ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Н. МАЛИНИН

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Н. МАЛИНИН

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов машиностроительных специальностей высших учебных заведений

Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1975

Н. Н. МАЛИНИН

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов машиностроительных специальностей высших учебных заведений

Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1975

539.374+539 376:621(075)

Малинин Н. Н.

19 Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1975.

400 с. с ил.

В книге изложены основные вопросы теории пластичности и ползучести, рассмотрены задачи упруго-пластической деформации, несущей способности и ползучести стержней, пластин и оболочек, применяемых в машиностроении, а также технологические задачи теории пластичности.

Во втором издании (1-е изд. 1968 г.) исключены вопросы, рассматриваемые в общеинженерных курсах сопротивления материалов, введены новые разделы теории пластичности и ползучести.

$\frac{\text{01-015}}{\text{(01)-75}}$ 015 75 605(075)

Рецензенты Кафедра теории упругости ЛГУ, д-р физ.-мат. наук проф. **Л. М. Качанов**

Редактор канд. техн. наук **В. Л. Данилов**

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Книга написана на основе лекций, читаемых автором для студентов специальности «Динамика и прочность машин» в Московском высшем техническом училище им. Н. Э. Баумана в соответствии с программой курса «Прикладная теория пластичности и ползучести».

Второе издание книги полностью переработано. В нем в отличие от первого издания более подробно изложены общие вопросы теории пластичности, а также рассмотрены теория пластичности с анизотропным упрочнением, условие пластичности и теория пластичности для анизотропных материалов, напряженное состояние в шейке образца при растяжении, новые методы построения действительной диаграммы деформирования, большие деформации и пластическая устойчивость цилиндрических и сферических оболочек, численные методы решения краевых задач плоской деформации и примеры применения их, теория ползучести с анизотропным упрочнением, кратковременная ползучесть, использование критерия Треска—Сен-Венана в решении задач установившейся ползучести, методы решения задач неустановившейся ползучести и примеры их применения, определение времени разрушения в условиях ползучести, вязкоупругость.

В связи с тем, что механические свойства материалов при одноосном растяжении и сжатии, а также расчеты стержней и стержневых систем за пределами упругости находят все более полное отражение в общеинженерных курсах сопротивления материалов, они исключены из второго издания.

605
М19
УДК 539.374+539 376:621(075)

Малинин Н. Н.

М19 Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1975.

400 с. с ил.

В книге изложены основные вопросы теории пластичности и ползучести, рассмотрены задачи упруго-пластической деформации, несущей способности и ползучести стержней, пластин и оболочек, применяемых в машиностроении, а также технологические задачи теории пластичности.

Во втором издании (1-е изд. 1968 г.) исключены вопросы, рассматриваемые в общеинженерных курсах сопротивления материалов, введены новые разделы теории пластичности и ползучести.

$М\frac{31301\text{-}015}{038(01)\text{-}75}$ 015 75 605(075)

Рецензенты Кафедра теории упругости ЛГУ, д-р физ.-мат. наук проф. **Л. М. Качанов**

Редактор канд. техн. наук **В. Л. Данилов**

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Книга написана на основе лекций, читаемых автором для студентов специальности «Динамика и прочность машин» в Московском высшем техническом училище им. Н. Э. Баумана в соответствии с программой курса «Прикладная теория пластичности и ползучести».

Второе издание книги полностью переработано. В нем в отличие от первого издания более подробно изложены общие вопросы теории пластичности, а также рассмотрены теория пластичности с анизотропным упрочнением, условие пластичности и теория пластичности для анизотропных материалов, напряженное состояние в шейке образца при растяжении, новые методы построения действительной диаграммы деформирования, большие деформации и пластическая устойчивость цилиндрических и сферических оболочек, численные методы решения краевых задач плоской деформации и примеры применения их, теория ползучести с анизотропным упрочнением, кратковременная ползучесть, использование критерия Треска—Сен-Венана в решении задач установившейся ползучести, методы решения задач неустановившейся ползучести и примеры их применения, определение времени разрушения в условиях ползучести, вязкоупругость.

В связи с тем, что механические свойства материалов при одноосном растяжении и сжатии, а также расчеты стержней и стержневых систем за пределами упругости находят все более полное отражение в общеинженерных курсах сопротивления материалов, они исключены из второго издания.

ВВЕДЕНИЕ

Стремление к уменьшению массы машин при улучшении их качества вызывает необходимость использования в процессе проектирования наиболее совершенных методов расчета, в которых по возможности полно отражены действительные условия работы конструкции и механические свойства материалов.

При проектировании легких и экономичных машин часто приходится рассматривать деформацию деталей за пределами упругости. Это позволяет выявить дополнительные прочностные ресурсы конструкции. Так, например, в распространенном в машиностроении методе расчета по допускаемым напряжениям за предельное состояние конструкции принимают такое, при котором эквивалентное напряжение в наиболее напряженной точке детали, изготовленной из пластичного материала, достигает величины предела текучести последнего. Коэффициент запаса детали по этому методу вычисляют как отношение предела текучести к максимальному эквивалентному напряжению. Однако очевидно, что в случае неоднородного напряженного состояния возникновение пластических деформаций в одной наиболее напряженной точке еще не означает наступления предельного состояния конструкции в целом. После наступления текучести в локальной зоне деталь еще может сопротивляться увеличению внешних сил до тех пор, пока пластические деформации не охватят значительного объема ее.

Для деталей из пластичного материала предельное состояние должно определяться величинами тех перемещений, при которых нарушаются условия нормальной эксплуатации, или же нагрузками, при которых конструкция перестает сопротивляться воздействию внешних сил (массовая текучесть) или разрушается.

Для деталей, выполненных из сравнительно хрупких материалов, за предельное состояние следует принимать такое, при котором наступает разрушение.

Нагрузки, соответствующие предельному состоянию, называют предельными.

При расчете по предельному состоянию вначале определяют величину предельной нагрузки, после чего коэффициент запаса вычисляют как отношение этой нагрузки к действительной. Данный метод расчета позволяет создать более экономичные конструкции, чем метод допускаемых напряжений, поскольку в нем в основу положены величины предельных нагрузок, при которых исчерпывается несущая способность деталей.

Ввиду того, что предельное состояние наступает после образования в детали пластических деформаций, для вычисления предельных нагрузок требуется умение производить расчеты за пределами упругости.

В технологических процессах производства некоторых элементов конструкций предусмотрены специальные операции, позволяющие путем пластического деформирования повысить несущую способность деталей в пределах упругости. Например, винтовые цилиндрические пружины растяжения, сжатия и кручения после навивки и термообработки выдерживаются в деформированном за пределы упругости состоянии определенное время. Такую операцию длительного деформирования пружин за пределами упругости в производственной практике называют заневоливанием.

Толстостенные трубы, нагружаемые в эксплуатации внутренним давлением, после изготовления подвергают воздействию внутреннего давления, вызывающего пластические деформации. В результате этого в трубе создается благоприятное поле остаточных напряжений, снижающих рабочие напряжения в эксплуатационных условиях. Такую технологическую операцию называют автоскреплением или автофретированием. В результате автоскрепления рабочее давление в трубе может быть повышено.

Аналогично автоскреплению толстостенных труб делались попытки повысить несущую способность турбинных дисков путем предварительного пластического деформирования их (раскручивание дисков). Для этого диски до эксплуатации на специальных стендах приводились во вращение с такими скоростями, при которых в них возникали пластические деформации.

Очевидно, что для установления наиболее эффективных условий пластического деформирования, правильного назначения размеров заготовок, определения остаточных напряжений, необходимых для расчета на прочность предварительно пластически деформированных деталей, нужно уметь выполнять расчеты за пределами упругости.

Технологические процессы обработки металлов давлением (прокатка, ковка, штамповка, волочение, прессование, навивка пружин) основаны на способности металла пластически деформироваться. Расчеты таких процессов необходимы для правильного выбора мощности прокатных станов, ковочных машин, штампов, волочильных станов, прессов, автоматов для навивки пружин и т. п. Во многих случаях они позволяют точно устанавливать размеры заготовок, выяснять оптимальные условия деформирования, обеспечивающие изготовление изделий высокого качества, и оценивать прочность заготовок в процессе деформирования их.

Так, например, при холодной гибке листового металла в V-образных штампах для того чтобы получить изделие заданной формы и размеров, следует правильно назначить радиус закругления пуансона, расстояние между опорами, а также предусмотреть размеры поперечного сечения заготовки, поскольку при гибке они сильно изменяются.

В случае волочения тонкостенных труб через матрицы необходимо правильно выбрать толщину стенки трубы, чтобы после изменения ее диаметра в результате волочения получить нужную толщину стенки.

При правке или рихтовании возникают остаточные напряжения, которые могут привести к короблению деталей вследствие перераспределения во времени остаточных напряжений. Наличие остаточных напряжений в двутавровой балке, выпрямленной в плоскости наименьшей жесткости, иногда приводит к боковому выпучиванию балки при изгибе ее в плоскости наибольшей жесткости. Поэтому в расчетах правки или рихтовки необходимо определять усилия, нужные для пластического деформирования деталей, а также вычислять остаточные напряжения, возникающие в результате этой технологической операции.

Из изложенного очевидно, что при исследовании процессов обработки металлов давлением также необходимо владеть расчетами за пределами упругости.

Так как при обработке металлов давлением деформации обычно значительны, технологические расчеты производятся, как правило, в предположении больших деформаций.

При длительном нагружении деталей машин, эксплуатация которых протекает при повышенных температурах, возникают необратимые деформации, в результате чего напряжения могут изменяться во времени. Это явление изменения во времени деформаций и напряжений, возникших при нагружении, называют ползучестью.

В практике известно много случаев, когда за счет ползучести деформации деталей достигали таких величин, при которых нарушались условия нормальной эксплуатации агрегатов. Так, например, вследствие ползучести диска и лопаток газовой турбины перекрывались зазоры, предусмотренные между лопатками и корпусом, что и приводило к поломке лопаток.

За счет уменьшения во времени напряжений наступает постепенное ослабление плотности соединения деталей, скрепленных при помощи упругого натяга. Плотность болтового соединения фланцев паропровода или фланцев корпуса паровой турбины, работающих при высоких температурах, с течением времени уменьшается, что может привести к «пропариванию фланцев». Плотность посадки диска на вал в условиях его работы при повышенной температуре также ослабевает. Падение созданного при посадке контактного давления на поверхности соприкосновения диска с валом приводит к нарушению плотного контакта между диском и валом (к так называемому «сходу» диска).

Если разрушение детали происходит по истечении значительного промежутка времени после нагружения, то напряжения и деформации в этот момент могут сильно отличаться от значений их при нагружении. Поэтому при анализе разрушения необходимо учитывать перераспределение напряжений за счет ползучести материала. Расчеты деталей машин на ползучесть тесно связаны с расчетами за пределами упругости.

Из изложенного следует, что расчеты за пределами упругости имеют большое значение в машиностроении. Они основаны на теориях пластичности и ползучести. Последние являются отделами механики деформируемых тел.

В теории пластичности ставится задача определения напряжений и перемещений в деформируемом теле за пределами упругости. При этом предполагается, что деформации не зависят от времени. В теории ползучести изучается влияние времени на величины деформаций и напряжений.

Первые работы по теории пластичности были выполнены в семидесятых годах прошлого века Сен-Венаном и Леви, которым принадлежит создание одного из вариантов теории пластичности, а также получение основных уравнений задачи плоской деформации.

В 1909 г. была опубликована работа Хара и Кармана. В ней сделана попытка вывода основных уравнений теорий пластичности из некоторого вариационного принципа. В статье Мизеса (1913 г.) система уравнений Сен-Венана — Леви дополнена иным условием пластичности, которое несколько раньше было получено Хубером.

В двадцатых годах этого века начинается интенсивное развитие теории пластичности.

Генки, Прандтлем и Мизесом были получены основные уравнения различных вариантов теории пластичности и решения задачи плоской деформации. В ряде работ опубликованы результаты экспериментальной проверки различных гипотез и приведены решения задач теории пластичности.

Первые работы по техническим теориям ползучести с применением к расчетам деталей машин были опубликованы в тридцатых годах Удквистом, Бейли и Содербергом. С тех пор теория ползучести интенсивно развивается.

Большой вклад в теории пластичности и ползучести был сделан советскими учеными, которым принадлежит анализ и развитие теорий, экспериментальная проверка их, решения задач по различным теориям, разработка приближенных методов решения задач и внедрение расчетов за пределами упругости и на ползучесть в технику.

РАЗДЕЛ I. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1. Напряженное состояние в точке тела

Поскольку теории напряжений и деформаций подробно изучаются в курсах сопротивления материалов и теории упругости, в этой и последующих главах ряд положений приводится без вывода и только некоторые дополнительные сведения, необходимые для дальнейшего изложения теории пластичности, рассмотрены подробно.

Из курса сопротивления материалов [7] известно, что девять компонентов напряжения

$$\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{matrix}$$

в трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела (рис. 1.1), полностью определяют напряженное состояние в этой точке, т. е., располагая их значениями, можно найти напряжение в любой площадке ABC, проходящей через рассматриваемую точку.

Проекции X_ν, Y_ν, Z_ν на оси координат x, y, z полного напряжения p_ν (рис. 1.2) в некоторой наклонной площадке определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; \\ Y_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ Z_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали ν к площадке.

После вычисления проекций полного напряжения X_ν, Y_ν, Z_ν уже нетрудно определить полное, нормальное и касательное напряжения в этой площадке по формулам

$$p_\nu = \sqrt{X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2};$$

$$\sigma_\nu = X_\nu l + Y_\nu m + Z_\nu n;$$

$$\tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2}.$$

Приведенные выше девять компонентов напряжения образуют тензор напряжения

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Согласно закону парности касательных напряжений в двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к линии пересечения этих площадок, равны между собой и направлены либо к линии пересечения этих площадок, либо от нее, т. е. $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{zy} = \tau_{yz}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Таким образом, компоненты тензора напряжения, расположенные симметрично относительно главной диагонали (диагонали, проходящей через нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z), равны между собой.

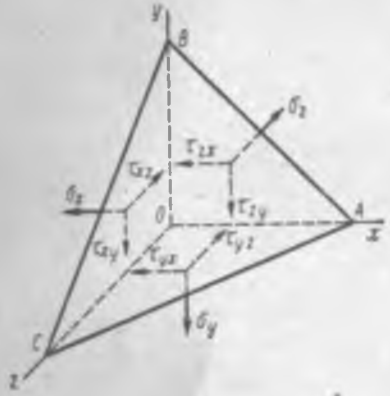


Рис. 1.1. Напряжения в трех взаимно перпендикулярных гранях элементарного тетраэдра

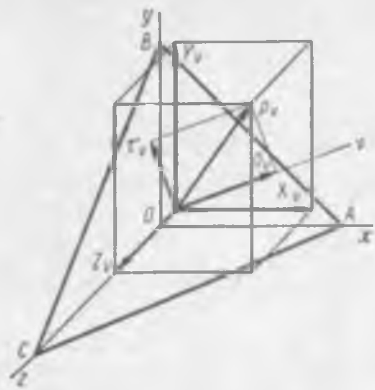


Рис. 1.2. Напряжения в наклонной грани элементарного тетраэдра

Обычно для изображения напряженного состояния в точке тела в окрестности последней выделяют элемент объема в виде прямоугольного параллелепипеда, три ребра которого принимаются за оси координат (рис. 1.3). По граням выделенного элемента изображают составляющие напряжения в соответствующих плоскостях. При этом предполагается, что длины ребер параллелепипеда равны нулю, т. е. параллелепипед как бы представляет собой точку.

В дальнейшем при рассмотрении общих вопросов теории пластичности и ползучести будут использованы тензорные обозначения, которые позволяют записывать ряд формул в более компактном виде.

При использовании тензорной символики декартовы координаты x, y, z обозначают через x_1, x_2, x_3 или в общем виде x_i, где индекс i принимает значения 1, 2, 3.

Нормальные напряжения обозначают σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, а касательные σ_{12}, σ_{23}, σ_{31}. Общий компонент записывают в виде σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Отдельные компоненты получают из общего компонента заменой букв i и j цифрами 1, 2 и 3.

В дальнейшем под σ_{ij} будем понимать также совокупность всех девяти компонентов напряжения, т. е. тензор напряжения.

Обозначим через n_i составляющие единичного вектора нормали к площадке, равные направляющим косинусам нормали.

Тогда формулы (1.1) можно представить в виде

$$X_{\nu j} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij} n_i.$$

Сокращенная запись суммирования состоит в том, что знак суммы опускается и по всякому дважды повторяющемуся в одночлене индексу проводится суммирование по значениям 1, 2, 3. В таком случае предыдущая формула принимает вид

$$X_{\nu j} = \sigma_{ij} n_i. \qquad (1.2)$$

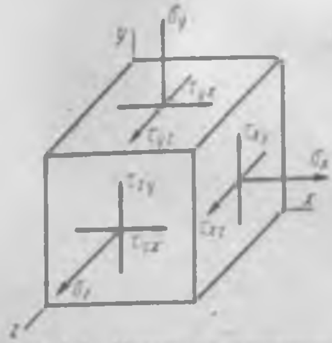


Рис. 1.3. Модель напряженного состояния

Повторяющийся индекс (в рассматриваемом случае i) называют немым, или подставным, а неповторяющийся (j) свободным.

§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия

Выделим из тела бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда, грани которого параллельны координатным осям (рис. 1.4). Ребра параллелепипеда обозначим через dx, dy и dz. Воздействие на параллелепипед отброшенной части тела заменим силами. На рис. 1.4 изображены только силы на видимых гранях. На невидимых гранях

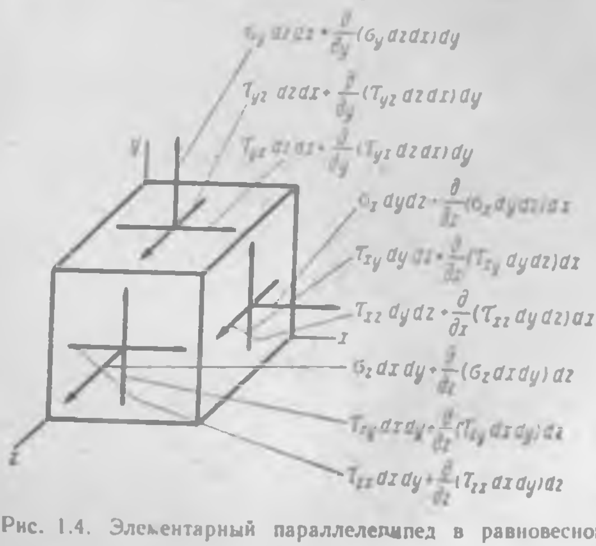


Рис. 1.4. Элементарный параллелепипед в равновесном состоянии

силы будут те же, что и на параллельных им видимых гранях без соответствующих приращений. Проекции на оси x, y, z силы, приходящейся на единицу объема (объемной силы), обозначим через X, Y, Z. Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Y = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Таким образом, три уравнения равновесия (1.3) связывают шесть независимых компонентов напряжения σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}.

В сокращенной записи уравнения (1.3) имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_i = 0. \tag{1.4}$$

§ 3. Разложение тензора напряжения

Общий случай напряженного состояния (рис. 1.5, *а*) может быть представлен в виде суммы двух напряженных состояний (рис. 1.5, *б*, *в*).

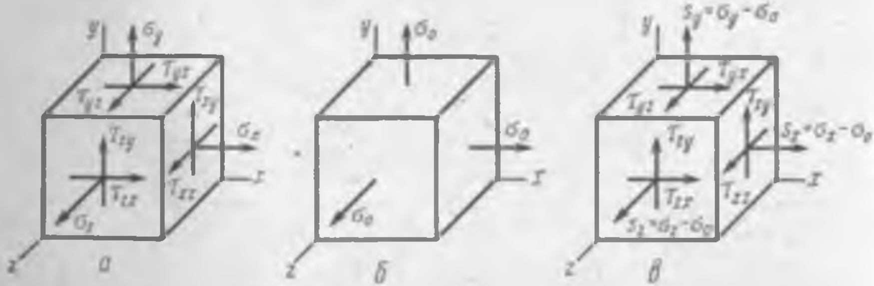


Рис. 1.5. Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор

Тензор напряжения первого напряженного состояния (рис. 1.5, *б*) называют шаровым тензором

$$T_{\sigma_0} = \begin{Bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{Bmatrix},$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \tag{1.5}$$

а второго напряженного состояния (рис. 1.5, *в*) — девиатором напряжения

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} s_x & s_{yx} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{zy} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_y \end{Bmatrix}.$$

Очевидно, что компоненты девиатора:

$$\left.\begin{aligned} s_x &= \sigma_x - \sigma_0; & s_{xy} &= \tau_{xy}; \\ s_y &= \sigma_y - \sigma_0; & s_{yz} &= \tau_{yz}; \\ s_z &= \sigma_z - \sigma_0; & s_{zx} &= \tau_{zx}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

Представленное на рис. 1.5 разложение общего случая напряженного состояния на два равносильно разложению тензора на шаровой тензор и девиатор напряжения:

$$T_\sigma = T_{\sigma_0} + D_\sigma.$$

Из формул (1.6) и (1.5) следует, что

$$s_x + s_y + s_z = 0, \qquad (1.7)$$

т. е. во втором напряженном состоянии сумма нормальных напряжений в координатных плоскостях равна нулю.

В пределах упругости объемная деформация прямо пропорциональна сумме нормальных напряжений [7]. Ниже будет установлено, что это положение может быть распространено и за пределы упругости. Следовательно, во втором напряженном состоянии (рис. 1.5, *в*) изменение объема равно нулю и искажается форма элемента. Очевидно, что в первом напряженном состоянии (рис. 1.5, *б*) форма элемента не изменяется, а изменяется его объем.

Как показывают опыты, при всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают. Образование их связано с искажением формы элемента. Поэтому произведенное разложение общего случая напряженного состояния на два физически оправдано. Девиатор напряжений характеризует, насколько заданное напряженное состояние отличается (уклоняется) от всестороннего равного растяжения или сжатия с главными напряжениями, равными среднему арифметическому нормальных напряжений исходного напряженного состояния.

Введем величину, называемую символом Кронекера (дельта-символом). Она определяется следующими соотношениями:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j; \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Тогда, используя тензорные обозначения и записи суммирования (см. § 1), компоненты девиатора напряжений можно представить в виде

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \qquad (1.8)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}. \qquad (1.9)$$

§ 4. Главные площадки и главные напряжения

В каждой точке тела существуют, по крайней мере, три взаимно перпендикулярные площадки, в которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называют *главными*, а нормальные напряжения в них — *главными нормальными напряжениями* или *главными напряжениями*.

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\,\sigma^2 - I_2(T_\sigma)\,\sigma - I_3(T_\sigma) = 0, \tag{1.10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;\\ I_2(T_\sigma) &= -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2;\\ I_3(T_\sigma) &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 -\\ &- \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Используя тензорные обозначения и записи.суммирования, рассмотренные в § 1, представим формулы (1.11) в виде

$$\left.\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_{ii};\\ I_2(T_\sigma) &= -\frac{1}{2}\left[(\sigma_{ii})^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right];\\ I_3(T_\sigma) &= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} + \frac{1}{6}(\sigma_{ii})^3 - \frac{1}{2}(\sigma_{ii})\,\sigma_{ij}\sigma_{ij}. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Можно доказать [5], что все три корня кубического уравнения (1.8) вещественны.

В дальнейшем в большинстве случаев будем придерживаться следующих обозначений для главных напряжений: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Таким образом, через σ_1 обозначено наибольшее, а через σ_3 наименьшее из главных напряжений в алгебраическом смысле (с учетом знака).

Поскольку главные напряжения не могут зависеть от выбора осей координат, коэффициенты кубического уравнения также не изменяются при повороте осей координат, т. е. являются инвариантами. Их называют соответственно первым $[I_1(T_\sigma)]$, вторым $[I_2(T_\sigma)]$ и третьим $[I_3(T_\sigma)]$ инвариантами тензора напряжений.

Из формул (1.11) следует, что выражения инвариантов тензора напряжений через главные напряжения имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;\\ I_2(T_\sigma) &= -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1;\\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что формулы (1.11) позволяют определить инварианты шарового тензора и девиатора напряжений. Для этого необходимо подставить в них компоненты шарового тензора (1.5) и девиатора напряжений (1.6). Определим второй и третий инварианты девиатора напряжений. [Первый инвариант девиатора напряжений согласно формуле (1.7) равен нулю]. Для этого подставим в формулы (1.11) компоненты девиатора напряжений (1.6), используя при этом соотношение (1.5). Тогда получим:

$$I_2(D_\sigma) = -s_x s_y - s_y s_z - s_z s_x + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 +$$

$$+ (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]; \qquad (1.13)$$

$$I_3(D_\sigma) = \begin{vmatrix} s_x & s_{yx} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{zy} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}[2(\sigma_x^3 + \sigma_y^3 + \sigma_z^3 - 3(\sigma_x^2\sigma_y + \sigma_y^2\sigma_z + \sigma_z^2\sigma_x + \sigma_x\sigma_y^2 + \sigma_y\sigma_z^2 +$$

$$+ \sigma_z\sigma_x^2) + 12\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 9\sigma_x(\tau_{xy}^2 - 2\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + 9\sigma_y(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - 2\tau_{zx}^2) +$$

$$+ 9\sigma_z(-2\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + 54\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}]. \qquad (1.14)$$

В сокращенной тензорной записи согласно формулам (1.12)

$$\left.\begin{aligned} I_2(D_\sigma) &= \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}; \\ I_3(D_\sigma) &= \frac{1}{3} s_{ij}s_{jk}s_{ki}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

§ 5. Интенсивность напряжений

Интенсивностью напряжений называют величину, пропорциональную квадратному корню из второго инварианта девиатора напряжений. В зависимости от принятого коэффициента пропорциональности различают понятия интенсивности нормальных напряжений или просто интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} \qquad (1.16)$$

и интенсивности касательных напряжений

$$T = \sqrt{I_2(D_\sigma)}. \qquad (1.17)$$

Сопоставляя выражения (1.16) и (1.17), заключаем, что

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,T. \qquad (1.18)$$

Подставляя в выражение (1.16) соотношение (1.13), получим

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \qquad (1.19)$$

В сокращенных обозначениях согласно формулам (1.16) и (1.15) имеем

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}s_{ij}}. \qquad (1.20)$$

Зависимость интенсивности напряжений от главных напряжений имеет вид

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad (1.21)$$

Для частного случая одноосного растяжения ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) из формулы (1.21) имеем

$$\sigma_i = \sigma. \qquad (1.22)$$

Таким образом, коэффициент пропорциональности $\sqrt{3}$ в формуле (1.16) был выбран для того, чтобы в простейшем случае одноосного растяжения интенсивность напряжений совпадала с величиной наибольшего главного напряжения.

В случае чистого сдвига ($\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$) из формулы (1.21) имеем

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau. \qquad (1.23)$$

Из зависимостей (1.16) и (1.21) следует также, что интенсивность касательных напряжений T совпадает с величиной наибольшего касательного напряжения при чистом сдвиге:

$$T = \tau.$$

Рассмотрим различные интерпретации понятия интенсивности напряжений.

Выберем декартову систему координат σ_1, σ_2, σ_3 (рис. 1.6). Напряженное состояние в некоторой точке тела характеризуется вектором $\overline{OP}$, компоненты которого σ_1, σ_2, σ_3:

$$\overline{OP} = \sigma_1 \bar{i}_1 + \sigma_2 \bar{i}_2 + \sigma_3 \bar{i}_3,$$

где $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$, $\bar{i}_3$ — единичные векторы осей координат σ_1, σ_2, σ_3.

Поскольку

$$\sigma_1 = \sigma_0 + s_1, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + s_2, \quad \sigma_3 = \sigma_0 + s_3,$$

где s_1, s_2, s_3 — главные напряжения девиатора s_{ij}, имеем

$$\overline{OP} = \overline{OR} + \overline{OQ}.$$

В этом выражении

$$\overline{OR} = \sigma_0 (\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3);$$

$$\overline{OQ} = s_1 \bar{i}_1 + s_2 \bar{i}_2 + s_3 \bar{i}_3.$$

Так как

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0, \qquad (1.24)$$

вектор $\overline{OQ}$ лежит в плоскости, проходящей через начало координат и равнонаклоненной к осям главных напряжений, уравнение которой

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

Эту плоскость называют девиаторной, так как любой вектор, лежащий в ней, характеризует девиатор какого-то напряженного состояния. Проекции осей σ_1, σ_2, σ_3 на девиаторную плоскость обозначим соответственно через $1'2'3'$ (рис. 1.7). Очевидно, что они составляют между собой углы 120°. Вектор $\overline{OR}$, проекции которого на оси координат одинаковы, направлен по нормали ν (рис. 1.6) к девиаторной плоскости. Направляющие косинусы этой нормали равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а единичный вектор ее $\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3)$,

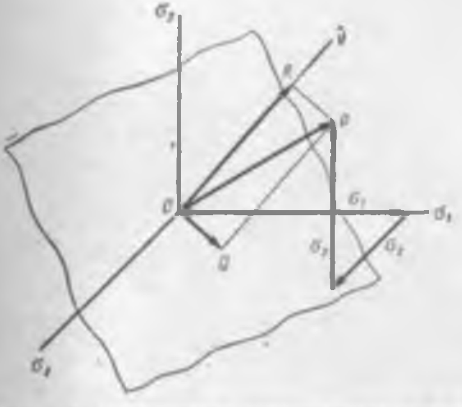


Рис. 1.6. Изображение напряженного состояния в пространстве главных напряжений

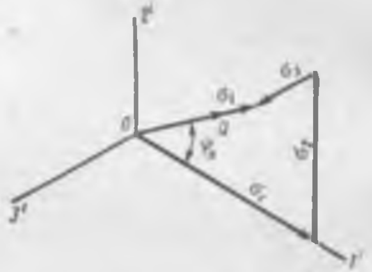


Рис. 1.7. Проекции осей σ_1, σ_2 и σ_3 на девиаторную плоскость и диаграмма Марциняка для напряжений

и поэтому

$$\overline{OR} = \sigma_0 \sqrt{3}\,n.$$

Модуль вектора OQ:

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}.$$

Возводя равенство (1.24) в квадрат, получим

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 0,$$

откуда

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = -2(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1).$$

Следовательно, согласно формуле (1.13)

$$I_2(D_\sigma) = \frac{|\overline{OQ}|^2}{2}$$

и поэтому

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}}\,|\overline{OQ}|. \qquad (1.25)$$

Надаи [3] показал, что интенсивность напряжений пропорциональна так называемому октаэдрическому касательному напряжению, т. е. касательному напряжению в площадке, равнонаклоненной к трем главным осям — октаэдрической площадке.

Величина последнего [5]

$$\tau_0 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}.$$

В. В. Новожилов [4] установил, что интенсивность напряжений пропорциональна квадратному корню из среднего значения квадратов касательных напряжений в точке тела. Для того чтобы пояснить это положение, опишем вокруг точки тела сферу радиуса r. Нормаль ν к произвольной площадке пересекает поверхность сферы в некоторой точке. Выделим в ее окрестности элемент $d\Omega$ поверхности сферы. Касательное напряжение в этой площадке обозначим τ_ν. Произведение $\tau_\nu\, d\Omega$ является элементарной касательной силой по площадке $d\Omega$. С целью исключения знака касательного напряжения рассмотрим вместо величины $\tau_\nu d\Omega$ выражение $\tau_\nu^2 d\Omega$. Определим среднее значение квадратов касательных напряжений τ_c^2 следующим образом:

$$\tau_c^2 = \lim_{\Omega\to 0}\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \tau_\nu^2\, d\Omega. \qquad (1.26)$$

Эта величина зависит от формы выделенного элемента и от его ориентации по отношению к главным осям тензора напряжений. Выбор сферы объясняется тем, что только на сфере (ввиду ее полной симметрии) будет в равной мере представлено все множество площадок, проходящих через точку.

В результате вычисления интеграла в соотношении (1.26) можно установить [4], что

$$\tau_c^2 = \frac{1}{15}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2].$$

Сопоставляя это выражение с соотношением (1.21), заключаем, что сформулированное выше положение доказано.

С. Д. Пономаревым [5] показано, что интенсивность напряжений пропорциональна квадратному корню из минимального среднеквадратичного уклонения главных напряжений заданного напряженного состояния σ_1, σ_2, σ_3, от напряжений σ некоторого равноосного напряженного состояния. Обозначим эту величину через Δ:

$$\Delta = \frac{1}{3}[(\sigma_1-\sigma)^2+(\sigma_2-\sigma)^2+(\sigma_3-\sigma)^2]. \qquad (1.27)$$

Определим напряжение σ равноосного напряженного состояния таким образом, чтобы рассматриваемое уклонение Δ имело минимальное значение. Такое равноосное напряженное состояние будем называть «ближайшим» к заданному.

Для определения напряжений «ближайшего» к заданному равноосного напряженного состояния приравняем нулю производную выражения (1.25) по σ:

$$\frac{d\Delta}{d\sigma} = -\frac{2}{3}[(\sigma_1-\sigma)+(\sigma_2-\sigma)+(\sigma_3-\sigma)] = 0.$$

откуда

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Поскольку вторая производная выражения (1.27) по σ положительна, найденное значение $\sigma = \sigma_0$ соответствует минимуму выражения (1.27).

Подстановка найденного значения σ в выражение (1.27) приводит к следующей величине минимального среднеквадратичного уклонения:

$$\Delta_{\min} = \frac{1}{9}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]. \qquad (1.28)$$

Сопоставляя выражения (1.28) и (1.21), заключаем, что интенсивность напряжений пропорциональна квадратному корню из минимального среднеквадратичного уклонения.

В работе В. М. Макушина [2] отмечено, что интенсивность напряжений пропорциональна квадратному корню из суммы площадей трех окружностей, ограничивающих круговую диаграмму.

§ 6. Геометрическое изображение напряженного состояния

Геометрическим образом напряженного состояния в точке тела может служить так называемый эллипсоид напряжений. Полуосями его являются главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 (рис. 1.8). Поверхность эллипсоида представляет собой геометрическое место концов векторов полных напряжений в различных площадках, проходящих через рассматриваемую точку. Из эллипсоида напряжений следует экстремальность главных напряжений, т. е. одно из главных напряжений является наибольшим, а другое наименьшим из всех нормальных напряжений в площадках, проходящих через рассматриваемую точку.

В частном случае всестороннего равного растяжения или сжатия (рис. 1.5, *б*) эллипсоид напряжений превращается в шар. Отсюда и название тензора напряжений для такого напряженного состояния — шаровой тензор.

Эллипсоид напряжений является пространственным геометрическим образом напряженного состояния. В отличие от него круговая диаграмма напряжений, или диаграмма Мора, представляет собой плоский геометрический образ напряженного состояния.

Круговая диаграмма напряжений состоит из трех полуокружностей, диаметрами которых являются разности главных напряжений (рис. 1.9). Координаты точек, лежащих в заштрихованной области между полуокружностями, представляют собой нормальное и касательное напряжения в произвольно ориентированных площадках, а координаты точек на полуокружностях *I*, *II* и *III* (рис. 1.9) равны нормальному и касательному напряжениям в связках площадок *I*, *II*, *III* (рис. 1.10), проходящих через главные оси *1*, *2* и *3*. Из круговой диаграммы напряжений, так же как и из эллипсоида напряжений, следует экстремальность главных напряжений. Из круговой диаграммы напряжений устанавливаем также, что экстремальные значения касательных напряжений в сериях площадок, проходящих через главные оси *1*, *2*, *3*, равны соответственно:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad (1.29)$$

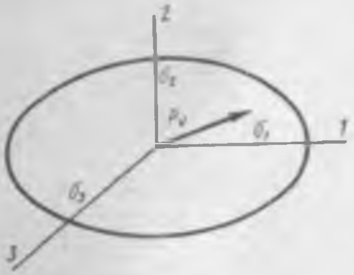


Рис. 1.8. Эллипсоид напряжений

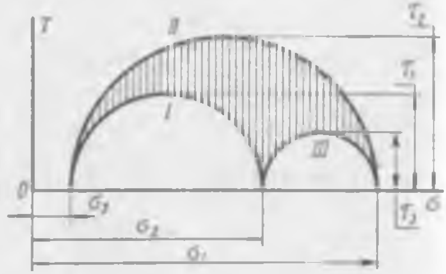


Рис. 1.9. Круговая диаграмма напряжений

Эти экстремальные значения касательных напряжений называют *главными касательными напряжениями*. Площадки, в которых возникают главные касательные напряжения, делят пополам прямые углы между главными площадками. Поскольку ранее было принято, что $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{max} = |\tau_2| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad (1.30)$$

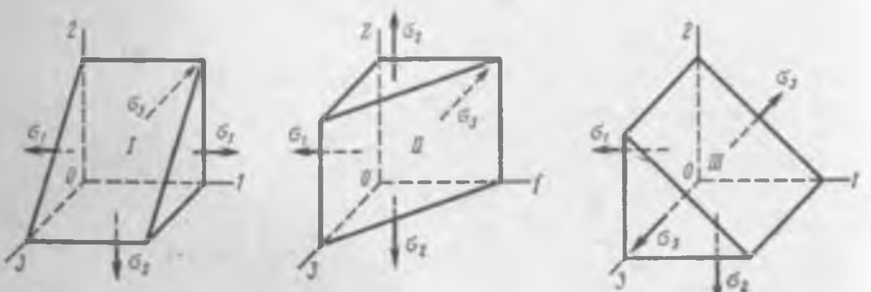


Рис. 1.10. Площадки, параллельные главным осям

В случае равноосного растяжения или сжатия (см. рис. 1.5, *б*) все три полуокружности круговой диаграммы стягиваются в точку (рис. 1.11). Это означает, что для такого напряженного состояния во всех площадках, проходящих через исходную точку, касательные напряжения равны нулю, т. е. все площадки являются главными. Как будет установлено ниже, образование пластических деформаций связано с возникновением сдвигов и, следовательно, с наличием касательных напряжений. Поэтому естественно, что, как отмечалось выше, при равноосном растяжении или сжатии пластические деформации не возникают.

Рассмотрим параметр, характеризующий с точностью до равноосного растяжения или сжатия вид напряженного состояния. Он связан с главными напряжениями следующей зависимостью:

$$\chi_\sigma = 2\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \qquad (1.31)$$

Этот параметр был впервые введен в экспериментальной работе Лоде [1], выполненной под руководством Надаи, и поэтому его называют параметром Надаи—Лоде для напряжений. Из формулы (1.31) следует, что при наложении на напряженное состояние равноосного растяжения или сжатия параметр Надаи—Лоде не изменяется.

Согласно формуле (1.31) для одноосного растяжения ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) $\chi_\sigma = -1$, для одноосного сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 \neq 0$) $\chi_\sigma = 1$, для чистого сдвига ($\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$) $\chi_\sigma = 0$. Круговые диаграммы называют подобными, если параметры Надаи — Лоде одинаковы.

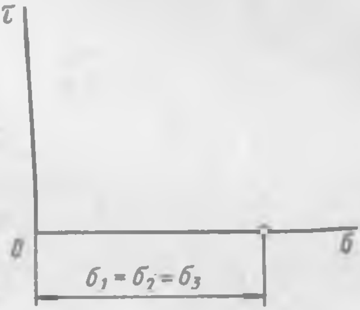


Рис. 1.11. Круговая диаграмма напряжений для трехосного равного растяжения

§ 7. Тригонометрическая форма представления главных напряжений

Кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

с помощью подстановки

$$x = y - \frac{a}{3}$$

можно привести к виду, не содержащему члена с y^2,

$$y^3 + py + q = 0. \qquad (1.32)$$

Как известно [6], если

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

то кубическое уравнение (1.32) имеет вещественные корни. Решение кубического уравнения в тригонометрической форме имеет вид [6]

$$y = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3}, \qquad (1.33)$$

где $k = 0, 1, 2$;

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}; \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2r}. \qquad (1.34)$$

В соответствии с изложенным кубическое уравнение для определения главных напряжений (1.10) при помощи подстановки

$$\sigma = s + \frac{I_1(T_\sigma)}{3} = s + \sigma_0$$

приводится к кубическому уравнению для определения главных напряжений девиатора напряжений

$$s^3 - I_2(D_\sigma)\,s - I_3(D_\sigma) = 0, \tag{1.35}$$

где величины $I_2(D_\sigma)$ и $I_3(D_\sigma)$ определяются формулами (1.11) и (1.12).

Согласно формулам (1.33) и (1.34) решение кубического уравнения (1.35) в тригонометрической форме имеет вид

$$s = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{I_2(D_\sigma)}\cos\left(\psi_\sigma + \frac{2}{3}k\pi\right), \tag{1.36}$$

причем

$$\cos 3\psi_\sigma = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{I_3(D_\sigma)}{I_2^{\frac{3}{2}}(D_\sigma)}. \tag{1.37}$$

Используя выражение (1.16) и полагая в формуле (1.36) последовательно $k = 0, 2, 1$, преобразуем выражения (1.36) и (1.37) к виду

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{3}\sigma_i\cos\psi_\sigma; \\ s_2 &= \frac{2}{3}\sigma_i\cos\left(\psi_\sigma + \frac{4}{3}\pi\right); \\ s_3 &= \frac{2}{3}\sigma_i\cos\left(\psi_\sigma + \frac{2}{3}\pi\right); \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

$$\cos 3\psi_\sigma = \frac{27 I_3(D_\sigma)}{2\sigma_i^3}. \tag{1.39}$$

Угол ψ_σ будем называть *углом вида напряженного состояния*.

Если обозначить угол между направлением вектора $\overline{OQ}$ и осью $1'$ (рис. 1.7) через ψ_σ и учесть, что косинусы углов между осями σ_1, σ_2, σ_3 и $1'$, $2'$, $3'$ соответственно равны $\sqrt{\frac{2}{3}}$, то формулы (1.38) следуют из рис. 1.7.

Выразим теперь через угол вида напряженного состояния величины главных касательных напряжений. Для этого, используя соотношения (1.6) и (1.38), преобразуем выражения (1.29). Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{s_2 - s_3}{2} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\sin\psi_\sigma; \\ \tau_2 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{s_1 - s_3}{2} = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\sin\left(\psi_\sigma + \frac{4}{3}\pi\right); \\ \tau_3 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\sin\left(\psi_\sigma + \frac{2}{3}\pi\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

Если считать $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, то согласно формуле (1.40) справедливы неравенства

$$\sin\psi_\sigma > 0; \quad \sin\left(\psi_\sigma + \frac{4}{3}\pi\right) < 0; \quad \sin\left(\psi_\sigma + \frac{2}{3}\pi\right) > 0.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \psi_\sigma \leqslant \pi; \quad \pi \leqslant \psi_\sigma + \frac{4}{3}\pi \leqslant 2\pi; \quad 0 \leqslant \psi_\sigma + \frac{2}{3}\pi \leqslant \pi.$$

Из этих трех неравенств устанавливаем пределы изменения угла вида напряженного состояния:

$$0 \leqslant \psi_\sigma \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

Поэтому согласно формуле (1.40) пределы изменения величины $\tau_{max} = \tau_2$ от $\frac{\sigma_i}{2}$ $\left(\text{при } \psi_\sigma = 0 \text{ и } \psi_\sigma = \frac{\pi}{3}\right)$ до $\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}$ $\left(\text{при } \psi_\sigma = \frac{\pi}{6}\right)$, т. е.

$$\sqrt{3} \leqslant \frac{\sigma_i}{\tau_{max}} \leqslant 2.$$

Таким образом, пределы изменения отношения $\frac{\sigma_i}{\tau_{max}}$ весьма невелики. Среднее значение отношения составляет

$$\frac{\sigma_i}{\tau_{max}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 1{,}87;$$

оно отличается от крайних значений $\sqrt{3}$ и 2 примерно на 7%.

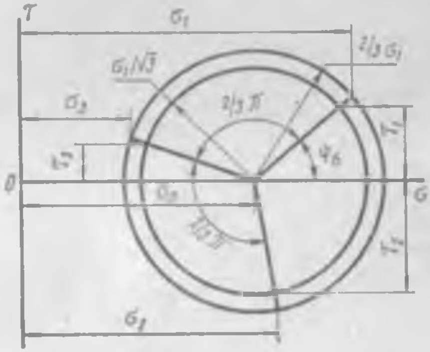


Рис. 1.12. Звезда Пелчинского для напряжений

С достаточной степенью точности можно принять

$$\sigma_i = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\tau_{max} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}(\sigma_1 - \sigma_3) = 0{,}933\,(\sigma_1 - \sigma_3). \qquad (1.41)$$

Это выражение устанавливает приближенную зависимость интенсивности напряжений от главных напряжений. Она линейная, и поэтому расчеты за пределами упругости с использованием ее проще расчетов, в основу которых положена нелинейная зависимость (1.21). Неудобство использования соотношения (1.41) заключается в том, что обычно заранее неизвестно, какое главное напряжение является наибольшим, а какое наименьшим.

Формулы (1.38) и (1.40) могут быть графически интерпретированы с помощью построения, изображенного на рис. 1.12, которое называют звездой Пелчинского для напряжений [10]. Это построение очевидно из чертежа и пояснения не требуются.

Рассмотрим еще одно геометрическое построение.

Отложим на девиаторной плоскости (см. рис. 1.7) в направлении осей *1'*, *2'* и *3'* главные напряжения. Тогда, используя соотношения (1.38), легко доказать, что замыкающая ломаной линии, отрезки которой равны главным напряжениям, является интенсивностью напряжений, а угол наклона ее к оси I' углом вида напряженного состояния. Это построение называют диаграммой Марциняка [9].

Выразим параметр Надаи — Лоде через угол вида напряженного состояния. Для этого преобразуем выражение (1.31), используя соотношения (1.6) и (1.38). Тогда получим

$$\chi_\sigma = -\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(\psi_\sigma + \frac{4}{3}\pi\right). \qquad (1.42)$$

Как было отмечено выше, для одноосного растяжения $\chi_\sigma = -1$ и, следовательно, $\psi_\sigma = 0$, для одноосного сжатия $\chi_\sigma = 1$ $\psi_\sigma = \frac{\pi}{3}$, для чистого сдвига $\chi_\sigma = 0$, $\psi_\sigma = \frac{\pi}{6}$.

Список литературы

1. **Лоде В.** Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов. — В кн.: Теория пластичности. М. Изд. иностр. лит., 1948, с. 168—205.
2. **Макушин В. М.** Об одном из условий пластичности. — «Вестник машиностроения», 1955, № 9, с. 6—8.
3. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд. иностр. лит., 1954, 647 с.
4. **Новожилов В. В.** О физическом смысле инвариантов напряжения, используемых в теории пластичности. — «Прикладная математика и механика», 1952, т. XVI, в. 5, с. 617—619.
5. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. I, М., Машгиз, 1956, 884 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.
6. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. II. М., Физматгиз, 1958, 628 с
7. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М., «Наука», 1974, 559 с.
8. **Филоненко-Бородич М. М.** Теория упругости. М., Физматгиз, 1959, 364 с
9. **Marciniak Z.** Mechanika procesów tłoczenia blach, Państwowe wydawnictwa naukowo — techniczne, 1961, 271 s.
10. **Pełczyński T.** Wpływ stanu napęcia na przejście materiału w stan plastyczny — «Przegląd mechaniczny», 1951. z 6, s. 175—179, z 7, s. 204—208.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 8. Деформированное состояние в точке тела

Предположим, что некоторая точка M (рис. 2.1) тела в результате его деформации перемещается в положение M_1. Обозначим проекции перемещения точки M на оси координат через u_x, u_y и u_z. В случае, когда компоненты деформаций малы по сравнению с единицей, а углы поворота [2] малы настолько, что квадратами и произведениями их по сравнению с компонентами деформации можно пренебречь, последние связаны с компонентами перемещения линейными зависимостями:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x};\\
&\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};\\
&\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x};\\
&\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y};\\
&\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.1)
$$

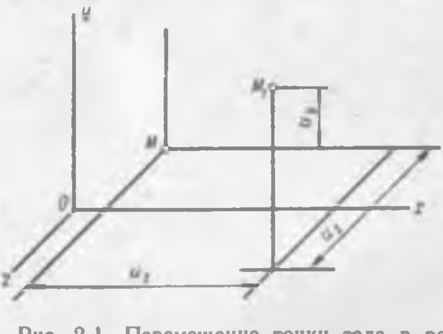


Рис. 2.1. Перемещение точки тела в результате деформации

В дальнейшем, если не будет оговорено, будем считать, что компоненты деформаций малы по сравнению с единицей, а компоненты перемещения малы по сравнению с основными размерами тела.

В курсах теории упругости [5] доказывается, что при повороте прямоугольных осей координат компоненты деформации изменяются так же, как компоненты напряжения. Сопоставление соответствующих формул для компонентов деформации и напряжения показывает, что первые можно получить из вторых заменой компонентов напряжения σ и τ компонентами деформации ε и $\frac{\gamma}{2}$ с соответствующими индексами.

Шесть компонентов деформации ε_x, ε_y, ε_z, $\frac{\gamma_{xy}}{2}$, $\frac{\gamma_{yz}}{2}$ $\frac{\gamma_{zx}}{2}$ образуют тензор деформации:

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

При использовании тензорной символики (см. § 1) общий компонент тензора деформации имеет вид ε_{ij} (i, j = 1, 2, 3), причем $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_y$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_z$, $\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$, $\varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{yz}}{2}$, $\varepsilon_{31} = \frac{\gamma_{zx}}{2}$.

Зависимости компонентов деформации от компонентов перемещения (2.1) в сокращенной тензорной записи имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.3}$$

§ 9. Условия совместности деформаций

Из зависимостей (2.1) следует, что шесть компонентов деформации выражаются через частные производные от трех компонентов перемещения по координатам x, y и z. Следовательно, они не являются независимыми функциями этих координат. Между ними должны существовать зависимости, которые называют условиями совместности деформаций.

Поясним высказанное положение. Представим себе деформируемое тело как бы состоящим из элементарных параллелепипедов. Если теперь каждый параллелепипед подвергнуть произвольной деформации так, что компоненты деформации не будут между собой связаны, а затем попытаться сложить деформированные элементы, то это, вообще говоря, окажется невозможным. Между некоторыми элементами образуются зазоры, для других элементов не окажется места, и деформированные элементы в этом случае будет невозможно объединить в непрерывное тело.

Для того чтобы получить условия совместности деформаций, необходимо из уравнений (2.1) исключить компоненты перемещения u_x, u_y и u_z. Опуская преобразования, приводимые в курсах теории упругости [5], имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}; \end{aligned}\right| \tag{2.4}$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right);$$
$$2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right);\qquad(2.4)$$
$$2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right).$$

Эти соотношения представляют собой условия совместности деформаций. В сокращенной тензорной записи они имеют вид

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{ik}}{\partial x_j\,\partial x_l}+\frac{\partial^2\varepsilon_{jl}}{\partial x_i\,\partial x_k}=\frac{\partial^2\varepsilon_{il}}{\partial x_j\,\partial x_k}+\frac{\partial^2\varepsilon_{jk}}{\partial x_i\,\partial x_l}.$$

§ 10. Разложение тензора деформаций

Аналогично общему случаю напряженного состояния общий случай деформированного состояния, характеризуемый тензором деформаций T_ε (2.2), можно представить в виде суммы двух деформированных состояний.

Первое деформированное состояние характеризуется шаровым тензором

$$T_{\varepsilon_0}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_0\end{Bmatrix},$$

где

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{3},\qquad(2.5)$$

а второе девнатором

$$D_\varepsilon=\begin{Bmatrix}e_x & e_{xy} & e_{zx}\\ e_{xy} & e_y & e_{yz}\\ e_{zx} & e_{zy} & e_z\end{Bmatrix},$$

причем

$$e_x=\varepsilon_x-\varepsilon_0;\quad e_{xy}=\frac{\gamma_{xy}}{2};$$
$$e_y=\varepsilon_y-\varepsilon_0;\quad e_{yz}=\frac{\gamma_{yz}}{2};\qquad(2.6)$$
$$e_z=\varepsilon_z-\varepsilon_0;\quad e_{zx}=\frac{\gamma_{zx}}{2}.$$

В сокращенной тензорной записи компоненты девиатора деформаций можно записать в виде

$$e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_0,$$

где

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon_{ii}}{3}=\frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом,

$$T_\varepsilon=T_{\varepsilon_0}+D_\varepsilon.$$

Из формулы (2.6) заключаем, что

$$e_x + e_y + e_z = 0, \tag{2.7}$$

т. е. во втором деформированном состоянии изменение объема равно нулю.

Таким образом, в первом деформированном состоянии изменяется объем (форма не изменяется), а во втором — форма (изменение объема равно нулю), в то время как в исходном деформированном состоянии изменяется как объем, так и форма.

Произведенное разделение деформированного состояния имеет определенный физический смысл, поскольку возникновение пластических деформаций в материале связано с образованием сдвигов и, следовательно, с изменением формы элементарного объема. При всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают.

Девиатор деформаций показывает, насколько исследуемое деформированное состояние уклоняется от всестороннего равного растяжения с главными линейными деформациями, равными среднему арифметическому линейных деформаций исходного деформированного состояния.

§ 11. Главные оси и главные деформации

В каждой точке деформированного тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, для которых компоненты угловой деформации равны нулю и, следовательно, угол между этими осями при деформации не изменяется. Эти оси называют *главными осями деформации* и обозначают цифрами 1, 2, 3. Линейные деформации в направлении этих осей называют *главными линейными деформациями* и обозначают: ε_1, ε_2, ε_3.

Главные линейные деформации являются корнями кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\,\varepsilon^2 - I_2(T_\varepsilon)\,\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0. \tag{2.8}$$

Таким же путем, как и для уравнений (1.10), можно доказать [3], что все три корня уравнения (2.8) вещественны.

Поскольку главные деформации не могут зависеть от выбора осей координат, то коэффициенты кубического уравнения также не изменяются при повороте осей координат, т. е. являются инвариантами. Их называют соответственно первым, вторым и третьим инвариантами тензора деформаций и определяют следующим образом:

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z;$$

$$I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x + \frac{\gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{yz}^2}{4} + \frac{\gamma_{zx}^2}{4};$$

$$I_3(T_\varepsilon)=\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix}=$$

$$=\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z-\frac{1}{4}\left(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2+\varepsilon_y\gamma_{zx}^2+\varepsilon_z\gamma_{xy}^2-\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}\right). \qquad (2.9)$$

Очевидно, что выражения инвариантов тензора деформаций через главные деформации имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3; \\ I_2(T_\varepsilon) &= -\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_3\varepsilon_1; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

Получим теперь второй и третий инварианты девиатора деформаций. [Первый инвариант девиатора деформаций согласно формуле (2.7) равен нулю]. Для этого подставим в формулы (2.9) компоненты девиатора деформаций (2.6), используя при этом соотношение (2.5). Тогда получим

$$I_2(D_\varepsilon)=-e_xe_y-e_ye_z-e_ze_x+e_{xy}^2+e_{yz}^2+e_{zx}^2=$$

$$=\frac{1}{6}\left[(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2\right)\right]; \qquad (2.11)$$

$$I_3(D_\varepsilon)=\begin{vmatrix} e_x & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_z \end{vmatrix}=\frac{1}{27}\Big[2\left(\varepsilon_x^3+\varepsilon_y^3+\varepsilon_z^3\right)-$$

$$-3\left(\varepsilon_x^2\varepsilon_y+\varepsilon_y^2\varepsilon_z+\varepsilon_z^2\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_y^2+\varepsilon_y\varepsilon_z^2+\varepsilon_z\varepsilon_x^2\right)+12\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z+$$

$$+\frac{9}{4}\varepsilon_x\left(\gamma_{xy}^2-2\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2\right)+\frac{9}{4}\varepsilon_y\left(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2-2\gamma_{zx}^2\right)+$$

$$+\frac{9}{4}\varepsilon_z\left(-2\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2\right)+\frac{27}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}\Big]. \qquad (2.12)$$

Выражения для инвариантов тензоров и девиаторов деформации в сокращенной тензорной записи можно получить аналогично формулам (1.12) и (1.15) в теории напряжений.

§ 12. Интенсивность деформаций

По аналогии с интенсивностью напряжений (см. § 5) *интенсивностью деформаций называют величину, пропорциональную квадратному корню из второго инварианта девиатора деформаций.* В зависимости от принятого коэффициента пропорциональности различают понятия интенсивности линейных деформаций или просто интенсивности деформаций

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3} I_2(D_\varepsilon)} \tag{2.13}$$

и интенсивности угловых деформаций

$$\Gamma = \sqrt{4 I_2(D_\varepsilon)}. \tag{2.14}$$

Сопоставляя выражения (2.13) и (2.14), заключаем, что

$$\varepsilon_i = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}}. \tag{2.15}$$

Подставим в формулу (2.13) соотношение (2.11). Тогда получим

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)}. \tag{2.16}$$

Аналогично формуле (1.20) можно получить сокращенную запись интенсивности деформаций

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}. \tag{2.17}$$

Зависимость интенсивности деформаций от главных линейных деформаций имеет вид

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}. \tag{2.18}$$

Для частного случая одноосного растяжения изотропного материала $\left(\varepsilon_1 = \varepsilon,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon - 3\varepsilon_0}{2}\right)$ по формуле (2.18) получаем

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0. \tag{2.19}$$

Для случая чистого сдвига изотропного материала ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xy} = \gamma$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) из формулы (2.16) имеем

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}. \tag{2.20}$$

Из формул (2.15) и (2.20) следует, что интенсивность угловых деформаций Γ совпадает с величиной наибольшей угловой деформации при чистом сдвиге

$$\Gamma = \gamma.$$

Аналогично формуле (2.16) интенсивность пластических деформаций определяется выражением

$$\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x^p-\varepsilon_y^p)^2+(\varepsilon_y^p-\varepsilon_z^p)^2+(\varepsilon_z^p-\varepsilon_x^p)^2+ \ldots}$$

$$\overline{\ldots + \frac{3}{2}\left[(\gamma_{xy}^p)^2+(\gamma_{yz}^p)^2+(\gamma_{zx}^p)^2\right]} \tag{2.21}$$

или в сокращенной тензорной записи

$$\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p}. \tag{2.22}$$

Так же, как и в теории напряжений (см. § 5), можно доказать [3], что интенсивность деформаций пропорциональна квадратному корню из минимального среднеквадратичного уклонения рассматриваемого деформированного состояния от ближайшего к нему всестороннего равного растяжения или сжатия.

Можно также доказать [3], что средняя линейная деформация равна линейной деформации в направлении, составляющем равные углы с тремя главными осями, а интенсивность деформаций пропорциональна максимальной угловой деформации между этим направлением и направлением, перпендикулярным к нему:

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Эту величину называют октаэдрической угловой деформацией.

§ 13. Геометрическое изображение деформированного состояния

Продолжая развивать аналогию между деформированным и напряженным состояниями (см. § 8), можно заключить, что геометрическим образом деформированного состояния в точке тела в пространстве является эллипсоид деформации, а на плоскости — круговая диаграмма деформаций (рис. 2.2).

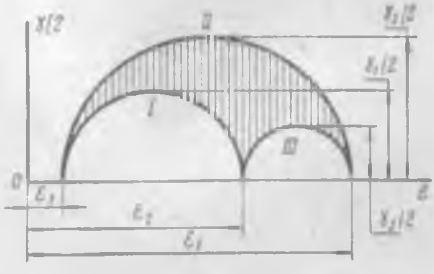


Рис. 2.2. Круговая диаграмма деформаций

В последнем случае по оси абсцисс откладывают линейные деформации, а по оси ординат — половины угловых деформаций. Координаты точек, лежащих на полуокружностях *I*, *II*, *III*, равны линейным деформациям и половинам угловых деформаций по направлениям, лежащим в главных плоскостях *23*, *31* и *12* соответственно.

Любая из точек, лежащих внутри области, ограниченной тремя окружностями диаграммы, своими координатами определяет линейную и половину угловой деформации в направлениях, не лежащих в главных плоскостях.

Из круговой диаграммы следует, что одна из главных линейных деформаций является наибольшей, а другая — наименьшей из всех линейных деформаций в окрестности исследуемой точки. Далее на основании круговой диаграммы можно также заключить, что наибольшие угловые деформации имеют место для направлений, лежащих в главных плоскостях и составляющих угол 45° с главными осями.

Эти наибольшие угловые деформации, называемые *главными угловыми деформациями*, равны разности главных линейных деформаций:

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3,\ \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \tag{2.23}$$

По аналогии с соответствующей величиной для напряжений (1.31) параметр Надаи — Лоде для деформаций имеет вид

$$\chi_\varepsilon = 2\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} - 1 = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}; \tag{2.24}$$

он характеризует вид деформированного состояния с точностью до равноосного растяжения или сжатия.

Согласно формуле (2.24) для одноосного растяжения ($\varepsilon_2 = \varepsilon_3$) $\chi_\varepsilon = -1$, для одноосного сжатия ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) $\chi_\varepsilon = 1$, для чистого сдвига ($\varepsilon_1 = -\varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = 0$) $\chi_\varepsilon = 0$.

Сопоставляя эти величины параметров Надаи—Лоде по деформациям с соответствующими величинами параметров Надаи—Лоде по напряжениям, полученным в § 6, заключаем, что они одинаковы, т. е. круговые диаграммы напряжений и деформаций для этих напряженных состояний подобны.

§ 14. Тригонометрическая форма представления главных деформаций

По аналогии с теорией напряжений главные компоненты девиатора деформаций могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_i \cos\psi_\varepsilon;\\ e_2 &= \varepsilon_i \cos\left(\psi_\varepsilon + \frac{4}{3}\pi\right);\\ e_3 &= \varepsilon_i \cos\left(\psi_\varepsilon + \frac{2}{3}\pi\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

где *угол вида деформированного состояния* ψ_ε определяется формулой

$$\cos 3\psi_\varepsilon = \frac{4I_3(D_\varepsilon)}{\varepsilon_i^3}. \tag{2.26}$$

Величины главных угловых деформаций можно выразить через угол вида деформированного состояния при помощи следующих зависимостей:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{3}\,\varepsilon_i \sin\psi_\varepsilon;\\ \gamma_2 &= -\sqrt{3}\,\varepsilon_i \sin\left(\psi_\varepsilon + \frac{4}{3}\pi\right);\\ \gamma_3 &= \sqrt{3}\,\varepsilon_i \sin\left(\psi_\varepsilon + \frac{2}{3}\pi\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

Пределы изменения угла вида деформированного состояния такие же, как и пределы изменения угла вида напряженного состояния (см. § 7), т. е.

$$0 \leqslant \psi_\varepsilon \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

Поэтому пределы изменения величины $\gamma_{\max} = \gamma_2$ от $\frac{3}{2}\varepsilon_i$ (при $\psi_\varepsilon = 0$ и $\psi_\varepsilon = \frac{\pi}{3}$) до $\sqrt{3}\varepsilon_i$ $\left(\text{при } \psi_\varepsilon = \frac{\pi}{6}\right)$, т. е.

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{\max}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

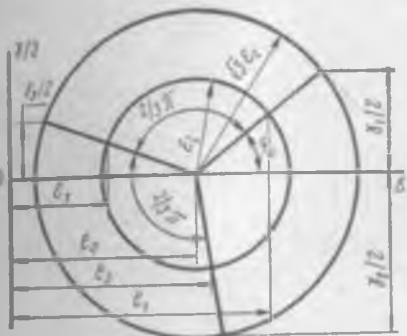


Рис. 2.3. Звезда Пелчинского для деформаций

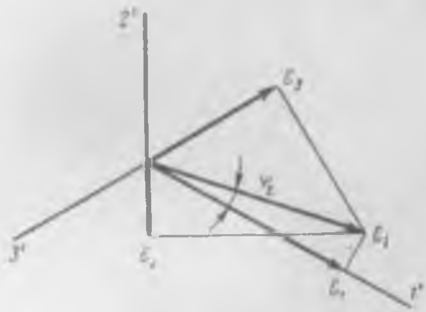


Рис. 2.4. Диаграмма Марциняка для деформаций

Взяв среднее значение этого отношения, получаем

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\gamma_{\max} = 0{,}622\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_3). \qquad (2.28)$$

Это значение отличается от крайних примерно на 7%.

Выразим теперь параметр Надаи—Лоде через угол вида деформированного состояния. Для этого преобразуем выражение (2.24), используя соотношения (2.6) и (2.25). Тогда получим

$$\chi_\varepsilon = -\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(\psi_\varepsilon + \frac{4}{3}\pi\right), \qquad (2.29)$$

что по форме совпадает с выражением (1.42).

Поскольку для одноосного растяжения, одноосного сжатия и чистого сдвига параметры Надаи—Лоде по напряжениям и деформациям совпадают, величины ψ_σ и ψ_ε для этих напряженных состояний также совпадают, т. е. для одноосного растяжения $\psi_\varepsilon = 0$, для одноосного сжатия $\psi_\varepsilon = \frac{\pi}{3}$, для чистого сдвига $\psi_\varepsilon = \frac{\pi}{6}$.

Формулы (2.25) и (2.27) могут быть графически интерпретированы при помощи построения, называемого звездой Пелчинского для деформаций (рис. 2.3), которое аналогично построению на рис. 1.12 [7]. Оно очевидно из чертежа, и пояснений не требуется.

Диаграмма Марциняка для деформаций в предположении, что сумма линейных деформаций равна нулю (объем тела при деформации не изменяется — тело несжимаемо), изображена на рис. 2.4 [6]. Это построение может быть доказано при помощи формул (2.25).

§ 15. Приращения деформаций

Предположим, что в течение бесконечно малого промежутка времени dt компоненты перемещения некоторой точки тела u_i возрастают на

$$du_i = v_i\, dt, \tag{2.30}$$

где v_i — компоненты скорости перемещения точки.

Вычислим по формулам (2.1) бесконечно малые приращения компонентов деформации $d\varepsilon_{ij}$. Тогда получим

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(du_j)\right]. \tag{2.31}$$

Эти величины образуют тензор бесконечно малых приращений деформаций $d\varepsilon_{ij}$ или

$$T_{d\varepsilon} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x & \frac{d\gamma_{xy}}{2} & \frac{d\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{d\gamma_{xy}}{2} & d\varepsilon_y & \frac{d\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{d\gamma_{zx}}{2} & \frac{d\gamma_{yz}}{2} & d\varepsilon_z \end{Bmatrix}. \tag{2.32}$$

Аналогично тому, как это было сделано для деформаций, теперь можно определить интенсивность приращений деформаций

$$\overline{d\varepsilon_i} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)} \tag{2.33}$$

или интенсивность приращений пластических деформаций

$$\overline{d\varepsilon_i^p} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2 + \frac{3}{2}[(d\gamma_{xy}^p)^2 + (d\gamma_{yz}^p)^2 + (d\gamma_{zx}^p)^2]}. \tag{2.34}$$

В сокращенной тензорной записи

$$\overline{d\varepsilon_i} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}}\,; \quad \overline{d\varepsilon_i^p} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}. \tag{2.35}$$

Интенсивность приращений деформаций $\overline{d\varepsilon_i}$ не равняется приращению интенсивности $d\varepsilon_i$, чем и объясняется введение черточки в обозначение для интенсивности приращения деформаций.

Как и раньше, можно построить круговую диаграмму для приращений деформаций, а также определить параметр Надаи—Лоде

$$\chi_{d\varepsilon} = 2\,\frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3} - 1. \qquad (2.36)$$

Компоненты приращения деформаций можно выразить через *угол вида приращения деформаций* $\psi_{d\varepsilon}$ и дать графическую интерпретацию в виде диаграммы Мора, звезды Пелчинского или диаграммы Марциняка для приращений деформаций.

В формулах (2.31) приращения компонентов деформаций вычисляют по отношению к текущему (мгновенному) состоянию. В частном случае одноосного однородного растяжения стержня приращение осевой деформации

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l},$$

где l — текущая длина стержня; dl — бесконечно малое ее изменение. Суммирование приводит к так называемой логарифмической деформации:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln\frac{l}{l_0} = \ln\frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon), \qquad (2.37)$$

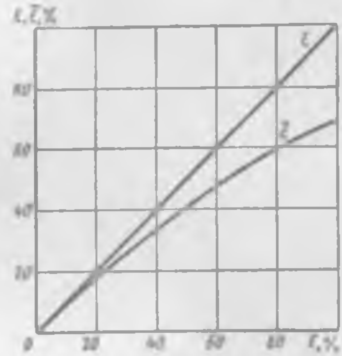


Рис. 2.5. График зависимости логарифмической деформации от деформации

где l_0 — длина стержня до деформации; Δl — удлинение, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ — обычная деформация стержня.

На рис. 2.5 представлен график зависимости (2.37), из которого следует, что при $\varepsilon < 20\%$ различие между логарифмической и обычной деформациями незначительно. При $\varepsilon = 20\%$ оно составляет 10%.

Поскольку значение обычной деформации, при которой образуется шейка, как правило, не превышает 10—15%, до образования шейки логарифмическую деформацию приближенно можно считать равной обычной.

В общем случае интегралы $\int d\varepsilon_{ij}$ можно вычислить, если известен путь деформирования, т. е. если известны компоненты приращений деформаций в функции некоторого параметра, характеризующего процесс деформирования. Если главные оси деформации при деформировании не вращаются, то эти интегралы равны логарифмическим деформациям.

§ 16. Скорости деформаций

Подставив выражения (2.30) в соотношения (2.31), приходим к заключению, что компоненты бесконечно малых приращений деформаций имеют общий множитель dt. Разделив их на этот множитель, получим компоненты скоростей деформаций ξ_{ij}, связанные с компонентами скорости перемещения v_i соотношениями

$$\xi_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.38}$$

Эти величины образуют тензор скоростей деформаций ξ_{ij} или

$$T_{\xi}=\begin{vmatrix} \xi_x & \frac{\eta_{xy}}{2} & \frac{\eta_{xz}}{2} \\ \frac{\eta_{xy}}{2} & \xi_y & \frac{\eta_{yz}}{2} \\ \frac{\eta_{zx}}{2} & \frac{\eta_{yz}}{2} & \xi_z \end{vmatrix}. \tag{2.39}$$

По аналогии с интенсивностями деформаций и приращений деформаций можно определить интенсивность скоростей деформаций

$$\xi_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\xi_x-\xi_y)^2+(\xi_y-\xi_z)^2+(\xi_z-\xi_x)^2+\frac{3}{2}(\eta_{xy}^2+\eta_{yz}^2+\eta_{zx}^2)} \tag{2.40}$$

или в сокращенной тензорной записи

$$\xi_i=\sqrt{\frac{2}{3}(\xi_{ij}-\delta_{ij}\xi_0)(\xi_{ij}-\delta_{ij}\xi_0)}.$$

Если $\xi_0=0$, то

$$\xi_i=\sqrt{\frac{2}{3}\xi_{ij}\xi_{ij}}. \tag{2.41}$$

Далее, так же как и раньше, можно построить круговую диаграмму для скоростей деформаций, определить параметр Надаи—Лоде

$$\chi_{\xi}=2\,\frac{\xi_2-\xi_3}{\xi_1-\xi_3}-1, \tag{2.42}$$

выразить компоненты девиатора скоростей деформаций через *угол вида скоростей деформаций* ψ_{ξ} и дать графическую интерпретацию в виде диаграммы Мора, звезды Пелчинского или диаграммы Марциняка для скоростей деформаций.

Список литературы

1. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд. иностр. лит., 1954, 647 с.

2. **Новожилов В. В.** Теория упругости. М., Судпромгиз, 1958, 370 с.

3. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. 1, М., Машгиз, 1956, 884 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.

4. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М., «Наука», 1974, 559 с.

5. **Филоненко-Бородич М. М.** Теория упругости. М., Физматгиз, 1959, 364 с.

6. **Marciniak Z.** Mechanika procesów tłoczenia blach, Państwowe wydawnictwa naukowo — techniczne, 1961, 271 s.

7. **Pełczyński T.** Wpływ stanu napięcia na przejście materiału w stan plastyczny, «Przegląd mechaniczny», 1951, z 6, s. 175—179, z 7, s. 204—208.

ГЛАВА III

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ И УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 17. Зависимости между деформациями и напряжениями для упругого изотропного тела

Из курса сопротивления материалов известно, что в пределах упругости зависимости компонентов деформации от компонентов напряжения для изотропного тела имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right];\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right];\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right];\\
\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{xz}}{G},
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где E и G — модули упругости первого и второго рода, μ — коэффициент поперечной деформации. Между этими величинами существует следующая связь:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{3.2}$$

Объемная деформация Δ, равная при малых деформациях сумме линейных деформаций, пропорциональна сумме нормальных напряжений [15]

$$\Delta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{3K}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{\sigma_0}{K}, \tag{3.3}$$

где K — объемный модуль упругости

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \tag{3.4}$$

Если принять $\mu = 0{,}3$, то согласно формуле (3.4) $K = 0{,}84E$.

В сокращенной тензорной записи соотношения (3.1) имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{3\mu}{1+\mu}\sigma_0\right). \tag{3.5}$$

Как известно из курса теории упругости [10], для изотропного упругого тела компоненты деформации могут быть представлены в виде частных производных от удельной потенциальной энергии деформации U по компонентам напряжения:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial \sigma_x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial U}{\partial \sigma_y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U}{\partial \sigma_z}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial \tau_{xy}}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial U}{\partial \tau_{yz}}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial \tau_{zx}} \end{aligned}\right| \tag{3.6}$$

или в сокращенной тензорной записи, с учетом закона парности касательных напряжений,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ji}}\right), \tag{3.7}$$

а компоненты напряжений, в свою очередь, могут быть представлены в виде частных производных от удельной потенциальной энергии деформации по компонентам деформации

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ji}}\right).$$

Установим зависимости между компонентами девиатора напряжений и компонентами девиатора деформаций в пределах упругости, используя соотношения (3.5), (3.3) и (3.4):

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} e_0 = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{3\mu}{1+\mu}\sigma_0\right) -$$

$$- \delta_{ij}\frac{\sigma_0}{3K} = \frac{1}{2G}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) = \frac{s_{ij}}{2G}. \tag{3.8}$$

Таким образом, в пределах упругости компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам девиатора деформаций, причем коэффициентом пропорциональности является удвоенная величина модуля сдвига.

Выясним связь между интенсивностями напряжений и деформаций в пределах упругости. Для этого подставим в формулу (2.17) выражения (3.8). Тогда, используя зависимость (1.20), получим

$$\sigma_i = 3Ge_i \tag{3.9}$$

или на основании соотношений (1.18) и (2.15)

$$T = G\Gamma.$$

Следовательно, в пределах упругости интенсивность напряжений прямо пропорциональна интенсивности деформаций.

§ 18. Условия начала пластичности для изотропного тела

Зависимости (3.1) можно вывести на основе закона Гука для одноосного напряженного состояния [15]. Последний верен только в начальной стадии нагружения. Поэтому уравнения (3.1) справедливы тоже только в начальной стадии нагружения до образования пластических деформаций. Условия возникновения пластических деформаций — условия начала пластичности рассматриваются в курсе «Сопротивление материалов» в разделе, посвященном гипотезам прочности. Ниже эти вопросы будут изложены несколько в иной форме.

Поскольку в начальной стадии нагружения справедлив закон Гука, возникновение пластических деформаций однозначно определяется напряжениями. Следовательно, условие начала пластичности может быть представлено в виде

$$f_T(\sigma_{ij}) = 0. \tag{3.10}$$

В это уравнение входят также механические характеристики материала, определяющие возникновение пластических деформаций при простейших напряженных состояниях, например, пределы текучести материала при одноосных растяжении и сжатии.

Для геометрической интерпретации условия начала пластичности представим себе шестимерное пространство компонентов напряжений, каждая точка которого (изображающая точка) представляет собой некоторое напряженное состояние. Тензор напряжений в этом пространстве условимся изображать вектором $\bar{\sigma}_{ij}$, составляющие которого равны компонентам тензора напряжений σ_{ij} (рис. 3.1). Тогда уравнение (3.10) является уравнением гиперповерхности начала пластичности $\sum_T$.

Когда изображающая точка лежит внутри этой поверхности (точка B на рис. 3.1), материал деформирован упруго, а когда она лежит на ней (точка A на рис. 3.1) — возникают пластические деформации. В трехмерном пространстве главных напряжений условие начала пластичности является уравнением поверхности начала пластичности.

Для изотропного тела значения функции $f_T(\sigma_{ij})$ не должны изменяться при повороте системы осей координат, т. е. условие пластичности может быть записано в виде функции инвариантов тензора напряжений

$$f_T[I_1(T_\sigma),\ I_2(T_\sigma),\ I_3(T_\sigma)] = 0.$$

Как отмечалось выше (см. § 3), при всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают. Поэтому можно принять, что условие пластичности может быть представлено в виде функции второго и третьего инвариантов девиатора напряжений (так как первый инвариант девиатора напряжений равен нулю)

$$f_T[I_2(D_\sigma),\ I_3(D_\sigma)] = 0. \tag{3.11}$$

В системе координат σ_1, σ_2, σ_3 (рис. 1.7) уравнение (3.11) описывает цилиндр, образующие которого перпендикулярны к девиаторной плоскости, так как среднее нормальное напряжение не входит в уравнение (3.11). Поэтому достаточно рассмотреть след этого цилиндра на девиаторной плоскости. Эта кривая C (рис. 3.2) должна обладать следующими свойствами: 1) не проходить через начало координат, так как пластические деформации возникают лишь при значительных напряжениях; 2) луч из начала координат должен пересекать кривую C только 1 раз (иначе существовало бы два подобных напряженных состояния, удовлетворяющих условию начала пластичности, что невозможно); 3) кривая должна быть симметрична относительно осей $1'$, $2'$, $3'$, так как они равноправны вследствие изотропности тела; 4) кривая должна быть симметрична относительно прямых, перпендикулярных к осям $1'$, $2'$, $3'$, поскольку предполагается, что механические свойства материала при растяжении и сжатии одинаковы и эффект Баушингера не учитывается.

Рис. 3.1. Поверхность начала пластичности в шестимерном пространстве напряжений

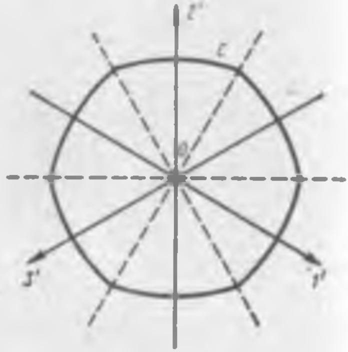


Рис. 3.2. След пересечения поверхности начала пластичности в системе координат σ_1, σ_2, σ_3 с девиаторной плоскостью

На основании изложенного заключаем, что кривая C состоит из 12 одинаковых дуг, как это изображено на рис. 3.2. В дальнейшем (см. § 22) будет показано, что она должна быть выпуклой. В таком случае очевидно, что кривая заключена между двумя правильными шестиугольниками $ACEGIK$ и $BDFHJL$ (рис. 3.3), проходящими через точки на осях $1'$, $2'$ и $3'$ с координатами $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$, где σ_T — предел текучести материала при растяжении или сжатии. Это следует из того, что косинусы углов между осями σ_1 и $1'$, σ_2 и $2'$, σ_3 и $3'$ равны $\sqrt{\frac{2}{3}}$, а точки на осях 1, 2, 3, изображающие одноосные напряженные состояния, при которых возникают пластические деформации, имеют координаты σ_T.

Уравнения граней шестигранных призм, пересечение которых с девиаторной плоскостью дает указанные выше шестиугольники $ACEGIK$ и $BDFHJL$, имеют вид соответственно

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_T; \ |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_T; \ |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_T \tag{3.12}$$

и

$$|\sigma_1 - \sigma_0| = \frac{2}{3}\sigma_T; \quad |\sigma_2 - \sigma_0| = \frac{2}{3}\sigma_T; \quad |\sigma_3 - \sigma_0| = \frac{2}{3}\sigma_T. \tag{3.13}$$

Проведем окружность радиуса $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$, описанную вокруг шестиугольника $ACEGIK$ и вписанную в шестиугольник $BDFHJL$. Уравнение цилиндра, пересечение которого с девиаторной плоскостью дает эту окружность, имеет вид

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_T^2. \tag{3.14}$$

На основании уравнений (3.12) условие начала пластичности можно представить в виде

$$\max\{|\sigma_1-\sigma_2|, |\sigma_2-\sigma_3|, |\sigma_3-\sigma_1|\}=\sigma_T \tag{3.15}$$

или, если обозначать главные напряжения, учитывая неравенство $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, то тогда их можно объединить в одно

$$\sigma_1-\sigma_3=\sigma_T. \tag{3.16}$$

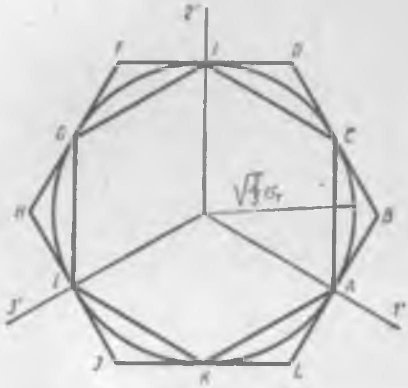


Рис. 3.3. Следы пересечения поверхностей начала пластичности в системе координат σ_1, σ_2, σ_3 с девиаторной плоскостью

Впервые такое условие было получено на основании экспериментального исследования истечения металлов через отверстия, проведенного французским инженером Треска в 1868 г. В этих испытаниях было установлено, что в состоянии текучести наибольшее касательное напряжение во всех точках среды постоянно и равно пределу текучести материала при чистом сдвиге. Сен-Венан дал математическую формулировку этого условия для плоской задачи. Условие (3.15) называют условием начала пластичности наибольшего касательного напряжения или условием пластичности Треска — Сен-Венана. В курсе сопротивления материалов оно известно как теория прочности наибольших касательных напряжений.

Недостатком рассмотренного условия пластичности является, как это следует из формулы (3.16), неучет влияния промежуточного главного напряжения σ_2 на возникновение пластических деформаций.

На основании уравнений (3.13) условие начала пластичности можно представить в виде

$$\max\{|\sigma_1-\sigma_0|, |\sigma_2-\sigma_0|, |\sigma_3-\sigma_0|\}=\frac{2}{3}\sigma_T. \tag{3.17}$$

Это условие было предложено вначале А. Ю. Ишлинским [6], затем Хиллом [20], Д. Д. Ивлевым [4] и наконец Хейзорнсвейтом [18]. Его называют условием наибольшего приведенного напряжения. Под приведенными напряжениями понимают компоненты девиатора напряжений.

Условие (3.14) было предложено вначале Максвеллом [9], а потом Хубером [21] на основе рассмотрения потенциальной энергии деформации формы тела.

Затем Мизес [8] предложил приближенно заменить шестигранную призму Треска — Сен-Венана круговым цилиндром [уравнение (3.14)]. Мизес считал условие (3.16) точным, а (3.14) приближенным. Однако произведенная в дальнейшем экспериментальная проверка условий начала пластичности показала, что условие (3.14) лучше согласуется с результатами опытов, чем условие (3.16).

В курсе сопротивления материалов условие (3.14) обычно выводится путем рассмотрения потенциальной энергии изменения формы и называется энергетическим условием начала пластичности. Иногда его называют условием начала пластичности Хубера—Мизеса.

Согласно уравнению (1.21) условие (3.14) может быть представлено в виде

$$\sigma_i = \sigma_T, \tag{3.18}$$

т. е. пластические деформации возникают тогда, когда интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала при растяжении.

Учитывая установленное в § 7 приближенное выражение для интенсивности напряжений (1.41), заключаем, что условия наибольшего касательного напряжения и энергетическое незначительно отличаются друг от друга.

Разберем теперь перечисленные выше условия начала пластичности для частного случая плоского напряженного состояния ($\sigma_3 = 0$). Условие наибольшего касательного напряжения (3.15) принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } \sigma_1\sigma_2 > 0 \text{ и } |\sigma_1| > |\sigma_2| \; |\sigma_1| = \sigma_T; \\ \text{при } \sigma_1\sigma_2 > 0 \text{ и } |\sigma_2| > |\sigma_1| \; |\sigma_2| = \sigma_T; \\ \text{при } \sigma_1\sigma_2 < 0 \; |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_T. \end{array}\right\} \tag{3.19}$$

Эти выражения в системе координат σ_1, σ_2 являются уравнениями шести прямых *ac*, *gi*, *ce*, *ik*, *eg*, *ka*, отсекающих на осях координат отрезки, равные в определенном масштабе пределу текучести материала σ_T и образующие шестиугольник *acegik* (рис. 3.4).

Условие наибольшего приведенного напряжения (3.17) выражается в форме

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } \sigma_1\sigma_2 \gtrless 0 \; |\sigma_1| > |\sigma_2| \; |2\sigma_1 - \sigma_2| = 2\sigma_T; \\ \text{при } \sigma_1\sigma_2 \gtrless 0 \; |\sigma_2| > |\sigma_1| \; |2\sigma_2 - \sigma_1| = 2\sigma_T; \\ \text{при } \sigma_1\sigma_2 > 0 \; |\sigma_1| \gtrless |\sigma_2| \; |\sigma_1 + \sigma_2| = 2\sigma_T. \end{array}\right\} \tag{3.20}$$

Эти соотношения в системе осей координат σ_1, σ_2 являются уравнениями шести прямых *lb*, *fh*, *df*, *jl*, *bd* и *hj*, образующих шестиугольник *bdfhjl* (рис. 3.4).

Полагая в энергетическом условии пластичности (3.14) $\sigma_3 = 0$, получаем

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2, \tag{3.21}$$

т. е. уравнение эллипса, описанного вокруг шестиугольника *acegik* и вписанного в шестиугольник *bdfhjl* (рис. 3.4).

