «голые» заряды физическими.

4. Каждой внутренней фотонной линии с импульсом p соответствует фактор

$$iS_F(p) = \frac{i}{\hat{p} - m + i\varepsilon} = \frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

5. Каждой внутренней линии мезона со спином 0 и импульсом q отвечает величина

$$i\Delta_F(q) = \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon}.$$

6. Каждой внутренней фотонной линии с импульсом q сопоставляется величина

$$i(D_F(q))_{\mu\nu} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}.$$

В теории с сохраняющимися токами калибровочно-инвариантными членами типа $q_\mu q_\nu$, $q_\mu\eta_\nu$ и т. д. можно пренебречь.

Для взаимодействия мезонов с нуклонами каждой внутренней мезонной линии соответствует дополнительный изотопический фактор δ_{ij}, а внешним линиям соответствуют следующие факторы:

7. χ и χ^+ сопоставляются начальным и конечным нуклонным спинорам, $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ отвечает протону и $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — нейтрону (аналогичные факторы появляются для K-мезонов и Ξ-гиперонов).

8. π-мезонам в начальном и конечном состояниях отвечают изотопические функции ϕ^e и ϕ^{e*} соответственно, причем

$$\phi^e_{\pi\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0) \quad \phi^e_{\pi^0} = (0, 0, 1)$$

(аналогичные факторы вводятся для Σ-гиперонов).

9. Каждому внутреннему импульсу l, который не фиксирован законами сохранения в вершинах, соответствует

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}.$$

10. Каждой замкнутой фермионной петле отвечает множитель (-1).

11. Диаграммы, которые отличаются друг от друга только перестановкой двух внешних тождественных фермионов, имеют противоположный относительный знак. При этом подразумевается не только перестановка двух тождественных частиц в конечном состоянии, но и, например, перестановка начальной частицы и конечной античастицы.

Взаимодействие определяет тип и структуру вершин. Ниже приведены правила для основных типов взаимодействия.

Спинорная электродинамика

Имеются два типа вершин, изображенных на рис. Б. 1, которые отвечают следующей плотности гамильтониана, записанной в виде нормального произведения:

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I =: e_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu : - \delta m : \bar{\psi}\psi : .$$

Для данного типа взаимодействия справедливы следующие правила:

1. Каждой вершине сопоставляется фактор $-ie\gamma_\mu$.
2. Каждому массовому контрчлену отвечает величина $i\delta m$.

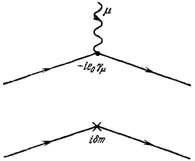


Рис. Б.1.

3. Заряд перенормируется следующим образом:

$$e = Z_2 Z_1^{-1} \sqrt{Z_3}\, e_0 = \sqrt{Z_3}\, e_0,$$

где точной вершине соответствует $\Gamma_\mu(p', p) \to Z_1^{-1}\gamma_\mu$ при $\not{p}' = \not{p} = m$ и $Z_1 = Z_2$ согласно тождеству Уорда.

Электродинамика бозонов со спином 0

Имеются три типа вершин, изображенных на рис. Б. 2, которые отвечают следующей плотности лагранжиана:

$$\mathscr{L}_I = -ie_0 : \varphi^+ \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} \right) \varphi : A_\mu + e_0^2 : A^2 : : \varphi^+ \varphi : + \delta\mu^2 : \varphi^+ \varphi : .$$

Для этих вершин справедливы правила:

1. Вершине взаимодействия с фотоном отвечает фактор $-ie_0(p+p')_\mu$.
2. Вершине с двумя фотонными линиями отвечает $+2ie_0^2 g_{\mu\nu}$.

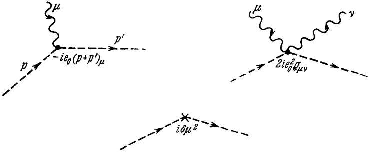


Рис. Б.2.

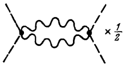


Рис. Б.3.

3. Каждому массовому контрчлену отвечает фактор $i\delta\mu^2$.
4. Каждой замкнутой петле, содержащей только две фотонные линии, как показано на рис. Б. 3, отвечает множитель $^1/_2$.
5. Перенормировка заряда производится, как в спинорной электродинамике.

Мезон-нуклонное рассеяние

В зарядово-независимой теории гамильтониан содержит четыре члена

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I = : ig_0 \overline{\Psi} \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi} \Psi : - \delta m : \overline{\Psi} \Psi : - {}^1/_2\, \delta\mu^2 : \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} : + {}^1/_4\, \delta\lambda : (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi})^2 : ,$$

которые изображены на рис. Б. 4 и Б.5.