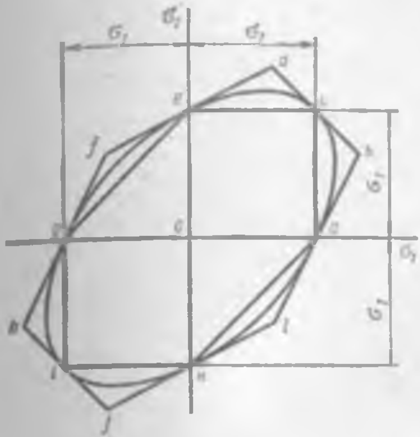


Рис. 3.4. Графики условия начала пластичности наибольших касательных напряжений, наибольших приведенных напряжений и «энергетического» условия начала пластичности для плоского напряженного состояния в системе координат σ_1 σ_2,

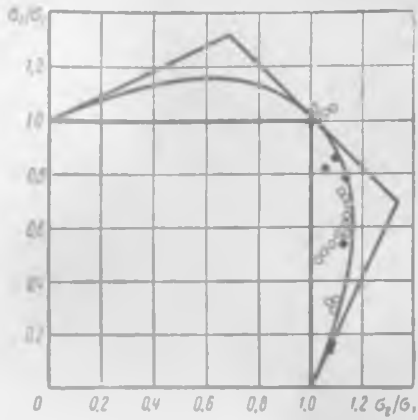


Рис. 3.5. Результаты испытаний стальных (○), медных (●) и никелевых (△) труб, проведенных Лоде [7]

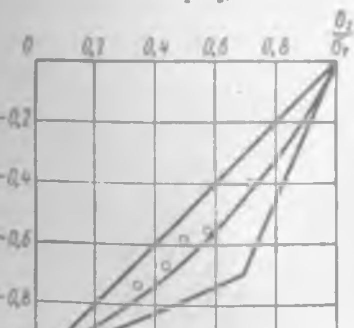


Рис. 3.6. Результаты испытаний стальных труб, проведенных Рошем и Эйхингером [14]

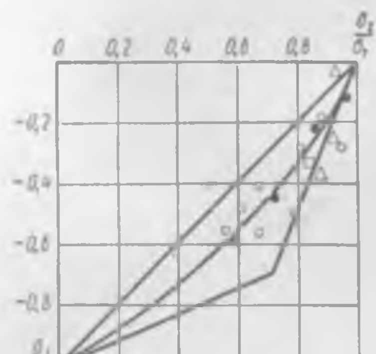


Рис. 3.7. Результаты испытаний труб из меди (○), алюминия (●), мягкой стали (□) и обезуглероженной мягкой стали (△), проведенных Тейлором и Квинни [26]

Из рис. 3.4 следует, для каких напряженных состояний расхождение между рассмотренными выше условиями пластичности наибольшее и для каких наименьшее. В частности, соотношения между пределами текучести для чистого сдвига ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$, $\sigma_3 = 0$)

и растяжения ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) по условию наибольшего касательного напряжения

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2},$$

по условию наибольшего приведенного напряжения

$$\tau_T = \frac{2}{3}\sigma_T,$$

а по энергетическому условию пластичности

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}.$$

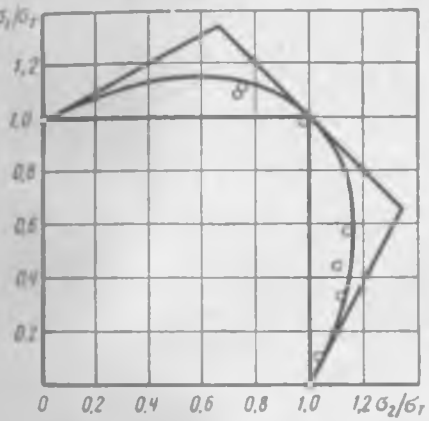


Рис. 3.8. Результаты испытаний труб из хромоникелевой стали, проведенных А. М. Жуковым [2]

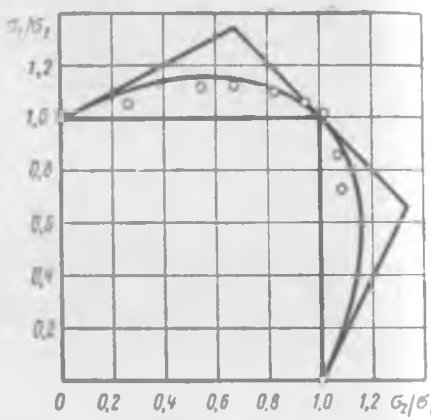


Рис. 3.9. Результаты испытаний труб из стали ЭИ415, проведенных А. М. Жуковым [3]

Экспериментальная проверка условий возникновения пластических деформаций производилась путем испытания тонкостенных трубок при совместном нагружении их растягивающей силой P и внутренним давлением p, растягивающей силой P и крутящим моментом M, крутящим моментом M и внутренним давлением p. Во всех этих случаях напряженное состояние тонкостенных трубок приближенно можно считать однородным и плоским.

Ниже приведены результаты некоторых экспериментальных исследований, часть из которых проводилась для экспериментальной проверки условий пластичности, а часть для проверки основных гипотез теорий пластичности, причем попутно проверялись и условия пластичности. К последним испытаниям мы еще вернемся в следующей главе.

На рис. 3.5 представлены результаты испытаний, проведенных Лоде [7]. Испытанию подвергались тонкостенные стальные, медные и никелевые трубы. Они нагружались растягивающей силой и внутренним давлением. На рис. 3.6 изображены результаты испытаний, проделанных Рошем и Эйхингером [14]. Они испытывали тонкостенные стальные трубы при совместном растяжении и кручении. Такие же испытания тонкостенных стальных, медных и алюминиевых труб были проведены Тейлором и Квинни [26]. Результаты их изображены на рис. 3.7. На рис. 3.8 и 3.9 приведены результаты опытов А. М. Жукова [2, 3]. Им были испытаны тонкостенные трубы из хромоникелевой стали и стали ЭИ415 при совместном нагружении растягивающей силой и внутренним давлением.

На рис. 3.5—3.9 в координатах $\frac{\sigma_2}{\sigma_T}$ и $\frac{\sigma_1}{\sigma_T}$ представлены графики условий пластичности наибольшего касательного напряжения (3.19), наибольшего приведенного напряжения (3.20) и «энергетического условия» (3.21).

Из этих графиков следует, что результаты экспериментальных исследований лучше согласуются с энергетическим условием, нежели с двумя другими.

§ 19. Условие начала пластичности для анизотропного тела

Анизотропными материалами называют такие материалы, свойства которых в разных направлениях различны. Металлы состоят из большого числа микроскопических кристаллов, связанных в зерна. Кристалл анизотропен. Поскольку кристаллы в зернах и сами зерна ориентированы друг относительно друга самым различным образом, индивидуальные особенности каждого кристалла не проявляются и часто поликристаллические металлы можно рассматривать как изотропные тела. Однако в результате пластической обработки (ковка, прокатка) поликристаллические металлы могут стать анизотропными материалами, у которых механические свойства зависят от направления. Иногда такую анизотропию называют деформационной в отличие от начальной анизотропии кристалла. В то же время она является начальной по отношению к анизотропии, возникшей при последующем деформировании. Одной из причин анизотропии, возникающей в результате пластического деформирования, является появление текстуры, т. е. системы закономерно ориентированных кристаллитов.

В общем случае анизотропного материала Мизесом было предложено следующее условие [23]:

$$\begin{aligned}
&A_{1111}\sigma_x^2 + A_{2222}\sigma_y^2 + A_{3333}\sigma_z^2 + 4A_{1212}\tau_{xy}^2 + 4A_{2323}\tau_{yz}^2 + 4A_{3131}\tau_{zx}^2 + \\
&+ 2A_{1122}\sigma_x\sigma_y + 2A_{2233}\sigma_y\sigma_z + 2A_{3311}\sigma_z\sigma_x + 4A_{1112}\sigma_x\tau_{xy} + 4A_{1123}\sigma_x\tau_{yz} + \\
&+ 4A_{1131}\sigma_x\tau_{zx} + 4A_{2212}\sigma_y\tau_{xy} + 4A_{2223}\sigma_y\tau_{yz} + 4A_{2231}\sigma_y\tau_{zx} + 4A_{3312}\sigma_z\tau_{xy} + \\
&+ 4A_{3323}\sigma_z\tau_{yz} + 4A_{3331}\sigma_z\tau_{zx} + 8A_{1223}\tau_{xy}\tau_{yz} + 8A_{2331}\tau_{yz}\tau_{zx} + 8A_{3112}\tau_{zx}\tau_{xy} = 1,
\end{aligned}$$

которое иногда называют квадратичным условием пластичности. Число различных постоянных A_{ijkl} в этом уравнении равно 21.

В сокращенной тензорной записи это уравнение имеет вид

$$A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1.$$

Как известно, тело, у которого имеется три взаимно перпендикулярных плоскости симметрии по отношению к механическим свойствам, называют ортотропным. Примером такого тела является листовой материал.

Если оси x, y и z для такого тела совместить с осями симметрии (для листового материала это будут направление прокатки и два направления, перпендикулярные к нему), то из соображений симметрии следует отбросить все слагаемые, содержащие касательные напряжения в первой степени и произведения различных касательных и растяжения ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) по условию наибольшего касательного напряжения

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2},$$

по условию наибольшего приведенного напряжения

$$\tau_T = \frac{2}{3}\sigma_T,$$

а по энергетическому условию пластичности

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}.$$

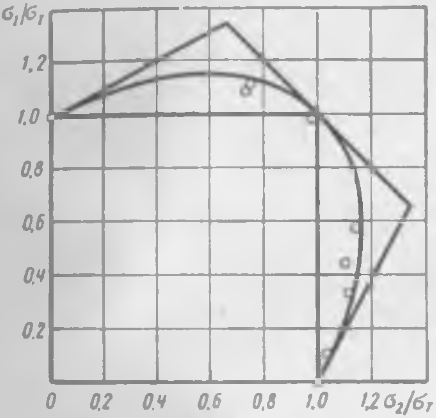


Рис. 3.8. Результаты испытаний труб из хромоникелевой стали, проведенных А. М. Жуковым [2]

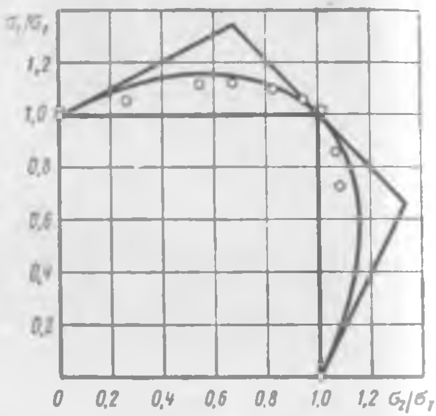


Рис. 3.9. Результаты испытаний труб из стали ЭИ415, проведенных А. М. Жуковым [3]

Экспериментальная проверка условий возникновения пластических деформаций производилась путем испытания тонкостенных трубок при совместном нагружении их растягивающей силой P и внутренним давлением p, растягивающей силой P и крутящим моментом M, крутящим моментом M и внутренним давлением p. Во всех этих случаях напряженное состояние тонкостенных трубок приближенно можно считать однородным и плоским.

Ниже приведены результаты некоторых экспериментальных исследований, часть из которых проводилась для экспериментальной проверки условий пластичности, а часть для проверки основных гипотез теорий пластичности, причем попутно проверялись и условия пластичности. К последним испытаниям мы еще вернемся в следующей главе.

На рис. 3.5 представлены результаты испытаний, проведенных Лоде [7]. Испытанию подвергались тонкостенные стальные, медные и никелевые трубы. Они нагружались растягивающей силой и внутренним давлением. На рис. 3.6 изображены результаты испытаний, проделанных Рошем и Эйхингером [14]. Они испытывали тонкостенные стальные трубы при совместном растяжении и кручении. Такие же испытания тонкостенных стальных, медных и алюминиевых труб были проведены Тейлором и Квинни [26]. Результаты их изображены на рис. 3.7. На рис. 3.8 и 3.9 приведены результаты опытов А. М. Жукова [2, 3]. Им были испытаны тонкостенные трубы из хромоникелевой стали и стали ЭИ415 при совместном нагружении растягивающей силой и внутренним давлением.

На рис. 3.5—3.9 в координатах $\frac{\sigma_2}{\sigma_т}$ и $\frac{\sigma_1}{\sigma_т}$ представлены графики условий пластичности наибольшего касательного напряжения (3.19), наибольшего приведенного напряжения (3.20) и «энергетического условия» (3.21).

Из этих графиков следует, что результаты экспериментальных исследований лучше согласуются с энергетическим условием, нежели с двумя другими.

§ 19. Условие начала пластичности для анизотропного тела

Анизотропными материалами называют такие материалы, свойства которых в разных направлениях различны. Металлы состоят из большого числа микроскопических кристаллов, связанных в зерна. Кристалл анизотропен. Поскольку кристаллы в зернах и сами зерна ориентированы друг относительно друга самым различным образом, индивидуальные особенности каждого кристалла не проявляются и часто поликристаллические металлы можно рассматривать как изотропные тела. Однако в результате пластической обработки (ковка, прокатка) поликристаллические металлы могут стать анизотропными материалами, у которых механические свойства зависят от направления. Иногда такую анизотропию называют деформационной в отличие от начальной анизотропии кристалла. В то же время она является начальной по отношению к анизотропии, возникшей при последующем деформировании. Одной из причин анизотропии, возникающей в результате пластического деформирования, является появление текстуры, т. е. системы закономерно ориентированных кристаллитов.

В общем случае анизотропного материала Мизесом было предложено следующее условие [23]:

$$A_{1111}\sigma_x^2 + A_{2222}\sigma_y^2 + A_{3333}\sigma_z^2 + 4A_{1212}\tau_{xy}^2 + 4A_{2323}\tau_{yz}^2 + 4A_{3131}\tau_{zx}^2 +$$
$$+ 2A_{1122}\sigma_x\sigma_y + 2A_{2233}\sigma_y\sigma_z + 2A_{3311}\sigma_z\sigma_x + 4A_{1112}\sigma_x\tau_{xy} + 4A_{1123}\sigma_x\tau_{yz} +$$
$$+ 4A_{1131}\sigma_x\tau_{zx} + 4A_{2212}\sigma_y\tau_{xy} + 4A_{2223}\sigma_y\tau_{yz} + 4A_{2231}\sigma_y\tau_{zx} + 4A_{3312}\sigma_z\tau_{xy} +$$
$$+ 4A_{3323}\sigma_z\tau_{yz} + 4A_{3331}\sigma_z\tau_{zx} + 8A_{1223}\tau_{xy}\tau_{yz} + 8A_{2331}\tau_{yz}\tau_{zx} + 8A_{3112}\tau_{zx}\tau_{xy} = 1,$$

которое иногда называют квадратичным условием пластичности. Число различных постоянных A_{ijkl} в этом уравнении равно 21.

В сокращенной тензорной записи это уравнение имеет вид

$$A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1.$$

Как известно, тело, у которого имеется три взаимно перпендикулярных плоскости симметрии по отношению к механическим свойствам, называют ортотропным. Примером такого тела является листовой материал.

Если оси x, y и z для такого тела совместить с осями симметрии (для листового материала это будут направление прокатки и два направления, перпендикулярные к нему), то из соображений симметрии следует отбросить все слагаемые, содержащие касательные напряжения в первой степени и произведения различных касательных напряжений, так как они могут изменять свой знак при изменении направления. Тогда для ортотропного материала получим

$$A_{1111}\sigma_x^2 + A_{2222}\sigma_y^2 + A_{3333}\sigma_z^2 + 4A_{1212}\tau_{xy}^2 + 4A_{2323}\tau_{yz}^2 + 4A_{3131}\tau_{zx}^2 + \\ + 2A_{1122}\sigma_x\sigma_y + 2A_{2233}\sigma_y\sigma_z + 2A_{3311}\sigma_z\sigma_x = 1. \tag{3.22}$$

В этом случае число постоянных уменьшилось до 9.

Примем, как это было сделано Мизесом [23], что при всестороннем равном растяжении или сжатии в анизотропном материале так же, как и в изотропном (см. § 18), пластические деформации не возникают. Это позволяет получить добавочные соотношения между постоянными A_{ijkl}. Их можно установить из условия неизменности соотношения (3.22) при подстановке в него вместо компонентов тензора напряжения $\sigma_x, \ldots, \tau_{zx}$ компонентов тензора напряжения $\sigma_x+p, \ldots, \tau_{zx}$, отличающегося от первого на шаровой тензор с компонентами p. Приравнивая нулю слагаемые при первой и второй степенях p, получим

$$\left.\begin{aligned} 2A_{1111} + 2A_{1122} + 2A_{3311} = 0; \\ 2A_{2222} + 2A_{1122} + 2A_{2233} = 0; \\ 2A_{3333} + 2A_{2233} + 2A_{3311} = 0; \\ A_{1111} + A_{2222} + A_{3333} + \\ + 2A_{1122} + 2A_{2233} + 2A_{3311} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Из первых трех соотношений (3.23) легко установить

$$\left.\begin{aligned} -2A_{1122} = A_{1111} + A_{2222} - A_{3333}; \\ -2A_{2233} = A_{2222} + A_{3333} - A_{1111}; \\ -2A_{3311} = A_{3333} + A_{1111} - A_{2222}. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Как легко убедиться, эти выражения удовлетворяют четвертому соотношению (3.23).

Подставим теперь соотношения (3.24) в условие пластичности (3.22). Тогда после преобразований имеем:

$$H_0(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F_0(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G_0(\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 2N_0\tau_{xy}^2 + 2L_0\tau_{yz}^2 + 2M_0\tau_{zx}^2 = 1, \tag{3.25}$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2}(A_{1111} + A_{2222} - A_{3333});$$

$$F_0 = \frac{1}{2}(A_{2222} + A_{3333} - A_{1111});$$

$$G_0 = \frac{1}{2}(A_{3333} + A_{1111} - A_{2222});$$

$$N_0 = 2A_{1212}; \quad L_0 = 2A_{2323}; \quad M_0 = 2A_{3131}.$$

В таком виде условие пластичности было предложено Хиллом [19]. Постоянные в условии (3.25) можно определить, применяя его для частных случаев одноосных растяжений в направлении осей x, y, z и сдвигов между этими осями. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} H_0 + G_0 = \frac{1}{\sigma_{xT}^2}; \quad H_0 + F_0 = \frac{1}{\sigma_{yT}^2}; \\ F_0 + G_0 = \frac{1}{\sigma_{zT}^2}; \quad N_0 = \frac{1}{2\tau_{xyT}^2}; \\ L_0 = \frac{1}{2\tau_{yzT}^2}; \quad M_0 = \frac{1}{2\tau_{zxT}^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

откуда следует, что

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{xT}^2} + \frac{1}{\sigma_{yT}^2} - \frac{1}{\sigma_{zT}^2}\right); \\ F_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{yT}^2} + \frac{1}{\sigma_{zT}^2} - \frac{1}{\sigma_{xT}^2}\right); \\ G_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{zT}^2} + \frac{1}{\sigma_{xT}^2} - \frac{1}{\sigma_{yT}^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Подставим выражения (3.27) и (3.26) в условие пластичности (3.25). Тогда получим иную форму этого условия

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{xT}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{yT}^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_{zT}^2} - \left(\frac{1}{\sigma_{xT}^2} + \frac{1}{\sigma_{yT}^2} - \frac{1}{\sigma_{zT}^2}\right)\sigma_x\sigma_y -$$

$$-\left(\frac{1}{\sigma_{yT}^2} + \frac{1}{\sigma_{zT}^2} - \frac{1}{\sigma_{xT}^2}\right)\sigma_y\sigma_z - \left(\frac{1}{\sigma_{zT}^2} + \frac{1}{\sigma_{xT}^2} - \frac{1}{\sigma_{yT}^2}\right)\sigma_z\sigma_x +$$

$$+\frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{xyT}^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{\tau_{yzT}^2} + \frac{\tau_{zx}^2}{\tau_{zxT}^2} = 1. \tag{3.28}$$

Найдем теперь величину предела текучести $\sigma_{\nu T}$ в случае одноосного растяжения образца, ось которого ν лежит в плоскости xy и составляет угол α с осью x. В случае листового материала это будет соответствовать образцу, вырезанному из листа, причем угол между направлением образца и направлением проката равен α.

В этом случае

$$\sigma_x = \sigma_{\nu T}\cos^2\alpha;\quad \sigma_y = \sigma_{\nu T}\sin^2\alpha;\quad \sigma_z = 0;$$
$$\tau_{xy} = \sigma_{\nu T}\sin\alpha\cos\alpha;\quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Подставляя эти компоненты напряжений в условие пластичности (3.25), получим

$$\sigma_{\nu T} = [F_0\sin^2\alpha + G_0\cos^2\alpha + H_0 +$$
$$+ (2N_0 - F_0 - G_0 - 4H_0)\sin^2\alpha\cos^2\alpha]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.29}$$

Исследование этого выражения приводит к заключению, что экстремумы имеют место для направлений x и y, а также для направления, определяемого углом $\bar{\alpha}$

$$\operatorname{tg}^2\bar{\alpha} = \frac{N_0 - G_0 - 2H_0}{N_0 - F_0 - 2H_0}. \tag{3.30}$$

Если $N_0 > G_0 + 2H_0$ и $N_0 > F_0 + 2H_0$, то предел текучести имеет максимальные неравные значения в направлениях x и y и минимальное значение в направлении под углом $\bar{\alpha}$ к оси x. Если $N_0 < G_0 + 2H_0$ и $N_0 < F_0 + 2H_0$, то предел текучести имеет минимальные неравные значения в направлениях x и y и максимальное значение в направлении под углом $\bar{\alpha}$ к оси x. Если N_0 находится между $G_0 + 2H_0$ и $F_0 + 2H_0$, действительных значений для $\bar{\alpha}$ не существует и предел текучести имеет максимум в направлении x и минимум в направлении y при $F_0 > G_0$ и, наоборот, при $F_0 < G_0$.

На рис. 3.10 представлено данное в работе [13] сопоставление графиков зависимости условного предела текучести от угла наклона оси образца к направлению прокатки (ось x), построенных по формуле (3.29), с результатами экспериментов, изображенных точками. Как следует из этого чертежа, экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими.

Приведем результаты экспериментальной проверки рассмотренного условия текучести [1]. Испытанию подвергались тонкостенные трубы из стали 45. Они нагружались растягивающей силой и внутренним давлением. Пределы текучести в продольном и окружном направлениях равны соответственно $\sigma_{xT} = 335$ МН/м²,

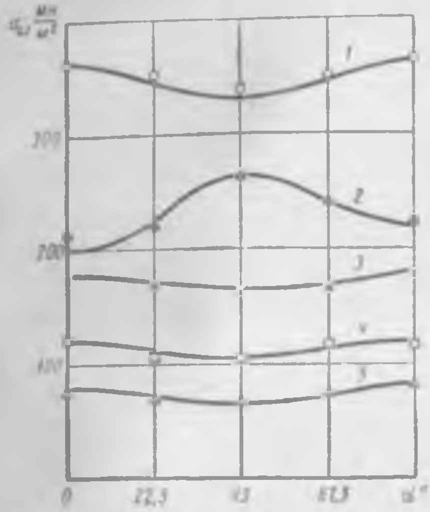


Рис. 3.10. Графики зависимости условного предела текучести от угла наклона оси образца к направлению прокатки [13]:

1 — сталь 0Х18Н9Т; *2* — латунь Л62; *3* — сталь 08кп; *4* — алюминиевомагниевый сплав АМГ6М; *5* — алюминий АМцАМ

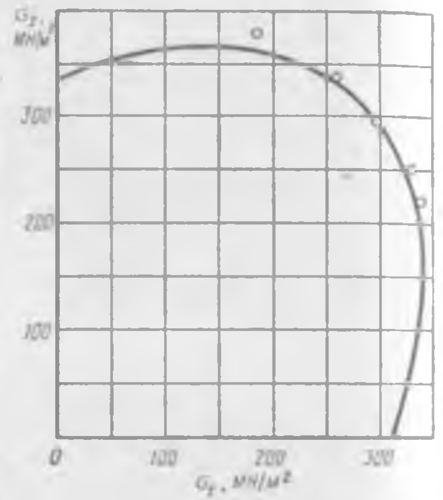


Рис. 3.11. Результаты испытаний труб из стали 45 [1]

$\sigma_{tT} = 311$ МН/м². На рис. 3.11 изображен график зависимости σ_x от σ_T, построенный по формуле (3.28). Точками представлены результаты экспериментов. И в этом случае эксперимент подтверждает теорию.

Список литературы

1. **Бастун В. Н., Черняк Н. И.** О применимости некоторых условий пластичности для анизотропной стали. — «Прикладная механика», 1966, т. II, в. 1, с. 92—98.
2. **Жуков А. М.** Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии. — «Инженерный сборник», 1954. т. XX, с. 37—48.
3. **Жуков А. М.** Сложное нагружение и теория пластичности изотропных металлов. — «Известия АН СССР, ОТН», 1955, № 8, с. 81—92.
4. **Ивлев Д. Д.** К построению теории идеальной пластичности. — «Прикладная математика и механика», 1958. т. XXII, в. 6, с. 850—855.
5. **Ильюшин А. А., Ленский В. С.** Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959, 371 с.
6. **Ишлинский А. Ю.** Гипотеза прочности формоизменения. — «Учебные записки МГУ. Механика», 1940, вып. XLVI, с. 117—124.
7. **Лоде В.** Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 168—205.
8. **Мизес Р.** Механика твердых тел в пластически деформированном состоянии. — В кн.. Теория пластичности М., Изд. иностр. лит., 1948 с 57—69

9. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд. иностр. лит. Т. I, 1954, 647 с. Т. II, 1969, 863 с.
10. **Папкович П. Ф.** Теория упругости. М., Оборонгиз, 1939, 640 с.
11. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. I, М., Машгиз, 1956, 884 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.
12. **Работнов Ю. Н.** Сопротивление материалов, М., Физматгиз, 1962, 455 с.
13. **Ренне И. П., Шевелев В. В., Яковлев С. П.** Об оценке анизотропии механических свойств листовых материалов. — В кн.: Технология машиностроения. Вып. I. Исследования в области пластических деформаций и обработки металлов давлением. Тула, Приокское книжное издательство, 1967, с. 100—108.
14. **Рош М., Эйхингер А.** Опыты, связанные с выяснением вопроса об опасности разрушения. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 157—167.
15. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М., «Наука», 1974, 559 с.
16. **Филоненко-Бородич М. М.** Теория упругости. М., Физматгиз, 1959, 364 с.
17. **Филоненко-Бородич М. М.** Механические теории прочности. М., Изд. МГУ, 1961, 91 с.
18. **Хейзорнсвейт Р. М.** Дипазон изменения условий текучести для устойчивых идеально-пластических тел. — «Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей», 1961, вып. 5, с. 129—141.
19. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956, 407 с.
20. **Hill R., Wills H. H.** On the state of stress in a plastic—rigid body at the yield point, «The philosophical magazine», Seventh series, 1951, Vol. 42, No 331, p. 868—875.
21. **Huber M. T.** Własciwa praca odkształcenia jako miara wytężenia materiału. Pisma, т. II, Warszawa, Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1956, s. 3—20.
22. **Marin J.** Mechanical behaviour of engineering materials, Prentice — Hall, 1962, 502 p.
23. **Mises R.** Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen.—«Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», 1928, Band 8, Heft 3, s. 161—185.
24. **Pełczynski T.** Zagadnienia wytężenia materiałów. Rys historyczny.—«Obróbka plastyczna», 1962, No 1, s. 9—49.
25. **Reuss E.** Vereinfachte Berechnung der plastischen Formaenderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzund der Schubspannungsfliessbedingung.— «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», 1933, Band 13, Heft 5, s. 356—360.
26. **Taylor G. J. Quinney H.** The plastic distortion of metals. — «Philosophical transactions of the Royal Society», 1931, Ser A, 230, p. 323—362.

РАЗДЕЛ II. ПЛАСТИЧНОСТЬ

ГЛАВА IV
ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 20. Поверхность пластичности

В случае одноосного растяжения или сжатия пластические деформации возникают, когда напряжение достигает величины предела текучести материала (точка A на диаграмме растяжения на рис. 4. 1, *а*). В теории пластичности понятия пределов текучести, пропорциональности и упругости не различаются.

Если напряжение меньше предела текучести (точка B на диаграмме растяжения на рис. 4.1, *а*), материал деформирован упруго, а если больше (точка C на рис. 4.1, *а*) — упруго-пластически.

Для неодноосного напряженного состояния пределы применимости закона Гука для элемента тела определяются условием начала пластичности, которое было рассмотрено в § 18.

При дальнейшем деформировании упрочняющегося материала предел текучести его увеличивается. При нагружении до точки C (рис. 4.1, *а*) предел текучести увеличивается до σ_C. Теперь при нагружении в пределах от 0 до σ_C соблюдается закон Гука. При увеличении напряжения сверх σ_C материал деформируется упруго-пластически. Напряжение σ_C является текущим пределом текучести, разграничивающим упругую разгрузку и нагружение, сопровождающееся дальнейшей пластической деформацией.

Для разграничения упругого и пластического деформирования упрочняющегося материала в общем случае напряженного состояния введем условие пластичности

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \tag{4.1}$$

которое обычно принимают совпадающим по виду с условием начала пластичности (3.10). Существенное отличие между ними заключается в том, что в условие (3.10), как отмечалось выше, входят постоянные для материала механические характеристики, например, пределы текучести при одноосных растяжениях или сжатиях, а в условие (4.1) должна входить еще и некоторая мера упрочнения. В качестве меры упрочнения q обычно принимают или работу пластической деформации

$$q = A^p = \int \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p \tag{4.2}$$

или так называемый параметр Удквиста

$$q = \int \overline{de_i^p}. \qquad (4.3)$$

Интегралы берутся по пути деформирования. В первом случае предполагают, что упрочнение материала определяется только работой пластической деформации, т. е. работой, затраченной на необратимую деформацию. Во втором считают, что мера упрочнения должна отражать накопленную пластическую деформацию. В дальнейшем (см. § 23) будет показано, что для изотропных материалов использование двух рассмотренных мер упрочнения в случае условия пластичности Хубера—Мизеса приводит к одинаковым результатам.

Рис. 4.1. Диаграмма растяжения (*а*). Поверхности начала пластичности $\sum_т$ и пластичности $\sum$ (*б*)

Уравнение (4.1) является уравнением гиперповерхности пластичности $\sum$ (рис. 4.1, *б*) в шестимерном пространстве компонентов тензора напряжения, которая для рассматриваемого состояния элемента среды разделяет области упругого и пластического деформирования. Так же, как и поверхность начала пластичности $\sum_т$, она может быть изображена в трехмерном пространстве главных напряжений.

Размеры, форма и положение поверхности пластичности зависят не только от конечного деформированного состояния, но и от всей истории деформирования. В § 22 будет доказано, что поверхность пластичности является выпуклой. Если компоненты тензора напряжений σ_{ij} получают приращения $d\sigma_{ij}$, то это догружение может привести либо к упругой разгрузке, если вектор $\overline{d\sigma_{ij}}$ направлен внутрь поверхности нагружения, либо к нагружению, при котором развиваются пластические деформации, если вектор $\overline{d\sigma_{ij}}$ направлен наружу поверхности нагружения, либо к так называемому нейтральному нагружению, если вектор $\overline{d\sigma_{ij}}$ лежит в касательной плоскости к поверхности нагружения, при этом материал деформируется упруго.

§ 21. Постулат Друкера

Рассмотрим вначале одноосное растяжение. Диаграмма растяжения материала представлена на рис. 4.2, *а*. Допустим, что образец, нагруженный вначале до напряжения σ (точка C), разгружен затем до напряжения σ^0 (точка D). Это состояние образца будем принимать за исходное. Представим себе теперь нагружение образца до напряжения $\sigma + d\sigma$ (точка H) и последующую разгрузку до напряжения σ^0 (точка D_1). Затраченная при этом невосполнимая работа на единицу объема образца в определенном масштабе равна сумме площадей параллелограмма CC_1D_1D и криволинейного треугольника CHC_1. Следовательно,

$$(\sigma - \sigma^0)\, d\varepsilon^p > 0, \quad d\sigma d\varepsilon^p > 0, \tag{4.4}$$

где $d\varepsilon^p$ — приращение пластической деформации при переходе от точки C к точке H, т. е. при увеличении напряжения на $d\sigma$.

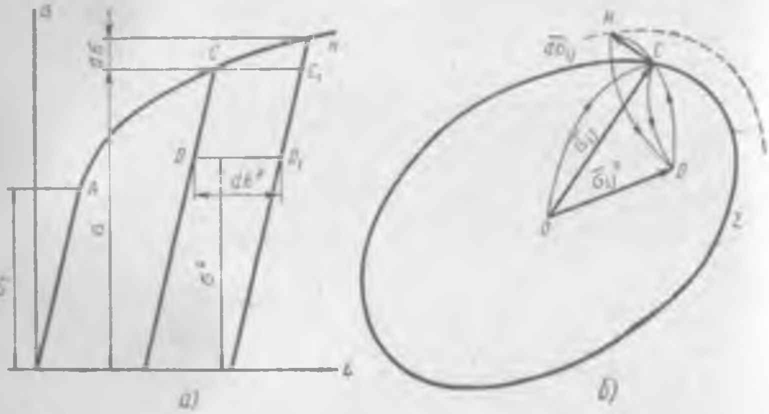


Рис. 4.2. К формулировке постулата Друкера при одноосном (*а*) и неодноосном напряженном состоянии (*б*)

Из условия (4.4) следует, что

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} > 0.$$

Когда это условие нарушается, на диаграмме растяжения появляется ниспадающий участок. Последний, как известно, обусловлен возникновением шейки на образце, в результате чего деформированное состояние становится неоднородным по объему образца. Поэтому второе условие (4.4) можно рассматривать как критерий устойчивости деформирования за пределами упругости. При этом под σ понимают условные напряжения, а под ε обычные (нелогарифмические) деформации.

Перейдем теперь к общему случаю напряженного состояния. Представим себе нагружение по некоторому пути OC (рис. 4.2, *б*) до точки C, лежащей на поверхности пластичности $\sum$, которой соответствует напряженное состояние σ_{ij} и последующее разгружение до точки D, лежащей внутри поверхности пластичности (в частном случае она может лежать и на ней), которой соответствует исходное напряженное состояние σ_{ij}^0. Таким образом, при переходе от точки C к точке D имеют место только упругие деформации. Рассмотрим нагружение от точки D до точки C по некоторому пути, последующее догружение до точки H, которому соответствует изменение тензора напряжений на $d\sigma_{ij}$, вызывающее соответствующее изменение упругой $d\varepsilon_{ij}^e$ и пластической $d\varepsilon_{ij}^p$ деформаций и последующую разгрузку до точки D по какому-либо иному пути.

Согласно постулату Друкера, *работа добавочных напряжений на вызванных ими приращениях деформаций за цикл нагружения и разгрузки положительна*, т. е.

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\, d\varepsilon_{ij}^p + d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p > 0. \qquad (4.5)$$

В это выражение не включена работа добавочных напряжений на упругих деформациях, так как для замкнутого пути деформирования, вследствие обратимости упругих деформаций, она равна нулю.

Если положить $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}$, то тогда из выражения (4.5) получаем

$$d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p > 0. \qquad (4.6)$$

Если $\sigma_{ij}^0 \neq \sigma_{ij}$, то величина $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$ может быть сделана сколько угодно больше $d\sigma_{ij}$. Следовательно, из соотношения (4.5) имеем

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\, d\varepsilon_{ij}^p > 0. \qquad (4.7)$$

Условие (4.6) по аналогии со вторым условием (4.4) можно рассматривать как критерий устойчивости деформирования за пределами упругости в общем случае напряженного состояния.

Из выражения (4.7) замечаем, что

$$\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p > \sigma_{ij}^0\, d\varepsilon_{ij}^p.$$

Это соотношение является математической формулировкой принципа максимума работы пластической деформации, согласно которому: *при любом заданном значении компонентов приращения пластической деформации приращение работы пластической деформации $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ имеет максимальное значение для действительного напряженного состояния по сравнению со всеми возможными напряженными состояниями, удовлетворяющими условию* $f(\sigma_{ij}) < 0$.

§ 22. Ассоциированный закон течения

Компоненты приращения пластической деформации являются функциями компонентов напряжения. Поэтому приращение работы пластической деформации $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ также в конечном счете является функцией компонентов напряжения. Однако они не являются независимыми, так как удовлетворяют условию пластичности (4.1). Поэтому условие относительного максимума функции приращения пластической работы $\sigma_{ij} de^p_{ij}$ по способу множителей Лагранжа запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}\left(\sigma_{ij}\, de^p_{ij} - d\lambda f\right) = 0,$$

где $d\lambda$ — множитель Лагранжа, откуда следует, что

$$de^p_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{4.8}$$

т. е. функция $f(\sigma_{ij})$ — пластический потенциал.

Соотношение (4.8) является математическим выражением так называемого ассоциированного (с условием пластичности) закона течения.

Рис. 4.3. К выводу ассоциированного закона течения

Поясним полученный результат геометрически. Из соотношения (4.7) следует, что скалярное произведение векторов $\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}^0_{ij}$ и $\overline{de}^p_{ij}$ (рис. 4.3) положительно, т. е. угол между ними острый. Так как точка D может быть взята по обе стороны от вектора $\bar{\sigma}_{ij}$ (рис. 4.3, *а*), то поверхность пластичности выпукла, а вектор приращения пластической деформации $\overline{de}^p_{ij}$ направлен по нормали к поверхности пластичности. Только при выполнении этих двух условий угол между векторами $\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}^0_{ij}$ и $\overline{de}^p_{ij}$ будет острым. Если вектор $\overline{de}^p_{ij}$ не перпендикулярен поверхности пластичности (штриховая линия на рис. 4.3, *а*), всегда найдется вектор $\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}^0_{ij}$, составляющий с ним тупой угол.

Если бы поверхность пластичности была невыпукла (рис. 4.3, *б*), то тогда независимо от направления вектора $\overline{de}^p_{ij}$ всегда можно подобрать точку D так, чтобы угол между векторами $\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}^0_{ij}$ и $\overline{de}^p_{ij}$ был тупой.

Поскольку направляющие косинусы нормали к поверхности пропорциональны частным производным от уравнения поверхности по координатам, приходим к соотношению (4.8).

Выше отмечалось, что функция f совпадает по виду с функцией $f_т$ и в нее так же, как и в функцию $f_т$, не входит первый инвариант тензора напряжений или, что то же, величина $\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3}$. В таком случае можно доказать, что в результате пластических деформаций изменение объема равно нулю.

$$d\varepsilon_{ii}^p = 3\, d\varepsilon_0 = 0, \tag{4.9}$$

т. е. тензор приращения пластической деформации является девиатором.

Действительно, из соотношений (1.9) и (1.10) заключаем, что

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\left(\frac{1}{3}\,\delta_{kl}\sigma_{kl}\right),$$

поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}\,\frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} - \delta_{ij}\left(\frac{1}{3}\,\delta_{kl}\,\frac{\partial f}{\partial s_{kl}}\right).$$

Следовательно, согласно формуле (4.8) компоненты приращения пластической деформации могут быть представлены в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\delta_{kl}\,\frac{\partial f}{\partial s_{kl}}\right). \tag{4.10}$$

Умножим обе части этого равенства на δ_{ij}. Тогда получим

$$\delta_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ii}^p = d\lambda\left(\delta_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} - \delta_{kl}\,\frac{\partial f}{\partial s_{kl}}\right) = 0,$$

т. е. приходим к соотношению (4.9).

Определим величину $d\lambda$. Поскольку тензор приращения пластической деформации совпадает с девиатором, подставим компоненты приращений пластических деформаций по формуле (4.8) в выражение для интенсивности приращений пластических деформаций (2.35). В результате получим

$$d\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}}. \tag{4.11}$$

Из этой формулы следует, что $d\lambda > 0$. Поэтому согласно соотношениям (4.6) и (4.8) получаем при нагружении

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\, d\sigma_{ij} > 0, \quad f(\sigma_{ij}) = 0, \quad d\lambda > 0. \tag{4.12}$$

При разгрузке очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\, d\sigma_{ij} < 0, \quad f(\sigma_{ij}) = 0, \quad d\lambda = 0. \tag{4.13}$$

При переходе из пластического состояния в упругое вектор $\overline{d\sigma_{ij}}$ проходит через плоскость, касательную к поверхности пластичности, т. е. имеет место равенство

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad f(\sigma_{ij}) = 0, \quad d\lambda = 0, \tag{4.14}$$

при этом конец вектора напряжения движется по поверхности пластичности. Такой тип нагружения называют нейтральным. Для него законы пластичности и упругости должны совпадать, т. е. при нейтральном нагружении возникают только упругие деформации, что является *условием непрерывности.*

Рис. 4.4. Диаграмма деформирования идеального упруго-пластического материала

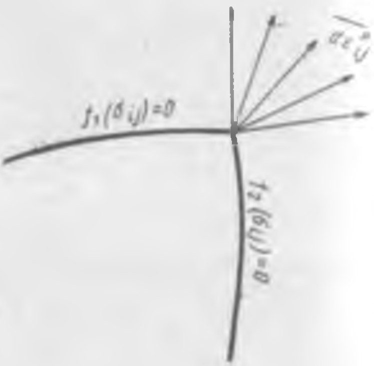


Рис. 4.5. К определению пластического течения на ребре поверхности пластичности

Для материала, не имеющего упрочнения (идеально пластичного материала), диаграмма деформирования которого представлена на рис. 4.4, поверхность пластичности все время совпадает с поверхностью начала пластичности. Тогда нейтральное нагружение является основным типом нагружения, сопровождающимся приращением пластических деформаций. Таким образом, при нагружении

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad f(\sigma_{ij}) = 0, \quad d\lambda > 0, \tag{4.15}$$

а при разгрузке

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad f(\sigma_{ij}) = 0, \quad d\lambda = 0. \tag{4.16}$$

Если поверхность пластичности гладкая (регулярная), т. е. касательная плоскость к ней непрерывно поворачивается, то тогда в каждой точке определена и нормаль к поверхности пластичности. В случае сингулярной поверхности пластичности, имеющей ребра или вершины, это уже несправедливо. Примерами сингулярных поверхностей пластичности, имеющих ребра, являются шестигранные призмы Треска—Сен-Венана или Ишлинского—Хилла—Ивлева—Хейзорнсвейта. Как будет показано далее, использование этих условий в ряде случаев позволяет значительно упростить решения задач. Тогда соотношение (4.8) необходимо дополнить так, чтобы определить пластическое течение на ребрах.

Можно доказать, что пластическое течение на ребре является линейной комбинацией течений на поверхностях, пересечением которых является ребро. Допустим, что ребро образовано пересечением двух поверхностей пластичности (рис. 4.5), уравнения которых

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0 \text{ и } f_2(\sigma_{ij}) = 0.$$

Тогда для точек ребра условие относительного максимума функции приращения пластической работы $\sigma_{ij} de_{ij}^p$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\sigma_{ij} \, de_{ij}^p - d\lambda_1 f_1 - d\lambda_2 f_2 \right) = 0,$$

откуда следует

$$de_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{4.17}$$

Течение на ребре развивается по направлению, лежащему внутри угла, образованного нормалями к двум смежным граням (рис. 4.5).

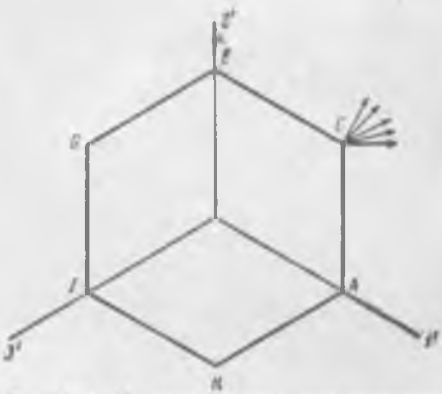


Рис. 4.6. К определению пластического течения на ребре шестигранной призмы Треска—Сен-Венана

В качестве примера рассмотрим течение для точек на ребре шестигранной призмы Треска—Сен-Венана в случае отсутствия упрочнения. След призмы на девиаторной плоскости — правильный шестиугольник $ACEGIK$ (рис. 4.6).

Возьмем точку C, образованную пересечением линий AC и CE. Уравнение соответствующих граней призмы (следами которых являются линии AC и CE) имеет вид

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_T = 0,$$
$$f_2 = \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_T = 0.$$

Для первой грани согласно формуле (4.8) имеем

$$de_1^p : de_2^p : de_3^p = 1 : 0 : -1,$$

причем

$$de_1^p = d\lambda_1,$$

а для второй

$$de_1^p : de_2^p : de_3^p = 0 : 1 : -1,$$

причем

$$de_2^p = d\lambda_2.$$

Для угловой точки, согласно формуле (4.17),

$$de_1^p = d\lambda_1, \quad de_2^p = d\lambda_2,$$

$$de_3^p = -\left(d\lambda_1 + d\lambda_2\right).$$

§ 23. Теория течения

В зависимости от принятого закона изменения размеров и формы поверхности пластичности, который и является законом упрочнения, можно получить различные теории пластичности.

Если в процессе нагружения поверхность пластичности равномерно (изотропно) расширяется (рис. 4.7), упрочнение называют изотропным. В этом случае эффект Баушингера не описывается, поскольку при прямом (OA_1) и обратном (OA_2) нагружении пластические деформации возникают при напряженных состояниях одной и той же интенсивности.

Такую теорию пластичности называют теорией течения с изотропным упрочнением или просто *теорией течения*.

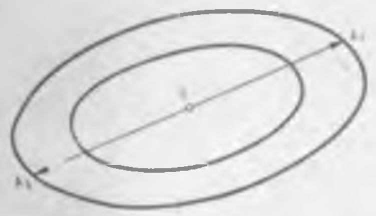


Рис. 4.7. Равномерное (изотропное) расширение поверхности пластичности в процессе нагружения

Примем, что

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} s_{ij}s_{ij} - [\Phi(q)]^2 = 0, \quad (4.18)$$

где q — мера упрочнения, определяемая формулой (4.3) — параметр Удквиста. Тогда, используя соотношения (1.20), устанавливаем

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_i^2 - \left[\Phi\left(\int \overline{d\varepsilon_i^p}\right)\right]^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$\sigma_i = \Phi\left(\int \overline{d\varepsilon_i^p}\right). \quad (4.19)$$

Выбор условия пластичности в виде соотношения (4.18) равносилен гипотезе о том, что *интенсивность напряжений является функцией параметра Удквиста, не зависящей от типа напряженного состояния*. Условие (4.18) или (4.19) по аналогии с условием начала пластичности Хубера—Мизеса (см. § 18) может быть названо условием пластичности Хубера—Мизеса.

Рассмотрим определение функции Φ по диаграмме растяжения материала.

Для одноосного растяжения $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\sigma_z = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, $d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_y^p = -\frac{d\varepsilon_z^p}{2} = -\frac{d\varepsilon^p}{2}$ (так как $d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_y^p$, а $d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = 0$). Поэтому по формулам (1.19) и (2.34) имеем

$$\sigma_i = \sigma, \quad \overline{d\varepsilon_i^p} = d\varepsilon^p$$

и, следовательно,

$$\int \overline{d\varepsilon_i^p} = \int d\varepsilon^p = \mathrm{e}^p.$$

Таким образом, в случае одноосного растяжения из формулы (4.19) получаем

$$\sigma = \Phi(\varepsilon^p).$$

Следовательно, для определения функции Φ по диаграмме растяжения материала необходимо построить график зависимости напряжения от пластической деформации. Рассмотрим построение этого графика. Возьмем некоторую точку A на диаграмме растяжения материала (рис. 4.8) и проведем через нее линию AB, параллельную первоначальной прямой нагружения. Из точки B пересечения этой линии с осью абсцисс восстановим перпендикуляр до пересечения в точке C с горизонтальной линией, проведенной через точку A. Абсцисса точки C равна пластической деформации, а ордината — соответствующему ей напряжению. Поэтому кривая KC является графиком зависимости интенсивности напряжений от параметра Удквиста.

Рис. 4.8. Определение функции $\Phi(\varepsilon^p)$ по диаграмме растяжения материала

При использовании соотношения (4.18) поверхностью пластичности в трехмерном пространстве главных напряжений является круговой цилиндр (цилиндр Хубера—Мизеса). В процессе нагружения радиус цилиндра непрерывно увеличивается. Величина его согласно выражению (4.19) зависит от истории деформирования. Следами цилиндров на девиаторной плоскости являются окружности радиусов $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i$ (рис. 4.9, *а*). Наименьший радиус равен $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$. При отсутствии упрочнения поверхность пластичности совпадает с поверхностью начала пластичности и следом ее на девиаторной плоскости является окружность радиуса $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$ (рис. 4.9, *б*).

Используя соотношение (4.18), имеем

$$\delta_{ij}\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3\delta_{ij}s_{ij} = 0$$

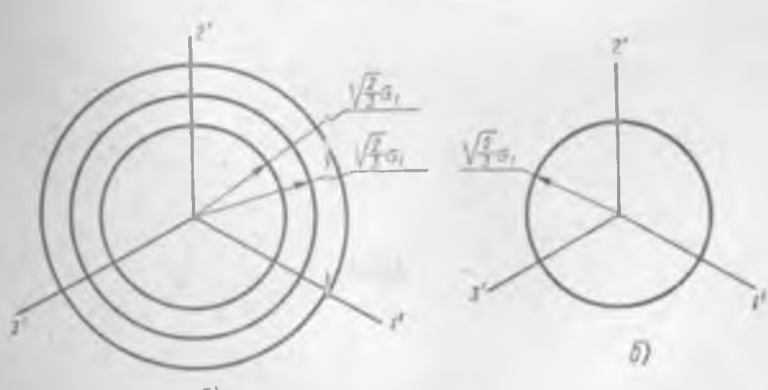


Рис. 4.9. Следы цилиндров Хубера—Мизеса на девиаторной плоскости при наличии (*а*) и отсутствии (*б*) упрочнения

и согласно формуле (4.10) получаем

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3\, d\lambda s_{ij}.$$

Таким образом, при использовании условия пластичности (4.18)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3s_{ij}$$

и согласно соотношениям (4.11) и (1.20)

$$d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i},$$

а по формуле (4.8) получаем

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i} s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \tag{4.20}$$

Из формулы (4.20) следует, что компоненты тензора приращений пластических деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений.

Если в качестве меры упрочнения принять пластическую работу [формула (4.2)], то рассматриваемая теория не изменится. Действительно, используя разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор (см. § 3), имеем

$$\int \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p = \int \left(s_{ij} + \delta_{ij}\sigma_0\right) d\varepsilon_{ij}^p = \int s_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p + \int \delta_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p \sigma_0 =$$

$$= \int s_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p + \int \sigma_0\, d\varepsilon_{ii}^p.$$

Очевидно, что второе слагаемое в этом выражении равно нулю, поскольку тензор пластических деформаций является девиатором. Таким образом, используя соотношения (4.20) и (1.20), получаем

$$\int \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p = \int s_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p = \int \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i} s_{ij} s_{ij} = \int \sigma_i \overline{d\varepsilon_i^p}. \tag{4.21}$$

Если принять, что интенсивность напряжений является функцией работы пластической деформации

$$\sigma_i = \varphi\left(\int \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p\right),$$

то согласно формуле (4.21)

$$\sigma_i = \varphi\left(\int \sigma_i\, \overline{d\varepsilon_i^p}\right),$$

откуда следует соотношение (4.19). Таким образом, гипотеза о том, что интенсивность напряжений является функцией работы пластической деформации, равносильна гипотезе, утверждающей, что она зависит от параметра Удквиста.

Приращения компонентов упругих деформаций согласно формуле (3.5)

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G}\left(d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\mu}{1+\mu} d\sigma_0\right).$$

Добавляя их к компонентам приращений пластических деформаций по формулам (4.20), получаем компоненты приращений полных деформаций

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(d\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{3\mu}{1+\mu}d\sigma_0\right) +$$

$$+ \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \qquad (4.22)$$

В координатной форме уравнения (4.20) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[d\sigma_x - \mu(d\sigma_y + d\sigma_z)] + \\ &+ \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i}(\sigma_x - \sigma_0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\gamma_{zx} &= \frac{d\tau_{zx}}{G} + 3\frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i}\tau_{zx}. \end{aligned}\right| \qquad (4.23)$$

Эти соотношения являются основными уравнениями теории течения. Для случая плоской деформации они были предложены Прандтлем в 1924 г. [52] и для общего случая Рёйссом в 1930 г. [35]. Поэтому их иногда называют уравнения Прандтля—Рёйсса. В работах Прандтля и Рёйсса предполагалось, что материал не имеет упрочнения. Упрочнение было принято во внимание Удквистом [40].

Если приращения пластических деформаций велики по сравнению с приращениями упругих деформаций и последними по сравнению с первыми можно пренебречь, уравнения (4.20) и (4.22) совпадают и принимают вид

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon_i}}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0).$$

Поделив обе части на dt и учитывая, что

$$\xi_i = \frac{\overline{d\varepsilon_i}}{dt},$$

где ξ_i — интенсивность скоростей деформаций, определяемая формулой (2.40), получаем зависимости компонентов скоростей деформаций от компонентов девиатора напряжений

$$\xi_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\xi_i}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \qquad (4.24)$$

Эти уравнения для частного случая плоской деформации были впервые предложены Сен-Венаном [37], [38], а для общего случая Леви [23] в 1871 г. и независимо от него значительно позднее (в 1913 г.) Мизесом [27]. Поэтому их иногда называют уравнениями Сен-Венана—Леви—Мизеса.

§ 24. Теория малых упруго-пластических деформаций

Вначале рассмотрим понятие простого нагружения. *Простым называют такое нагружение, при котором компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру.* В противном случае нагружение называют сложным. Иногда [2] *простым называют такое нагружение, при котором компоненты тензора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру.* Очевидно, что при использовании второй формулировки первая выполняется.

В случае однородного напряженного состояния нагружение тела будет простым при возрастании внешних сил пропорционально одному общему для всех сил параметру. Это объясняется тем, что при однородном напряженном состоянии, возможном только в случае отсутствия массовых сил, деформированное состояние тоже будет однородным. Тогда дифференциальные уравнения равновесия (1.3) и условия совместности деформаций (2.4) выполняются тождественно. Поэтому напряженное состояние определяется только граничными условиями, т. е. только поверхностными силами. При возрастании их пропорционально некоторому параметру напряжения, а следовательно, и компоненты девиатора напряжений во всех точках тела будут возрастать пропорционально тому же параметру и нагружение тела будет простым.

Рассмотрим случай простого нагружения. Пусть компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру β:

$$s_{ij} = \beta \overset{*}{s}_{ij},$$

где звездочкой отмечены некоторые постоянные значения компонентов девиатора напряжений, например, компоненты девиатора напряжений в конце нагружения. В последнем случае $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

Из зависимостей (4.20) имеем

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{3}{2} \frac{\overset{*}{s}_{ij}}{\overset{*}{\sigma}_{i}} \overline{d\varepsilon_{i}^{p}}.$$

Проинтегрируем это уравнение. Тогда получим, что в конце нагружения

$$\varepsilon_{ij}^{p*} = \frac{3}{2} \frac{\overset{*}{s}_{ij}}{\overset{*}{\sigma}_{i}} \int \overline{d\varepsilon_{i}^{p}}. \qquad (4.25)$$

Подставим полученные выражения в соотношение для интенсивности пластических деформаций (2.22). После преобразований с использованием зависимости (1.20) устанавливаем

$$\varepsilon_{i}^{p*} = \int d\varepsilon_{i}^{p}, \qquad (4.26)$$

откуда следует

$$d\varepsilon_{i}^{p} = \overline{d\varepsilon_{i}^{p}}.$$

Таким образом, в случае простого нагружения интенсивность приращения пластических деформаций $\overline{d\varepsilon_i^p}$ равна приращению интенсивности пластических деформаций $d\varepsilon_i^p$. Соотношение (4.25) с помощью выражения (4.26) приводим к виду (звездочка опущена)

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i^p}{\sigma_i}s_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i^p}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \tag{4.27}$$

Добавляя к компонентам тензора (девиатора) пластической деформации (4.27) компоненты девиатора упругих деформаций по формуле (3.8), используя при этом соотношение (3.9), получаем

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{s_{ij}}{2G} + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i^p}{\sigma_i}s_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p}{\sigma_i}s_{ij}. \tag{4.28}$$

Подставим полученное выражение для компонентов девиатора полных деформаций в формулу (2.17). Тогда имеем

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p, \tag{4.29}$$

т. е. интенсивности полных, упругих и пластических деформаций обладают теми же аддитивными свойствами, что и сами деформации.

Следовательно, из выражения (4.28) получаем

$$e_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}s_{ij} \tag{4.30}$$

или

$$\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \tag{4.31}$$

В координатной форме эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_x - \varepsilon_0 = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_x - \sigma_0), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{zx} = 3\dfrac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{zx}. \end{array}\right\} \tag{4.32}$$

В теории малых упруго-пластических деформаций принимается, что зависимость средней линейной деформации от среднего нормального напряжения такая же, как в пределах упругости (3.3). Следовательно, *в результате пластических деформаций изменения объема не происходит*. Обычно изменение объема сравнительно невелико и поэтому им можно пренебречь. Тогда на основании соотношения (3.3) можно положить

$$\varepsilon_0 = 0. \tag{4.33}$$

В таком случае принято говорить, что материал несжимаем, а условие (4.33) представляет собой условие несжимаемости.

Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций может быть определена по результатам испытаний на растяжение. Проведение последних, как правило, проще, чем испытаний при иных типах нагружения.

График зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций будем называть диаграммой деформирования материала.

Выражения для интенсивностей напряжений и деформаций при одноосном напряженном состоянии были получены в § 5 и 12 [формулы (1.22) и (2.19)]. Они имеют вид

$$\sigma_i = \sigma, \tag{4.34}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0. \tag{4.35}$$

Учитывая, что при одноосном растяжении $\sigma_0 = \frac{\sigma}{3}$, и используя соотношения (3.3) и (3.4), получим

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \frac{1-2\mu}{3E}\sigma. \tag{4.36}$$

При помощи формул (4.34) и (4.36) можно по диаграмме растяжения материала подсчитать величины σ_i, ε_i, определяющие диаграмму деформирования.

В работе [34] описаны графо-аналитические и графические методы построения диаграмм деформирования по диаграммам растяжения. Если принять условие несжимаемости материала (4.33), что равносильно допущению о том, что $\mu = 0{,}5$, то тогда, как следует из соотношений (4.34) и (4.36), диаграмма деформирования совпадает с диаграммой растяжения. Если не использовать этого предположения, различие между диаграммами незначительно.

В следующей главе будет рассмотрено построение действительных диаграмм деформирования.

Гипотеза о существовании диаграммы деформирования (гипотеза «единой кривой»), не зависящей от типа напряженного состояния, была выдвинута Людвиком [25].

Таким образом, в частном случае так называемого простого нагружения появляется возможность использования зависимостей между деформациями и напряжениями в конце процесса нагружения. Теории, в которых такие зависимости устанавливаются, называют деформационными. Уравнения (4.30)—(4.32) являются основными уравнениями простейшего варианта деформационных теорий — теории малых упруго-пластических деформаций.

Впервые основные уравнения этой теории при условии отсутствия упрочнения были получены Генки [4]. Упрочнение в теории малых упруго-пластических деформаций было рассмотрено в работе Шмидта [43]. Зависимости компонентов деформаций от компонентов напряжений в форме (4.32) были установлены А. А. Ильюшиным [16]. Ему же принадлежат анализ и развитие этой теории пластичности.

Из соотношений (4.32) следует пропорциональность компонентов девиаторов напряжений и деформаций

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_0}{\sigma_x - \sigma_0} = \cdots = \frac{\frac{\gamma_{zx}}{2}}{\tau_{zx}}$$

или

$$\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\sigma_1-\sigma_0}=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\sigma_2-\sigma_0}=\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_0}{\sigma_3-\sigma_0}.$$

Из последних равенств можно получить условие пропорциональности главных угловых деформаций (см. § 13) и главных касательных напряжений (см. § 6)

$$\frac{\gamma_1}{\tau_1}=\frac{\gamma_2}{\tau_2}=\frac{\gamma_3}{\tau_3},$$

а также условие равенства параметров Надаи—Лоде по напряжениям (§ 6) и деформациям (§ 13)

$$\chi_\sigma=\chi_\varepsilon. \tag{4.37}$$

Напомним, что в § 13 было установлено равенство этих параметров для трех простейших напряженных состояний: одноосных растяжения и сжатия и чистого сдвига.

Рассмотрим теперь величину коэффициента поперечной деформации за пределами упругости.

Как известно, для определенного материала при определенной температуре испытания отношение поперечной деформации к продольной при одноосном растяжении в пределах упругости является постоянной величиной. Абсолютную величину этого отношения называют коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона. Теория малых упруго-пластических деформаций позволяет установить эту величину и за пределами упругости. Будем называть ее также коэффициентом поперечной деформации и обозначать μ'.

Для одноосного растяжения $\left(\sigma_x=\sigma_y=0,\ \sigma_z=\sigma,\ \tau_{xy}=\tau_{yz}=\right.$ $\left.=\tau_{zx}=0,\ \sigma_0=\frac{\sigma}{3}\right)$ имеем

$$\varepsilon=\varepsilon_z,\quad \varepsilon_{\text{поп}}=\varepsilon_x=\varepsilon_y,$$

$$\varepsilon_0=\frac{2\varepsilon_{\text{поп}}+\varepsilon}{3}$$

и согласно выражению (3.3)

$$2\varepsilon_{\text{поп}}+\varepsilon=\frac{\sigma}{3K},$$

откуда, используя соотношение (3.4), определяем

$$\mu'=\left|\frac{\varepsilon_{\text{поп}}}{\varepsilon}\right|=\frac{1}{2}-\frac{1-2\mu}{2E}\,\frac{\sigma}{\varepsilon}. \tag{4.38}$$

Поскольку при увеличении деформации $\frac{\sigma}{\varepsilon}\to 0$, из уравнения (4.38) следует, что в этом случае $\mu'\to 0{,}5$.

На рис. 4.10 сопоставлены теоретические и экспериментальные величины коэффициентов поперечной деформации, полученные А. М. Жуковым [8]. Сплошной линией с белыми кружочками изображена диаграмма растяжения материалов, штриховой линией показан теоретический график зависимости коэффициента поперечной деформации от деформации, построенный по формуле (4.38), и сплошной линией с черными кружочками — экспериментально полученный график этой зависимости. Как видно, экспериментально полученные результаты хорошо согласуются с теоретическими зависимостями.

Выше было дано понятие простого нагружения и показано, что в простейшем случае статически определимых, с точки зрения определения напряжений, задач нагружение будет простым при возрастании внешних сил пропорционально некоторому параметру.

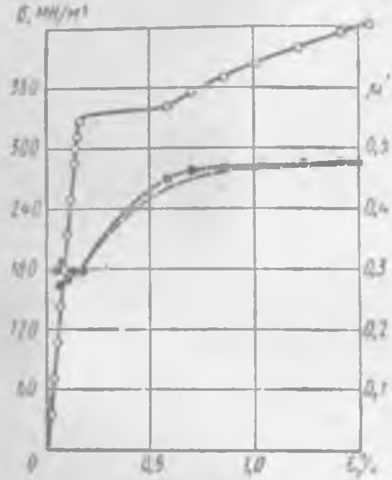


Рис. 4.10. Диаграмма растяжения и графики зависимости коэффициента поперечной деформации от величины деформации для стали 30 [8]

Вопрос о том, как в процессе нагружения должны возрастать внешние силы, действующие на тело для того, чтобы в общем случае неоднородного напряженного состояния нагружение во всех точках тела было простым, не решен. А. А. Ильюшиным дано частное решение этой задачи [16]. Им доказано, что *для того чтобы во всех точках несжимаемого тела, нагруженного внешними силами, возрастающими пропорционально некоторому параметру* β, *нагружение было простым, достаточно, чтобы зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций была степенной функцией вида*

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m. \qquad (4.39)$$

Это положение называют теоремой о простом нагружении. Параметр β может быть временем или любой другой величиной, определяющей последовательные значения напряжений. Так, например, если внешние силы возникают от давления масла из одного резервуара, параметром β может быть это давление.

Перейдем к доказательству теоремы А. А. Ильюшина о простом нагружении. Допустим, что для какого-либо определенного значения параметра β, например, для $\beta = 1$, пластическая задача решена. Обозначим напряжения, деформации и перемещения, полученные в решении, через $\overset{\bullet}{\sigma}_{ij}$, $\overset{\bullet}{\varepsilon}_{ij}$, $\overset{\bullet}{u}_i$. Очевидно, что компоненты напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (1.4) и условиям на поверхности (1.2), а компоненты деформаций — условиям совместности деформаций (2.4). Также удовлетворяются зависимости компонентов деформации от компонентов перемещения (2.3) и зависимости компонентов девиатора деформации от компонентов девиатора напряжения (4.30). На основании соотношения (4.39) имеем

$$\overset{\bullet}{\sigma}_i = A\,(\overset{\bullet}{\varepsilon}_i)^m. \qquad (4.40)$$

Попытаемся найти решение той же пластической задачи для β, отличного от единицы, в виде

$$\sigma_{ij} = \beta \overset{*}{\sigma}_{ij}, \tag{4.41}$$

$$u_i = \nu \overset{*}{u}_i, \tag{4.42}$$

где ν — некоторая функция β.

На основании соотношений (2.3) и (4.42) заключаем, что

$$\varepsilon_{ij} = \nu \overset{*}{\varepsilon}_{ij}. \tag{4.43}$$

Очевидно, что если выбранные ранее компоненты напряжений $\overset{*}{\sigma}_{ij}$ деформаций $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ и перемещений $\overset{*}{u}_i$ удовлетворяют уравнениям (1.4), (1.2), (2.4) и (4.30), то компоненты напряжений, перемещений и деформаций, определяемые формулами (4.41)—(4.43), также удовлетворяют этим уравнениям. На основании соотношений (4.39)—(4.41) и (4.43) заключаем

$$\nu = \beta^{\frac{1}{m}}. \tag{4.44}$$

При выполнении этого условия формулы (4.41)—(4.43) представляют собой решение упруго-пластической задачи. Если не использовать предположение о том, что тело является несжимаемым, то из соотношения (3.3) будет следовать зависимость между ν и β, противоречащая условию (4.44). Как следует из вышеизложенного, соблюдение зависимости (4.39) является условием достаточным, но не необходимым для обеспечения простого нагружения.

Простое нагружение имеет место в некоторых других частных случаях при возрастании внешних сил пропорционально одному общему для всех сил параметру, если зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций отлична от зависимости (4.39) [16]. При отсутствии упрочнения в случае нагружения тела силами, возрастающими пропорционально общему параметру, элементы тела могут испытывать сложное нагружение [16].

Д. Д. Ивлевым [15] было показано, что если зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформации имеет вид полинома, то для осуществления простого нагружения тела необходимо приложение внешних сил, изменяющихся непропорционально одному общему для всех сил параметру. В таком случае, как установлено в этой работе, простое нагружение тела вообще практически неосуществимо. Л. И. Седов пришел к заключению [36], что в общем случае нагружения при больших деформациях тел простое нагружение также неосуществимо.

Однако, учитывая, что выражение (4.39) с достаточной степенью точности аппроксимирует зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в области пластических деформаций, приближенно можно считать, что нагружение тела будет простым, если внешние силы возрастают пропорционально одному общему для всех сил параметру.

5*

деформации от деформации, построенный по формуле (4.38), и сплошной линией с черными кружочками — экспериментально полученный график этой зависимости. Как видно, экспериментально полученные результаты хорошо согласуются с теоретическими зависимостями.

Выше было дано понятие простого нагружения и показано, что в простейшем случае статически определимых, с точки зрения определения напряжений, задач нагружение будет простым при возрастании внешних сил пропорционально некоторому параметру.

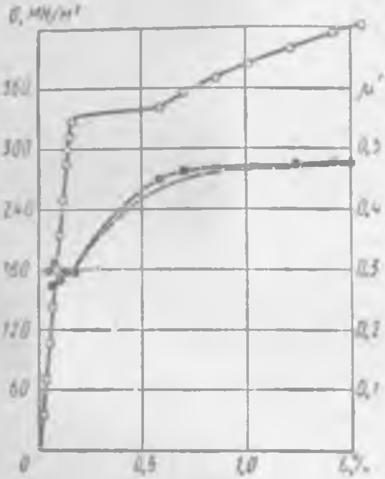


Рис. 4.10. Диаграмма растяжения и графики зависимости коэффициента поперечной деформации от величины деформации для стали 30 [8]

Вопрос о том, как в процессе нагружения должны возрастать внешние силы, действующие на тело для того, чтобы в общем случае неоднородного напряженного состояния нагружение во всех точках тела было простым, не решен. А. А. Ильюшиным дано частное решение этой задачи [16]. Им доказано, что *для того чтобы во всех точках несжимаемого тела, нагруженного внешними силами, возрастающими пропорционально некоторому параметру* β, *нагружение было простым, достаточно, чтобы зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций была степенной функцией вида*

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m. \tag{4.39}$$

Это положение называют теоремой о простом нагружении. Параметр β может быть временем или любой другой величиной, определяющей последовательные значения напряжений. Так, например, если внешние силы возникают от давления масла из одного резервуара, параметром β может быть это давление.

Перейдем к доказательству теоремы А. А. Ильюшина о простом нагружении. Допустим, что для какого-либо определенного значения параметра β, например, для $\beta = 1$, пластическая задача решена. Обозначим напряжения, деформации и перемещения, полученные в решении, через $\overset{*}{\sigma}_{ij}$, $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$, $\overset{*}{u}_i$. Очевидно, что компоненты напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (1.4) и условиям на поверхности (1.2), а компоненты деформаций — условиям совместности деформаций (2.4). Также удовлетворяются зависимости компонентов деформации от компонентов перемещения (2.3) и зависимости компонентов девиатора деформации от компонентов девиатора напряжения (4.30). На основании соотношения (4.39) имеем

$$\overset{*}{\sigma}_i = A(\overset{*}{\varepsilon}_i)^m. \tag{4.40}$$

Попытаемся найти решение той же пластической задачи для β, отличного от единицы, в виде

$$\sigma_{ij} = \beta \overset{*}{\sigma}_{ij}, \tag{4.41}$$

$$u_i = \nu \overset{*}{u}_i, \tag{4.42}$$

где ν — некоторая функция β.

На основании соотношений (2.3) и (4.42) заключаем, что

$$\varepsilon_{ij} = \nu \overset{*}{\varepsilon}_{ij}. \tag{4.43}$$

Очевидно, что если выбранные ранее компоненты напряжений $\overset{*}{\sigma}_{ij}$, деформаций $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ и перемещений $\overset{*}{u}_i$ удовлетворяют уравнениям (1.4), (1.2), (2.4) и (4.30), то компоненты напряжений, перемещений и деформаций, определяемые формулами (4.41)—(4.43), также удовлетворяют этим уравнениям. На основании соотношений (4.39)—(4.41) и (4.43) заключаем

$$\nu = \beta^{\frac{1}{m}}. \tag{4.44}$$

При выполнении этого условия формулы (4.41)—(4.43) представляют собой решение упруго-пластической задачи. Если не использовать предположение о том, что тело является несжимаемым, то из соотношения (3.3) будет следовать зависимость между ν и β, противоречащая условию (4.44). Как следует из вышеизложенного, соблюдение зависимости (4.39) является условием достаточным, но не необходимым для обеспечения простого нагружения.

Простое нагружение имеет место в некоторых других частных случаях при возрастании внешних сил пропорционально одному общему для всех сил параметру, если зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций отлична от зависимости (4.39) [16]. При отсутствии упрочнения в случае нагружения тела силами, возрастающими пропорционально общему параметру, элементы тела могут испытывать сложное нагружение [16].

Д. Д. Ивлевым [15] было показано, что если зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформации имеет вид полинома, то для осуществления простого нагружения тела необходимо приложение внешних сил, изменяющихся непропорционально одному общему для всех сил параметру. В таком случае, как установлено в этой работе, простое нагружение тела вообще практически неосуществимо. Л. И. Седов пришел к заключению [36], что в общем случае нагружения при больших деформациях тел простое нагружение также неосуществимо.

Однако, учитывая, что выражение (4.39) с достаточной степенью точности аппроксимирует зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в области пластических деформаций, приближенно можно считать, что нагружение тела будет простым, если внешние силы возрастают пропорционально одному общему для всех сил параметру.

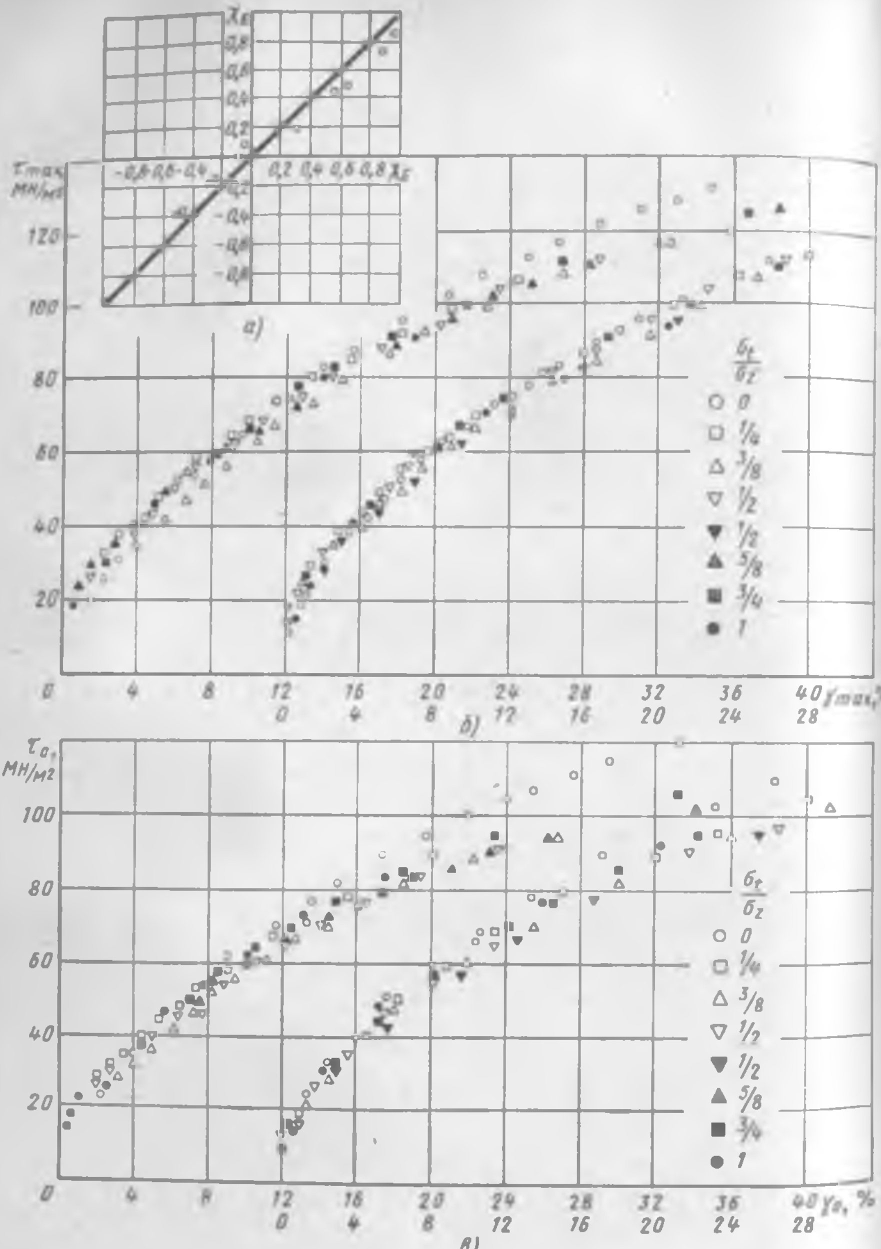
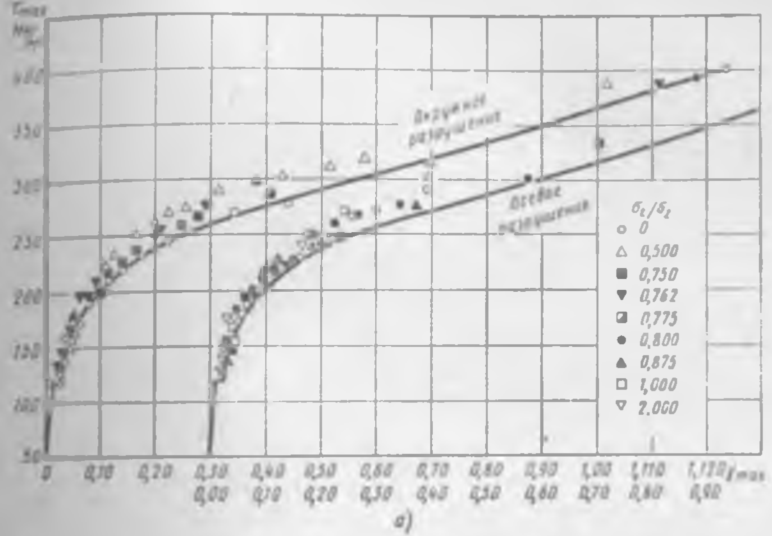


Рис. 4.13. Результаты опытов Дэвиса. Испытания медных образцов [6]:

а — проверка равенства параметров Надаи—Лоде; *б* — выявление связи максимального касательного напряжения с максимальной угловой деформацией; *в* — выявление связи октаэдрического касательного напряжения с октаэдрической угловой деформацией графики зависимости октаэдрического касательного напряж...ния от октаэдрической угловой деформации, построенные по результатам испытания труб на растяжение. В рассматриваемом случае в отличие от испытаний медных труб разброс точек для зависимости макси-



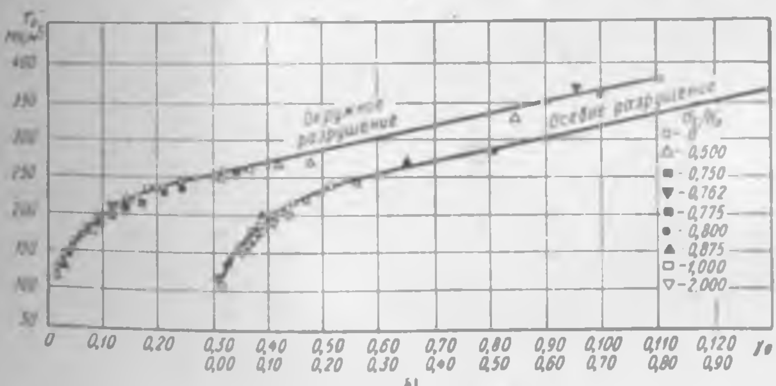


Рис. 4.14. Результаты опытов Дэвиса. Испытания стальных образцов [7]:

а — выявление связи максимального касательного напряжения с максимальной угловой деформацией; б — выявление связи октаэдрического касательного напряжения с октаэдрической угловой деформацией

мального касательного напряжения от максимальной угловой деформации несколько больший, чем для зависимости октаэдрического касательного напряжения от октаэдрической угловой деформации.

В более поздних опытах Дэвиса [47] тонкостенные стальные трубы подвергались воздействию внутреннего давления, растяжения и кручения. При этом направления главных осей в течение всего процесса деформирования сохранились постоянными. В результате испытаний установлено, что интенсивность напряжений с достаточной степенью точности является функцией интенсивности деформаций, не зависящей от типа напряженного состояния.

На основании изложенного выше заключаем, что опыты Дэвиса хорошо согласуются с теорией малых упруго-пластических деформаций.

Опыты А. М. Жукова [10], [12], [13]. В работе [10] описаны испытания хромоникелевых стальных труб при нагружении их растягивающей силой и внутренним давлением. Большинство испытаний проводилось в условиях простого нагружения, так что заданное отношение главных напряжений сохранялось до момента разрушения. Однако в некоторых испытаниях это отношение в определенных интервалах нагружения преднамеренно нарушалось. Этим создавалось сложное нагружение.

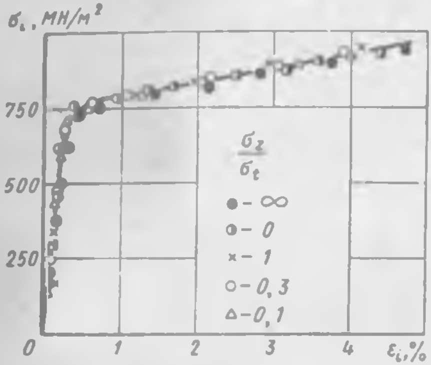


Рис. 4.15. Результаты опытов А. М. Жукова. Испытания образцов хромоникелевой стали [10]

На рис. 4.15 в координатах ε_i, σ_i представлены результаты испытаний образцов при различных величинах отношения осевого напряжения к окружному. Из рисунка следует, что диаграмма деформирования материала не зависит от типа напряженного состояния.

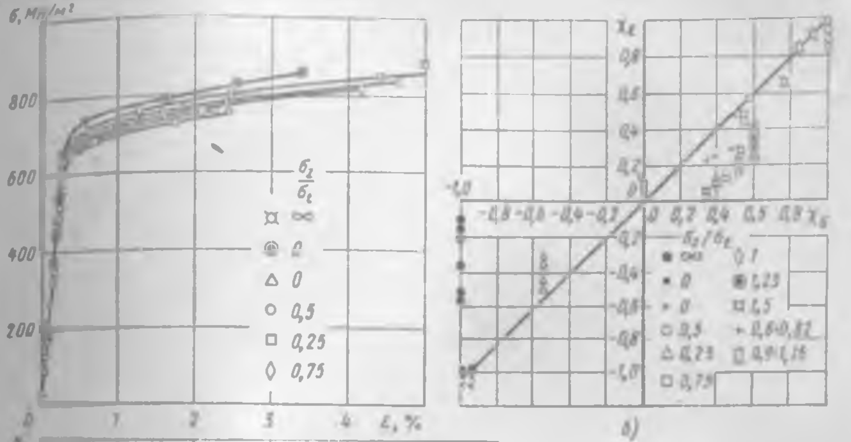
В статье [12] описаны испытания трубчатых образцов из стали ЭИ415 при нагружении их растягивающей силой и внутренним давлением.

Восемь образцов были испытаны в условиях простого, а три — в условиях сложного нагружения. Сложное нагружение состояло в том, что отношение главных напряжений при испытаниях изменялось. При этом, однако, ни одно из главных напряжений не убывало и направления главных осей сохранялись постоянными. Результаты опытов (рис. 4.16, *а*) показывают, что как при простом нагружении, так и при указанном выше сложном нагружении диаграмма деформирования не зависит от типа напряженного состояния.

На рис. 4.16, *б* точки, полученные экспериментально, представлены в координатах χ_σ, χ_ε. Они располагаются вблизи прямой, уравнение которой $\chi_\varepsilon = \chi_\sigma$, причем указанное выше сложное нагружение заметным образом не удаляет точки от этой прямой.

В работе [13] приведены результаты испытаний трубчатых образцов из стали 30ХН3А при нагружении их растягивающей силой и внутренним давлением. Образцы испытывались как при простом, так и при сложном нагружении. На рис. 4.17, *а* экспериментально полученные точки представлены в координатах χ_σ, χ_ε. Как следует из рисунка, точки располагаются вблизи прямой, уравнение которой $\chi_\varepsilon = \chi_\sigma$. Результаты опытов (рис. 4.17, *б*) свидетельствуют также о том, что как при простом, так и при сложном нагружении диаграмма деформирования не зависит от типа напряженного состояния.

На основании изложенного заключаем, что теория малых упруго-пластических деформаций хорошо согласуется с опытами А. М. Жукова при простом нагружении и достаточно хорошо при сложном



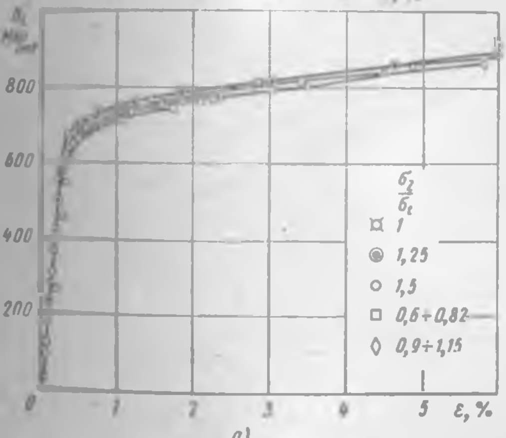


Рис. 4.16. Результаты опытов А. М. Жукова. Испытания образцов стали ЭИ415 [12]:

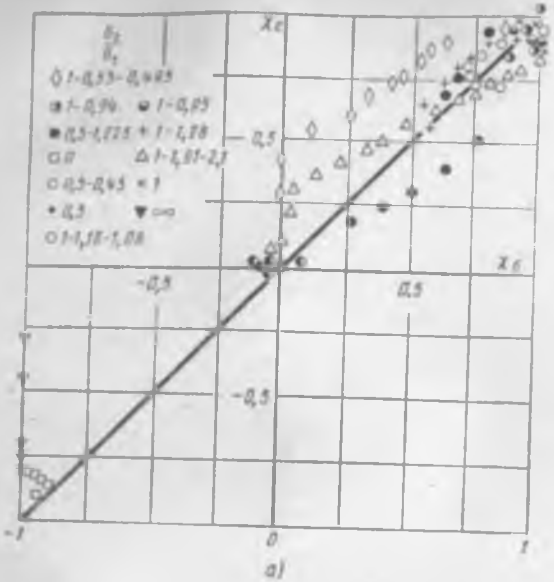
а — проверка существования единой диаграммы деформирования; *б* — равенства параметров Надаи—Лодс

нагружении, близком к простому. Это же заключение имеет место и при рассмотрении приведенных выше результатов других исследователей.

Перейдем к рассмотрению экспериментальной проверки теории течения.

Опыты А. М. Жукова и Ю. Н. Работнова [9]. Испытаниям на растяжение и кручение подвергались тонкостенные трубчатые образцы из стали 25. Образцы вначале растягивались, а затем закручивались, причем в процессе кручения напряжение от растяжения оставалось постоянным.

На рис. 4.18 изображены диаграммы предварительного растяжения (конец каждой кривой соответствовал началу догрузки кру-



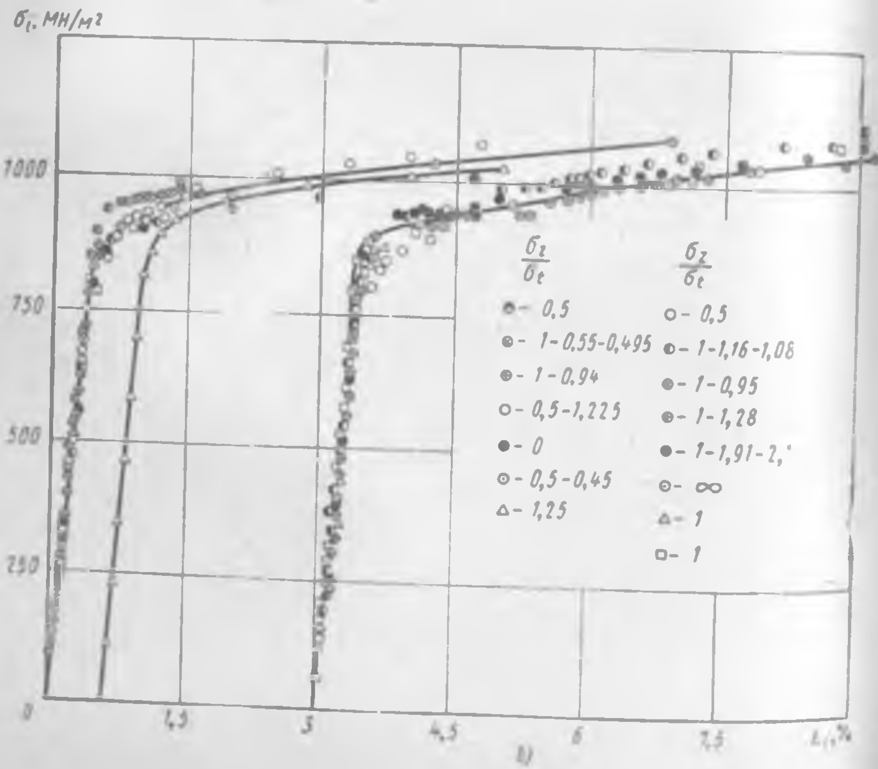


Рис. 4.17. Результаты опытов А. М. Жукова. Испытания образцов стали 30ХН3А [13]:

а — проверка равенства параметров Надаи—Лоде; *б* — проверка существования единой диаграммы деформирования

тящим моментом), а на рис. 4.19 — догрузки. В начальный момент догрузки имеется небольшой линейный участок. Коэффициенты пропорциональности, соответствующие этому участку, для первых трех кривых $5 \cdot 10^4$ МН/м², а для четвертой $4{,}5 \cdot 10^4$ МН/м². Величины модулей упругости первого и второго рода $E = 2{,}15 \cdot 10^5$ МН/м², $G = 8 \cdot 10^4$ МН/м².