Точки на рис. Б. 5 означают, что только значение $I = 0$ передается от мезонной пары ij к паре rs (см. ниже правило 2). Правило для массовых контрчленов то же, что и раньше, а другие правила таковы:

1. Каждой мезон-нуклонной вершине отвечает фактор $g_0\gamma_5\tau_\alpha$, который дает константу взаимодействия заряженных мезонов с протонами, равную $\sqrt{2}\,g_0$ и $\pm g_0$ для взаимодействия нейтральных мезонов с протонами и нейтронами соответственно.

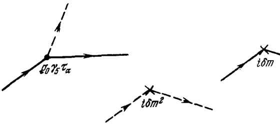


Рис. Б.4.

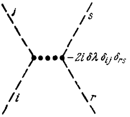


Рис. Б.5.

Рис. Б.6.

2. Каждой вершине с четырьмя мезонами, изображенной на рис. Б. 5, соответствует фактор $-2i\delta\lambda\delta_{ij}\delta_{rs}$.

3. Каждой замкнутой петле, содержащей две мезонные линии, как на рис. Б. 6, отвечает множитель $^1/_2$.

Электродинамика бозонов со спином 1

Пропагатор векторного бозона имеет вид $[-g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/m^2]\,(k^2-m^2)^{-1}$ вместо $-g_{\mu\nu}/k^2$ для безмассового фотона, а внешняя линия содержит вектор поляризации ε_μ как в случае фотона.

В электродинамике векторных бозонов имеются четыре типа вершин, изображенных на рис. Б. 7, которым соответствует следующая плотность лагранжиана:

$$\mathscr{L}' = -ie_0 : \left[\left(\frac{\partial\varphi_\nu^*}{\partial x_\mu}\right)\left(A^\nu\varphi_\mu - A_\mu\varphi^\nu\right) - \left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu}\right)\left(A^\nu\varphi_\mu^* - A_\mu\varphi^{\nu*}\right)\right] : +$$

$$+ e_0^2 : \left[A_\mu A^\mu\varphi_\nu^*\varphi^\nu - A_\mu\varphi^\mu A^\nu\varphi_\nu^*\right] : + \delta\mu^2 : \varphi_\nu^*\varphi^\nu : ,$$

Ниже по порядку приводятся факторы, соответствующие каждой из этих вершин:

1. Фактор $-ie_0(p'+p)_\mu g_{\alpha\beta} + ie_0 g_{\beta\mu} p'_\alpha + ie_0 p_\beta g_{\mu\beta}$.

2. Фактор $+ie_0^2\left[2g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu} - g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}\right]$.

3. Фактор $i\delta\mu^2 g_{\alpha\beta}$ для каждого массового контрчлена.

4. Множитель $1/2$ для каждой замкнутой петли, содержащий только две фотонные линии.

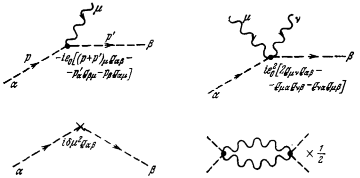


Рис. Б.7.

5. Вывод этих правил из канонической теории, а также рассмотрение аномального магнитного момента и процедуры регуляризации можно найти в работе [133].

Во всех приведенных выше примерах матрицы расположены в «естественном порядке». Для замкнутых петель это означает взятие следа. Изотопические индексы замыкаются с соответствующими индексами на другом конце бозонной линии. При суммировании по поляризации фотонов

$$\sum_\lambda e_\mu(k,\lambda)\, e_\nu(k,\lambda) \Rightarrow -g_{\mu\nu}$$

и векторных мезонов

$$\sum_\lambda e_\mu(k,\lambda)\, e_\nu(k,\lambda) \Rightarrow -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}.$$

ДОПОЛНЕНИЯ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

1. Рассеяние мюона на электроне (к § 27). В § 27 рассмотрена задача о рассеянии электрона на бесструктурной дираковской частице (тяжелом электроне). Как там отмечалось, такое рассмотрение неприменимо к протону, поскольку оно не учитывает его структуру и его аномальный магнитный момент, связанные с сильными взаимодействиями. Но эта задача буквально соответствует задаче о рассеянии мюона на электроне, так как мюон в смысле его электромагнитных свойств действительно отличается от электрона только массой и не подвержен сильным взаимодействиям. Таким образом, формулы § 27 остаются справедливыми, т. е. описывающими рассеяние мюона на электроне, если в них заменить e_p на e, а под M подразумевать массу мюона.