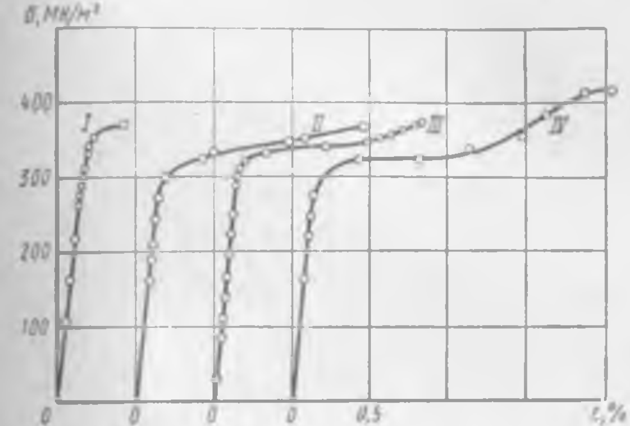


Рис. 4.18. Диаграммы предварительного растяжения в опытах А. М. Жукова и Ю. Н. Работнова [9]

По теории малых упруго-пластических деформаций согласно формулам (4.32) модуль сдвига в начальный момент догрузки должен быть равен одной трети секущего модуля, а по теории течения согласно формулам (4.23) — модулю сдвига в пределах упругости.

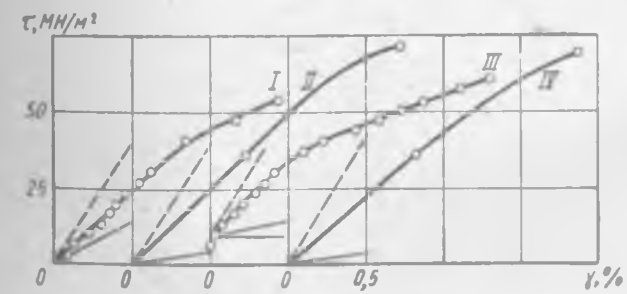


Рис. 4.19. Диаграммы догрузки в опытах А. М. Жукова и Ю. Н. Работнова [9]. Кривые с кружочками получены экспериментально, тонкие линии — по теории малых упруго-пластических деформаций, штриховые — по теории течения

На рис. 4.21 тонкими линиями нанесены начальные участки догрузки по теории малых упруго-пластических деформаций, а штриховыми линиями — по теории течения. Как следует из сопоставления этих кривых с экспериментальными, ни теория малых упруго-пластических деформаций, ни теория течения не согласуются с данными опытов. К такому же результату привели испытания тонкостенных труб из стали 20, проведенные А. М. Жуковым по такой же методике, как и в предыдущих испытаниях [11].

Опыты Ш. Н. Каца и Л. М. Качанова [22]. Испытывались тонкостенные трубчатые образцы из отожженной стали 20, которые вначале нагружались внутренним давлением так, чтобы в них возникли пластические деформации, а затем к ним прикладывался крутящий момент (рис. 4.20). Как следует из результатов испытаний, модуль сдвига в процессе догрузки равен модулю сдвига в пределах упругости независимо от степени пластической деформации, что согласуется с теорией течения. По теории малых упруго-пластических деформаций модуль сдвига при догрузке сильно за-

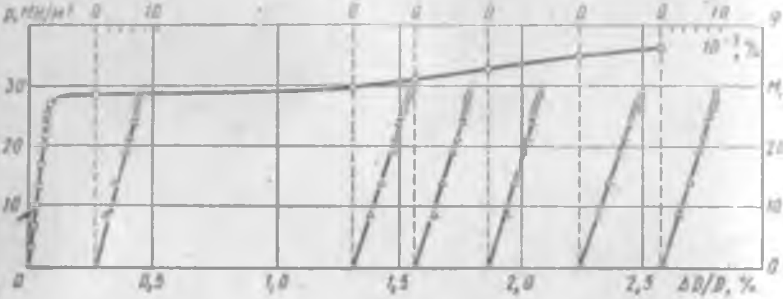


Рис. 4.20. График зависимости давления p от окружной деформации $\frac{\Delta D}{D}$, где D — средний диаметр трубки (кружочки) и графики зависимости крутящего момента M от угла закручивания φ при догрузке в опытах Ш. Н. Каца и Л. М. Качанова [22]

висит от величины накопленной пластической деформации. Таким образом, результаты рассмотренных испытаний при сложном нагружении хорошо согласуются с теорией течения и противоречат теории малых упруго-пластических деформаций.

Опыты Моррисона и Шепферда [28]. Испытывались тонкостенные стальные и силуминовые трубки по следующей программе: 1 этап — продольное растяжение; растягивающая сила увеличивается ступенями; 2 этап — крутящий момент увеличивается ступенями, растягивающая сила убывает; 3 этап — растягивающая сила увеличивается ступенями, крутящий момент убывает; 4 этап — крутящий момент увеличивается ступенями, растягивающая сила убывает.

Из результатов испытаний (рис. 4.21, 4.22) следует, что теория течения в основном лучше согласуется с результатами опытов, чем теория малых упруго-пластических деформаций.

На основании изложенного выше можно сделать следующее заключение. При простом нагружении теория течения совпадает с теорией малых упруго-пластических деформаций. В этом случае экспериментальные данные хорошо согласуются с теорией пластичности. Сложное нагружение экспериментально изучено недостаточно.

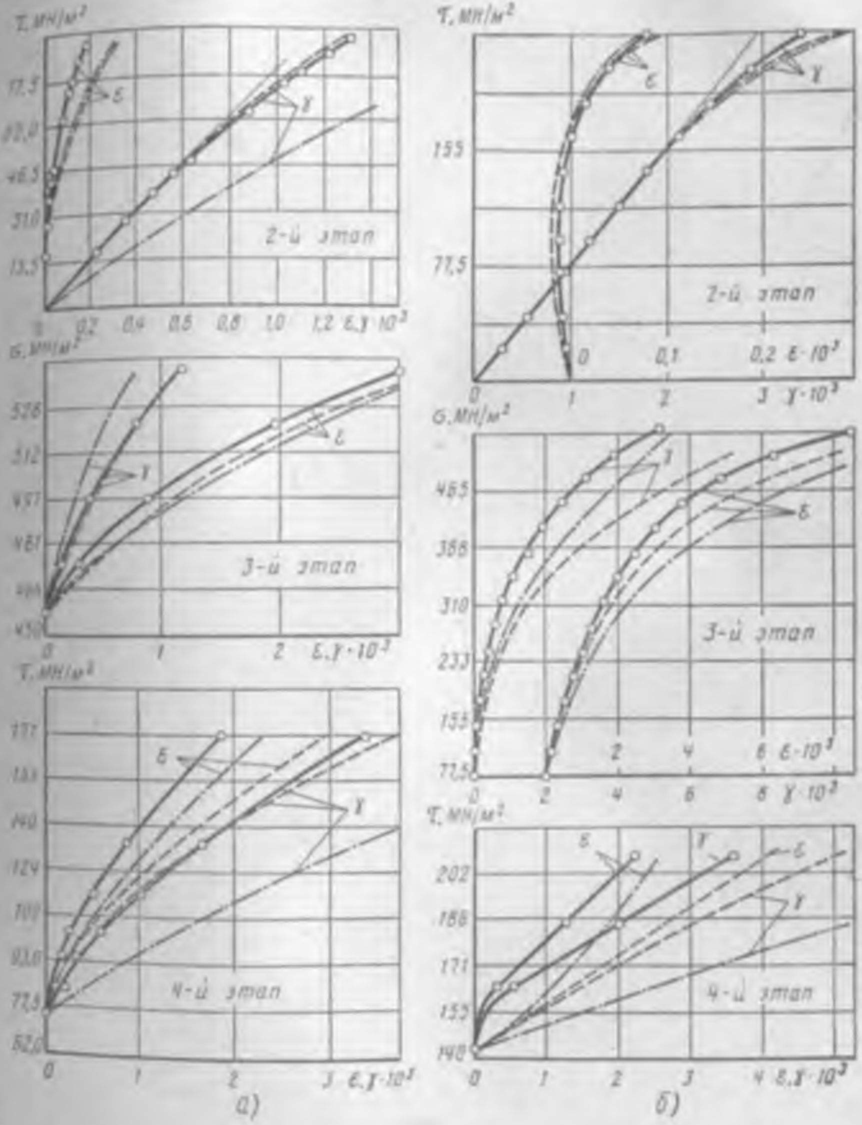


Рис. 4.21. Графики зависимости касательного и нормального напряжений от угловой и линейной деформаций для стальных труб в опытах Моррисона и Шепферда [28]. Сплошные линии — экспериментальные кривые, штриховые — по теории течения, штрих-пунктирные — по теории малых упруго-пластических деформаций; *а* — первый образец; *б* — второй образец

Несмотря на это, однако, можно заметить, что результаты экспериментального изучения сложного нагружения лучше согласуются с теорией течения, чем с теорией малых упруго-пластических деформаций.

Во всех опытах, результаты которых изложены выше, испытаниям подвергались тонкостенные трубчатые образцы при совмест-

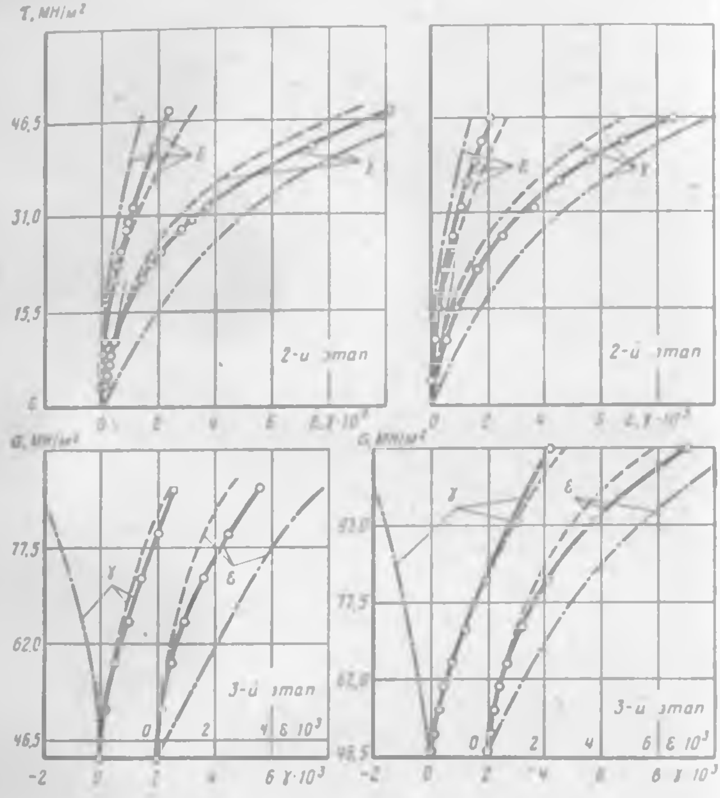


Рис. 4.22. Графики зависимости касательного и нормального напряжений от угловой и линейной деформаций во втором и третьем этапах нагружения для двух силуминовых труб в опытах Моррисона и Шеперда [28]. Обозначения те же, что и на рис. 4.21

ном нагружении их внутренним давлением, растягивающей силой и крутящим моментом. При таком нагружении в образцах возникали двухосные напряженные состояния.

§ 26. Разгрузка. Остаточные напряжения и деформации

Согласно закону разгрузки при одноосном растяжении уменьшение напряжений при разгрузке $\sigma^{разг}$ прямо пропорционально уменьшению деформаций $\varepsilon^{разг}$, причем коэффициент пропорциональности тот же, что и в начальной стадии нагружения.

Выше (см. § 24) отмечалось, что интенсивность деформаций может быть представлена в виде суммы интенсивностей упругих и пластических деформаций. Поэтому диаграмма деформирования материала имеет такой же вид, что и диаграмма растяжения не только при нагружении, но и при разгрузке. Следовательно, диаграмма разгрузки на графике ε_i, σ_i является прямой (BC), параллельной начальной прямой нагружения (OA) (рис. 4.23).

Уменьшение интенсивности напряжений при разгрузке прямо пропорционально снижению интенсивности деформаций, причем коэффициент пропорциональности тот же, что и в пределах упругости. Таким образом, математическая формулировка закона разгрузки имеет вид

$$\sigma_i^{\text{разг}} = 3G\varepsilon_i^{\text{разг}}. \qquad (4.45)$$

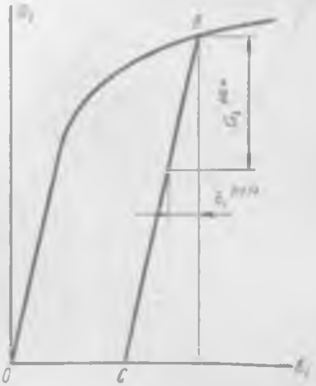


Рис. 4.23. Диаграмма деформирования при нагружении и разгрузке

Допустим, что в результате нагружения тела массовыми X_j и поверхностными $X_{\nu j}$ силами за пределы упругости в нем возникли напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij}.

Предположим далее, что нагруженное тело разгружается. Объемные и поверхностные силы уменьшаются до значений X_j^*, $X_{\nu j}^*$, а напряжения и деформации уменьшаются на величины $\sigma_{ij}^{\text{разг}}$, $\varepsilon_{ij}^{\text{разг}}$ до значений остаточных напряжений и деформаций $\sigma_{ij}^{\text{ост}}$, $\varepsilon_{ij}^{\text{ост}}$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\text{ост}} &= \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\text{разг}};\\ \varepsilon_{ij}^{\text{ост}} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{\text{разг}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.46)$$

Очевидно, что компоненты деформаций ε_{ij} и $\varepsilon_{ij}^{\text{ост}}$ удовлетворяют условиям совместности деформаций (2.4).

Компоненты напряжений σ_{ij} удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (1.4) и условиям на поверхности (1.2) с массовыми силами X_j и поверхностными силами $X_{\nu j}$. Компоненты напряжений $\sigma_{ij}^{\text{ост}}$ удовлетворяют тем же уравнениям с массовыми силами X_j^* и поверхностными силами $X_{\nu j}^*$. Поэтому и компоненты напряжений $\sigma_{ij}^{\text{разг}}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (1.4) и условиям на поверхности (1.2) с массовыми силами $X_j - X_j^*$ и поверхностными силами $X_{\nu j} - X_{\nu j}^*$, а компоненты деформаций $\varepsilon_{ij}^{\text{разг}}$ удовлетворяют условиям совместности деформаций (2.4).

Учитывая, что при разгрузке уменьшение интенсивности напряжений прямо пропорционально уменьшению интенсивности деформаций, заключаем, что *напряжения и деформации разгрузки следует определять путем решения задачи теории упругости для внешних* *сил, равных разностям сил при нагружении, и сил, остающихся после разгрузки. В случае полной разгрузки последние равны нулю и задача теории упругости решается для внешних сил, нагружающих тело.*

Остаточные напряжения и деформации согласно формулам (4.46) определяются как разности напряжений и деформаций, возникающих при нагружении, и уменьшений напряжений и деформаций при разгрузке (разгрузочных напряжений и деформаций).

Изложенное выше справедливо в предположении, что в процессе разгрузки материал вновь не выходит за пределы упругости. В книге [29] рассмотрена разгрузка с учетом перехода материала в процессе разгрузки за пределы упругости.

Вопросы образования остаточных напряжений, влияния их на прочность, а также методы определения остаточных напряжений в стержнях, пластинах, толстостенных трубах и дисках освещены в книге [3].

§ 27. Теория пластичности изотропного материала с анизотропным упрочнением

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, если считать, что в процессе нагружения поверхность пластичности равномерно (изотропно) расширяется, то в этом случае невозможно описать анизотропию, возникающую в процессе деформации, так называемую деформационную анизотропию, простейшим проявлением которой является эффект Баушингера.

Для отражения деформационной анизотропии можно предположить, например, что в процессе нагружения поверхность начала пластичности испытывает только жесткое смещение (рис. 4.24).

В таком случае упрочнение называют трансляционным. Очевидно, что тогда эффект Баушингера будет описан, поскольку при прямом (OA_1) и обратном (OA_2) нагружениях (рис. 4.24) за счет смещения поверхности пластичности пластические деформации возникают при напряженных состояниях различной интенсивности.

Приняв условие пластичности Хубера—Мизеса, имеем

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}(s_{ij} - \rho_{ij})(s_{ij} - \rho_{ij}) - \sigma_T^2 = 0. \qquad (4.47)$$

В этом уравнении ρ_{ij} — координаты центра поверхности пластичности, изменяющиеся при пластической деформации и образующие девиатор. Этот девиатор называют девиатором добавочного напряжения, а девиатор $s_{ij} - \rho_{ij}$ — девиатором активного напряжения. Таким образом, условие (4.47) можно получить из выражения (4.18) подстановкой в него вместо компонентов девиатора полного напряжения компонентов девиатора активного напряжения и заменой $\Phi(q)$ на σ_T.

Используя ассоциированный закон течения (4.8) и условие (4.47), получаем компоненты приращения пластической деформации

$$de_{ij}^p = 3d\lambda\,(s_{ij} - \rho_{ij}). \qquad (4.48)$$

Следом поверхности пластичности, соответствующей условию пластичности (4.47) на девиаторной плоскости в трехмерном пространстве главных напряжений, является окружность радиуса $\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_T$, смещающаяся в процессе нагружения (рис. 4.25). Очевидно, что для определенности необходимо ввести допущение о смещении центра поверхности пластичности, т. е. о законе изменения девиатора ρ_{ij}.

А. Ю. Ишлинский в 1954 г. [19] предложил простейшую зависимость

$$\rho_{ij} = c\varepsilon_{ij}^{p}, \tag{4.49}$$

где c — постоянная для определенного материала. Согласно этой зависимости смещение центра поверхности имеет место в направлении деформирования. Подставим это выражение в условие пластичности (4.47). Тогда получим

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}\left(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p}\right)\left(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p}\right) - \sigma_{\text{T}}^{2} = 0. \tag{4.50}$$

К такой же теории пластичности пришел в 1955 г. Прагер [31]. Он проиллюстрировал ее на простой кинематической модели. Поэтому иногда эту теорию называют также теорией кинематического упрочнения.

Рис. 4.24. Жесткое смещение поверхности пластичности в процессе нагружения

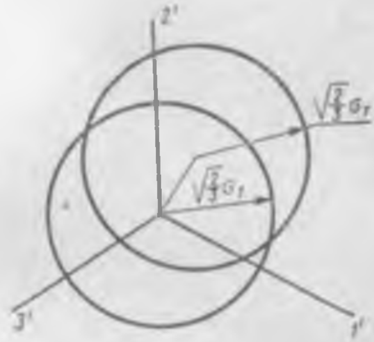


Рис. 4.25. Жесткое смещение следа цилиндра Хубера—Мизеса на девиаторной плоскости в процессе нагружения

В простейшем случае одноосного растяжения—сжатия

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \sigma, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \; s_x = s_y = -\frac{\sigma}{3}, \quad s_z = \frac{2}{3}\sigma,$$

$$\varepsilon_x^p = \varepsilon_y^p = -\frac{\varepsilon^p}{2}, \quad \varepsilon_z^p = \varepsilon^p, \quad \gamma_{xy}^p = \gamma_{yz}^p = \gamma_{zx}^p = 0$$

и из уравнения (4.50) имеем

$$\frac{3}{2}\left[2\left(-\frac{\sigma}{3} + \frac{c\varepsilon^p}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sigma - c\varepsilon^p\right)^2\right] = \sigma_{\text{T}}^2.$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$\sigma = \pm\sigma_{\text{T}} + \frac{3}{2}c\varepsilon^p, \tag{4.51}$$

причем знак плюс соответствует растяжению, знак минус — сжатию. Если учесть, что

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E},$$

то тогда получаем уравнение диаграммы растяжения материала с линейным упрочнением (рис. 4.26)

$$\sigma = \sigma_{\text{T}} + E_{\text{T}}(\varepsilon - \varepsilon_{\text{T}}),$$

в котором модуль упрочнения

$$E_{\text{T}} = \frac{3c}{2 + 3\dfrac{c}{E}}$$

и, следовательно,

$$c = \frac{2}{3} \frac{E_{\text{т}}}{1 - \frac{E_{\text{т}}}{E}}. \tag{4.52}$$

Таким образом, приняв условие пластичности в форме (4.47), получаем диаграмму растяжения материала с линейным упрочнением без площадки текучести. Параметр c в формуле (4.50) связан с модулем упрочнения $E_{\text{т}}$ и модулем упругости E отношением (4.52). В случае построения диаграммы растяжения в координатах ε^p, σ

Рис. 4.26. Диаграмма растяжения с линейным упрочнением в координатах ε, σ

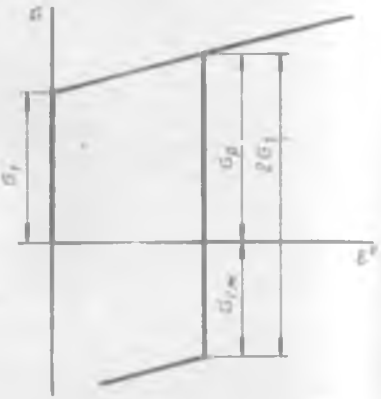


Рис. 4.27. Диаграмма растяжения с линейным упрочнением в координатах ε^p, σ и текущие пределы текучести при растяжении и последующем сжатии

(рис. 4.27) модулем упрочнения является величина $\frac{3}{2}c$.

Из уравнения (4.51) следует, что после растяжения образца первоначально изотропного материала до величины пластической деформации ε^p предел текучести его в направлении растяжения увеличился на $\frac{3}{2}c\varepsilon^p$. Если же после такого растяжения разгрузить образец, а затем сжать его, то тогда предел текучести уменьшится, причем, как следует из формулы (4.51), сумма абсолютных значений этих новых пределов текучести при растяжении и сжатии равна удвоенному пределу текучести недеформированного материала (рис. 4.27)

$$\sigma_{\text{р}} - \sigma_{\text{сж}} = 2\sigma_{\text{т}}.$$

В таком случае эффект Баушингера принято называть идеальным.

Установим теперь, насколько изменились пределы текучести в направлениях, перпендикулярных направлению растяжения. Иными словами, найдем предел текучести образца, растянутого до величины пластической деформации ε^p в направлении, перпендикулярном оси последнего.

Для этого необходимо в соотношении (4.50) положить

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0,$$

$$s_x = \frac{2}{3}\sigma, \quad s_y = s_z = -\frac{\sigma}{3}$$

(поскольку образец растягивается в направлении оси x),

$$\varepsilon_x^p = \varepsilon_y^p = -\frac{\varepsilon^p}{2}, \quad \varepsilon_z^p = \varepsilon^p, \quad \gamma_{xy}^p = \gamma_{yz}^p = \gamma_{zx}^p = 0$$

(ввиду того что до растяжения в направлении оси x образец растягивался в направлении оси z).

Тогда получим

$$\frac{3}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\sigma+\frac{ce^p}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sigma}{3}+\frac{ce^p}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sigma}{3}-ce^p\right)^2\right]=\sigma_T^2,$$

откуда

$$4\sigma^2+6ce^p\sigma+9(ce^p)^2-4\sigma_T^2=0$$

и, следовательно,

$$\sigma=\frac{-3ce^p\pm\sqrt{16\sigma_T^2-27(ce^p)^2}}{4}, \tag{4.53}$$

причем знак плюс соответствует растяжению, а знак минус — сжатию.

Обозначим превышение нового предела текучести в направлении растяжения по формуле (4.53) над первоначальным σ_T через α

$$\alpha=\frac{\sigma_T+\frac{3}{2}ce^p}{\sigma_T}.$$

Тогда

$$3ce^p=2\sigma_T(\alpha-1)$$

и из формулы (4.53) устанавливаем

$$\frac{\sigma}{\sigma_T}=-\frac{\alpha-1}{2}\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}(\alpha-1)^2}. \tag{4.54}$$

Эта формула и является решением поставленной задачи. Например, принимая $\alpha=1{,}20$, получаем по формуле (4.54) $\frac{\sigma}{\sigma_T}=0{,}885$ в случае растяжения и $\frac{\sigma}{\sigma_T}=-1{,}085$ в случае сжатия. Таким образом, в результате растяжения материала до величины напряжения, на 20% большего предела текучести σ_T, предел текучести его при растяжении в направлении, перпендикулярном первоначальному растяжению, уменьшается на 11,5%, а при сжатии в том же направлении увеличивается на 8,5%.

Как показала экспериментальная проверка [14], рассмотренная теория пластичности с трансляционным упрочнением лишь качественно описывает явление деформационной анизотропии.

Для лучшего количественного согласования результатов теории и эксперимента целесообразно комбинировать расширение и жесткое смещение поверхности пластичности (изотропное и трансляционное упрочнение).

Вариант такой теории был предложен Ю. И. Кадашевичем и В. В. Новожиловым в 1957 г. [20]. Ими принято условие пластичности в виде

$$f(\sigma_{ij})=\frac{3}{2}(s_{ij}-\rho_{ij})(s_{ij}-\rho_{ij})-[\Phi(q)]^2=0, \tag{4.55}$$

и следующая зависимость координат центра поверхности пластичности от пластической деформации

$$\rho_{ij}=g(\rho_i)\,e_{ij}^p, \tag{4.56}$$

где $\rho_i=\sqrt{\frac{3}{2}\rho_{ij}\rho_{ij}}$ — интенсивность добавочных напряжений.

Компоненты приращения пластической деформации по-прежнему определяются формулой (4.48).

В частном случае $\Phi(q)=\sigma_T=\text{const}$ и $g(\rho_i)=c=\text{const}$. Эта теория совпадает с теорией Ишлинского—Прагера.

Из выражения (4.55) заключаем, что следом поверхности пластичности на девиаторной плоскости в трехмерном пространстве главных напряжений является окружность, расширяющаяся и смещающаяся в процессе нагружения (рис. 4.28).

Решение по теории Кадашевича—Новожилова рассмотренной выше задачи определения предела текучести в направлении, перпендикулярном направлению предварительного растяжения до величины пластической деформации ε^p, очевидно, приведет к уравнению, которое может быть получено из уравнения (4.53) заменой σ_T на $\Phi(\varepsilon^p)$ и c на $g(\varepsilon^p)$, поскольку в рассматриваемом случае функции $\Phi(q)$ и $g(\rho_i)$ в конечном счете являются функциями ε^p:

$$\sigma = -\frac{3}{4} g(\varepsilon^p)\,\varepsilon^p \pm \sqrt{[\Phi(\varepsilon^p)]^2 - \frac{27}{16}[g(\varepsilon^p)\,\varepsilon^p]^2}\,. \qquad (4.57)$$

Таким образом, для подсчета предела текучести необходимо располагать функциями $\Phi(\varepsilon^p)$ и $g(\varepsilon^p)$. Они могут быть определены на основе испытаний материала на растяжение с разгрузкой в различных точках диаграммы растяжения при напря-

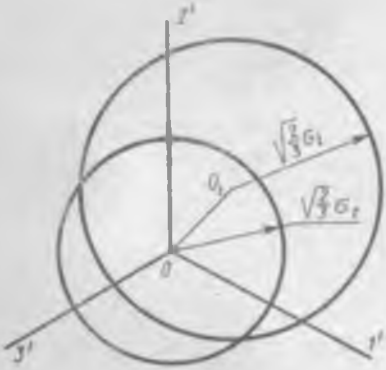


Рис. 4.28. Одновременное равномерное расширение и жесткое смещение следа поверхности Хубера—Мизеса

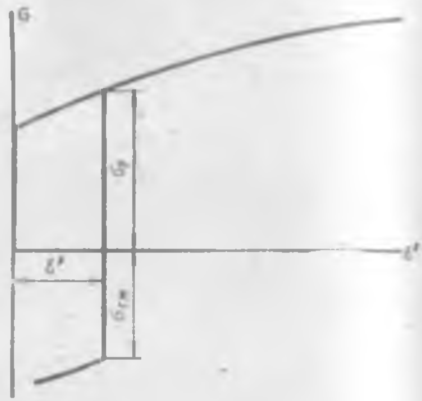


Рис. 4.29. Диаграмма растяжения в координатах ε^p, σ и текущие пределы текучести при растяжении и последующем сжатии

жениях σ_p и пластических деформациях ε^p и последующего испытания материала на сжатие до появления пластических деформаций при напряжениях $\sigma_{сж}$ (рис. 4.29).

Аналогично тому, как ранее была получена формула (4.51), в рассматриваемом случае можно получить

$$\sigma_p = \Phi(\varepsilon^p) + \frac{3}{2} g(\varepsilon^p)\,\varepsilon^p;$$

$$\sigma_{сж} = -\Phi(\varepsilon^p) + \frac{3}{2} g(\varepsilon^p)\,\varepsilon^p.$$

Решая эти уравнения относительно $\Phi(\varepsilon^p)$ и $g(\varepsilon^p)$, имеем

$$\Phi(\varepsilon^p) = \frac{\sigma_p - \sigma_{сж}}{2}, \quad g(\varepsilon^p) = \frac{\sigma_p + \sigma_{сж}}{3\varepsilon^p}\,. \qquad (4.58)$$

Последние формулы позволяют на основании результатов указанных выше испытаний определить функции $\Phi(\varepsilon^p)$ и $g(\varepsilon^p)$.

Рассмотренная теория не справедлива при циклических нагружениях. Действительно, при циклическом деформировании по замкнутой траектории (в начале в конце цикла $\varepsilon_{ij}^p = 0$) согласно приведенным выше уравнениям материал не приобретает анизотропии, в то время как экспериментальные исследования показывают возникновение анизотропии и при циклических нагружениях.

На это обстоятельство было обращено внимание Р. А. Арутюняном и А. А. Вакуленко [1, 2], которые предложили использовать то же условие пластичности (4.55), что и в теории Кадашевича—Новожилова, а зависимость координат центра поверхности пластичности от пластической деформации (4.56) заменить следующей:

$$d\rho_{ij} = A(\sigma_i)\, d\varepsilon_{ij}^p.$$

Это соотношение используют не только для исследования циклического деформирования. Предполагают, что оно лучше отражает историю нагружения, чем выражение (4.56).

Дальнейшее развитие теорий пластичности, отражающих деформационную анизотропию, дано в работах [5, 26, 44, 45, 50, 51] и др.

§ 28. Теория пластичности ортотропного материала с изотропным упрочнением

Ниже изложена теория пластичности ортотропного материала без учета деформационной анизотропии (изотропное упрочнение), предложенная Хиллом [41]. Эта теория широко используется для расчета конструкций из прокатанных листовых материалов, в которых одна из осей симметрии (ось x) совпадает с направлением прокатки. Ось z перпендикулярна листу (см. § 19).

По этой теории условие пластичности имеет вид

$$2f(\sigma_{ij}) = H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 2N\tau_{xy}^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 - 1 = 0, \tag{4.59}$$

где H, F, G, N, L, M — параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии.

Для начала пластичности оно совпадает с условием начала пластических деформаций, предложенным Мизесом и Хиллом, рассмотренным в § 19 [уравнение (3.25)]. В этом случае указанные выше параметры равны соответствующим величинам с индексом 0 (см. § 19).

Применяя условие пластичности (4.59) последовательно для частных случаев трех одноосных растяжений в направлении осей x, y, z и трех сдвигов между этими осями, так же как в § 19 [см. формулы (3.27)], получим

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} - \frac{1}{\sigma_z^2}\right); \\ F &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_z^2} - \frac{1}{\sigma_x^2}\right); \\ G &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_z^2} + \frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2}\right); \\ N &= \frac{1}{2\tau_{xy}^2}, \quad L = \frac{1}{2\tau_{yz}^2}, \quad M = \frac{1}{2\tau_{zx}^2}, \end{aligned}\right| \tag{4.60}$$

где σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} — ординаты диаграмм растяжений и сдвигов (текущие пределы текучести) в различных направлениях.

Ввиду того что упрочнение предполагается изотропным, поверхность пластичности в процессе деформации расширяется равномерно и напряжения при растяжении образцов, вырезанных в различных направлениях (текущие пределы текучести), растут строго пропорционально по мере того, как материал упрочняется.

Поэтому

$$\sigma_x = h\sigma_{xт}, \ \ldots, \ \tau_{zx} = h\tau_{zxт}$$

и согласно формулам (4.60) и (3.27) параметры анизотропии $H, \ldots, M$ уменьшаются пропорционально

$$H = \frac{H_0}{h^2}, \ \ldots, \ M = \frac{M_0}{h^2}, \tag{4.61}$$

где величины $H_0, \ldots, M_0$ определяются формулами (3.27).

В соответствии со сказанным в § 20, параметр h является функцией или работы пластической деформации или параметра Удквиста. В отличие от изотропного тела в рассматриваемом случае в зависимости от принятой гипотезы получаются различные варианты теории пластичности. Хиллом [41] было принято, что параметр h является функцией работы пластической деформации. Такой вариант теории пластичности называют теорией энергетического упрочнения. Он используется в дальнейшем. Второй вариант, в котором принято, что величина h является функцией параметра Удквиста, развит в статьях Дьяконица [48] и Чэкрэбэрти [46]. Его называют теорией деформационного упрочнения.

Введем, следуя Хиллу [41], понятие эквивалентного напряжения

$$\sigma_{экв} = \left\{\frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)}\left[H_0(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F_0(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + G_0(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N_0\tau_{xy}^2 + 2L_0\tau_{yz}^2 + 2M_0\tau_{zx}^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.62}$$

Для изотропного материала $\left(H_0 = F_0 = G_0 = \frac{N_0}{3} = \frac{L_0}{3} = \frac{M_0}{3}\right)$ величина эквивалентного напряжения $\sigma_{экв}$ совпадает с интенсивностью напряжений σ_i.

Используя соотношения (4.61) и (4.59), преобразуем выражение (4.62) к виду

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)}}\, h, \tag{4.63}$$

т. е. эквивалентное напряжение пропорционально h и является функцией работы пластической деформации.

Зависимости приращений пластических деформаций от приращений напряжений согласно ассоциированному закону течения (4.8) и с использованием соотношений (4.59) и (4.61) имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
de_x^p &= \frac{d\lambda}{h^2}\left[H_0(\sigma_x - \sigma_y) + G_0(\sigma_x - \sigma_z)\right];\\
de_y^p &= \frac{d\lambda}{h^2}\left[F_0(\sigma_y - \sigma_z) + H_0(\sigma_y - \sigma_x)\right];\\
de_z^p &= \frac{d\lambda}{h^2}\left[G_0(\sigma_z - \sigma_x) + F_0(\sigma_z - \sigma_y)\right];\\
d\gamma_{xy}^p &= \frac{2d\lambda}{h^2}N_0\tau_{xy}; \quad d\gamma_{yz}^p = \frac{2d\lambda}{h^2}L_0\tau_{yz};\\
d\gamma_{zx}^p &= \frac{2d\lambda}{h^2}M_0\tau_{zx}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.64}$$

Найдем из выражений (4.64) величины $\sigma_x - \sigma_y$, $\sigma_y - \sigma_z$, $\sigma_z - \sigma_x$, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{h^2}{d\lambda} \frac{F_0 d\varepsilon_x^p - G_0\, d\varepsilon_y^p}{H_0F_0 + G_0H_0 + F_0G_0};$$

$$\sigma_y - \sigma_z = \frac{h^2}{d\lambda} \frac{G_0\, d\varepsilon_y^p - H_0\, d\varepsilon_z^p}{H_0F_0 + G_0H_0 + F_0G_0};$$

$$\sigma_z - \sigma_x = \frac{h^2}{d\lambda} \frac{H_0 d\varepsilon_z^p - F_0\, d\varepsilon_x^p}{H_0F_0 + G_0H_0 + F_0G_0};$$

$$\tau_{xy} = \frac{h^2}{2d\lambda} \frac{d\gamma_{xy}^p}{N_0}; \quad \tau_{yz} = \frac{h^2}{2d\lambda} \frac{d\gamma_{yz}^p}{L_0}; \quad \tau_{zx} = \frac{h^2}{2d\lambda} \frac{d\gamma_{zx}^p}{M_0}.$$

Подставим эти величины в выражение (4.62). После преобразований устанавливаем

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{h^2}{d\lambda\,(H_0F_0 + G_0H_0 + F_0G_0)} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{3}{2\,(H_0 + F_0 + G_0)}} \Big\{ H_0 \left(F_0\, d\varepsilon_x^p - G_0\, d\varepsilon_y^p\right)^2 + F_0 \left(G_0 d\varepsilon_y^p - H_0\, d\varepsilon_z^p\right)^2 +$$

$$+ G_0 \left(H_0\, d\varepsilon_z^p - F_0\, d\varepsilon_x^p\right)^2 + \frac{1}{2} \left(H_0F_0 + G_0H_0 + F_0G_0\right)^2 \times$$

$$\times \left[\frac{\left(d\gamma_{xy}^p\right)^2}{N_0} + \frac{\left(d\gamma_{yz}^p\right)^2}{L_0} + \frac{\left(d\gamma_{zx}^p\right)^2}{M_0}\right]\Big\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.65)$$

Введем понятие эквивалентного приращения деформации

$$d\varepsilon_{\text{экв}}^p = \frac{1}{H_0F_0 + G_0H_0 + F_0G_0} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2}{3}\,(H_0 + F_0 + G_0)} \Big\{ H_0 \left(F_0\, d\varepsilon_x^p - G_0\, d\varepsilon_y^p\right)^2 + F_0 \left(G_0 d\varepsilon_y^p - H_0\, d\varepsilon_z^p\right)^2 +$$

$$+ G_0 \left(H_0\, d\varepsilon_z^p - F_0\, d\varepsilon_x^p\right)^2 + \frac{1}{2} \left(H_0F_0 + G_0H_0 + F_0G_0\right)^2 \times$$

$$\times \left[\frac{\left(d\gamma_{xy}^p\right)^2}{N_0} + \frac{\left(d\gamma_{yz}^p\right)^2}{L_0} + \frac{\left(d\gamma_{zx}^p\right)^2}{M_0}\right]\Big\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.66)$$

Для изотропного материала $\left(H_0 = F_0 = G_0 = \frac{N_0}{3} = \frac{L_0}{3} = \frac{M_0}{3}\right)$ величина эквивалентного приращения деформации совпадает с интенсивностью приращений деформаций.

Из выражения (4.65), используя соотношения (4.63) и (4.66), устанавливаем

$$d\lambda = \sigma_{\text{экв}}\, d\varepsilon_{\text{экв}}^p. \qquad (4.67)$$

Покажем теперь, что величина $d\lambda$ равна приращению работы пластической деформации

$$dA^p = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p. \qquad (4.68)$$

Для этого подставим в выражение (4.68) компоненты пластических деформаций по формулам (4.8). Тогда получим

$$dA^p = \sigma_{ij}\, d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{4.69}$$

Как следует из выражения (4.59), выражение $2f(\sigma_{ij}) + 1$ является однородной функцией переменных σ_{ij} второй степени. Поэтому на основании теоремы Эйлера об однородных функциях

$$\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} [2f(\sigma_{ij}) + 1] = 2[2f(\sigma_{ij}) + 1],$$

откуда, используя соотношение (4.59), имеем

$$\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 1$$

и поэтому из соотношения (4.69) устанавливаем

$$dA^p = d\lambda. \tag{4.70}$$

Таким образом, из соотношений (4.70) и (4.67) заключаем, что

$$A^p = \int \sigma_{\text{экв}}\, de^p_{\text{экв}}. \tag{4.71}$$

Если принять, как это было сделано ранее, что h, а значит, и эквивалентное напряжение являются функциями работы пластической деформации, то тогда из соотношения (4.71) можно показать (см. § 23), что эквивалентное напряжение является функцией интеграла от эквивалентного приращения пластических деформаций

$$\sigma_{\text{экв}} = \Phi\left(\int de^p_{\text{экв}}\right).$$

График этой функции называют диаграммой деформирования материала. Ниже будет рассмотрено построение диаграммы деформирования по диаграмме растяжения.

Зависимости приращений пластических деформаций от напряжений (4.64) могут быть преобразованы с использованием соотношений (4.67) и (4.63) к такой же форме, как и в случае изотропного материала:

$$\left.\begin{aligned}
de^p_x &= \frac{3}{2(H_0+F_0+G_0)} \frac{de^p_{\text{экв}}}{\sigma_{\text{экв}}} [H_0(\sigma_x-\sigma_y) + G_0(\sigma_x-\sigma_z)];\\
de^p_y &= \frac{3}{2(H_0+F_0+G_0)} \frac{de^p_{\text{экв}}}{\sigma_{\text{экв}}} [F_0(\sigma_y-\sigma_z) + H_0(\sigma_y-\sigma_x)];\\
de^p_z &= \frac{3}{2(H_0+F_0+G_0)} \frac{de^p_{\text{экв}}}{\sigma_{\text{экв}}} [G_0(\sigma_z-\sigma_x) + F_0(\sigma_z-\sigma_y)];\\
d\gamma^p_{xy} &= \frac{3N_0}{H_0+F_0+G_0} \frac{de^p_{\text{экв}}}{\sigma_{\text{экв}}} \tau_{xy};\\
d\gamma^p_{yz} &= \frac{3L_0}{H_0+F_0+G_0} \frac{de^p_{\text{экв}}}{\sigma_{\text{экв}}} \tau_{yz};\\
d\gamma^p_{zx} &= \frac{3M_0}{H_0+F_0+G_0} \frac{de^p_{\text{экв}}}{\sigma_{\text{экв}}} \tau_{zx}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.72}$$

Используем формулы (4.62) и (4.72) для трех частных случаев одноосных растяжений в направлениях осей симметрии x, y и z.

1) Одноосное растяжение в направлении оси x:

$$\sigma_x \neq 0; \quad \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad \sigma_{экв} = \alpha\sigma_x;$$

$$d\varepsilon^p_{экв} = \frac{d\varepsilon^p_x}{\alpha}; \tag{4.73}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{3(R_x + 1)R_y}{2(R_x + R_xR_y + R_y)}}; \tag{4.74}$$

$$R_x = \frac{H_0}{G_0}; \quad R_y = \frac{H_0}{F_0}. \tag{4.75}$$

2) Одноосное растяжение в направлении оси y:

$$\sigma_y \neq 0; \quad \sigma_z = \sigma_x = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad \sigma_{экв} = \beta\sigma_y;$$

$$d\varepsilon^p_{экв} = \frac{d\varepsilon^p_y}{\beta}; \tag{4.76}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{3R_x(R_y + 1)}{2(R_x + R_xR_y + R_y)}}. \tag{4.77}$$

3) Одноосное растяжение в направлении оси z:

$$\sigma_z \neq 0; \quad \sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad \sigma_{экв} = \gamma\sigma_z;$$

$$d\varepsilon^p_{экв} = \frac{d\varepsilon^p_z}{\gamma}; \tag{4.78}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{3(R_x + R_y)}{2(R_x + R_xR_y + R_y)}}. \tag{4.79}$$

Из соотношений (4.74), (4.77) и (4.79) следует, что

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3.$$

Формулы (4.73)—(4.79) позволяют по диаграмме растяжения в одном из трех направлений симметрии (x, y или z) и трем пределам текучести в этих направлениях построить диаграммы растяжения в двух других.

Аналогично могут быть построены диаграммы растяжения образца, вырезанного из листа в направлении под некоторым углом к оси x по диаграмме растяжения в направлении x или y, трем пределам текучести при растяжении в направлениях осей x, y и z — $\sigma_{xт}$, $\sigma_{yт}$, $\sigma_{zт}$ и пределу текучести при чистом сдвиге $\tau_{xyт}$ или пределу текучести при растяжении в направлении под некоторым углом к оси x.

Величину предела текучести при растяжении в направлении, перпендикулярном толщине листа, определить невозможно. Определение предела текучести при сжатии в том же направлении, равного пределу текучести при растяжении, согласно допущению о том, что механические характеристики материала при растяжении и сжатии одинаковы, связано с трудностями. Поэтому предел текучести при растяжении в направлении, перпендикулярном толщине листа, обычно определяют с помощью измерения поперечных деформаций при растяжении образцов, оси которых совпадают с направлениями x или y.

Действительно, на основании формул (4.72) получаем при растяжении вдоль оси x ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$)

$$\mu_{yx} = \left| \frac{de_y^p}{de_x^p} \right| = \frac{R_x}{1 + R_x}$$

и, следовательно,

$$R_x = \frac{\mu_{yx}}{1 - \mu_{yx}}. \tag{4.80}$$

Таким образом, измерение поперечной деформации в направлении оси y при растяжении вдоль оси x позволяет определить величину R_x.

Из формул (3.27), используя соотношения (4.75) и (4.80), устанавливаем

$$\frac{1}{\sigma_{z\text{т}}^2} = \frac{1}{\sigma_{y\text{т}}^2} + \frac{1 - 2\mu_{yx}}{\sigma_{x\text{т}}^2}. \tag{4.81}$$

Последняя формула дает возможность по двум пределам текучести в направлениях x и y и величине μ_{yx}, устанавливаемой на основании измерений продольных и поперечных деформаций, определить предел текучести в направлении, перпендикулярном листу.

Список литературы

1. **Арутюнян Р. А.** О циклическом нагружении упруго-пластической среды. — «Известия АН СССР. Механика и машиностроение», 1964, № 4, с. 89—91.

2. **Арутюнян Р. А., Вакуленко А. А.** О многократном нагружении упруго-пластической среды. — «Известия АН СССР. Механика», 1965, № 4, с. 53—61.

3. **Биргер И. А.** Остаточные напряжения, М., Машгиз, 1963, 232 с.

4. **Генки Г.** К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 114—135.

5. **Данилов В. Л.** К формулировке закона деформационного упрочнения. — «Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела», 1971, № 6, с. 146—150.

6. **Дэвис Е.** Рост напряжений с изменением деформаций и зависимость «напряжения—деформации» в пластической области для меди при сложном напряженном состоянии. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 336—363.

7. **Дэвис Е.** Текучесть и разрушение стали со средним содержанием углерода при сложном напряженном состоянии. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 364—374.

8. **Жуков А. М.** О коэффициенте Пуассона в пластической области. — «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1954, № 12, с. 86—91.

9. **Жуков А. М., Работнов Ю. Н.** Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении. — «Инженерный сборник», 1954, т. XVIII, с. 105—112.

10. **Жуков А. М.** Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии. — «Инженерный сборник», 1954, т. XX, с. 37—48.

11. **Жуков А. М.** Пластические деформации стали при сложном нагружении. — «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1954, № 11, с. 53—61.

12. **Жуков А. М.** Сложное нагружение и теория пластичности изотропных металлов. — «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1955, № 8, с. 81—92.

13. **Жуков А. М.** О пластических деформациях изотропного металла при сложном нагружении. — «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1956, № 12, с. 72—87.

14. **Жуков А. М.** Деформационная анизотропия и ползучесть малоуглеродистой стали при нормальной температуре. — «Инженерный журнал», 1961, т. 1, вып. 4, с. 150—153.

15. **Ивлев Д. Д.** К теории простого деформирования пластических тел. — «Прикладная математика и механика», 1955, т. XIX в. 6, с. 734—735.
16. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М., ГИТТЛ, 1948, 376 с.
17. **Ильюшин А. А., Ленский В. С.** Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959, 371 с.
18. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М., Изд-во АН СССР, 1963, 271 с.
19. **Ишлинский А. Ю.** Общая теория пластичности с линейным упрочнением. — «Украинский математический журнал», 1954, т. 6, № 3, с. 314—324.
20. **Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.** Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. — «Прикладная математика и механика», 1958, т. XXII, в. 1, с. 78—89.
21. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969, 420 с.
22. **Кац Ш. Н., Качанов Л. М.** О пластической деформации при сложном нагружении. — «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1957 № 11, с. 172—173.
23. **Леви М.** К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 20—23.
24. **Лоде В.** Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит. 1948, с. 168—205.
25. **Людвик П.** Основы технологической механики. — В кн.: Расчеты на прочность. Вып. 15, М., «Машиностроение», 1971, с. 132—166.
26. **Мансуров Р. М.** О пластическом нагружении первоначально изотропных сред с деформационной анизотропией. — В кн.: Упругость и неупругость. Вып. 2, Изд-во Московского университета, М., 1971, с. 137—145.
27. **Мизес Р.** Механика твердых тел в пластически-деформированном состоянии. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 57—69.
28. **Моррисон Д., Шепферд В.** Опытное исследование соотношений между напряжениями и деформациями за пределом упругости. — «Механика. Сборник сокращенных переводов иностранной периодической литературы», 1952, в. 1., с. 107—134.
29. **Москвитин В. В.** Пластичность при переменных нагружениях. М., Изд-во Московского университета, 1965, 263 с.
30. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд. иностр. лит., т. I, 1954, 647 с., т. II, 1969, 863 с.
31. **Прагер А., Ходж Ф. Г.** Теория идеально пластических тел. М., Изд. иностр. лит. 1956, 398 с.
32. **Работнов Ю. Н.** Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1962, 455 с.
33. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.
34. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. II., М., Машгиз, 1958, 974 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.
35. **Рейсс Э.** Учет упругой деформации в теории пластичности. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 206—222.
36. **Седов Л. И.** О понятиях простого нагружения и возможных путях деформирования. — «Прикладная математика и механика», 1959, т. XXIII, в. 2, с. 400—402.
37. **Сен-Венан Б.** Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 11—19.
38. **Сен-Венан Б.** Дифференциальные уравнения внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах, и граничные условия для этих тел. Некоторые приложения. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 24—33.
39. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. I. М., Физматгиз, 1958, 478 с.
40. **Удквист Ф.** Упрочнение стали и ей подобных материалов. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 283—290.
41. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956, 407 с.
42. **Шевелев В. В., Яковлев С. П.** Анизотропия листовых материалов и ее влияние на вытяжку. М., «Машиностроение», 1972, 135 с.

43. **Шмидт Р.** О зависимости между напряжениями и деформациями в области упрочнения. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 231—256.
44. **Backhaus G.** Zur Fließgzenze bei allgemeiner Verfestigung. — «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», 1968, Band 48, Heft 2, S. 99—108.
45. **Baltov A., Sawczuk A.** A rule of anisotropic hardening —«Acta mechanica», 1965, No 1, p. 81—92.
46. **Chakrabarty J.** A hypothesis of strain—hardening in anisotropic plasticity — «International journal of mechanical sciences», 1970, Vol. 12, No 2, p. 169—176.
47. **Davis E. A.** Combined tension torsion test with fixed principal directions — «Journal of applied mechanics», 1955, Vol. 22, No 3, p. 411—417.
48. **Diaconiţa U.** Sur la théorie de la plasticité des corps orthotropes consolidables, «Comptes Rendus», 1969, t269 Serie A, p. 802—804.
49. **Johnson W., Mellor P. B.** Plasticity for mechanical engineers, D. Van Nostrand Company, LTD, 1962, 412 p.
50. **Mroz Z.** On the description of anisotropic workhardening —«Journal of the mechanics and physics of solids», 1967, Vol. 15, p. 163—175.
51. **Mróz Z.** An attemp to describe the behavior of metals under cyclic loads using a more general workhardening model.—«Acta mechanica», 1969, No 7, p. 199—212.
52. **Prandtl L.** Spannungsverteilung in plastischen Korpern. — «Proceedings of 1-st International congress of applied mechanics», Delft, 1924, s. 43—54.
53. **Taylor G., J., Quinney H.**, The plastic distortion of metals.—«Philosophical transactions of the Royal Society», 1931, Ser. A, 230, p. 323—362.
54. **Teoria** plastycznosci, Warszawa Państwowe wydawnictwo naukowe, 1965, 399 s. Aut.: Z. Marciniak, Z. Mróz, W. Olszak i inni.

ГЛАВА V

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

§ 29. Действительная диаграмма растяжения

Как следует из изложенного выше (см. §§ 23 и 24), для расчетов за пределами упругости необходимо располагать диаграммами деформирования материала. В случае больших деформаций нужно иметь действительные диаграммы деформирования, которые строят по действительным диаграммам растяжения. Рассмотрим вначале построение последних.

Экспериментальные исследования механических свойств материала при одноосном растяжении обычно обрабатывают в виде графиков зависимости напряжения от деформации. При этом силу P, растягивающую образец, относят к первоначальной площади поперечного сечения F_0, а удлинение образца Δl — к первоначальной расчетной длине образца l:

$$\sigma = \frac{P}{F_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \tag{5.1}$$

т. е. не учитывают изменение площади поперечного сечения образца и предполагают равномерное деформирование образца по его длине. Поэтому график зависимости напряжения от деформации (рис. 5.1), построенный с использованием формул (5.1), называют условной диаграммой растяжения. Иногда его называют просто диаграммой растяжения.

В действительности площадь поперечного сечения образца непрерывно уменьшается, а при некоторой величине деформации нарушается равномерное по его длине деформирование. Чем больше величина деформации, тем в большей степени действительные напряжения и деформации отличаются от условных. Поэтому для решения технологических задач, характеризующихся большими деформациями, необходимо располагать действительной диаграммой растяжения материала.

Для построения действительной (истинной) диаграммы растяжения до образования шейки необходимо растягивающую силу относить к действительной площади поперечного сечения образца F:

$$\sigma_д = \frac{P}{F}. \tag{5.2}$$

Измерение действительных размеров поперечного сечения образца в процессе испытания его на растяжение производить неудобно. Действительная площадь поперечного сечения F может быть легко связана с первоначальной площадью поперечного сечения F_0, если приближенно принять, что объем элемента образца $F_0\,dz$ при его деформации остается постоянным. Поскольку длина dz этого элемента образца после деформации равна $dz\,(1 + \varepsilon)$, а площадь поперечного сечения равна F, то согласно принятому допущению

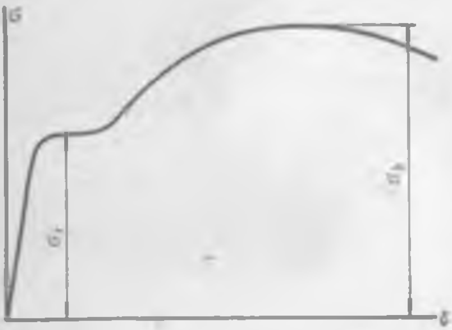


Рис. 5.1. Условная диаграмма растяжения

$$F_0\,dz = F\,dz\,(1 + \varepsilon),$$

откуда

$$F = \frac{F_0}{1 + \varepsilon}. \tag{5.3}$$

Подставляя эту величину в формулу (5.2), получаем зависимость действительного напряжения от условного

$$\sigma_д = \sigma\,(1 + \varepsilon). \tag{5.4}$$

Выше (см. § 15) отмечалось, что при величине обычной деформации меньше 20% различие между логарифмической деформацией и обычной незначительно. Поскольку шейка образуется при обычной деформации 10—15%, то до этого момента логарифмическую деформацию приближенно можно считать равной обычной. Поэтому до образования шейки действительная диаграмма растяжения отличается от условной только по оси ординат и располагается выше ее.

Определим теперь на действительной диаграмме растяжения материала точку, соответствующую пределу прочности материала.

Из выражения (5.4) имеем

$$\sigma = \frac{\sigma_д}{1 + \varepsilon}.$$

Дифференцируя это выражение по ε, получаем

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{1 + \varepsilon}\,\frac{d\sigma_д}{d\varepsilon} - \frac{\sigma_д}{(1 + \varepsilon)^2}.$$

Полагая, что шейка возникает при условном напряжении, равном временному сопротивлению $\sigma_в$, имеем

при $\sigma = \sigma_в$ $\quad \dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$

и поэтому

$$\left.\frac{d\sigma_д}{d\varepsilon}\right|_{\sigma=\sigma_в} = \left.\frac{\sigma_д}{1 + \varepsilon}\right|_{\sigma=\sigma_в}.$$

Согласно формуле (5.4) устанавливаем

$$\left.\frac{d\sigma_д}{d\varepsilon}\right|_{\sigma=\sigma_в} = \sigma_в.$$

Таким образом, при условном напряжении, равном пределу прочности, тангенс угла наклона касательной к действительной диаграмме растяжения численно равен условному пределу прочности материала (см. рис. 5.2).

Из последнего соотношения, используя понятие логарифмической деформации (2.37) и выражение (5.4), получаем

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\sigma_д}\frac{d\sigma_д}{d\bar{\varepsilon}}=1. \qquad (5.5)$$

Следовательно, начало образования шейки соответствует на действительной диаграмме растяжения в координатах $\bar{\varepsilon}$, $\sigma_д$ точке, для которой величина подкасательной λ равна единице (рис. 5.2).

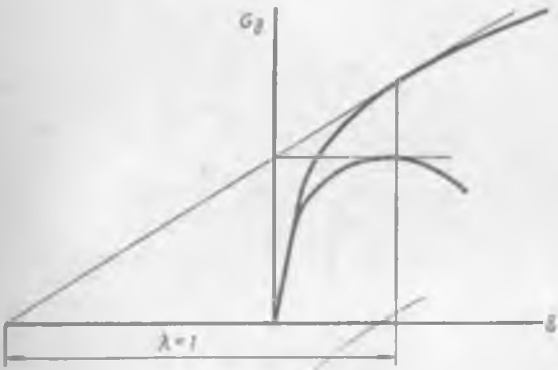


Рис. 5.2. К определению на действительной диаграмме растяжения точки, соответствующей образованию шейки

После образования шейки напряженное состояние образца становится неоднородным и неодноосным, и в этом случае можно построить только действительную диаграмму деформирования.

Изложенный метод построения действительной диаграммы растяжения справедлив как для изотропных, так и для анизотропных материалов.

§ 30. Напряженное состояние в шейке

До образования шейки действительную диаграмму деформирования можно принять совпадающей с действительной диаграммой растяжения, поскольку последнюю строят в предположении несжимаемости материала.

После образования шейки построение действительной диаграммы деформирования должно быть основано на анализе напряженного состояния в шейке.

Изложим предложенное Н. Н. Давиденковым и Н. И. Спиридоновой [2] приближенное решение задачи о напряженном состоянии точек, лежащих в наименьшем поперечном сечении шейки в образце из изотропного материала.

Это решение основано на следующих трех допущениях: 1) материал несжимаем; 2) логарифмические окружная и радиальная деформации в точках наименьшего поперечного сечения шейки равны между собой и постоянны; 3) кривизна траектории одного из главных напряжений в некоторой точке наименьшего поперечного сечения шейки на расстоянии r от оси (рис. 5.3) может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r}{r_1 R}, \tag{5.6}$$

где r_1 — радиус наименьшего поперечного сечения шейки; R — радиус кривизны контура шейки в точке наименьшего поперечного сечения.

Из первых двух допущений следует, что логарифмическая осевая деформация в точках наименьшего поперечного сечения шейки равна удвоенной логарифмической радиальной деформации и постоянна в этом сечении

$$\bar{\varepsilon}_z = -2\bar{\varepsilon}_r = \text{const}$$

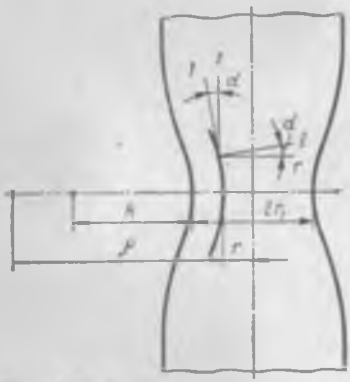


Рис. 5.3. К определению напряжений в наименьшем поперечном сечении шейки

и согласно формуле (2.18) интенсивность логарифмических деформаций равна логарифмической осевой деформации и также постоянна в точках наименьшего поперечного сечения шейки

$$\bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_z = \text{const}. \tag{5.7}$$

На основании выражений (2.37), (5.7) и (5.3) имеем

$$\bar{\varepsilon}_i = \ln \frac{F_0}{F}. \tag{5.8}$$

Из равенства логарифмических окружной и радиальной деформаций следует равенство окружного и радиального напряжения $\sigma_t = \sigma_r$ и согласно формуле (1.21) величина интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \sigma_z - \sigma_r. \tag{5.9}$$

Поскольку интенсивность логарифмических деформаций постоянна в наименьшем поперечном сечении шейки, интенсивность напряжений также постоянна в этом сечении.

Для определения напряжений в наименьшем поперечном сечении шейки используем одно из дифференциальных уравнений равновесия в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \tag{5.10}$$

Рассмотрим в меридиональной плоскости траекторию главного напряжения σ_1 (рис. 5.3).

Обозначим угол наклона касательной к ней с осью z через α. Тогда согласно известным из сопротивления материалов [13] формулам для напряжений в площадке, перепендикулярной к одной из главных площадок, нормаль к которой составляет угол α с главной осью 1, получаем

$$\sigma_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\tau_{zr} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Считая угол α достаточно малым, так что $\cos 2\alpha \approx 1$, $\sin 2\alpha \approx \approx 2\alpha$, имеем

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_1;\ \sigma_r = \sigma_t = \sigma_2; \\ \tau_{zr} &= (\sigma_1 - \sigma_2)\,\alpha = (\sigma_z - \sigma_r)\ \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

Из первого уравнения (5.10), используя выражение (5.9) и (5.11) и учитывая, что для наименьшего поперечного сечения шейки $\alpha = 0$, получаем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_i \frac{d\alpha}{dz} = 0.$$

Замечая, что

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{1}{\rho},$$

и поэтому, используя соотношение (5.6), имеем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{\sigma_i r}{r_1 R}.$$

Проинтегрируем это уравнение, учитывая, что интенсивность напряжений постоянна. Тогда получим

$$\sigma_r = C - \frac{\sigma_i r^2}{2 r_1 R}.$$

Постоянную интегрирования C определяем из условия $\sigma_r = 0$ при $r = r_1$.

В результате получаем

$$C = \frac{\sigma_i r_1}{2R}$$

и, следовательно,

$$\sigma_r = \sigma_i \frac{r_1}{2R}\left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right). \qquad (5.12)$$

Из формулы (5.9) устанавливаем

$$\sigma_z = \sigma_i \left(1 + \frac{r_1}{2R} - \frac{r^2}{2r_1R}\right). \qquad (5.13)$$

Для определения интенсивности напряжений свяжем растягивающую силу с осевыми напряжениями

$$P = 2\pi \int_0^{r_1} \sigma_z r\, dr.$$

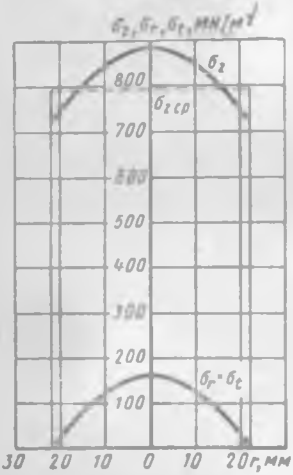


Рис. 5.4. Эпюры осевых, радиальных (окружных) напряжений в минимальном сечении шейки круглого образца из стали 30 для величины логарифмической деформации $\bar{\varepsilon} = 0,68$. Начальный диаметр образца $d_0 = 6$ мм, наименьший диаметр шейки $d = 4,4$ мм, радиус кривизны контура шейки в точке наименьшего сечения $R = 4,8$ мм

Рис. 5.5. Рентгеновский снимок шейки алюминиевого круглого образца непосредственно перед разрушением [9]

Подставим в это выражение соотношение (5.13). После преобразований имеем

$$\sigma_i = \frac{P}{\pi r_1^2 \left(1 + \frac{r_1}{4R}\right)}. \qquad (5.14)$$

Формулы (5.12)—(5.14) определяют напряженное состояние в точках наименьшего поперечного сечения шейки.

На рис. 5.4 изображены эпюры осевых, радиальных (окружных) напряжений в минимальном сечении шейки круглого образца из стали 30. Из эпюр следует, что напряжения максимальны в центральной точке. Рентгеновский снимок (рис. 5.5) показывает, что разрушение образца, по-видимому, началось в центральной точке наименьшего сечения.

Формулы (5.8) и (5.14) позволяют построить действительную диаграмму деформирования в координатах интенсивность логарифмических деформаций — интенсивность напряжений. Для этого необходимо в процессе испытания производить измерение минимального диаметра шейки и радиуса кривизны ее контура в точках наименьшего поперечного сечения шейки. Поскольку проведение таких замеров в процессе испытания образца на растяжение связано с большой затратой труда, для приближенного построения действительной диаграммы деформирования можно произвести замеры после разрушения образца (сжав две его половинки при помощи струбцинки). Тогда по формуле (5.8) определяем интенсивность логарифмических пластических деформаций $\bar{e}_i^p$ в момент разрушения, а по формуле (5.14) интенсивность напряжений в момент разрушения. Соединив таким образом установленную конечную точку с точкой, соответствующей началу образований шейки, плавной кривой или прямой, получим приближенную действительную диаграмму деформирования.

На рис. 5.6 приведена действительная диаграмма деформирования стали 30, построенная до образования шейки по формуле (5.4), а после образования ее по формулам (5.8) и (5.14). Штриховой линией на том же чертеже представлена диаграмма растяжения, полученная без учета изменения напряженного состояния в шейке. В этом случае действительные напряжения определяются формулой

$$\sigma_д = \frac{P}{F}.$$

Как следует из рис. 5.6, учет изменения напряженного состояния в шейке существенно уменьшает величины действительных напряжений.

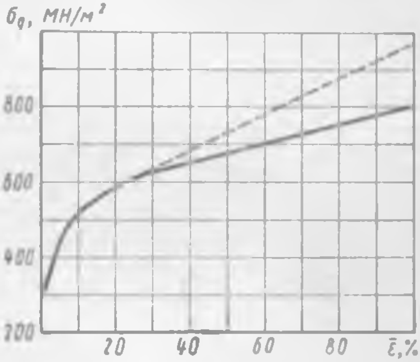


Рис. 5.6. Действительная диаграмма растяжения стали 30

Бриджменом [1] дано решение задачи в той же постановке с использованием тех же первых двух допущений. Отличие этого решения от изложенного выше состоит в различии принятых законов изменения кривизны траектории главных напряжений в точках наименьшего поперечного сечения шейки. В работе [7] также приведено решение рассмотренной выше задачи, но без использования третьего допущения. Сопоставление полученных решений показывает, что различие результатов невелико. В работах [1] и [2] второе допущение подтверждено экспериментально. В книге [1] и статье [10] рассмотрено определение напряжений в наименьшем поперечном сечении шейки растянутого плоского образца. В работе [4] получено точное решение задачи о напряженном и деформированном состоянии образца в начальный период образования шейки.

§ 31. Схематизация диаграмм деформирования

Для упрощения расчетов за пределами упругости условные или действительные диаграммы деформирования, так же как и диаграммы растяжения [14], могут быть схематизированы, т. е. заменены кривыми или прямыми линиями, имеющими достаточно простое математическое выражение и в то же время хорошо совпадающими с экспериментально полученными диаграммами. Таким образом, можно представить себе диаграмму деформирования с площадкой текучести и линейным упрочнением (рис. 5.7), с площадкой текучести и степенным упрочнением (рис. 5.8).

Для первой диаграммы

при $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_{iт}$ $\sigma_i = 3G\varepsilon_i$; (5.15)

при $\varepsilon_{iт} \leqslant \varepsilon_i \leqslant \overset{*}{\varepsilon}_{iт}$ $\sigma_i = \sigma_т$; (5.16)

при $\varepsilon_i \geqslant \overset{*}{\varepsilon}_{iт}$ $\sigma_i = \sigma_т + H_т(\varepsilon_т - \overset{*}{\varepsilon}_{iт})$, (5.17)

Рис. 5.7. Схематизированная диаграмма деформирования с площадкой текучести и линейным упрочнением

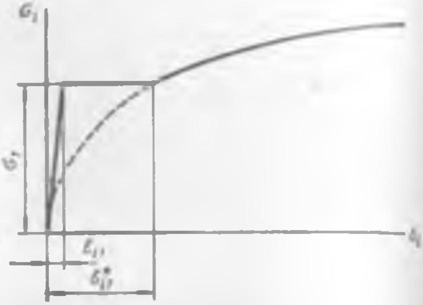


Рис. 5.8. Схематизированная диаграмма деформирования с площадкой текучести и степенным упрочнением

а для второй первые две строчки сохраняются, но

при $\varepsilon_i \geqslant \overset{*}{\varepsilon}_{iт}$ $\sigma_i = \sigma_т \left(\dfrac{\varepsilon_i}{\overset{*}{\varepsilon}_{iт}} \right)^m$,

где $\varepsilon_{iт}$ — интенсивность деформаций, при которой в материале возникают пластические деформации; $\overset{*}{\varepsilon}_{iт}$ — интенсивность деформаций, при которой на диаграмме деформирования кончается площадка текучести и начинается область упрочнения; $H_т$ — модуль упрочнения, показатель степени m изменяется от 0 до 1.

При помощи формул (4.34) и (4.36) легко показать, что эти величины связаны с соответствующими им в случае одноосного растяжения $\varepsilon_т$, $\overset{*}{\varepsilon}_т$ и $E_т$ (модуль упрочнения при растяжении) зависимостями

$$\varepsilon_{iт} = \frac{2}{3}(1+\mu)\varepsilon_т; \quad \overset{*}{\varepsilon}_{iт} = \overset{*}{\varepsilon}_т - \frac{1-2\mu}{3E}\sigma_т;$$

$$H_т = \frac{E_т}{1 - \dfrac{1-2\mu}{3}\dfrac{E_т}{E}}.$$

Как уже отмечалось, если принять условие несжимаемости (4.33) или, что то же, $\mu = 0{,}5$, получим $3G = E$, $\varepsilon_{iт} = \varepsilon_т$, $\overset{*}{\varepsilon}_{iт} = \overset{*}{\varepsilon}_т$, $H_т = E_т$, т. е. диаграмма деформирования совпадает с диаграммой растяжения.

Если площадка текучести отсутствует, то следует положить $\overset{*}{\varepsilon}_т = \varepsilon_т$. Диаграммы деформирования с линейным и степенным упрочнением для этого случая изображены на рис. 5.9. и 5.10.

В табл. 5.1 приведены основные параметры схематизированных диаграмм растяжения с линейным упрочнением для некоторых материалов [12]. Величины σ_T и E_T получены путем обработки условных диаграмм растяжения материала по методу наименьших квадратов до величины деформации, равной $5\varepsilon_T$.

В табл. 5.2 приведены величины схематизированных пределов текучести и показателей степени m для некоторых сталей [8].

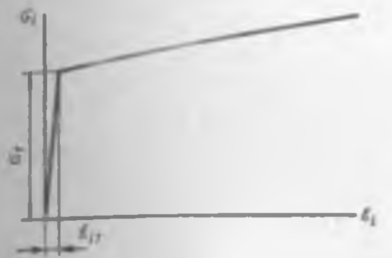


Рис. 5.9. Схематизированная диаграмма деформирования с линейным упрочнением

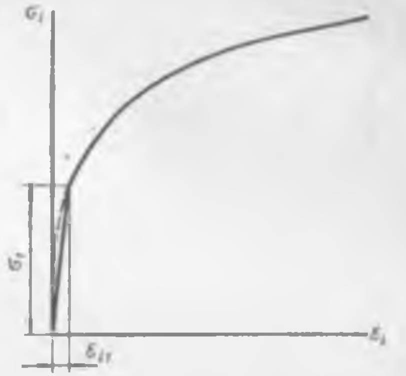


Рис. 5.10. Схематизированная диаграмма деформирования со степенным упрочнением

Иногда для упрощения расчетов зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций не только в области упрочнения, но и во всем интервале изменения деформаций аппроксимируют степенной функцией

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m, \tag{5.18}$$

Рис. 5.11. Схематизированная диаграмма деформирования со степенным упрочнением без упругого участка

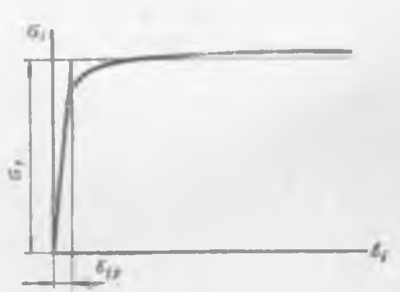


Рис. 5.12. Схематизация диаграммы деформирования диаграммой без упрочнения

причем показатель степени m изменяется от 0 до 1. Такая схематизированная диаграмма деформирования изображена на рис. 5.11. Такая схематизация диаграммы деформирования грубо искажает экспериментально полученную диаграмму при малых деформациях. Действительно, при $0 < m < 1$ производная от интенсивности напряжений по интенсивности деформации в начале координат равна

Таблица 5.1

Параметры схематизированной диаграммы растяжения с линейным упрочнением для некоторых конструкционных сталей и сплавов [12]

Материал	Термообработка	$\sigma_в$, МН/м²	δ, %	$E\cdot10^{-5}$	$\sigma_{пц}$	$\frac{\sigma_T}{\sigma_{пц}}$	$\frac{E_T}{E}$
				МН/м²			
Сталь 40Х	Отжиг	700	25	2,05	400	1,07	0,069
	Закалка, отпуск 500° С	1 200	6	2,08	1 100	1,04	0,022
	Закалка, отпуск 600° С	1 000	9	2,10	780	1,1	0,028
Сталь 40ХНМ	Закалка, отпуск 560° С	1 100	10	2,00	940	1,055	0,0285
Сталь 30ХГС	Закалка 330° С	1 600	8	1,95	720	1,34	0,224
	Закалка, отпуск 500° С	1 200	8	2,05	1 040	1,07	0,035
	Закалка, отпуск 600° С	1 000	12	2,05	800	1,095	0,018
Сталь 18Х2Н4МЛ	Закалка, отпуск 525° С	1 150	9	1,94	770	1,28	0,0545
	Закалка 950° С, закалка 850° С, отпуск 150° С	1 320	10	1,92	500	1,37	0,311
Сталь Я1Т	Закалка 1050° С	620	49	1,88	188	1,17	0,117

Продолжение табл. 5.1

Материал	Термообработка	$\sigma_в$, МН/м²	δ, %	$E\cdot10^{-5}$	$\sigma_{пц}$	$\frac{\sigma_T}{\sigma_{пц}}$	$\frac{E_T}{E}$
				МН/м²			
Сталь ЭИ257	—	300	30	1,70	160	1,28	0,131
Сталь ЭИ503	—	1 050	15	2,00	600	1,33	0,104
Сталь 15Х18Н12С4ТЮ	Закалка 950° С	800	33	1,80	220	1,38	0,327
Сталь ЭИ659	Нормализация, отпуск 500° С	1 300	11	1,94	520	1,385	0,226
Сплав В95	Закалка + искусственное старение	640	7	0,717	550	1,07	0,0285
Сплав В95Т	Закалка + искусственное старение	600	6	0,7	460	1,21	0,0353
Сплав ВТ1	Отжиг 700° С	600	15	1,17	330	1,3	0,079
Сплав Д16	Закалка + естественное старение	520	13	0,746	305	1,045	0,0625
Сплав Д16Т	Закалка + естественное старение	530	8	0,72	340	1,1	0,0445
Сплав АК1	Закалка + искусственное старение	380	15	0,724	195	1,14	0,126

Таблица 5.2

Параметры схематизированной диаграммы растяжения со степенным упрочнением для некоторых конструкционных сталей [8]

Марка стали	Термообработка	$E \cdot 10^{-5}$	$\sigma_т$	m
		МН/м²		
45	Закалка в воздухе 820° С	2,00	263	0,204
40Х	Отжиг 0,5 ч 880° С	2,00	400	0,195
Р9	Без термообработки	2,10	280	0,312
ХГ	То же	1,99	360	0,190
0ХН3М	Закалка и отпуск 550° С	2,00	840	0,140
ЭИ756	Нормализация 1070—1050° С; охлаждение на воздухе; закалка 1020—1050° С в масле; отпуск 660—680° С в печи	2,12	400	0,216

Рис. 5.13. Диаграмма деформирования жестко-пластического упрочняющегося тела с площадкой текучести

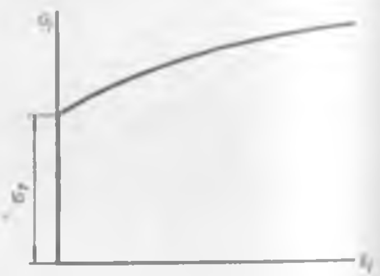


Рис. 5.14. Диаграмма деформирования жестко-пластического упрочняющегося тела без площадки текучести

бесконечности, в то время как в действительности эта величина численно равна утроенному модулю упругости второго рода.

Частным случаем диаграммы с линейным упрочнением (см. рис. 5.9) является диаграмма идеального упруго-пластического тела

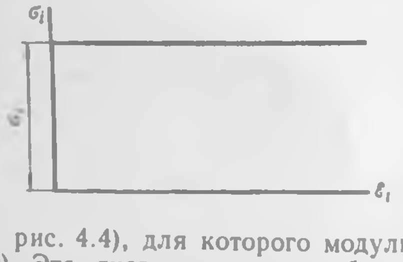


Рис. 5.15. Схематизированная диаграмма деформирования идеального жестко-пластического тела

(см. рис. 4.4), для которого модуль упрочнения равен нулю ($H_т = 0$). Эта диаграмма может быть использована для материалов, имеющих ярко выраженную площадку текучести при условии, что интенсивность деформации детали не превосходит величины $\varepsilon_{iт}$, а также в тех случаях, когда она с достаточной степенью точности аппроксимирует действительную диаграмму деформирования, например, как это представлено на рис. 5.12.

При больших величинах интенсивностей деформаций величиной упругой деформации по сравнению с пластической можно пренебречь, или, что равносильно, принять модуль упругости равным бесконечности. Тогда получаем диаграмму деформирования, приведенную на рис. 5.13. Ее называют диаграммой жестко-пластического упрочняющегося тела с площадкой текучести.

В случае отсутствия площадки текучести (рис. 5.14) за уравнения ее можно принять следующие выражения:

$$\sigma_i = \sigma_{\text{Т}} + A\varepsilon_i^m,$$

или

$$\sigma_i = A\left(B + \varepsilon_i\right)^m. \qquad (5.19)$$

При отсутствии упрочнения указанную диаграмму называют диаграммой деформирования идеального жестко-пластического тела (рис. 5.15).

Список литературы

1. **Бриджмен П.** Исследование больщих пластических деформаций и разрыва М., Изд. иностр. лит., 1955, 444 с.
2. **Давиденков Н. Н., Спиридонова Н. И.** Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца. — «Заводская лаборатория», 1945, т. XI, № 6, с. 583—593.
3. **Дэвис Е.** Текучесть и разрушение стали со средним содержанием углерода при сложном напряженном состоянии. — В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 364—374.
4. **Жуков А. М.** К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении. — «Инженерный сборник», 1949, т. V, вып. 2, с. 34—51.
5. **Лихарев К. К.** Сопоставление характеристик материалов при одноосных растяжении и сжатии. — В кн.: Расчеты на прочность в машиностроении. Сб. 89, М., Машгиз, 1955, с. 168—196.
6. **Лихарев К. К.** К методике построения действительных характеристик материалов при одноосном растяжении и сжатии. — «Заводская лаборатория», 1957, т. XXIII, № 12, с. 1472—1477.
7. **Малинин Н. Н., Петросян Ж. Л.** Напряжения в наименьшем сечении шейки растянутого круглого образца. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1967, № 6, с. 34—39.
8. **Махонина Т. М.** Экспериментальное исследование прессовых посадок. — В кн.: Расчеты на прочность. Вып. 11, М., Машгиз, 1965, с. 385—395.
9. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд. иностр. лит., 1954, 647 с.
10. **Петросян Ж. Л.** Напряжения в наименьшем сечении шейки растянутого плоского образца. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1967, № 7, с. 54—58.
11. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. I. М., Машгиз, 1956, 884 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.
12. **Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М.** Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М., Машгиз, 1963, 451 с.
13. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М., «Наука», 1974, 559 с.
14. **Johnson W., Mellor P. B.** Plasticity for mechanical engineers, D. Van Nostrand company 1962, 412 p.

ГЛАВА VI

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 32. Упруго-пластическое состояние толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и осевой силой при отсутствии упрочнения

Допустим, что толстостенная труба, внутренний радиус которой r_1, а наружный r_2, нагружена внутренним давлением p и осевой силой N (рис. 6.1). Примем, что материал трубы несжимаем ($\varepsilon_0 = 0$, $\mu = 0{,}5$) и не имеет упрочнения, т. е. диаграмма деформирования такая же, как на рис. 4.4. Ниже (см. § 46) будет сопоставлено это решение с точным, выполненным с учетом сжимаемости материала, а также рассмотрен учет упрочнения (§ 33).

Для бесконечно длинной трубы из условия симметрии очевидно, что поперечные сечения ее при деформации остаются плоскими и перпендикулярными к оси, т. е. осевая деформация трубы не изменяется по радиусу и длине

$$\varepsilon_z = \text{const}. \qquad (6.1)$$

Для трубы конечных размеров постоянство осевой деформации может быть обеспечено приложением на торцах нормальных сил, распределенных по определенному закону, симметрично относительно оси трубы. Равнодействующая этих сил N определяется величиной осевой деформации. В сечениях, достаточно удаленных от торцов, закон распределения по сечению внутренних нормальных сил не зависит от того, как внешние нормальные силы распределены по торцам. Последнее обстоятельство дает возможность для сечений трубы конечной длины, достаточно удаленных от ее торцов, считать условие (6.1) справедливым.

Допустим, что постоянная в соотношении (6.1) равна нулю, т. е.

$$\varepsilon_z = 0. \qquad (6.2)$$

Ниже будет установлено, когда это условие справедливо.

В пределах упругости для толстостенной трубы наиболее опасными точками являются точки на внутренней поверхности [28]. В них первоначально возникают пластические деформации и, следовательно, пластическая область примыкает к внутренней поверхности трубы. Из условия симметрии нагружения относительно оси трубы следует, что пластическая область в поперечном сечении трубы представляет собой кольцо. Обозначим радиус границы, разделяющей упругую и пластическую области, через $r_т$ (рис. 6.1). Очевидно, что эта величина характеризует степень распространения пластических деформаций в сечении трубы. Вследствие осевой симметрии нагружения в упруго-пластическом состоянии напряжения, деформации и перемещения являются функциями только радиуса r. По этой же причине касательные напряжения в окружном и радиальном сечениях отсутствуют и, следовательно, эти сечения, а также поперечное сечение трубы являются главными. Напряжения в них: радиальное σ_r, окружное σ_t и осевое σ_z — главные напряжения.

Радиальное и окружное напряжения в упругой области определяем по формулам [28]:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\left(A - \frac{B}{r^2}\right); \quad \sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\left(A + \frac{B}{r^2}\right). \qquad (6.3)$$

Коэффициент $\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T$ в формулах (6.3) введен перед скобками для удобства последующих выкладок. Он влияет только на величины постоянных интегрирования.

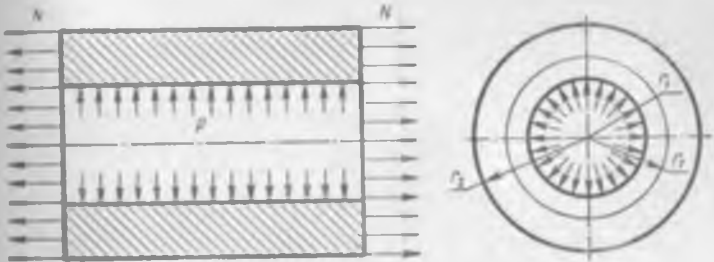


Рис. 6.1. Схема нагружения толстостенной трубы

В пределах упругости осевая деформация ε_z связана с осевым σ_z, радиальным σ_r, окружным σ_t напряжениями соотношением

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_t)\right].$$

На основании равенства (6.2) получаем зависимость осевого напряжения от окружного и радиального

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_t). \qquad (6.4)$$

Для определения напряжений в пластической области используем дифференциальное уравнение равновесия элемента трубы [28]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \qquad (6.5)$$

и поскольку упрочнение отсутствует, условие пластичности (3.18).

Зависимости компонентов деформаций от компонентов напряжений в решаемой задаче согласно соотношениям (4.32) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_r - \sigma_0); \\ \varepsilon_t &= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_t - \sigma_0); \\ \varepsilon_z &= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_z - \sigma_0). \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

В рассматриваемом случае в соответствии с соотношениями (1.21) и (1.5)

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2}; \tag{6.7}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_t + \sigma_z}{3}. \tag{6.8}$$

Используя условие (6.2), из третьей формулы (6.6) получаем

$$\sigma_z = \sigma_0$$

и согласно выражению (6.8)

$$\sigma_z = \sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2}. \tag{6.9}$$

Подставляя эту величину в выражение для интенсивности напряжений (6.7), имеем

$$\sigma_i = +\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_t - \sigma_r). \tag{6.10}$$

Знак плюс в этой формуле взят потому, что для трубы, нагруженной только внутренним давлением, величина, стоящая в скобках, положительна.

Согласно условию пластичности (3.18)

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T, \tag{6.11}$$

поэтому дифференциальное уравнение равновесия (6.5) принимает вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_T}{r}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\left(\ln\frac{r}{r_T} + C_1\right), \tag{6.12}$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

По формулам (6.11), (6.9) и (6.12) имеем

$$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_T} + C_1 + 1 \right); \tag{6.13}$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_T} + C_1 + \frac{1}{2} \right). \tag{6.14}$$

Для определения постоянных A, B и C и неизвестного радиуса границы, разделяющей упругую и пластическую области r_T, используем краевые условия:

1) при $r = r_1$ $\sigma_r = -p$;

2) при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$;

3) при $r = r_T$ $\sigma_r^p = \sigma_r^e$;

4) при $r = r_T$ $\sigma_t^p = \sigma_t^e$,

где индексами p и e отмечены напряжения соответственно в пластической и упругой областях.

Из первого краевого условия, используя выражение (6.12), имеем

$$\ln \frac{r_1}{r_T} + C_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\sigma_T}. \tag{6.15}$$

Из второго краевого условия с помощью соотношений (6.3) устанавливаем, что

$$A - \frac{B}{r_2^2} = 0. \tag{6.16}$$

Третье и четвертое краевые условия при помощи соотношений (6.13), (6.12) и (6.3) дают

$$C_1 = A - \frac{B}{r_T^2}; \tag{6.17}$$

$$C_1 + 1 = A + \frac{B}{r_T^2}. \tag{6.18}$$

Решая уравнения (6.16)—(6.18) относительно A, B, C, получаем

$$A = \frac{1}{2} \frac{r_T^2}{r_2^2}, \quad B = \frac{r_T^2}{2}, \quad C_1 = \frac{r_T^2 - r_2^2}{2r_2^2}. \tag{6.19}$$

Подставим величину постоянной C_1 в соотношение (6.15). Тогда выводим уравнение, связывающее радиус границы, отделяющей упругую область от пластической, и приложенное давление

$$p = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(2 \ln \frac{r_T}{r_1} - \frac{r_T^2}{r_2^2} + 1 \right); \tag{6.20}$$

это уравнение решается численно или графически. Решение значительно облегчается, если уравнение представить в виде

$$\left(\frac{r_{\text{т}}}{r_2}\right)^2 + 2\ln\frac{r_2}{r_1} - 1 = 2\ln\frac{r_2}{r_1} - \sqrt{3}\,\frac{p}{\sigma_{\text{т}}}.$$

Подставляя величины постоянных по выражениям (6.19) в соотношения (6.3), (6.4), (6.12)—(6.14), получаем формулы для напряжений:

в упругой области

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_{\text{т}}}{r_2}\right)^2\left[1-\left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right];\\ \sigma_t &= \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_{\text{т}}}{r_2}\right)^2\left[1+\left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right];\\ \sigma_z &= \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_{\text{т}}}{r_2}\right)^2\end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

и в пластической области

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\left[2\ln\frac{r}{r_{\text{т}}}+\left(\frac{r_{\text{т}}}{r_2}\right)^2-1\right];\\ \sigma_t &= \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\left[2\ln\frac{r}{r_{\text{т}}}+\left(\frac{r_{\text{т}}}{r_2}\right)^2+1\right];\\ \sigma_z &= \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\left[2\ln\frac{r}{r_{\text{т}}}+\left(\frac{r_{\text{т}}}{r_2}\right)^2\right].\end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

Перейдем к рассмотрению радиальных перемещений.