Дифференциальное сечение рассеяния определяется формулой (7.42), а квадрат матричного элемента для случая неполяризуемых частиц — формулой (7.43). В системе центра инерции выражение для дифференциального сечения имеет следующий вид:

$$d\sigma = \frac{\alpha^2\, do}{(\varepsilon + E)^2 p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}\left[(\varepsilon E + p^2)^2 + (\varepsilon E + p^2 \cos^2 \vartheta)^2 - 2\,(m^2 + M^2)\, p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right],$$

где p — импульс в системе центра инерции, $\varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$, $E = \sqrt{p^2 + M^2}$ — энергия электрона и мюона, ϑ — угол рассеяния, do — элемент телесного угла (все в системе центра инерции).

2. Превращение электронной пары в мюонную пару (к § 32). При столкновении электрона и позитрона, кроме упругого рассеяния, может произойти их аннигиляция с превращением в мюонную пару (положительно и отрицательно заряженные мюоны). Этот процесс описывается второй диаграммой (рис. 7.12, *б*), а амплитуда — формулой (7.86), в которой надо опустить первый член в квадратных скобках, заменить m^2 на mM и считать p_1' и q_1' соответственно импульсами μ^-- и μ^+-частиц (p_1 и q_1 — по-прежнему импульсы электрона и позитрона). Из законов сохранения следует, что превращение возможно при $E \geqslant M$, где E — энергия электрона (позитрона) в системе центра инерции.

Полное сечение превращения равно

$$\sigma = \frac{4\pi}{3}\,\frac{\alpha^2}{4E^2}\left(1 + \frac{M^2}{2E^2}\right)\sqrt{1 - \frac{M^2}{4E^2}}\,.$$

Заметим, что эта формула неприменима непосредственно вблизи порога процесса, где образующиеся мюоны нельзя считать свободными.

3. Неупругое рассеяние электрона на протоне (к § 56). В § 56 рассматривалась задача об упругом рассеянии электрона на реальном протоне. Для этого было модифицировано выражение для тока (7.34), отвечающее «дираковскому» протону. Эта модификация сводилась к замене J на $\langle P_f|J|P_i\rangle$ — матричный элемент точного оператора тока протона, учитывающего сильные взаимодействия (но первого порядка по электромагнитным взаимодействиям). Как было показано в § 56, этот матричный элемент может быть представлен феноменологически в виде

$$\bar{u}(P_f)\Gamma_\mu u(P_i),$$

где Γ_μ — вершинная функция протона, выражающаяся согласно (10.88) через два инвариантных форм-фактора F_1, F_2, являющихся функциями от квадрата переданного импульса q^2. Таким образом, амплитуда рассеяния может быть определена на основании простой диаграммы Фейнмана (рис. 7.3) с заменой в протонной вершине γ^μ на Γ^μ.

Аналогично можно рассмотреть задачу о неупругом рассеянии электрона на протоне, т. е. процесс, в котором электрон теряет импульс q, а протон превращается в некоторую совокупность адронов. Для этого надо использовать диаграмму рис. 7.3 или формулу (7.31), заменив протонный ток J^μ на матричный элемент тока

$$\langle n\mid j^\mu\mid P_i\rangle$$

где $|P_i\rangle$ — начальное состояние протона с импульсом P_i, а $|n\rangle$ — конечное адронное состояние.

Элемент матрицы рассеяния S_{fi}, отвечающий этому процессу, будет содержать амплитуду

$$\mathfrak{M}^{(n)} = \bar{u}(p_f)\gamma_\mu u(p_i)\langle n\mid j^\mu\mid P_i\rangle\frac{1}{g^2},$$

где, как и в § 27, p_i и p_f — импульсы электрона до и после рассеяния, а $u(p_i)$ и $u(p_f)$ — соответствующие дираковские амплитуды (мы опустили для краткости спиновые индексы), $q = p_i - p_f$.

Дифференциальное сечение рассеяния с образованием адронного состояния n, вычисленное по обычным правилам, имеет следующий вид:

$$d\sigma^{(n)} = |\mathfrak{M}^{(n)}|^2(2\pi)^4\delta(P_n + p_f - p_i - P_i)\frac{1}{4(P_ip_i)}d^4p_f\frac{\delta(p_f^2)}{(2\pi)^3}$$

(в этой формуле и далее мы пренебрегаем массой электрона).

Просуммировав это выражение по спиновым состояниям электрона в конечном состоянии, усреднив по спиновым состояниям электрона в начальном состоянии и просуммировав по всем конечным адронным состояниям n, мы получим сечение рассеяния электрона на протоне при данном угле рассеяния и данной потере энергии (инклюзивное сечение).