Радиальная ε_r и окружная ε_t деформации связаны с радиальным перемещением u и радиусом r соотношениями

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \qquad (6.23)$$

откуда

$$u = \varepsilon_t r. \qquad (6.24)$$

Из условия несжимаемости (4.33) и выражений (6.2), (6.23) может быть получено дифференциальное уравнение для радиального перемещения, справедливое как в упругой, так и в пластической областях. Поэтому зависимость радиального перемещения от радиуса может быть установлена по формуле (6.24) с использованием закона Гука и величин напряжений в упругой области. Тогда получим

$$u = \frac{r}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_r)\right]. \qquad (6.25)$$

Подставляя в это выражение напряжения по формулам (6.21), выводим зависимость радиального перемещения от радиуса, справедливую как в упругой, так и в пластической областях

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sigma_{\text{т}}}{E}\,\frac{r_{\text{т}}^2}{r}. \qquad (6.26)$$

Найдем теперь величину нормальной силы в поперечном сечении трубы. Последняя связана с осевыми напряжениями соотношением

$$N = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r\, dr. \tag{6.27}$$

Подставим в это выражение осевое напряжение по формулам (6.21) и (6.22). Тогда получим

$$N = 2\pi \int_{r_1}^{r_T} \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 \right] r\, dr + 2\pi \int_{r_T}^{r_2} \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 r\, dr.$$

Используя соотношение (6.20), имеем

$$N = p\pi r_1^2. \tag{6.28}$$

Очевидно, что такая осевая сила возникает в толстостенной трубе с днищами, нагруженной внутренним давлением. Таким образом, осевая деформация равна нулю, если торцы трубы не могут смещаться в осевом направлении или если для трубы из несжимаемого материала величина осевой силы определяется формулой (6.28). Последнее, например, имеет место для трубы, у которой осевая сила возникает только за счет давления на днище.

Определим теперь величину предельного давления, т. е. такого давления, при котором исчерпывается несущая способность трубы (пластическая область распространяется на все сечение трубы $r_T = r_2$). Полагая в формуле (6.20) $r_T = r_2$, получаем

$$p_{пр} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{6.29}$$

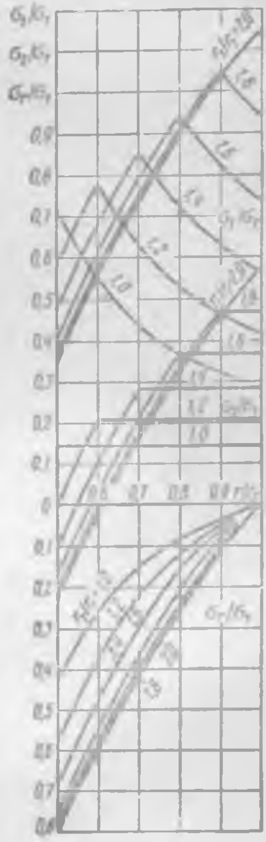


Рис. 6.2. Эпюры напряжений в толстостенной трубе

Величины напряжений в предельном состоянии определяем по формулам (6.22), полагая в них $r_T = r_2$:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{r_2}; \\ \sigma_t &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_2} + 1 \right); \\ \sigma_z &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_2} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}\right| \tag{6.30}$$

это уравнение решается численно или графически. Решение значительно облегчается, если уравнение представить в виде

$$\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2 + 2\ln\frac{r_2}{r_1} - 1 = 2\ln\frac{r_2}{r_1} - \sqrt{3}\,\frac{p}{\sigma_T}.$$

Подставляя величины постоянных по выражениям (6.19) в соотношения (6.3), (6.4), (6.12)—(6.14), получаем формулы для напряжений:

в упругой области

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2\left[1-\left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right]; \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2\left[1+\left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right]; \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

и в пластической области

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\left[2\ln\frac{r}{r_T}+\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2-1\right]; \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\left[2\ln\frac{r}{r_T}+\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2+1\right]; \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\left[2\ln\frac{r}{r_T}+\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

Перейдем к рассмотрению радиальных перемещений.

Радиальная ε_r и окружная ε_t деформации связаны с радиальным перемещением u и радиусом r соотношениями

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \qquad (6.23)$$

откуда

$$u = \varepsilon_t r. \qquad (6.24)$$

Из условия несжимаемости (4.33) и выражений (6.2), (6.23) может быть получено дифференциальное уравнение для радиального перемещения, справедливое как в упругой, так и в пластической областях. Поэтому зависимость радиального перемещения от радиуса может быть установлена по формуле (6.24) с использованием закона Гука и величин напряжений в упругой области. Тогда получим

$$u = \frac{r}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_r)\right]. \qquad (6.25)$$

Подставляя в это выражение напряжения по формулам (6.21), выводим зависимость радиального перемещения от радиуса, справедливую как в упругой, так и в пластической областях

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sigma_T}{E}\,\frac{r_T^2}{r}. \qquad (6.26)$$

Найдем теперь величину нормальной силы в поперечном сечении трубы. Последняя связана с осевыми напряжениями соотношением

$$N = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r\, dr. \tag{6.27}$$

Подставим в это выражение осевое напряжение по формулам (6.21) и (6.22). Тогда получим

$$N = 2\pi \int_{r_1}^{r_T} \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2 \ln \frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2\right] r\, dr + 2\pi \int_{r_T}^{r_2} \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2 r\, dr.$$

Используя соотношение (6.20), имеем

$$N = p\pi r_1^2. \tag{6.28}$$

Очевидно, что такая осевая сила возникает в толстостенной трубе с днищами, нагруженной внутренним давлением. Таким образом, осевая деформация равна нулю, если торцы трубы не могут смещаться в осевом направлении или если для трубы из несжимаемого материала величина осевой силы определяется формулой (6.28). Последнее, например, имеет место для трубы, у которой осевая сила возникает только за счет давления на днище.

Определим теперь величину предельного давления, т. е. такого давления, при котором исчерпывается несущая способность трубы (пластическая область распространяется на все сечение трубы $r_T = r_2$). Полагая в формуле (6.20) $r_T = r_2$, получаем

$$p_{пр} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{6.29}$$

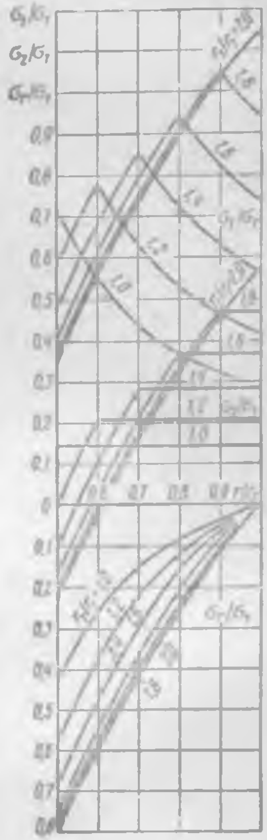


Рис. 6.2. Эпюры напряжений в толстостенной трубе

Величины напряжений в предельном состоянии определяем по формулам (6.22), полагая в них $r_T = r_2$:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{r_2}; \\ \sigma_t &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_2} + 1\right); \\ \sigma_z &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_2} + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

На рис. 6.2 представлены эпюры окружных, радиальных и осевых напряжений, построенных по формулам (6.21) и (6.22) для трубы с отношением $\frac{r_2}{r_1} = 2$ при различных отношениях $\frac{r_T}{r_1}$. На этом же чертеже приведены эпюры напряжений в предельном состоянии $\frac{r_T}{r_1} = \frac{r_2}{r_1} = 2$, построенные по формулам (6.30). Как следует из рис. 6.2, характер распределения окружных напряжений в предельном состоянии радикально отличен от распределения их в пределах упругости. Наибольшее окружное напряжение возникает в точках наружной поверхности. Это согласуется с опытами Бриджмена [5], который экспериментально установил, что разрушение стальных толстостенных труб, нагруженных внутренним давлением, начинается с наружной поверхности.

§ 33. Упруго-пластическое состояние толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и осевой силой при линейном упрочнении

Допустим, что диаграмма деформирования материала трубы может быть схематизирована в виде диаграммы без площадки текучести с линейным упрочнением (рис. 5.11).

Так же, как и в предыдущем параграфе, примем, что материал трубы несжимаем ($\varepsilon_0 = 0$) и что осевая деформация трубы равна нулю ($\varepsilon_z = 0$). Тогда напряжения в упругой области определяются по-прежнему по формулам (6.3) и (6.4) и соотношения (6.9) и (6.10) остаются справедливыми.

Определим напряжения в пластической области.

Дифференциальное уравнение равновесия (6.5) с использованием соотношения (6.10) приводим к виду

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_i}{r}. \tag{6.31}$$

При отсутствии площадки текучести $\left(\varepsilon_{i\text{T}}^{*} = \varepsilon_{i\text{T}}\right)$ для несжимаемого материала ($H_\text{T} = E_\text{T}$) из формулы (5.33) имеем при $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon_{i\text{T}}$

$$\sigma_i = \lambda\sigma_\text{T} + E_\text{T}\varepsilon_i, \tag{6.32}$$

где $\lambda = 1 - \frac{E_\text{T}}{E}$ — параметр упрочнения.

Подставляя выражение (6.32) в уравнение (6.31), получаем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\lambda\sigma_\text{T}}{r} + \frac{E_\text{T}\varepsilon_i}{r} \right). \tag{6.33}$$

Определим закон изменения интенсивности деформаций. Из условия несжимаемости (4.33) и выражений (6.2), (6.23) получаем дифференциальное уравнение для радиального перемещения, справедливое как в упругой, так и в пластической областях

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0.$$

Интеграл его имеет вид

$$u = \frac{C_2}{r}, \tag{6.34}$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Согласно формулам (6.23) имеем

$$e_t = -e_r = \frac{C_2}{r^2}. \qquad (6.35)$$

Из выражения (2.18), используя соотношения (6.2) и (6.35), получим

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_2}{r^2}. \qquad (6.36)$$

Подставим выражение (6.36) в уравнение (6.33). Тогда

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{E_T C_2}{\sigma_T r^3} \right).$$

В результате интегрирования этого соотношения устанавливаем

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\lambda \ln \frac{r}{r_T} + C_1 - \frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T r^2} \right), \qquad (6.37)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Из соотношений (6.10), (6.32), (6.36), (6.37) и (6.9) имеем

$$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\lambda \ln \frac{r}{r_T} + \frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T r^2} + C_1 + \lambda \right); \qquad (6.38)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(\lambda \ln \frac{r}{r_T} + C_1 + \frac{\lambda}{2} \right). \qquad (6.39)$$

Краевые условия имеют такой же вид, как и в предыдущем параграфе.

Из первого краевого условия, используя выражение (6.37), имеем

$$\lambda \ln \frac{r_1}{r_T} + C_1 - \frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T r_1^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\sigma_T}. \qquad (6.40)$$

Из второго краевого условия с помощью формулы (6.3) получаем

$$A - \frac{B}{r_2^2} = 0. \qquad (6.41)$$

Третье и четвертое краевые условия с использованием соотношений (6.37), (6.38) и (6.3) дают

$$-\frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T r_T^2} + C_1 = A - \frac{B}{r_T^2}; \qquad (6.42)$$

$$\frac{E_T C_2}{\sqrt{3} \sigma_T r_T^2} + C_1 + \lambda = A + \frac{B}{r_T^2}. \qquad (6.43)$$

Решаем уравнения (6.41)—(6.43) относительно A, B и C, учитывая, что при $r = r_T$ $e_i = e_T$ и, следовательно, согласно формуле (6.36)

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_2}{r_T^2} = \frac{\sigma_T}{E}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{r_T^2}{2 r_2^2}; \quad B = \frac{r_T^2}{2}; \\ C_1 &= \frac{r_T^2 - \lambda r_2^2}{2 r_2^2}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_T}{E} r_T^2. \end{aligned} \right\} \qquad (6.44)$$

Подставим величины C_1 и C_2 в соотношение (6.40). Тогда получим уравнение, связывающее радиус границы, разделяющей упругую и пластическую области, и приложенное давление, аналогично уравнению (6.20)

$$p = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2\lambda \ln \frac{r_T}{r_1} + (1-\lambda) \frac{r_T^2}{r_1^2} - \frac{r_T^2}{r_2^2} + \lambda \right]. \tag{6.45}$$

Так же, как и уравнение (6.20), это уравнение может быть решено численно или графически.

Подставляя величины постоянных C_1 и C_2 по формулам (6.44) в соотношения (6.37)—(6.39), получим выражения для напряжений в пластической области:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2\lambda \ln \frac{r}{r_T} - (1-\lambda) \frac{r_T^2}{r^2} + \frac{r_T^2}{r_2^2} - \lambda \right]; \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[2\lambda \ln \frac{r}{r_T} + (1-\lambda) \frac{r_T^2}{r^2} + \frac{r_T^2}{r_2^2} + \lambda \right]; \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(2\lambda \ln \frac{r}{r_T} + \frac{r_T^2}{r_2^2} \right). \end{aligned}\right\} \tag{6.46}$$

Если в этих соотношениях положим $\lambda = 1$ ($E_T = 0$), то получим формулы (6.22), выведенные в предыдущем параграфе при отсутствии упрочнения. Подставляя величины постоянных A и B по формулам (6.44) в соотношения (6.3) и (6.4), получим уравнения для напряжений в упругой области такие же, как и в предыдущем параграфе [см. формулы (6.21)]. Далее, подставляя величину постоянной C_2 по формуле (6.44) в уравнение радиальных перемещений (6.34), приходим к заключению, что так же, как и в предыдущем параграфе, радиальное перемещение как в упругой, так и в пластической областях определяется по формуле (6.26).

Таким образом, упрочнение не влияет на законы распределения напряжений в упругой области и радиальных перемещений в упругой и пластической областях.

Определим теперь величину нормальной силы в поперечном сечении трубы. Подставляя в формулу (6.27) осевое напряжение по формулам (6.46) и (6.21), имеем

$$N = 2\pi \int_{r_1}^{r_T} \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(2\lambda \ln \frac{r}{r_T} + \frac{r_T^2}{r_2^2} \right) r\,dr + 2\pi \int_{r_T}^{r_2} \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{r_T}{r_2} \right)^2 r\,dr$$

откуда, используя выражение (6.40), получаем соотношение (6.28). Таким образом, как и в предыдущем параграфе, заключаем, что осевая деформация трубы равна нулю, если торцы трубы не могут смещаться в осевом направлении или если для трубы из несжимаемого материала величина осевой силы определяется формулой (6.28), что, например, имеет место для трубы, у которой осевая сила возникает только за счет давления на днища.

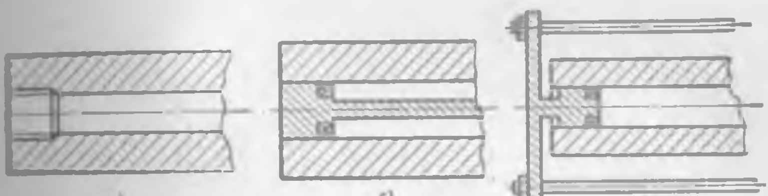
Большие деформации толстостенной трубы по теории упруго-пластических деформаций рассмотрены в работах [4, 14, 20, 25, 32]. Различным методам упрочнения толстостенных цилиндров и расчетам их на динамическую нагрузку посвящена книга [12]. Решение задачи об упруго-пластическом состоянии толстостенной сферы, нагруженной внутренним и внешним давлениями, изложено в книгах [11, 24].

Обобщение решения этой задачи на случай больших деформаций дано в статьях [2, 14].

§ 34. Автоскрепление толстостенных труб

В практике производства толстостенных труб иногда повышают их несущую способность в пределах упругости путем нагружения труб внутренним давлением, при котором в трубе возникают пластические деформации (автоскрепление или автофретирование) [26], [12]. Автоскрепление производится либо в упруго-пластической стадии нагружения, когда в трубе существуют упругая и пластическая области, либо в пластической стадии, когда упругая область исчезает и интенсивность напряжений σ_i во всех точках трубы выше предела текучести $\sigma_т$.

Существуют два способа автоскрепления.



а) б) в)

Рис. 6.3. Схемы двух способов автоскрепления:

а — с продольным растяжением; *б*, *в* — без продольного растяжения

Первый способ. Автоскрепление с продольным растяжением. Трубу закрывают пробками (рис. 6.3, *а*), за счет давления на которые возникает растягивающая сила

$$N = p\pi r_1^2.$$

Второй способ. Автоскрепление без продольного растяжения. В этом случае пробки, несущие обтюрирующие замки, не ввинчиваются в трубу, а соединяются между собой посредством одного центрального стержня (рис. 6.3, *б*) или нескольких нецентральных стержней (рис. 6.3, *в*). При таком способе автоскрепления сила, растягивающая трубу, равна нулю.

Рассмотрим пример расчета автоскрепленной трубы. Предположим, что труба имеет внутренний диаметр $2r_1 = 67$ мм, наружный диаметр $2r_2 = 187$ мм. Диаграмма растяжения материала трубы может быть схематизирована в виде диаграммы растяжения с линейным упрочнением, без площадки текучести (рис. 5.11). Основные параметры диаграммы растяжения $E = 2 \cdot 10^5$ МН/м^2; $E_т = 6850$ МН/м^2; $\sigma_т = 476$ МН/м^2. Автоскрепление производится с продольным растяжением, при упруго-пластическом нагружении.

Зависимость давления автоскрепления от радиуса границы упругой и пластической областей устанавливается формулой (6.45).

На рис. 6.4 представлен график этой зависимости. Пластические деформации в трубе возникают при $p_T = 0{,}503\sigma_T = 240$ МН/м². Упругая область исчезает при $p = p_T^* = 1{,}28\sigma_T = 610$ МН/м².

Если труба не была предварительно автоскреплена, то давление, при котором в ней возникают пластические деформации, является давлением p_T. Рабочее давле-

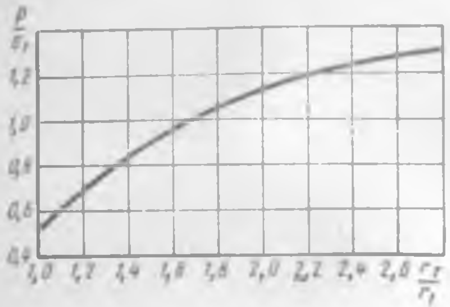


Рис. 6.4. К примеру расчета автоскрепления трубы. График зависимости давления автоскрепления от радиуса границы, разделяющей упругую и пластическую области

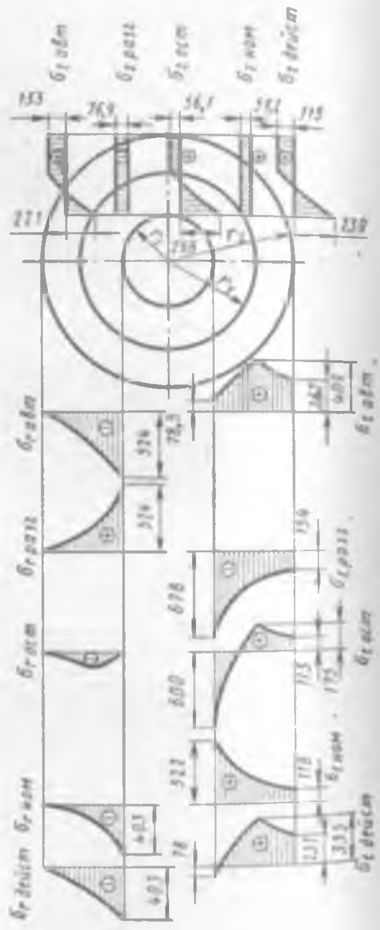


Рис. 6.5. К примеру расчета автоскрепления трубы. Эпюры напряжений, возникающих при автоскреплении, снимающихся при разгрузке, остаточных, номинальных и действительных напряжений

ние для нее не должно превышать этой величины. Если труба предварительно подвергалась автоскреплению, то давление, при котором возникают пластические деформации, повышается. Оно равно давлению автоскрепления. Последнее для трубы заданных размеров из определенного материала зависит от выбора радиуса границы упругой и пластической областей. Эта величина должна быть установлена из наблюдений за эксплуатацией автоскрепленных труб. Так, например, полагая в рассматриваемом примере $\frac{r_T}{r_2} = 0{,}7$ и $\frac{r_T}{r_1} = 1{,}954$, по формуле (6.45) получаем $p = 1{,}1\sigma_T = 524$ МН/м². Следовательно, путем автоскрепления удается повысить предельное давление с $p = 240$ МН/м² до $p = 524$ МН/м².

На рис. 6.5 представлены эпюры радиальных, окружных и осевых напряжений, возникающих при автоскреплении $\left(\frac{r_T}{r_1} = 1{,}954\right)$, а также снимающихся при разгрузке, остаточных и номинальных напряжений при величине внутреннего давления $p = 403$ МН/м². На том же рисунке представлены эпюры действительных напряжений, являющихся суммой остаточных напряжений, возникающих в результате автоскрепления, и номинальных напряжений.

§ 35. Упруго-пластическое состояние диска постоянной толщины, нагруженного внутренним давлением при отсутствии упрочнения

Представим себе неподвижный диск постоянной толщины, внутренний радиус которого r_1, а наружный r_2, нагруженный внутренним давлением p (рис. 6.6). Допустим, что материал диска не имеет упрочнения.

Используем те же допущения, что и в расчетах дисков в пределах упругости [15]. Согласно первому допущению принимаем равномерное распределение напряжений по нормали к срединной плоскости дисков. Согласно второму допущению предполагаем, что в плоскостях, параллельных срединной плоскости, напряжения отсутствуют. На основании первого допущения, учитывая, что нагружение дисков осесимметрично, заключаем, что напряжения, деформации и перемещения являются функциями только радиуса. Из второго допущения следует, что напряженное состояние во всех точках диска является двухосным или плоским.

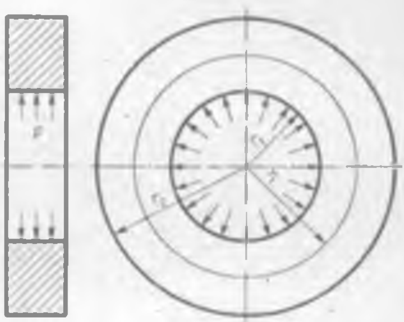


Рис. 6.6. Диск постоянной толщины, нагруженный внутренним давлением

Используя условие осевой симметрии и допущение об отсутствии напряжений в плоскостях, параллельных срединной плоскости, заключаем, что касательные напряжения в радиальном и окружном сечениях отсутствуют. Следовательно, эти сечения являются главными, а напряжения в них — окружное σ_t и радиальное σ_r — главными напряжениями.

В пределах упругости наиболее опасными точками диска являются точки внутренней поверхности. В них первоначально возникают пластические деформации и, следовательно, так же как и в случае толстостенной трубы, пластическая область примыкает к внутреннему контуру диска.

Радиальное и окружное напряжения в упругой области $r_T \leqslant r \leqslant r_2$ по-прежнему определяются формулами (6.3).

Напряжения в пластической области должны удовлетворять дифференциальному уравнению равновесия элемента диска, которое имеет такой же вид, как и в случае толстостенной трубы [уравнение (6.5)], и поскольку упрочнение отсутствует, также условию пластичности (3.18). Последнее вследствие того, что в рассматриваемой задаче $\sigma_z = 0$, принимает вид

$$\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_t + \sigma_t^2 = \sigma_T^2. \tag{6.47}$$

Принято говорить, что задача определения напряжений в пластической области является статически определимой. Эта статическая определимость условна, так как напряжения определяются не только из одного уравнения статики, но также и из условия пластичности. Однако заметим, что в отличие от задачи расчета толстостенной трубы, в случае отсутствия упрочнения напряжения в диске находят без использования теории упруго-пластических деформаций.

На основании рассмотренной в § 7 тригонометрической формы представления главных напряжений радиальное и окружное напряжения в пластической области можно выразить через функцию $\psi = \psi(r)$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_т \cos\psi; \\ \sigma_t &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_т \cos\left(\psi - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}\right| \tag{6.48}$$

При этом условие (6.47) удовлетворяется тождественно.

Подставим напряжения по формулам (6.48) в дифференциальное уравнение равновесия (6.5). Тогда после преобразований получим дифференциальное уравнение для функции ψ:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\sin\psi\, d\psi}{\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)}. \tag{6.49}$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\frac{C_1}{r^2} = \exp(\sqrt{3}\psi)\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right), \tag{6.50}$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Уравнения (6.48) и (6.50) устанавливают связь напряжений с радиусом через функцию ψ.

Для определения постоянных A, B и C и радиуса $r_т$ используем краевые условия:

1) при $r = r_1$ $\sigma_r = -p_1$;

2) при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$;

3) при $r = r_т$ $\sigma_r^p = \sigma_r^e$;

4) при $r = r_т$ $\sigma_t^p = \sigma_t^e$,

где индексами e и p отмечены напряжения в упругой и пластической областях соответственно.

Из первого краевого условия, используя выражение (6.48), имеем

$$\cos\psi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p}{\sigma_т}, \tag{6.51}$$

где ψ_1 — значение функции ψ на внутреннем контуре диска.

Выражение (6.51) позволяет определить эту величину.

Постоянную C_1 можно выразить через ψ_1. Для этого необходимо подставить в выражение (6.50) $r = r_1$. Тогда получим

$$C_1 = r_1^2 \exp(\sqrt{3}\psi_1)\sin\left(\psi_1 - \frac{\pi}{6}\right)$$

и, следовательно, формула (6.50), связывающая радиус с функцией ψ, принимает вид

$$\frac{r^2}{r_1^2}=\exp\left[\sqrt{3}\,(\psi_1-\psi)\right]\frac{\sin\left(\psi_1-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\psi-\frac{\pi}{6}\right)}. \tag{6.52}$$

Согласно второму краевому условию, используя соотношение (6.3), получаем

$$A-\frac{B}{r_2^2}=0. \tag{6.53}$$

Обозначим величину функции ψ на границе, отделяющей упругую область от пластической, где $r=r_{\text{т}}$, через $\psi_{\text{т}}$. Из третьего и четвертого краевых условий, используя это обозначение и соотношения (6.48) и (6.3), устанавливаем

$$\left.\begin{aligned}\cos\psi_{\text{т}}&=A-\frac{B}{r_{\text{т}}^2};\\ \cos\left(\psi_{\text{т}}-\frac{\pi}{3}\right)&=A+\frac{B}{r_{\text{т}}^2},\end{aligned}\right| \tag{6.54}$$

причем согласно формуле (6.52) имеем

$$\frac{r_{\text{т}}^2}{r_1^2}=\exp\left[\sqrt{3}\,(\psi_1-\psi_{\text{т}})\right]\frac{\sin\left(\psi_1-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\psi_{\text{т}}-\frac{\pi}{6}\right)}. \tag{6.55}$$

Решая уравнения (6.54) относительно A и B, получим

$$A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\psi_{\text{т}}-\frac{\pi}{6}\right),\quad B=\frac{r_{\text{т}}^2}{2}\sin\left(\psi_{\text{т}}-\frac{\pi}{6}\right). \tag{6.56}$$

Подставив эти выражения в соотношение (6.53), найдем

$$\frac{r_2^2}{r_{\text{т}}^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\psi_{\text{т}}-\frac{\pi}{6}\right). \tag{6.57}$$

Перемножим теперь соотношения (6.55) и (6.57). Тогда получим

$$\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\exp\left[\sqrt{3}\,(\psi_1-\psi_{\text{т}})\right]\frac{\sin\left(\psi_1-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\psi_{\text{т}}-\frac{\pi}{6}\right)}. \tag{6.58}$$

Уравнение (6.58) является трансцендентным уравнением относительно $\psi_{\text{т}}$. После определения $\psi_{\text{т}}$ радиус $r_{\text{т}}$ может быть подсчитан по формуле (6.57).

Используем соотношения (6.56) и (6.53) и преобразуем уравнения (6.3) для определения напряжений в упругой области к виду

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\sigma_{\text{т}}\cos\left(\psi_{\text{т}}-\frac{\pi}{6}\right)\left(1-\frac{r_2^2}{r^2}\right),\\ \sigma_t&=\sigma_{\text{т}}\cos\left(\psi_{\text{т}}-\frac{\pi}{6}\right)\left(1+\frac{r_2^2}{r^2}\right).\end{aligned}\right| \tag{6.59}$$

Определим величину радиального перемещения в предположении, что материал несжимаем ($\varepsilon_0 = 0$, $\mu = 0,5$). В упругой области, используя соотношения (6.24) и (6.59), имеем

$$u = \varepsilon_t r = \frac{r}{E}\left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{2}\right) = \frac{\sigma_T r}{2E}\cos\left(\psi_T - \frac{\pi}{6}\right)\left(1 + 3\frac{r_T^2}{r^2}\right). \quad (6.60)$$

Для определения радиального перемещения в пластической области запишем зависимости окружной и радиальной деформации от напряжений. В рассматриваемом случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{3}$$

и по формулам (4.32) получаем для несжимаемого материала ($\varepsilon_0 = 0$)

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i}(2\sigma_r - \sigma_t), \quad \varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_i}(2\sigma_t - \sigma_r).$$

Используя эти зависимости, а также соотношения (6.23), (6.48) и (6.49), выводим дифференциальное уравнение для радиального перемещения в пластической области

$$\frac{du}{u} = \frac{\sin\left(\psi - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)}\,d\psi.$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$u = C_2\frac{\exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)\right]}{\sqrt{\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)}}, \quad (6.61)$$

где C_2 — постоянная интегрирования. Для определения ее используем условие равенства радиальных перемещений на границе упругой и пластической областей. Приравнивая радиальные перемещения при $r = r_T$, $\psi = \psi_T$ по формулам (6.60) и (6.61) используя при этом соотношение (6.57), имеем

$$C_2 = \frac{\sigma_T r_T}{E}\sin\psi_T\frac{\sqrt{\sin\left(\psi_T - \frac{\pi}{6}\right)}}{\exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\psi_T - \frac{\pi}{6}\right)\right]}.$$

Подставим эту величину в уравнение (6.60). Тогда получим уравнение для радиального перемещения в пластической области

$$u = \frac{\sigma_T r_T}{E}\sin\psi_T\exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\psi - \psi_T)\right]\sqrt{\frac{\sin\left(\psi_T - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)}}. \quad (6.62)$$

Найдем величину предельного давления, при котором упругая область исчезает и несущая способность диска исчерпывается. В этом случае $r_T = r_2$ и из формулы (6.57) имеем $\psi_T = \frac{\pi}{2}$. Тогда соотношение (6.58) принимает вид

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left[\sqrt{3}\left(\psi_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right] \sin\left(\psi_1 - \frac{\pi}{6}\right). \qquad (6.63)$$

Из последней формулы по заданному отношению $\frac{r_2}{r_1}$ определяем ψ_1, после чего по формуле (6.51) подсчитываем предельное давление.

Формула (6.51) дает возможность заключить, что величина наибольшего давления имеет место при $\psi_1 = \pi$. Это давление

$$p_{\text{пр. max}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T.$$

Величине $\psi_1 = \pi$ согласно формуле (6.63) соответствует $\frac{r_2}{r_1} = 2{,}963$.

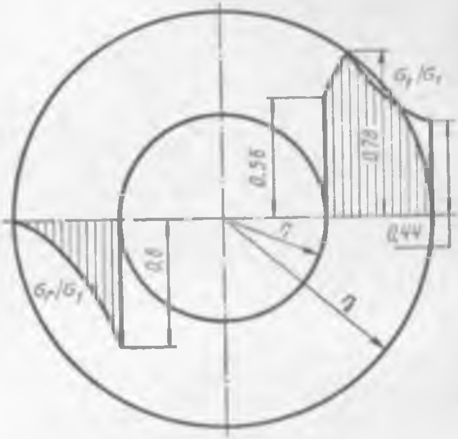


Рис. 6.7. Эпюры окружных и радиальных напряжений

Таким образом, если отношение наружного радиуса к внутреннему превышает эту величину, никакое внутреннее давление не может привести к исчерпанию несущей способности диска. В этом случае часть его всегда остается упругой.

Пример 1. Определим напряжения в диске $\frac{r_2}{r_1} = 2$, нагруженном внутренним давлением $p = 0{,}6\sigma_T$.

Из формулы (6.51) устанавливаем, что $\psi_1 = 2{,}117$; затем, решая трансцендентное уравнение (6.58), получаем $\psi_T = 1{,}873$. После этого по формуле (6.57) находим $\frac{r_T}{r_2} = 0{,}625$. Далее, задаваясь различными значениями ψ от ψ_1 до ψ_T по формулам (6.48) подсчитываем напряжения в пластической области. С помощью соотношения (6.52) устанавливаем величины радиусов для выбранных значений ψ. Таким образом определяем зависимость напряжений от безразмерного радиуса. Напряжения в упругой области подсчитываем по формулам (6.59). На рис. 6.7 представлены эпюры напряжений.

Для диаграммы деформирования материала с линейным упрочнением исследование проведено Г. С. Шапиро [29], который показал, что замкнутое решение поставленной задачи возможно, если использовать приближенные выражения для интенсивностей напряжений и деформаций. Это решение положено в основу расчета развальцовки концов котельных труб в работе [6].

В статье [13] рассмотрено пластическое состояние диска переменной толщины при степенном законе упрочнения. Принято, что толщина диска является степенной функцией радиуса. Полученные результаты могут быть использованы и для диска постоянной толщины. Решение задачи о пластическом или упруго-пластическом состоянии диска постоянной толщины можно значительно упростить, если использовать выражения напряжений через тригонометрические функции некоторого угла, как это было сделано выше [17]. Это решение использовано в работе [18] для расчета прессовых посадок дисков за пределами упругости.

Задача, изложенная в этом параграфе, является задачей плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) в отличие от задачи упруго-пластического состояния толстостенной трубы (§ 32), которая была задачей плоского деформированного состояния ($\varepsilon_z = 0$). Как известно, в пределах упругости решения этих задач отличаются только упругими постоянными. Сопоставление решений, изложенных в этом параграфе и в § 32, показывает, что за пределами упругости они резко различаются, причем задача плоского деформированного состояния проще, чем задача плоского напряженного состояния.

§ 36. Упруго-пластическое состояние бесконечной пластины с отверстием, растянутой осесимметрично относительно центра отверстия

Полученные в предыдущем параграфе формулы могут быть использованы для расчета бесконечной пластины, ослабленной круговым отверстием при нагружении ее осесимметрично относительно центра отверстия. Этот случай был исследован Г. Ю. Джанелидзе [10]. Им было разобрано два варианта нагружения пластины: 1) давлением на контуре отверстия; 2) растягивающими силами на контуре пластины (на бесконечности), осесимметричными относительно центра отверстия.

Ограничимся рассмотрением второго случая (рис. 6.8), который представляет интерес с точки зрения исследования концентрации напряжений за пределами упругости.

Радиальное напряжение на контуре отверстия равно нулю и поэтому из соотношения (6.51) получаем

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{6.64}$$

Поскольку радиальное напряжение на бесконечности равно интенсивности растягивающей нагрузки p, вместо соотношения (6.53) имеем

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p}{\sigma_T}.$$

Сопоставляя это соотношение с первым выражением (6.56), устанавливаем

$$\cos\left(\psi_T - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{p}{\sigma_T}. \tag{6.65}$$

Так как косинус не может быть больше единицы, из формулы (6.65) заключаем, что несущая способность пластины исчерпывается при $p = p_{пр} = \sigma_T$.

Радиус границы, разделяющей упругую и пластическую области, устанавливаем из выражения (6.55) с использованием соотношения (6.64).

Напряжения в пластической области подсчитываем по формулам (6.48), а в упругой — согласно уравнениям (6.3).

Для случая диаграммы растяжения со степенным упрочнением рассматриваемая задача решена в работах [13, 17].

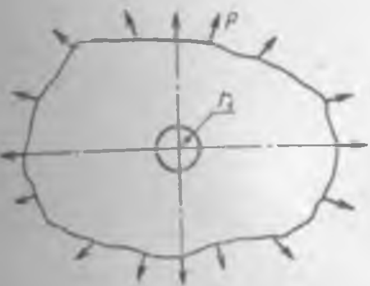


Рис. 6.8. Схема нагружения бесконечной пластины осесимметрично относительно центра отверстия силами, приложенными на контуре пластины (на бесконечности)

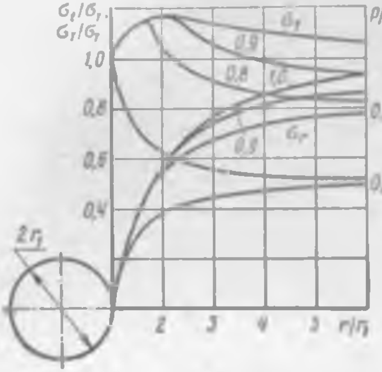


Рис. 6.9. Эпюры напряжений в бесконечной пластине с отверстием, растянутой осесимметрично относительно центра отверстия силами, приложенными на бесконечности

Пример 2. Определим напряжения, возникающие в бесконечной пластине с отверстием, растянутой осесимметрично относительно центра отверстия силами, приложенными на бесконечности. Примем следующие отношения интенсивности распределенной нагрузки к величине предела текучести материала: $\frac{p}{\sigma_T} = 0{,}5; 0{,}8;$ $0{,}9; 1{,}0$. Первая величина соответствует началу образования пластических деформаций, а последняя—исчерпанию несущей способности пластины. Расчеты производились так, как было изложено выше. На рис. 6.9 изображены эпюры напряжений. Как следует из эпюр, при развитии пластических деформаций происходит выравнивание напряжений.

Для оценки концентрации напряжений отметим, что при отсутствии отверстия напряженное состояние пластины является однородным. Во всех точках пластины окружное и радиальное напряжения равны интенсивности распределенной нагрузки. Следовательно, этой же величине равна и интенсивность напряжений.

В пределах упругости окружное напряжение в точках контура отверстия в 2 раза больше интенсивности растягивающей нагрузки, и, следовательно, теоретический коэффициент концентрации напряжений равен двум. За пределами упругости при отсутствии упрочнения интенсивность напряжений во всех точках пластической области равна пределу текучести материала. Поэтому, если определить теоретический коэффициент концентрации напряжений как отношение эквивалентных напряжений, то величины его для принятых отношений $\frac{p}{\sigma_T}$ равны обратным значениям этих отношений: 2; 1,25; 1,11; 1,00. Если же теоретический коэффициент концентрации напряжений определять как отношение наибольших главных напряжений, то, как следует из рис. 6.9, величины его равны 2,00; 1,25·1,147 = 1,43; 1,11·1,152 = = 1,28; 1,00·1,170 = 1,17. Таким образом, независимо от определения эффективного коэффициента концентрации, величина его уменьшается с развитием пластических деформаций.

§ 37. Упруго-пластическое состояние вращающегося равномерно нагретого диска постоянной толщины

Рассмотрим равномерно нагретый, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω диск постоянной толщины. Допустим, что материал диска не имеет упрочнения.

Основные замечания о характере напряженного состояния, приведенные в предыдущем параграфе, справедливы и в рассматриваемой задаче. Так же как и раньше, наиболее опасными точками диска в пределах упругости являются либо центральная точка в случае диска без отверстия, либо для диска с отверстием точки внутреннего контура. Поэтому пластическая область либо включает в себя центр диска, либо примыкает к внутреннему контуру его.

Напряжения в упругой области определяются формулами [15]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma\omega^2 r^2}{g}; \\ \sigma_t &= A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8}\frac{\gamma\omega^2 r^2}{g}, \end{aligned}\right\} \tag{6.66}$$

где A и B — постоянные интегрирования; γ — вес единицы объема материала диска; g — гравитационное ускорение.

Для определения напряжений в пластической области может быть использовано дифференциальное уравнение движения элемента диска постоянной толщины [15]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + \frac{\gamma\omega^2 r}{g} = 0, \tag{6.67}$$

и условие пластичности, которое имеет такой же вид, как и уравнение (6.47). В отличие от задачи, рассмотренной в этом параграфе, определение напряжений значительно осложняется из-за последнего слагаемого в уравнении (6.67). В этом случае возможно численное решение задачи. Для этого так же, как и раньше, удобно использовать тригонометрическую форму представления главных напряжений (6.48). Таким путем в более общем случае диска переменной толщины и наличия упрочнения задача была решена В. В. Соколовским [24].

Для упрощения решения задачи используем условие пластичности Треска—Сен-Венана, которое в рассматриваемом случае $\sigma_t > \sigma_r > 0$ имеет вид

$$\sigma_t = \sigma_T. \tag{6.68}$$

Проинтегрируем уравнение (6.67), используя соотношение (6.68). Тогда получим

$$\sigma_r = \sigma_{\text{т}} - \frac{\gamma\omega^2 r^2}{3g} + \frac{C}{r}, \tag{6.69}$$

где C — постоянная интегрирования.

Разберем вначале решение для диска без отверстия. Для определения постоянных A, B, C и радиуса $r_{\text{т}}$ используем краевые условия:

1) при $r = 0$ $\quad \sigma_r = \sigma_t$;
2) при $r = r_2$ $\quad \sigma_r = 0$;
3) при $r = r_{\text{т}}$ $\quad \sigma_r^p = \sigma_r^e$;
4) при $r = r_{\text{т}}$ $\quad \sigma_t^p = \sigma_t^e$.

Из первого краевого условия, используя уравнение (6.69), получаем

$$C = 0. \tag{6.70}$$

Из второго краевого условия при помощи соотношений (6.66) устанавливаем

$$A - \frac{B}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8}\,\frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{g} = 0. \tag{6.71}$$

Наконец, из третьего и четвертого краевых условий на основании выражений (6.66), (6.68) и (6.69) имеем

$$\left.\begin{aligned} A - \frac{B}{r_{\text{т}}^2} - \frac{3+\mu}{8}\,\frac{\gamma\omega^2 r_{\text{т}}^2}{g} &= \sigma_{\text{т}} - \frac{\gamma\omega^2 r_{\text{т}}^2}{3g};\\ A + \frac{B}{r_{\text{т}}^2} - \frac{1+3\mu}{8}\,\frac{\gamma\omega^2 r_{\text{т}}^2}{g} &= \sigma_{\text{т}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.72}$$

Решим уравнения (6.72) относительно A и B. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1+3\mu}{12}\,\frac{\gamma\omega^2 r_{\text{т}}^2}{g} + \sigma_{\text{т}};\\ B &= \frac{1+3\mu}{24}\,\frac{\gamma\omega^2 r_{\text{т}}^4}{g}. \end{aligned}\right\} \tag{6.73}$$

Подставляя эти величины в соотношение (6.71), устанавливаем значение угловой скорости, при котором радиус границы, разделяющей упругую и пластическую области, равен $r_{\text{т}}$:

$$\omega = \sqrt{24\,\frac{g\sigma_{\text{т}}}{\gamma}\,\frac{r_2^2}{3(3+\mu)\,r_2^4 - 2(1+3\mu)\,r_2^2 r_{\text{т}}^2 + (1+3\mu)\,r_{\text{т}}^4}}. \tag{6.74}$$

Используя выражения (6.73) и (6.70), преобразуем формулы для напряжений (6.66) и (6.69). В результате получим в упругой области

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_T + \frac{1+3\mu}{24}\frac{\gamma\omega^2}{g}\left(2r_T^2 - \frac{r_T^4}{r^2} - 3\,\frac{3+\mu}{1+3\mu}r^2\right); \\ \sigma_t &= \sigma_T + \frac{1+3\mu}{24}\frac{\gamma\omega^2}{g}\left(2r_T^2 + \frac{r_T^4}{r^2} - 3r^2\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6.75)$$

и в пластической области

$$\sigma_r = \sigma_T - \frac{\gamma\omega^2 r^2}{3g}, \quad \sigma_t = \sigma_T. \qquad (6.76)$$

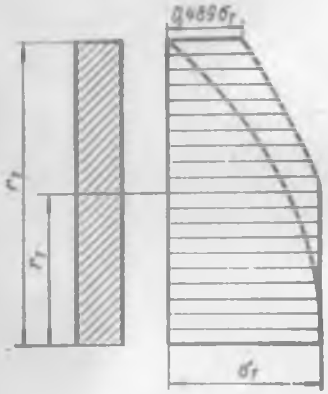


Рис. 6.10. Эпюры напряжений во вращающемся равномерно нагретом диске постоянной толщины без центрального отверстия

Предельную угловую скорость вращения, при которой пластическая область заполняет весь диск и несущая способность диска полностью исчерпывается, получаем из выражения (6.74), полагая в нем $r_T = r_2$

$$\omega_{пр} = \sqrt{\frac{3g\sigma_T}{\gamma r_2^2}}. \qquad (6.77)$$

На рис. 6.10 представлены эпюры напряжений во вращающемся равномерно нагретом диске постоянной толщины без центрального отверстия. При этом принято, что $\frac{r_T}{r_2} = 0{,}5$. Согласно формуле (6.74) для этой величины отношения имеем

$$\frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{g\sigma_T} = 2{,}65.$$

Рассмотрим теперь решение для диска с центральным отверстием. Для определения постоянных A, B и C в уравнениях (6.66) и (6.69) используем краевые условия:

1) при $r = r_1$ $\sigma_r = 0$;
2) при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$;
3) при $r = r_T$ $\sigma_r^p = \sigma_r^e$;
4) при $r = r_T$ $\sigma_t^p = \sigma_t^e$.

В результате таким же путем, как и в предыдущем случае, получаем величину угловой скорости, при которой радиус границы, разделяющей упругую и пластическую области, равен r_T:

$$\omega = \sqrt{\frac{12g\sigma_T}{\gamma}\,\frac{2r_T r_2^2 - r_1\left(r_2^2 + r_T^2\right)}{3(3+\mu)\,r_2^4 r_T - (1+3\mu)\,r_T^3\left(2r_2^2 - r_T^2\right) - 4r_1^3\left(r_2^2 + r_T^2\right)}}. \qquad (6.78)$$

Формулы для напряжений в упругой области

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_T\left(1 - \frac{r_1}{2r_T} - \frac{r_1 r_T}{2r^2}\right) + \frac{\gamma\omega^2}{24g}\Bigg[(1+3\mu)\left(2r_T^2 - \frac{r_T^4}{r^2} - \right.\\ &\left.\quad - 3\,\frac{3+\mu}{1+3\mu}r^2\right) + 4r_1^2\left(\frac{r_1}{r_T} + \frac{r_1 r_T}{r^2}\right)\Bigg]; \\ \sigma_t &= \sigma_T\left(1 - \frac{r_1}{2r_T} + \frac{r_1 r_T}{2r^2}\right) + \frac{\gamma\omega^2}{24g}\Bigg[(1+3\mu)\left(2r_T^2 + \right.\\ &\left.\quad + \frac{r_T^4}{r^2} - 3r^2\right) + 4r_1^2\left(\frac{r_1}{r_T} - \frac{r_1 r_T}{r^2}\right)\Bigg] \end{aligned}\right\} \qquad (6.79)$$

и в пластической области

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_T\left(1 - \frac{r_1}{r}\right) - \frac{\gamma\omega^2}{3g}\left(r^2 - \frac{r_1^3}{r}\right); \\ \sigma_t &= \sigma_T. \end{aligned}\right\} \qquad (6.80)$$

Предельную угловую скорость вращения устанавливаем из выражения (6.78), полагая в нем $r_T = r_2$

$$\omega_{пр} = \sqrt{\frac{3g\sigma_T}{\gamma\left(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2\right)}}. \qquad (6.81)$$

Принимая в этой формуле $r_1 = 0$, приходим к соотношению (6.77).

Расчет за пределами упругости вращающихся неравномерно нагретых дисков по полученным экспериментально (не схематизированным) диаграммам растяжения материала приближенным методом переменных параметров упругости, разработанным И. А. Биргером, будет изложен ниже в § 41.

В книге [30] задача расчета вращающегося неравномерно нагретого диска переменной толщины решена в деформациях.

Исследованию пластического и упруго-пластического состояния дисков на основе схематизированных диаграмм с использованием условия Треска—Сен-Венана посвящен ряд работ.

В работе [8] исследовано упруго-пластическое состояние вращающихся дисков переменной толщины. В основу расчета положена диаграмма растяжения материала без упрочнения.

В статье [19] рассматриваются пластическое и упруго-пластическое состояние неравномерно нагретого диска переменной толщины. Предполагается, что диаграмма растяжения материала диска не имеет упрочнения.

В статье [21] изучается упруго-пластическое состояние вращающегося равномерно нагретого диска. Принимается, что диаграмма растяжения материала может быть схематизирована в виде диаграммы с линейным упрочнением.

§ 38. Понятие об автоскреплении дисков

Автоскреплением (автофретированием) дисков называют процесс повышения несущей способности их путем пластического деформирования перед эксплуатацией. Автоскрепление заключается в том, что диски на специальных стендах приводятся во вращение с такими угловыми скоростями, при которых в них возникают пластические деформации. Поскольку при вращении равномерно нагретого диска наиболее напряженными точками являются точки внутреннего контура, пластические деформации начинают развиваться с внутренней расточки. С повышением числа оборотов пластическая область, примыкающая к внутреннему контуру, увеличивается.

Рис. 6.11. Эпюры напряжений в автоскрепленном диске

В результате постепенного снижения числа оборотов и остановки диска, деформированного так, что в нем возникла некоторая пластическая область, диск полностью разгружается и в нем возникают остаточные напряжения. Радиальные остаточные напряжения будут сжимающими во всех точках, а окружные — сжимающими в области, примыкающей к внутренней расточке, и растягивающими в остальной части диска.

На рис. 6.11, *а* изображен профиль диска, а на рис. 6.11. *б* — примерные эпюры остаточных напряжений в диске. Остаточные напряжения накладываются на номинальные, возникающие вследствие вращения (рис. 6.11, *в*), в результате чего в наиболее напряженных точках на внутренней расточке окружные напряжения могут быть значительно уменьшены.

На рис. 6.11, *г* представлены примерные эпюры действительных напряжений в автоскрепленном диске, полученные сложением эпюр остаточных напряжений (рис. 6.11, *б*) и напряжений, возникающих вследствие вращения (рис. 6.11, *в*). Как следует из эпюр, изображенных на рис. 6.11, автоскрепление может значительно снизить напряженность диска. Поэтому автоскрепление дисков позволяет использовать менее качественные и, следовательно, более дешевые марки сталей.

Расчеты автоскрепления турбинных дисков описаны в статье [1].

§ 39. Большие деформации цилиндрических и сферических оболочек, нагруженных внутренним давлением

Представим себе тонкостенную цилиндрическую оболочку с днищами начального радиуса r_0 и с начальной толщиной стенки h_0, нагруженную внутренним давлением p (рис. 6.12, *а*).

Определим величины напряжений и деформаций, не предполагая, как обычно, последние малыми. При этом пренебрежем упругими деформациями по сравнению с пластическими, т. е. положим

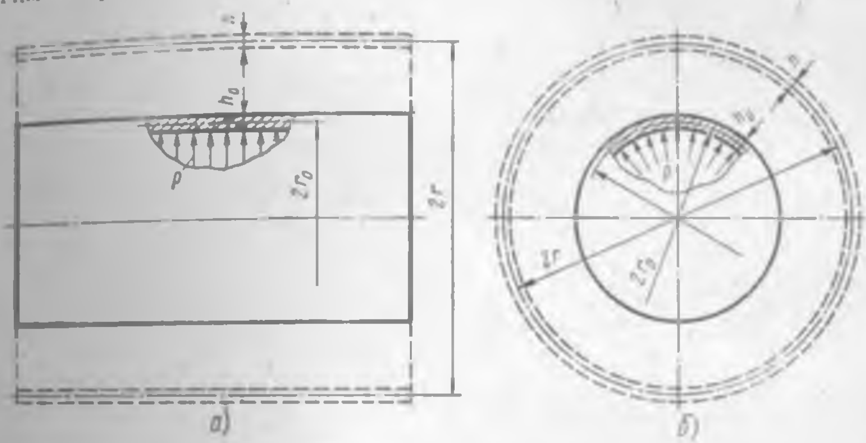


Рис. 6.12. Цилиндрическая (*а*) и сферическая (*б*) оболочки, нагруженные внутренним давлением

в основу расчета диаграмму деформирования жестко-пластического упрочняющегося тела (см. рис. 5.16). В таком случае материал можно считать несжимаемым ($\varepsilon_0 = 0$).

Окружное и осевое напряжения в цилиндрической оболочке с днищами, нагруженной внутренним давлением, будут

$$\sigma_t = \frac{pr}{h}, \quad \sigma_z = \frac{pr}{2h}, \tag{6.82}$$

где r и h — средний радиус и толщина стенки оболочки в деформированном состоянии. Радиальное напряжение для тонкостенной оболочки может быть приближенно принято равным нулю

$$\sigma_r = 0. \tag{6.83}$$

Из формул (6.82) следует, что процесс нагружения не только при малых, но и при больших деформациях является простым. Поэтому для несжимаемого материала можно применить основные зависимости теории малых упруго-пластических деформаций и при больших деформациях, используя при этом логарифмические деформации.

Логарифмические окружная, осевая и радиальная деформации будут

$$\bar{\varepsilon}_t = \ln\frac{r}{r_0}, \quad \bar{\varepsilon}_z = \ln\frac{l}{l_0}, \quad \bar{\varepsilon}_r = \ln\frac{h}{h_0}. \tag{6.84}$$

Согласно формулам (4.32), (1.5) и (6.83) компоненты логарифмической деформации зависят от компонент напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_t &= \frac{\bar{\varepsilon}_i}{2\sigma_i}(2\sigma_t - \sigma_z); \\ \bar{\varepsilon}_z &= \frac{\bar{\varepsilon}_i}{2\sigma_i}(2\sigma_z - \sigma_t); \\ \bar{\varepsilon}_r &= -\frac{\bar{\varepsilon}_i}{2\sigma_i}(\sigma_t + \sigma_z), \end{aligned}\right\} \tag{6.85}$$

где $\bar{\varepsilon}_i$ — интенсивность логарифмических деформаций, связанная с компонентами логарифмических деформаций зависимостью (2.18); σ_i — интенсивность напряжений. В рассматриваемом случае согласно формулам (1.21), (6.82) и (6.83)

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_t = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{pr}{h}. \tag{6.86}$$

Используя соотношения (6.82) и (6.86), преобразуем выражения (6.85) к виду

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\varepsilon}_t = -\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\varepsilon}_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{r}{r_0} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{h}{h_0}, \\ \bar{\varepsilon}_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.87}$$

Из последнего выражения следует, что при нагружении только внутренним давлением в осевом направлении оболочка не удлиняется.

Формулы (6.86) и (6.87) позволяют по известной диаграмме деформирования установить зависимость между давлением p и средним радиусом оболочки r или толщиной стенки h. Если зависимость σ_i от $\bar{\varepsilon}_i$ определяется формулой (5.19), то, подставляя в нее выражения (6.86) и (6.87), имеем

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{r_0 h_0}{r^2}A\left(B + \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{r}{r_0}\right)^m =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{h^2}{r_0 h_0}A\left(B + \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{h_0}{h}\right)^m.$$

Установим пределы устойчивого деформирования оболочки. Как и в § 31, приходим к заключению, что деформация оболочки устойчива при условии, что $dp > 0$.

При

$$dp = 0 \tag{6.88}$$

возникает местное утонение стенки — потеря устойчивости первоначальной формы равновесия. Подставляя в формулу (6.88) p, по формуле (6.86) получаем

$$\frac{h\,d\sigma_i}{r}+\frac{\sigma_i\,dh}{r}-\frac{\sigma_i h\,dr}{r^2}=0$$

или

$$d\sigma_i=\sigma_i\left(\frac{dr}{r}-\frac{dh}{h}\right).$$

Используя соотношения (6.87), имеем

$$\frac{1}{\sigma_i}\frac{d\sigma_i}{d\bar{\varepsilon}_i}=\sqrt{3}. \tag{6.89}$$

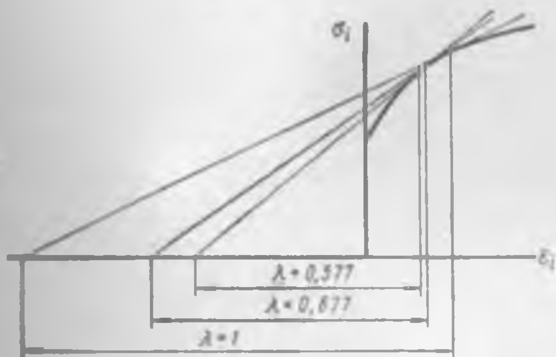


Рис. 6.13. К определению неустойчивости растянутого образца ($z=1$), цилиндрической ($z=0{,}577$) и сферической ($z=0{,}667$) оболочек

Слева в этом выражении — величина, обратная подкасательной λ на диаграмме деформирования в координатах ε_i, σ_i (рис. 6.13). Таким образом,

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}577.$$

При растяжении $\lambda=1$ (см. § 29). Следовательно, при деформировании цилиндрической оболочки с днищами внутренним давлением потеря устойчивости первоначальной формы равновесия возникает при меньших величинах интенсивности деформаций, чем при растяжении.

Если зависимость σ_i от $\bar{\varepsilon}_i$ определяется формулой (5.19), то, используя выражения (6.89) и (6.87), можно получить величины $\frac{r}{r_0}$, при которых возникает потеря устойчивости первоначальной формы равновесия оболочки

$$\frac{r}{r_0}=\exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{m}{\sqrt{3}}-B\right)\right].$$

Таблица 6.1

Величины радиусов при потере устойчивости оболочек

Материал	B	m	Безразмерный радиус оболочек $\frac{r}{r_0}$	
			цилиндрической	сферической
Медь мягкая	0,01633	0,3	1,15	1,10
Медь средней твердости	0,1143	0,3	1,05	1,04
Латунь средней твердости	0,1274	0,48	1,14	1,10
Нержавеющая сталь	0,01633	0,5	1,27	1,17

В табл. 6.1 приведены величины $\frac{r}{r_0}$ для некоторых материалов, постоянные которых, по данным работы [34], приведены в той же таблице.

Для сферической оболочки (рис. 6.12, *б*), нагруженной внутренним давлением, окружное и меридиональное напряжения

$$\sigma_t = \sigma_m = \frac{pr}{2h}.$$

Логарифмические окружная $\bar{\varepsilon}_t$, меридиональная $\bar{\varepsilon}_m$ и радиальная $\bar{\varepsilon}_r$ деформации

$$\bar{\varepsilon}_t = \bar{\varepsilon}_m = \ln\frac{r}{r_0}, \quad \bar{\varepsilon}_r = \ln\frac{h}{h_0}.$$

Так же как и в случае цилиндрической оболочки, легко получить

$$\sigma_i = \frac{pr}{2h}; \tag{6.90}$$

$$\bar{\varepsilon}_i = 2\ln\frac{r}{r_0} = -\ln\frac{h}{h_0}. \tag{6.91}$$

Эти формулы позволяют по диаграмме деформирования установить зависимость между давлением p и средним радиусом оболочки r или толщиной стенки h. Принимая справедливой формулу (5.19), получаем

$$p = \frac{2Ar_0h_0}{r^3}\left(B + 2\ln\frac{r}{r_0}\right)^m = \frac{2Ah\sqrt{h}}{r_0\sqrt{h_0}}\left(B + \ln\frac{h_0}{h}\right)^m.$$

Потеря устойчивости возникает при

$$\frac{1}{\sigma_i}\frac{d\sigma_i}{d\bar{\varepsilon}_i} = \frac{3}{2}$$

или
$$\lambda = 0{,}667,$$
т. е. при несколько большем значении интенсивности деформаций, чем для цилиндрической оболочки.

В случае использования формулы (5.19) величина $\frac{r}{r_0}$ при потере устойчивости определяется формулой
$$\frac{r}{r_0} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m - B\right)\right].$$

В табл. 6.1 приведены также подсчитанные по этой формуле значения $\frac{r}{r_0}$.

Решение задачи об устойчивости двухосного пластического растяжения ортотропных листов и цилиндрических оболочек дано в работе [16].

Список литературы

1. **Адлер М. В., Карпин Е. Б.** Автофретирование турбинных дисков. — «Теплоэнергетика», 1955, № 7, с. 15—19.
2. **Бахшиян Ф. А.** Конечные перемещения в полом шаре, подверженном внутреннему давлению. — «Прикладная математика и механика», 1948, т. XII, в. 2, с. 137—140.
3. **Биргер И. А.** Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961, 368 с.
4. **Бочарова С. А.** Напряженное состояние трубы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и продольной силы при больших пластических деформациях. — В кн.: Расчеты на прочность [Сборник статей], вып. 9, М., Машгиз, 1963, с. 196—218.
5. **Бриджмен П. В.** Физика высоких давлений, М., ОНТИ, 1935, 402 с.
6. **Глаголев Н. И.** О приближенном расчете развальцовки концов котельных труб. — «Инженерный сборник», 1956, Т. XXIII, с. 111—120.
7. **Гоффман О., Закс Г.** Введение в теорию пластичности для инженеров. М., Машгиз, 1957, 279 с.
8. **Гохфельд Д. А.** Упруго-пластическое состояние дисков переменной толщины. — В кн.: Расчет и конструирование машин. [Сборник статей], вып. 1, М., Машгиз, 1954, с. 37—53.
9. **Дэвис Е.** Текучесть и разрушение стали со средним содержанием углерода при сложном напряженном состоянии. — В кн.: Теория пластичности. [Сборник статей], М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 364—374.
10. **Джанелидзе Г. Ю.** Концентрация напряжений на краю кругового отверстия в равномерно напряженном поле при пластической деформации. — «Труды Ленинградского политехнического института», 1947, № 3, с. 111—117.
11. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М., ГИТТЛ, 1948, 376 с.
12. **Ильюшин А. А., Огибалов П. М.** Упруго-пластические деформации полых цилиндров. М., Изд-во МГУ, 1960, 227 с.
13. **Костюк А. Г.** О равновесии кольцевой пластинки при степенном законе упрочнения. — «Прикладная математика и механика», 1950, т. XIV, вып. 3, с. 319—320.
14. **Ломакин В. А.** Большие деформации трубы и полого шара. — «Инженерный сборник», 1955, т. XXI, с. 61—73.
15. **Малинин Н. Н.** Прочность турбомашин. М., Машгиз, 1962, 291 с.
16. **Малинин Н. Н.** Устойчивость двухосного пластического растяжения анизотропных листов и цилиндрических оболочек. — «Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела», 1971, № 2, с. 115—118.

17. **Махонина Т. М.** Упруго-пластическое состояние шайбы при степенном упрочнении. — В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей], вып. 5, М., Машгиз, 1960, с. 212—225.
18. **Махонина Т. М.** Расчет прессовых посадок шайб за пределами упругости при степенном упрочнении материала. — В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей], вып. 6, М., Машгиз, 1960, с. 97—106.
19. **Микеладзе М. Ш.** Упруго-пластические деформации в быстровращающихся дисках переменной толщины. — «Инженерный сборник», 1953, т. XV, с. 21—34.
20. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел, М., Изд. иностр. лит., т. I, 1954, 647 с., т. II, 1969, 863 с.
21. **Работнов Ю. Н.** Упруго-пластическое состояние вращающегося диска при наличии упрочнения. — «Известия АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение», 1959, № 5, с. 154—156.
22. **Расчеты** на прочность в машиностроении. М., Машгиз, т. II, 1958, 974 с, т. III, 1959, 1118 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.
23. **Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М.** Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М., Машгиз, 1963, 451 с.
24. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969, 608 с.
25. **Соколов С. Н.** Определение разрушающих давлений в трубах. — В кн. Расчеты на прочность. [Сборник статей], вып. 2, М., Машгиз, 1958, с. 189—212.
26. **Смирнов-Аляев Г. А.** Теория автоскрепления цилиндров. М., Оборонгиз, 1940, 286 с.
27. **Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш.** Механика пластических деформаций при обработке металлов. М., «Машиностроение», 1969, 503 с.
28. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М., «Наука», 1974, 559 с.
29. **Шапиро Г. С.** Об интегрировании в квадратурах уравнений плоской одномерной задачи теории пластичности с учетом упрочнения материала — «Прикладная математика и механика», 1949, т. XIII, вып. 6, с. 659—662.
30. **Шнейдерович Р. М.** Прочность при статическом и повторно-статическом нагружениях. М., «Машиностроение», 1968, 343 с.
31. **Johnson W., Mellor P. B.** Plasticity for mechanical engineers, D. Van Nostrand Company, 1962, 412 p.
32. **Mac Gregor C. W., Coffin L. F., Fisher J. C.** The plastic flow of thick-walled tubes with large strains — «Journal of applied physics», 1947, Vol. 9, No 3, p. 291—297.
33. **Marciniak Z.** Odkształcenia graniczne przy tłoczeniu blach, Wydawnictwa naukowo—techniczne, 1971, 232 s.
34. **Mellor. P. B.** Stretch forming under fluid pressure.—«Journal of the mechanics and physics of solids», 1956, Vol. 5, p. 41—56.
35. **Philips A.** Introduction to plasticity, The Ronald press company, 1956, 230 s.
36. **Stodola A.** Dampf und Gasturbinen, Julius Springer, 1924, 1109 s.

ГЛАВА VII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 40. Метод переменных параметров упругости

Как следует из приведенных выше решений некоторых упруго-пластических задач, основными уравнениями расчетов за пределами упругости по теории малых упруго-пластических деформаций являются: дифференциальные уравнения равновесия (1.3), условия на поверхности (1.1), условия совместности деформаций (2.4) и зависимости между деформациями и напряжениями (4.32) и (3.3).

Компоненты напряжений должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия и условиям на поверхности тела, если на ней или на части ее заданы напряжения. Условия на поверхности тесно связаны с дифференциальными уравнениями равновесия. Их необходимо рассматривать совместно. Уравнения равновесия не могут иметь определенного решения, пока не даны условия на поверхности. Если дифференциальные уравнения и условия на поверхности удовлетворены, то это свидетельствует о том, что все элементы тела как внутри него, так и у поверхности находятся в равновесии. Следовательно, обеспечено и равновесие тела в целом.

Условия совместности деформаций выражают отсутствие разрывов и непрерывность деформации тела. В ряде случаев условие совместности деформаций заменяется кинематической гипотезой, как например, гипотезой плоских сечений в расчете балок, или гипотезой прямолинейности нормалей в расчете пластин.

Если на всей или части поверхности тела заданы перемещения, то тогда компоненты перемещений должны удовлетворять этим условиям.

Решение упруго-пластических задач, как правило, сопряжено со значительными трудностями. Многие задачи расчетов за пределами упругости до сих пор не имеют решения. Поэтому в теории пластичности еще в большей степени, чем в теории упругости, имеют значение приближенные методы решения. Наиболее распространенными из них являются вариационные методы, а также методы, в которых упруго-пластическая задача сводится к последовательности упругих задач в результате применения процесса последовательных приближений. Последние методы могут быть названы методами упругих решений.

Впервые один из вариантов такого метода был предложен А. А. Ильюшиным [5]. В дальнейшем эти идеи были развиты в работах И. А. Биргера [1—4]. Ниже изложен так называемый метод переменных параметров упругости, разработанный И. А. Биргером [2]. В основе этого метода лежит представление зависимостей деформаций от напряжений по теории упруго-пластических деформаций в форме обобщенного закона Гука, в котором параметры упругости зависят от напряженного состояния в точке и поэтому различны для различных точек тела.

Используя соотношения (4.32) и (3.3), преобразуем зависимости (4.32) к виду

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E^*}[\sigma_x - \mu^*(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G^*}, \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

где E^*, G^*, μ^* — так называемые переменные параметры упругости;

$$\left.\begin{aligned} E^* &= \frac{\dfrac{\sigma_i}{e_i}}{1 + \dfrac{1-2\mu}{3E}\dfrac{\sigma_i}{e_i}}; \\ G^* &= \frac{\sigma_i}{3e_i}; \\ \mu^* &= \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1-2\mu}{3E}\dfrac{\sigma_i}{e_i}}{1 + \dfrac{1-2\mu}{3E}\dfrac{\sigma_i}{e_i}}. \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Как следует из формул (7.2), связь между «переменными параметрами упругости» имеет тот же вид, что и для упругих постоянных E, G и μ, а именно:

$$G^* = \frac{E^*}{2(1+\mu^*)}.$$

Для несжимаемого тела, у которого $\mu = \frac{1}{2}$, по формулам (7.2)

$$E^* = 3G^* = \frac{\sigma_i}{e_i}, \quad \mu^* = \frac{1}{2},$$

т. е. «переменный модуль упругости» совпадает с секущим модулем, а переменный коэффициент поперечной деформации равен половине.

Для решения упруго-пластической задачи по методу переменных параметров упругости используют процесс последовательных приближений [2]. В исходном (нулевом) приближении принимают, что переменные параметры упругости равны параметрам упругости и решают упругую задачу, в результате чего определяют напряжения и деформации нулевого приближения $(\sigma_{ij})_0$, $(e_{ij})_0$. По этим величинам в каждой точке тела при помощи формулы (1.19) и (2.16) подсчитывают интенсивности напряжений и деформаций в нулевом приближении σ_{i0} и ε_{i0}.

В координатах ε_i, σ_i (рис. 7.1) напряженное и деформированное состояние некоторой точки тела изображается точкой O, лежащей на луче, тангенс угла наклона которого пропорционален величине $3G$. В первом приближении вносится поправка для величины $3G$. Она принимается равной отношению интенсивности напряжений $\overset{*}{\sigma}_{i0}$, соответствующей интенсивности деформаций ε_{i0} по диаграмме деформирования (рис. 7.1) к ε_{i0}:

$$3G_1^* = \frac{\overset{*}{\sigma}_{i0}}{\varepsilon_{i0}}.$$

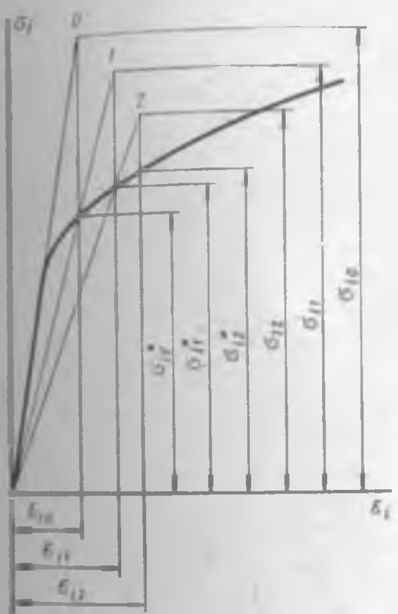


Рис. 7.1. Диаграмма деформирования

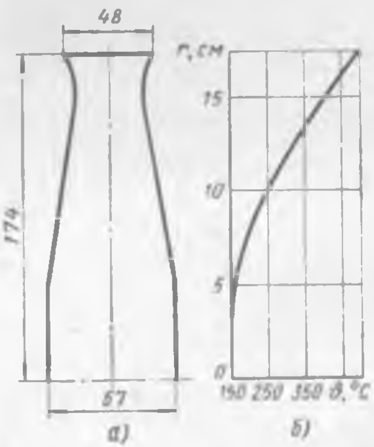


Рис. 7.2. Профиль диска (а) и график изменения температуры по радиусу (б)

По величинам $\overset{*}{\sigma}_{i0}$ и ε_{i0} определяют также параметры $\overset{*}{E}_1$ и $\overset{*}{\mu}_1$. Параметры $\overset{*}{E}_1$, $\overset{*}{G}_1$ и $\overset{*}{\mu}_1$ будут различными в различных точках тела. Таким образом, возникает задача определения напряжений в «неоднородном» теле, параметры упругости в различных точках которого различны. Далее решают эту задачу и определяют напряжения и деформации $(\sigma_{ij})_1$, $(\varepsilon_{ij})_1$, являющиеся первым приближением. По этим величинам в каждой точке тела при помощи формул (1.19) и (2.16) подсчитывают интенсивности напряжений и деформаций в первом приближении σ_{i1}, ε_{i1}.

В координатах ε_i, σ_i (рис. 7.1) напряженное и деформированное состояния некоторой точки тела изображаются точкой 1, лежащей на луче, тангенс угла наклона которого пропорционален величине $3\overset{*}{G}_1$.

Во втором приближении величину $3G^*$ принимают равной отношению интенсивности напряжений σ_{i1}^*, соответствующей интенсивности деформаций ε_{i1} по диаграмме деформирования (см. рис. 7.1) к ε_{i1}

$$3G_2^* = \frac{\sigma_{i1}^*}{\varepsilon_{i1}}.$$

По величинам σ_{i1}^* и ε_{i1} находят также параметры E_2^* и μ_2^*. Эти параметры используют для определения напряжений и деформаций второго приближения $(\sigma_{ij})_2$, $(\varepsilon_{ij})_2$.

Расчет продолжается до тех пор, пока результаты расчета в некотором приближении не будут близки к соответствующим результа-

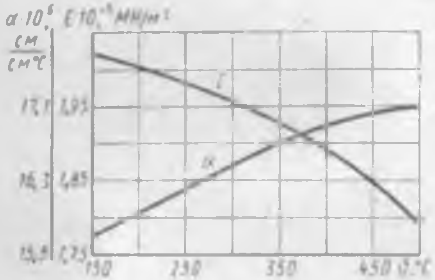


Рис. 7.3. Графики зависимости от температуры коэффициента линейного расширения и модуля упругости материала диска

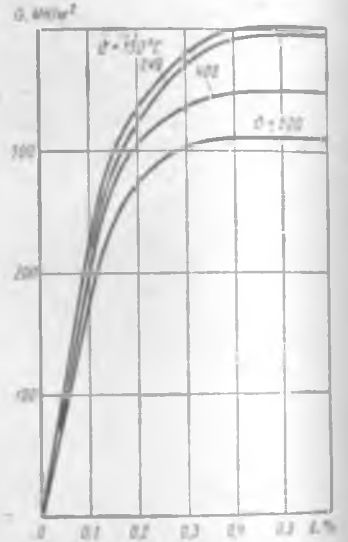


Рис. 7.4. Диаграммы растяжения материала при различных температурах

там в предыдущем приближении. Обычно это имеет место уже для второго приближения. Таким образом, хотя доказательство сходимости метода переменных параметров упругости в настоящее время отсутствует, практика расчетов показывает, что процесс всегда является сходящимся, причем скорость сходимости процесса значительна.

П р и м е р. Определим напряжения в диске газовой турбины без центрального отверстия. Профиль диска изображен на рис. 7.2, *а*. Частота вращения $n = 12\,300$ об/мин. Интенсивность нагрузки, вызванной воздействием на диск присоединенных к нему лопаток и принятой равномерно распределенной по наружному контуру диска $p_2 = 140$ МН/м². Удельный вес материала диска $\gamma = 0{,}081$ МН/м³. График изменения температуры ϑ по радиусу диска изображен на рис. 7.2, *б*.

На рис. 7.3 представлены графики зависимостей от температуры коэффициента линейного расширения и модуля упругости материала диска, а на рис. 7.4 диаграммы растяжения материала при различных температурах.

Расчет был выполнен в приведенном выше порядке, причем напряжения определялись методом последовательных приближений, как изложено в книге [12]. В соотношения (7.1) добавлялись температурные деформации $\alpha\vartheta$.

На рис. 7.5 изображены эпюры напряжений в нулевом, первом и втором приближениях. Как следует из приведенных эпюр, различие между вторым и первым приближениями незначительно, что позволяет ограничиться двумя приближениями.

В последующих параграфах будут рассмотрены некоторые общие энергетические теоремы теории упруго-пластических деформаций и разобраны приближенные вариационные методы решения упруго-пластических задач на основе этой теории. Эти энергетические теоремы предложены Л. М. Качановым [6, 8].

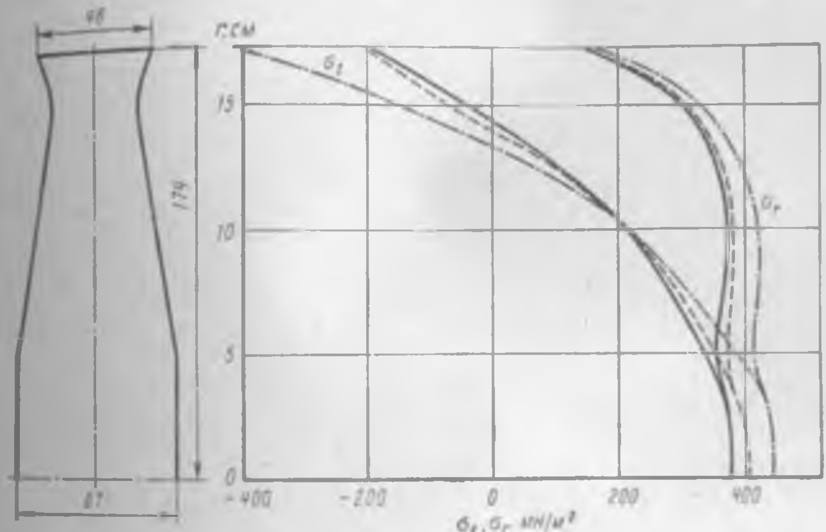


Рис. 7.5. Эпюры напряжений. Штрих-пунктирные линии — нулевое приближение, штриховые линии — первое приближение, сплошные линии — второе приближение

§ 41. Принцип минимума полной энергии

Допустим, что тело, находящееся в равновесии, занимает объем V, ограниченный поверхностью S. В дальнейшем используются тензорные обозначения. Предположим, что на части поверхности заданы поверхностные силы $X_{\nu i}$, а на части поверхности — перемещения u_i. Сообщим точкам тела бесконечно малые перемещения δu_i, совместимые с краевыми условиями, которые примем за возможные. Согласно принципу возможных перемещений для деформируемого тела необходимым и достаточным условием равновесия является равенство работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях

$$\int\limits_V X_i \delta u_i \, dV + \int\limits_S X_{\nu i} \delta u_i \, dS = \int\limits_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \, dV. \tag{7.3}$$

Второй интеграл фактически берется только по той части поверхности, на которой заданы поверхностные силы, так как на другой части, где заданы перемещения, вариации их равны нулю.

Преобразуем подынтегральное выражение в правой части равенства (7.3.), используя разложения тензоров напряжений и деформаций на шаровой тензор и девиатор (см. § 3 и § 10). Тогда получим

$$\sigma_{ij}\delta e_{ij} = (s_{ij} + \delta_{ij}\sigma_0)(\delta e_{ij} + \delta_{ij}\delta e_0) = s_{ij}\delta e_{ij} + \delta_{ij}\sigma_0\delta e_{ij} + $$
$$+ s_{ij}\delta_{ij}\delta e_0 + \delta_{ij}\sigma_0\delta_{ij}\delta e_0 = s_{ij}\delta e_{ij} + \sigma_0\delta e_{ii} + s_{ii}\delta e_0 + 3\sigma_0\delta e_0,$$

Рис. 7.6. Диаграмма деформирования материала

так как

$$\delta_{ij}\delta e_{ij} = \delta e_{ii},\quad \delta_{ij}s_{ij} = s_{ii},\quad \delta_{ij}\delta_{ij} = 3.$$

Очевидно, что второе и третье слагаемые в этом выражении равны нулю. Используя далее соотношения (4.30), (3.3), (2.17), получаем

$$\sigma_{ij}\delta e_{ij} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}e_{ij}\delta e_{ij} + 3\sigma_0\delta e_0 =$$
$$= \frac{\sigma_i}{e_i}\frac{1}{2}\delta\left(\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}\right) + 9Ke_0\delta e_0 =$$
$$= \sigma_i\delta e_i + \frac{9}{2}K\delta e_0^2 = \delta\Pi, \qquad (7.4)$$

где

$$\Pi = \frac{9}{2}Ke_0^2 + \int_0^{e_i}\sigma_i\,de_i. \qquad (7.5)$$

Очевидно, что

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\Pi}{\partial e_{ij}},$$

т. е. функция компонентов деформации $\Pi(e_{ij})$ является потенциалом деформации.

Первое слагаемое в формуле (7.5) представляет собой удельную потенциальную энергию изменения объема, а второе удельную энергию изменения формы. Второе слагаемое в некотором масштабе равно площади, ограниченной диаграммой деформирования материала. На рис. 7.6 эта площадь заштрихована вертикальными линиями.

Обозначим работу внешних сил на возможных перемещениях — два интеграла в левой части выражения (7.3) через δA. Тогда из соотношений (7.3) и (7.4) имеем

$$\delta A = \int_V \delta\Pi\,dV$$

или

$$\delta(\bar{\Pi} - A) = 0,$$

где

$$\bar{\Pi} = \int\limits_V \Pi \, dV$$

— потенциал деформации всего тела.

Величину в круглых скобках называют полной энергией системы нагрузки — тело

$$Э = \bar{\Pi} - A. \qquad (7.6)$$

Таким образом,

$$\delta Э = 0.$$

Определение второй вариации полной энергии системы показывает, что знак ее положителен [7].

Следовательно, *действительная форма равновесия тела отличается от всех возможных форм тем, что для нее полная энергия принимает минимальное значение.*

§ 42. Принцип возможных изменений напряженного состояния

Предположим, так же, как и в предыдущем параграфе, что тело, находящееся в равновесии, занимает объем V, ограниченный поверхностью S. Допустим, что на части поверхности заданы поверхностные силы X_i, а на части поверхности — перемещения u_i. Сопоставим действительные напряженные состояния в различных точках тела, характеризуемые компонентами напряжений σ_{ij}, со всеми близкими напряженными состояниями, характеризуемыми компонентами напряжений $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям равновесия и условиям на поверхности. Используя сокращенные тензорные записи последних (1.4) и (1.2), имеем для статически возможного напряженного состояния

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) + X_j + \delta X_j = 0,$$

$$(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})\, n_i = X_{\nu j} + \delta X_{\nu j},$$

для действительного напряженного состояния

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_j = 0,$$

$$\sigma_{ij} n_i = X_{\nu j}.$$

Вычитая из первого уравнения третье, а из второго четвертое, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta\sigma_{ij}) + \delta X_j = 0,$$

$$\delta\sigma_{ij} n_i = \delta X_{\nu j}.$$

т. е. вариации напряжений $\delta\sigma_{ij}$ и внешних сил $\delta X_i, X\delta_{\nu i}$ образуют уравновешенную систему. Поэтому по принципу возможных перемещений для деформируемого тела, принимая за возможные перемещения действительные, имеем

$$\int_V \delta X_i u_i \, dV + \int_S \delta X_{\nu i} u_i \, dS = \int_V \delta\sigma_{ij} e_{ij} \, dV. \qquad (7.7)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в правой части этого равенства так же, как это было сделано в предыдущем параграфе. Тогда получим

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ij} e_{ij} &= (\delta s_{ij} + \delta_{ij}\delta\sigma_0)(e_{ij} + \delta_{ij} e_0) = \\ &= \delta s_{ij} e_{ij} + \delta_{ij}\delta\sigma_0 e_{ij} + \delta s_{ij}\delta_{ij} e_0 + \delta_{ij}\delta\sigma_0\delta_{ij} e_0 = \\ &= \delta s_{ij} \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} s_{ij} + 3e_0\delta\sigma_0 = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\frac{1}{2}\delta\left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}\right) + \\ &+ \frac{\sigma_0}{K}\delta\sigma_0 = \varepsilon_i \delta\sigma_i + \frac{1}{2K}\delta\sigma_0^2 = \delta R, \end{aligned} \qquad (7.8)$$

где

$$R = \frac{\sigma_0^2}{2K} + \int_0^{\sigma_i} \varepsilon_i \, d\sigma_i. \qquad (7.9)$$

Очевидно, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial R}{\partial \sigma_{ij}}. \qquad (7.10)$$

Функцию компонентов напряжения R называют дополнительной работой. Соотношения (7.10) аналогичны известным в теории упругости формулам Кастилиано. В пределах упругости частные производные берутся от удельной потенциальной энергии деформации [14].

Первое слагаемое в формуле (7.9) представляет собой удельную потенциальную энергию изменения объема, а второе в некотором масштабе равно площади, заштрихованной на рис. 7.6 горизонтальными линиями.

Назовем дополнительной работой для всего тела выражение

$$\bar{R} = \int_V R \, dV.$$

Тогда, используя соотношение (7.8), преобразуем равенство (7.7) к виду

$$\int_V \delta X_i u_i \, dV + \int_S \delta X_{\nu i} u_i \, dS = \delta\bar{R}. \qquad (7.11)$$

Уравнение (7.11) является математической формулировкой так называемого *принципа возможных изменений напряженного состояния тела*, согласно которому *сумма работ приращений всех внеш-*

них сил на перемещениях точек приложения этих сил равна приращению дополнительной работы всего тела.

В пределах упругости дополнительная работа равна потенциалу деформации или удельной потенциальной энергии и, следовательно, сумма работ приращений всех внешних сил на перемещениях точек приложения этих сил равна приращению потенциальной энергии тела [14].

§ 43. Принцип минимума дополнительной работы

Рассмотрим такой частный случай нагружения тела, когда объемные силы равны нулю, на части поверхности заданы поверхностные силы и, следовательно, вариации их равны нулю

$$\delta X_{\nu i} = 0,$$

а на другой части поверхности равны нулю перемещения

$$u_i = 0.$$

Тогда из формулы (7.11) следует

$$\delta \bar{R} = 0. \tag{7.12}$$

Как показано в работе [7], вторая вариация дополнительной работы положительна.

Таким образом, в указанном частном случае из принципа возможных изменений напряженного состояния тела получен *принцип минимума дополнительной работы*, согласно которому *из всех статически возможных напряженных состояний только для истинного напряженного состояния дополнительная работа для всего тела принимает минимальное значение.*

§ 44. Теорема Кастилиано

В теории упругости теорема Кастилиано формулируется следующим образом [14]: *частная производная от потенциальной энергии деформации тела, взятая по величине любой из приложенных к телу внешних сил, равна проекции перемещения точки приложения этой силы на направление ее действия.*

Рассмотрим обобщение этой теоремы на случай нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями. Обозначим через P_i сосредоточенные силы, приложенные к телу, через α_i, β_i, γ_i — направляющие косинусы линий действия этих сил, а через u_{xi}, u_{yi}, u_{zi} — проекции перемещения точек приложения сосредоточенных сил P_i соответственно на оси x, y и z.

Из вариационного уравнения (7.11), полагая, что одна из сил получает бесконечно малое приращение δP_i, устанавливаем

$$(u_{xi}\alpha_i + u_{yi}\beta_i + u_{zi}\gamma_i)\,\delta P_i = \delta R.$$

Выражение в круглых скобках равно проекции перемещения точки приложения силы P_i на направление линии действия силы δ_i.