В качестве независимых переменных удобно выбрать инварианты

$$q^2 = (p_i - p_f)^2, \quad \nu = (P_iq).$$

Мы получим

$$d\sigma = dq^2\, d\nu \frac{\alpha^2}{4q^2 (P_i p_i)^2} w^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

где

$$w^{\mu\nu} = 2\left(p_i^\mu p_f^\nu + p_i^\nu p_f^\mu - g^{\mu\nu} p_i p_f\right),$$

$$W_{\mu\nu} = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)} (P_n - P_i - q) \langle P_i | j_\mu | n \rangle \langle n | j_\mu | P_i \rangle.$$

Тензорная структура $W_{\mu\nu}$ определяется только двумя векторами, P_i и q. Из этих векторов и метрического тензора $g_{\mu\nu}$ можно построить всего пять независимых тензоров. Требования инвариантности относительно обращения времени и сохранение тока накладывают три условия. Поэтому $W_{\mu\nu}$ определяется двумя инвариантными функциями от двух переменных: q^2 и ν. Мы можем записать $W_{\mu\nu}$ в следующем виде:

$$W_{\mu\nu} = 4\pi M W_1 \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu}\right) + \frac{4\pi}{M} W_2 \left(P_{i\mu} - \frac{\nu}{q^2} q_\mu\right)\left(P_{i\nu} - \frac{\nu}{q^2} q_\nu\right).$$

Выражение для сечения мы запишем в системе покоя протона, в которой

$$q^2 = 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad \nu = M q_0, \quad P_i p_i = M\varepsilon,$$

где ε_1, ε_2 — соответственно начальная и конечная энергии электрона, а ϑ — угол рассеяния электрона,

$$d\sigma = d\varepsilon_2\, d\sigma_{\text{мотт}} \left(W_2 + W_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}\right).$$

Здесь $d\sigma_{\text{мотт}}$ — сечение рассеяния релятивистского электрона в кулоновском поле:

$$d\sigma_{\text{мотт}} = do_2 \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_1^2} \frac{\cos^2 \vartheta/2}{\sin^2 \vartheta/2}.$$

Таким образом, неупругое рассеяние определяется двумя структурными функциями двух инвариантов, W_1 и W_2. Если при больших энергиях адронная структура такова, что не зависит от дополнительных размерных параметров (типа масс), то W_1 и W_2 могут зависеть только от безразмерных отношений q^2/ν (автомодельность или масштабная инвариантность). Тогда W_1, W_2 должны иметь вид

$$W_i = \frac{M}{\nu} F_i \frac{q^2}{\nu}.$$

Заметим, что общее выражение для $W_{\mu\nu}$ может быть представлено в виде

$$W_{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{iqx} \langle P_i | [j_\mu(x), j_\nu(y)] | P_i \rangle,$$

где $[j_\mu(x), j_\nu(y)]$ — коммутатор операторов тока в двух мировых точках.

ЛИТЕРАТУРА [1])

1. *С. Швебер*, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
2. *J. M. Jauch*, *F. Rohrlich*, The Theory of Photons and Electrons, Cambridge, Mass., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1955.
3. *Н. Н. Боголюбов*, *Д. В. Ширков*, Введение в теорию квантованных полей, «Наука», 1976.
4. *А. И. Ахиезер*, *В. Б.*, *Берестецкий*, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.
5. *X. Умэдзава*, Квантовая теория поля, ИЛ, 1958.
6. *J. Hamilton*, Theory of Elementary Particles, London, Oxford University Press, 1959.
7. *F. Mandl*, Introduction to Quantum Field Theory, New York, Interscience Publishers, Inc., 1960.
8. *P. Roman*, Theory of Elementary Particles, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1960.
9. *Г. Вентцель*, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1947.
10. *J. Schwinger*, Quantum Electrodynamics, New York, Dover Publications, Inc., 1958.
11. *Р. Фейнман*, Квантовая электродинамика, «Мир», 1964.
12. *L. Klein* (ed.), Dispersion Relations and the abstract Approach to Field Theory, New York, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1961.
    G. R. Sceaton (ed.), Dispersion Relations; Scotish Universities Summer School, New York, Interscience Publishers, Inc., 1961.
13. *G. F. Chew*, *S*-Matrix Theory of Strong Interactions, New York, W. A. Benjamin, Inc., 1962.