Следовательно,

$$\delta_i = \frac{\partial \bar{R}}{\partial P_i}, \tag{7.13}$$

т. е. *частная производная дополнительной работы тела по величине любой из приложенных к телу внешних сил равна проекции перемещения точки приложения этой силы на направление ее действия.*

§ 45. Применение вариационных методов к решению задачи упруго-пластического кручения бруса

Представим себе призматический скрученный брус произвольного поперечного сечения, задний торец которого закреплен так, что линейные перемещения всех точек его в направлениях осей x и y равны нулю, а передний торец свободен (рис. 7.7).

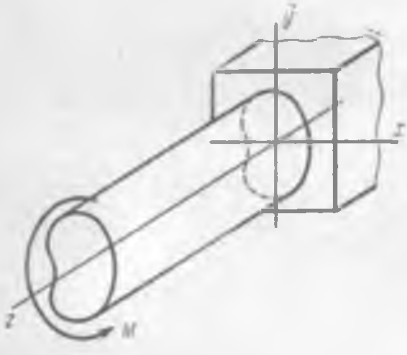


Рис. 7.7. Скрученный брус некруглого поперечного сечения

В таком случае кручение бруса будет чистым, т. е.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \tag{7.14}$$

Дифференциальные уравнения равновесия (1.3) в рассматриваемой задаче принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Из первых двух уравнений (7.15) следует, что напряжения не меняются по длине бруса, т. е. все поперечные сечения бруса находятся в одинаковых условиях. Последнее уравнение (7.15) будет удовлетворяться тождественно, если ввести функцию напряжений Φ, положив

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{7.16}$$

Так же, как и в задаче упругого кручения [14], для односвязного контура можно принять, что функция напряжений на контуре равна нулю. Далее так же, как в упомянутых задачах, крутящий момент связан с функцией напряжений соотношением

$$M = 2\int_F \Phi \, dF. \tag{7.17}$$

Используем в решении задачи принцип возможных изменений напряженного состояния (см. § 42).

Подсчитаем вначале работу приращений всех внешних сил на перемещениях точек приложения этих сил. Она равна работе приращения момента δM на угле поворота свободного торца бруса

$\varphi = \theta l$, где θ — относительный угол закручивания бруса; l — длина бруса.

$$\int\limits_S \delta X_{\nu i} u_i dS = \delta M \theta l$$

или, используя соотношение (7.17),

$$\int\limits_S \delta X_{\nu i} u_i \, dS = 2\theta l \delta \int\limits_F \Phi \, dF. \tag{7.18}$$

Подсчитаем теперь дополнительную работу для всего бруса. Поскольку распределение напряжений во всех сечениях одно и то же,

$$\bar{R} = \int\limits_V R \, dV = l \int\limits_F R dF.$$

Так как в случае чистого сдвига

$$\sigma_0 = 0, \ \sigma_i = \sqrt{3}\, \tau, \ \varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}},$$

где

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}, \quad \gamma = \sqrt{\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2},$$

то согласно формуле (7.9)

$$R = \int\limits_0^\tau \gamma \, d\tau$$

и, следовательно,

$$\bar{R} = l \int\limits_F dF \int\limits_0^\gamma \gamma \, d\tau. \tag{7.19}$$

Подставляя выражения (7.18) и (7.19) в основное уравнение принципа возможных изменений напряженного состояния (7.11), получим

$$\delta I = 0, \tag{7.20}$$

где

$$I = \int\limits_F \left(\int\limits_0^\tau \gamma \, d\tau - 2\theta \Phi \right) dF. \tag{7.21}$$

Вариационное уравнение (7.20) может быть решено методом Ритца, при этом функция Φ выбирается в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^n C_i \Phi_i, \tag{7.22}$$

все функции $\Phi_i = \Phi_i(x, y)$ обращаются в нуль на контуре. Коэффициенты C_i определяются из условий равенства нулю вариаций интеграла (7.21), которые имеют вид

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0. \tag{7.23}$$

Вследствие нелинейности диаграммы сдвига условия (7.23) приводят к нелинейной системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_i, составление и решение которой даже при небольших n связано со значительными трудностями. В связи с этим воспользуемся методом последовательных приближений аналогично изложенному в § 40.

Связь между касательным напряжением τ и угловой деформацией γ представим в виде

Рис. 7.8. Диаграмма сдвига

$$\tau = G_k\gamma, \tag{7.24}$$

где G_k — переменный параметр упругости, определяемый формулой (см. рис. 7.8)

$$G_k = \frac{\tau^*_{k-1}}{\gamma_{k-1}}. \tag{7.25}$$

На основании соотношений (7.24) и (7.25) имеем

$$G_k = G_{k-1}\frac{\tau^*_{k-1}}{\tau_k}. \tag{7.26}$$

Выражение (7.21) принимает вид

$$I = \int_F \left(\frac{\tau^2}{2G_k} - 2\theta\Phi\right) dF. \tag{7.27}$$

В таком случае нелинейная система уравнений для коэффициентов C_i приводится к последовательности линейных систем.

Список литературы

1. **Биргер И. А.** Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. — «Прикладная математика и механика», 1951, т. XV, вып. 6, с. 765—770.

2. **Биргер И. А.** Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961, 368 с.

3. **Биргер И. А.** Теория пластического течения при неизотермическом нагружении.—«Известия АН СССР. Механика и машиностроение», 1964, № 1, с. 193—196.

4. **Биргер И. А.** Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести. — «Известия АН СССР. Механика», 1965, № 2, с. 113—119.

5. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948, 376 с.

6. **Качанов Л. М.** Механика пластических сред. ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948, 215 с.

7. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969, 420 с.

8. **Качанов Л. М.** О вариационных методах решения задач теории пластичности. — «Прикладная математика и механика», 1959, т. XXXIII, в. 3, с. 616—617.

9. **Качанов Л. М.** Пример решения вариационным методом задачи упругопластического кручения. — В кн.: Исследования по упругости и пластичности. Сборник I. Изд-во Ленинградского университета, 1961, с. 157—161.

10. **Лейбензон Л. С.** Курс теории упругости. М., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947, 464 с.

11. **Лурье А. И.** Обобщение теоремы Кастилиано. — «Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина», 1946, № 1, с. 9—15.

12. **Малинин Н. Н.** Прочность турбомашин. М., Машгиз, 1962, 291 с.

13. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М., «Мир», 1969, 863 с.

14. **Папкович П. Ф.** Теория упругости. М., Оборонгиз, 1939, 640 с.

15. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. 1, М., Машгиз, 1956, с. 884 Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.

16. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 2. М., Физматгиз, 1958, 628 с.

17. **Филоненко-Бородич М. М.** Теория упругости. М., Физматгиз, 1959, 364 с.

18. **Lin T. H.** Theory of inelastic structures, John Wiley and Sons, Inc, 1968, 454 p.

ГЛАВА VIII

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ

§ 46. Совместное растяжение и кручение тонкостенной трубки

Рассмотрим совместное растяжение и кручение тонкостенной трубки (рис. 8.1). Обозначим средний диаметр трубки через D, толщину стенки h, растягивающую силу N, крутящий момент M.

Задача вычисления напряжений является статически определимой. Нормальное σ и касательное τ напряжения как в пределах, так и за пределами упругости подсчитываем по формулам

$$\sigma = \frac{N}{\pi D h}, \quad \tau = \frac{2M}{\pi D^2 h}.$$

Для упрощения выкладок в дальнейшем будет считать, что материал несжимаем ($\varepsilon_0 = 0$) и диаграмма деформирования его не имеет упрочнения (см. рис. 4.4).

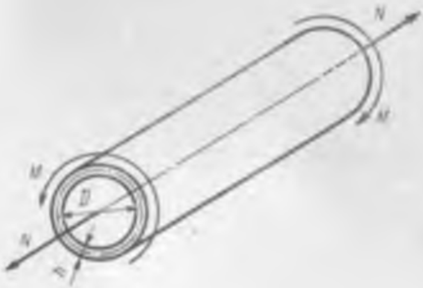


Рис. 8.1. Растянутая и скрученная тонкостенная трубка

В рассматриваемом случае $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\sigma_z = \sigma$; $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$; $\tau_{zx} = \tau$; $\varepsilon_z = \varepsilon$; $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_z}{2} = -\frac{\varepsilon}{2}$ (так как материал несжимаем и, следовательно, $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$), $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{zx} = \gamma$. Поэтому интенсивности напряжений и приращений пластических деформаций согласно формулам (1.19) и (2.34) будут

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}; \tag{8.1}$$

$$\overline{d\varepsilon_i^p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\,(d\varepsilon^p)^2 + (d\gamma^p)^2}. \tag{8.2}$$

Поскольку диаграмма растяжения не имеет упрочнения,

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_T. \tag{8.3}$$

Из соотношений (4.23) имеем

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon &= \frac{d\sigma}{E} + \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_T}\sigma; \\ d\gamma &= \frac{d\tau}{G} + 3\frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_T}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Введем безразмерные напряжения и деформации

$$\left.\begin{aligned} q=\frac{\sigma}{\sigma_{\text{т}}},\quad s=\frac{\tau}{\tau_{\text{т}}}=\frac{\sqrt{3}\,\tau}{\sigma_{\text{т}}};\\ \xi=\frac{\varepsilon}{e_{\text{т}}},\quad \chi=\frac{\gamma}{\gamma_{\text{т}}}=\frac{\gamma}{\sqrt{3}e_{\text{т}}} \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

и преобразуем соотношения (8.3) и (8.4) к виду

$$q^2+s^2=1; \tag{8.6}$$

$$\left.\begin{aligned} d\xi=dq+qE\frac{\overline{de_i^p}}{\sigma_{\text{т}}},\\ d\chi=ds+sE\frac{\overline{de_i^p}}{\sigma_{\text{т}}}. \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Продифференцируем соотношение (8.6). Тогда получим

$$q\,dq+s\,ds=0. \tag{8.8}$$

Умножим первое из уравнений (8.7) на q, а второе на s и сложим полученные выражения. Используя соотношения (8.6) и (8.8), находим

$$E\frac{\overline{de_i^p}}{\sigma_{\text{т}}}=q\,d\xi+s\,d\chi. \tag{8.9}$$

Подставим эту величину в первое уравнение (8.7). Учитывая соотношение (8.6), имеем

$$d\xi=dq+q^2\,d\xi+q\sqrt{1-q^2}\,d\chi$$

или

$$\frac{dq}{d\xi}=\sqrt{1-q^2}\left(\sqrt{1-q^2}-q\frac{d\chi}{d\xi}\right). \tag{8.10}$$

Преобразуем теперь второе уравнение (8.7) при помощи соотношений (8.9) и (8.6). Тогда получим

$$\frac{ds}{d\chi}=\sqrt{1-s^2}\left(\sqrt{1-s^2}-s\frac{d\xi}{d\chi}\right). \tag{8.11}$$

С помощью подстановок

$$q=\sin v;\quad w=\operatorname{tg}\frac{v}{2}$$

уравнение (8.10) может быть приведено к виду

$$\frac{dw}{d\xi}=-\frac{1}{2}\left(w^2+2w\frac{d\chi}{d\xi}-1\right). \tag{8.12}$$

Таким же образом может быть преобразовано уравнение (8.11).

Следовательно, зависимости напряжений от деформаций по теории течения определяются интегралами уравнений (8.10), (8.11) или (8.12). Путь деформирования в этих уравнениях отражается производными $\frac{d\chi}{d\xi}$ или $\frac{d\xi}{d\chi}$.

Уравнение (8.12) является дифференциальным уравнением Риккати. При произвольной функции $\frac{d\chi}{d\xi}$ оно не приводится к квадратурам.

Изучим некоторые частные случаи нагружения. Начнем с рассмотрения ступенчатого нагружения. Допустим, что сначала трубка только растягивается, а потом только закручивается. Тогда на первой ступени нагружения

$$d\chi = 0$$

и из уравнения (8.10) имеем

$$\frac{dq}{1-q^2} = d\xi .$$

Обозначим величину q при $\xi = \xi_1$ через q_1 и проинтегрируем это уравнение в пределах от ξ_1 до ξ. Тогда получим

$$X = X_1 \exp [2 (\xi - \xi_1)], \tag{8.13}$$

где

$$X = \frac{1+q}{1-q} \tag{8.14}$$

и, следовательно,

$$X_1 = \frac{1+q_1}{1-q_1} . \tag{8.15}$$

Из формулы (8.14) следует, что

$$q = \frac{X-1}{X+1} . \tag{8.16}$$

На второй ступени нагружения, когда трубка только закручивается,

$$d\xi = 0$$

и из уравнения (8.11) имеем

$$d\chi = \frac{ds}{1-s^2} .$$

Интегрируя и выполняя преобразования, подобные тем, которые были сделаны при рассмотрении первой ступени нагружения, получаем

$$Y = Y_1 \exp [2 (\chi - \chi_1)], \tag{8.17}$$

где

$$Y = \frac{1+s}{1-s} ; \tag{8.18}$$

$$Y_1 = \frac{1+s_1}{1-s_1} , \tag{8.19}$$

а s_1 — значение величины s при $\chi = \chi_1$. Из формулы (8.18) следует, что

$$s = \frac{Y-1}{Y+1}. \tag{8.20}$$

Перейдем теперь к разбору линейного нагружения, т. е. такого нагружения, когда χ является линейной функцией ξ.

Примем для упрощения выкладок простейшую линейную функцию

$$\chi = \xi.$$

Тогда уравнение (8.12) приводится к виду

$$\frac{dw}{d\xi} = -\frac{1}{2}(w^2 + 2w - 1).$$

Проинтегрируем это уравнение. После преобразований получаем

$$Z = Z_1 \exp\left[-\sqrt{2}(\xi - \xi_1)\right], \tag{8.21}$$

где

$$Z = \frac{1 + w - \sqrt{2}}{1 + w + \sqrt{2}}; \tag{8.22}$$

$$Z_1 = \frac{1 + w_1 - \sqrt{2}}{1 + w_1 + \sqrt{2}}, \tag{8.23}$$

а w_1 — значение величины w при $\xi = \xi_1$. Из формулы (8.22) имеем

$$w = \frac{(1 + \sqrt{2})\, Z - 1 + \sqrt{2}}{1 - Z}. \tag{8.24}$$

Таким образом, получены формулы, устанавливающие зависимость напряжений от деформаций как при ступенчатом, так и при линейном нагружениях по теории течения.

Интересно сопоставить приведенное решение этой задачи по теории течения с решением по теории малых упруго-пластических деформаций. В случае использования последней из соотношений (4.32) получаем зависимости напряжений от деформаций

$$\sigma = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon; \quad \tau = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma, \tag{8.25}$$

где интенсивность деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3\varepsilon^2 + \gamma^2}. \tag{8.26}$$

Используя обозначения (8.5), преобразуем выражения (8.25) к форме

$$q = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \chi^2}}; \quad s = \frac{\chi}{\sqrt{\xi^2 + \chi^2}}. \tag{8.27}$$

Эти соотношения представляют собой зависимости безразмерных напряжений от безразмерных деформаций по теории малых упруго-пластических деформаций. Как следует из формул (8.27), напряжения определяются конечными значениями деформаций и не зависят от пути нагружения.

На рис. 8.2 представлены результаты вычисления безразмерных напряжений как по теории малых упруго-пластических деформаций, так и по теории течения при двух ступенчатых нагружениях (сначала растяжение, потом кручение и сначала кручение, потом растяжение) и одном линейном ($\chi = \xi$) нагружении. Пути нагружения в координатах ξ, χ показаны на рис. 8.2 стрелками. Величины безразмерных напряжений приведены у точек A, B, C и D, причем в скобки заключены безразмерные напряжения, подсчитанные по теории малых упруго-пластических деформаций.

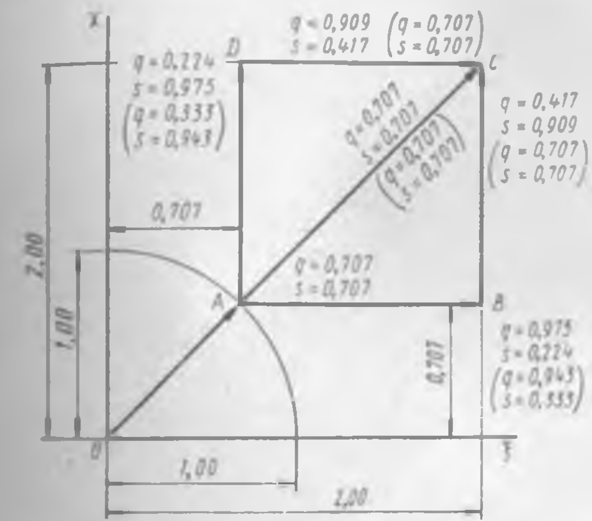


Рис. 8.2. К сопоставлению теории течения с теорией малых упруго-пластических деформаций на примере совместного растяжения и кручения тонкостенной трубки

Рассмотрим эти результаты более подробно. Вначале создаем линейное нагружение тонкостенной трубки до наступления текучести (линия OA), которое происходит в пределах упругости. Поэтому независимо от принятой теории пластичности по формулам (8.27) для точки A ($\chi = \xi = 0{,}707$) получаем $q = s = 0{,}707$. Затем трубку растягиваем до $\xi = 2$ (точка B). Для точки B величины деформаций $\xi = 2{,}000$; $\chi = 0{,}707$. По теории течения напряжения в точке B вычисляем по формулам (8.16), (8.15), (8.13) и (8.6). При этом $\xi_1 = 0{,}707$; $\xi = 2{,}000$; $q_1 = 0{,}707$. По теории малых упруго-пластических деформаций напряжения q и s вычисляем по формулам (8.27).

После этого трубку скручиваем до $\chi = 2$ (точка C). По теории течения напряжения в точке C вычисляем по формулам (8.20), (8.19), (8.17) и (8.6). При этом $\chi_1 = 0{,}707$; $\chi = 2{,}00$; $s_1 = 0{,}224$. По теории малых упруго-пластических деформаций напряжения подсчитываем по формулам (8.27). При этом величины деформаций $\xi = \chi = 2{,}00$.

Аналогично можно рассмотреть ступенчатый путь нагружения ADC и линейное нагружение AC.

Как следует из данных, приведенных на рис. 8.2, в зависимости от пути нагружения напряжения в конечной точке C по теории течения получаются различными, а по теории упруго-пластических деформаций одинаковыми, отличными от напряжений, установленных по теории течения. В случае линейного пути нагружения напряжения в конечной точке C как по теории течения, так и по теории малых упруго-пластических деформаций одинаковы. Такой же результат имеет место и в общем случае линейного нагружения [5].

§ 47. Упруго-пластическое состояние толстостенной трубы, нагруженной равномерным внутренним давлением и осевой силой

Выше (см. § 32) была решена задача об упруго-пластическом состоянии толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и осевой силой по теории упруго-пластических деформаций. Рассмотрим теперь решение этой задачи по теории течения. Постановка задачи такая же, как и в § 32. Отличие будет заключаться только в том, что в изложенном ниже решении материал трубы не будем считать несжимаемым ($\mu = 0{,}5$), поскольку это не упрощает решения задачи.

В решении задачи по теории течения удобно принять, что напряжения в трубе являются функциями двух переменных: радиуса r и радиуса границы, разделяющей упругую и пластическую области $r_{\text{т}}$. Дифференциальное уравнение равновесия элемента трубы (6.5) имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \tag{8.28}$$

Выражения для напряжений на основании соотношений (1.6) и (3.3) могут быть представлены в форме

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= s_r + \sigma_0 = s_r + 3K\varepsilon_0; \\ \sigma_t &= s_t + \sigma_0 = s_t + 3K\varepsilon_0; \\ \sigma_z &= s_z + \sigma_0 = -(s_r + s_t) + 3K\varepsilon_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

Подставляя эти зависимости в формулу (8.28), получаем иную форму дифференциального уравнения равновесия:

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{s_r - s_t}{r} + 3K\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} = 0. \tag{8.30}$$

Перейдем к выводу условия совместности деформаций. Используя выражения (2.5), (6.2) и (6.23), получаем величину средней линейной деформации

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right). \tag{8.31}$$

Введем вспомогательную переменную

$$\alpha = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right). \tag{8.32}$$

Эти две величины примем за основные неизвестные.

Из соотношений (8.31) и (8.32) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{3}{2}(\varepsilon_0 + \alpha); \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r} = \frac{3}{2}(\varepsilon_0 - \alpha); \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

$$u = \frac{3}{2} r (\varepsilon_0 - \alpha). \tag{8.34}$$

Продифференцировав выражение (8.34) по r и сопоставив его с первым из соотношений (8.33), получим условие совместности деформаций в виде

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 2\frac{\alpha}{r}. \tag{8.35}$$

Рассмотрим вначале напряжения и деформации в упругой области ($r_т \leqslant r \leqslant r_2$). Компоненты девиатора напряжений связаны с компонентами девиатора деформаций зависимостями (3.8), из которых следует, что

$$s_r = 2Ge_r; \; s_t = 2Ge_t. \tag{8.36}$$

В соответствии с выражениями (2.6) и (8.33) компоненты девиатора деформаций

$$\left.\begin{aligned} e_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + 3\alpha);\; e_t = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 - 3\alpha); \\ e_z = -\varepsilon_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.37}$$

Поэтому компоненты девиатора напряжений

$$\left.\begin{aligned} s_r &= G(\varepsilon_0 + 3\alpha); \\ s_t &= G(\varepsilon_0 - 3\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

Уравнение равновесия (8.30) после использования зависимостей (8.38) принимает вид

$$(G + 3K)\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} + 3G\frac{\partial \alpha}{\partial r} + 6G\frac{\alpha}{r} = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражение для $\frac{\partial e_0}{\partial r}$ из формулы (8.35), получаем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{2\alpha}{r} = 0.$$

Решение выведенного уравнения имеет вид

$$\alpha = \frac{A}{r^3}, \tag{8.39}$$

где A — функция r_T.

Подставим выражение (8.39) в уравнение (8.35). Тогда получим

$$\frac{\partial e_0}{\partial r} = 0,$$

откуда следует, что

$$e_0 = B, \tag{8.40}$$

где B — функция r_T.

Согласно формулам (8.29), (8.38), (8.39), (8.40) получим выражения для напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= (G + 3K) B + \frac{3GA}{r^3}; \\ \sigma_t &= (G + 3K) B - \frac{3GA}{r^3}; \\ \sigma_z &= (-2G + 3K) B. \end{aligned}\right\} \tag{8.41}$$

Величины A и B определяются из краевых условий:
при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$;
при $r = r_T$ $\sigma_t = \sigma_T$.

Из первого краевого условия имеем

$$(G + 3K) B + \frac{3GA}{r_2^3} = 0. \tag{8.42}$$

Из второго краевого условия, используя соотношения (6.7) и (8.41), устанавливаем

$$(GB)^2 + \frac{3(GA)^2}{r_T^6} = \frac{\sigma_T^2}{9}. \tag{8.43}$$

Решая уравнения (8.15) и (8.16) относительно A и B, получаем

$$A = -\frac{p^* r_2^3}{3G}, \quad B = \frac{p^*}{G + 3K}, \tag{8.44}$$

$$p^* = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}\left[3\left(\frac{G}{G + 3K}\right)^2 + \frac{r_2^6}{r_T^6}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{8.45}$$

Следовательно, согласно формулам (8.41) и (8.44) формулы для напряжений в упругой области принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= p^*\left(1-\frac{r_2^2}{r^2}\right); \\ \sigma_t &= p^*\left(1+\frac{r_2^2}{r^2}\right); \\ \sigma_z &= p^*\,\frac{3K-2G}{3K+G}. \end{aligned}\right| \tag{8.46}$$

Выражение для радиального перемещения u в упругой области получаем при помощи соотношений (8.34), (8,39), (8.40) и (8.44)

$$u = \frac{3}{2}p^*\left(\frac{r}{G+3K}+\frac{r_2^2}{3Gr}\right). \tag{8.47}$$

Перейдем теперь к рассмотрению напряжений и деформаций в пластической области ($r_1 \leqslant r \leqslant r_{\text{T}}$). Согласно теории течения (см. § 23) приращения деформаций связаны с приращениями напряжений и напряжениями следующими соотношениями:

$$de_r = \frac{1}{E}\left[d\sigma_r - \mu\left(d\sigma_t + d\sigma_z\right)\right] + d\lambda\left(\sigma_r - \sigma_0\right);$$

$$de_t = \frac{1}{E}\left[d\sigma_t - \mu\left(d\sigma_z + d\sigma_r\right)\right] + d\lambda\left(\sigma_t - \sigma_0\right);$$

$$de_z = \frac{1}{E}\left[d\sigma_z - \mu\left(d\sigma_r + d\sigma_t\right)\right] + d\lambda\left(\sigma_z - \sigma_0\right),$$

где обозначено

$$d\lambda = \frac{3}{2}\,\frac{\overline{d\varepsilon_i}}{\sigma_i}.$$

Преобразуем первые две зависимости. Для этого вычтем из левых и правых частей уравнений по

$$de_0 = \frac{1-2\mu}{E}\,d\sigma_0.$$

Тогда, учитывая соотношения (2.6), (1.6), (1.5) и (3.2), получим

$$\left.\begin{aligned} de_r &= \frac{ds_r}{2G} + d\lambda s_r; \\ de_t &= \frac{ds_t}{2G} + d\lambda s_t. \end{aligned}\right\} \tag{8.48}$$

Выражения (8.48) определяют приращения компонентов девиатора деформации de_r и de_t, возникшие за счет приращения компонентов девиатора напряжений ds_r и ds_t. Заметим, что при этом радиус $r_т$ границы, разделяющей упругую и пластическую области, являясь характеристикой степени пластической деформации трубы, изменяется на величину $dr_т$. Поэтому из формул (8.48) следует, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial e_r}{\partial r_т} &= \frac{1}{2G}\frac{\partial s_r}{\partial r_т} + \frac{\partial\lambda}{\partial r_т}s_r;\\ \frac{\partial e_t}{\partial r_т} &= \frac{1}{2G}\frac{\partial s_t}{\partial r_т} + \frac{\partial\lambda}{\partial r_т}s_t.\end{aligned}\right| \tag{8.49}$$

Исключим из уравнений (8.49) величину $\frac{\partial\lambda}{\partial r_т}$. Из второго уравнения (8.49) устанавливаем

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r_т} = \frac{1}{s_t}\frac{\partial e_t}{\partial r_т} - \frac{1}{2G}\frac{1}{s_t}\frac{\partial s_t}{\partial r_т}.$$

Подставив эту величину в первую формулу (8.49), получим

$$2G\left(s_r\frac{\partial e_t}{\partial r_т} - s_t\frac{\partial e_r}{\partial r_т}\right) - \left(s_r\frac{\partial s_t}{\partial r_т} - s_t\frac{\partial s_r}{\partial r_т}\right) = 0. \tag{8.50}$$

Поскольку диаграмма растяжения материала не имеет упрочнения, компоненты напряжений должны удовлетворять условию пластичности (3.14), которое с помощью соотношений (1.6) и (1.5) может быть представлено в форме

$$s_r^2 + s_rs_t + s_t^2 = \frac{\sigma_т^2}{3}.$$

Решая это уравнение относительно s_t, получаем

$$s_t = \frac{-s_r + \sqrt{\frac{4}{3}\sigma_т^2 - 3s_r^2}}{2}. \tag{8.51}$$

В последней формуле берется положительное значение корня. Это объясняется тем, что в упругой области и на границе упругой и пластической областей

$$2s_t + s_r > 0.$$

Действительно, как следует из формул (1.6), (3.3), (8.46), (8.40) и (8.44), в упругой области

$$2s_t + s_r = 2p^*\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right) - 6K\frac{p^*}{G+3K} +$$

$$+ p^*\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right) - 3K\frac{p^*}{G+3K} = p^*\left(\frac{3G}{G+3K} + \frac{r_2^2}{r^2}\right) > 0.$$

Подставим выражение (8.51) в уравнения (8.30) и (8.50), используя зависимости (8.29). Тогда, в совокупности с выражением (8.35), получим следующую систему уравнений для определения трех неизвестных ε_0, α и s_r:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{2\alpha}{r};\\
&\frac{\partial s_r}{\partial r} + 3K\,\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} = \frac{-3s_r + \sqrt{\frac{4}{3}\sigma_{\text{т}}^2 - 3s_r^2}}{2r};\\
&\frac{\partial s_r}{\partial r_{\text{т}}} - \frac{3G}{4\sigma_{\text{т}}^2}\left(\frac{4}{3}\sigma_{\text{т}}^2 - 3s_r^2 - 3s_r\sqrt{\frac{4}{3}\sigma_{\text{т}}^2 - 3s_r^2}\right)\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r_{\text{т}}} -\\
&\quad - \frac{9G}{4\sigma_{\text{т}}^2}\left(\frac{4}{3}\sigma_{\text{т}}^2 - 3s_r^2 + s_r\sqrt{\frac{4}{3}\sigma_{\text{т}}^2 - 3s_r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial r_{\text{т}}} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.52}$$

Получить решение этой системы в замкнутом виде невозможно. Она может быть решена только численными методами. При ее решении должны быть использованы условия равенства радиального напряжения на внутренней поверхности трубы давлению с обратным знаком и условие непрерывности радиальных и окружных напряжений на границе упругой и пластической областей. После определения величин ε_0, α и s_r по формулам (8.51) и (8.29) подсчитывают компоненты напряжения, а по формуле (8.34) радиальное перемещение.

Сопоставим на примере толстостенной трубы при $\frac{r_2}{r_1} = 2$ и $\frac{r_{\text{т}}}{r_1} = 1{,}5$ для материала, у которого $\mu = 0{,}3$; $\frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}\,G} = 0{,}003$, расчеты, выполненные по теории течения и теории упруго-пластических деформаций без допущения о несжимаемости материала [20].

Как следует из сопоставления эпюр (рис. 8.3) и графиков (рис. 8.4) различие в результатах по теории течения и теории упруго-пластических деформаций ничтожно.

Докажем, что если принять материал трубы несжимаемым ($\mu = 0{,}5$; $K = \infty$; $\varepsilon_0 = 0$), то решения задач по теории течения и теории упруго-пластических деформаций совпадают.

Уравнение совместности деформаций (8.35) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = -2\frac{\alpha}{r}$$

и, следовательно,

$$\alpha = \frac{C}{r^2}.$$

Это уравнение аналогично выражению для функции α, полученному для упругой области. Поэтому радиальное перемещение в трубе из несжимаемого материала как в упругой, так и в пластической областях описывается уравнением (8.47) при $K = \infty$, т. е.

$$u = \frac{p^* r_2^2}{2Gr}, \tag{8.53}$$

где согласно формуле (8.45) для $K = \infty$

$$p^* = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{r_T^2}{r_2^2}. \tag{8.54}$$

Рис. 8.3. Эпюры напряжений в толстостенной трубе $\left(\frac{r_2}{r_1} = 2\right)$, нагруженной внутренним давлением по теории течения (линия 1), по теории малых упруго-пластических деформаций (линия 2), в предположении несжимаемости материала (линия 3) [10]:

а — радиальных; *б* — окружных; *в* — осевых

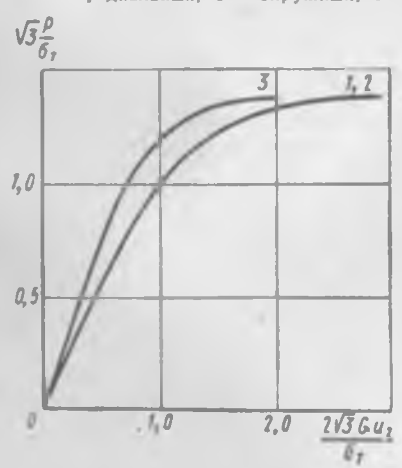


Рис. 8.4. Графики зависимостей давления от радиального перемещения точек наружной поверхности трубы для толстостенной трубы $\left(\frac{r_2}{r_1} = 2\right)$, нагруженной внутренним давлением по теории течения (линия 1), теории малых упруго-пластических деформаций (линия 2), в предположении несжимаемости материала (линия 3) [10]

Из соотношений (8.53) и (8.54) окончательно получим

$$u = \frac{\sigma_T r_T^2}{2\sqrt{3}\,Gr}. \tag{8.55}$$

Далее зависимости (8.37) и (8.34) дают для несжимаемого материала ($\varepsilon_0 = 0$)

$$e_r = -e_t = \frac{3}{2}\alpha; \quad u = -\frac{3}{2}\alpha r. \tag{8.56}$$

Поскольку радиальное перемещение $u > 0$, то $\alpha < 0$ и поэтому

$$e_t > 0,\ e_r < 0. \qquad (8.57)$$

Соотношения (8.56) и (8.57) справедливы как в упругой, так и в пластической областях.

На основании выражений (8.36), (8.56) и (8.57) заключаем, что для упругой области

$$s_r = -s_t, \qquad (8.58)$$

причем

$$s_t > 0,\ s_r < 0. \qquad (8.59)$$

Из соотношений (1.6), (1.5) и (8.46) следует, что

$$s_z = 0$$

и поэтому в упругой области

$$s_t : s_r : s_z = 1 : -1 : 0. \qquad (8.60)$$

Докажем, что это же соотношение выполняется и в пластической области. Для этого рассмотрим точку A, лежащую на границе, разделяющей упругую и пластическую области. В этой точке справедливы соотношения (8.57) и (8.58). Увеличим внутреннее давление на dp. Тогда радиус границы упругой и пластической областей увеличится на $dr_{\text{Т}}$ и точка A попадет в пластическую область. Из формулы (8.58) следует, что величины приращений напряжений в этой точке

$$\left.\begin{aligned} ds_r &= 2G\,de_r - 2G\,d\lambda s_r;\\ ds_t &= 2G\,de_t - 2G\,d\lambda s_t. \end{aligned}\right\} \qquad (8.61)$$

Поскольку соотношения (8.57) справедливы не только в упругой, но и в пластической областях, то из формулы (8.58) имеем

$$ds_r = -ds_t,$$

т. е. при увеличении давления соотношения (8.58) и (8.59) сохраняются. Поэтому эти выражения, а следовательно, и соотношение (8.60) справедливы не только в упругой, но и в пластической области.

На основании доказанного заключаем, что для трубы из несжимаемого материала нагружение будет простым и, следовательно, решения задачи по теории течения и по теории упруго-пластических деформаций будут совпадать.

Как следует из сопоставления кривых *3* с кривыми *1* и *2* (см. рис. 8.3 и 8.4), допущение о несжимаемости материала дает очень небольшую погрешность в определении радиальных и окружных напряжений и значительную погрешность при подсчете осевых напряжений и радиальных перемещений. Как указано в книге [10], кривая *2* на рис. 8.3 может быть получена из кривой *3* умножением ординат ее на 2μ, а кривая *2* на рис. 8.4 может быть получена из кривой *3* умножением абсцисс ее на $2(1-\mu)$, причем под μ понимают величину коэффициента поперечной деформации в пределах упругости. Таким образом, решение задачи, выполненное в предположении несжимаемости, может быть уточнено, если в выражении для осевых напряжений и радиальных перемещений ввести корректирующие множители, равные соответственно 2μ и $2(1-\mu)$.

§ 48. Изгиб листа

Рассмотрим чистый изгиб листа при наличии больших деформаций (рис. 8.5). Примем, что деформация листа в направлении, перпендикулярном плоскостям изгиба,

$$\varepsilon_z = 0. \tag{8.62}$$

Допустим, что упрочнение отсутствует, а упругими деформациями по сравнению с пластическими можно пренебречь. Это равносильно использованию в решении диаграммы жестко-пластического тела (см. рис. 5.17).

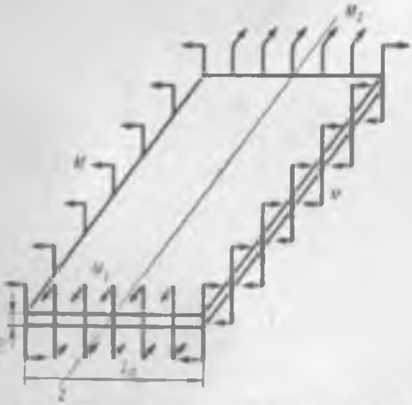


Рис. 8.5. Лист в условиях чистого изгиба

При чистом изгибе вследствие симметрии нагружения лист изгибается по дуге окружности. Сопоставим лист в двух близких друг к другу деформированных состояниях (рис. 8.6). Допустим, что при переходе из первого состояния (сплошные линии) во второе (штриховые линии) деформации и перемещения можно считать малыми. Для определенности примем, что при изгибе среднее сечение листа не поворачивается и нижняя точка этого сечения неподвижна.

Назовем поверхность, разделяющую область листа, растянутую в окружном направлении, от области, сжатой в этом направлении, граничной. Обозначим внутренний и наружный радиусы листа в первом состоянии через r_1 и r_2, а радиус граничной поверхности r_0. Далее обозначим через R_1, R_2 и R_0 радиусы окружностей, в которые переходят точки окружностей радиусов r_1, r_2 и r_0.

Из симметрии деформации следует, что радиальные и окружные сечения листа, находящегося в деформированном состоянии, и напряжения в них (окружное σ_t и радиальное σ_r) являются главными.

Дифференциальное уравнение равновесия элемента, вырезанного из листа, находящегося в деформированном состоянии, двумя главными сечениями, имеет такой же вид, как и в задаче расчета толстостенных труб (см. § 33)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \tag{8.63}$$

Из этого уравнения следует равенство нулю нормальной силы в радиальных сечениях. Действительно, уравнение (8.63) может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t = 0.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от r_1 до r_2 и учитывая краевые условия при $r = r_1$ $\sigma_r = 0$, при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$, получим величину нормальной силы на единицу ширины листа

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_t \, dr = 0.$$

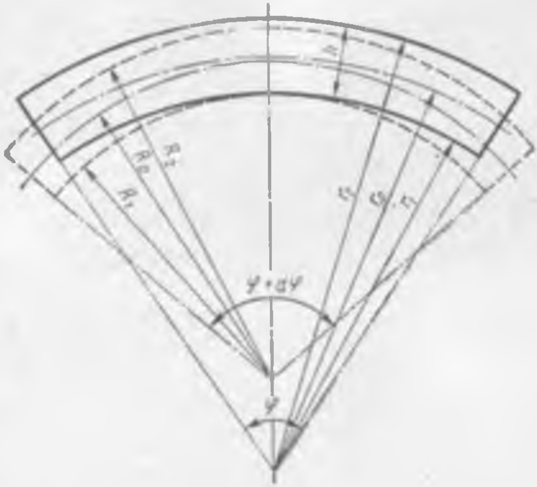


Рис. 8.6. Сечение листа плоскостью, перпендикулярной к оси в двух близких деформированных состояниях

Приращения пластических деформаций, равные в рассматриваемом случае приращениям деформаций, связаны с напряжениями следующими зависимостями [см. формулы (4.23)]:

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_r &= \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon_i}}{\sigma_i}(\sigma_r - \sigma_0); \\ d\varepsilon_t &= \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon_i}}{\sigma_i}(\sigma_t - \sigma_0); \\ d\varepsilon_z &= \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon_i}}{\sigma_i}(\sigma_z - \sigma_0), \end{aligned}\right\} \tag{8.64}$$

где σ_i — интенсивность напряжений; $\overline{d\varepsilon_i}$ — интенсивность приращений пластических деформаций; σ_0 — среднее нормальное напряжение.

В рассматриваемом случае в соответствии с соотношениями (1.21) и (1.5)

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2}; \tag{8.65}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_t + \sigma_z}{3}. \tag{8.66}$$

На основании выражения (8.62) заключаем, что

$$de_z = 0.$$

Поэтому из третьей формулы (8.64) имеем

$$\sigma_z = \sigma_0.$$

Следовательно, согласно выражению (8.66)

$$\sigma_z = \sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2}. \tag{8.67}$$

Подставляя эту величину в выражение для интенсивности напряжений (8.65), получим

$$\sigma_i = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_t - \sigma_r), \tag{8.68}$$

причем знак плюс соответствует области, растянутой в окружном направлении, а знак минус для сжатой.

При отсутствии упрочнения напряжения должны удовлетворять условию пластичности (3.18), и, следовательно, согласно формуле (8.68)

$$\sigma_t - \sigma_r = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T. \tag{8.69}$$

Преобразуем дифференциальное уравнение (8.63), используя соотношение (8.69). Тогда получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_T}{r}, \tag{8.70}$$

причем по-прежнему знак плюс относится к области, растянутой в окружном направлении, а знак минус к области сжатой.

Проинтегрируем уравнение (8.70). В результате устанавливаем: при $r_1 \leqslant r \leqslant r_0$

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{r_1} + C_1; \tag{8.71}$$

при $r_0 \leqslant r \leqslant r_2$

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{r_2} + C_2. \tag{8.72}$$

Краевые условия имеют вид:

при $r = r_1$ $\sigma_r = 0$, при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$, при $r = r_0$ $\sigma_{r\,сж} = \sigma_{r\,раст}$.

Последнее краевое условие отражает непрерывность радиального напряжения на границе сжатой и растянутой в окружном направлении областей.

Из первого и второго краевого условия получаем

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Поэтому согласно соотношениям (8.71), (8.72) и (8.69) формулы для напряжений принимают вид:

при $r_1 \leqslant r \leqslant r_0$

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{r_1}; \quad \sigma_t = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(1 + \ln \frac{r}{r_1}\right); \tag{8.73}$$

при $r_0 \leqslant r \leqslant r_2$

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{r_2}; \quad \sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(1 + \ln \frac{r}{r_2}\right). \tag{8.74}$$

Используя третье краевое условие, получим формулу для радиуса граничного слоя

$$r_0 = \sqrt{r_1 r_2}. \tag{8.75}$$

Подсчитаем величину изгибающего момента на единицу ширины листа. Для удобства вычислений запишем моменты внутренних сил относительно центра кривизны

$$M = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t r \, dr.$$

Используя выражения (8.73) и (8.74), представим это соотношение в виде

$$M = -\int_{r_1}^{r_0} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(1 + \ln \frac{r}{r_1}\right) r \, dr + \int_{r_0}^{r_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(1 + \ln \frac{r}{r_2}\right) r \, dr.$$

После преобразований получим

$$M = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \frac{(r_2 - r_1)^2}{4} = \frac{\sigma_T h^2}{2\sqrt{3}}, \tag{8.76}$$

где $h = r_2 - r_1$ — высота листа в деформированном состоянии.

В дальнейшем будет показано, что в процессе деформации высота листа не изменяется, т. е. $h = h_0$.

Формулы (8.67), (8.73) и (8.74) позволяют подсчитать нормальную силу и изгибающий момент в поперечном сечении листа. Они связаны с осевым напряжением соотношениями

$$N_z = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r \, d\alpha \, dr;$$

$$M_z = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r^2 \cos\alpha \, d\alpha \, dr.$$

Подставляя в эти соотношения осевые напряжения, по формулам (8.67), (8.73) и (8.74) легко убедиться, что нормальная сила равна нулю, а изгибающий момент отличен от нуля.

Таким образом, для выполнения условия цилиндрического изгиба на торцах листа должны быть приложены моменты. При отсутствии их деформированная поверхность листа является поверхностью двоякой кривизны.

Перейдем к рассмотрению деформаций и перемещений. Приращение окружной деформации при переходе из первого состояния во второе (рис. 8.6) в некоторой точке на радиусе r

$$d\varepsilon_t = \frac{R(\varphi + d\varphi) - r\varphi}{r\varphi},$$

откуда

$$R = \frac{1 + d\varepsilon_t}{1 + \frac{d\varphi}{\varphi}}\, r. \tag{8.77}$$

Поскольку в точках граничного слоя приращение окружной деформации равно нулю, по формуле (8.77) имеем

$$R_0 = \frac{r_0}{1 + \frac{d\varphi}{\varphi}}. \tag{8.78}$$

Запишем условие несжимаемости материала для слоя с внутренним радиусом r_0 и наружным радиусом r с учетом того, что осевая деформация равна нулю:

$$\pi\left(r^2 - r_0^2\right)\frac{\varphi}{2\pi} = \pi\left(R^2 - R_0^2\right)\frac{\varphi + d\varphi}{2\pi}.$$

Подставим в это условие соотношения (8.77) и (8.78). Тогда после преобразований, учитывая, что согласно условию (8.62) для несжимаемого материала приращения окружной и радиальной деформации равны, имеем

$$d\varepsilon_t = -d\varepsilon_r = \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{\varphi}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right). \tag{8.79}$$

Изменение высоты листа определяем по формуле

$$dh = \int_{r_1}^{r_2} (d\varepsilon_r)\, dr.$$

Подставляя в это соотношение выражение (8.79), получим

$$dh = 0,$$

т. е. толщина листа при изгибе не изменяется.

Заметим, что при учете упрочнения толщина листа при изгибе изменяется [17].

Из формулы (8.76) следует, что поскольку толщина листа в процессе его изгиба не изменяется, изгибающий момент на единицу ширины листа при отсутствии упрочнения также постоянен.

Формулы (8.73)—(8.75) позволяют определить напряжения для заданного внутреннего радиуса листа r_1. При этом, так как толщина листа в процессе изгиба постоянна, наружный радиус листа $r_2 = r_1 + h_0$.

Установим зависимость между внутренним радиусом кривизны и деформацией на внутреннем волокне. Для этого используем условие постоянства объема листа, которое при равенстве осевой деформации нулю сводится к условию постоянства площади сечения листа, перпендикулярного оси z (рис. 8.5 и 8.6). Запишем это условие

$$\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)\frac{\varphi}{2\pi} = l_0 h_0, \qquad (8.80)$$

где φ — центральный угол для изогнутого листа; l_0 — ширина листа до изгиба.

Из соотношения (8.80), учитывая, что толщина листа при изгибе не изменяется и, следовательно,

$$r_2 - r_1 = h_0, \qquad (8.81)$$

получим

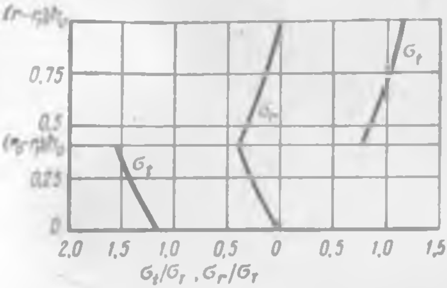


Рис. 8.7. Эпюры изменения напряжений по толщине листа для величины логарифмической деформации в точках внутренней поверхности, равной 40%

$$l_0 = \frac{(r_2 + r_1)\varphi}{2} = \frac{(2r_1 + h_0)\varphi}{2}. \qquad (8.82)$$

Окружная деформация в точках внутренней поверхности

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{r_1\varphi - l_0}{l_0} = \frac{r_1\varphi}{l_0} - 1.$$

Используя формулу (8.82), получим

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{1}{1 + \frac{h_0}{2r_1}} - 1.$$

Логарифмическая окружная деформация в этих точках

$$\bar{\varepsilon}_{t_1} = \ln(\varepsilon_{t_1} + 1) = \ln\frac{1}{1 + \frac{h_0}{2r_1}}.$$

Из этого выражения устанавливаем, что

$$r_1 = \frac{h}{2}\,\frac{\exp\bar{\varepsilon}_{t_1}}{1 - \exp\bar{\varepsilon}_{t_1}}. \qquad (8.83)$$

Задаваясь величиной логарифмической деформации в точках внутренней поверхности, по формуле (8.83) вычисляем внутренний радиус листа r_1. Наружный радиус определяем из соотношения (8.81), а радиус граничной поверхности по формуле (8.75). Напряжения подсчитываем по формулам (8.73) и (8.74).

На рис. 8.7 изображены эпюры изменения напряжений по толщине листа для логарифмической деформации в точках внутренней поверхности, равной 40%.

С учетом упрочнения материала по теории течения эта задача решена в работе [17], а по теории упруго-пластических деформаций в статье [8]. Большие деформации при пластическом изгибе полосы по теории течения без учета упрочнения рассмотрены в статье [6], а с учетом упрочнения в работе [7]. Пластический изгиб листа и полосы из ортотропного материала при больших деформациях исследован в статьях [18], [19].

§ 49. Деформирование цилиндрических труб в конических матрицах

Представим себе, что тонкостенная труба протягивается или проталкивается осевой силой через матрицу, так что радиус ее или увеличивается или уменьшается. В зависимости от схемы нагружения будем называть эти операции волочением, обжатием, протяжкой и раздачей.

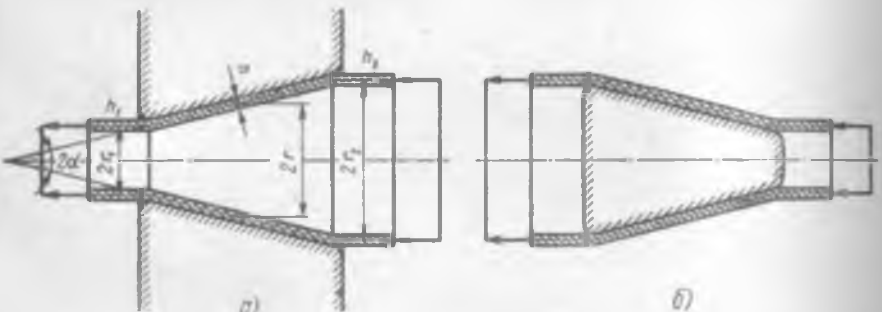


Рис. 8.8. Схемы волочения, обжатия, протяжки и раздачи

На рис. 8.8, *а* и 8.8, *б* при приложении сил слева изображены соответственно схемы волочения и протяжки, а при приложении сил справа — обжатия и раздачи.

Так же, как и в предыдущей задаче, примем, что материал идеально жестко-пластический. Диаграмма растяжения такого материала изображена на рис. 5.17. Допустим, что матрица имеет коническую форму и является жесткой. Пренебрежем изгибающими моментами, возникающими при деформации трубы, т. е. будем решать задачу на основе безмоментной теории оболочек вращения. Решение поставленной задачи дано в работе [9].

Деформация трубы является осесимметричной. Поэтому напряжения, деформации и толщина стенки зависят только от радиуса.

При безмоментном осесимметричном нагружении оболочки вращения напряженное состояние всех точек оболочки плоское, а меридиональное σ_m и окружное σ_t напряжения — главные напряжения.

Уравнения равновесия элемента, вырезанного главными сечениями из осесимметрично нагруженной безмоментной оболочки вращения, имеют вид:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_m rh) - \sigma_t h + \frac{p_m r}{\sin\alpha} = 0; \quad (8.84)$$

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = -\frac{p_v}{h}, \quad (8.85)$$

где ρ_m — радиус кривизны меридионального сечения; ρ_t — радиус кривизны сечения оболочки конической поверхностью, перпендикулярной дуге меридиана; r — радиус окружности в сечении плоскостью, перпендикулярной оси оболочки; h — толщина стенки; p_m — интенсивность распределенной нагрузки в направлении меридиана; p_v — интенсивность распределенной нагрузки в направлении нормали; α — угол между касательной к меридиану и осью оболочки

Для конической матрицы

$$\rho_m = \infty; \quad \rho_t = \frac{r}{\cos\alpha},$$

и из уравнения (8.85), полагая $p_v = p$, получаем формулу, связывающую давление между матрицей и оболочкой и окружное напряжение

$$p = -\frac{\sigma_t h \cos\alpha}{r}. \quad (8.86)$$

Учитывая, что

$$p_m = fp,$$

где f — коэффициент трения, и используя соотношение (8.86), преобразуем уравнение (8.85) к виду

$$r\frac{d\sigma_m}{dr} + \frac{r}{h}\frac{dh}{dr}\sigma_m + \sigma_m - k\sigma_t = 0, \quad (8.87)$$

где

$$k = 1 + f\operatorname{ctg}\alpha.$$

В рассматриваемой задаче приращения деформаций в окружном направлении de_t и в направлении нормали к оболочке de_v связаны с приращением радиуса и толщины соотношениями

$$de_t = \frac{dr}{r}; \quad de_v = \frac{dh}{h}. \quad (8.88)$$

Поэтому уравнение (8.87) может быть записано в следующей форме:

$$r\frac{d\sigma_m}{dr} + \frac{de_v}{de_t}\sigma_m + \sigma_m - k\sigma_t = 0. \quad (8.89)$$

Для жестко-пластического тела приращения деформаций связаны с напряжениями соотношениями (4.20). В рассматриваемом случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_m + \sigma_t}{2}.$$

Тогда из уравнений (4.20) следует

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_m &= \frac{\overline{d\varepsilon_i}}{2\sigma_i}(2\sigma_m - \sigma_t);\\ d\varepsilon_t &= \frac{\overline{d\varepsilon_i}}{2\sigma_i}(2\sigma_t - \sigma_m);\\ d\varepsilon_\nu &= -\frac{\overline{d\varepsilon_i}}{2\sigma_i}(\sigma_m + \sigma_t), \end{aligned}\right\} \tag{8.90}$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_m^2 - \sigma_m\sigma_t + \sigma_t^2} \tag{8.91}$$

— интенсивность напряжений; $\overline{d\varepsilon_i}$ — интенсивность приращений пластических деформаций.

Из выражений (8.90) имеем

$$\frac{d\varepsilon_\nu}{d\varepsilon_i} = -\frac{\sigma_m + \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_m}. \tag{8.92}$$

Поэтому уравнение (8.89) принимает вид

$$r\frac{d\sigma_m}{dr} - \frac{\sigma_m + \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_m}\sigma_m + \sigma_m - k\sigma_t = 0. \tag{8.93}$$

Компоненты напряжения σ_m и σ_t должны также удовлетворять условию пластичности. В рассматриваемом случае согласно формулам (3.18) и (8.91) имеем

$$\sigma_m^2 - \sigma_m\sigma_t + \sigma_t^2 = \sigma_T^2.$$

Для того чтобы удовлетворить этому условию, как и в § 35, введем функцию ψ, через которую напряжения выражаются следующим образом:

$$\sigma_m = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\cos\psi; \quad \sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\cos\left(\psi - \frac{\pi}{3}\right). \tag{8.94}$$

Установим пределы изменения этой величины для различных схем нагружения (рис. 8.8) исходя из знаков меридионального и окружного напряжений.

В случае волочения $\sigma_m > 0$; $\sigma_t < 0$; $\frac{3}{2}\pi \leqslant \psi \leqslant \frac{11}{6}\pi$; для обжатия $\sigma_m < 0$; $\sigma_t < 0$; $\frac{5}{6}\pi \leqslant \psi \leqslant \frac{3}{2}\pi$; при протяжке $\sigma_m > 0$; $\sigma_t > 0$; $-\frac{\pi}{6} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$; для раздачи $\sigma_m < 0$; $\sigma_t > 0$; $\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{5}{6}\pi$.

Подставляя напряжения по формулам (8.94) в уравнение (8.93), выводим дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\,\psi\, d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k)\,\mathrm{tg}\,\psi - \sqrt{3}\,k\,\mathrm{tg}^2\,\psi}. \tag{8.95}$$

Проинтегрируем это уравнение. Тогда получим

$$\frac{r}{r_1} = \exp \int\limits_{\psi_1}^{\psi} \frac{2\,\mathrm{tg}^2\,\psi\, d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k)\,\mathrm{tg}\,\psi - \sqrt{3}\,k\,\mathrm{tg}^2\,\psi}, \tag{8.96}$$

где r_1 — радиус окружности в сечении оболочки плоскостью, перпендикулярной ее оси на входе в матрицу, а ψ — значение функции ψ при $r = r_1$. Последняя величина определяется из граничного условия при $r = r_1$ $\sigma_r = \sigma_{r_1}$, где σ_{r_1} — меридиональное напряжение на входе в матрицу. Следовательно, согласно первой формуле (8.94)

$$\cos \psi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_{r_1}}{\sigma_T}.$$

Уравнение (8.96) устанавливает зависимость функции ψ от безразмерного радиуса $\frac{r}{r_1}$.

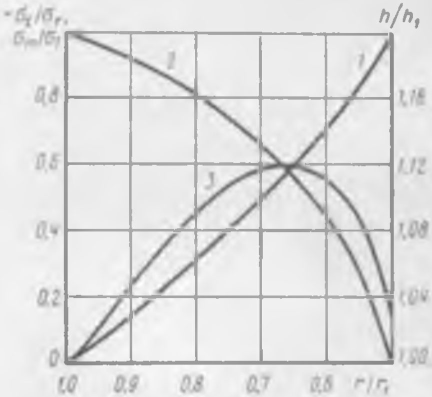


Рис. 8.9. Эпюры меридиональных (кривая *1*) и окружных (кривая *2*) напряжений, а также эпюра толщины стенки (кривая *3*) для случая волочения трубы без противонатяжения ($\alpha = 14°$, $f = 0{,}1$)

Перейдем к определению толщины стенки. Из соотношений (8.88) и (8.92), (8.94) и (8.95) имеем

$$\frac{dh}{h} = -\frac{\mathrm{tg}\,\psi\,(\mathrm{tg}\,\psi + \sqrt{3})\, d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k)\,\mathrm{tg}\,\psi - \sqrt{3}\,k\,\mathrm{tg}^2\,\psi}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{h}{h_1} = \exp\left[-\int\limits_{\psi_1}^{\psi} \frac{\mathrm{tg}\,\psi\,(\mathrm{tg}\,\psi + \sqrt{3})\, d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k)\,\mathrm{tg}\,\psi - \sqrt{3}\,k\,\mathrm{tg}^2\,\psi}\right]. \tag{8.97}$$

Выведенное уравнение связывает изменение толщины с функцией ψ.

Интегралы (8.96) и (8.97) выражаются через элементарные функции. Однако проще вычислять эти интегралы численно.

Напряжения в зависимости от величины ψ определяем по формулам (8.94).

На рис. 8.9 представлены эпюры изменения меридиональных и окружных напряжений, а также эпюра изменения толщины стенки, построенные по формулам (8.94)—(8.97) для случая волочения без противонатяжения. Как следует из эпюры, окружное напряжение обращается в ноль при $\frac{r}{r_1} = 0{,}5$. Это значение радиуса является наименьшим из всех возможных радиусов окружности в сечении оболочки плоскостью, перпендикулярной ее оси при выходе из матриц. Оно характеризует наиболее возможную в рассматриваемом случае степень обжатия трубы.

В работе [1] приведено решение этой задачи для жесткоупрочняющегося материала. При этом использован критерий Хубера—Мизеса. В статье [2] дано решение этой же задачи с использованием критерия Треска—Сен-Венана. В статье [3] исследовано волочение тонкостенных ортотропных труб через коническую матрицу.

Список литературы

1. **Бубнова Л. В., Малинин Н. Н.** Напряжения и деформации при формоизменении тонкостенных труб. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1965, № 10, с. 199—203.
2. **Бубнова Л. В.** Расчет формоизменения тонкостенных труб. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1965, № 11, с. 139—142.
3. **Геогджаев В. О.** Волочение тонкостенных анизотропных труб сквозь коническую матрицу. — «Прикладная механика», 1968, т. IV, в. 2, с. 79—83.
4. **Гоффман О., Закс Г.** Введение в теорию пластичности для инженеров. М., Машгиз, 1957, 279 с.
5. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969, 420 с.
6. **Малинин Н. Н.** Большие деформации полосы при пластическом изгибе. — «Известия АН СССР. Механика», 1965, № 2, с. 120—123.
7. **Малинин Н. Н., Ширшов А. А.** Исследование больших деформаций при пластическом изгибе полосы с учетом упрочнения. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1965, № 2, с. 165—172.
8. **Малинин Н. Н., Ширшов А. А.** Пластический изгиб листа при больших деформациях. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1965, № 8, с. 187—192.
9. **Малинин Н. Н.** Волочение труб через конические матрицы. — «Известия АН СССР. Механика», 1965, № 5, с. 122—124.
10. **Прагер В., Ходж Ф. Г.** Теория идеально-пластических тел. М., Изд. иностр. лит., 1956, 398 с.
11. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. I, М., Машгиз, 1956, 884 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.
12. **Смирнов-Аляев Г. А.** Механические основы пластической обработки металлов. М.—Л., «Машиностроение», 1968, 271 с.
13. **Сторожев М. В., Попов Е. А.** Теория обработки металлов давлением. М., «Машиностроение», 1971, 424 с.
14. **Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш.** Механика пластических деформаций при обработке металлов. М., «Машиностроение», 1969, 503 с.
15. **Унксов Е. П.** Инженерная теория пластичности. М., Машгиз, 1959, 328 с.
16. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956, 407 с.
17. **Ширшов А. А.** Исследование пластического изгиба листа с учетом упрочнения. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1965, № 7, с. 168—174.

18. **Ширшов А. А.** Пластический изгиб листа из анизотропного материала при больших деформациях. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1969, № 10, с. 148—152.

19. **Ширшов А. А.** Пластический изгиб полосы из анизотропного материала при больших деформациях. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1970, № 2, с. 172—177.

20. **Hodge P. G., White G. N.** A quantative comparison of flow and deformation theories of plasticity. — «Journal of applied mechanics», 1950, Vol. 17, No 2, p. 180—184.

21. **Johnson W., Mellor P. B.** Plasticity for mechanical engineers, D. Van Nostrand Company LTD, 1962 412 p.

22. **Marciniak Z.** Mechanika procesów tłoczenia blach. Państwowe wydawnictwo naukowo techniczne, 1961, 271 s.

23. **Szczepinski W.,** Wstęp do analizy procesów obrobki plastycznej, Państwowe wydawnictwo naukowe, 1967, 319 s.

24. **Theoria plastycznosti**, Państwowe wydawnictwo naukowe, 1965, 399 s. Aut.: Z. Marciniak, Z. Mroz, W. Olszak i inni

ГЛАВА IX

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

§ 50. Основные уравнения

Представим себе, что тело, размеры которого в направлении оси z значительны, нагружено уравновешенной системой сил, приложенных к боковой поверхности и не изменяющихся по длине тела (рис. 9.1). В таком случае напряжения, перемещения и деформации не зависят от координаты z. Сечения тела, перпендикулярные оси z, при его деформации не искривляются. Они могут перемещаться поступательно как жесткие плоскости вдоль оси z. Примем, что эти перемещения равны нулю

$$u_z = 0. \tag{9.1}$$

Поскольку сечения, перпендикулярные оси z, не искривляются, касательные напряжения в этих сечениях равны нулю, т. е.

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \tag{9.2}$$

и, следовательно, эти сечения являются главными.

Рассматриваемую деформацию тела называют плоской.

Предположим, что тело несжимаемо. Используем схему идеального жестко-пластического тела, диаграмма деформирования которого изображена на рис. 5.17.

Решение упруго-пластических задач плоской деформации связано со значительными трудностями. Простейшая упруго-пластическая задача плоской деформации — задача расчета толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и осевой силой, была рассмотрена в § 32 и 47.

Решение жестко-пластических задач плоской деформации имеет большое практическое значение для исследования технологических операций, таких как прокатка, волочение, прессование, а также для определения предельных нагрузок при указанном выше нагружении тел.

При использовании диаграммы деформирования, изображенной на рис. 5.17, в теле наряду с пластическими областями ($\sigma_i = \sigma_T$) возможно возникновение жестких областей ($\sigma_i < \sigma_T$).

Из соотношений (2.1) и (9.1) следует, что в рассматриваемом случае

$$\varepsilon_z = 0. \tag{9.3}$$

Поэтому как по теории упруго-пластических деформаций [см. формулы (4.27)], так и по теории течения [см. формулы (4.24)] для несжимаемого тела имеем $\sigma_z = \sigma_0$ и, следовательно, согласно формуле (1.5)

$$\sigma_z = \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \tag{9.4}$$

Подставляя эту величину в условие пластичности (3.18) и используя соотношения (1.19), (9.2) и (9.4), получаем

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 2\tau_T, \tag{9.5}$$

где $\tau_T = \dfrac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$ — предел текучести при чистом сдвиге.

Два первых дифференциальных уравнения равновесия (1.3) при отсутствии объемных сил с использованием соотношений (9.2) приводятся к виду

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0. \tag{9.6}$$

Третье дифференциальное уравнение равновесия (1.3) удовлетворяется тождественно.

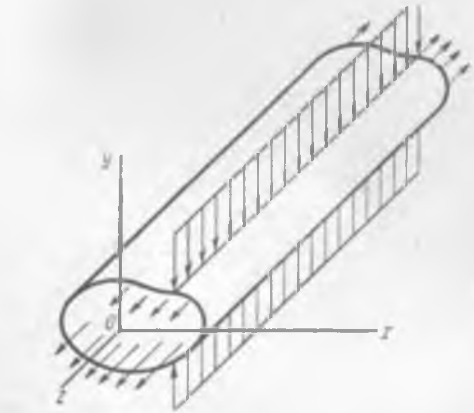


Рис. 9.1. Нагружение тела в условиях плоской деформации

Если на границе тела заданы напряжения, то три уравнения (9.5) и (9.6) позволяют определить компоненты напряжения независимо от деформаций (если использовать теорию упруго-пластических деформаций) или скоростей деформаций (если использовать теорию течения). Такие задачи называют статически определимыми. Статическая определимость напряжений является в некоторой степени условной, поскольку для определения напряжений к уравнениям равновесия необходимо присоединить условие пластичности.

После определения компонентов напряжений могут быть найдены деформации или скорости деформаций. В дальнейшем, как это обычно принято [8], будем говорить об определении скоростей деформаций равновесия или скоростей перемещений.

Использование понятий скоростей деформаций и скоростей перемещений не означает учета фактора времени в развитии пластических деформаций. Это просто удобная запись, позволяющая избежать использования понятий приращений деформаций в случае применения теории течения.

Из соотношений (4.24), (2.38), (4.33) и (9.3) выводим два дифференциальных уравнения относительно скоростей перемещения v_x и v_y.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial y}-\dfrac{\partial v_x}{\partial x}}{\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial x}}=\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2\tau_{xy}};\\ &\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \end{aligned}\right| \tag{9.7}$$

Первое из этих уравнений является условием пропорциональности девиаторов скорости деформации и напряжения и условием совпадения направлений главных скоростей деформации и напряжений, а второе условием несжимаемости тела.

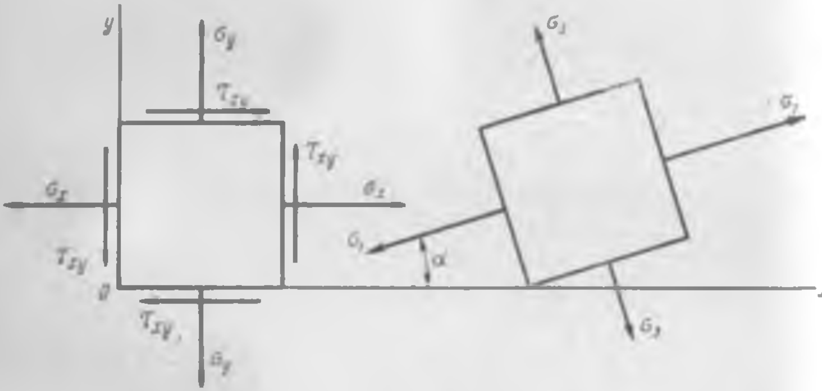


Рис. 9.2. Исходные и главные площадки в условиях плоской деформации

Интегрируя уравнения (9.7), можно определить скорости перемещений.

Если на всей или на части границы тела заданы не напряжения, а скорости перемещения, то задача определения напряжений не является статически определимой. В этом случае напряжения и скорости перемещения определяют путем совместного решения уравнений (9.5)—(9.7).

Рассмотрим некоторые особенности напряженного состояния, возникающего в случае плоской деформации тела при $\varepsilon_z = 0$.

Как отмечалось выше, сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси z, является главной площадкой. Поэтому в рассматриваемой задаче положение одной главной площадки известно. В таком случае положение двух других главных площадок, параллельных оси z, определяется формулой [19]

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \tag{9.8}$$

где α — угол между главной осью 1 и осью x (рис. 9.2).

Выражения для главных напряжений имеют вид

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \tag{9.9}$$

причем, учитывая соотношение (9.4), заключаем, что знак плюс в этой формуле определяет наибольшее σ_1, а знак минус — наименьшее σ_3 главные напряжения.

Из формулы (9.9) следует, что наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \tag{9.10}$$

Таким образом, согласно соотношениям (9.9), (9.4) и (9.10)

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \tau_{max}, \; \sigma_2 = \sigma_0, \; \sigma_3 = \sigma_0 - \tau_{max}. \tag{9.11}$$

Следовательно, напряженное состояние в условиях плоской деформации можно рассматривать как результат наложения всестороннего равного растяжения с напряжением σ_0 на чистый сдвиг с касательным напряжением τ_{max} (рис. 9.3).

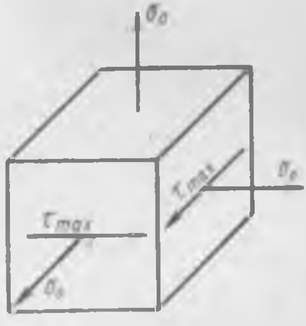


Рис. 9.3. Напряженное состояние в условиях плоской деформации

§ 51. Линии скольжения

Площадки действия максимальных касательных напряжений, проходящие через ось z, делят пополам углы между главными площадками, в которых возникают наибольшее σ_1 и наименьшее σ_3 главные напряжения. Назовем *линиями скольжения — линии, касающиеся всеми своими точками площадок максимальных касательных напряжений*. Очевидно, что имеются два ортогональных семейства линий скольжения, лежащих в плоскости xy. Понятие линий скольжения не связано только с задачей плоской деформации. Примером линий скольжения являются линии Чернова, которые можно наблюдать на поверхности плоского полированного образца при его растяжении за пределами упругости. Линии Чернова наклонены под углом 45° к оси образца, так как в площадках под углом 45° к оси возникают наибольшие касательные напряжения.

Обозначим два взаимно-ортогональных семейства линий скольжения через a и b (рис. 9.4). Если угол наклона касательной к одной из линий скольжения семейства a в некоторой точке равен φ, то тогда угол наклона касательной к линии скольжения семейства b в той же точке равен $\varphi + \frac{\pi}{2}$ (рис. 9.4).

Дифференциальные уравнения семейств линий скольжения a и b имеют соответственно вид:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\varphi. \tag{9.12}$$

Поскольку напряженное состояние в условиях плоской деформации можно рассматривать как наложение всестороннего равного растяжения с главными напряжениями σ_0 на чистый сдвиг с касательным напряжением τ_{max}, бесконечно малый элемент, выделенный линиями скольжения, испытывает одинаковое растяжение в направлении линий скольжения (рис. 9.5).

Выразим компоненты напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} в некоторой точке через тригонометрические функции угла φ наклона касательной к линии скольжения, проходящей через эту точку.

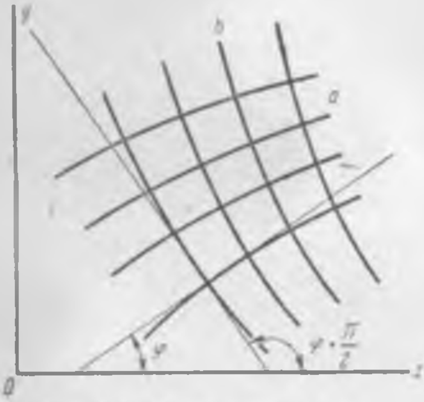


Рис. 9.4. Линии скольжения

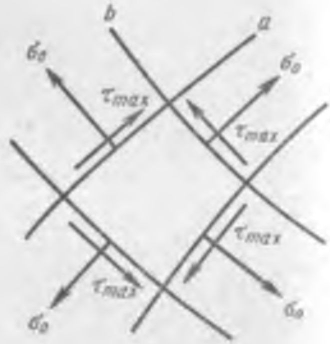


Рис. 9.5. Напряженное состояние элемента, выделенного линиями скольжения

Для этого вначале вспомним зависимости компонентов напряжений в площадках, проходящих через ось z, от главных напряжений σ_1 и σ_3 [19]:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\alpha;\\ \sigma_y &= \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\alpha;\\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\alpha,\end{aligned}\right| \qquad (9.13)$$

где α — угол наклона к оси x нормали к площадке, в которой возникает главное напряжение σ_1 (рис. 9.6).

Так как

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_z,$$

то по формуле (9.4)

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}. \qquad (9.14)$$

Далее из соотношений (9.10) и (9.5) заключаем

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_T. \tag{9.15}$$

Поскольку площадки действия максимальных касательных напряжений делят пополам углы между главными площадками (рис. 9.6), то

$$\varphi = \alpha + \frac{\pi}{4}. \tag{9.16}$$

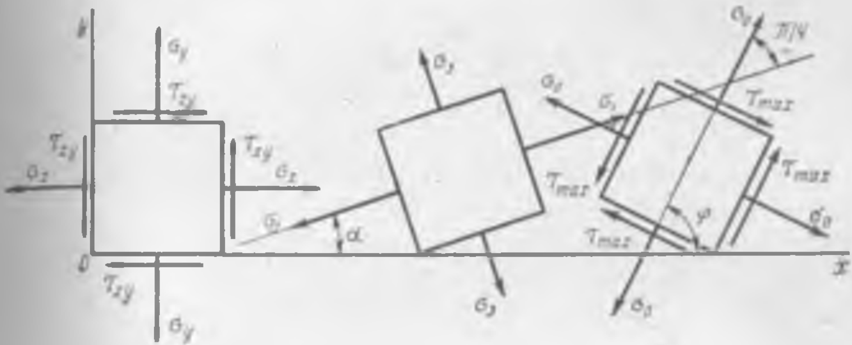


Рис. 9.6. Напряжения в различных площадках в условиях плоской деформации

Преобразуем формулы (9.13), используя соотношения (9.14)—(9.16). Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + \tau_T \sin 2\varphi; \\ \sigma_y &= \sigma_0 - \tau_T \sin 2\varphi; \\ \tau_{xy} &= -\tau_T \cos 2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

Подставив эти соотношения в условие пластичности (9.5), можно убедиться, что последнее тождественно удовлетворяется.

Таким образом, для определения напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} по формулам (9.17) необходимо знать две величины σ_0 и φ.

Внося соотношения (9.17) в уравнения равновесия (9.6), получаем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для функций σ_0 и φ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} + 2\tau_T \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0; \\ \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} + 2\tau_T \left(\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

Поскольку в этой системе частные производные только в первой степени, ее называют квазилинейной.

Докажем, что система уравнений (9.18) является гиперболической [15]. Для этого возьмем в плоскости x и y некоторую кривую, вдоль которой будем считать функции σ_0 и φ известными. Тогда

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_0 &= \frac{\partial\sigma_0}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_0}{\partial y}dy; \\ d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy. \end{aligned}\right| \tag{9.19}$$

Уравнения (9.18) и (9.19) являются системой четырех линейных алгебраических уравнений относительно частных производных $\frac{\partial\sigma_0}{\partial x}$, $\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Решение этой системы может быть представлено в форме определителей. Частные производные определяются единственным образом всегда, кроме случая, когда вдоль рассматриваемой линии определитель системы равен нулю. Такие линии называют характеристиками системы дифференциальных уравнений [15].

Уравнения характеристик имеют вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\tau_T\cos 2\varphi & 2\tau_T\sin 2\varphi \\ 0 & 1 & 2\tau_T\sin 2\varphi & -2\tau_T\cos 2\varphi \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\operatorname{ctg}2\varphi\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\varphi. \tag{9.20}$$

Как известно [15], если:

1) два корня уравнения действительны и различны, систему уравнений называют гиперболической;

2) два корня уравнения одинаковы — параболической,

3) оба корня уравнения комплексные — эллиптической.

Таким образом, система уравнений (9.18) является гиперболической и, как следует из сопоставления уравнений (9.12) и (9.20), характеристики совпадают с линиями скольжения.

Если координатные оси s_a и s_b в каждой точке будут направлены по касательным к линиям скольжения (рис. 9.7), то, полагая в дифференциальных уравнениях (9.18) $\varphi = 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial s_a}(\sigma_0 + 2\tau_T\varphi) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial s_b}(\sigma_0 - 2\tau_T\varphi) = 0.$$

Можно показать, что эти уравнения являются дифференциальными уравнениями равновесия элемента, вырезанного линиями скольжения. Интегрируя их, получаем

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{\tau_T}+\varphi=\xi;\\ \frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{\tau_T}-\varphi=\eta,\end{aligned}\right| \tag{9.21}$$

где ξ и η — постоянные вдоль линий скольжения соответственно a и b величины. При переходе от одной линии скольжения a (или b) к другой параметр ξ (или η) изменяется.

Решая уравнения (9.21) относительно σ_0 и φ, устанавливаем

$$\left.\begin{aligned}\sigma_0=\tau_T(\xi+\eta),\\ \varphi=\frac{1}{2}(\xi-\eta).\end{aligned}\right\} \tag{9.22}$$

Последние уравнения позволяют по известным величинам ξ и η определить σ_0 и φ, а затем при помощи формул (9.17) компоненты напряжения.

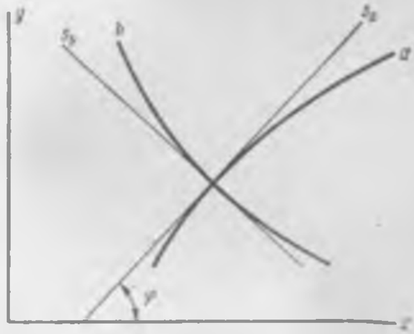


Рис. 9.7. Система координат s_a, s_b, оси которой направлены по касательным к линиям скольжения

§ 52. Линеаризация основной системы дифференциальных уравнений

Основная система дифференциальных уравнений (9.18) может быть линеаризована. Для этого примем за неизвестные функции параметры ξ и η. Подставим выражения (9.22) в уравнения (9.18). Тогда получим

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial x}+\cos 2\varphi\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\sin 2\varphi\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0;$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\sin 2\varphi\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)-\cos 2\varphi\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0.$$

Умножим вначале второе уравнение на $\operatorname{tg}\varphi$ и сложим с первым, а затем умножим второе уравнение на $-\operatorname{ctg}\varphi$ и сложим с первым. После преобразований устанавливаем

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\xi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}-\operatorname{ctg}\varphi\frac{\partial\eta}{\partial y}=0. \tag{9.23}$$

Таким образом получена система однородных квазилинейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой являются функциями только ξ и η.

Такая система путем обращения переменных может быть приведена к линейной системе [15]. Поэтому ее называют приводимой.

Для доказательства заметим, что

$$x=x(\xi,\eta),\quad y=y(\xi,\eta).$$

Дифференцируя эти выражения сначала по x, а потом по y, устанавливаем

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x};\\
0 &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y};\\
0 &= \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x};\\
1 &= \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.24)$$

Полученную сумму уравнений можно рассматривать как систему четырех алгебраических уравнений относительно частных производных $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$. Решая ее, получаем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial y};\\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial x},
\end{aligned}\right\} \qquad (9.25)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (9.26)$$

— определитель системы алгебраических уравнений (9.24), который называют якобианом преобразования системы дифференциальных уравнений (9.23).

Внося частные производные (9.25) в дифференциальные уравнения (9.23), получаем следующую линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial \xi} + \operatorname{ctg}\varphi\,\frac{\partial x}{\partial \xi} &= 0;\\
\frac{\partial y}{\partial \eta} - \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial x}{\partial \eta} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.27)$$

Эту систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами называют канонической. В каждом из уравнений содержатся производные только по одному аргументу.

Система дифференциальных уравнений (9.27) не эквивалентна системе (9.23), так как при выводе ее было произведено сокращение на якобиан Δ и, следовательно, потеряны решения, обращающие якобиан в нуль.

Найдем эти решения. Из уравнений (9.23) следует

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\operatorname{ctg}\varphi\,\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Подставляя эти величины в выражение (9.26), получим

$$\Delta = \frac{2}{\sin 2\varphi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{2}{\sin 2\varphi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Следовательно, якобиан обращается в нуль в трех случаях: 1) $\xi = \mathrm{const}$; $\eta = \mathrm{const}$; 2) $\xi = \mathrm{const}$; 3) $\eta = \mathrm{const}$. В первом случае имеет место так называемое равномерное поле напряжений, а в двух других простые поля. Эти поля напряжений будут рассмотрены ниже.

Решение системы линейных дифференциальных уравнений (9.27) проще, чем решение системы квазилинейных дифференциальных уравнений (9.18). В этом заключается практическое значение линеаризации этой системы. Решение линейной системы дифференциальных уравнений (9.27) разработано в книгах [8, 17, 32].

В дальнейшем будут рассмотрены иные методы решения задач плоской деформации, основанные на переходе от дифференциальных уравнений к конечно разностным соотношениям и на некоторых свойствах линий скольжения.

Независимо от используемых методов для решения задач необходимо располагать величинами σ_0 и φ на поверхности тела. Определение их рассмотрено в следующем параграфе.

§ 53. Граничные условия для напряжений

Предположим, что линия C (рис. 9.8) — линия пересечения поверхности тела с плоскостью xy. Обозначим угол наклона нормали ν к ней с осью x через ψ. Будем считать нормальное σ_ν и касательное $\tau_{\nu t}$ напряжения на поверхности известными. Установим условия, которым должны удовлетворять на поверхности величины σ_0 и φ.

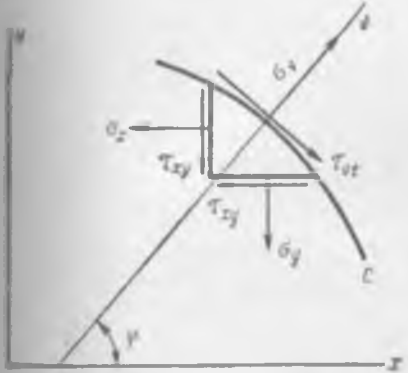


Рис. 9.8. Напряженное состояние элемента у поверхности тела

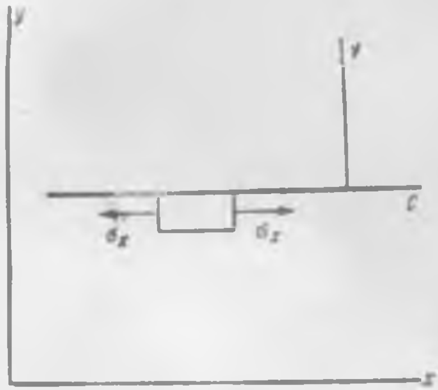


Рис. 9.9. Напряженное состояние элемента у граничной плоскости, свободной от напряжений

Нормальное и касательное напряжения на поверхности связаны с напряжениями в площадках, перпендикулярных осям x и y, следующими соотношениями [19]:

$$\sigma_\nu = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\psi + \tau_{xy}\sin 2\psi;$$

$$\tau_{\nu t} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\psi - \tau_{xy}\cos 2\psi.$$

Подставим в эти зависимости выражения (9.17). Тогда после преобразований получим

$$\sigma_\nu = \sigma_0 + \tau_T \sin 2(\varphi - \psi);$$
$$\tau_{\nu t} = \tau_T \cos 2(\varphi - \psi),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\sigma_0 &= \sigma_\nu - \tau_T \sin 2(\varphi - \psi);\\ \varphi &= \psi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{\tau_{\nu t}}{\tau_T} + k\pi,\end{aligned}\right\} \qquad (9.28)$$

где k — целое число.

Обозначим проекции вектора скорости на направления координатных осей s_a и s_b через v_a и v_b (рис. 9.16).

Очевидно, что

$$v_x = v_a \cos\varphi - v_b \sin\varphi; \quad v_y = v_a \sin\varphi + v_b \cos\varphi.$$

Подставим эти соотношения в уравнения (9.31). При этом учтем, что

$$x = x(s_a, s_b); \quad y = y(s_a, s_b)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial s_a}(\quad) = \frac{\partial}{\partial x}(\quad)\frac{\partial x}{\partial s_a} + \frac{\partial}{\partial y}(\quad)\frac{\partial y}{\partial s_a};$$

$$\frac{\partial}{\partial s_b}(\quad) = \frac{\partial}{\partial x}(\quad)\frac{\partial x}{\partial s_b} + \frac{\partial}{\partial y}(\quad)\frac{\partial y}{\partial s_b},$$

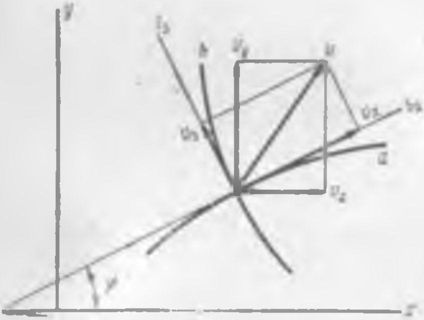


Рис. 9.16. Разложение вектора скорости перемещения по направлениям, параллельным осям x и y, и по направлениям, касательным к линиям скольжения

причем

$$\frac{\partial x}{\partial s_a} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial s_a} = \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial s_b} = -\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial s_b} = \cos\varphi.$$

Тогда имеем

$$\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}(\quad) + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}(\quad) = \frac{\partial}{\partial s_a}(\quad),$$

$$-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}(\quad) + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}(\quad) = \frac{\partial}{\partial s_b}(\quad).$$

После преобразований получим

$$\left(\frac{\partial v_a}{\partial s_a} - v_b\frac{\partial\varphi}{\partial s_a}\right) - \left(\frac{\partial v_b}{\partial s_b} + v_a\frac{\partial\varphi}{\partial s_b}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial v_a}{\partial s_a} - v_b\frac{\partial\varphi}{\partial s_a}\right) + \left(\frac{\partial v_b}{\partial s_b} + v_a\frac{\partial\varphi}{\partial s_b}\right) = 0.$$

Складывая и вычитая эти выражения, устанавливаем

$$\frac{\partial v_a}{\partial s_a} - v_b\frac{\partial\varphi}{\partial s_a} = 0;$$

$$\frac{\partial v_b}{\partial s_b} + v_a\frac{\partial\varphi}{\partial s_b} = 0.$$

Таким образом, вдоль линии скольжения a

$$dv_a - v_b\,d\varphi_a = 0, \tag{9.32}$$

а вдоль линии скольжения b

$$dv_b + v_a \, d\varphi_b = 0. \qquad (9.33)$$

Эти уравнения были получены Гейрингер. Из них следует, что изменение полной скорости вдоль линий скольжения равно нулю, т. е. *относительная скорость течения вдоль линии скольжения равна нулю* (рис. 9.17).

Перейдем к рассмотрению полей скоростей, соответствующих простым полям напряжений. В простых полях напряжений линии скольжения одного семейства прямые (см. рис. 9.11). Следовательно, согласно формуле (9.32) составляющая скорости, направленная по прямой линии скольжения, постоянна.

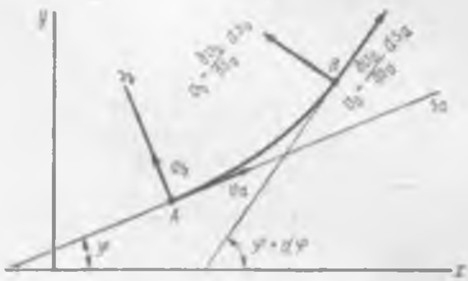


Рис. 9.17. К выводу уравнений Гейрингер

В случае центрированного поля (см. рис. 9.12), если радиальные прямые принять за линии скольжения b, то тогда вдоль них скорость перемещения v_b постоянна, т. е. скорость v_b является функцией только φ. Примем, что

$$v_b = \psi' (\varphi), \qquad (9.34)$$

где $\psi (\varphi)$ — некоторая функция φ. Тогда, как следует из формулы (9.31),

$$v_a = \psi (\varphi) + \chi (r), \qquad (9.35)$$

где $\chi (r)$ — функция r.

Очевидно, что в частном случае равномерного поля напряжений (рис. 9.13) скорости перемещений в направлении линий скольжения вдоль этих линий не изменяются.

§ 57. Линии разрыва

В ряде случаев решения задач плоской деформации невозможно построить без разрывов в величинах напряжений (скоростей перемещений) или их производных. В первом случае разрывы называют сильными, во втором слабыми. Простейшим, известным из курса сопротивления материалов, примером разрыва в величине напряжения является разрыв нормального напряжения в предельном состоянии изогнутой балки. При переходе через нейтральную плоскость оно изменяется скачком от $+\sigma_T$ до $-\sigma_T$.

Рассмотрим вначале разрывы в напряжениях. Пусть L_a — линия разрыва в напряжениях (рис. 9.18). Нормальные σ_t и σ_ν и касательное $\tau_{\nu t}$ напряжения на гранях элемента, одна из сторон которого перпендикулярна линии разрыва, с разных сторон этой линии будем отличать знаками + и —. Из условия равновесия элемента следует, что $\sigma_\nu^+ = \sigma_\nu^-$, $\tau_{\nu t}^+ = \tau_{\nu t}^-$ и разрыв возможен только для напряжения σ_l. Условие пластичности (9.5), справедливое по обе стороны от линии разрыва L_σ, в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sqrt{(\sigma_l - \sigma_\nu)^2 + 4\tau_{\nu l}^2} = 2\tau_T,$$

откуда

$$\sigma_l = \sigma_\nu \pm 2\sqrt{\tau_T^2 - \tau_{\nu l}^2}.$$

В этой формуле напряжения σ_l по обе стороны от линии разрыва определяются двумя знаками. Следовательно, скачок в величине напряжения σ_l

$$[\sigma_l] = 4\sqrt{\tau_T^2 - \tau_{\nu l}^2}. \quad (9.36)$$

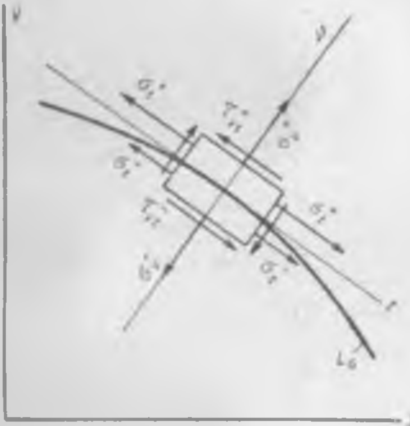


Рис. 9.18. Нормальные и касательные напряжения по обе стороны от линии разрыва напряжений

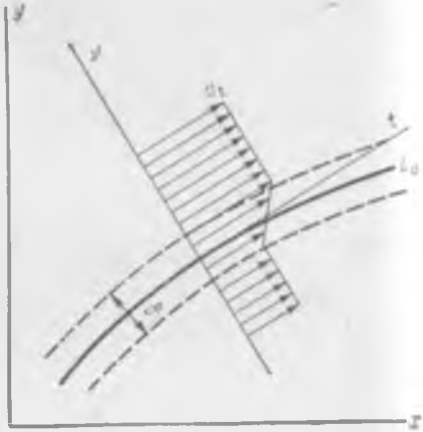


Рис. 9.19. Изменение составляющей скорости в направлении линии разрыва скоростей в ее окрестности

Скачок в величине среднего нормального напряжения

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_\nu + \sigma_l}{2}$$

равен

$$[\sigma_0] = 2\sqrt{\tau_T^2 - \tau_{\nu l}^2}.$$

Напомним, что касательное напряжение на линии скольжения максимально и по формулам (9.5) и (9.10)

$$\tau_{max} = \tau_T;$$

поэтому согласно формуле (9.36) линия разрыва в напряжениях не может совпадать с линией скольжения или с огибающей линий скольжения.

Линию разрыва можно рассматривать как след бесконечно тонкого слоя (предельное положение упругой области), разделяющего две пластические области. Это следует из того, что нормальное σ_ν и касательное $\tau_{\nu l}$ напряжения в тонком слое в окрестности линии разрыва почти не изменяются, а нормальное напряжение σ_l по толщине слоя изменяется очень резко, и поэтому условие пластичности в тонком слое не может выполняться. Учитывая, что в рассматриваемой теории используется схема жестко-пластического тела, в котором упругими деформациями по сравнению с пластическими пренебрегаем, заключаем, что линия разрыва напряжений в процессе деформации не изменяет длины.

Рассмотрим теперь разрывы в скоростях перемещений. Предположим, что линия L_v (рис. 9.19) является линией разрыва в скоростях перемещений. Очевидно, что разрыв может быть только в составляющей скорости v_l, касательной к линии разрыва L_v, так как разрыв в составляющей v_ν, нормальной к линии разрыва, означает появление трещины в материале.

Линию разрыва в скоростях перемещений можно представить как предельное положение слоя, в котором составляющая скорости v_l резко изменяется по толщине слоя, а нормальная постоянна.

Зависимости скоростей деформаций от скоростей перемещений согласно формулам (2.38) в рассматриваемом случае имеют вид

$$\xi_\nu = \frac{\partial v_\nu}{\partial \nu}; \quad \xi_l = \frac{\partial v_l}{\partial l}; \quad \eta_{\nu l} = \frac{\partial v_\nu}{\partial l} + \frac{\partial v_l}{\partial \nu}.$$

Из этих соотношений следует, что с уменьшением толщины слоя δ (рис. 9.19) скорость деформации сдвига будет непрерывно возрастать, а остальные компоненты скоростей деформации почти не изменяются.

Зависимости скоростей деформаций от напряжений при отсутствии упрочнения ($\sigma_i = \sigma_T$) в соответствии с формулами (4.24) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi_\nu}{\xi_i} = \frac{3}{2}\frac{\sigma_\nu - \sigma_0}{\sigma_T}; \quad \frac{\xi_l}{\xi_i} = \frac{3}{2}\frac{\sigma_l - \sigma_0}{\sigma_T}; \\ \frac{\eta_{\nu l}}{\xi_i} = 3\frac{\tau_{\nu l}}{\sigma_T}, \end{aligned}\right\} \tag{9.37}$$

где согласно формуле (2.40) для случая плоской деформации несжимаемого материала ($\xi_z = 0$, $\xi_\nu = -\xi_l$) интенсивность скоростей деформаций

$$\xi_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\xi_l^2 + \frac{1}{4}\eta_{\nu l}^2}.$$

Из последней формулы следует, что с уменьшением толщины слоя δ интенсивность скоростей деформаций непрерывно возрастает за счет возрастания скорости угловой деформации. Поэтому на основании формул (9.37) заключаем, что с уменьшением толщины слоя δ напряжения σ_ν и σ_l стремятся к σ_0, а $\tau_{\nu l}$ к τ_T, что характерно для площадок, совпадающих с линиями скольжения и перпендикулярных им. Поэтому линия разрыва скоростей перемещений совпадает с линией скольжения или с огибающей линий скольжения.

Из уравнений Гейрингер (9.32) и (9.33), учитывая непрерывность нормальной к линии разрыва скорости перемещения v_ν, заключаем, что скачок в величине скорости перемещения направленной по касательной к линии разрыва v_t, постоянен вдоль линии разрыва: $d\,[v_t] = 0$.

§ 58. Толстостенная труба, нагруженная внутренним давлением

Упруго-пластическое состояние толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и осевой силой при отсутствии упрочнения, было рассмотрено в § 32 и 47. В конце § 32 была установлена величина предельного давления и выведены формулы для напряжений в пре-

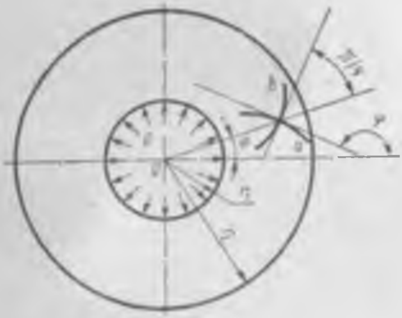


Рис. 9.20. Направление линий скольжения в толстостенной трубе, нагруженной внутренним давлением

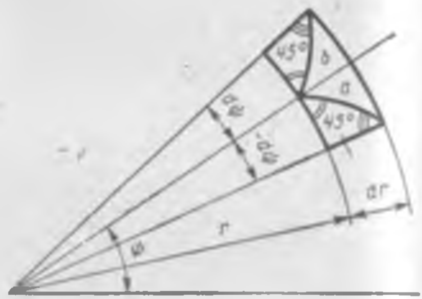


Рис. 9.21. К выводу уравнений линий скольжения в толстостенной трубе, нагруженной внутренним давлением

дельном состоянии. Получим теперь эти формулы, используя теорию линий скольжения. Поскольку окружное и радиальное напряжения являются главными напряжениями, линии скольжения пересекают радиальную линию (рис. 9.20) под углами $\frac{\pi}{4}$ и

$$\varphi = \psi + \frac{3}{4}\pi. \tag{9.38}$$

Из рис. 9.21 для бесконечно малого элемента имеем

$$dr = \pm r d\psi,$$

причем знак + относится к линии скольжения b, а знак — к линии скольжения a.

Интегрируя это соотношение, получаем уравнение двух семейств линий скольжения

$$r = A \exp(\pm\psi), \tag{9.39}$$

которые являются логарифмическими спиралями (рис. 9.22).

В рассматриваемой задаче согласно формуле (9.4)

$$\sigma_0 = \sigma_z = \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}. \tag{9.40}$$

Из соотношений (9.21), (9.40), (9.38) и (9.39) получаем

$$\sigma_t + \sigma_r = 4\tau_T\left(\eta + \frac{3}{4}\pi + \ln\frac{r}{A}\right). \qquad (9.41)$$

Согласно формуле (9.5) имеем

$$\sigma_t - \sigma_r = 2\tau_T. \qquad (9.42)$$

Из уравнений (9.41) и (9.42) устанавливаем величину радиального напряжения

$$\sigma_r = 2\tau_T\left(\eta + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2} + \ln\frac{r}{A}\right). \qquad (9.43)$$

Параметр η постоянен для определенной линии скольжения. Поскольку напряжения зависят только от радиуса, заключаем, что этот параметр один и тот же для всех линий скольжения. Величину его найдем из очевидного краевого условия при $r = r_1$ $\sigma_r = -p_{пр}$.

Рис. 9.22. Линии скольжения при нагружении толстостенной трубы внутренним давлением

В результате получаем

$$2\tau_T\left(\eta + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) = -p_{пр} - 2\tau_T \ln\frac{r_1}{A}.$$

Подставляя эту величину в уравнение (9.43), устанавливаем

$$\sigma_r = -p_{пр} + 2\tau_T \ln\frac{r}{r_1}. \qquad (9.44)$$

Величину предельного давления $p_{пр}$ находим из второго краевого условия при $r = r_2$, $\sigma_r = 0$, откуда выводим соотношение (6.29). Поэтому выражение (9.44) преобразуется к первой формуле (6.30), а согласно выражениям (9.42) и (9.40) получаем две вторые формулы (6.30). Таким образом, получены формулы для напряжений, совпадающие с формулами, выведенными при рассмотрении предельного состояния толстостенной трубы.

§ 59. Вдавливание плоского штампа

Предположим, что в жестко-пластическое тело, ограниченное плоскостью, вдавливается абсолютно жесткий штамп с плоским основанием (рис. 9.23). Обозначим силу, приходящуюся на единицу длины штампа в направлении, перпендикулярном чертежу (в направлении оси z), через P, а скорость движения штампа v. Пренебрежем силами трения по поверхности контакта.

Рассмотрим вначале решение этой задачи, данное Прандтлем [13]. Очевидно, что пластические области начинают образовываться в точках A и B сразу же после приложения нагрузки к штампу. Однако жесткость тела между двумя местными пластическими областями в окрестностях точек A и B вначале исключает вдавливание штампа. Последнее будет появляться только после того, как нагрузка на штамп достигнет значения, необходимого для создания развитой пластической области вдоль всего основания штампа.

После того как произойдет вдавливание, материал, выдавленный штампом, образует по сторонам последнего возвышения. Таким образом, при развитом пластическом течении необходимо удовлетворять краевым условиям на деформированной поверхности. Ограничимся

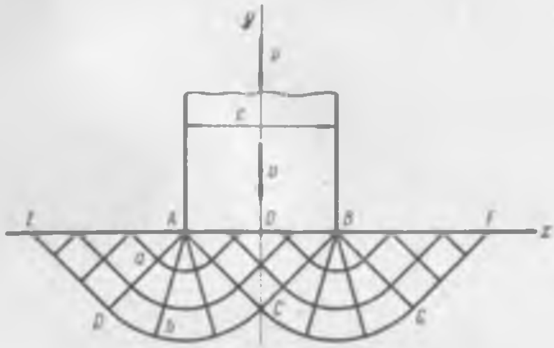


Рис. 9.23. Линии скольжения в жестко-пластическом теле, ограниченном плоскостью, при вдавливании в него абсолютно жесткого штампа с плоским основанием (решение Прандтля)

рассмотрением только начального пластического течения. В этом случае в решении задачи могут удовлетворяться граничные условия на недеформированной поверхности.

Начнем построение поля напряжений со свободной поверхности слева от штампа. Некоторый ее участок AE должен быть пластическим, чтобы возникла возможность образования выступа над поверхностью. Поскольку поверхность свободна от нагрузок, то

$$\sigma_y = 0; \; \tau_{xy} = 0$$

из формулы (9.5) для точек этой поверхности получаем

$$\sigma_x = -2\tau_T. \tag{9.45}$$

Знак минус взят потому, что в направлении AE возникает сжатие.

Поскольку касательные напряжения на свободной поверхности AE равны нулю, линии скольжения пересекают эту поверхность под углами 45 и 135°. Так как σ_x, следовательно, и σ_0, а также φ постоянны вдоль линии AE, то согласно формулам (9.21) вдоль этой линии параметры ξ и η не изменяются. Поэтому под линией AE поле напряжений равномерное.

Согласно формулам (9.21), (9.4) и (9.45) вдоль линий скольжения a (рис. 9.23) параметр

$$\xi = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}. \tag{9.46}$$

Если бы концевая точка E пластического участка свободной поверхности была известна, то тогда было бы определено равномерное поле напряжений под линией AE. Оно представляло бы собой равнобедренный прямоугольный треугольник ADE.

Так как линия скольжения AD прямая, то, следовательно, семейство линии скольжения b справа от AD — прямые. Учитывая симметрию задачи, заключаем, что под штампом поле напряжений ABC равномерное и, следовательно, давление под штампом постоянно.

Два равномерных поля напряжений соединены между собой центрированным полем ADC. Следовательно, линия скольжения a в поле AED является прямой, затем в поле ADC переходит в дугу окружности, которая, в свою очередь, в поле ABC — в прямую. Отсюда следует, что длина пластического участка свободной поверхности равна ширине штампа

$$AE = AB = c.$$

Вдоль линий скольжения a параметр ξ постоянен. В области ABC линии скольжения a наклонены к оси x под углом

$$\varphi = \frac{\pi}{4}. \tag{9.47}$$

Поэтому из формул (9.21) и (9.46) заключаем

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{\tau_T} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

откуда

$$\sigma_0 = -(\pi + 1)\,\tau_T. \tag{9.48}$$

Подставляя выражения (9.47) и (9.48) в формулы (9.17), имеем

$$\sigma_x = -\pi\tau_T; \quad \sigma_y = -(\pi + 2)\,\tau_T.$$

Поскольку напряжения σ_y вдоль линии AB не изменяются, сила, вдавливающая штамп,

$$P = |\sigma_y|\,c = (\pi + 2)\,\tau_T c. \tag{9.49}$$

Установим распределение скоростей. Очевидно, что треугольник ABC движется со скоростью штампа v вниз как жесткое целое. Вдоль линии AC касательная составляющая скорости разрывна, а нормальная равна $\frac{v\sqrt{2}}{2}$. Вдоль линии CD касательная составляющая скорости разрывна, а нормальная равна нулю. В центрированном поле скорость в направлении линии скольжения a равна $\frac{v\sqrt{2}}{2}$, а вдоль линии скольжения b равна нулю. Область ADE скользит как твердое тело в направлении DE со скоростью $\frac{v\sqrt{2}}{2}$.

Рассмотрим решение, данное Хиллом [21]. Хилл показал, что решение Прандтля не является единственным, и предложил поле скольжения, изображенное на рис. 9.24. Оно состоит из двух равномерных полей напряжений AOC и AED, соединенных центрированным полем ACD (рис. 9.24). В этом случае длина пластического участка свободной поверхности равна половине ширины штампа $\frac{c}{2}$.

Напряжения в равномерных полях напряжений и центрированном поле те же, что и в соответствующих полях решения Прандтля. Поэтому сила, приложенная к штампу, также определяется формулой (9.53).

Поле скоростей иное, чем в предыдущем решении. Треугольник AOC скользит как твердое тело вдоль OC со скоростью $\sqrt{2}v$.

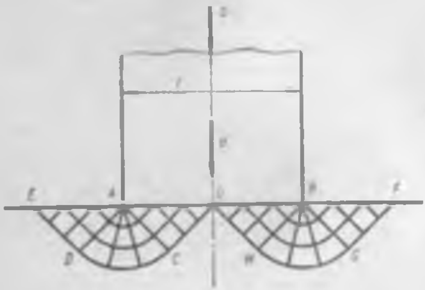


Рис. 9.24. Линии скольжения в жестко-пластическом теле, ограниченном плоскостью при вдавливании в него абсолютно жесткого штампа с плоским основанием (решение Хилла)

Скорость на AC непрерывна. В центрированном поле скорость в направлении линии скольжения a равна $\sqrt{2}v$, а вдоль линии скольжения b равна нулю. Треугольник ADE движется в направлении DE со скоростью $\sqrt{2}v$.

В книге Прагера и Ходжа [12] показано, что можно построить решение, являющееся комбинацией решений Прандтля и Хилла.

Из рассмотренной задачи следует, что при использовании схемы идеального жестко-пластического тела возможна неоднозначность решений. Поэтому при построении полей линий скольжения и полей скоростей следует привлекать экспериментальные данные.

§ 60. Численные методы решения краевых задач

В расчетах плоской деформации тел обычно приходится решать три основные краевые задачи, которые рассмотрены ниже.

1. Начальная характеристическая задача (задача Римана). Допустим, что на отрезках линий скольжения OA и OB (рис. 9.25) величины σ_0 и φ известны. Естественно, что они удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия элемента и поэтому связаны соотношениями (9.21).

Как будет показано ниже, в этом случае можно определить величины σ_0 и φ в криволинейном четырехугольнике $OACB$, ограниченном четырьмя линиями скольжения.

Для решения задачи разобьем отрезки линий скольжения OA и OB на малые части точками $1, 0$; $2, 0$; . . . .; m, 0; . . . .; $0, 1$; $0, 2$; . . . .; 0, n; . . . . По первой теореме Генки величины σ_0 и φ в точке m, n определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{0m,n} &= \sigma_{0m,O} + \sigma_{0O,n} - \sigma_{0O,O}; \\ \varphi_{m,n} &= \varphi_{m,O} + \varphi_{O,n} - \varphi_{O,O}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.50)$$

Для определения координат точки m, n по координатам точек $m-1$, n и m, $n-1$ и углам φ в этих трех точках воспользуемся дифференциальными уравнениями линий скольжения (9.12). Представим их в разностной форме, полагая, что угол наклона хорд, заменяющих малые дуги, равен среднему значению углов наклона в крайних точках. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} y_{m,n} - y_{m-1,n} &= (x_{m,n} - x_{m-1,n}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}); \\ y_{m,n} - y_{m,n-1} &= -(x_{m,n} - x_{m-1,n}) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}). \end{aligned}\right| \quad (9.51)$$

Таким образом, шаг за шагом, начиная с точки 1,1 определяются координаты точек и величины σ_0 и φ в них и, следовательно, строится решение задачи Римана в криволинейном четырехугольнике $OACB$.

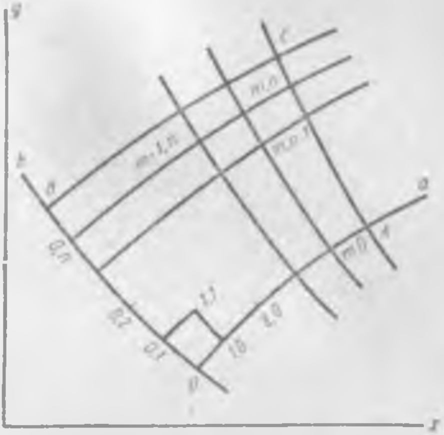


Рис. 9.25. К решению начальной характеристической задачи (задачи Римана)

Если отрезок линии скольжения OB (или OA) стянут в точку (рис. 9.26) и в точке O сходятся все линии скольжения семейства a (или b), имеет место вырожденный случай начальной характеристической задачи.

Тогда точка O является особой и величина σ_0 в ней разрывна.

В этом случае известно σ_0 и φ на OA и изменение угла φ в точке O, т. е. угол AOC. Для решения задачи отрезок линии скольжения OA делим на малые части и, проведя через точку 1,0 линию скольжения b_1, исключаем из рассмотрения особую точку O. Угол AOC также делим на малые части и проводим начальные участки линий скольжения $0,1$, $0,2$ . . . ., On. Таким образом определяем величины φ в точках линии скольжения b_1. По величинам $\sigma_{0 1,0}$ и $\varphi_{1,0}$ для точки $1,0$ линии OA, используя вторую формулу (9.21), определяем параметр η для линии b_1

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{0 1,0}}{\tau_T} - \varphi_{1,0}. \quad (9.52)$$

Далее по той же формуле определяем величины σ_0 в различных точках линии b_1

$$\sigma_{0 1,n} = 2\tau_T (\eta_1 + \varphi_{1,n}).$$

Таким образом, вырожденный случай задачи Римана сводится к основному. Определение напряжений в криволинейном четырехугольнике $1,0DCA$ производится, как было изложено выше.

2. З а д а ч а о н а ч а л ь н ы х з н а ч е н и я х (з а д а ч а К о ш и). Предположим, что на гладкой линии AB (рис. 9.27), не совпадающей с линией скольжения и пересекаемой каждой линией скольжения только 1 раз, заданы величины σ_0 и φ, непрерывные вместе с первыми и вторыми производными. Тогда, как будет показано ниже, можно определить величины σ_0 и φ, а значит и напряжения, в криволинейном треугольнике ACB, сторонами которого является линия AB и две линии скольжения AC и BC семейств a и b, проходящие точки A и B.

Рис. 9.26. К решению начальной характеристической задачи (задачи Римана) в вырожденном случае

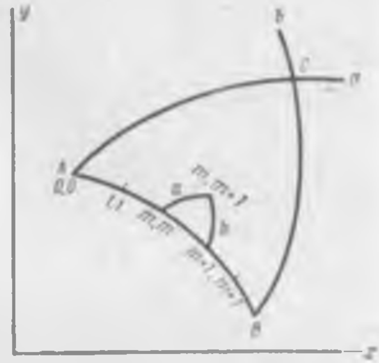


Рис. 9.27. К решению задачи о начальных значениях (задачи Коши)

Для решения задачи разобьем дугу AB на малые части точками *0,0*; *1,1*; . . . . m, m . . . (рис. 9.27). Проведем через точки m, m и $m+1$, $m+1$ две линии скольжения семейств a и b и обозначим точку пересечения их m, $m+1$. Из условия постоянства параметров ξ и η [см. формулы (9.21)] на линиях скольжения a и b имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\sigma_{0m,\,m+1}}{\tau_T}+\varphi_{m,\,m+1}&=\frac{1}{2}\frac{\sigma_{0m,\,m}}{\tau_T}+\varphi_{m,\,m};\\ \frac{1}{2}\frac{\sigma_{0m,\,m+1}}{\tau_T}-\varphi_{m,\,m+1}&=\frac{1}{2}\frac{\sigma_{0m+1,\,m+1}}{\tau_T}-\varphi_{m+1,\,m+1}.\end{aligned}\right\}\qquad(9.53)$$

Из этих двух уравнений определяются величины $\sigma_{0m,\,m+1}$ и $\varphi_{m,\,m+1}$.

При написании формул (9.53) не предполагалось, что точки m, m, $m+1$, $m+1$ и m, $m+1$ расположены близко одна к другой. Однако это предположение существенно для определения координат точки m, $m+1$, которые подсчитывают по формулам, аналогичным формулам (9.51). Таким образом определяют величины σ_0 и φ в точках, которые являются вершинами криволинейных треугольников, примыкающих к линии AB. В дальнейшем для построения решения в криволинейном треугольнике ABC решают начальную характеристическую задачу.

Аналогично тому, как было построено решение задачи Коши для определения напряжений, можно было бы построить решение этой задачи для определения скоростей перемещений.

Как отмечалось выше, постановка задачи допускает существование наряду с пластическими областями и жестких областей. Докажем, что границей между жесткими и пластическими областями является линия скольжения или огибающая линий скольжения. Примем, что жесткая область неподвижна, что всегда можно добиться наложением жесткого смещения.

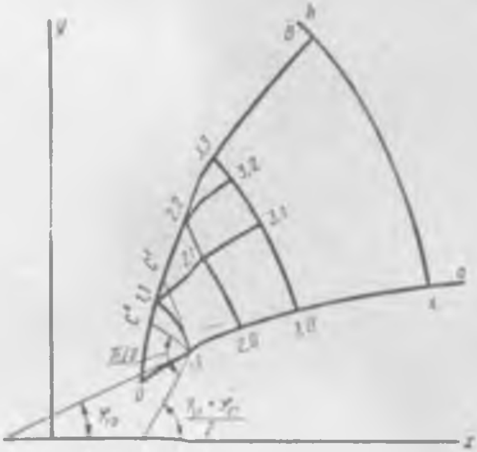


Рис. 9.28. К решению смешанной задачи

Допустим вначале, что на границе скорости v_ν и v_t непрерывны. В таком случае они равны нулю, и если граница нигде не совпадает с линией скольжения, то для определений скоростей в пластической области имеем задачу Коши. Поскольку уравнения для скоростей являются однородными, то при нулевых граничных условиях во всех точках пластической области скорости равны нулю, что противоречит исходному положению. Если же граница совпадает с линией скольжения, то равенство нулю скоростей в ее точках не ведет к нулевым скоростям в пластической области.

Если же на границе возникает разрыв скорости, то, как было доказано в § 57, она совпадает с линией скольжения или с огибающей линий скольжения.

Таким образом, доказано, что граница между жесткими и пластическими областями является линией скольжения или огибающей линий скольжения.

3. Смешанная задача. Предположим, что на отрезке линии скольжения OA (рис. 9.28) величины σ_0 и φ, удовлетворяющие уравнениям равновесия, известны, а на линии OB, не совпадающей с линией скольжения, задан угол φ. Это справедливо, например, если линия OB является следом поверхности тела, свободной от трения. Тогда линии скольжения пересекают линию OB во всех точках под углом 45°.

Как будет показано ниже, в рассматриваемом случае можно определить величины σ_0 и φ в криволинейном треугольнике OAB, ограниченном линиями скольжения OA и AB и линией OB.

Будем предполагать, что угол φ в точке O на линии скольжения OA и линии OB один и тот же. Случай неравенства углов рассмотрен ниже.

Для решения задачи разобьем отрезок линии скольжения OA на малые части точками $1,0$; $2,0$; . . ., m, 0. Проведем из точки $1,0$ перпендикуляр к линии скольжения OA до пересечения в точке C' с линией OB. Поскольку на последней значения φ известны, устанавливаем эту величину для точки C'. По величинам φ в точках $1,0$ и C' находим среднее значение угла φ и из точки $1,0$ проводим прямую линию, перпендикулярную прямой, наклоненной к оси x под средним значением угла для точек $1,0$ и C'. Таким образом определяем точку C''. Повторяя подобные построения до тех пор, пока различие между последовательными положениями точки C не станет малым, определяем точку $1,1$. Величину σ_0 в этой точке определяем так же, как в вырожденном случае начальной характеристической задачи. Вначале по формуле (9.53) определяем параметр η для линии скольжения семейства b, проходящей через точки $1,0$ и $1,1$. Затем, используя соотношение (9.21), вычисляем величину σ_0 в точке $1,1$

$$\sigma_{01,1} = 2\tau_T(\eta_1 + \varphi_{1,1}).$$

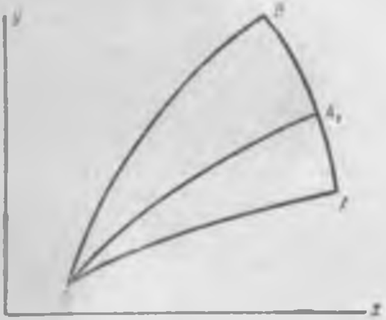


Рис. 9.29. К рассмотрению общего случая смешанной задачи

Величины σ_0 и φ в точках $2,1$; $3,1$; . . . вычисляем так же, как в решении начальной характеристической задачи. Определение положения точки $2,2$ и величины σ_0 в ней производится таким же образом, как для точки $1,1$. Таким образом, шаг за шагом, начиная с точки $1,1$, определяются σ_0 и φ, следовательно, строится решение смешанной задачи в криволинейном треугольнике OAB.

Если углы φ в точке O на линиях OB и OA не равны между собой например, если первый больше второго (рис. 9.29), то тогда область AOB разбивается на две AOA_1 и A_1OB, так чтобы угол φ в точке O на линиях OB и OA_1 был один и тот же. Для первой области имеем вырожденный случай начальной характеристической задачи, а для второй смешанную задачу.

§ 61. Сжатие слоя между жесткими шероховатыми плитами

Представим себе слой толщиной $2h$, шириной $2l$, сжатый между двумя жесткими шероховатыми плитами силой P (рис. 9.30).

Допустим, что плиты настолько шероховаты, что интенсивность сил трения на плоскостях контакта равна максимально возможному напряжению трения, а именно пределу текучести при сдвиге $\tau_{max} = \tau_T$.

Примем, что к торцу слоя примыкает жесткая область A_1BA_2, ограниченная прямыми линиями A_1B и A_2B. Поскольку, как отмечалось выше, граница между жесткой и пластической областями является линией скольжения, линии A_1B и A_2B — линии скольжения. Вследствие прямолинейности их напряжения в точках этих линий не изменяются. Так как на срединной плоскости OG из условия симметрии касательные напряжения отсутствуют, линии A_1B

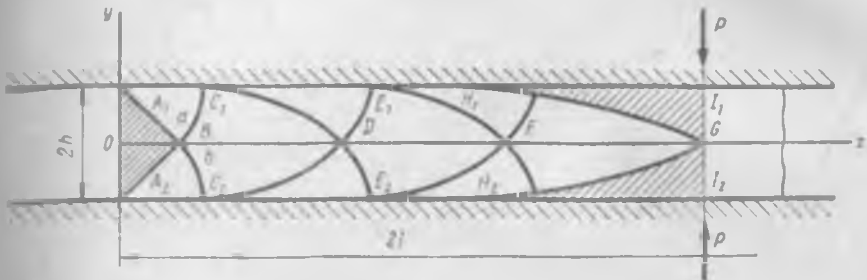


Рис. 9.30. К решению задачи сжатия слоя между жесткими шероховатыми плитами

и A_2B должны быть наклонены к оси OG под углом $\frac{\pi}{4}$. На гранях A_1B и A_2B касательные напряжения распределены равномерно и равны $\tau_т$. Из условия равновесия жесткой области A_1BA (рис. 9.31) заключаем, что равномерно распределенные в этих гранях нормальные напряжения равны той же величине $\sigma_0 = -\tau_т$. Примем, что к жесткой области A_1BA_2 примыкают центрированные поля линий скольжения A_1BC и A_2BC_2. Параметры ξ и η для линий скольжения A_2BC_1 (a) и A_1BC_2 (b) согласно формулам (9.21) соответственно равны

$$\xi = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}, \ \eta = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Рис. 9.31. Равновесие жесткой области, примыкающей к торцу

Располагая этими величинами, по тем же формулам (9.21) можно определить значения σ_0 в точках линий скольжения BC_1 и BC_2. В частности, в точке C_1 $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$, а следовательно, и во всех точках линии A_1C_1 по первой формуле (9.21), учитывая приведенную выше величину ξ, получаем

$$\sigma_0 = -\tau_т\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Этой же величине равно напряжение σ_y в точках линии A_1C_1. Следовательно, сила на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу, действующая на площадь контакта A_1C_1

$$P_1 = -\tau_т\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) A_1C_1.$$

Зная величины σ_0 и φ в точках линий скольжения BC_1 и BC_2, приходим к начальной характеристической задаче, решение которой позволяет определить напряженное состояние в области C_1BC_2D.

В области C_1DE_1 имеем смешанную задачу, так как вдоль C_1E_1, задан угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, поскольку на линии контакта касательные напряжения приняты максимальными, и, следовательно, площадки скольжения совпадают с границей слоя. Решение смешанной задачи позволяет определить напряжение σ_y в точках линии C_1E_1. Интегрирование этой функции дает силу P_2 на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу, действующую на площадь контакта C_1E_1,

$$P_2 = \int\limits_{C_1E_1} \sigma_y \, dx.$$

В результате решения смешанной задачи определяются величины σ_0 и φ в точках линий скольжения DE_1 и DE_2 и, следовательно, снова приходим к начальной характеристической задаче, решение которой позволяет определить напряженное состояние в области DE_1FE_2 и т. д. Поскольку на вертикальной плоскости симметрии слоя касательные напряжения отсутствуют, что противоречит условию постоянства касательного напряжения на плоскости контакта, к вертикальной плоскости симметрии должна примыкать жесткая область, ограниченная линией контакта и линией скольжения H_1G, приходящей в точку G. Распределение давления на участке H_1I_1 неопределенно. Сила на единицу длины слоя в направлении, перпендикулярном чертежу, приходящаяся на этот участок, может быть подсчитана из условия равновесия области H_1I_1G (рис. 9.32)

Рис. 9.32. Равновесие жесткой области, примыкающей к вертикальной плоскости симметрии

$$P_n = \int\limits_{H_1G} (\tau_T \cos\varphi + |\sigma_0| \sin\varphi)\, ds.$$

Сила, сжимающая весь слой,

$$P = 2\,(P_1 + P_2 + \cdots + P_n).$$

Изложенное решение справедливо при условии, что точка D не попадает по другую сторону оси симметрии II_1. Это справедливо при $\frac{l}{h} \geqslant 3{,}64$ [8]. Для меньших значений этого отношения решение задачи изложено в книге [17].

В случае очень тонкого слоя, когда l значительно больше h, решение задачи дано Прандтлем. Оно может быть представлено в замкнутом виде. При выборе начала координат в середине левого торца слоя выражения для напряжений в виде

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -C_1 - \tau_T\left(\frac{x}{h} - 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}\right); \\ \sigma_y &= -C_1 - \tau_T\frac{x}{h}; \\ \tau_{xy} &= \tau_T\frac{y}{h} \end{aligned}\right\} \tag{9.54}$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (9.6) и условию пластичности (9.5). В этом легко убедиться, подставив выражения (9.54) в соотношения (9.6) и (9.5). Однако, как следует из уравнений (9.54), σ_x и τ_{xy} не обращаются в ноль на торцах при $x = 0$ и $x = 2l$ и напряжение τ_{xy} не обращается в ноль на вертикальной плоскости симметрии. Таким образом, вблизи торцов и в средней части слоя решение Прандтля неудовлетворительно.

Краевое условие на левом торце можно удовлетворить интегрально в смысле принципа Сен-Венана исходя из условия отсутствия нормальной силы на левом торце

$$\int_{-h}^{h} \sigma_x\,dy = 0, \tag{9.55}$$

что дает возможность определить постоянную C_1. Подставляя первое выражение (9.54) при $x = 0$ в условие (9.55), после преобразований получим

$$C_1 = \frac{\pi}{2}\tau_T$$

и, следовательно, согласно второй формуле (9.54) имеем следующий линейный закон изменения давления на контактной поверхности

$$\sigma_y = -\tau_T\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{h}\right). \tag{9.56}$$

Сила, действующая на слой,

$$P = 2\int_0^l |\sigma_y|\,dx.$$

Подставим в эту формулу уравнение (9.56). Тогда устанавливаем

$$P = \tau_T l\left(\pi + \frac{l}{h}\right). \tag{9.57}$$

Можно показать [8], что в рассматриваемой задаче линии скольжения представляют собой семейства циклоид с радиусом производящего круга h. Прямые $y = \pm h$ являются огибающими этих семейств циклоид.

Выражения для скоростей перемещений в виде

$$\left.\begin{aligned} v_x &= C_2 + v\left(\frac{x}{h} - 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}\right); \\ v_y &= -v\frac{y}{h}, \end{aligned}\right\} \tag{9.58}$$

где v — скорость движения плит, удовлетворяют уравнениям (9.7). Постоянная C_2 может быть найдена из условия равенства потока материала через сечение $x = 0$ количеству, выдавливаемому на длине $2l$ прн сближении плит

$$-\int_{-h}^{h} v_x\,dy = 2lv.$$

Подставляя в это соотношение скорость v_x при $x = 0$, получим

$$C_2 = v\left(\frac{\pi}{2} - \frac{l}{h}\right).$$

Выше предполагалось, что на поверхности контакта интенсивность сил трения равна максимальному касательному напряжению — пределу текучести при сдвиге $\tau_{max} = \tau_T$. Случай, в котором интенсивность сил трения постоянна, но меньше этой величины, изучен В. В. Соколовским [17].

§ 62. Волочение листа

Установившимся процессом деформирования тела называют такой процесс, в котором напряжения и скорости перемещения в любой фиксированной точке тела не изменяются во времени. В противном случае процесс деформирования называют неустановившимся.

Рассмотрим установившийся процесс волочения через жесткую матрицу листа, начальная толщина которого h_1 (рис. 9.33). Для упрощения решения задачи трением на плоскостях контакта листа и матрицы пренебрежем. Обозначим конечную толщину листа h_2, а скорости на входе в матрицу и выходе из нее v_1 и v_2 соответственно.

Из условия несжимаемости материала имеем

$$v_1 = v_2\frac{h_2}{h_1}.$$

Допустим, что давление на контактной поверхности AB (рис. 9.33) распределено равномерно. Величину его обозначим через p. В таком случае, к линии AB примыкает равномерное поле напряжений ABC. Присоединяем к нему два центрированных поля ACD и BCE с неизвестными пока центральными углами ψ и χ.

Из условия равновесия области ABC (рис. 9.34) определяем среднее нормальное напряжение в этой области

$$\sigma_0^{ABC} = -(p - \tau_T). \tag{9.59}$$

Располагая этой величиной, а также величиной угла φ в точке C

$$\varphi^c = \frac{\pi}{4} - \alpha,$$

по формуле (9.21) устанавливаем параметры ξ и η для линий BCD и ACE соответственно

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^{ABC}}{\tau_T} + \frac{\pi}{4} - \alpha; \\ \eta &= \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^{ABC}}{\tau_T} - \frac{\pi}{4} + \alpha. \end{aligned}\right| \tag{9.60}$$

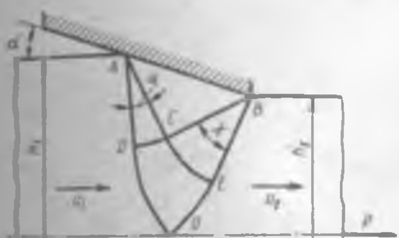


Рис. 9.33. К решению задачи волочения листа

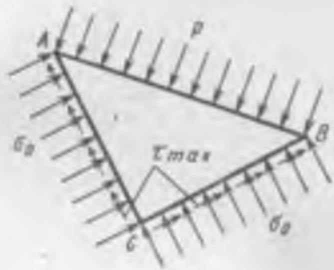


Рис. 9.34. Равновесие области равномерного напряженного состояния

После этого по тем же формулам (9.21) можно определить значения σ_0 в точках линий скольжения CD и CE, которые являются окружностями радиусов соответственно AC и BC. Таким образом приходим к начальной характеристической задаче. Численное решение ее изложенным выше методом позволяет определить напряженное состояние в области $CDOE$.

Для того чтобы установить зависимость между неизвестными углами ψ и χ, выразим среднее нормальное напряжение в точке O через величину его в точке C, продвигаясь от точки C к точке O вначале по линии CDO, а затем по линии CEO.

Учитывая, что величина φ в точке D

$$\varphi_D = \frac{\pi}{4} - (\alpha + \psi)$$

по первой формуле (9.21), используя первую формулу (9.60), имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^D}{\tau_T} + \frac{\pi}{4} - (\alpha + \psi) = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^{ABC}}{\tau_T} + \frac{\pi}{4} - \alpha,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^D}{\tau_T} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^{ABC}}{\tau_T} + \psi. \tag{9.61}$$

Определим теперь параметр η для линии скольжения ADO.

По второй формуле (9.61)

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^D}{\tau_т} - \frac{\pi}{4} + (\alpha + \psi).$$

Далее по той же формуле, учитывая, что величина угла φ в точке O равна $\varphi^O = \frac{\pi}{4}$, связываем средние нормальные напряжения в точках O и D

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^O}{\tau_т} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^D}{\tau_т} - \frac{\pi}{4} + (\alpha + \psi).$$

Подставим в эту формулу соотношение (9.61). Тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^O}{\tau_т} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^{ABC}}{\tau_т} + \alpha + 2\psi. \quad (9.62)$$

Рис. 9.35. Равновесие жесткой области на входе в матрицу

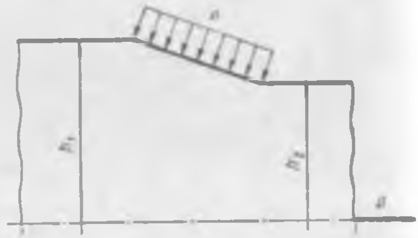


Рис. 9.36. Равновесие листа

Аналогично можно вывести зависимость между средними нормальными напряжениями в точках O и C при переходе от последней к первой по линии CEO. Она имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^O}{\tau_т} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^{ABC}}{\tau_т} - \alpha + 2\chi. \quad (9.63)$$

Сопоставляя выражения (9.62) и (9.63), заключаем, что

$$\chi = \psi + \alpha. \quad (9.64)$$

Давление p и один из углов ψ или χ определяем из двух условий: равенства нулю суммы проекций на горизонтальную ось всех сил, действующих на поверхность ADO (рис. 9.35)

$$\int_{ADO} (\sigma_0 \cos\varphi + \tau_т \sin\varphi)\, ds = 0,$$

и нахождения точки O на оси симметрии. Неизвестные определяем подбором.

После определения давления p усилие волочения P на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу, подсчитываем по формуле

$$P = p\,(h_1 - h_2), \tag{9.65}$$

которая следует из условия равновесия листа (рис. 9.36).

Максимальное обжатие $\frac{h_1 - h_2}{h_1}$ соответствует $\psi = 0$, когда четырехугольник $CDOE$ стягивается в точку (рис. 9.33). В этом случае (рис. 9.37) отпадает необходимость численного решения начальной характеристической задачи. Согласно формуле (9.64)

$$\chi = \alpha$$

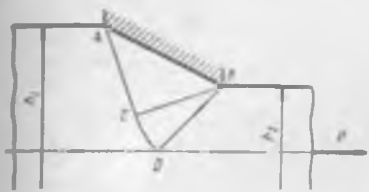


Рис. 9.37. К решению частного случая задачи волочения листа

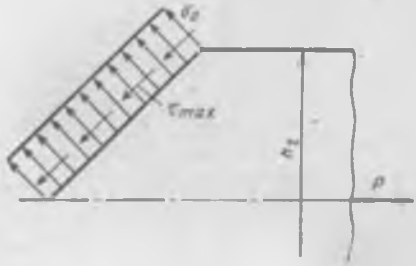


Рис. 9.38. Равновесие жесткой области на выходе из матрицы

и, следовательно, линия BO наклонена к горизонтальной оси под углом $\frac{\pi}{4}$. Величины h_1, h_2 и α связаны между собой. Действительно, как следует из рис. 9.37,

$$\frac{h_2}{2} = BO\frac{\sqrt{2}}{2} = BC\frac{\sqrt{2}}{2} = AB\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h_1 - h_2}{4\sin\alpha},$$

откуда

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{1 + 2\sin\alpha}.$$

Среднее нормальное напряжение в точках линии BO находим по второй формуле (9.21), используя соотношения (9.59) и вторую формулу (9.60)

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^{BO}}{\tau_{\text{т}}} - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\tau_{\text{т}}}(p - \tau_{\text{т}}) - \frac{\pi}{4} + \alpha,$$

откуда

$$\sigma_0^{BO} = -p + \tau_{\text{т}}(1 + 2\alpha). \tag{9.66}$$

Из условия равновесия жесткой области, изображенной на рис. 9.38, получаем

$$P = 2\tau_{\text{т}}\frac{h_2}{2}\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sigma_0^{BO}\frac{h_2}{2}\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставим в это выражение соотношение (9.66). Тогда, используя формулу (9.65), после преобразования имеем

$$P = \frac{4(1+\alpha)\sin\alpha}{1+2\sin\alpha}\tau_T h_2. \tag{9.67}$$

Величина $2\tau_T h_2$ равна предельной нагрузке при растяжении листа постоянной толщины h_2. Поэтому волочение возможно при условии, что

$$P < 2\tau_T h_2$$

или

$$\alpha \sin\alpha < \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $\alpha < 42^\circ 27'$.

Другие примеры применения теории плоской деформации для исследования технологических процессов обработки металлов приведены в книгах [1, 4, 12, 16, 17, 21—23, 26—28, 32].

Определение предельных нагрузок при помощи линий скольжения изложено в книгах [8, 17, 31].

Решение задач плоской деформации для анизотропных тел дано в работах [14, 24], а для неоднородных тел в трудах [3, 5, 9, 11].

Теория плоского напряженного состояния разработана в меньшей степени, чем теория плоского деформированного состояния. Изложение теории плоского напряженного состояния и решение ряда задач по этой теории содержится в книгах [8, 17].

Список литературы

1. **Бровман М. Я.** Применение теории пластичности в прокатке. М., «Металлургия», 1965, 249 с.

2. **Генки Г.** О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах.— В кн.: Теория пластичности М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 80—101.

3. **Григорьев О. Д.** Некоторые задачи теории пластичности неоднородных тел. «Труды Новосибирского института инженеров водного транспорта». Вып. 48. Н., 1969, 207 с.

4. **Джонсон В., Кудо Х.** Механика процессов вдавливания металлов. М., «Металлургия», 1965, 174 с.

5. **Друянов Б. А.** Численное решение задачи о вдавливании гладкого штампа в пластически неоднородную полуплоскость.— «Известия Академии наук СССР. Механика и машиностроение», 1961, № 3, с. 163—166.

6. **Друянов Б. А.** О применении жестко пластического анализа к некоторым технологическим задачам.— «Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела», 1971, № 3, с. 179—183.

7. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М., ГИТТЛ, 1948, 376 с.

8. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969, 420 с

9. **Кузнецов А. И.** Плоская деформация неоднородных пластических тел.— «Вестник Ленинградского университета», 1958, № 13, с. 112—131.

10. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд. иностр. лит., 1954, 647 с.

11. **Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В.** Теория пластичности неоднородных тел. М., «Мир», 1964, 156 с.

12. **Прагер В., Ходж Ф. Г.** Теория идеально пластических тел. М., Изд. иностр. лит., 1956, 398 с.

13. **Прандтль Л.** О твердости пластических материалов и сопротивлении резанию.— В кн.: Теория пластичности. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 70—79.

14. **Саркисян М. С.** К теории плоской деформации пластически анизотропных тел.— «Прикладная математика и механика», 1960, т. 24, № 6, с. 1136—1139.

15. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики, том IV. М., Физматгиз, 1958, 812 с.

16. **Смирнов В. С.** Теория прокатки. М., «Металлургия». 1967, 460 с.

17. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969, 608 с.

18. **Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш.** Механика пластических деформаций при обработке металлов. М., «Машиностроение», 1969, 503 с.

19. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М., «Наука», 1974, 559 с.

20. **Фрейденталь А., Гейрингер Х.** Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962, 432 с.

21. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956, 407 с.

22. **Целиков А. И.** Основы теории прокатки. М., «Металлургия», 1965, 247 с.

23. **Целиков А. И., Гришков А. И.** Теория прокатки. М., «Металлургия», 1970, 358 с.

24. **Шевелев В. В., Яковлев С. П.** Анизотропия листовых материалов и ее влияние на вытяжку. М., «Машиностроение», 1972, 135 с.

25. **Dietrich L., Miastkowski J., Szczepiński W.** Nośność graniczna elementów konstrukcji, Państwowe wydawnictwo naukowe, 1970, 271 s.

26. **Ford H.** Advanced mechanics of materials, Longmans, 1963, 672 p.

27. **Johnson W., Mellor P. B.** Plasticity for mechanical engineers, D. Van Nostrand Company LTD, 1962, 412 p.

28 **Johnson W. Sowerby R., Haddow J. B.** Plane-strain slip-line fields. Theory and bibliography, London, Edward Arnold, 1970, 176 p.

29. **Spencer G. C.** An introduction to plasticity, Chapman and Hall LTD, 1968, 118 p.

30. **Szczepiński W.** Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej, Państwowe wydawnictwo naukowe, 1967, 319 s.

31. **Szczepiński W.** Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej, Państwowe wydawnictwo naukowe, 1968, 129 s.

32. **Teoria** plastyczności, Państwowe wydawnictwo naukowe, 1967, 399 s. Aut: Z. Marciniak, Z. Mróz, W. Olszak i inni.

ГЛАВА X

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ

§ 63. Статическая и кинематическая теоремы

Как было показано выше, решение пластических задач в предположении, что материал идеальный жестко пластический (диаграмма деформирования изображена на рис. 5.17), имеет большое практическое значение для определения предельных нагрузок конструкций, а также вычисления усилий деформирования в различных технологических операциях. Однако даже при ограничении условием плоской деформации (см. предыдущую главу) решение в ряде случаев связано с большими трудностями. Эти трудности возрастают прн переходе к общему случаю деформирования. Поэтому большое значение имеют методы приближенной оценки нагрузок, соответствующих предельному состоянию по схеме идеального жестко-пластического тела.

Ниже изложены статическая и кинематическая теоремы, позволяющие дать двустороннюю оценку предельных нагрузок, приведены примеры применения их, а также дано полное решение некоторых задач предельного состояния.

Назовем статически возможным состоянием тела такое состояние, для которого удовлетворены условия на поверхности для напряжений и уравнения равновесия в каждой точке тела, а точки, изображающие напряженное состояние в пространстве напряжений σ_{ij} для различных точек тела, лежат или внутри поверхности начала пластичности или на ней. Обозначим эти точки M^*, а соответствующие им тензоры напряжений $\overset{*}{\sigma}_{ij}$ (рис. 10.1). Таким образом, эти напряженные состояния удовлетворяют условию

$$f_{\text{т}}(\overset{*}{\sigma}_{ij}) \leqslant 0.$$

Изображающие точки для действительного состояния тела обозначим M, а соответствующие им тензоры напряжений σ_{ij}.

С т а т и ч е с к а я т е о р е м а. *Нагрузка, соответствующая статически возможному состоянию, меньше, чем предельная нагрузка.*

Для простоты доказательства допустим, что объемные силы отсутствуют. Применим принцип возможных перемещений для действительного и статически возможного состояний, приняв за возможные перемещения, пропорциональные скоростям v_i и ξ_{ij}

действительного состояния. Тогда получим для действительного состояния

$$\int\limits_S X_{\nu i} v_i \, dS = \int\limits_V \sigma_{ij} \xi_{ij} \, dV \tag{10.1}$$

и для статически возможного состояния

$$\int\limits_S X^{*}_{\nu i} v_i \, dS = \int\limits_V \sigma^{*}_{ij} \xi_{ij} \, dV, \tag{10.2}$$

где $X_{\nu i}$ и $X^{*}_{\nu i}$ — проекции на оси координат интенсивности распределенной нагрузки на поверхности.

Вычтем из соотношения (10.1) выражение (10.2). Тогда получим

$$\int\limits_S (X_{\nu i} - X^{*}_{\nu i}) v_i \, dS = \int\limits_V (\sigma_{ij} - \sigma^{*}_{ij}) \xi_{ij} \, dV.$$

Как отмечалось в § 21,

$$(\sigma_{ij} - \sigma^{*}_{ij}) \, d\varepsilon^{p}_{ij} > 0$$

и, следовательно (рис. 10.1),

$$(\sigma_{ij} - \sigma^{*}_{ij}) \xi_{ij} > 0,$$

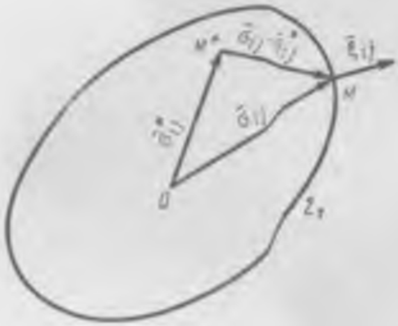


Рис. 10.1. К доказательству статической теоремы

поэтому

$$\int\limits_S X^{*}_{\nu i} v_i \, dS < \int\limits_S X_{\nu i} v_i \, dS, \tag{10.3}$$

т. е. *мощность поверхностной нагрузки, отвечающей статически возможному напряженному состоянию на действительных скоростях перемещений всегда меньше мощности действительной поверхностной нагрузки на тех же скоростях.*

Если внешние силы являются сосредоточенными, то согласно формуле (10.3) имеем

$$\sum P^{*}_i v_i < \sum P_i v_i.$$

В случае одной силы получаем

$$P^{*} < P, \tag{10.4}$$

что и требовалось доказать.

Статическая теорема устанавливает приближение для предельной нагрузки снизу. Рассматривая различные статически возможные состояния, можно подсчитать различные нагрузки, меньшие предельной. Наибольшая из них будет ближе всего к предельной нагрузке.

Метод определения предельной нагрузки путем рассмотрения статически возможных состояний называют статическим.

Назовем кинематически возможным состоянием тела такое состояние, для которого удовлетворены условия на поверхности для перемещений и условия совместности деформаций в каждой точке тела. Уравнения равновесия могут быть не удовлетворены. Очевидно, что точки, изображающие напряженные состояния в точках тела, находящегося в кинематически возможном состоянии, лежат на поверхности начала пластичности, так как иначе согласно схеме идеального жестко-пластического тела деформирование невозможно. Обозначим эти точки M^{**}, а тензоры напряжений, соответствующие им, σ_{ij}^{**} (рис. 10.2).

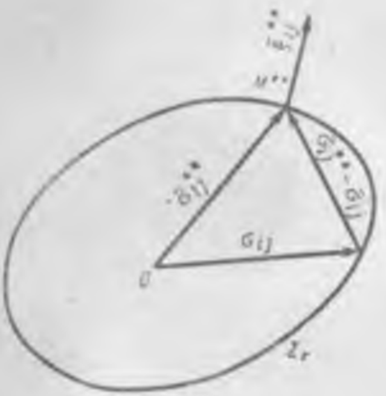


Рис. 10.2. К доказательству кинематической теоремы

Кинематическая теорема. *Нагрузка, соответствующая кинематически возможному состоянию, больше, чем предельная нагрузка.*

Полагая, так же как и в доказательстве предыдущей теоремы, объемные силы равными нулю, применим принцип возможных перемещений для действительного состояния. За возможные перемещения примем перемещения, пропорциональные скоростям v_i^{**} и ξ_{ij}^{**} кинематически возможного состояния. Тогда получим

$$\int_S X_{\nu i} v_i^{**}\, dS = \int_V \sigma_{ij} \xi_{ij}^{**}\, dV.$$

Преобразуем это равенство:

$$\int_S X_{\nu i} v_i^{**}\, dS = \int_V \sigma_{ij}^{**} \xi_{ij}^{**} dV - \int_V (\sigma_{ij}^{**} - \sigma_{ij})\, \xi_{ij}^{**} dV.$$

Поскольку, как отмечалось выше (рис. 10.2),

$$(\sigma_{ij}^{**} - \sigma_{ij})\, \xi_{ij}^{**} > 0,$$

имеем

$$\int_V \sigma_{ij}^{**} \xi_{ij}^{**}\, dV > \int_S X_{\nu i} v_i^{**}\, dS. \qquad (10.5)$$

Интеграл слева представляет собой мощность внутренних сил в кинематически возможном состоянии тела. Очевидно, что можно так подобрать величины поверхностных нагрузок $X_{\nu i}^{**}$, что их мощность на кинематически возможных скоростях будет равна мощности внутренних сил

$$\int_S X_{\nu i}^{**} v_i^{**}\, dS = \int_V \sigma_{ij}^{**} \xi_{ij}^{**}\, dV. \qquad (10.6)$$

Следовательно, согласно выражению (10.5) имеем

$$\int\limits_S X_{\nu i}^{**} v_i^{**}\, dS > \int\limits_S X_{\nu i} v_i^{**}\, dS, \qquad (10.7)$$

т. е. *мощность поверхностной нагрузки, отвечающей кинематически возможному состоянию на кинематически возможных скоростях, перемещений, всегда больше мощности действительной поверхностной нагрузки на тех же скоростях.*

Если внешние силы являются сосредоточенными, то по формуле (10.7)

$$\sum P_i^{**} v_i^{**} > \sum P_i v_i^{**}.$$

В случае одной силы

$$P^{**} > P, \qquad (10.8)$$

где согласно выражению (10.6)

$$P^{**} = \frac{1}{v^{**}} \int\limits_V \sigma_{ij}^{**} \xi_{ij}^{**}\, dV,$$

что и требовалось доказать.

В отличие от статической теоремы кинематическая теорема устанавливает приближение для предельной нагрузки сверху. Рассматривая различные кинематически возможные состояния, можно определить различные нагрузки, большие предельной. Наименьшая из них будет наиболее близка к предельной нагрузке.

Метод определения предельной нагрузки путем рассмотрения кинематически возможных состояний называют кинематическим.

Таким образом, статическая и кинематическая теоремы дают возможность установить двустороннюю (снизу и сверху) оценку предельной нагрузки.

Для того чтобы статически возможное состояние было действительным, необходимо, чтобы оно было одновременно кинематически возможным и наоборот. Если предельные нагрузки, определенные статическим и кинематическим методом, совпадают, то это означает, что полученная предельная нагрузка является действительной, а выполненное решение полным.

§ 64. Примеры применения статической и кинематической теорем

Пример 1. Балка, заделанная одним концом, оперта другим и нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 10.3, a). Балка 1 раз статически неопределима.

Как известно из курса сопротивления материалов [23], если диаграмма растяжения материала не имеет упрочнения, несущая способность статически определимых балок и рам исчерпывается тогда, когда в опасном сечении балки возникает пластический шарнир.

Если сечение имеет одну ось симметрии в плоскости действия изгибающего момента, а диаграммы растяжения и сжатия материала совпадают, величина предельного изгибающего момента в пластическом шарнире

$$M_{пр} = \sigma_т (S_{\chi р} + S_{\chi сж}),$$

где $S_{\chi р}$ и $S_{\chi сж}$ — абсолютные значения статических моментов растянутой и сжатой частей сечения (площади которых одинаковы) относительно нейтральной линии.

Для статически неопределимых балок образование одного пластического шарнира еще не приводит к исчерпанию несущей способности. Для этого в случае балки, изображенной на рис. 10.3, *а*, необходимо образование одного пластического шарнира в заделанном сечении *A* и второго — где-то в пролете балки *AB*.

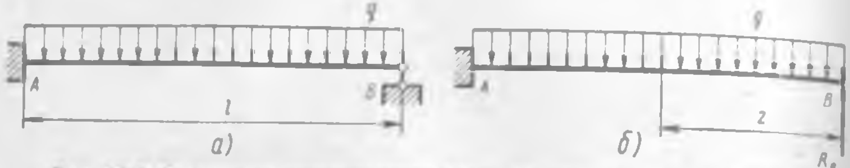


Рис. 10.3. Статически неопределимая балка (*а*); эквивалентная система (*б*)

Изменяя реакцию R_B (рис. 10.3, *б*), можно рассмотреть все статически возможные состояния балки.

Изгибающий момент в сечении с координатой *z*

$$M = R_B z - \frac{qz^2}{2}.$$

Максимальное значение момента при

$$z = \frac{R_B}{q}$$

$$M_{max} = \frac{1}{2}\frac{R_B^2}{q}. \qquad (10.9)$$

Из условия, что величина этого момента не превышает предельного,

$$M_{max} \leqslant M_{пр},$$

имеем

$$q > \frac{R_B^2}{2M_{пр}}. \qquad (10.10)$$

Наибольшее значение момента в заделке

$$M_{наиб} = -R_B l + \frac{ql^2}{2}.$$

Из того же условия, что величина этого момента не превышает предельного

$$M_{наиб} \leqslant M_{пр},$$

имеем

$$q \leqslant \frac{2M_{пр}}{l^2} + \frac{2R_B}{l}. \qquad (10.11)$$

На рис. 10.4 область, в которой выполняются неравенства (10.10) и (10.11), заштрихована. Согласно статической теореме предельная нагрузка больше всех нагрузок, определяемых точками заштрихованной области, т. е. определяется точкой *K* пересечения линий *OK* и *LK* (рис. 10.4). Абсцисса ее

$$R_B = 2(\sqrt{2} + 1)\frac{M_{пр}}{l} = 4{,}82\frac{M_{пр}}{l}. \qquad (10.12)$$

Этому значению R_B соответствует величина предельной нагрузки

$$q_{пр} = 11{,}6\frac{M_{пр}}{l^2}. \qquad (10.13)$$

Из соотношений (10.9), (10.12) и (10.13) получаем $z = 0{,}414l$, что близко к расстоянию сечения *B* до сечения, в котором изгибающий момент в пределах упругости максимален (0,375*l*).

Определим теперь интенсивность предельной нагрузки кинематическим методом. На рис. 10.5 штриховой линией показано кинематически возможное состояние системы.

Если угол поворота стержня *BC* обозначить θ, то тогда угол поворота стержня *AC* равен $\theta\frac{z}{l-z}$. Работа равномерно распределенной нагрузки

$$q_{пр}(l-z)\frac{1}{2}\theta\frac{z}{l-z}(l-z) + q_{пр}z\frac{1}{2}\theta z = \frac{q_{пр}lz\theta}{2}.$$

Эту работу можно было бы сразу подсчитать как произведение интенсивности равномерно распределенной нагрузки на площадь треугольника AC_1B (рис. 10.5).

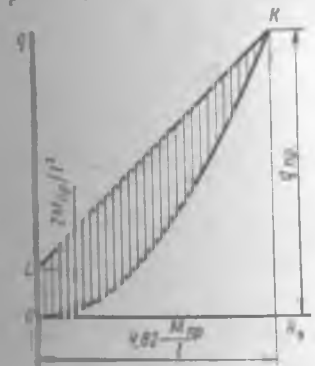


Рис. 10.4. Графики зависимости *q* от R_B

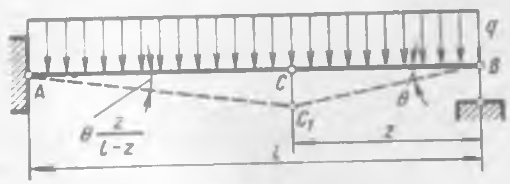


Рис. 10.5. Механизм исчерпания несущей способности

Работа предельных моментов равна $M_{пр}\theta + 2M_{пр}\frac{\theta z}{l-z}$. На основании кинематической теоремы

$$\frac{q_{пр}lz\theta}{2} = M_{пр}\theta + 2M_{пр}\frac{\theta z}{l-z},$$

откуда получаем

$$q_{пр} = \frac{2M_{пр}}{l}\frac{l+z}{z(l-z)}. \qquad (10.14)$$

Таким образом, предельная интенсивность нагрузки зависит от координаты пластического шарнира *z*.

Согласно кинематической теореме действительной предельной нагрузкой будет минимальная из всех нагрузок, определяемых формулой (10.14). Для вычисления ее приравняем нулю первую производную от $q_{пр}$ по *z*. Тогда получим квадратное уравнение

$$z^2 + 2lz - l^2 = 0,$$

решая которое, устанавливаем, что $z = (\sqrt{2} - 1)l = 0{,}414l$.

Определение знака второй производной показывает, что при этом значении *z* функция (10.14) имеет минимум. Подстановка найденной величины *z* в выражение (10.14) приводит к соотношению (10.13). Таким образом, предельные нагрузки, определенные статическим и кинематическим методом, совпадают. Следовательно, проведенное решение является полным.

Пример 2. Прямоугольная портальная рама, выполненная из стержней постоянного поперечного сечения, нагружена горизонтальной силой P и вертикальной силой $2P$ (рис. 10.6). Рама 3 раза статически неопределима. Решим задачу кинематическим методом.

Поскольку рама не нагружена распределенной нагрузкой на каждом из четырех участков рамы *12*, *23*, *34*, *45*, поперечная сила постоянна и изгибающий момент изменяется по линейному закону. Поэтому пластические шарниры могут образоваться только в сечениях *1—5*.

Поскольку рама 3 раза статически неопределима, она становится геометрически изменяемой при возникновении четырех пластических шарниров. В некоторых случаях возможно исчерпание несущей способности и при меньшем числе пластических

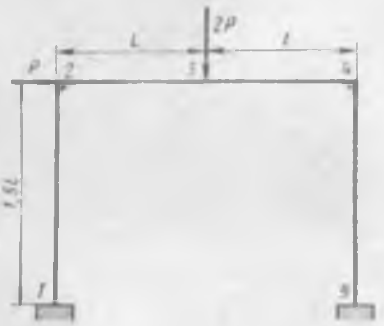


Рис. 10.6. Прямоугольная портальная рама

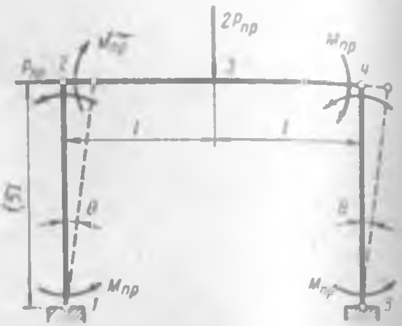


Рис. 10.7. Механизм бокового смещения

шарниров. Из кинематической теоремы следует, что действительной предельной нагрузкой будет наименьшая из предельных нагрузок определенных для этих вариантов.

Допустим, что пластические шарниры возникают в сечениях *1*, *2*, *4* и *5*.

Очевидно, что в этом случае возможным перемещением рамы в предельном состоянии будет поворот стержней *12* и *45* на некоторый угол θ (рис. 10.7). Перемещение стержня *234* в вертикальном направлении является величиной второго порядка малости по сравнению с перемещением его в горизонтальном направлении. Такой механизм исчерпания несущей способности будем называть механизмом бокового смещения.

Определим теперь, исходя из этого механизма, величину предельной силы. Работа горизонтальной силы $P_{пр}$ равна $1{,}5P_{пр}l\theta$, работа вертикальной силы $2P_{пр}$ — нулю, а четырех предельных моментов — $4M_{пр}\theta$. На основании кинематической теоремы

$$1{,}5P_{пр}l\theta = 4M_{пр}\theta$$

откуда следует, что

$$P_{пр} = \frac{8}{3}\,\frac{M_{пр}}{l}\,. \tag{10.15}$$

Допустим теперь, что пластические шарниры образовались в сечениях *2*, *3* и *4*. Кинематически возможное состояние в таком случае изображено штриховой линией на рис. 10.8. Такой механизм исчерпания несущей способности будем называть балочным механизмом.

Определим величину предельной силы. Работа вертикальной силы $2P_{пр}$ равна $2P_{пр}l\theta$, работа горизонтальной силы — нулю; работа четырех предельных моментов — $4M_{пр}\theta$. Согласно кинематической теореме

$$2P_{пр}l\theta = 4M_{пр}\theta,$$

откуда имеем

$$P_{пр} = 2\,\frac{M_{пр}}{l}\,. \tag{10.16}$$

Допустим теперь, что пластические шарниры образовались в сечениях 1, 3, 4 и 5. На рис. 10.9 штриховой линией показано кинематически возможное состояние. Этот механизм исчерпания несущей способности будем называть комбинированным механизмом.

Определим для него величину предельной нагрузки. Работа горизонтальной силы равна $P_{пр}\cdot 1{,}5l\theta$, вертикальной — $2P_{пр}l\theta$, работа шести предельных моментов — $6M_{пр}\theta$. На основании кинематической теоремы

$$1{,}5P_{пр}l\theta + 2P_{пр}l\theta = 6M_{пр}\theta,$$

получаем

$$P_{пр} = \frac{12}{7}\,\frac{M_{пр}}{l} = 1{,}71\frac{M_{пр}}{l}. \tag{10.17}$$

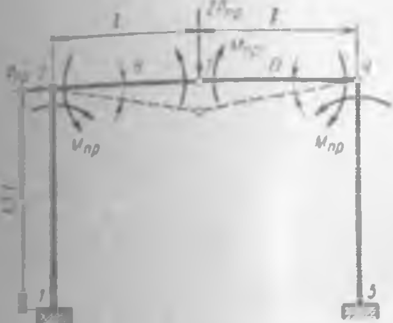


Рис. 10.8. Балочный механизм

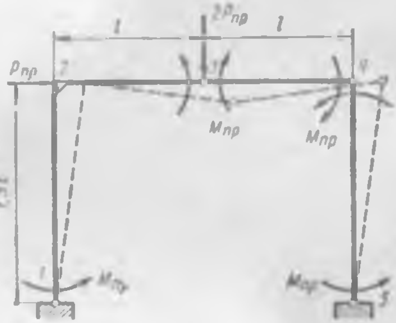


Рис. 10.9. Комбинированный механизм

Значение предельной нагрузки в этом механизме исчерпания несущей способности оказалось наименьшим из полученных выше величин. Следовательно, формула (10.17) определяет действительную предельную нагрузку и реализоваться будет именно этот механизм исчерпания несущей способности.

При других соотношениях между нагрузками, приложенными к раме, и длинами стержней действительным механизмом исчерпания несущей способности может оказаться не комбинированный, а балочный механизм, как для рамы, изображенной

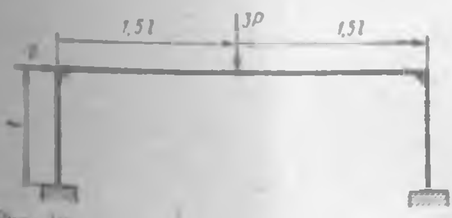


Рис. 10.10. Статически неопределимая рама с частичным (балочным) механизмом исчерпания несущей способности

Рис. 10.11. Статически неопределимая балка с частичным механизмом исчерпания несущей способности

на рис. 10.10. Такой механизм называют еще частичным механизмом исчерпания несущей способности. Отличие его от комбинированного механизма или механизма бокового смещения заключается в том, что он возникает при числе пластических шарниров, меньшем, чем $n + 1$ для n раз статически неопределимой системы. При этом механизме в предельном состоянии рама не является статически определимой. Такое исчерпание несущей способности часто возникает в балках, например, в балке, изображенной на рис. 10.11.

Возможны случаи, когда предельная нагрузка для двух различных механизмов исчерпания несущей способности оказывается одинаковой и является действительной предельной нагрузкой. Тогда говорят об избыточном исчерпании несущей способности, как например, для рамы, изображенной на рис. 10.12. Для этой рамы, как легко определить изложенными выше методами, предельные нагрузки, соответствующие механизму бокового смещения и комбинированному механизму, равны между собой. Величина их $P_{пр} = 2\frac{M_{пр}}{l}$. Предельная нагрузка, соответствующая балочному механизму, больше: $P_{пр} = 4\frac{M_{пр}}{l}$. Поэтому кинематически возможное состояние получается наложением кинематически возможных состояний для механизма бокового смещения и комбинированного. На рис. 10.13 оно изображено штриховой

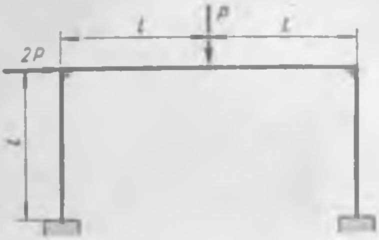


Рис. 10.12. Статически неопределимая рама с избыточным механизмом исчерпания несущей способности

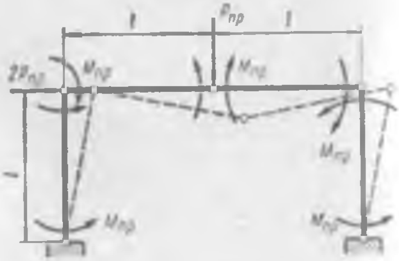


Рис. 10.13. Избыточный механизм исчерпания несущей способности рамы

линией. Механизм, возникающий после образования пяти пластических шарниров, имеет две степени свободы. Уравнение работ в таком случае может быть получено сложением таковых для механизма бокового смещения и комбинированного механизма.

Предельная нагрузка не зависит от величины остаточных напряжений, которые могут возникнуть в ненагруженной конструкции в результате сварки ее элементов, неточности монтажа, осадки опор или предварительного нагружения. Это объясняется тем, что предельная нагрузка определяется из уравнений статики, в которые самоуравновешенные силы не входят.

П р и м е р 3. Плита высотой h с отверстием диаметра d растянута в условиях плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$) силой, величина которой на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу, P, $\frac{\text{МН}}{\text{м}}$ (рис. 10.14).

Примем за статически возможное состояние такое, при котором в заштрихованной части плиты напряжения равны нулю, а в верхней и нижней полосках высотой $\frac{h-d}{2}$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_x = \text{const}.$$

Из условия пластичности (9.5) имеем

$$\sigma_x = 2\tau_T. \tag{10.18}$$

Уравнение равновесия приводит к следующей величине предельной нагрузки, определенной статическим методом:

$$P^* = 2\tau_T\,(h - d). \tag{10.19}$$

Найдем предельную нагрузку кинематическим методом. Выберем за кинематически возможное такое состояние, в котором пластическая область сосредоточена в наиболее ослабленном месте в окрестности отверстия. Тогда поле линий скольжения состоит из логарифмических спиралей, примыкающих к контуру отверстия, и сетки прямых линий (равномерного поля) у прямолинейных границ плиты (рис. 10.14). Эти поля смыкаются в точке C, расстояние которой от центра отверстия r_c. Поля скоростей и напряжений в пластических областях ABC и CDE могут быть легко определены. При этом их мощность положительна $\sigma_{ij}^{**}\xi_{ij}^{**} > 0$, т. е. поля напряжений и скоростей согласованы.

Различные кинематически возможные состояния и соответствующие им нагрузки будут зависеть от положения точки C. Нагрузка для некоторого кинематически возможного состояния

$$P^{**} = 2\int_{\frac{d}{2}}^{r_c} \sigma_t\,dr + 2\int_{r_c}^{\frac{h}{2}} \sigma_x\,dr, \qquad (10.20)$$

где σ_t — окружные напряжения в области ABC; σ_x — напряжения в области CDE.

Напряжения в области ABC, как указывалось выше (см. § 59), определяем по формулам (9.44) и (9.42) при $p_{\text{пр}} = 0$, т. е.

$$\sigma_r = 2\tau_{\text{т}} \ln\frac{2r}{d}, \quad \sigma_t = 2\tau_{\text{т}}\left(1 + \ln\frac{2r}{d}\right). \qquad (10.21)$$

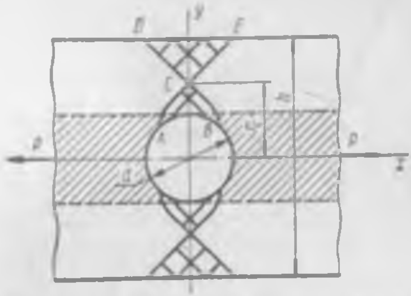


Рис. 10.14. Плита с отверстием, растянутая силой P, МН/м

Напряжение в области CDE подсчитываем по формуле (10.18). Подставляя соотношения (10.21) и (10.18) в выражение (10.20), получаем

$$P^{**} = 2\tau_{\text{т}}(h - d) + 4\tau_{\text{т}}\int_{\frac{d}{2}}^{r_c} \ln\frac{2r}{d}\,dr.$$

Второе слагаемое в этом выражении положительно и увеличивается с увеличением r_c. Поэтому наименьшее значение P^{**} при $r_c = \frac{d}{2}$

$$P^{**}_{\min} = 2\tau_{\text{т}}\ (h - d). \qquad (10.22)$$

Сопоставляя формулы (10.19) и (10.22), заключаем, что нагрузки, соответствующие статически и кинематически возможному состояниям, совпадают, т. е. эти формулы определяют действительную предельную нагрузку и приведенное решение является полным.

П р и м е р 4. Плита высотой h, ослабленная односторонним узким глубоким вырезом, изогнута в условиях плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$) моментом, величина которого на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу, M МН·м/м (рис. 10.15).

Примем за статически возможное состояние такое, при котором в части плиты ниже разреза $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = 0$, $|\sigma_x| = \text{const}$, причем абсолютное значение напряжения σ_x определяется формулой (10.18).

Тогда, как и в случае чистого изгиба плиты, имеем следующую величину предельного изгибающего момента, определенного статическим методом:

$$M^* = |\sigma_x|\frac{a^2}{4} = 2\tau_{\text{т}}\ \frac{a^2}{4} = \frac{\tau_{\text{т}}a^2}{2}. \qquad (10.23)$$

Для нахождения предельного изгибающего момента кинематическим методом выберем за кинематически возможное состояние такое, при котором пластическая область сосредоточена в наиболее ослабленном месте в окрестности выреза. Тогда поле линий скольжения в растянутой области состоит из двух равномерных полей, соединенных центрированным полем, а в сжатой из равномерного поля, как изображено на рис. 10.15. По этим полям напряжений могут быть легко определены поля скоростей.

Для определения напряжений в равномерном поле $OCAD$ заметим, что в плоскости разреза $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = 0$ и, как следует из условия пластичности (9.5),

$$\sigma_y = 2\tau_T,$$

поэтому

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_y}{2} = \tau_T.$$

Величина φ в точках разреза $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Следовательно, согласно первой формуле (9.23) для линии скольжения α

$$\xi = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\pi.$$

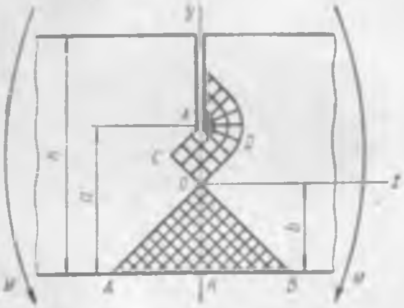


Рис. 10.15. Плита, ослабленная односторонним узким глубоким вырезом, изогнута моментом M, МН·м/м

Располагая этой величиной и учитывая, что для точек OA $\varphi = \frac{\pi}{4}$, по первой формуле (9.21) определяем σ_0 в этих точках

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{\tau_T} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\pi,$$

откуда

$$\sigma_0 = \tau_T(\pi + 1)$$

и, следовательно,

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\tau_T(\pi + 1). \qquad (10.24)$$

Поскольку в точках OA по условию симметрии касательные напряжения τ_{xy} отсутствуют, из условия пластичности (9.5) имеем для этих точек

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_T. \qquad (10.25)$$

Решая уравнения (10.24) и (10.25), получаем нормальное напряжение σ_x в точках OA

$$\sigma_x = \tau_T(\pi + 2). \qquad (10.26)$$

В точках равномерного поля OAB, примыкающего к свободной поверхности плиты, нормальные σ_y и касательные τ_{xy} напряжения равны нулю и поэтому абсолютная величина напряжения σ_x определяется формулой (10.18).

Располагая теперь величинами напряжений σ_x во всех точках AOK, запишем условие равенства нулю нормальной силы в сечении, следом которого является линия AOK

$$\tau_T(\pi + 2)(a - b) - 2\tau_T b = 0,$$

откуда

$$b = \frac{\pi + 2}{\pi + 4}\,a. \qquad (10.27)$$

Величина предельного изгибающего момента, найденного кинематическим методом,

$$M^{**} = \tau_T(\pi + 2)\frac{(a - b)^2}{2} + 2\tau_T\frac{b^2}{2}.$$

Подставляя в это соотношение величину b, по формуле (10.27) получаем

$$M^{**} = \frac{\pi + 2}{\pi + 4}\,\tau_T a^2 = 0{,}720\tau_T a^2. \qquad (10.28)$$

Действительное значение изгибающего момента лежит в интервале между величинами, определенными статическим [формула (10.23)] и кинематическим [формула (10.28)] методами.

Приведенное решение справедливо при условии, что глубина надреза больше, чем размер AC, т. е. при условии, что

$$h - a > a - b,$$

откуда, используя соотношение (10.27), приходим к следующему условию справедливости приведенного решения:

$$h - a > \frac{2}{\pi + 4}\, a = 0{,}280a.$$

Ряд других примеров определения предельных нагрузок для элементов конструкций статическим и кинематическим методами приведен в книгах [8, 11, 17, 24, 28, 31].

Использование статической и кинематической теорем для решения технологических задач дано в книгах [8, 26, 29].

§ 65. Предельное состояние скрученного стержня произвольного поперечного сечения

Рассмотрим определение предельного крутящего момента в случае чистого кручения стержня произвольного поперечного сечения. Как будет показано ниже, рассматриваемая задача статически определима и поэтому полученное решение является полным.

Напомним (см. § 47), что при чистом кручении стержня в поперечных сечениях его возникают только касательные напряжения (рис. 10.16), одинаковым образом распределенные во всех поперечных сечениях, т. е.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \ \tau_{xy} = 0.$$

В предельном состоянии компоненты касательного напряжения в поперечных сечениях стержня τ_{zx} и τ_{zy} должны удовлетворять условию пластичности

$$\tau^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_{\text{т}}^2. \tag{10.29}$$

Так же, как и в § 47, для того чтобы удовлетворить третье уравнение равновесия (7.15), введем функцию напряжений, положив

$$\tau_{zx} = \tau_{\text{т}} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\tau_{\text{т}} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{10.30}$$

Отличие от функции напряжений, введенной в § 47, заключается только в коэффициенте $\tau_{\text{т}}$. Он введен для упрощения последующих формул. Размерность функции напряжений в этом параграфе — метр.

В таком случае условие (10.29) принимает вид

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = 1. \tag{10.31}$$

Как и в задаче упругого кручения [22], для односвязного контура можно принять, что функция напряжений на контуре равна нулю

$$\Phi_{\text{конт}} = 0. \tag{10.32}$$

Предельный крутящий момент связан с функцией напряжений соотношением

$$M = 2\tau_{\text{т}} \int_F \Phi \, dF, \tag{10.33}$$

которое отличается от выражения (7.17) только коэффициентом $\tau_{\text{т}}$.

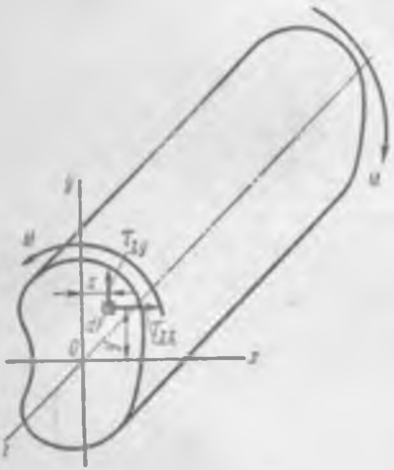


Рис. 10.16. Скрученный брус некруглого поперечного сечения

Из изложенного следует, что для решения задачи предельного состояния скрученного бруса некруглого поперечного сечения необходимо определить функцию напряжений Φ, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (10.31) и краевому условию (10.32), затем предельный крутящий момент можно подсчитать по формуле (10.33).

Найдем направляющие косинусы нормали к поверхности напряжений, уравнение которой

$$z = \Phi(x, y). \tag{10.34}$$

Как известно [21], направляющие косинусы нормали к поверхности, уравнение которой представлено в форме (10.34), определяются формулами:

$$l = \cos(\nu, x) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}};$$

$$m = \cos(\nu, y) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}};$$

$$n = \cos(\nu, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}}.$$

Используя выражение (10.31), получим

$$l = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad m = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, поверхность функции напряжений представляет собой поверхность с постоянным и равным 45° углом наклона нормали к оси z. Такую поверхность называют поверхностью постоянного уклона или постоянного ската.

Величина угла наклона нормали к оси z определяется коэффициентом в формулах (10.30). Если, как это было сделано выше, этот коэффициент принять равным $\tau_т$, угол получается равным 45°.

Представим себе, что на пластинку, имеющую форму поперечного сечения скрученного стержня, находящуюся в горизонтальном положении, насыпан сухой мелкий песок. Образуется холм, естественный откос которого дает представление о функции напряжений Ф. На рис. 10.17 представлены фотографии песчаных насыпей на пластинках, имеющих форму круга, эллипса, прямоугольника, квадрата и равностороннего треугольника, круга с полукруглой выточкой и круга с прямоугольной выточкой.

Аналогия с песчаной насыпью при пластическом кручении стержней была установлена Надаи [10]. На случай многосвязных областей она была распространена Садовским [10].

Аналогия с песчаной насыпью дает возможность экспериментально исследовать пластическое кручение бруса произвольного поперечного сечения и определять величину предельного крутящего момента. Последний на основании соотношения (10.33) пропорционален объему песчаной насыпи на горизонтально расположенной пластинке, имеющей форму поперечного сечения скрученного бруса.

Подсчитаем предельный крутящий момент для некоторых поперечных сечений.

Круглое сечение диаметра d (рис. 10.18). Поверхностью функции напряжений является конус, построенный на поперечном сечении с высотой, равной половине диаметра поперечного сечения.

Согласно выражению (10.33) предельный крутящий момент равен удвоенному объему этого конуса, умноженному на величину предела текучести материала при чистом сдвиге

$$M_{пр} = 2\tau_т \frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} \frac{d}{2} = \tau_т \frac{\pi d^3}{12},$$

что совпадает с формулой, известной из курса сопротивления материалов [16].

Прямоугольное сечение со сторонами b и h ($h \geqslant b$) (рис. 10.19). В рассматриваемом случае поверхностью функции напряжений является «крыша», построенная на прямоугольнике с высотой, равной $\frac{b}{2}$. Объем, ограниченный этой «крышей», включает объем треугольной призмы $STLKVU$ с площадью основания $\frac{b^2}{2}$ и высотой $h - b$ и объем правильной четырехугольной пирамиды, сложенной из двух одинаковых половин $ADSKV$ и $BCTLU$; площадь квадрата основания этой пирамиды b^2, а высота $\frac{b}{2}$.