14*. *В. Б. Берестецкий*, *Е. М. Лифшиц*, *Л. П. Питаевский*, Релятивистская квантовая теория, ч. 1, «Наука», 1968.

15*. *Е. М. Лифшиц*, *Л. П. Питаевский*, Релятивистская квантовая теория, ч. 2, «Наука», 1971.

16*. *Р. Фейнман*, Взаимодействие фотонов с адронами, «Мир», 1975.

17*. *Дж. Бернстейн*, Элементарные частицы и их токи, «Мир», 1970.

18*. *С. Трейман*, *Р. Джекив*, *Д. Гросс*, Лекции по алгебре токов, Атомиздат, 1977.

19*. *Дж. Чью*, Аналитическая теория *S*-матрицы, «Мир», 1968.

20*. *В. Н. Грибов*, Квантовая электродинамика (Материалы 9-й Зимней школы ЛИЯФ, ч. 1), Ленинград, 1974.

21. *В. Паули*, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат, 1947.
22. *Л. Шифф*, Квантовая механика, ИЛ, 1957.

[1]) Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе. Работы, изданные на русском языке, цитируются по последним изданиям. (*Прим. перев.*)

23. *П. А. М. Дирак*, Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960.
24*. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Квантовая механика, «Наука», 1974.
В. А. Фок, Начала квантовой механики, «Наука», 1976.
25. *E. Schrödinger*, Ann. Phys. **81**, 109 (1926).
W. Gordon, Z. Physik **40**, 117 (1926).
O. Klein, Z. Physik **41**, 407 (1927).
* *V. A. Fock*, Z. Physik **38**, 242 (1926); **39**, 226 (1926).
26. *P. A. M. Dirac*, Proc. Roy. Soc. (London) **A117**, 610 (1928); **A118**, 351 (1928).
27. *H. E. Moses*, Phys. Rev. **113**, 1670 (1959).
28. *В. Паули*, Теория относительности, Гостехиздат, 1947. «Принцип относительности». Сборник работ классиков релятивизма, ОНТИ, 1935.
* *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, «Наука», 1973.
29. *R. H. Good, Jr.*, Rev. Mod. Phys. **27**, 187 (1955), в особенности Sec. III, p. 190.
30. *M. J. Lighthill*, Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, Cambridge, University Press, London, 1958.
* *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов*, Обобщенные функции и действия над ними, изд. 2-е, Физматгиз, 1959.
31. *W. Gordon*, Z. Physik **50**, 630 (1928).
32. *E. Schrödinger*, Sitzber. Akad. Wiss. Physik-Math. **24**, 418 (1930).
33. *T. D. Newton, and E. P. Wigner*, Rev. Mod. Phys. **21**, 400 (1949) (русский перевод см. в книге: *Е. Вигнер*, Этюды о симметрии, «Мир», 1971, стр. 277—293).
34. *O. Klein*, Z. Physik **53**, 157 (1929).
35. *L. L. Foldy, and S. A. Wouthuysen*, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).
36. *C. G. Darwin*, Proc. Roy. Soc. (London) **A118**, 654 (1928).
W. Gordon, Z. Physik **48**, 11 (1928).
37. *Г. Бете, Э. Солпитер*, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, Физматгиз, 1960.
38. *M. E. Rose*, Relativistic Electron Theory, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1961.
39. *W. E. Lamb, Jr., and R. C. Retherford*, Phys. Rev. **72**, 241 (1957).
40. *W. E. Lamb, Jr.*, Repts. Progr. Phys. **14**, 19 (1951).
41. *R. P. Feynman*, Proc. 1961 Solvay Conf., Interscience, New York, 1962.
* *S. J. Brodsky, S. D. Drell*, Ann. Rev. Nucl. Science **20**, 147 (1970).
* *B. E. Lautrop, A. Peterman, E. de Rafael*, Phys. Rev. **3C**, 193 (1972).
42. *E. Fermi*, Z. Physik 60, 320 (1930).
43. *T. A. Welton*, Phys. Rev. **74**, 1157 (1948).
44. *L. L. Foldy*, Rev. Mod. Phys. **30**, 471 (1958).
45. *L. D. Huff*, Phys. Rev. **38**, 501 (1931).
M. H. Johnson, and *B. A. Lippman*, Phys. Rev. **77**, 702 (1950).
46. *H. A. Tolhoek*, and *S. R. de Groot*, Physica **17**, 17 (1951).
K. M. Case, Phys. Rev. **106**, 173L (1957).
H. Mendlowitz, and *K. M. Case*, Phys. Rev. **97**, 33 (1955).
M. Carrassi, Nuovo Cimento 7, 524 (1958).
V. Bargmann, L. Michel, and *V. L. Telegdi*, Phys. Rev. Letters **2**, 435 (1959).
W. H. Louisell, R. W. Pidd, and *H. R. Crane*, Phys. Rev. **94**, 7 (1954).
A. A. Schupp, R. W. Pidd, and *H. R. Crane*, Phys. Rev. **121**, **1** (1961).
G. Charpak, F. J. M. Farley, R. L. Garwin, T. Muller, J. C. Sens, V. L. Telegdi, and *A. Zichichi*, Phys. Rev. Letters **6**, 128 (1961).
47. *G. Feinberg*, Phys. Rev. **112**, 1637 (1958).
E. E. Salpeter, Phys. Rev. **112**, 1642 (1958).
48. *P. A. M. Dirac*, Proc. Roy. Soc. (London) **A126**, 360 (1930).
49. *J. R. Oppenheimer*, Phys. Rev. **35**, 939 (1930).