Предельный крутящий момент $M_{пр}$ равен удвоенному объему, ограниченному «крышей» [см. формулу (10.33)], умноженному на величину предела текучести материала при чистом сдвиге

$$M_{пр} = 2\tau_т \left[\frac{b^2}{4} (h - b) + \frac{1}{3} b^2 \frac{b}{2} \right],$$

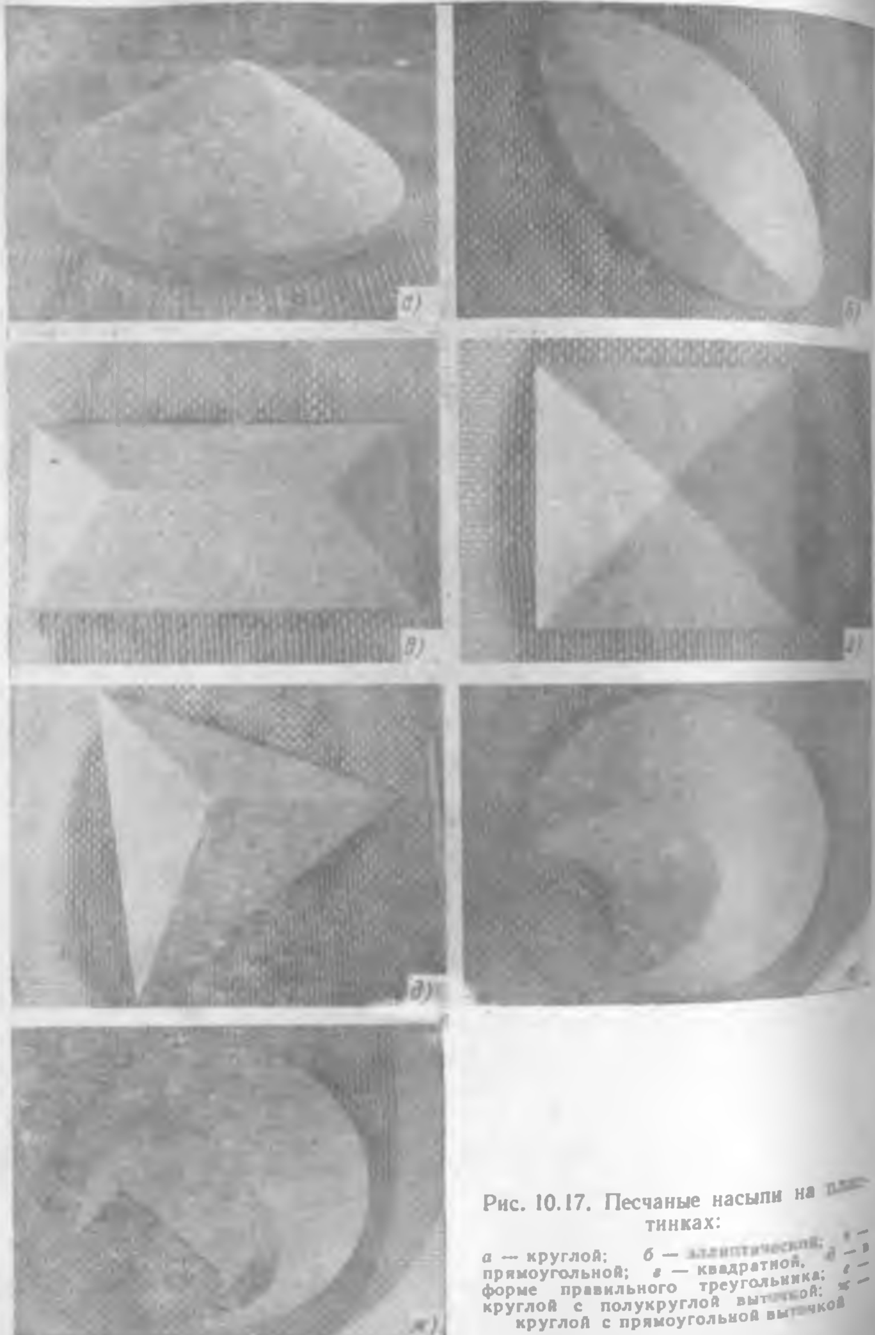


Рис. 10.17. Песчаные насыпи на пластинках:

а — круглой; *б* — эллиптической; *в* — прямоугольной; *г* — квадратной; *д* — в форме правильного треугольника; *е* — круглой с полукруглой выточкой; *ж* — круглой с прямоугольной выточкой

откуда окончательно

$$M_{\text{пр}} = \tau_{\text{т}} \frac{b^2}{6} (3h - b). \tag{10.35}$$

На основании соотношений (10.30) и вида поверхности функции напряжений заключаем, что в предельном состоянии в областях сечения APD и BWC (рис. 10.20) касательные напряжения параллельны оси x, а в областях $APWB$ и $DPWC$ — оси y.

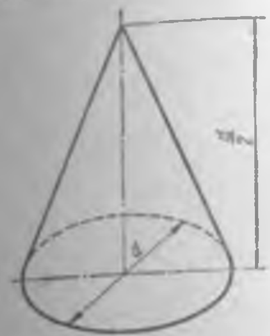


Рис. 10.18. Поверхность функции напряжений для круглого сечения

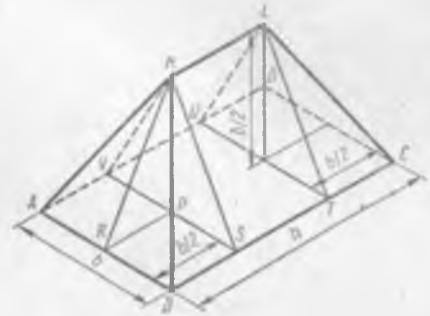


Рис. 10.19. Поверхность функции напряжений для прямоугольного сечения

Величины касательных напряжений равны пределу текучести материала при чистом сдвиге. Линии AP, DP, PW, WB и WC, вдоль которых направления касательных напряжений терпят разрыв, называют линиями разрыва. Как отмечалось выше (см. § 57), они являются предельным положением упругих областей.

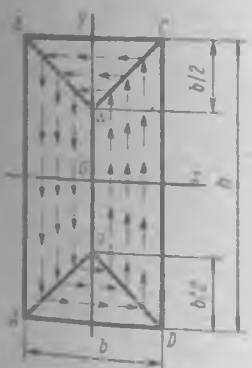


Рис. 10.20. Направление касательных напряжений и линии разрыва (AP, PD, PW, WB, WC) при пластическом кручении бруса прямоугольного поперечного сечения

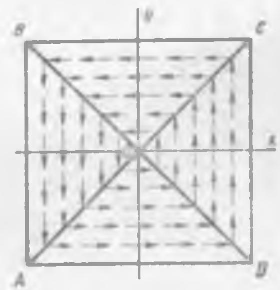


Рис. 10.21. Направление касательных напряжений и линии разрыва (AC и BD) при пластическом кручении бруса квадратного поперечного сечения

Для квадратного сечения (рис. 10.21) линиями разрыва являются диагонали квадрата.

Для тонкой полосы $h \gg b$ пренебрегая в формуле (10.35) величиной b по сравнению с $3h$, получаем

$$M_{\text{пр}} = \tau_{\text{т}} \frac{b^2 h}{2}. \tag{10.36}$$

С е ч е н и е в в и д е р а в н о с т о р о н н е г о т р е у г о л ь н и к а со стороной a (рис. 10.22). Поверхностью функции напряжений является поверхность трехгранной пирамиды высотой $\frac{\sqrt{3}}{6}a$, где a — сторона треугольника. Площадь F основания этой пирамиды равна площади равностороннего треугольника

$$F = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Таким образом, на основании соотношения (10.33) предельный крутящий момент

$$M_{пр} = 2\tau_т \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \frac{\sqrt{3}}{6} a = \tau_т \frac{a^3}{12}. \quad (10.37)$$

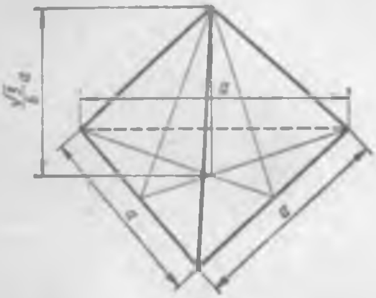


Рис. 10.22. Поверхность функции напряжений для сечения в виде равностороннего треугольника

Рис. 10.23. Деформированная мембрана и поверхность постоянного ската

Решение задачи упруго-пластического кручения стержня некруглого поперечного сечения, даже если диаграмма сдвига не имеет упрочнения, представляет значительные математические трудности. В этом случае кручение может быть экспериментально исследовано при помощи аналогии с песчаной насыпью в сочетании с мембранной аналогией.

Для экспериментального изучения упруго-пластического кручения бруса некруглого поперечного сечения вначале изготовляют жесткую поверхность постоянного ската. Она может быть получена по форме песчаной насыпи. Основание этой поверхности затягивают мембраной. Последнюю нагружают равномерно распределенным давлением. При некоторой величине давления части мембраны придут в соприкосновение с жесткой поверхностью постоянного ската (рис. 10.23). Под частями мембраны, касающимися жесткой поверхности постоянного ската, расположена пластическая область сечения, а под поверхностью свободно деформированной мембраны — упругая.

Поверхность мембраны, прогибы которой ограничены жесткой поверхностью постоянного ската, является поверхностью функции напряжений при упруго-пластическом кручении бруса. Объем, ограниченный ею, пропорционален крутящему моменту, а уклон поверхности мембраны касательному напряжению. На этом принципе основаны специальные приборы для экспериментального изучения упруго-пластического кручения бруса.

На рис. 10.24 представлено полученное экспериментально развитие пластической области при кручении бруса квадратного поперечного сечения. Пластическая область возникает сначала в середине сторон квадрата, где в пределах упругости касательные напряжения являются наибольшими (рис. 10.24, *а*). С увеличением крутящего момента пластические области увеличиваются (рис. 10.24, *б*). При достаточно большом крутящем моменте упругая область практически вырождается в линии разрыва (рис. 10.24, *в*).

Рис. 10.24. Развитие пластических областей при кручении бруса квадратного поперечного сечения. (Упругая область — темная, пластические — светлые)

§ 66. Основные уравнения задачи предельного состояния круглых и кольцевых пластин

Из курса сопротивления материалов известно, что несущая способность балки исчерпывается (балка становится геометрически изменяемой) при наличии в ней упругой области. Решение задачи об упруго-пластическом состоянии пластин связано со значительными трудностями даже в простейшем случае осесимметричного нагружения из материала, диаграмма деформирования которого не имеет упрочнения. Этот вопрос исследован в работах [3—7, 20] и др.

Изучение упруго-пластического изгиба круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин позволило установить, что в отличие от изгиба балок несущая способность пластин в большинстве случаев исчерпывается при отсутствии упругой области, т. е. когда во всех точках пластин интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала.

Как следует из изложенного ниже, в решении задачи определения предельных нагрузок для круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин используются как уравнения равновесия, так и гипотеза о характере деформации пластины (гипотеза прямолинейных нормалей), заменяющая условия совместности деформаций. Поэтому полученное решение будет полным.

При рассмотрении чисто пластического изгиба круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин примем, что срединная плоскость их не растягивается, и используем те же допущения, что и при расчетах пластин в пределах упругости, а именно: 1) точки, расположенные на некоторой прямой, перпендикулярной к срединной плоскости пластины, после ее деформации также лежат на прямой, перпендикулярной деформированной срединной поверхности (гипотеза Кирхгофа), 2) нормальные напряжения в плоскостях, параллельных срединной плоскости, отсутствуют. Как и при расчетах пластин в пределах упругости, будем пренебрегать касательными напряжениями в окружных сечениях и плоскостях, параллельных срединной плоскости. Используя второе допущение, заключаем, что напряженное состояние во всех точках пластин является двухосным.

Дифференциальное уравнение равновесия элемента пластины имеет вид [23]

$$\frac{d}{dr}(M_r r) - M_t = -Qr, \tag{10.38}$$

где M_r и M_t — интенсивности изгибающих моментов соответственно в окружном и радиальном сечениях; Q — интенсивность поперечной силы в окружном сечении.

Интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t связаны с нормальными напряжениями в окружном и радиальном сечениях σ_r и σ_t соотношениями [23]

$$M_r = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z\,dz; \quad M_t = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t z\,dz, \tag{10.39}$$

где z — расстояние от некоторой точки пластины до срединной плоскости; h — толщина пластины.

Зависимости скоростей радиальной ξ_r и окружной ξ_t деформаций от скорости χ угла поворота ϑ нормали к срединной плоскости пластины определяются формулами

$$\xi_r = z\frac{d\chi}{dr}; \quad \xi_t = z\frac{\chi}{r}, \tag{10.40}$$

которые легко получить дифференцированием по времени зависимостей деформаций от угла поворота [23].

Из последних выражений следует, что отношение этих скоростей деформаций

$$\eta = \frac{\xi_r}{\xi_t} = \frac{r}{\chi}\frac{d\chi}{dr} \tag{10.41}$$

является функцией только радиуса r.

Зависимости компонентов скоростей деформаций от компонентов напряжений по теории течения для жестко-пластического материала ($e_0 = 0$) согласно формулам (4.24) имеют вид:

$$\xi_r = \frac{3}{2}\frac{\xi_i}{\sigma_i}(\sigma_r - \sigma_0); \quad \xi_t = \frac{3}{2}\frac{\xi_i}{\sigma_i}(\sigma_t - \sigma_0), \tag{10.42}$$

где σ_i — интенсивность напряжений; ξ_i — интенсивность деформаций; σ_0 — среднее нормальное напряжение.

В рассматриваемом случае ($\sigma_z = 0$) согласно формулам (1.21) и (1.5)

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_t + \sigma_t^2}; \tag{10.43}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{3}. \tag{10.44}$$

Поскольку принимается, что диаграмма деформирования не имеет упрочнения $\sigma_i = \sigma_T$ и, следовательно,

$$\sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_t + \sigma_t^2} = \sigma_T. \tag{10.45}$$

Из выражений (10.41), (10.42) и (10.44) следует, что

$$\eta = \frac{2\sigma_r - \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_r}, \tag{10.46}$$

откуда

$$\sigma_t = \frac{2 + \eta}{2\eta + 1}\sigma_r. \tag{10.47}$$

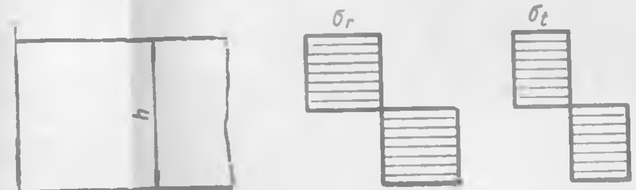


Рис. 10.25. Эпюры окружных и радиальных напряжений по высоте для пластины, находящейся в предельном состоянии

На основании соотношений (10.45) и (10.47), учитывая, что η является функцией только радиуса, заключаем, что напряжения являются функцией только радиуса и, следовательно, в пределах изменения z: $-\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant 0$ и $0 \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}$ напряжения по высоте пластины не изменяются. Эпюры напряжений по высоте пластины имеют вид двух прямоугольников (рис. 10.25). Отличие от эпюры напряжений в сечении пластического шарнира балки только в том, что величины напряжений не равны пределу текучести материала.

Учитывая последнее из формул (10.39), устанавливаем, что

$$M_r = \sigma_r\frac{h^2}{4}; \quad M_t = \sigma_t\frac{h^2}{4}. \tag{10.48}$$

Выражая напряжения через интенсивности изгибающих моментов и подставляя их в соотношение (10.45), получаем

$$M_r^2 - M_r M_t + M_t^2 = M_T^2, \tag{10.49}$$

где

$$M_T = \sigma_T\frac{h^2}{4}. \tag{10.50}$$

Как следует из формулы (10.50), величина $M_т$ определяется только пределом текучести материала и толщиной пластины h, и для рассматриваемой пластины — постоянная величина.

Уравнения (10.38) и (10.49) являются основными уравнениями для исследования несущей способности пластин.

Краевые условия имеют вид:

1) для круглой пластины в центральной точке $M_r = M_t$;

2) для пластины, нагруженной по контуру равномерно распределенным моментом интенсивности m на контуре $M_r = -m$;

3) для пластины со свободным или опертым контуром $M_r = 0$;

4) для пластины с заделанным контуром $\vartheta = 0$; $\chi = 0$ и, как следует из соотношений (10.40), (10.42), (10.44) и (10.48), $\sigma_r = 2\sigma_t$ и $M_r = 2M_t$.

§ 67. Примеры определения предельных нагрузок для круглых и кольцевых пластин

Для удобства интегрирования основных уравнений целесообразно, как и в § 35, ввести функцию ψ, через которую интенсивности изгибающих моментов выражаются следующим образом:

$$M_r = \frac{2}{\sqrt{3}} M_т \cos\psi, \quad M_t = \frac{2}{\sqrt{3}} M_т \cos\left(\psi - \frac{\pi}{3}\right). \tag{10.51}$$

В таком случае соотношение (10.49) удовлетворяется тождественно.

Подставим интенсивности изгибающих моментов по формулам (10.51) в дифференциальное уравнение равновесия (10.38).

Тогда после преобразований получим

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin\psi\, d\psi}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{Qr}{M_т} - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)}. \tag{10.52}$$

Полученное уравнение интегрируется в замкнутой форме, если $Q = 0$ (чистый изгиб) и если

$$Q = \frac{a}{r}, \tag{10.53}$$

где a — постоянная.

Это справедливо при нагружении пластины сосредоточенной силой в центре, а также при нагружении пластины силой, равномерно распределенной по окружности, концентричной контуру. В других случаях интегрирование этого уравнения может быть проведено численными методами.

Рассмотрим вначале интегрирование уравнения (10.52) при $Q = 0$. В этом случае

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\sin\psi\, d\psi}{\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Выведенное уравнение совпадает с уравнением, полученным в § 35. Интеграл его имеет вид

$$\frac{C}{r^2} = \exp(\sqrt{3}\psi)\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right), \tag{10.54}$$

где C — постоянная интегрирования.

Рассмотрим примеры использования полученного интеграла для определения предельных нагрузок.

Пример 1. Круглая пластина радиуса r_2 нагружена на контуре равномерно распределенным моментом $m_{\text{пр}}$ (рис. 10.26).

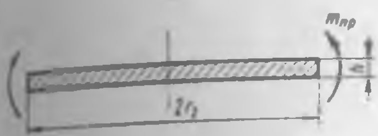


Рис. 10.26. Круглая пластина нагружена на контуре равномерно распределенным моментом

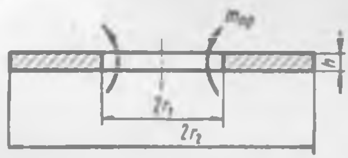


Рис. 10.27. Кольцевая пластина нагружена на внутреннем контуре равномерно распределенным моментом

В рассматриваемом случае $Q = 0$. Краевые условия имеют вид:

$$\text{при } r = 0 \ M_r = M_t;$$

$$\text{при } r = r_2 \ M_r = m_{\text{пр}}.$$

Из первого краевого условия, используя соотношения (10.51) и (10.54), получаем

$$\psi_1 = \frac{\pi}{6}, \quad C = 0$$

и, следовательно, для всех значений r $\psi = \frac{\pi}{6}$. Учитывая это, из второго краевого условия устанавливаем

$$m_{\text{пр}} = M_{\text{T}}.$$

Пример 2. Кольцевая пластина радиусов r_1 и r_2 нагружена на внутреннем контуре равномерно распределенным моментом $m_{\text{пр}}$ (рис. 10.27).

Как и в предыдущем случае, $Q = 0$. Краевые условия имеют вид:

$$\text{при } r = r_1 \ M_r = m_{\text{пр}};$$

$$\text{при } r = r_2 \ M_r = 0.$$

Из второго краевого условия, используя соотношения (10.51) и (10.54), а также учитывая, что на наружном контуре интенсивность изгибающего момента M_t отрицательна, получаем значение функции ψ на наружном контуре — ψ_2 и величину постоянной C:

$$\psi_2 = \frac{3}{2}\pi; \quad C = -\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi\right) r_2^2. \tag{10.55}$$

Из первого краевого условия, используя соотношения (10.51), (10.54) и (10.55), устанавливаем

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left[\sqrt{3}\left(\psi_1 - \frac{3}{2}\pi\right)\right] \sin\left(\psi_1 - \frac{\pi}{6}\right); \tag{10.56}$$

$$m_{\text{пр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} M_{\text{T}} \cos\psi_1, \tag{10.57}$$

где ψ_1 — значение функции ψ на внутреннем контуре при $r = r_1$.

Из уравнения (10.56) по заданному отношению $\frac{r_2}{r_1}$ может быть определена величина ψ_1, после чего по формуле (10.57) подсчитана предельная интенсивность момента.

Формула (10.57) дает возможность заключить, что наибольшая предельная интенсивность момента возникает при $\psi_1 = 2\pi$

$$m_{\text{пр max}} = \frac{2}{\sqrt{3}} M_{\text{T}}.$$

Величине $\psi_1 = 2\pi$ согласно формуле (10.56) соответствует

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) = (2{,}963)^2.$$

Таким образом, если отношение наружного радиуса к внутреннему превышает величину $\frac{r_2}{r_1} = 2{,}963$, никакая интенсивность не в состоянии привести к исчерпанию несущей способности пластины. Часть ее всегда остается упругой. Напомним, что аналогичный результат был получен в § 37 при рассмотрении несущей способности диска постоянной толщины, нагруженного внутренним давлением.

Разберем теперь интегрирование уравнения (10.52) при выполнении соотношения (10.53). Тогда получим

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin\psi\, d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)}, \tag{10.58}$$

где

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{M_{\text{T}}}. \tag{10.59}$$

Интеграл этого дифференциального уравнения определяется выражением

$$\ln\frac{C}{r^3} = \sqrt{3}\psi + \ln\left[b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)\right] - \sqrt{3}\, b \int \frac{d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)}, \tag{10.60}$$

где C — постоянная интегрирования.

Последний интеграл берется различно в зависимости от величины b по сравнению с единицей.

Разберем пример использования полученного интеграла для определения предельной нагрузки в одном частном случае.

Пример 3. Круглая пластина оперта по контуру и нагружена сосредоточенной силой $P_{пр}$, приложенной в центре пластины (рис. 10.28).

В этом случае

$$Q = -\frac{P_{пр}}{2\pi r}$$

и, следовательно, согласно соотношениям (10.53) и (10.59)

$$a = \frac{P_{пр}}{2\pi}; \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P_{пр}}{2\pi M_T}. \tag{10.61}$$

Краевые условия имеют вид:

при $r = 0$ $M_r = M_t$; при $r = r_2$ $M_r = 0$.

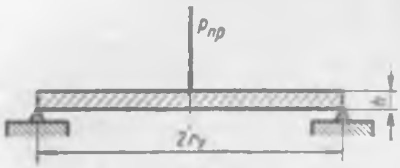


Рис. 10.28. Круглая пластина оперта по контуру и нагружена в центральной точке сосредоточенной силой

Из этих условий устанавливаем значения функции ψ в центральной точке и на контуре:

при $r = 0$

$$\psi_1 = \frac{\pi}{6}; \tag{10.62}$$

при $r = r_2$

$$\psi_2 = \frac{\pi}{2}. \tag{10.63}$$

Проинтегрируем теперь уравнение (10.58), используя соотношение (10.63). Тогда получим

$$\ln \frac{r}{r_2} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\psi} \frac{\sin \psi \, d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)}. \tag{10.64}$$

Из выражения (10.62) следует, что интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin \psi \, d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)} \tag{10.65}$$

расходится. Поскольку пределы интегрирования конечны, подынтегральная функция при некотором значении аргумента должна обращаться в бесконечность.

Из соотношений (10.58), (10.62) и (10.63) заключаем, что

$$b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0.$$

Поскольку в рассматриваемом интервале изменения $\frac{\pi}{6} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$ наибольшее значение $\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)$ равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, устанавливаем, что $b \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Для того чтобы подынтегральная функция в выражении (10.65) обращалась в бесконечность, необходимо выполнение равенства

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{10.66}$$

Тогда подынтегральная функция будет обращаться в бесконечность при $\psi = \frac{\pi}{2}$. Выполняя интегрирование в выражении (10.60) для $b > 1$ заключаем, что интеграл (10.65) для полученной величины b расходится.

Сопоставляя формулы (10.61) и (10.66), получаем

$$P_{\text{пр}} = 2\pi M_{\text{т}}. \tag{10.67}$$

§ 68. Использование условия пластичности Треска—Сен-Венана в исследованиях несущей способности круглых пластин

Использование условия пластичности Треска—Сен-Венана позволяет значительно упростить определение предельных нагрузок для круглых пластин. Как было отмечено в § 18 в случае плоского напряженного состояния замена условия пластичности Хубера—Мизеса условием пластичности Треска—Сен-Венана равносильна замене эллипса в координатах главных напряжений вписанным в него шестиугольником (см. рис. 3.4). В координатах интенсивностей изгибающих моментов такая замена равносильна замене эллипса [уравнение (10.49)] вписанным в него шестиугольником (рис. 10.29). Поэтому при использовании условия пластичности Треска—Сен-Венана в зависимости от соотношений между интенсивностями изгибающих моментов условие пластичности записывается по-разному.

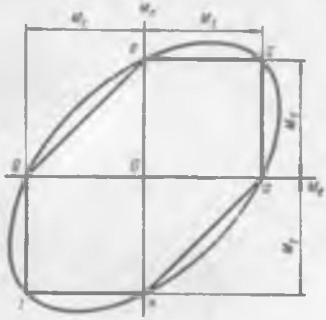


Рис. 10.29. График зависимости между интенсивностями окружного и радиального моментов по условию пластичности Хубера—Мизеса (эллипс) и условию пластичности Треска—Сен-Венана (шестиугольник)

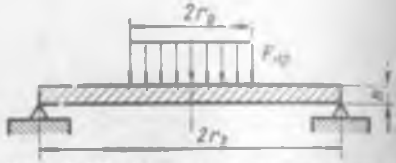


Рис. 10.30. Круглая пластина радиуса r_2 оперта по контуру и нагружена равномерно распределенной по контуру радиуса r_0 нагрузкой

Рассмотрим на двух примерах использование условия пластичности Треска—Сен-Венана для определения предельных нагрузок круглых пластин.

Пример 4. Круглая пластина радиуса r_2 оперта по контуру и нагружена равномерно распределенной по кругу радиуса r_0 нагрузкой интенсивности $p_{\text{пр}}$ (рис. 10.30).

В рассматриваемом случае уравнения для поперечных сил записываются следующим образом:

при $0 \leqslant r \leqslant r_0$

$$Q = \frac{p_{\text{пр}} r}{2}; \tag{10.68}$$

при $r_0 \leqslant r \leqslant r_2$

$$Q = \frac{p_{\text{пр}} r_0^2}{2r}. \tag{10.69}$$

Краевые условия имеют вид:

при $r = 0$ $\quad M_r = M_t$;
при $r = r_0$ $\quad (M_r)_1 = (M_r)_2$;
при $r = r_2$ $\quad M_r = 0$,

где индексами «1» и «2» обозначены первый ($0 \leqslant r \leqslant r_0$) и второй ($r_0 \leqslant r \leqslant r_2$) участки.

Из первого краевого условия заключаем, что центральной точке пластины соответствует точка c на рис. 10.29. В окрестности ее возможны пластические состояния, изображаемые точками, лежащими на прямых ca или ce.

Докажем, что в рассматриваемом случае будет пластическое состояние ca. Для этого представим дифференциальное уравнение (10.38) в виде

$$r \frac{dM_r}{dr} + M_r - M_t + Qr = 0. \tag{10.70}$$

Для пластического состояния ce $M_r = M_{\text{T}}$ и поэтому $\frac{dM_r}{dr} = 0$. Далее, как следует из рис. 10.29, для пластического состояния ce $M_r - M_t > 0$. Поскольку $Q > 0$, то из дифференциального уравнения (10.70) следует, что $\frac{dM_r}{dr} < 0$. Это противоречит полученному ранее результату. Следовательно, пластическое состояние ce невозможно.

Допустим, что возникает пластическое состояние ca. В этом случае

$$M_t = M_{\text{T}}, \tag{10.71}$$

и из уравнения (10.38), используя соотношения (10.68), (10.69) и (10.71), получаем дифференциальные уравнения при $0 \leqslant r \leqslant r_0$

$$\frac{d}{dr}(M_r r) = M_{\text{T}} - \frac{p_{\text{пр}} r^2}{2},$$

при $r_0 \leqslant r \leqslant r_2$

$$\frac{d}{dr}(M_r r) = M_{\text{T}} - \frac{p_{\text{пр}} r_0^2}{2}.$$

Интегралы этих уравнений имеют вид:
при $0 \leqslant r \leqslant r_0$

$$M_r = M_{\text{T}} - \frac{p_{\text{пр}} r^2}{6} + \frac{C_1}{r}; \tag{10.72}$$

при $r_0 \leqslant r \leqslant r_2$

$$M_r = M_{\text{T}} - \frac{p_{\text{пр}} r_0^2}{2} + \frac{C_2}{r}. \tag{10.73}$$

Из первого краевого условия, используя соотношение (10.75), устанавливаем

$$C_1 = 0. \tag{10.74}$$

Из второго краевого условия получаем

$$C_2 = \frac{p_{\text{пр}} r_0^3}{3}. \tag{10.75}$$

Используя третье краевое условие, находим предельную интенсивность равномерно распределенной нагрузки

$$p_{пр} = \frac{6M_T r_2}{3r_0^2 r_2 - 2r_0^3}. \qquad (10.76)$$

В случае равномерного распределения нагрузки по всей пластине ($r_0 = r_2$) из уравнения (10.76) имеем

$$p_{пр} = 6\,\frac{M_T}{r_2^2}.$$

В результате решения этой задачи на основе условия пластичности Хубера—Мизеса при помощи численного интегрирования дифференциального уравнения получаем [20]

$$p_{пр} = 6{,}5\,\frac{M_T}{r_2^2}.$$

Рис. 10.31. Круглая пластина заделана по контуру и нагружена равномерно распределенной нагрузкой

Для того чтобы из уравнения (10.76) получить величину предельной силы для пластины, нагруженной сосредоточенной силой в центре, представим это уравнение в виде

$$p_{пр}\pi r_0^2 = \frac{6\pi M_T r_2}{3r_2 - 2r_0}.$$

Положим, что при $r_0 \to 0$ $p_{пр}\pi r_0^2 \to P_{пр}$. Тогда

$$P_{пр} = 2\pi M_T,$$

т. е. получен такой же результат, как и в решении этой задачи на основе условия пластичности Хубера—Мизеса (см. пример 3).

Пример 5. Круглая пластина заделана по контуру и нагружена равномерно распределенной нагрузкой (рис. 10.31).

В рассматриваемом случае пластину можно разбить на две области. В первой ($0 \leqslant r \leqslant r_0$) возникает пластическое состояние ca, а во второй ($r_0 \leqslant r \leqslant r_2$) пластическое состояние ak. Интенсивность поперечной силы как в первой, так и во второй области определяется формулой (10.68), а интенсивность радиального момента в первой области — соотношениями (10.72) и (10.74). Радиус границы областей определяем из условия

$$\text{при } r = r_0 \ \ M_r = 0. \qquad (10.77)$$

Используя соотношения (10.72) и (10.74), получаем

$$r_0^2 = \frac{6M_T}{p_{пр}}, \qquad (10.78)$$

Дифференциальное уравнение для интенсивности радиального момента во второй области получаем из соотношения (10.70), используя уравнение для интенсивности поперечной силы (10.68) и учитывая, что уравнение прямой ak

$$M_t - M_r = M_T.$$

В результате устанавливаем

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{M_T}{r} - \frac{p_{пр} r}{2}.$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$M_r = M_T \ln\frac{r}{r_0} - \frac{p_{пр} r^2}{2} + C_2. \qquad (10.79)$$

Постоянную C_2 определяем из соотношения (10.77)

$$C_2 = \frac{p_{пр} r_0^2}{2}.$$

Подставим эту величину постоянной в уравнение (10.79). Тогда получим

$$M_r = M_T \ln\frac{r}{r_0} - \frac{p_{пр}\left(r^2 - r_0^2\right)}{4}. \qquad (10.80)$$

В рассматриваемом случае в заделанном сечении не может быть выполнено условие $M_r = 2M_t$, так как согласно прямой ak интенсивности изгибающих моментов M_r и M_t имеют разные знаки. В заделанном сечении образуется круговой пластический шарнир. Поэтому при $r = r_2$ $M_r = -M_T$.

Из этого соотношения, используя уравнение (10.80) и выражение (10.78), получаем трансцендентное уравнение для радиуса границы двух областей

$$5 + 2\ln\frac{r_2}{r_0} - 3\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 = 0.$$

Корень этого уравнения

$$\frac{r_0}{r_2} = 0{,}730.$$

Подставляя эту величину в формулу (10.78), находим величину предельной интенсивности нагрузки

$$p_{пр} = 11{,}3\,\frac{M_T}{r_2^2}.$$

§ 69. Понятие о приспособляемости

При повторных нагружениях конструкции за пределами упругости возможны следующие три случая деформирования какого-либо из ее элементов: 1) знакопеременная пластическая деформация; 2) нарастание с каждым циклом постоянной по знаку пластической деформации; 3) прекращение после одного или нескольких первых циклов роста пластической деформации и переход конструкции к чисто упругому поведению.

В первом случае результатом повторных нагружений может быть разрушение усталостного характера (малоцикловая усталость). Неограниченный рост односторонней деформации (второй случай) может привести к нарушению условий эксплуатации конструкции или к исчерпанию пластических свойств материала и разрушению. Что касается возможности перехода к чисто упругому поведению в третьем случае, то она связана с возникновением в системе некоторого распределения остаточных напряжений в результате пластического деформирования на первых этапах нагружения. Если эта возможность реализуется, то говорят, что конструкция приспособилась к повторным нагружениям данного типа.

Таким образом, возникает задача об определении максимальных интервалов изменения приложенных внешних воздействий, при которых приспособляемость конструкции еще возможна. При этом последовательность нагружения по условию задачи может быть произвольной или заданной.

При анализе условий приспособляемости обычно используется диаграмма идеального упруго-пластического тела (см. рис. 4.4.). Рассмотрим два примера, иллюстрирующих явление приспособляемости.

Пример 1. Допустим, что конструкция состоит из стального стержня и медной трубки, связанных с параллельными жесткими плитами, к которым приложены две равные противоположно направленные силы P (рис. 10.32). Будем обозна-

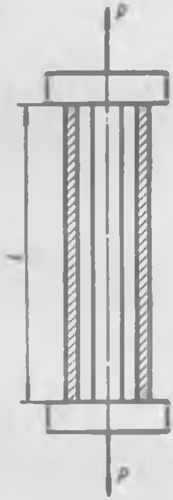
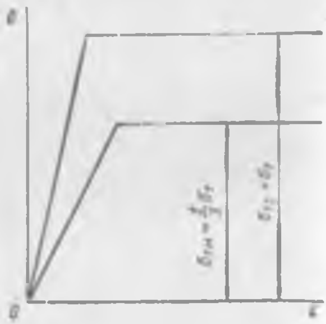


Рис. 10.32. Стержневая система (к примеру исследования приспособляемости)

Рис. 10.33. Диаграммы растяжения материалов стержней



чать величины, относящиеся к стальному стержню, индексом «с», а к медной трубке — индексом «м». Примем, что $F_c = F$, $F_м = 3F$. Диаграммы растяжения материалов стержней изображены на рис. 10.33. Примем, что $E_c = 2E$; $E_м = E$; $\sigma_{тc} = \sigma_T$, а $\sigma_{тм} = \frac{2}{3}\sigma_T$. Будем считать, что диаграммы сжатия совпадают с диаграммами растяжения.

Решив рассматриваемую статически-неопределимую задачу в пределах упругости, получим

$$N_c = \frac{2}{5}P, \quad N_м = \frac{3}{5}P. \tag{10.81}$$

Обозначим через $N_{тc}$ и $N_{тм}$ величины внутренних сил в стержнях, при которых напряжения в стержнях достигают предела текучести. Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} N_{тc} &= \sigma_T F = N_T;\\ N_{тм} &= \frac{2}{3}\sigma_T 3F = 2N_T. \end{aligned}\right\} \tag{10.82}$$

Сопоставляя выражения (10.81) и (10.82), устанавливаем значение силы $P = P_T$, при превышении которой в системе возникнут пластические деформации (в стальном стержне)

$$P_T = \frac{5}{2}N_T.$$

Предельную нагрузку найдем, подставляя величины (10.82) в уравнение равновесия

$$N_с + N_м = P. \tag{10.83}$$

Тогда получим

$$P_{пр} = 3N_Т. \tag{10.84}$$

Допустим теперь, что система вначале нагружается силой P_1, величина которой находится в интервале $P_Т \leqslant P_1 \leqslant P_{пр}$, а затем разгружается.

Тогда при нагружении

$$N_с = N_Т \tag{10.85}$$

и, как это следует из уравнения равновесия (10.83),

$$N_м = P_1 - N_Т. \tag{10.86}$$

Уменьшение нормальных усилий при разгрузке, согласно закону разгрузки, определяем по формулам (10.81)

$$N_с^{разгр} = \frac{2}{5} P_1; \quad N_м^{разгр} = \frac{3}{5} P_1.$$

Остаточные усилия после полной разгрузки

$$N_с^{ост} = N_с - N_с^{разгр} = N_Т - \frac{2}{5} P_1 = -\left(\frac{2}{5} P_1 - N_Т\right);$$

$$N_м^{ост} = P_1 - N_Т - \frac{3}{5} P_1 = \frac{2}{5} P_1 - N_Т.$$

Предположим далее, что после разгрузки система нагружается некоторой силой P_2, направление которой противоположно направлению силы P_1, т. е. сила P_2 сжимает стержень и трубку. (Под P_1 и P_2 подразумеваем абсолютные значения соответствующих сил).

Если при вторичном нагружении пластические деформации не образуются, то внутренние силы, возникающие за счет нагружения силой P_2, по-прежнему выражаются формулами (10.81). Суммарные силы (с учетом остаточных)

$$\left.\begin{aligned} N_с &= -\frac{2}{5} P_2 - \left(\frac{2}{5} P_1 - N_Т\right); \\ N_м &= -\frac{3}{5} P_2 + \frac{2}{5} P_1 - N_Т. \end{aligned}\right\} \tag{10.87}$$

Сопоставляя выражения (10.87) и (10.82), заключаем, что пластические деформации при сжатии возникают вначале в стальном стержне. Для определения значения силы P_2, при которой напряжения в этом стержне достигнут предела текучести (при сжатии), необходимо приравнять первое выражение (10.87) усилию текучести $-N_Т$. Тогда получим

$$-\frac{2}{5} P_2 - \left(\frac{2}{5} P_1 - N_Т\right) = -N_Т,$$

откуда

$$P_1 + P_2 = 5N_Т. \tag{10.88}$$

При соблюдении условия (10.88) повторные нагружения (растяжение силой P_1, затем сжатие силой P_2) не будут приводить к пластическому деформированию. Результат становится более отчетливым, если (10.88) переписать в виде

$$P_1 + P_2 = 2P_Т.$$

Отсюда ясно, что знакопеременное пластическое течение при повторных нагружениях не возникает, если изменение силы не превышает удвоенного значения силы, при котором в наиболее напряженном (стальном) стержне возникают пластические деформации.

Кроме того, на величины нагрузок P_1 и P_2 должно быть наложено еще одно ограничение — они не должны достигать предельного значения (10.84), при котором несущая способность системы исчерпывается.

Полученные результаты можно проиллюстрировать с помощью графического построения (рис. 10.34). Здесь прямая AB, отсекающая на координатных осях отрезки, равные $5N_{\text{т}}$, построена по уравнению приспособляющих нагрузок (10.88). Нанесем на том же чертеже две горизонтальные CK и ML и две вертикальные прямые DK и RL, отсекающие на осях координат отрезки $P_{\text{т}} = 2{,}5N_{\text{т}}$ и $P_{\text{пр}} = 3N_{\text{т}}$. Тогда получим несколько характерных областей нагружения. Каждая точка на плоскости P_1, P_2 характеризует цикл нагружения (сначала растяжение силой P_1, а потом сжатие силой P_2 или наоборот). Если точка лежит в области $ORLM$, то тогда $P_1 < P_{\text{т}}$ и $P_2 < P_{\text{т}}$. Поэтому при таком цикле пластические деформации не возникают. Если точка лежит в областях $MCFL$ или $LEDR$, то тогда $P_2 > P_{\text{т}}$ или $P_1 > P_{\text{т}}$, но $P_1 + P_2 < 5N_{\text{т}}$. Следовательно, в этом случае пластические деформации возникнут при первом нагружении, а затем система приспособится. Если точка, изображающая цикл, лежит в области FKE, то тогда $P_1 + P_2 > 5N_{\text{т}}$ и поэтому при таком цикле возникают знакопеременные пластические деформации в стальном стержне. Наконец, если точка, изображающая цикл, лежит вне или на границе квадрата $ODKC$, то $P_1 \geqslant P_{\text{пр}}$ или $P_2 \geqslant P_{\text{пр}}$. Поэтому в этом случае уже при первом нагружении исчерпывается несущая способность конструкции и, следовательно, область вне квадрата $ODKC$, включая и его границу, является областью неосуществимых циклов.

Пример 2. Рассмотрим толстостенную трубу, нагруженную внутренним давлением (см. рис. 6.1). Величина внутреннего давления $p_{\text{т}}$, при котором в трубе возникают пластические деформации (на внутренней поверхности), может быть установлена по формуле (6.20), если подставить в нее $r_{\text{т}} = r_1$:

$$p_{\text{т}} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right). \tag{10.89}$$

Предельное давление, при котором исчерпывается несущая способность трубы (пластическая область распространяется на все сечение ее $r_{\text{т}} = r_2$) определяется формулой (6.29).

После нагружения трубы давлением p ($p_{\text{т}} < p < p_{\text{пр}}$) и разгрузки в ней возникают остаточные напряжения. Вычисление их было разобрано в § 34.

Разгрузка будет упругой, если в наиболее напряженных точках внутренней поверхности трубы интенсивность остаточных напряжений меньше предела текучести материала $\sigma_i^{\text{ост}} \leqslant \sigma_{\text{т}}$. Если интенсивность остаточных напряжений равна пределу текучести материала, то при повторном нагружении для образования пластических деформаций необходимо вначале приложить давление $p_{\text{т}}$, которое приведет к снижению интенсивности напряжений в точках внутренней поверхности до нуля, а затем для образования пластических деформаций в точках этой поверхности (при интенсивности напряжений, равной пределу текучести материала) увеличить это давление до $2p_{\text{т}}$.

Таким образом, при повторном нагружении пластические деформации не возникнут, если давление будет меньше $2p_{\text{т}}$. Для того чтобы несущая способность трубы не была исчерпана, давление должно быть меньше предельного.

На рис. 10.35 представлены графики зависимости от отношения радиусов $\frac{r_2}{r_1}$ величин $2\sqrt{3}\,\frac{p_{\text{т}}}{\sigma_{\text{т}}}$ и $\sqrt{3}\,\frac{p_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{т}}}$. Пересечение этих графиков имеет место при $\frac{r_2}{r_1} = 2{,}22$.

Таким образом, при $\frac{r_2}{r_1} < 2{,}22$ $p_{\text{пр}} < 2p_{\text{т}}$ и при $p < p_{\text{пр}}$ первый процесс разгрузки и все последующие процессы нагрузки и разгрузки не приводят к пластическим деформациям. При $\frac{r_2}{r_1} > 2{,}22$ $p_{\text{пр}} > 2p_{\text{т}}$ и при первом процессе разгрузки могут возникнуть пластические деформации. Если $p < 2p_{\text{т}}$, вторичный процесс нагрузки не приведет к пластическому деформированию. Область давлений, при которых в трубе не будут возникать пластические деформации при вторичном и последующих процессах нагрузки и разгрузки, ограничена линией, отмеченной штрихами на рис. 10.35.

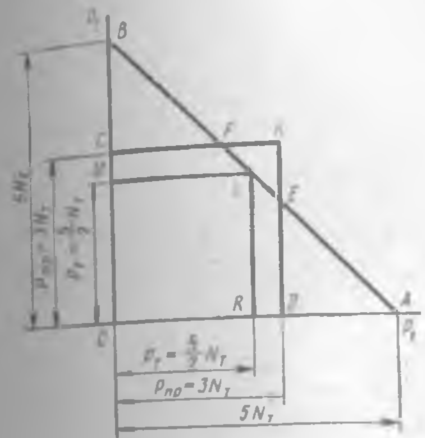


Рис. 10.34. Диаграмма приспособляемости для стержневой системы

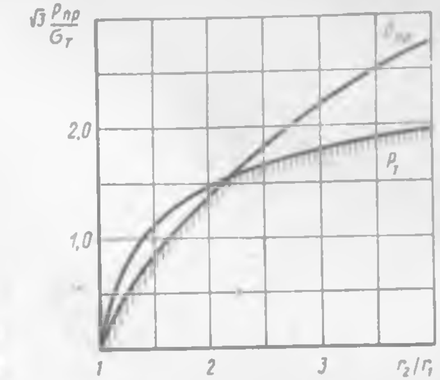


Рис. 10.35. Графики зависимости удвоенного давления, при котором возникают пластические деформации при первом нагружении, и предельного давления от отношения наружного радиуса трубы к внутреннему

Рассмотренные два примера приспособляемости являются простейшими.

Более сложным задачам приспособляемости посвящены работы [2, 11—15, 17—19, 24, 25]. Систематическое изложение теории приспособляемости дано в книге [2].

Список литературы

1. **Гвоздев А. А.** Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М., Стройиздат, 1949, 280 с.
2. **Гохфельд Д. А.** Несущая способность конструкций в условиях теплосмен. М., «Машиностроение», 1970, 259 с.
3. **Григорьев А. С.** Об изгибе круглой плиты за пределом упругости.— «Прикладная математика и механика», 1952, т. XVI, вып. I, с 111—115.
4. **Григорьев А. С.** Изгиб круглой плиты при линейном упрочнении материала — «Инженерный сборник», 1952, т XIII, с. 31—46.
5. **Григорьев А. С.** Изгиб круговых и кольцевых пластин переменной и постоянной толщины за пределами упругости — «Инженерный сборник», 1954, т. XX, с. 59—100.
6. **Григорьев А. С.** Изгиб круглой защемленной пластинки за пределами упругости. — «Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение», 1962, № 6, с. 83—87.
7. **Ильюшин А. А.** Пластичность, М., ГИТТЛ, 1948, 376 с.
8. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969, 420 с.
9. **Койтер В. Т.** Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М., Изд. иностр. лит., 1961, 79 с.

10. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд. иностр. лит., 1954, 647 с.
11. Ния Б. Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов. М., Госстройиздат, 1961, 315 с.
12. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально-пластических тел: Изд. иностр. лит., 1956, 398 с.
13. Прагер В. Проблемы теории пластичности. М., Физматгиз, 1958, 136 с.
14. Прагер В. Расчет конструкций за пределом упругости при циклических температурных воздействиях.— «Механика. Сборники переводов и обзоров иностранной периодической литературы», 1957, № 3, с. 104—111.
15. Прагер В. Приспособляемость в упруго-пластической среде, подвергнутой циклам нагрузки и температуры.— «Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей», 1958, № 5, с. 121—125.
16. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1962, 455 с.
17. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала. М., Госстройиздат, 1954, 287 с.
18. Розенблюм В. И. О приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел.— «Известия АН СССР. ОТН», 1957, № 7, с. 136—138.
19. Розенблюм В. И. К теории приспособляемости упруго-пластических тел.— «Известия АН СССР. ОТН», 1958, № 6, с. 47—53.
20. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969, 608 с.
21. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М., Физматгиз, 1958, 628 с.
22. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М., Физматгиз, 1959; 364 с.
23. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., «Наука» 1974, 559 с.
24. Ходж Ф. Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. М., Машгиз, 1963, 308 с.
25. Ходж Ф. Г. Приспособляемость упруго-пластических конструкций.— В кн.: Остаточные напряжения в металлах и металлических конструкциях. М., Изд. иностр. лит., 1957, с. 186—213.
26. Avitzur B. Metal forming processes and analysis, Mc. Graw—Hill book company, 1968, 500 p.
27. Calladine C. R. Engineering plasticity, Pergamon press, 1969, 318 p.
28. Dietrich L., Miastkowski J., Szczepinski W. Nosnosc graniczna elementów konstrukcji, Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1970, 271 s.
29. Johnson W. Mellor P. B. Plasticity for mechanical engineers, D. Van Nostrand Company LTD, 1962, 412 p.
30. Spencer G. S., Introduction to plasticity, Chapman and Hall, 1968, 118 p.
31. Szczepinski W. Projektowanie elementów maszyn metodą nosności granicznej, Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1968, 129 s.
32. Teoria plastyczności, Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1965, 399 s. Aut.: Z. Marciniak, Z. Mróz, W. Olszak i inni.

РАЗДЕЛ III. ПОЛЗУЧЕСТЬ

ГЛАВА XI

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

§ 70. Ползучесть и релаксация напряжений

Напряжения и деформации, возникшие при нагружении деталей, изменяются во времени, даже если нагрузки остаются постоянными. Это явление называют ползучестью материала. Одну сторону этого явления — изменение во времени деформаций — называют собственно ползучестью или последействием, а другую — изменение во времени напряжений — релаксацией.

Последействие может быть упругим и пластическим. При упругом последействии деформации, возникшие во времени, после разгрузки уменьшаются и с течением времени совсем исчезают, при пластическом они в основном необратимые и после разгрузки уменьшаются во времени медленно и в незначительной степени.

На рис. 11.1 графически изображены процессы упругого (рис. 11.1, *а*) и пластического (рис. 11.1, *б*) последействия в случае постоянного во времени напряжения, меньшего предела пропорциональности материала при температуре испытания.

Деформация, возникшая при нагружении (OA), равная $\frac{\sigma}{E}$, с течением времени увеличивается (кривая AB). При разгрузке уменьшение деформации (BC) так же, как и в случае кратковременного испытания на растяжение, равно упругой деформации $\frac{\sigma}{E}$. В дальнейшем после разгрузки деформации уменьшаются (кривая CD). Это явление называют обратным последействием или обратной ползучестью. Ниже оно будет рассмотрено более подробно.

В случае упругого последействия возникшие во времени деформации исчезают полностью (рис. 11.1, *а*), а в случае пластического процесс уменьшения деформаций с течением времени затухает (рис. 11.1, *б*).

В дальнейшем будем рассматривать пластическое последействие, которое для краткости назовем просто последействием или собственно ползучестью. Ползучесть возникает как при нагружении детали за пределы упругости, так и при нагружении в пределах упругости.

Экспериментальные исследования показали (рис. 11.2), что охлаждение образца без его разгрузки не сказывается на ходе процесса ползучести в целом. После нагрева образца ползучесть возобновляется с той же скоростью, как и перед охлаждением. Охлаждение, сопровождаемое разгрузкой, отражается на кривой ползучести. В этом случае после нагрева и нагрузки на кривой ползучести образуется горб, соответствующий проявлению первой стадии ползучести, о которой будет сказано ниже.

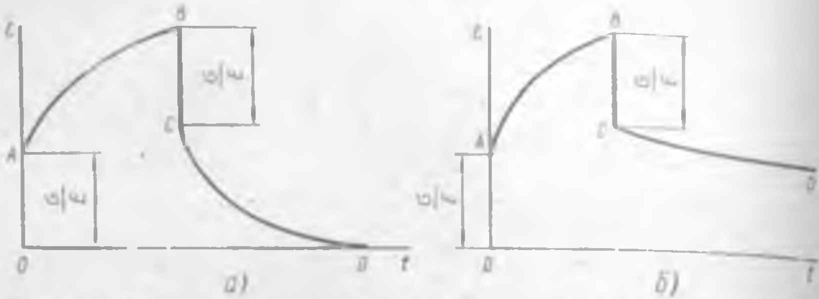


Рис. 11.1. Графики, иллюстрирующие явления упругого (*а*) и пластического (*б*) последействия

Таким образом, в случае кратковременных перерывов в подаче тока к нагревательным печам разгружать образцы нецелесообразно.

Имеющиеся в литературе сведения отображают влияние на ход процесса ползучести кратковременных (10—30 мин) охлаждений [3]. Однако известны испытания с длительным охлаждением [26], которые также не оказали влияния на процесс ползучести (рис. 11.3).

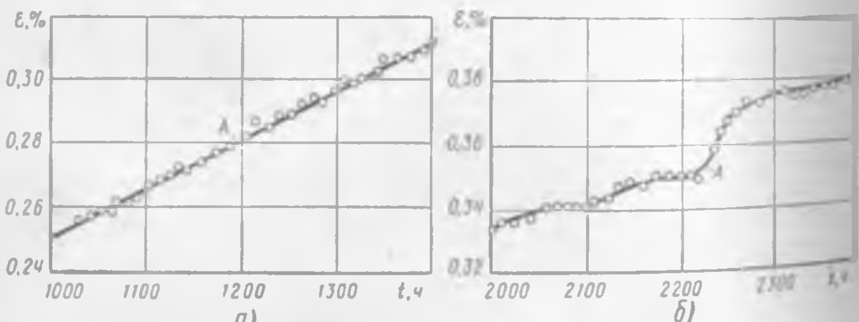


Рис. 11.2. Участки кривых ползучести, полученные при испытании образцов стали ЭИ454 при температуре 550° С и напряжении 90 МН/м² [22]:

а — охлаждение в точке *А* без разгрузки; *б* — охлаждение в точке *А* с разгрузкой

Рассмотрим более подробно явление релаксации при постоянной деформации.

Предположим, что образец нагружен растягивающей силой, которая вызвала напряжение, меньшее предела пропорциональности материала при данной температуре, и испытание поставлено таким образом, что полная деформация образца в течение времени не изменяется.

Полная деформация, остающаяся во времени постоянной, является суммой упругой деформации ε^e и деформации, образовавшейся в процессе ползучести ε^c, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c.$$

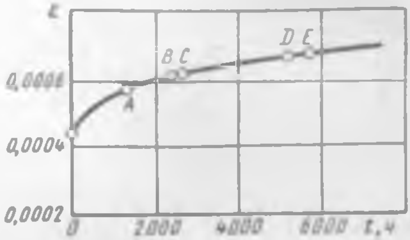


Рис. 11.3. Кривая ползучести, полученная при испытании образцов хромоникелемолибденовой стали при температуре 400° С и напряжении 77,5 МН/м² с охлаждением без разгрузки [26]. Продолжительность охлаждения: в точке A — 118 ч; B — 53 ч; C — 54 ч; D — 93 ч; E — 120 ч.

Деформация ползучести ε^c возрастает во времени, а следовательно, упругая деформация ε^e уменьшается. Таким образом, в течение времени составляющие полной деформации перераспределяются.

На основании закона Гука

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}.$$

Поскольку полная деформация во времени не изменяется и равна начальному значению $\varepsilon(0)$ и, кроме того, в начальный момент времени справедлив закон Гука, имеем

$$\varepsilon = \varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E},$$

где $\sigma(0)$ — напряжение в начальный момент времени.

Тогда получим

$$\frac{\sigma(0)}{E} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^c. \qquad (11.1)$$

Дифференцируя это соотношение по времени, устанавливаем

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{d\varepsilon^c}{dt} = -\xi^c. \qquad (11.2)$$

Из выражения (11.1) заключаем, что за счет увеличения деформации ползучести напряжение будет непрерывно уменьшаться, однако деформация ползучести при релаксации не может увеличиваться беспредельно. Если представить себе, что деформация ползучести достигла величины деформации, возникшей при нагружении $\varepsilon(0)$, то напряжение в стержне становится равным нулю (стержень разгружается).

В процессе ползучести деформация растет до такой величины, при которой образец разрушается. В процессе релаксации деформация ползучести не превосходит величины деформации, образовавшейся при нагружении.

При экспериментальном изучении релаксации в случае растяжения начальную растягивающую нагрузку (а следовательно, и намени скоростью ξ^{c}_{min}, которая зависит от напряжения и температуры. При определенной температуре она будет функцией напряжения

$$\xi^{c}_{min} = Q(\sigma).$$

Наиболее экспериментально проверенной является степенная зависимость минимальной скорости деформации ползучести от напряжения

$$\xi^{c}_{min} = Q(\sigma) = k\sigma^{n} \tag{11.4}$$

и закон гиперболического синуса

$$\xi^{c}_{min} = Q(\sigma) = c\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma}{d}. \tag{11.5}$$

Величины k, n, c и d в формулах (11.4) и (11.5) для каждого материала зависят от температуры.

В дальнейшем будет использоваться формула (11.4), поскольку она, как показано ниже, достаточно хорошо согласуется с данными опытов и удобна для использования в расчетах. Зависимость (11.5) несколько лучше подтверждается экспериментальными данными, чем выражение (11.4), но ее использование для расчетных целей более сложно, и численные значения коэффициентов c и d, входящих в формулу (11.5), менее изучены, чем значения коэффициентов k и n в зависимости (11.4).

Логарифмируя соотношение (11.4), получаем

$$\lg \xi^{c}_{min} = \lg k + n \lg \sigma. \tag{11.6}$$

Из выражения (11.6) следует справедливость линейной зависимости между логарифмами минимальной скорости деформации ползучести и напряжения. Как следует из рис. 11.7, экспериментально полученные точки подтверждают эту зависимость [21].

Располагая серией кривых ползучести при определенной температуре и различных напряжениях, можно установить величины коэффициента k и показателя степени n.

Для этого вначале необходимо подсчитать минимальные скорости деформации ползучести при различных напряжениях и полученные результаты изобразить в виде точек в логарифмических координатах $\lg \xi^{c}_{min}$, $\lg \sigma$ (рис. 11.8). Затем следует провести прямую, аппроксимирующую результаты опытов, и выбрать на этой прямой две какие-либо точки 1 и 2 с координатами соответственно $\lg \xi^{c}_{min\,1}$, $\lg \sigma_1$ и $\lg \xi^{c}_{min\,2}$, $\lg \sigma_2$. Согласно формуле (11.6) имеем

$$\lg \xi^{c}_{min\,1} = \lg k + n \lg \sigma_1;$$

$$\lg \xi^{c}_{min\,2} = \lg k + n \lg \sigma_2,$$

откуда следует

$$n = \frac{\lg \dfrac{\xi^{c}_{\min 2}}{\xi^{c}_{\min 1}}}{\lg \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}}; \tag{11.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \lg k &= \lg \xi^{c}_{\min 1} - n \lg \sigma_1; \\ \lg k &= \lg \xi^{c}_{\min 2} - n \lg \sigma_2. \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

В табл. 11.1 приведены величины k и n для некоторых материалов при определенных температурах.

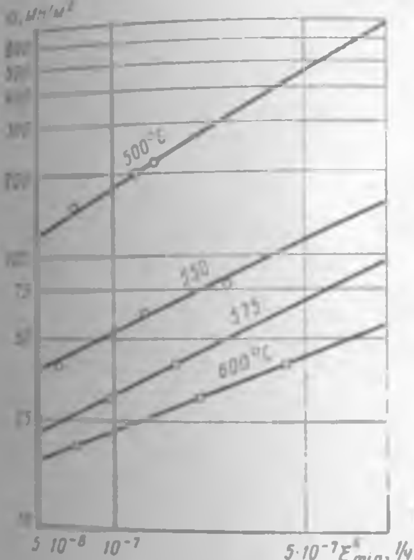
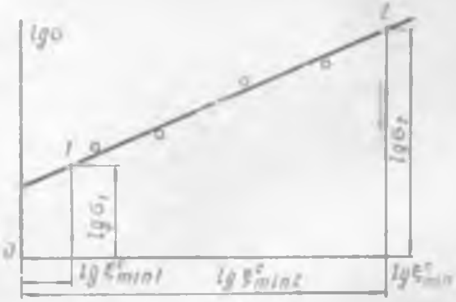


Рис. 11.7. Графики зависимостей напряжения от минимальной скорости деформации ползучести для хромомолибденовой стали марки 60Х16М2А [21]

Рис. 11.8. К определению показателя степени n и коэффициента k



Зависимость величины k от температуры может быть представлена в виде [4]

$$k = k_1 \exp\left(-\frac{\Delta H_n}{RT}\right), \tag{11.9}$$

где k_1 — постоянная для материала; T — абсолютная температура; R — газовая постоянная; ΔH_n — энергия активации ползучести. Под последней понимается величина энергии элемента тела, превышение которой приводит к смещению элемента и вследствие этого к деформации.

В третьей стадии ползучести (участок CD на рис. 11.6) скорость деформации непрерывно возрастает, пока не наступает разрушение образца (точка D).

Ранее предполагалось, что увеличение скорости деформации ползучести в третьей стадии вызвано повышением напряжения, которое, в свою очередь, обусловлено уменьшением площади поперечного сечения образца за счет его растяжения с последующим развитием

Таблица 11

Основные характеристики ползучести некоторых материалов

Материал	Химический состав, %	Термическая обработка	Температура испытания, °C	k, $\left(\frac{м^2}{МН}\right)^n/ч$	n
Углеродистая сталь	0,15 C; 0,50 Mn; 0,23 Si; 0,032 S; 0,025 P	Отжиг 844° C	427	$6{,}32 \cdot 10^{-21}$	6,24
			538	$1{,}43 \cdot 10^{-11}$	3,04
			593	$3{,}10 \cdot 10^{-10}$	3,18
			649	$9{,}04 \cdot 10^{-9}$	3,03
Хромомолибденовая сталь 30ХМ	—	Отжиг в течение 1 ч при 600° C	500	$2{,}46 \cdot 10^{-17}$	5,33
Хромомолибденовая сталь 60Х16М2А	0,60 C; 0,46 Si; 0,28Mn; 16,9 Cr; 0,22 Ni; 2,00 Mo; 0,013 S; 0,030 P	Закалка в воздухе с температуры 1050° C; отпуск при температуре 800—820° C	500	$8{,}19 \cdot 10^{-12}$	1,82
			550	$2{,}31 \cdot 10^{-11}$	2,12
			575	$9{,}80 \cdot 10^{-11}$	2,02
			600	$3{,}03 \cdot 10^{-11}$	2,59
Хромомолибденовая сталь ЭИ10	0,28 C; 0,24 Si; 0,58 Mn; 1,55 Cr; 0,38 Mo; 0,16 Va; 0,12 Ni	Закалка 900° C (масло) отпуск 650° C	450	$9{,}63 \cdot 10^{-15}$	2,99
			500	$3{,}38 \cdot 10^{-11}$	1,83
			550	$9{,}34 \cdot 10^{-11}$	2,06
Хромоникелевольфрамовая сталь ХНВМ12	0,48 C; 0,68 Si; 0,47 Mn; 0,012 P; 2,24 W; 13,6 Cr; 14,5 Ni; 0,54 Mo	Закалка 1100° C, охлаждающая среда — воздух	500	$8{,}57 \cdot 10^{-23}$	7,76
			600	$3{,}34 \cdot 10^{-28}$	10,3
			700	$2{,}46 \cdot 10^{-15}$	5,21

Материал	Химический состав, %	Термическая обработка	Температура испытания, °C	k, $\left(\frac{м^2}{МН}\right)^n/ч$	n
Хромоникелевольфрамовая сталь 45Х14Н14В2М	0,45 C; 0,60 Si; 0,76 Mn; 13,9 Cr; 13,8 Ni; 1,75 W; 0,4 Mo; 0,008 S; 0,024 P	Закалка 1175° C, стабилизация при 750° C в течение 5 ч.	600	$2{,}00\cdot10^{-10}$	3,00
			650	$1{,}71\cdot10^{-9}$	2,93
			700	$1{,}24\cdot10^{-8}$	2,90
Хромоникелевольфрамовая сталь ЭИ122	0,52 C; 2,05 Si; 0,77 Mn; 16,4 Cr; 13,9 Ni; 2,55 W; 0,88 Ti; 0,012 S; 0,04 P	—	550	$5{,}12\cdot10^{-13}$	2,63
			650	$2{,}50\cdot10^{-13}$	3,63
Хромомарганцованадиевая сталь СХМВ18	0,46 C; 1,15 Si; 14,9 Mn; 2,25 W; 0,042 P; 13,9 Cr	Закалка 1100° C, охлаждающая среда — воздух	600	$2{,}24\cdot10^{-26}$	9,15
			700	$2{,}39\cdot10^{-18}$	6,84
Медь			165	$3{,}65\cdot10^{-10}$	1,60
			235	$5{,}63\cdot10^{-9}$	2,16

шейки. Это положение подтверждалось опытами Эндрейда [25], изучившим ползучесть образцов из чистых металлов, при постоянном напряжении и постоянной нагрузке. В опытах Эндрейда постоянство напряжения в процессе деформации достигалось при помощи использования грузов специального очертания, погружающихся в воду по мере удлинения стержня (рис. 11.9).

На основании таких исследований Эндрейд установил, что если опыт ведется при строго постоянном напряжении, то третья стадия отсутствует, а при испытаниях при постоянной нагрузке третья стадия имеет место.

Однако позднее было показано, что третья стадия не всегда соответствует образованию и развитию шейки.

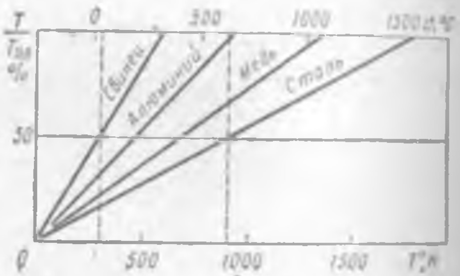
В настоящее время установлено, что в случае отсутствия шейки увеличение скорости деформации ползучести в третьей стадии объясивается образованием местных трещин внутри образца, которые развиваются в материале в течение времени под влиянием напряжений и температуры и ослабляют образец. По своему эффекту это явление эквивалентно уменьшению площади поперечного сечения образца. Причины образования указанных трещин и механизм их развития должны быть подвергнуты дальнейшему экспериментальному изучению.

С увеличением напряжения и температуры скорости деформации ползучести возрастают, а продолжительность второй стадии уменьшается.

Процесс ползучести зависит от так называемой сходственной или гомологической температуры, равной отношению абсолютной

Рис. 11.9. Схема испытания образцов при постоянном напряжении в опытах Эндрейда [25]

Рис. 11.10. Диаграмма гомологических температур



температуры, при которой производилось испытание, к абсолютной температуре плавления металла $T/T_{пл}$.

Если взять два металла с различными абсолютными температурами плавления $T_{пл\,1}$ и $T_{пл\,2}$, то процесс ползучести для них будет во многом сходен, если абсолютные температуры испытаний T_1 и T_2 удовлетворяют следующему отношению:

$$\frac{T_1}{T_{пл\,1}} = \frac{T_2}{T_{пл\,2}},$$

т. е. если гомологические температуры в обоих испытаниях одинаковы. Так, например, температура плавления свинца 327° С, в то время как температура плавления стали 1500° С. Процесс ползучести свинца при температуре 27° С во многом качественно сходен с процессом ползучести стали при температуре 614° С, так как

$$\frac{27 + 273}{327 + 273} = \frac{614 + 273}{1500 + 273}.$$

Поэтому многие экспериментаторы для установления основных закономерностей ползучести металлов при повышенных температурах изучали ползучесть путем испытания свинцовых образцов при комнатной температуре, что практически гораздо проще.

На рис. 11.10 представлена диаграмма гомологических температур. По верхней горизонтали отложена температура по шкале Цельсия, по нижней — абсолютная температура, а по вертикальной оси — гомологическая температура в процентах. Начало координат соединено прямыми линиями с точками на верхней горизонтали, отражающими температуры плавления металлов по шкале Цельсия. При помощи такой диаграммы можно определить температуры для различных металлов по шкалам Цельсия и Кельвина, соответствующие определенной гомологической температуре. Так, например, из диаграммы на рис. 11.10 следует, что гомологической температуре 50% соответствуют температуры 27° С (300 К) для свинца и 614° С (887 К) для стали.

Для исследования напряженного и деформированного состояний деталей в условиях ползучести наибольший интерес представляют первая и вторая стадии, так как эксплуатация деталей обычно протекает в интервалах времени, соответствующих этим стадиям. Исследование третьей стадии существенно в связи с анализом разрушения деталей.

На основании исследования кривых ползучести были предложены различные уравнения, отражающие первую и вторую стадии этих кривых. Различные зависимости деформации ползучести ε^c от времени и напряжения при определенной температуре можно разбить на две группы.

В основу первой группы формул положена гипотеза о том, что кривые ползучести в координатах t, ε^c при различных напряжениях и одной и той же температуре геометрически подобны. Это означает, что они могут быть получены из одной кривой умножением ординат ее на некоторую величину, являющуюся функцией напряжения. Следовательно, зависимость деформации ползучести от напряжения и времени записывается в виде произведения двух функций, из которых одна Q является функцией напряжения и температуры, а другая Ω — функцией времени и температуры:

$$\varepsilon^c = Q\Omega. \tag{11.10}$$

Во второй группе формул принимается, что деформация ползучести может быть представлена в виде

$$\varepsilon^c = Q_1\Psi + Q_2 t, \tag{11.11}$$

где Q_1 и Q_2 — функции напряжения и температуры, а Ψ — монотонно и быстро убывающая функция времени.

Таким образом, при малых значениях времени вторым слагаемым выражения (11.11) по сравнению с первым можно пренебречь, и тогда процесс ползучести описывается первым слагаемым (первая стадия ползучести). Как следует из структуры первого слагаемого, кривые ползучести в первой стадии геометрически подобны.

При больших значениях времени можно пренебречь первым слагаемым, и тогда процесс ползучести описывается вторым слагаемым уравнения, из рассмотрения которого следует, что зависимость деформации ползучести от времени во второй стадии линейная, функция Q_2 представляет собой минимальную скорость деформации ползучести.

Различные рекомендации относительно вида функций Q, Q_1, Q_2 и Ψ приведены в литературе [14].

При $Q_1 = Q_2 = Q$ из зависимости (11.11) следует формула (11.10), которая, таким образом, является частным случаем более общей формулы (11.11).

К виду (11.11) приводится уравнение, предложенное Эндрейдом в одной из первых работ по исследованию ползучести [25]. Им была экспериментально установлена зависимость длины образца от времени в общем случае больших деформаций

$$l = l_0 \left(1 + \beta t^{\frac{1}{3}}\right) e^{kt},$$

где l_0 — начальная длина образца, β и k — для определенного материала функции напряжения и температуры.

Следовательно, величина логарифмической деформации ползучести

$$\bar{\varepsilon}^c = \ln \frac{l}{l_0} = \ln\left(1 + \beta t^{\frac{1}{3}}\right) + kt, \tag{11.12}$$

а скорость ее

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^c = \frac{1}{3} \frac{\beta}{t^{\frac{2}{3}} + \beta t} + k.$$

Таким образом, по Эндрейду ползучесть может рассматриваться как наложение двух видов течения: β-течения, происходящего с убывающей скоростью, и k-течения, скорость которого постоянна.

В случае малых деформаций из уравнения (11.12) получаем

$$\varepsilon^c = \beta t^{\frac{1}{3}} + kt,$$

что совпадает с уравнением (11.11).

Очевидно, что зависимость (11.11) является более гибкой и позволяет точнее описать кривые ползучести, чем зависимость (11.10). Однако, как будет показано ниже, и соотношение (11.10) дает достаточную для практики степень точности. Вместе с тем оно проще, чем выражение (11.11), и поэтому более удобно в расчетах. В дальнейшем будем придерживаться формулы (11.10), полагая при этом, что функция Q является степенной функцией напряжения.

Таким образом, приходим к следующей зависимости деформации ползучести от напряжения и времени:

$$\varepsilon^c = \sigma^n \Omega. \tag{11.13}$$

Функцию времени Ω не будем аппроксимировать аналитическими зависимостями, так как выполнение расчетов на ползучесть, как будет показано далее, возможно и без такой аппроксимации.

Выражение (11.13) обычно хорошо подтверждается результатами опытов. Поскольку при $t = 0$ $\varepsilon^c = 0$, то при $t = 0$ $\Omega = 0$.

Дифференцируя соотношение (11.13), получаем

$$\xi^c = \sigma^n B, \tag{11.14}$$

где

$$B = \frac{d\Omega}{dt}. \tag{11.15}$$

Величину показателя степени n в уравнении (11.13) определяют на основе вычисления минимальных скоростей деформации ползучести при различных напряжениях, как это было указано выше.

Рис. 11.11. Графики функций Ω и B

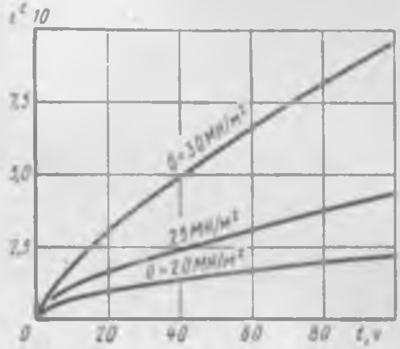


Рис. 11.12. Кривые ползучести стали 45Х14Н14В2М при 800° С [10]

Затем по кривой ползучести можно определить функцию Ω. Для этого согласно формуле (11.13) необходимо ординаты кривой ползучести, полученной путем испытания образца при определенном напряжении, разделить на величину этого напряжения в n-й степени.

Если кривые ползучести подобны и зависимость (11.13) справедлива, то из всех кривых при различных напряжениях и определенной температуре должен получиться один и тот же график функции Ω. По разбросу точек можно оценить точность предположения о подобии кривых ползучести и судить о справедливости формулы (11.13).

Функция B может быть найдена после определения функции Ω графическим или численным дифференцированием. На рис. 11.11 представлен примерный вид графиков функций Ω и B.

Как отмечалось выше, во второй стадии процесс ползучести протекает с постоянной скоростью. Поэтому на основании соотношений (11.4) и (11.14) заключаем, что во второй стадии ползучести

$$B = k$$

и, следовательно, согласно формуле (11.15)

$$\Omega = a + kt,$$

где a — отрезок, отсекаемый продолжением линейного участка графика зависимости Ω от t на оси ординат (рис. 11.11).

После интегрирования этого уравнения с использованием подстановки

$$y = \exp -\frac{\chi}{b}$$

получим

$$\exp\left(-\frac{\chi}{b}\right) = \frac{d}{aG}\exp\left(-\frac{\sigma_1}{b}\right)\cdot\frac{1+p\exp(-2\,dat)}{1-p\exp(-2\,dat)}. \qquad (12.65)$$

Для вычисления по этой формуле величины χ_1 необходимо вместо t подставить t_1, а параметры d, p и $\xi^c(0)$ определить по величине напряжения σ_1.

Выведем теперь уравнение кривой обратной ползучести. В этом случае может быть рассмотрен процесс ступенчатого нагружения при мгновенном уменьшении напряжения от σ до 0. В рассматриваемом случае $\operatorname{sign}(\sigma - \chi) = -1$; $\operatorname{sign}\chi = +1$ и уравнения (12.50) и (12.51) принимают вид

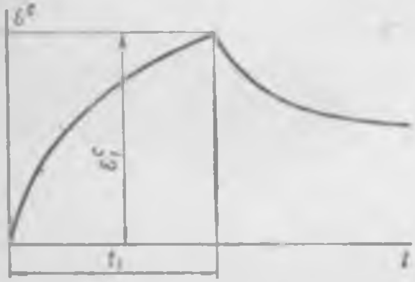


Рис. 12.9. К построению кривой обратной ползучести по теории ползучести с анизотропным упрочнением

$$\xi^c = -G\exp\frac{\chi}{b}; \qquad (12.66)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -(AG + D)\exp\frac{\chi}{b}. \qquad (12.67)$$

Проинтегрируем уравнение (12.67), учитывая, что при $t = t_1$ $\chi = \chi_1$. Тогда получим

$$\exp\left(-\frac{\chi}{b}\right) = \frac{AG+D}{b}(t - t_1) + \exp\left(-\frac{\chi_1}{b}\right). \qquad (12.68)$$

Величина добавочного напряжения χ_1, возникшего в результате ползучести при напряжении σ_1 в течение времени t_1, определяется так, как было указано при рассмотрении процесса ступенчатого нагружения.

Подставим выражение (12.68) в уравнение (12.66). Используя соотношение (11.3), получим

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = -\frac{G}{\frac{AG+D}{b}(t-t_1) + \exp\left(-\frac{\chi_1}{b}\right)}. \qquad (12.69)$$

Интегрируя это уравнение и используя начальное условие при $t = t_1$ $\varepsilon^c = \varepsilon_1^c$, получаем

$$\varepsilon_r^c = \varepsilon_1^c - \varepsilon^c = \frac{bG}{AG+D}\ln\left[\frac{AG+D}{b}(t-t_1)\exp\frac{\chi_1}{b} + 1\right]. \qquad (12.70)$$

Формула (12.70) позволяет определить уменьшение деформации ползучести $\varepsilon_r^c = \varepsilon_1^c - \varepsilon^c$ после разгрузки.

§ 79. Экспериментальная проверка и анализ теорий ползучести

Наиболее простым способом экспериментальной проверки различных теорий ползучести является сопоставление экспериментальной кривой релаксации при постоянной деформации с теоретическими, построенными по различным теориям ползучести.

На рис. 12.10—12.12 сопоставлены теоретические кривые релаксации напряжений с экспериментальными, полученными в опытах Дэвиса [35] (рис. 12.10), Джонсона [38] (рис. 12.11), а также в опытах Ю. Н. Работнова, В. И. Даниловской и Г. М. Ивановой [3] (рис. 12.12).

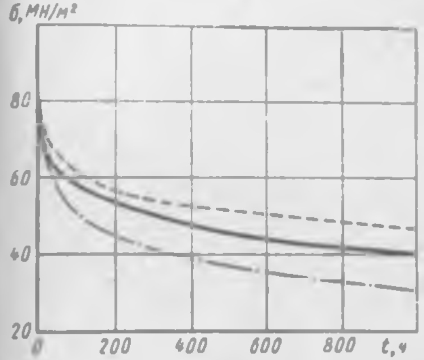


Рис. 12.10. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых релаксации для меди при температуре 165° С и начальном напряжении σ (0) = 94,9 МН/м². Штриховая линия по теории старения в формулировке (12.15), штрихпунктирная линия по теории течения Л. М. Качанова [26]

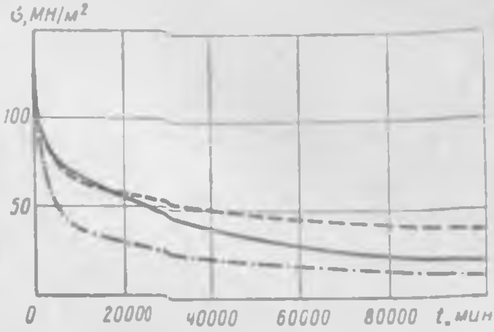


Рис. 12.11. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых релаксации для хромомолибденовой стали при температуре 525° С и начальном напряжении σ (0) = 146 МН/м². Штриховая линия — по теории старения в варианте (12.15), штрихпунктирная линия по теории течения Л. М. Качанова [26]

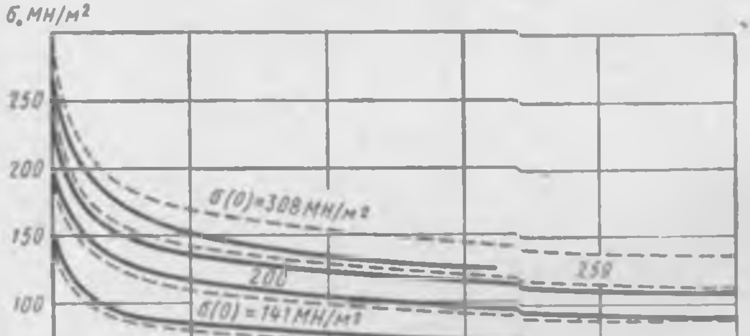


Рис. 12.12. Сопоставление экспериментальных кривых релаксации для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° С и различных начальных напряжениях (сплошные линии) с теоретическими, построенными по теории упрочнения в варианте (12.28), (12.29) (штриховые линии) [3]

Как следует из рис. 12.10 и 12.11, экспериментальная кривая релаксации располагается между теоретическими кривыми по гипотезам старения и течения. Теория упрочнения хорошо подтверждается экспериментально (рис. 12.12).

На рис. 11.12 изображены кривые ползучести стали 45Х14Н14В2М при температуре 800° С и различных напряжениях [10].

На рис. 11.13 в логарифмических координатах представлен график зависимости напряжения от минимальной скорости деформации ползучести. В рассматриваемом случае $n = 4$. На рис. 11.14 изображен график функции Ω, полученный путем обработки кривых ползучести, представленных на рис. 11.12, с использованием полученной величины показателя степени n. Ординаты точек на рис. 11.4 в соответствии с формулой (11.13) равны отношению деформации ползучести для фиксированного момента времени при определенном напряжении к величине этого напряжения в n-й степени.

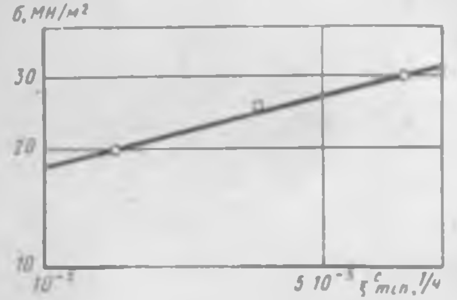


Рис. 11.13. График зависимости напряжения от минимальной скорости деформации ползучести для стали 45Х14Н14В2М при температуре 800° С

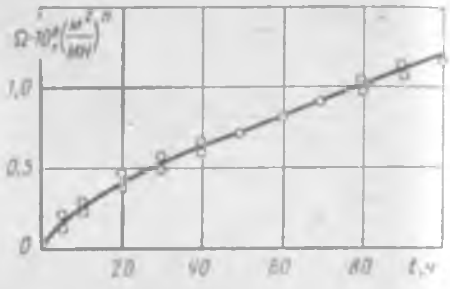


Рис. 11.14. График функции Ω для стали 45Х14Н14В2М при температуре 800° С

Из рис. 11.14 следует, что разброс точек сравнительно невелик, и это позволяет считать предположение о подобии кривых ползучести справедливым, а зависимость (11.13) достаточно точной.

Функция времени и температуры Ω может быть аналогично формуле (11.9) представлена в виде

$$\Omega = \exp\left(-\frac{\Delta H_{п}}{RT}\right)\Omega_1, \tag{11.16}$$

где Ω_1 — функция только времени, остальные обозначения приведены в пояснении к формуле (11.9).

Рассмотренные кривые ползучести являются основой расчетов на ползучесть. Для сопоставления сопротивлению ползучести различных материалов введена условная характеристика — так называемый предел ползучести.

Пределом ползучести $\sigma_{пл}$ называют напряжение, при котором деформация ползучести за заданный промежуток времени достигает величины, установленной техническими условиями.

Из этого определения следует, что для данного материала предел ползучести зависит от температуры и времени испытания, а также от принятой величины деформации ползучести. Заданный промежуток времени обычно принимают равным сроку службы детали. Деформацию ползучести выбирают исходя из условий нормальной эксплуатации детали за срок ее службы.

Если приближенно принять скорость деформации ползучести постоянной, то величина деформации ползучести

$$\varepsilon^c = \xi^c_{\min} t; \tag{11.17}$$

из этого соотношения по принятой величине деформации ползучести за определенный промежуток времени можно установить минимальную скорость ее.

В таком случае возможно и иное определение предела ползучести $\sigma_{пл}$, которое часто используют в практике: *пределом ползучести называют напряжение, при котором скорость деформации ползучести равна определенной величине, установленной техническими условиями*. Величина предела ползучести в таком определении зависит от температуры и принятой величины скорости деформации ползучести.

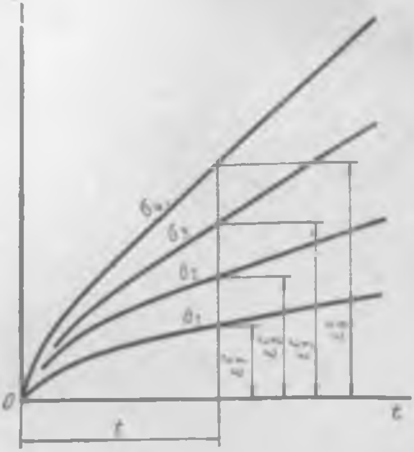


Рис. 11.15. Семейство кривых ползучести

Ввиду того что погрешность формулы (11.17) тем больше, чем меньше время, второе определение предела ползучести обычно используют для деталей, работающих длительный срок. Например

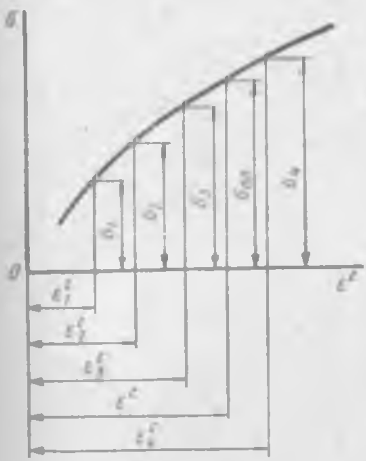


Рис. 11.16. График зависимости напряжения от деформации ползучести для фиксированного значения времени

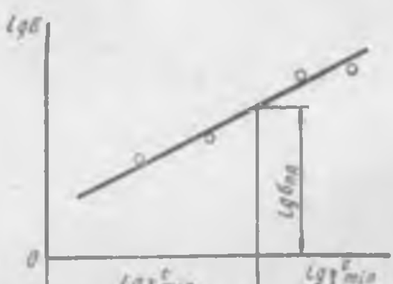


Рис. 11.17. График зависимости напряжения от минимальной скорости деформации ползучести

для сталей стационарных паровых турбин предел ползучести обычно определяется как напряжение, при котором минимальная скорость деформации ползучести равна 10^{-7} или 10^{-8} 1/ч. Для сталей авиационных газовых турбин при определении предела ползучести часто исходят из величины деформации ползучести 0,1% за время 300—500 ч. Величина предела ползучести устанавливается путем обработки семейства кривых ползучести (рис. 11.15).

На рис. 11.12 изображены кривые ползучести стали 45Х14Н14В2М при температуре 800° С и различных напряжениях [10].

На рис. 11.13 в логарифмических координатах представлен график зависимости напряжения от минимальной скорости деформации ползучести. В рассматриваемом случае $n = 4$. На рис. 11.14 изображен график функции Ω, полученный путем обработки кривых ползучести, представленных на рис. 11.12, с использованием полученной величины показателя степени n. Ординаты точек на рис. 11.4 в соответствии с формулой (11.13) равны отношению деформации ползучести для фиксированного момента времени при определенном напряжении к величине этого напряжения в n-й степени.

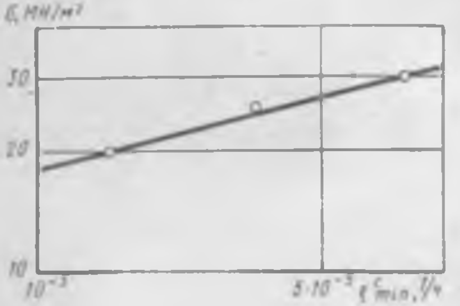


Рис. 11.13. График зависимости напряжения от минимальной скорости деформации ползучести для стали 45Х14Н14В2М при температуре 800° С

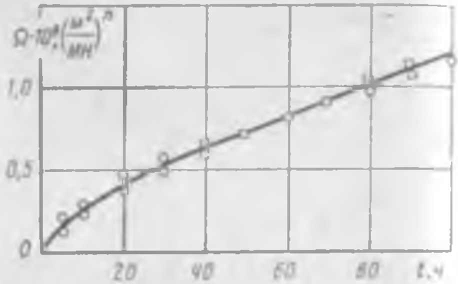


Рис. 11.14. График функции Ω для стали 45Х14Н14В2М при температуре 800° С

Из рис. 11.14 следует, что разброс точек сравнительно невелик, и это позволяет считать предположение о подобии кривых ползучести справедливым, а зависимость (11.13) достаточно точной.