50 [1]). *J. D. Bjorken*, and *S. D. Drell*, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1965.
51. *E. P. Wigner*, Göttinger Nachr. **31**, 546 (1932) (русский перевод в книге [33], стр. 262—276).
52. *E. C. G. Stükelberg*, Helv. Phys. Acta **14**, 321., 588 (1941).
* *Г. А. Зисман*, ЖЭТФ **10**, 1163 (1940); **11**, 631 (1941).
53. *R. P. Feynman*, Phys. Rev. **76**, 749 (1949) (русский перевод в книге: «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 138).
54. *R. P. Feynman*, Phys. Rev. **76**, 769 (1949) (русский перевод в книге [53], стр. 161).
55. *T. D. Lee*, and *C. N. Yang*, Phys. Rev. **105**, 1671 (1957).
56. *F. Low*, Brandeis Univ. Summer School, 1959.
57. *N. F. Mott*, Proc. Roy. Soc. (London) **A124**, 425 (1929).
58. C. Møller, Ann. Phys. **14**, 531 (1932).
59. *W. Pauli* in: *A. Flügge* (ed.), Handbuch der Physik, vol. V, part 1, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
60. *R. H. Dalitz*, Proc. Roy. Soc. (London) **A206**, 509 (1951).
61. *O. Klein*, and *Y. Nishina*, Z. Physik **52**, 853 (1929).
* *I. Tamm*, Z. Physik **62**, 545 (1930).
62. *P. A. M. Dirac*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **26**, 361 (1930).
63. *H. J. Bhabha*, Proc. Roy. Soc. (London) **A154**, 195 (1935).
64. *Н. Мотт*, *Г. Месси*, Теория атомных столкновений, «Мир», 1969.
L. Wolfenstein, Ann. Rev. Nucl. Science, **6**, 43 (1956) (русский перевод см. УФН **62**, 71 (1957)).
H. A. Tolhoek, Rev. Mod. Phys. **28**, 277 (1956).
65. *M. Jacob*, and *G. C. Wick*, Ann. Phys. (N. Y.) **7**, 404 (1959).
66. *S. M. Berman*, частное сообщение.
67. *В. Гайтлер*, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.
68. *W. Pauli*, and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949) (перевод в сборнике: «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950, стр. 139).
69. *J. Schwinger*, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948) (русский перевод см. в книге, цитированной в [53], стр. 12).
70. *E. A. Uehling*, Phys. Rev. **48**, 55 (1935).
R. Serber, Phys. Rev. **48**, 49 (1935).
71. *Л. Д. Ландау*, *А. А. Абрикосов*, *И. М. Халатников*, ДАН СССР **95**, 773 (1954).
Л. Д. Ландау, в сборнике: «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958.
72. *M. Gell-Mann*, and *F. Low*, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954) (перевод см. в сборнике: «Проблемы современной физики», № 3, ИЛ, 1955, стр. 195).
73. *R. H. Dalitz*, Proc. Roy. Soc. (London) **A206**, 521 (1951).
74. *R. Karplus*, *N. M. Kroll*, Phys. Rev. **77**, 536 (1950).
75. *Г. А. Лоренц*, Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, Гостехиздат, 1956.
76. *V. E. Weisskopf*, Phys. Rev. **56**, 72 (1939).
77. *C. W. Allen*, Astrophysical Quantities, University of London Press, Ltd., London, 1955.
78. *J. Schwinger*, Phys. Rev. **73**, 416 L (1948).
79. *H. M. Foley*, and *P. Kusch*, Phys. Rev. **73**, 412 L (1948).
80. *C. Sommerfeld*, Phys. Rev. **107**, 328 (1957) and Ann. Phys. (N. Y.) **5**, 20 (1958).
A. Peterman, Helv. Phys. Acta **30**, 407 (1957).
81. *D. T. Wilkinson*, and *H. R. Grane*, Phys. Rev. **130**, 852 (1963).
* *J. C. Wesley*, and *A. Rich*, Rev. Mod. Phys. **44**, 250 (1975).

[1]) Русский перевод этой книги готовится к изданию в издательстве «Наука» в 1978 г. (*Прим. перев.*)

82. *J. Schwinger*, Phys. Rev. **75**, 651; **76**, 790 (1949) (русский перевод в книге [53], стр. 40, 78).
83. *D. R. Yennie*, *S. C. Frautschi*, and *H. Suura*, Ann. Phys. (N. Y.) **13**, 379 (1961).
84. *H. A. Bethe*, Phys. Rev. **72**, 339 (1947) (русский перевод в книге [68] стр. 82).
85. *H. A Bethe*, *L. M. Brown*, and *J. R. Stehn*, Phys. Rev. **77**, 370 (1950).
C. L. Schwartz, and *J. J. Tiemann*, Ann. Phys. (N. Y.) **6**, 178 (1958).
86. *G. Ericksen*, unpublished dissertation, University of Minesota, 1959.
87. *S. D. Drell*, Ann. Phys. (N. Y.) **4**, 75 (1958).
88. *W. Furry*, Phys. Rev. **51**, 125 (1937).
89. *M. Gell-Mann*, and *A. H. Rosenfeld*, Ann. Rev. Nucl. Science **7**, 407 (1957) (русский перевод в сборнике: «Проблемы современной физики», № 4, ИЛ, 1958, стр. 14).
J. D. Jackson, The Physics of Elementary Particles, Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1958.
W. S. C. Williams (ed.), An Introduction to Elementary Particles, Academic Press Inc., New York, 1961.
* *Ш. Глэшоу*, УФН **119**, 715 (1976).
90. *W. Pauli*, Phys. Rev. **58**, 716 (1940) (русский перевод см. в книге: *В. Паули*, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947).
W. Pauli, *V. Weisskopf*, and *L. Rosenfeld*, Niels Bohr and the Development of Physics, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1955 (русский перевод см. в книге: «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958).
91. *H. Feshbach*, and *F. M. Villars*, Rev. Mod. Phys. **30**, 24 (1958).
N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. (London) **A173**, 91 (1939).
S. Sakata, and *H. Taketani*, Proc. Math.-Phys. Soc. Japan **22**, 757 (1940).
W. Heitler, Proc. Roy. Irish Acad. Soc. **A49**, 1 (1943).
92. *M. Gell-Mann*, Nuovo Cimento Suppl. **2**, 848 (1956).
93. *H. Yukawa*, Proc. Phys.-Math. Soc., Japan **17**, 48 (1935).
94. *Г. Бете*, *Ф. Гофман*, Мезоны и поля. т. II, ИЛ, 1958.
95. *R. Plano*, *A. Prodell*, *N. Samios*, *M. Schwartz*, *J. Steinberger*, Phys. Rev. Letters **3**, 525 (1959).
96. *G. C. Wick*, Ann. Rev. Nucl. Science **8**, 1 (1958) (русский перевод см. УФН **68**, 201 (1959)).
97*. *Р. Блин-Стойл*, Фундаментальные взаимодействия и атомное ядро, «Мир», 1976.
98. *D. Wong*, and *H. P. Noyes*, Phys. Rev. **126**, 1866 (1962).
G. Breit, Rev. Mod. Phys. **34**, 766 (1962).
H. P. Noyes, Phys. Rev. **130**, 2025 (1963).
M. M. Levy, Phys. Rev. **88**, 725 (1952).
99. *M. J. Moravcsik*, and *H. P. Noyes*, Ann. Rev. Nucl. Science **11**, 95 (1961).
* *K. Erkelenz*, Phys. Reports **13**, 191 (1974).
100. *Э. Хенли*, *В. Тирринг*, Элементарная квантовая теория поля, ИЛ, 1963.
101. *G. F. Chew*, Phys. Rev. **95**, 285 (1954).
102. *G. F. Chew*, and *F. E. Low*, Phys. Rev. **101**, 1570, 1579 (1956).
103. *G. C. Wick*, Rev. Mod. Phys. **27**, 339 (1955).
104. *S. D. Drell*, Rev. Mod. Phys. **33**, 458 (1961).
105. *С. Д. Дрелл*, *Ф. Захариазен*, Электромагнитная структура нуклонов. ИЛ, 1962.
106. *R. Hofstadter*, Nuclear and Nucleon Structure, W A. Benjamin, Inc., 1963.
107. *L. Hand*, *D. G. Miller*, and *R. Wilson*, Rev. Mod. Phys. **35**, 335 (1963).
108. *S. D. Drell*, Intern. School Phys. «Enrico Fermi». Course XXVI. Varenna, 1962, Academic Press, 1964.
109. *E. J. Konopinski*, Ann. Rev. Nucl. Science **9**, 99 (1959).
L. B. Okun, XI Intern. Conf. on High Energy Phys., CERN, Geneva (1962).

S. M. Berman, Lectures on Weak Interactions, CERN Seminar (1961) (CERN 60—20).
C. Fronsdal (ed.), Weak Interactions and Topics in Dispersion Physics, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1963.
G. Danby, J. M. Gaillard, K. Guilianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, J. Steinberger, Phys. Rev. Letters **9**, 36 (1962).
* *Л. Б. Окунь*, Слабое взаимодействие элементарных частиц, Физматгиз, 1963.
110. *T. D. Lee*, and *C. N. Yang*, Phys. Rev. **119**, 1410 (1960).
111. *E. J. Konopinski*, and *L. M. Langer*, Ann. Rev. Nucl. Science **2**, 261 (1953).
112. *T. D. Lee*, and *C. N. Yang*, Phys. Rev. **104**, 254 (1956) (русский перевод см. в сборнике: «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
113*. *Б. Г. Ерозолимский*, УФН **116**, 145 (1975).
114*. Particle Data Group., Rev. Mod. Phys. **48**, No. 2, Part II (1976).
115. *Б. Понтекорво*, ЖЭТФ 37, 1751 (1959).
M. Schwartz, Phys. Rev. Letters **4**, 306 (1960).
T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. Letters, **4**, 307 (1960).
116. *H. Weyl*, Z. Physik, **56**, 330 (1929).
117. *L. Landau*, Nucl. Phys. **3**, 127 (1957).
Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **32**, 405 (1957); **32**, 407 (1957).
118. *T. D. Lee, C. N. Yang*, Phys. Rev. **105**, 1671 (1957).
A. Salam, Nuovo Cimento **5**, 299 (1957) (русский перевод см. в сборнике: «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
119. *P. C. Macq, K. M. Growe*, and *R. P. Haddock*, Phys. Rev. **112**, 2061 (1958).
120. *G. Feinberg*, and *L. M. Lederman*, Ann. Rev. Nucl. Science **13**, 431 (1963).
121. *L. Michel*, Proc. Roy. Soc. (London) **A63**, 514 (1950).
122. *R. P. Feynman*, and *M. Gell-Mann*, Phys. Rev. **109**, 193 (1958) (русский перевод см. в сборнике. «Проблемы современной физики», № 4, ИЛ, 1958).
123. *S. M. Berman*, and *A. Sirlin*, Ann. Phys. (N. Y.) **20**, 20 (1962).
* *K. Kleinknecht* in: Proceedings of the XVII Int. Conf. on High Energy Physics. London, 1974.
124. *G. Feinberg*, Phys. Rev. **110**, 1482 (1958).
125. *С. С. Герштейн, Я. Б. Зельдович*, ЖЭТФ **29**, 698 (1955).
126. *M. Gell-Mann*, Phys. Rev. **111**, 362 (1958).
127. *Y. K. Lee, L. W. Mo*, and *C. S. Wu*, Phys. Rev. Lett. **10**, 253 (1963).
128. *Y. Nambu*, Phys. Rev. Letters **4**, 380 (1960).
J. Bernstein, S. Fubini, M. Gell-Mann, W. Thirring, Nuovo Cimento **17**, 757 (1960).
129. *M. L. Goldberger*, and *S. B. Treiman*, Phys. Rev. **110**, 1178 (1958).
130. *R. P. Feynman*, and *G. Speisman*, Phys. Rev. **94**, 500 (1954).
K. Huang, Phys. Rev. **101**, 1173 (1956).
131. *N. M. Kroll*, and *W. Wada*, Phys. Rev. **98**, 1355 (1955).
132. *G. Feinberg*, Phys. Rev. **109**, 1019 (1958).
G. Feldman, and *T. Fulton*, Nucl. Phys. **8**, 106 (1958).
133. *T. D. Lee*, and *C. N. Yang*, Phys. Rev. **128**, 885 (1962).