Функция времени и температуры Ω может быть аналогично формуле (11.9) представлена в виде

$$\Omega = \exp\left(-\frac{\Delta H_{\text{п}}}{RT}\right)\Omega_1, \tag{11.16}$$

где Ω_1 — функция только времени, остальные обозначения приведены в пояснении к формуле (11.9).

Рассмотренные кривые ползучести являются основой расчетов на ползучесть. Для сопоставления сопротивлению ползучести различных материалов введена условная характеристика — так называемый предел ползучести.

Пределом ползучести $\sigma_{\text{пл}}$ называют напряжение, при котором деформация ползучести за заданный промежуток времени достигает величины, установленной техническими условиями.

Из этого определения следует, что для данного материала предел ползучести зависит от температуры и времени испытания, а также от принятой величины деформации ползучести. Заданный промежуток времени обычно принимают равным сроку службы детали. Деформацию ползучести выбирают исходя из условий нормальной эксплуатации детали за срок ее службы.

Если приближенно принять скорость деформации ползучести постоянной, то величина деформации ползучести

$$\varepsilon^c = \xi^c_{\min} t; \tag{11.17}$$

из этого соотношения по принятой величине деформации ползучести за определенный промежуток времени можно установить минимальную скорость ее.

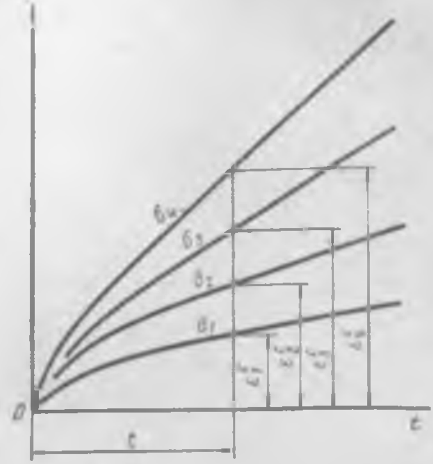


Рис. 11.15. Семейство кривых ползучести

В таком случае возможно и иное определение предела ползучести $\sigma_{пл}$, которое часто используют в практике: *пределом ползучести называют напряжение, при котором скорость деформации ползучести равна определенной величине, установленной техническими условиями*. Величина предела ползучести в таком определении зависит от температуры и принятой величины скорости деформации ползучести.

Ввиду того что погрешность формулы (11.17) тем больше, чем меньше время, второе определение предела ползучести обычно используют для деталей, работающих длительный срок. Например

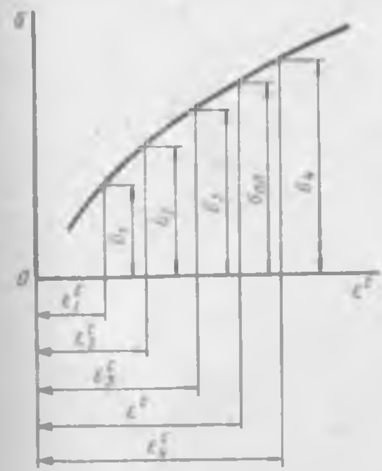


Рис. 11.16. График зависимости напряжения от деформации ползучести для фиксированного значения времени

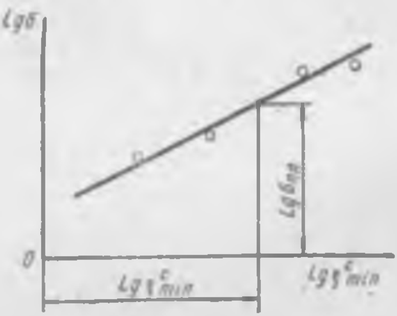


Рис. 11.17. График зависимости напряжения от минимальной скорости деформации ползучести

для сталей стационарных паровых турбин предел ползучести обычно определяется как напряжение, при котором минимальная скорость деформации ползучести равна 10^{-7} или 10^{-8} 1/ч. Для сталей авиационных газовых турбин при определении предела ползучести часто исходят из величины деформации ползучести 0,1% за время 300—500 ч. Величина предела ползучести устанавливается путем обработки семейства кривых ползучести (рис. 11.15).

определяют предел длительной прочности для заданного промежутка времени испытания до разрушения.

В логарифмических координатах график зависимости предела длительной прочности от времени имеет вид ломаной линии, состоящей из двух прямых (рис. 11.20). Точка перелома графика обычно соответствует переходу от транскристаллического к интеркристаллическому разрушению. На рис. 11.20 крестиками изображены результаты испытаний образцов, разрушившихся транскристаллически, а кружочками — результаты опытов, завершившихся интер-

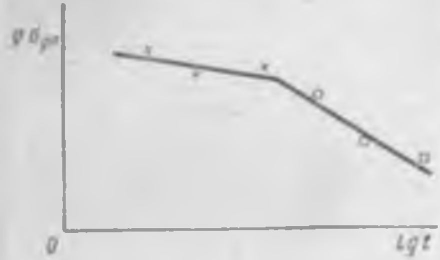


Рис. 11.20. График зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения

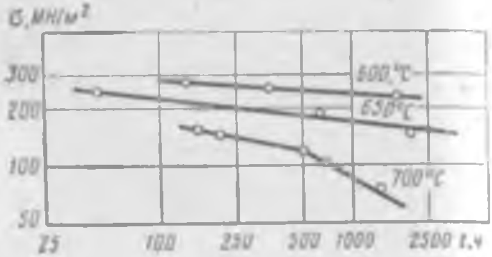


Рис. 11.21. Графики зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения для стали ЭИ69 [12]

кристаллическим разрушением. Очевидно, что в определенных интервалах времени и напряжений точки перегиба на рассматриваемом графике может и не быть.

Поскольку в логарифмических координатах график зависимости предела длительной прочности от времени является линейным, зависимость времени до разрушения от предела длительной прочности является степенной

$$t = A\sigma^{-m}, \tag{11.18}$$

где A и m — для определенного материала зависят от температуры и характера разрушения транскристаллического или интеркристаллического.

На рис. 11.21 в логарифмических координатах изображены графики зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения при различных температурах [12].

Формула (11.18) устанавливает зависимость предела длительной прочности от времени разрушения для некоторого материала при определенной температуре. Для того чтобы отразить влияние на длительную прочность температуры, установить так называемые температурно-временные зависимости длительной прочности, были предложены различные температурно-временные параметры $П$, являющиеся функциями предела длительной прочности. Это означает, что результаты испытаний на длительную прочность при различных температурах можно представить в виде одного графика зависимости предела длительной прочности от температурно-временного параметра $П$.

Параметр Ларсона—Миллера [30] имеет вид

$$П_1 = T(c + \lg t), \qquad (11.19)$$

где T — абсолютная температура; $\lg t$ — десятичный логарифм времени, измеряемого в ч; c — постоянная материала.

Параметр Мэнсона—Хаферда [27] определяется формулой

$$П_2 = \frac{T - T_a}{\lg t - \lg t_a}, \qquad (11.20)$$

где T_a и t_a — постоянные материала.

С помощью параметра Мэнсона—Хаферда, содержащего две постоянных, можно лучше отразить экспериментальные результаты, чем с помощью параметра Ларсона—Миллера, в который включена только одна постоянная.

На рис. 11.22 изображена зависимость предела длительной прочности от параметра Ларсона—Миллера для нержавеющей стали [30], а на рис. 11.23 — от параметра Мэнсона—Хаферда для двух марок нимоника [27].

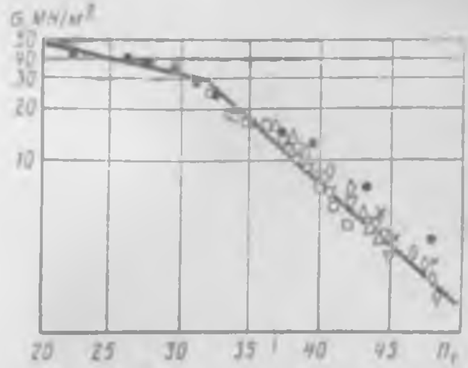


Рис. 11.22. График зависимости предела длительной прочности от температурно-временного параметра Ларсона—Миллера [30]: ● — кратковременные испытания; ○ — 649° С; □ — 740° С; △ — 760° С; ▽ — 815° С; ◇ — 871° С; × — 970° С

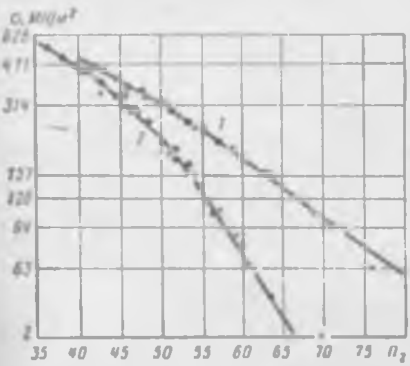


Рис. 11.23. График зависимости предела длительной прочности от температурно-временного параметра Мэнсона—Хаферда [27]:

1 — нимоник 80А; 2 — нимоник 90; ● < 3000 ч; + > 3000 ч

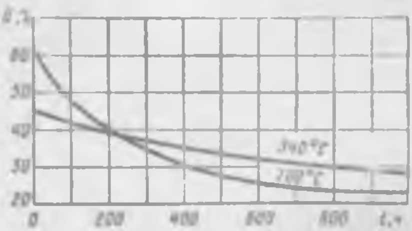


Рис. 11.24 График зависимости остаточной деформации при разрыве от времени испытания до разрушения для малоуглеродистой стали [3]

Как следует из этих рисунков, для рассматриваемых материалов эксперименты подтвердили как температурно-временной параметр Ларсона—Миллера, так и параметр Мэнсона—Хаферда.

Одновременно с экспериментальным определением предела длительной прочности материала иногда устанавливают и величину остаточной деформации образца при разрыве. Она определяется как отношение остаточного удлинения при разрыве к первоначальной определяют предел длительной прочности для заданного промежутка времени испытания до разрушения.

В логарифмических координатах график зависимости предела длительной прочности от времени имеет вид ломаной линии, состоящей из двух прямых (рис. 11.20). Точка перелома графика обычно соответствует переходу от транскристаллического к интеркристаллическому разрушению. На рис. 11.20 крестиками изображены результаты испытаний образцов, разрушившихся транскристаллически, а кружочками — результаты опытов, завершившихся интер-

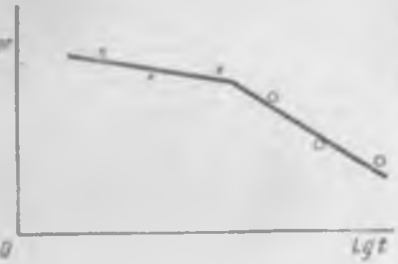


Рис. 11.20. График зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения

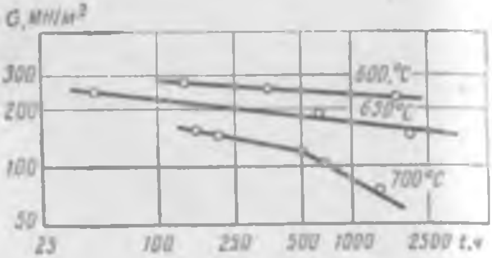


Рис. 11.21. Графики зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения для стали ЭИ69 [12]

кристаллическим разрушением. Очевидно, что в определенных интервалах времени и напряжений точки перегиба на рассматриваемом графике может и не быть.

Поскольку в логарифмических координатах график зависимости предела длительной прочности от времени является линейным, зависимость времени до разрушения от предела длительной прочности является степенной

$$t = A\sigma^{-m}, \tag{11.18}$$

где A и m — для определенного материала зависят от температуры и характера разрушения транскристаллического или интеркристаллического.

На рис. 11.21 в логарифмических координатах изображены графики зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения при различных температурах [12].

Формула (11.18) устанавливает зависимость предела длительной прочности от времени разрушения для некоторого материала при определенной температуре. Для того чтобы отразить влияние на длительную прочность температуры, установить так называемые температурно-временные зависимости длительной прочности, были предложены различные температурно-временные параметры $П$, являющиеся функциями предела длительной прочности. Это означает, что результаты испытаний на длительную прочность при различных температурах можно представить в виде одного графика зависимости предела длительной прочности от температурно-временного параметра $П$.

Параметр Ларсона—Миллера [30] имеет вид

$$П_1 = T\,(c + \lg t), \qquad (11.19)$$

где T — абсолютная температура; $\lg t$ — десятичный логарифм времени, измеряемого в ч; c — постоянная материала.

Параметр Мэнсона—Хаферда [27] определяется формулой

$$П_2 = \frac{T - T_a}{\lg t - \lg t_a}, \qquad (11.20)$$

где T_a и t_a — постоянные материала.

С помощью параметра Мэнсона—Хаферда, содержащего две постоянных, можно лучше отразить экспериментальные результаты, чем с помощью параметра Ларсона—Миллера, в который включена только одна постоянная.

На рис. 11.22 изображена зависимость предела длительной прочности от параметра Ларсона—Миллера для нержавеющей стали [30], а на

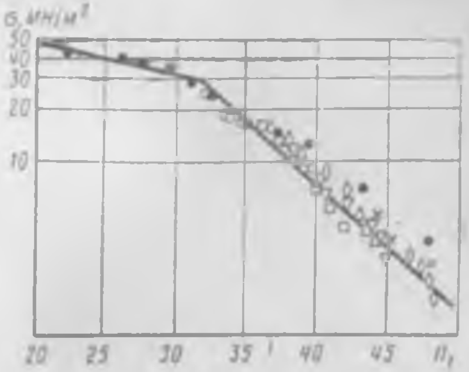


Рис. 11.22. График зависимости предела длительной прочности от температурно-временного параметра Ларсона—Миллера [30]: ● — кратковременные испытания; ○ — 649° С; □ — 740° С; △ — 760° С; ▽ — 815° С; ◇ — 871° С; × — 970° С

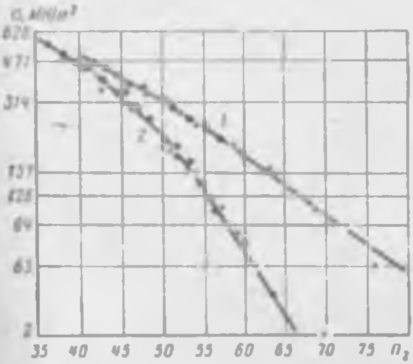


Рис. 11.23. График зависимости предела длительной прочности от температурно-временного параметра Мэнсона—Хаферда [27]:

1 — нимоник 80А; 2 — нимоник 90; ● < 3000 ч; + > 3000 ч

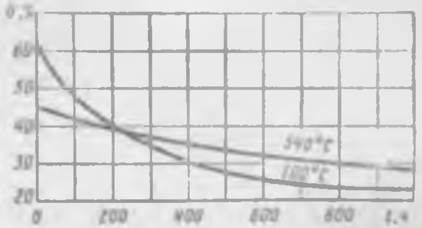


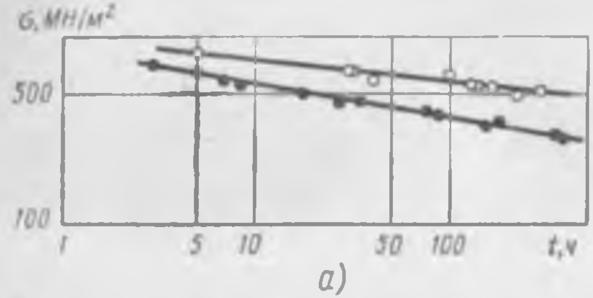
Рис. 11.24 График зависимости остаточной деформации при разрыве от времени испытания до разрушения для малоуглеродистой стали [3]

рис. 11.23 — от параметра Мэнсона—Хаферда для двух марок нимоника [27].

Как следует из этих рисунков, для рассматриваемых материалов эксперименты подтвердили как температурно-временной параметр Ларсона—Миллера, так и параметр Мэнсона—Хаферда.

Одновременно с экспериментальным определением предела длительной прочности материала иногда устанавливают и величину остаточной деформации образца при разрыве. Она определяется как отношение остаточного удлинения при разрыве к первоначальной длине образца и в случае разрушения образца с образованием шейки представляет собой условную деформацию.

Очевидно, что эта величина является характеристикой пластичности материала, находящегося длительное время в напряженном состоянии при высокой температуре. Как следует из вышеизложенного, с уменьшением напряжения, т. е. с увеличением длительности пребывания металла при высокой температуре остаточная деформация при разрыве уменьшается («охрупчивание» материала). На рис. 11.24 представлены графики зависимости остаточной деформации при разрыве от времени испытания до разрушения для малоугле-



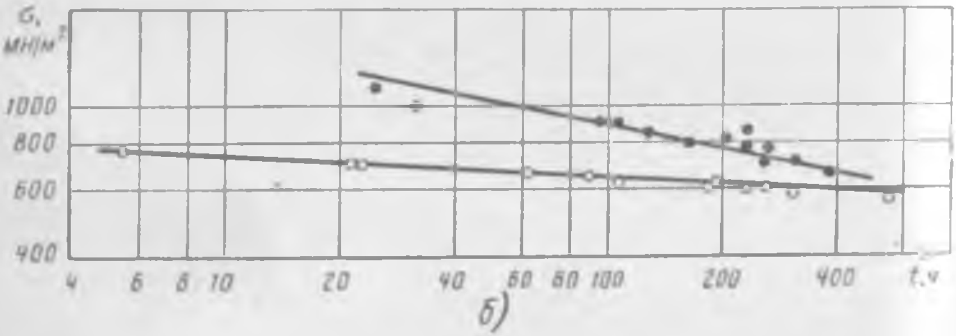


Рис. 11.25. Графики зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения:

а — сталь ЭИ415. Температура испытаний 550° С [1]; б — сплав ХН70ВМЮТ. Температура испытаний 650° С [2]

родистой стали [3]. Известны случаи разрыва образцов высоколегированных сталей при величине остаточной деформации, равной 1—2% [3].

Рассмотрим влияние на длительную прочность концентрации напряжений. Экспериментальные исследования показывают, что концентрация напряжений в условиях ползучести может вызвать как снижение, так и повышение длительной прочности в зависимости от материала образцов. На рис. 11.25 представлены приведенные в работах [1, 2] графики зависимости предела длительной прочности от времени для гладких образцов и образцов с концентратором напряжений, выполненных из сталей двух марок. Концентратором напряжений была глубокая выточка — несколько измененный по рекомендации Г. В. Ужика круговой гиперболический глубокий надрез Нейбера. Как следует из этих графиков, для более хрупкой стали ЭИ415 концентрация напряжений снижает длительную прочность, а для сплава ХН70ВМЮТ с более высоким уровнем пластических свойств концентрация напряжений повышает длительную прочность. Однако прямая длительной прочности образцов с концентратором напряжений для сплава ХН70ВМЮТ, хотя и расположена выше прямой длительной прочности гладких образцов, но наклонена к ней. Следовательно, можно ожидать пересечения этих прямых и снижения длительной прочности при испытаниях большей продолжительности.

Объяснение различного влияния концентрации напряжений на длительную прочность в зависимости от материала образцов можно дать на основе анализа напряженного состояния в окрестности концентратора в условиях ползучести [2]. На рис. 11.26 изображен примерный вид эпюр осевых σ_z, окружных σ_t и радиальных σ_r напряжений в наименьшем поперечном сечении образца. Напряженное состояние точек в окрестности концентратора — трехосное растяжение. У материалов с низкими пластическими свойствами (например, сталь ЭИ415) эпюры осевых и окружных напряжений имеют резкий подъем от средней части к периферии. Пики напряжений с течением времени сохраняются, что приводит к снижению прочности надрезанных образцов по сравнению с гладкими. У материалов с более высоким уровнем пластических свойств пики напряжений меньше и с течением времени они уменьшаются. Трехосное растяжение в окрестности надреза затрудняет развитие деформаций ползучести и поэтому длительная прочность образцов с концентратором может быть выше, чем гладких.

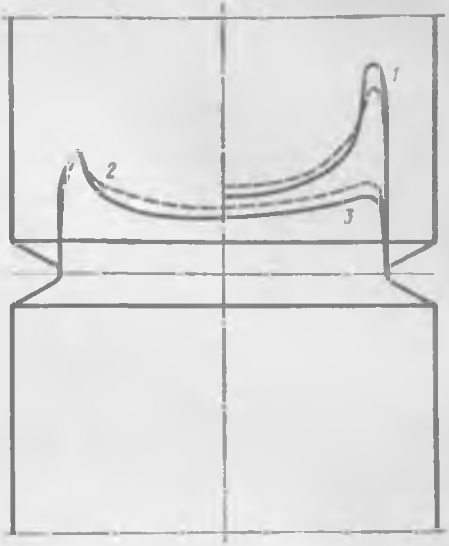


Рис. 11.26. Эпюры осевых (*1*), окружных (*2*) и радиальных (*3*) напряжений в наименьшем поперечном сечении образца с глубокой выточкой в начальный момент времени (сплошные линии) и после перераспределения напряжений в течение некоторого промежутка времени (штриховые линии)

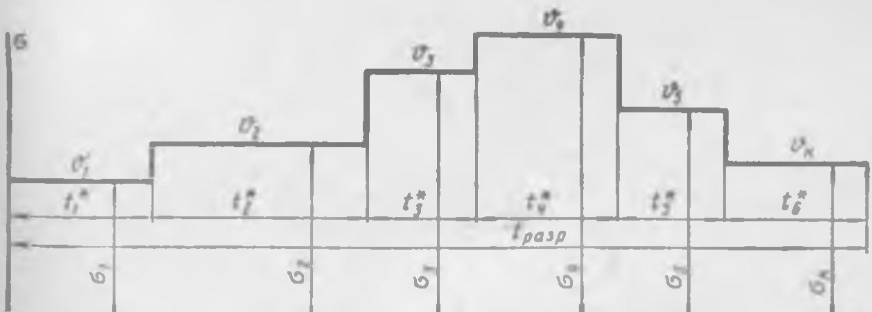


Рис. 11.27. Нестационарный режим напряженности и нагрева, заканчивающийся разрушением

Рассмотрим длительную прочность материала при нестационарной напряженности и нестационарном нагреве в случае одноосного напряженного состояния. Представим себе, что растянутый образец вначале испытывается при напряжении σ_1 и температуре ϑ_1 в течение времени t_1^*, затем при напряжении σ_2 и температуре ϑ_2 в течение

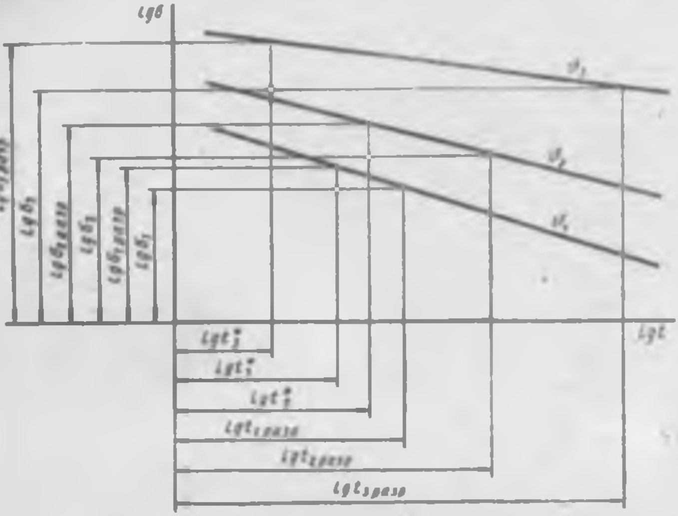


Рис. 11.28. Графики зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения при различных температурах

времени t_2^* и т. д. (рис. 11.27). Процесс испытания заканчивается разрушением при напряжении σ_k, которое имело место в течение времени t_k^* при температуре ϑ_k. Общее время до разрушения

$$t_{\text{разр}} = \sum_{i=1}^{k} t_i^*.$$

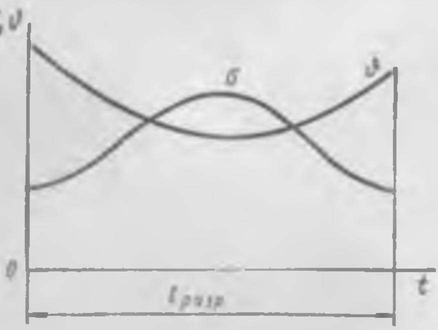


Рис. 11.29. Графики непрерывного изменения напряжения и температуры во времени

Обозначим через $t_{1\,\text{разр}}$, $t_{2\,\text{разр}}$, . . ., $t_{i\,\text{разр}}$, $t_{k\,\text{разр}}$ значения времени, необходимые для разрушения при напряжениях σ_1, σ_2, ..., σ_i, . . ., σ_k. Эти величины определяются по кривым длительной прочности материала при различных температурах ϑ_1, ϑ_2, ..., ϑ_i, . . ., ϑ_k (рис. 11.28). Назовем отношения $\frac{t_1^*}{t_{1\,\text{разр}}}$, $\frac{t_2^*}{t_{2\,\text{разр}}}$, ..., $\frac{t_i^*}{t_{i\,\text{разр}}}$, . . ., $\frac{t_k^*}{t_{k\,\text{разр}}}$ повреждениями на первом, втором и т. д. режимах.

Экспериментальные исследования длительной прочности при нестационарных напряженности и нагреве позволили установить, что сумма повреждений для данного материала равна единице

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^*}{t_{i\,\text{разр}}} = 1, \qquad (11.21)$$

Это положение называют условием линейного суммирования повреждений.

При непрерывном изменении напряжений (рис. 11.29) формула (11.21) принимает вид

$$\int_0^{t_{\text{разр}}} \frac{dt}{t_{\text{разр}}^{\sigma}} = 1, \qquad (11.22)$$

где $t_{\text{разр}}$ — время до разрушения, а $t_{\text{разр}}^{\sigma}$ — время, необходимое для разрушения при некотором напряжении σ. Эта величина является функцией времени. Она может быть определена по графику изменения напряжения во времени (рис. 11.29) и кривым длительной прочности материала при различных температурах (рис. 11.28).

§ 73. Определение коэффициента запаса

Рассмотрим определение коэффициента запаса при длительном нагружении в случае одноосного напряженного состояния. Допустим, что напряжение в детали в течение времени t постоянно и равно σ (рис. 11.30). Тогда, располагая графиком зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения, можно определить коэффициент запаса по времени (коэффициент запаса по долговечности или запас долговечности), а также коэффициент запаса по напряжениям (коэффициент запаса по прочности или запас прочности).

Коэффициент запаса по времени равен отношению времени разрушения при напряжении σ — $t_{\text{разр}}$ к времени t

$$n_t = \frac{t_{\text{разр}}}{t}. \qquad (11.23)$$

Коэффициент запаса по напряжениям равен отношению напряжения при разрушении для времени t — $\sigma_{\text{разр}}$ к напряжению σ:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma}. \qquad (11.24)$$

Поскольку согласно формуле (11.18)

$$t = A\sigma_{\text{разр}}^{-m}; \quad t_{\text{разр}} = A\sigma^{-m},$$

имеем

$$n_t = \frac{t_{\text{разр}}}{t} = \left(\frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma}\right)^m = n_\sigma^m.$$

Рассмотрим длительную прочность материала при нестационарной напряженности и нестационарном нагреве в случае одноосного напряженного состояния. Представим себе, что растянутый образец вначале испытывается при напряжении σ_1 и температуре ϑ_1 в течение времени t_1^*, затем при напряжении σ_2 и температуре ϑ_2 в течение

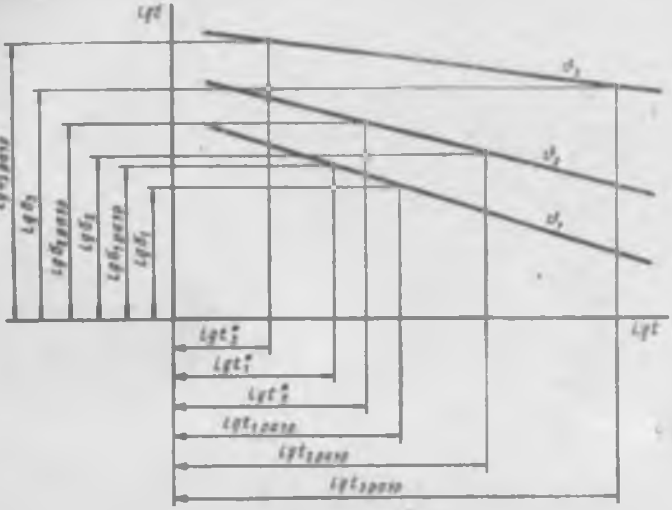


Рис. 11.28. Графики зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения при различных температурах

времени t_2^* и т. д. (рис. 11.27). Процесс испытания заканчивается разрушением при напряжении σ_k, которое имело место в течение времени t_k^* при температуре ϑ_k. Общее время до разрушения

$$t_{\text{разр}} = \sum_{i=1}^{k} t_i^*.$$

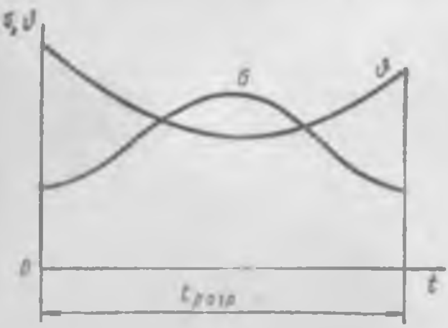


Рис. 11.29. Графики непрерывного изменения напряжения и температуры во времени

Обозначим через $t_{1\,\text{разр}}$, $t_{2\,\text{разр}}$, ..., $t_{i\,\text{разр}}$, $t_{k\,\text{разр}}$ значения времени, необходимые для разрушения при напряжениях σ_1, σ_2, ..., σ_i, ..., σ_k. Эти величины определяются по кривым длительной прочности материала при различных температурах ϑ_1, ϑ_2, ..., ϑ_i, ..., ϑ_k (рис. 11.28). Назовем отношения $\dfrac{t_1^*}{t_{1\,\text{разр}}}$, $\dfrac{t_2^*}{t_{2\,\text{разр}}}$, ..., $\dfrac{t_i^*}{t_{i\,\text{разр}}}$, ..., $\dfrac{t_k^*}{t_{k\,\text{разр}}}$ повреждениями на первом, втором и т. д. режимах.

Экспериментальные исследования длительной прочности при нестационарных напряженности и нагреве позволили установить, что сумма повреждений для данного материала равна единице

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^*}{t_{i\,\text{разр}}} = 1, \tag{11.21}$$

Это положение называют условием линейного суммирования повреждений.

При непрерывном изменении напряжений (рис. 11.29) формула (11.21) принимает вид

$$\int_0^{t_{\text{разр}}} \frac{dt}{t_{\text{разр}}^{\sigma}} = 1, \tag{11.22}$$

где $t_{\text{разр}}$ — время до разрушения, а $t_{\text{разр}}^{\sigma}$ — время, необходимое для разрушения при некотором напряжении σ. Эта величина является функцией времени. Она может быть определена по графику изменения напряжения во времени (рис. 11.29) и кривым длительной прочности материала при различных температурах (рис. 11.28).

§ 73. Определение коэффициента запаса

Рассмотрим определение коэффициента запаса при длительном нагружении в случае одноосного напряженного состояния. Допустим, что напряжение в детали в течение времени t постоянно и равно σ (рис. 11.30). Тогда, располагая графиком зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения, можно определить коэффициент запаса по времени (коэффициент запаса по долговечности или запас долговечности), а также коэффициент запаса по напряжениям (коэффициент запаса по прочности или запас прочности).

Коэффициент запаса по времени равен отношению времени разрушения при напряжении σ — $t_{\text{разр}}$ к времени t

$$n_t = \frac{t_{\text{разр}}}{t}. \tag{11.23}$$

Коэффициент запаса по напряжениям равен отношению напряжения при разрушении для времени t — $\sigma_{\text{разр}}$ к напряжению σ:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma}. \tag{11.24}$$

Поскольку согласно формуле (11.18)

$$t = A\sigma_{\text{разр}}^{-m}; \quad t_{\text{разр}} = A\sigma^{-m},$$

имеем

$$n_t = \frac{t_{\text{разр}}}{t} = \left(\frac{\sigma_{\text{разр}}}{\sigma}\right)^m = n_\sigma^m.$$

Представим себе теперь некоторый режим нестационарной напряженности и нестационарного нагрева. Предположим, что в течение времени t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_k при температурах ϑ_1, ϑ_2, ..., ϑ_i, ..., ϑ_k имеют место напряжения σ_1, σ_2, ..., σ_i, ..., σ_k (рис. 11.31). Определим коэффициенты запаса по времени n_t и по напряжению n_σ для этого режима.

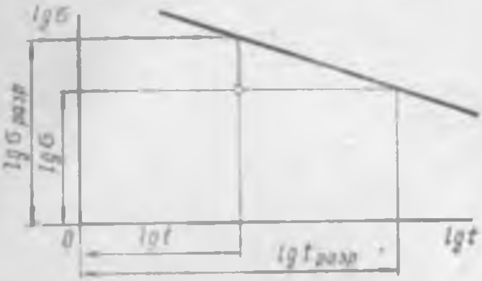


Рис. 11.30. К определению коэффициента запаса по времени и напряжениям при напряжении, постоянном во времени

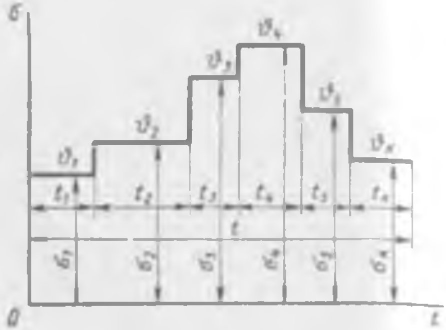


Рис. 11.31. Нестационарный режим напряженности и нагрева

Для определения коэффициента запаса по времени допустим, что отрезки времени t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_k увеличены в одинаковое количество раз, так что в конце нового (растянутого по оси абсцисс) режима происходит разрушение (рис. 11.27). Очевидно, что величина, указывающая, во сколько раз нужно увеличить отрезки времени t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_k для того, чтобы в конце режима произошло разрушение, является коэффициентом запаса по времени:

$$\left.\begin{aligned} t_1^* = n_t t_1; \quad t_2^* = n_t t_2; \ldots; \\ t_i^* = n_t t_i; \ldots; t_k^* = n_t t_k; \end{aligned}\right\} \qquad (11.25)$$

$$t_{\text{разр}} = \sum_{i=1}^{k} t_i^* = n_t \sum_{i=1}^{k} t_i = n_t t.$$

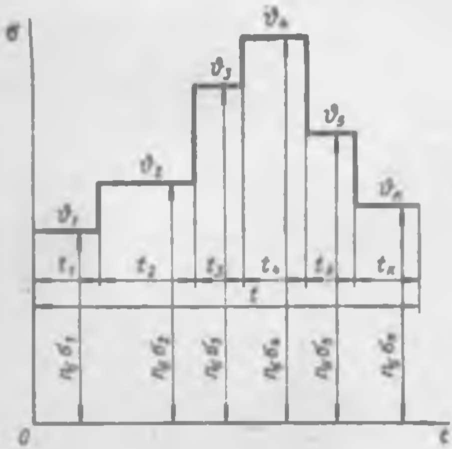


Рис. 11.32. Нестационарный режим напряженности и нагрева, заканчивающийся разрушением (напряжения по сравнению с заданными увеличены в n_σ раз)

Подставляя соотношения (11.25) в выражение (11.21), выводим формулу для определения коэффициента запаса по времени

$$n_t = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{t_i}{t_{i\,\text{разр}}}}. \qquad (11.26)$$

Для определения коэффициента запаса по напряжениям представим себе, что напряжения σ_1, σ_2, ..., σ_i, ..., σ_k увеличены в одинаковое количество раз n_σ, где n_σ — коэффициент запаса по напряжениям, так что в конце нового (растянутого по оси ординат) режима происходит разрушение (рис. 11.32).

Тогда в выражении (11.21) согласно формуле (11.18)

$$\left.\begin{aligned} t_{i\ \text{разр}} &= A_i (n_\sigma \sigma_i)^{-m_i}; \\ t_i' = t_i &= A_i (\sigma_{i\ \text{разр}})^{-m_i}, \end{aligned}\right\} \tag{11.27}$$

где $\sigma_{i\ \text{разр}}$ — величина напряжения, необходимая для разрушения через время t_i. Ее находят по кривым длительной прочности материала при различных температурах (см. рис. 11.28). Подставляя выражения (11.27) в формулу (11.21), получаем трансцендентное уравнение для определения коэффициента запаса по напряжению

$$\sum_{i=1}^{k} n_\sigma^{m_i} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{i\text{разр}}}\right)^{m_i} = 1. \tag{11.28}$$

Это уравнение решается численно. В частном случае постоянной температуры формула (11.28) значительно упрощается, так как тогда $m_1 = m_2 = m_i = \ldots = m_k = m$, и из уравнений (11.28) получаем

$$n_\sigma = \frac{1}{\sqrt[m]{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{i\text{разр}}}\right)^m}}. \tag{11.29}$$

Аналогично можно рассмотреть определение коэффициентов запаса в случае непрерывного изменения во времени напряжения и температуры (рис. 11.29).

Список литературы

1. **Бойков В. Н.** Влияние концентратора на напряженное состояние и длительную прочность.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», № 6, 1964, с. 42—50.
2. **Бойков В. Н.** Прочность надрезанных образцов при длительном нагружении.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», № 6, 1966, с. 25—29.
3. **Бораздыка А. М.** Методы горячих механических испытаний металлов. М., Металлургиздат, 1955, 352 с.
4. **Гарофало Ф.** Законы ползучести и длительной прочности металлов. М., «Металлургия», 1968. 304 с.
5. **Ильюшин А. А., Ленский В. С.** Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959, 371 с.
6. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960, 455 с.
7. **Кеннеди А. Д.** Ползучесть и усталость в металлах. М., «Металлургия», 1965, 312 с.
8. **Малинин Н. Н.** Основы расчетов на ползучесть. М., Машгиз, 1948, 120 с.
9. **Малинин Н. Н.** Прочность турбомашин. М., Машгиз, 1962, 291 с.
10. **Марковец М. П.** Расчет деталей на прочность с учетом ползучести.— «Техника воздушного флота», 1944, № 10, с. 17—19.

Уравнение

$$f = 0 \tag{12.3}$$

представляет собой уравнение гиперповерхности в пространстве компонентов тензора напряжений σ_{ij}, к которой ортогональны векторы скоростей деформаций ползучести. Эту гиперповерхность будем называть гиперповерхностью ползучести.

Функция f аналогична соответствующей функции в теории пластичности.

Примем материал изотропным и будем считать, что изменения объема в процессе ползучести не происходит, т. е.

$$\varepsilon_{ii}^{c} = 0 \tag{12.4}$$

или

$$\xi_{ii}^{c} = 0. \tag{12.5}$$

Вначале допустим, что упрочнение является изотропным, т. е. поверхность ползучести в процессе деформации изменяется подобным образом (изотропно). Далее будет изложена теория ползучести с анизотропным упрочнением.

Для случая изотропного упрочнения первоначально изотропного несжимаемого материала функция f зависит от второго и третьего инвариантов девиатора напряжений. Так же как и при изложении теорий пластичности в гл. IV, включим в функцию f только второй инвариант девиатора напряжений, что равносильно в теории пластичности использованию критерия Хубера—Мизеса. Тогда, как и в § 23

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3s_{ij}$$

и поэтому согласно формулам (12.2) и (1.20)

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{\xi_i^c}{\sigma_i}.$$

Следовательно, зависимости компонентов скоростей деформаций ползучести от компонентов девиатора напряжений принимают вид

$$\xi_{ij}^{c} = \frac{3}{2}\,\frac{\xi_i^c}{\sigma_i}\,(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \tag{12.6}$$

Полагая, что при начальном нагружении и в процессе ползучести мгновенные пластические деформации не возникают и добавляя к соотношениям (12.6) скорости упругих деформаций, полученные путем дифференцирования по времени соотношений (3.5) при $\mu = 0{,}5$ (материал несжимаем), имеем

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2G}(\dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij}\dot{\sigma}_0) + \frac{3}{2}\,\frac{\xi_i^c}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0), \tag{12.7}$$

где точкой обозначена производная по времени.

В работах [27—29] рассмотрены различные варианты построения потенциала ползучести, в результате чего достигнута возможность описания ползучести анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, с учетом деформационной анизотропии.

В одной из изложенных ниже теорий ползучести — теории старения используется гипотеза о существовании потенциала деформаций ползучести, т. е. как и в теории малых упруго-пластических деформаций, принимается, что

$$\varepsilon_{ij}^c = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{12.8}$$

Полагая, что в случае изотропного упрочнения первоначально изотропного несжимаемого материала в функцию f_1 включен только второй инвариант девиатора напряжений, как при выводе уравнений (12.7), получаем зависимости компонентов деформаций от компонентов напряжений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\ (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \tag{12.9}$$

В теории пластичности в функцию f, кроме второго инварианта девиатора напряжений, входил еще параметр Удквиста.

В теории ползучести функция f зависит от некоторой меры скоростей деформаций ползучести, за которую обычно принимают интенсивность скоростей деформаций ползучести. Кроме этого, функция f может зависеть еще от ряда переменных. Ими могут быть параметр Удквиста, время и другие величины. В теориях течения и упрочнения, кроме интенсивности скоростей деформаций ползучести в потенциал ползучести обычно включается одна из этих величин в теории течения время, а в теории упрочнения параметр Удквиста. В теории старения в потенциал ползучести f_1 включается интенсивность деформаций ползучести и время. Ю. Н. Работнов [24] указал на возможность включения в потенциал ползучести f нескольких переменных, которые он назвал структурными параметрами.

Изменение некоторого k-го структурного параметра описывается следующим кинетическим уравнением:

$$dq_k = a_k \overline{d\varepsilon_i^c} + b_k d\sigma_i + c_k\, dt + f_k\, dT, \tag{12.10}$$

где a_k, b_k, c_k, f_k — некоторые функции от $\int \overline{d\varepsilon_i^c}$, σ_i, t и T, а также $q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_n$, если число структурных параметров n.

В зависимости от того, какие из них включены в потенциал ползучести f или f_1, получаем ту или иную теорию ползучести.

При использовании ассоциированного закона течения (12.1) необходимо иметь в виду, что при заданных структурных параметрах

Уравнение

$$f = 0 \tag{12.3}$$

представляет собой уравнение гиперповерхности в пространстве компонентов тензора напряжений σ_{ij}, к которой ортогональны векторы скоростей деформаций ползучести. Эту гиперповерхность будем называть гиперповерхностью ползучести.

Функция f аналогична соответствующей функции в теории пластичности.

Примем материал изотропным и будем считать, что изменения объема в процессе ползучести не происходит, т. е.

$$\varepsilon_{ii}^{c} = 0 \tag{12.4}$$

или

$$\xi_{ii}^{c} = 0. \tag{12.5}$$

Вначале допустим, что упрочнение является изотропным, т. е. поверхность ползучести в процессе деформации изменяется подобным образом (изотропно). Далее будет изложена теория ползучести с анизотропным упрочнением.

Для случая изотропного упрочнения первоначально изотропного несжимаемого материала функция f зависит от второго и третьего инвариантов девиатора напряжений. Так же как и при изложении теорий пластичности в гл. IV, включим в функцию f только второй инвариант девиатора напряжений, что равносильно в теории пластичности использованию критерия Хубера—Мизеса. Тогда, как и в § 23

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = 3s_{ij}$$

и поэтому согласно формулам (12.2) и (1.20)

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{\xi_i^c}{\sigma_i}.$$

Следовательно, зависимости компонентов скоростей деформаций ползучести от компонентов девиатора напряжений принимают вид

$$\xi_{ij}^{c} = \frac{3}{2}\,\frac{\xi_i^c}{\sigma_i}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0\right). \tag{12.6}$$

Полагая, что при начальном нагружении и в процессе ползучести мгновенные пластические деформации не возникают и добавляя к соотношениям (12.6) скорости упругих деформаций, полученные путем дифференцирования по времени соотношений (3.5) при $\mu = 0{,}5$ (материал несжимаем), имеем

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij}\dot{\sigma}_0\right) + \frac{3}{2}\,\frac{\xi_i^c}{\sigma_i}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0\right), \tag{12.7}$$

где точкой обозначена производная по времени.

В работах [27—29] рассмотрены различные варианты построения потенциала ползучести, в результате чего достигнута возможность описания ползучести анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, с учетом деформационной анизотропии.

В одной из изложенных ниже теорий ползучести — теории старения используется гипотеза о существовании потенциала деформаций ползучести, т. е. как и в теории малых упруго-пластических деформаций, принимается, что

$$\varepsilon_{ij}^{c} = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{12.8}$$

Полагая, что в случае изотропного упрочнения первоначально изотропного несжимаемого материала в функцию f_1 включен только второй инвариант девиатора напряжений, как при выводе уравнений (12.7), получаем зависимости компонентов деформаций от компонентов напряжений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \tag{12.9}$$

В теории пластичности в функцию f, кроме второго инварианта девиатора напряжений, входил еще параметр Удквиста.

В теории ползучести функция f зависит от некоторой меры скоростей деформаций ползучести, за которую обычно принимают интенсивность скоростей деформаций ползучести. Кроме этого, функция f может зависеть еще от ряда переменных. Ими могут быть параметр Удквиста, время и другие величины. В теориях течения и упрочнения, кроме интенсивности скоростей деформаций ползучести, в потенциал ползучести обычно включается одна из этих величин: в теории течения время, а в теории упрочнения параметр Удквиста. В теории старения в потенциал ползучести f_1 включается интенсивность деформаций ползучести и время. Ю. Н. Работнов [24] указал на возможность включения в потенциал ползучести f нескольких переменных, которые он назвал структурными параметрами.

Изменение некоторого k-го структурного параметра описывается следующим кинетическим уравнением:

$$dq_k = a_k \overline{d\varepsilon_i^c} + b_k d\sigma_i + c_k\, dt + f_k\, dT, \tag{12.10}$$

где a_k, b_k, c_k, f_k — некоторые функции от $\int \overline{d\varepsilon_i^c}$, σ_i, t и T, а также $q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_n$, если число структурных параметров n.

В зависимости от того, какие из них включены в потенциал ползучести f или f_1, получаем ту или иную теорию ползучести.

При использовании ассоциированного закона течения (12.1) необходимо иметь в виду, что при заданных структурных параметрах это уравнение определяет положение нормали к поверхности ползучести при данном напряженном состоянии. Поэтому при дифференцировании согласно формуле (12.1) структурные параметры остаются неизменными.

§ 75. Теория старения

Допустим, что потенциал ползучести f_1 зависит от второго инварианта девиатора напряжений, интенсивности деформаций и времени. Уравнение поверхности потенциала ползучести имеет вид

$$f_1 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - [\Phi_1(\varepsilon_i, t)]^2 = 0,$$

откуда, используя соотношение (1.20), имеем

$$\sigma_i = \Phi_1(\varepsilon_i, t). \tag{12.11}$$

Уравнения (12.9) и (12.11) определяют зависимости компонентов деформаций ползучести от компонентов напряжений по теории старения.

Из соотношений (12.9) и (12.11) следует, что определение напряжений и деформаций для некоторого значения времени по теории старения эквивалентно решению задачи по теории малых упруго-пластических деформаций для известной диаграммы деформирования.

В частном случае одноосного растяжения

$$\sigma_i = \sigma, \quad \varepsilon_i = \varepsilon$$

и из зависимости (12.11) получаем

$$\sigma = \Phi_1(\varepsilon, t). \tag{12.12}$$

Теория старения обычно формулируется для одноосного растяжения в виде (12.12), т. е. предполагается, что *при заданной температуре между деформацией, напряжением и временем существует определенная зависимость*.

Эта теория была предложена Содербергом [44]. Обобщение и анализ ее были даны Ю. Н. Работновым [22].

Высказанное предположение равносильно допущению о существовании при определенной температуре поверхности в координатах ε, σ, t.

Рассекая поверхность плоскостями, перпендикулярными осям σ, ε и t, получаем соответственно кривые ползучести при постоянном напряжении (рис. 12.1), кривые релаксации напряжений при постоянной деформации (рис. 12.2), графики зависимости напряжения от деформации для определенных значений времени (12.3). Последние называют изохронными кривыми ползучести.

Для построения изохронных кривых ползучести для определенного значения времени t необходимо на кривых ползучести для различных значений напряжений (рис. 12.1) провести вертикальную прямую на расстоянии t от оси ординат. Точки пересечения этой прямой с кривыми ползучести определяют величины напряжений для определенных значений деформаций. Полученные результаты легко перевести в координаты ε, σ (рис. 12.3).

Если при расчете какой-либо детали на ползучесть необходимо определить напряжения и деформации для заданного значения времени, то следует провести расчет на прочность и жесткость этой детали, используя изохронную кривую ползучести для принятого значения времени.

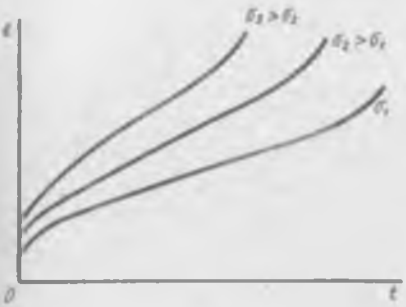


Рис. 12.1. Сечения поверхности в координатах ε, σ, t плоскостями, перпендикулярными оси σ, — кривые ползучести

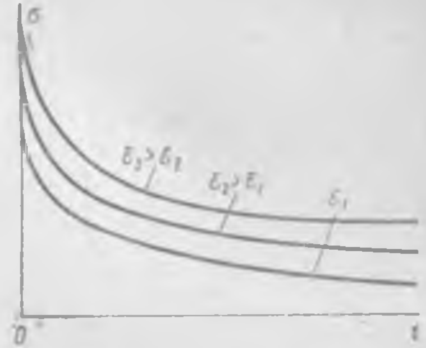


Рис. 12.2. Сечения поверхности в координатах ε, σ, t плоскостями, перпендикулярными оси ε, — кривые релаксации

Такая общая трактовка теории старения была предложена Ю. Н. Работновым [22].

Если изохронные кривые ползучести подобны, т. е. могут быть получены из одной кривой умножением ее ординат на некоторую

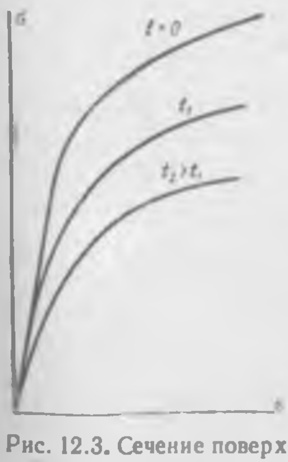


Рис. 12.3. Сечение поверхности в координатах ε, σ, t плоскостями, перпендикулярными оси t,— изохронные кривые ползучести

Рис. 12.4. Изохронные кривые ползучести для хромистой стали [22]

величину, являющуюся функцией времени, то расчеты значительно упрощаются. В этом случае зависимость напряжения от деформации и времени может быть представлена в виде произведения двух функэто уравнение определяет положение нормали к поверхности ползучести при данном напряженном состоянии. Поэтому при дифференцировании согласно формуле (12.1) структурные параметры остаются неизменными.

§ 75. Теория старения

Допустим, что потенциал ползучести f_1 зависит от второго инварианта девиатора напряжений, интенсивности деформаций и времени. Уравнение поверхности потенциала ползучести имеет вид

$$f_1 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - [\Phi_1 (\varepsilon_i, t)]^2 = 0,$$

откуда, используя соотношение (1.20), имеем

$$\sigma_i = \Phi_1 (\varepsilon_i, t). \tag{12.11}$$

Уравнения (12.9) и (12.11) определяют зависимости компонентов деформаций ползучести от компонентов напряжений по теории старения.

Из соотношений (12.9) и (12.11) следует, что определение напряжений и деформаций для некоторого значения времени по теории старения эквивалентно решению задачи по теории малых упругопластических деформаций для известной диаграммы деформирования.

В частном случае одноосного растяжения

$$\sigma_i = \sigma, \quad \varepsilon_i = \varepsilon$$

и из зависимости (12.11) получаем

$$\sigma = \Phi_1 (\varepsilon, t). \tag{12.12}$$

Теория старения обычно формулируется для одноосного растяжения в виде (12.12), т. е. предполагается, что *при заданной температуре между деформацией, напряжением и временем существует определенная зависимость.*

Эта теория была предложена Содербергом [44]. Обобщение и анализ ее были даны Ю. Н. Работновым [22].

Высказанное предположение равносильно допущению о существовании при определенной температуре поверхности в координатах ε, σ, t.

Рассекая поверхность плоскостями, перпендикулярными осям σ, ε и t, получаем соответственно кривые ползучести при постоянном напряжении (рис. 12.1), кривые релаксации напряжений при постоянной деформации (рис. 12.2), графики зависимости напряжения от деформации для определенных значений времени (12.3). Последние называют изохронными кривыми ползучести.

Для построения изохронных кривых ползучести для определенного значения времени t необходимо на кривых ползучести для различных значений напряжений (рис. 12.1) провести вертикальную прямую на расстоянии t от оси ординат. Точки пересечения этой прямой с кривыми ползучести определяют величины напряжений для определенных значений деформаций. Полученные результаты легко перевести в координаты ε, σ (рис. 12.3).

Если при расчете какой-либо детали на ползучесть необходимо определить напряжения и деформации для заданного значения времени, то следует провести расчет на прочность и жесткость этой детали, используя изохронную кривую ползучести для принятого значения времени.

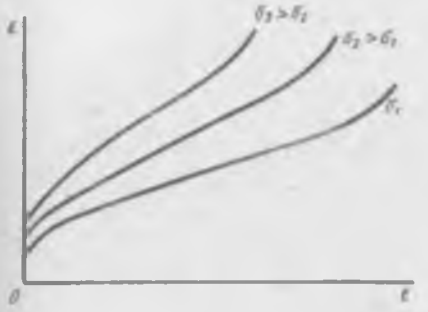


Рис. 12.1. Сечения поверхности в координатах ε, σ, t плоскостями, перпендикулярными оси σ, — кривые ползучести

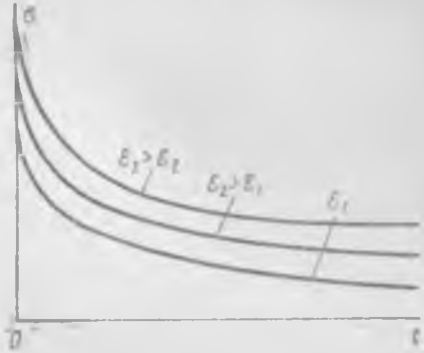


Рис. 12.2. Сечения поверхности в координатах ε, σ, t плоскостями, перпендикулярными оси ε, — кривые релаксации

Такая общая трактовка теории старения была предложена Ю. Н. Работновым [22].

Если изохронные кривые ползучести подобны, т. е. могут быть получены из одной кривой умножением ее ординат на некоторую

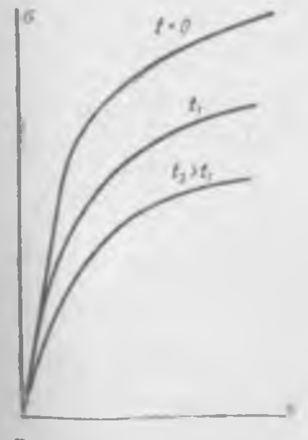


Рис. 12.3. Сечение поверхности в координатах ε, σ, t плоскостями, перпендикулярными оси t, — изохронные кривые ползучести

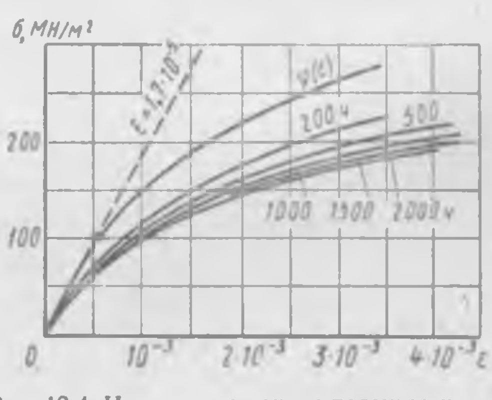


Рис. 12.4. Изохронные кривые ползучести для хромистой стали [22]

величину, являющуюся функцией времени, то расчеты значительно упрощаются. В этом случае зависимость напряжения от деформации и времени может быть представлена в виде произведения двух функций, из которых одна $\varphi(\varepsilon)$ является функцией только деформаций, а другая $\psi(t)$ — функцией только времени

$$\sigma = \varphi(\varepsilon)\,\psi(t). \qquad (12.13)$$

Если принять, что $\psi(0) = 1$, то функция $\varphi(\varepsilon)$ описывает диаграмму растяжения материала.

Подобие кривых ползучести в координатах t, ε^c еще не означает подобия изохронных кривых ползучести в координатах ε, σ. Второе подобие является следствием первого только в том случае, если можно пренебречь упругими деформациями по сравнению с деформациями ползучести.

Рис. 12.5. К построению кривой релаксации по кривым ползучести по теории старения

На рис. 12.4 представлены графики зависимости напряжения от деформации для различных значений времени и график функции $\varphi(\varepsilon)$ для хромистой стали [22].

Хорошее согласование с результатами эксперимента дает следующее аналитическое представление функции:

$$\psi(t) = \frac{1}{1 + at^b}, \qquad (12.14)$$

где a и b — коэффициенты для рассматриваемого материала, зависящие от температуры. В случае постоянной деформации это уравнение описывает релаксацию напряжений.

Приведем метод построения кривой релаксации по серии кривых ползучести на основе этой теории. Предположим, что кривые ползучести при различных напряжениях известны. Допустим, что необходимо построить кривую релаксации при начальном напряжении $\sigma(0)$. В таком случае надо на кривых ползучести для различных значений напряжения (рис. 12.5) провести горизонтальную прямую на расстоянии $\varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E}$ от оси абсцисс. Точки пересечения этой прямой с графиками зависимости деформации от времени определяют величины напряжений для определенных значений времени. Полученные результаты легко перенести в координаты t, σ и построить кривую релаксации (см. рис. 11.4).

Рассмотрим теперь различные аналитические зависимости деформации ползучести от напряжения и времени. Они являются обобщением уравнений кривых ползучести (11.10) и (11.11) на случай напряжений, изменяющихся во времени, и имеют вид

$$\varepsilon^c = Q\Omega \qquad (12.15)$$

или

$$\varepsilon^c = Q_1\Psi + Q_2 t, \qquad (12.16)$$

здесь Q, Q_1 и Q_2 — функции напряжения и температуры, а Ω и Ψ — функции времени и температуры.

Если Q — степенная функция напряжения, то тогда

$$\varepsilon^c = \sigma^n \Omega \tag{12.17}$$

и в общем случае неодноосного напряженного состояния формула (12.11) принимает вид

$$\sigma_i = \left(\frac{\varepsilon_i^c}{\Omega} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{12.18}$$

или

$$\varepsilon_i^c = \sigma_i^n \Omega. \tag{12.19}$$

Выведем уравнение семейства кривых релаксации по теории старения в варианте (12.17). Для этого подставим выражение (12.17) в уравнение (11.1). Тогда получим уравнение семейства кривых релаксации в неявном виде по теории старения в формулировке (12.17)

$$E\Omega\sigma^n + \sigma = \sigma(0). \tag{12.20}$$

Теория старения не может описать ступенчатое нагружение, так как согласно этой теории в момент изменения напряжения деформация ползучести должна иметь разрыв, что, очевидно, невозможно.

§ 76. Теория течения

Допустим теперь, что потенциал ползучести f зависит от второго инварианта девиатора напряжений, интенсивности скоростей деформаций ползучести и времени. Уравнение поверхности потенциала ползучести имеет вид

$$f = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - [\Phi_2(\xi_i^c, t)]^2 = 0,$$

откуда, используя соотношение (1.20), имеем

$$\sigma_i = \Phi_2(\xi_i^c, t). \tag{12.21}$$

Уравнения (12.6) и (12.21) определяют зависимости компонентов скоростей деформаций ползучести от компонентов напряжений по теории течения.

В случае одноосного растяжения

$$\sigma_i = \sigma; \quad \xi_i^c = \xi^c,$$

и из зависимости (12.21) имеем

$$\sigma = \Phi_2(\xi^c, t). \tag{12.22}$$

Теория течения обычно формулируется для одноосного растяжения в виде уравнения (12.22), т. е. предполагается, что *при заданной температуре между напряжением, скоростью деформации ползучести и временем существует определенная зависимость.*

ций, из которых одна $\varphi(\varepsilon)$ является функцией только деформаций, а другая $\psi(t)$ — функцией только времени

$$\sigma = \varphi(\varepsilon)\,\psi(t). \qquad (12.13)$$

Если принять, что $\psi(0) = 1$, то функция $\varphi(\varepsilon)$ описывает диаграмму растяжения материала.

Подобие кривых ползучести в координатах t, ε^c еще не означает подобия изохронных кривых ползучести в координатах ε, σ. Второе подобие является следствием первого только в том случае, если можно пренебречь упругими деформациями по сравнению с деформациями ползучести.

Рис. 12.5. К построению кривой релаксации по кривым ползучести по теории старения

На рис. 12.4 представлены графики зависимости напряжения от деформации для различных значений времени и график функции $\varphi(\varepsilon)$ для хромистой стали [22].

Хорошее согласование с результатами эксперимента дает следующее аналитическое представление функции:

$$\psi(t) = \frac{1}{1 + at^b}, \qquad (12.14)$$

где a и b — коэффициенты для рассматриваемого материала, зависящие от температуры. В случае постоянной деформации это уравнение описывает релаксацию напряжений.

Приведем метод построения кривой релаксации по серии кривых ползучести на основе этой теории. Предположим, что кривые ползучести при различных напряжениях известны. Допустим, что необходимо построить кривую релаксации при начальном напряжении $\sigma(0)$. В таком случае надо на кривых ползучести для различных значений напряжения (рис. 12.5) провести горизонтальную прямую на расстоянии $\varepsilon(0) = \dfrac{\sigma(0)}{E}$ от оси абсцисс. Точки пересечения этой прямой с графиками зависимости деформации от времени определяют величины напряжений для определенных значений времени. Полученные результаты легко перенести в координаты t, σ и построить кривую релаксации (см. рис. 11.4).

Рассмотрим теперь различные аналитические зависимости деформации ползучести от напряжения и времени. Они являются обобщением уравнений кривых ползучести (11.10) и (11.11) на случай напряжений, изменяющихся во времени, и имеют вид

$$\varepsilon^c = Q\Omega \qquad (12.15)$$

или

$$\varepsilon^c = Q_1\Psi + Q_2 t, \qquad (12.16)$$

здесь Q, Q_1 и Q_2 — функции напряжения и температуры, а Ω и Ψ — функции времени и температуры.

Если Q — степенная функция напряжения, то тогда

$$\varepsilon^c = \sigma^n \Omega \tag{12.17}$$

и в общем случае неодноосного напряженного состояния формула (12.11) принимает вид

$$\sigma_i = \left(\frac{\varepsilon_i^c}{\Omega} \right)^{\frac{1}{n}} \tag{12.18}$$

или

$$\varepsilon_i^c = \sigma_i^n \Omega. \tag{12.19}$$

Выведем уравнение семейства кривых релаксации по теории старения в варианте (12.17). Для этого подставим выражение (12.17) в уравнение (11.1). Тогда получим уравнение семейства кривых релаксации в неявном виде по теории старения в формулировке (12.17)

$$E\Omega\sigma^n + \sigma = \sigma(0). \tag{12.20}$$

Теория старения не может описать ступенчатое нагружение, так как согласно этой теории в момент изменения напряжения деформация ползучести должна иметь разрыв, что, очевидно, невозможно.

§ 76. Теория течения

Допустим теперь, что потенциал ползучести f зависит от второго инварианта девиатора напряжений, интенсивности скоростей деформаций ползучести и времени. Уравнение поверхности потенциала ползучести имеет вид

$$f = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - [\Phi_2 (\xi_i^c, t)]^2 = 0,$$

откуда, используя соотношение (1.20), имеем

$$\sigma_i = \Phi_2 (\xi_i^c, t). \tag{12.21}$$

Уравнения (12.6) и (12.21) определяют зависимости компонентов скоростей деформаций ползучести от компонентов напряжений по теории течения.

В случае одноосного растяжения

$$\sigma_i = \sigma; \quad \xi_i^c = \xi^c,$$

и из зависимости (12.21) имеем

$$\sigma = \Phi_2 (\xi^c, t). \tag{12.22}$$

Теория течения обычно формулируется для одноосного растяжения в виде уравнения (12.22), т. е. предполагается, что *при заданной температуре между напряжением, скоростью деформации ползучести и временем существует определенная зависимость.*

Эта теория была предложена Давенпортом [34]. Она получила довольно большое распространение в связи с работами Л. М. Качанова [7].

Рассмотрим метод построения кривой релаксации при одноосном растяжении по серии кривых ползучести на основе этой теории. Предположим, что кривые ползучести для различных величин напряжений известны (рис. 12.6). Проведем на расстоянии $\frac{\sigma(0)}{E}$ от оси абсцисс горизонтальную прямую. Разобъем промежуток времени, за который надо исследовать процесс релаксации, на ряд небольших интервалов Δt, которые могут быть равны или не равны между собой. Полагаем, что за небольшой промежуток времени Δt_1, считая от начального момента, процесс нарастания деформации ползучести протекает при постоянном напряжении $\sigma(0)$, тогда увеличение деформации ползучести за промежуток времени Δt_1 выражается отрезком AB (рис. 12.6). Эту величину пластической деформации обозначим ε_A^c.

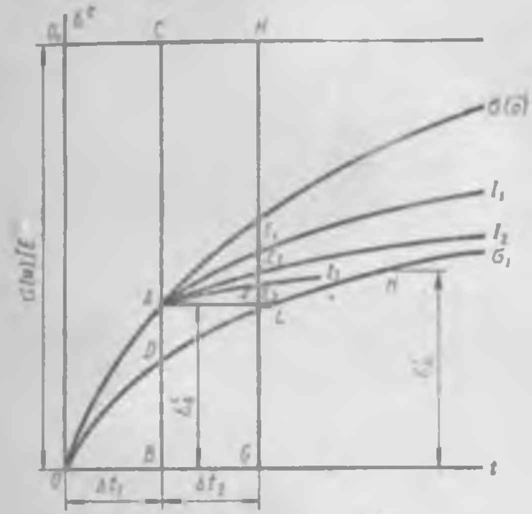


Рис. 12.6. К построению кривой релаксации по кривым ползучести по теориям упрочнения и течения

Учитывая, что полная деформация ε во времени не меняется и равна начальному значению $\varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E}$, можно из уравнения (11.1) определить величину упругой деформации для значения времени $t_1 = \Delta t_1$

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma(0)}{E} - \varepsilon_A^c.$$

Величина $\frac{\sigma_1}{E}$ в выбранном масштабе выражается отрезком AC.

Во второй промежуток времени Δt_2 можно приближенно считать, что процесс нарастания деформации протекает при постоянном напряжении σ_1. Согласно теории течения скорость деформации ползучести является функцией напряжения и времени, а от величины деформации ползучести она не зависит. Поэтому начальная скорость деформации ползучести во втором промежутке времени Δt_2 определяется тангенсом угла наклона касательной в точке D к кривой ползучести при напряжении σ_1 (рис. 12.6). Через D обозначена точка пересечения вертикальной линии, проведенной из точки A, с кривой ползучести при напряжении σ_1.

Следовательно, во втором промежутке времени Δt_2 деформация ползучести нарастает по закону, изображенному линией AE_1, представляющей часть кривой ползучести при напряжении σ_1, передвинутой параллельно самой себе из точки D в точку A и взятой до пересечения в точке E_1 с вертикальной линией, отстоящей от оси ординат на расстоянии $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$.

Увеличение деформации ползучести за время Δt_2 выражается отрезком E_1F, а полная деформация ползучести $\varepsilon^c_{E_1}$ для значения времени $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$ — отрезком E_1G.

Теперь из уравнения (11.1) находим величину упругой деформации для значения времени t_2:

$$\frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma(0)}{E} - \varepsilon^c_{E_1}.$$

Эта величина выражается отрезком E_1H. Продолжая подобные построения, получим кривую OE_1I_1. Расстояния от этой кривой до оси абсцисс равны величинам деформации ползучести для соответствующего значения времени, а расстояния до линии O_1CH — величинам упругой деформации.

Умножением упругой деформации на модуль упругости первого рода можно получить напряжения для соответствующих значений времени. Таким образом строится кривая релаксации.

Неудобство изложенного метода построения кривой релаксации заключается в том, что для использования его необходимо располагать большим количеством кривых ползучести. Чтобы избежать этого, целесообразно предварительно связать скорость деформации, ползучести, деформацию ползучести и напряжение определенной аналитической зависимостью, на основе которой и вывести уравнение кривой релаксации.

Наиболее распространенной аналитической зависимостью скорости деформации ползучести от напряжения и времени является зависимость вида

$$\xi^c = \sigma^n B, \tag{12.23}$$

где n — коэффициент для определенного материала, зависящий от температуры; B — для определенного материала функция времени и температуры.

Зависимость (12.23) можно рассматривать как обобщение формулы (11.14) на случай напряжений, изменяющихся во времени.

Если использовать соотношение (12.23), то тогда в общем случае неодноосного напряженного состояния выражение (12.21) принимает вид

$$\sigma_i = \left(\frac{\xi^c_i}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

или

$$\xi_i = \sigma_i^n B. \tag{12.24}$$

Это соотношение является необходимым дополнением к уравнениям (12.6) и (12.7).

Эта теория была предложена Давенпортом [34]. Она получила довольно большое распространение в связи с работами Л. М. Качанова [7].

Рассмотрим метод построения кривой релаксации при одноосном растяжении по серии кривых ползучести на основе этой теории. Предположим, что кривые ползучести для различных величин напряжений известны (рис. 12.6). Проведем на расстоянии $\frac{\sigma(0)}{E}$ от оси абсцисс горизонтальную прямую. Разобъем промежуток времени, за который надо исследовать процесс релаксации, на ряд небольших интервалов Δt, которые могут быть равны или не равны между собой. Полагаем, что за небольшой промежуток времени Δt_1, считая от начального момента, процесс нарастания деформации ползучести протекает при постоянном напряжении $\sigma(0)$, тогда увеличение деформации ползучести за промежуток времени Δt_1 выражается отрезком AB (рис. 12.6). Эту величину пластической деформации обозначим ε_A^c.

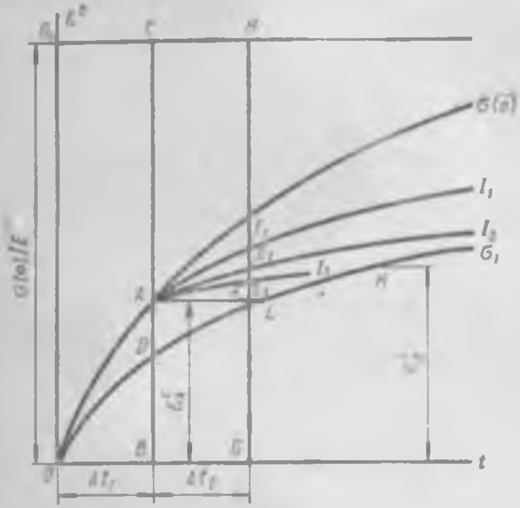


Рис. 12.6. К построению кривой релаксации по кривым ползучести по теориям упрочнения и течения

Учитывая, что полная деформация ε во времени не меняется и равна начальному значению $\varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E}$, можно из уравнения (11.1) определить величину упругой деформации для значения времени $t_1 = \Delta t_1$

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma(0)}{E} - \varepsilon_A^c.$$

Величина $\frac{\sigma_1}{E}$ в выбранном масштабе выражается отрезком AC.

Во второй промежуток времени Δt_2 можно приближенно считать, что процесс нарастания деформации протекает при постоянном напряжении σ_1. Согласно теории течения скорость деформации ползучести является функцией напряжения и времени, а от величины деформации ползучести она не зависит. Поэтому начальная скорость деформации ползучести во втором промежутке времени Δt_2 определяется тангенсом угла наклона касательной в точке D к кривой ползучести при напряжении σ_1 (рис. 12.6). Через D обозначена точка пересечения вертикальной линии, проведенной из точки A, с кривой ползучести при напряжении σ_1.

Следовательно, во втором промежутке времени Δt_2 деформация ползучести нарастает по закону, изображенному линией AE_1, представляющей часть кривой ползучести при напряжении σ_1, передвинутой параллельно самой себе из точки D в точку A и взятой до пересечения в точке E_1 с вертикальной линией, отстоящей от оси ординат на расстоянии $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$.

Увеличение деформации ползучести за время Δt_2 выражается отрезком E_1F, а полная деформация ползучести $\varepsilon^c_{E_1}$ для значения времени $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$ — отрезком E_1G.

Теперь из уравнения (11.1) находим величину упругой деформации для значения времени t_2:

$$\frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma(0)}{E} - \varepsilon^c_{E_1}.$$

Эта величина выражается отрезком E_1H. Продолжая подобные построения, получим кривую OE_1I_1. Расстояния от этой кривой до оси абсцисс равны величинам деформации ползучести для соответствующего значения времени, а расстояния до линии O_1CH — величинам упругой деформации.

Умножением упругой деформации на модуль упругости первого рода можно получить напряжения для соответствующих значений времени. Таким образом строится кривая релаксации.

Неудобство изложенного метода построения кривой релаксации заключается в том, что для использования его необходимо располагать большим количеством кривых ползучести. Чтобы избежать этого, целесообразно предварительно связать скорость деформации, ползучести, деформацию ползучести и напряжение определенной аналитической зависимостью, на основе которой и вывести уравнение кривой релаксации.

Наиболее распространенной аналитической зависимостью скорости деформации ползучести от напряжения и времени является зависимость вида

$$\xi^c = \sigma^n B, \tag{12.23}$$

где n — коэффициент для определенного материала, зависящий от температуры; B — для определенного материала функция времени и температуры.

Зависимость (12.23) можно рассматривать как обобщение формулы (11.14) на случай напряжений, изменяющихся во времени.

Если использовать соотношение (12.23), то тогда в общем случае неодноосного напряженного состояния выражение (12.21) принимает вид

$$\sigma_i = \left(\frac{\xi^c_i}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

или

$$\xi_i = \sigma^n_i B. \tag{12.24}$$

Это соотношение является необходимым дополнением к уравнениям (12.6) и (12.7).

Учитывая, что теория течения в варианте (12.24) наиболее широко использована в расчетах на ползучесть Л. М. Качановым [7], в дальнейшем будем называть ее теорией течения Л. М. Качанова.

Проинтегрируем уравнение (12.23), полагая $\sigma = \text{const}$, используя соотношение (11.15) и учитывая, что при $t = 0$ $\varepsilon^c = 0$. Тогда получим уравнение семейства кривых ползучести в виде (11.13).

Следовательно, по теории течения Л. М. Качанова кривые ползучести являются геометрически подобными.

Получим уравнение семейства кривых релаксации по теории течения Л. М. Качанова.

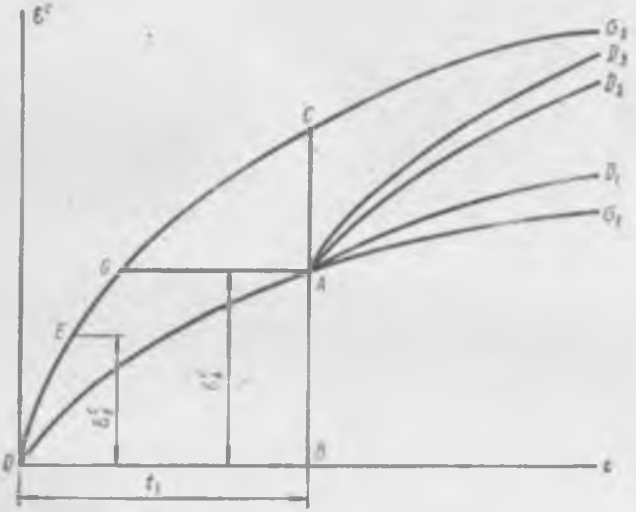


Рис. 12.7. К построению кривых ползучести при ступенчатом нагружении по теориям упрочнения и течения

Из соотношений (11.2) и (12.23) имеем

$$\frac{d\sigma}{\sigma^n} = -EB\,dt.$$

Проинтегрируем это уравнение. Если учесть, что при $t = 0$ $\sigma = \sigma(0)$ и использовать выражение (11.15), то после преобразований получим

$$\sigma = \sigma(0)\,[1 + (n - 1)\,E\sigma^{n-1}(0)\,\Omega]^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{12.25}$$

Уравнение (12.25) является уравнением семейства кривых релаксации по теории течения Л. М. Качанова.

Рассмотрим описание ползучести при ступенчатом нагружении по теории течения. Этот вопрос решается аналогично тому, как это было сделано при построении кривой релаксации. Представим себе, что образец испытывается на ползучесть в течение времени t_1 при напряжении σ_1, а затем напряжение мгновенно увеличивается до величины σ_2 (рис. 12.7). За время t_1 деформация ползучести возрастает до величины ε^c_A, равной в выбранном масштабе отрезку AB.

Точка A является точкой пересечения вертикальной линии, проведенной на расстоянии t_1 от оси ординат, с кривой ползучести при напряжении σ_1. Согласно теории течения после возрастания напряжения от σ_1 до σ_2 скорость деформации ползучести определяется углом наклона касательной в точке C к кривой ползучести при напряжении σ_1. Точка C является точкой пересечения вертикальной линии, проведенной через точку A, с кривой ползучести при напряжении σ_2. При $t > t_1$ деформация ползучести нарастает по закону, изображенному линией AD_1, представляющей собой часть кривой ползучести при напряжении σ_2, передвинутой параллельно самой себе из точки C в точку A.

§ 77. Теория упрочнения

Предположим, что потенциал скоростей деформаций ползучести зависит от второго инварианта девиатора напряжений, интенсивности скоростей деформаций ползучести и параметра Удквиста. Уравнение поверхности потенциала имеет вид

$$f = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - \left[\Phi_3 \left(\xi_i^c, \int \overline{d\varepsilon_i^c}\right)\right]^2 = 0,$$

откуда, используя соотношение (1.20), имеем

$$\sigma_i = \Phi_3 \left(\xi_i^c \int \overline{d\varepsilon_i^c}\right). \tag{12.26}$$

Уравнения (12.6) и (12.26) определяют зависимости компонентов скоростей деформации от компонентов напряжения по теории упрочнения.

В случае одноосного растяжения

$$\sigma_i = \sigma; \quad \xi_i^c = \xi^c; \quad \varepsilon_i^c = \varepsilon^c;$$

и из зависимости (12.26) имеем

$$\sigma = \Phi_3 (\xi^c, \ \varepsilon^c). \tag{12.27}$$

Теория упрочнения так же, как и две предыдущие технические теории ползучести, обычно формулируется для одноосного растяжения в виде уравнения (12.27), т. е. предполагается, что *при заданной температуре между напряжением, деформацией ползучести и скоростью деформации ползучести существует определенная зависимость.*

Эта теория была предложена Людвиком [10], Надаи [15] и Давенпортом [34]. Дальнейшее развитие теории упрочнения принадлежит Ю. Н. Работнову [24].

Метод построения кривой релаксации по серии кривых ползучести аналогичен рассмотренному выше способу построения кривой релаксации на основе теории течения. Различие заключается лишь в том, что согласно теории упрочнения скорость деформации ползучести является функцией напряжения и деформации ползучести и от времени не зависит. Поэтому начальная скорость деформации ползучести во втором промежутке времени Δt_2 определяется тан-

Учитывая, что теория течения в варианте (12.24) наиболее широко использована в расчетах на ползучесть Л. М. Качановым [7], в дальнейшем будем называть ее теорией течения Л. М. Качанова.

Проинтегрируем уравнение (12.23), полагая $\sigma = \text{const}$, используя соотношение (11.15) и учитывая, что при $t = 0$ $\varepsilon^c = 0$. Тогда получим уравнение семейства кривых ползучести в виде (11.13). Следовательно, по теории течения Л. М. Качанова кривые ползучести являются геометрически подобными.

Получим уравнение семейства кривых релаксации по теории течения Л. М. Качанова.

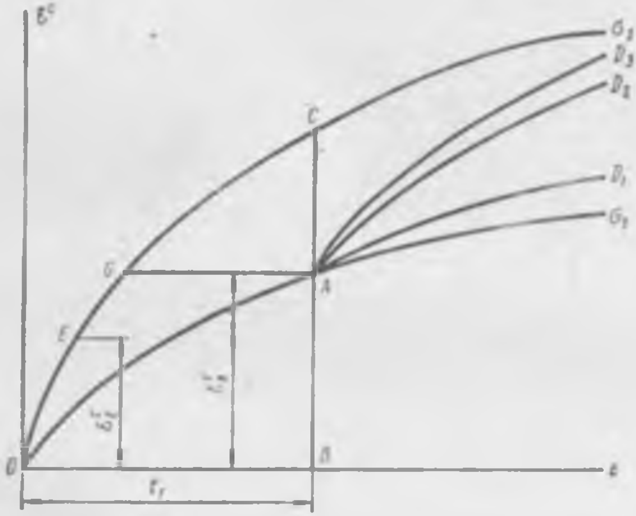


Рис. 12.7. К построению кривых ползучести при ступенчатом нагружении по теориям упрочнения и течения

Из соотношений (11.2) и (12.23) имеем

$$\frac{d\sigma}{\sigma^n} = -EB\,dt.$$

Проинтегрируем это уравнение. Если учесть, что при $t = 0$ $\sigma = \sigma(0)$ и использовать выражение (11.15), то после преобразований получим

$$\sigma = \sigma(0)\,[1 + (n-1)\,E\sigma^{n-1}(0)\,\Omega]^{-\frac{1}{n-1}}. \qquad (12.25)$$

Уравнение (12.25) является уравнением семейства кривых релаксации по теории течения Л. М. Качанова.

Рассмотрим описание ползучести при ступенчатом нагружении по теории течения. Этот вопрос решается аналогично тому, как это было сделано при построении кривой релаксации. Представим себе, что образец испытывается на ползучесть в течение времени t_1 при напряжении σ_1, а затем напряжение мгновенно увеличивается до величины σ_2 (рис. 12.7). За время t_1 деформация ползучести возрастает до величины ε_A^c, равной в выбранном масштабе отрезку AB.

Точка A является точкой пересечения вертикальной линии, проведенной на расстоянии t_1 от оси ординат, с кривой ползучести при напряжении σ_1. Согласно теории течения после возрастания напряжения от σ_1 до σ_2 скорость деформации ползучести определяется углом наклона касательной в точке C к кривой ползучести при напряжении σ_1. Точка C является точкой пересечения вертикальной линии, проведенной через точку A, с кривой ползучести при напряжении σ_2. При $t > t_1$ деформация ползучести нарастает по закону, изображенному линией AD_1, представляющей собой часть кривой ползучести при напряжении σ_2, передвинутой параллельно самой себе из точки C в точку A.

§ 77. Теория упрочнения

Предположим, что потенциал скоростей деформаций ползучести зависит от второго инварианта девиатора напряжений, интенсивности скоростей деформаций ползучести и параметра Удквиста. Уравнение поверхности потенциала имеет вид

$$f = \frac{3}{2}\, s_{ij}s_{ij} - \left[\Phi_3\left(\xi_i^c, \int \overline{d\varepsilon_i^c}\right)\right]^2 = 0,$$

откуда, используя соотношение (1.20), имеем

$$\sigma_i = \Phi_3\left(\xi_i^c \int \overline{d\varepsilon_i^c}\right). \tag{12.26}$$

Уравнения (12.6) и (12.26) определяют зависимости компонентов скоростей деформации от компонентов напряжения по теории упрочнения.

В случае одноосного растяжения

$$\sigma_i = \sigma; \quad \xi_i^c = \xi^c; \quad \varepsilon_i^c = \varepsilon^c;$$

и из зависимости (12.26) имеем

$$\sigma = \Phi_3\,(\xi^c,\ \varepsilon^c). \tag{12.27}$$

Теория упрочнения так же, как и две предыдущие технические теории ползучести, обычно формулируется для одноосного растяжения в виде уравнения (12.27), т. е. предполагается, что *при заданной температуре между напряжением, деформацией ползучести и скоростью деформации ползучести существует определенная зависимость.*

Эта теория была предложена Людвиком [10], Надаи [15] и Давенпортом [34]. Дальнейшее развитие теории упрочнения принадлежит Ю. Н. Работнову [24].

Метод построения кривой релаксации по серии кривых ползучести аналогичен рассмотренному выше способу построения кривой релаксации на основе теории течения. Различие заключается лишь в том, что согласно теории упрочнения скорость деформации ползучести является функцией напряжения и деформации ползучести и от времени не зависит. Поэтому начальная скорость деформации ползучести во втором промежутке времени Δt_2 определяется тангенсом угла наклона касательной в точке L к кривой ползучести при напряжении σ_1 (см. рис. 12.6). Точка L является точкой пересечения горизонтальной линии, проведенной из точки A, с кривой ползучести при напряжении σ_1.

Следовательно, согласно теории упрочнения во втором промежутке времени Δt_2 пластическая деформация нарастает по закону, изображенному линией AE_2, представляющей собой участок кривой ползучести при напряжении σ_1, передвинутой параллельно самой себе из точки L в точку A и взятой до пересечения в точке E_2 с вертикальной линией, отстоящей от оси ординат на расстоянии $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$. Продолжая подобные построения, получим кривую OE_2I_2.

Рис. 12.8. Графики зависимости напряжения от деформации ползучести при постоянной скорости ее ($\xi_3^c > \xi_2^c > \xi_1^c$)

Ввиду того, что скорость деформации ползучести для некоторого значения времени по теории упрочнения меньше, чем по теории течения, кривая релаксации, построенная на ее основе, располагается всегда выше кривой релаксации, построенной по теории течения.

Аналитическая зависимость между скоростью деформации ползучести, деформацией ползучести и напряжением обычно представляется в виде

$$\xi^c (\varepsilon^c)^\beta = f(\sigma), \qquad (12.28)$$

причем предполагается, что $f(0)=0$. Для функции напряжения $f(\sigma)$ были предложены следующие выражения:

$$f(\sigma) = \alpha\sigma^\nu; \qquad (12.29)$$

$$f(\sigma) = a\left(\exp\frac{\sigma}{b} - 1\right); \qquad (12.30)$$

$$f(\sigma) = a\exp\frac{\sigma}{b}, \qquad (12.31)$$

где α, β, ν, a и b — коэффициенты для определенного материала, зависящие от температуры. Очевидно, что выражение (12.31) несправедливо при малых напряжениях и при $\sigma = 0$, так как $f(0) \neq 0$.

С. А. Шестериковым [32] установлено необходимое условие, которому должна удовлетворять функция $f(\sigma)$.

Как показывают экспериментальные данные, с ростом нагрузки величина накопленной деформации ползучести растет быстрее, чем по линейному закону, т. е.

$$\frac{\partial^2\varepsilon^c}{\partial\sigma^2} > 0. \qquad (12.32)$$

Это означает, что линии, по которым поверхность в координатах ε^c, ξ^c, σ пересекается плоскостями, перпендикулярными оси ξ^c, и которые представляют собой графики зависимости напряжен от деформации ползучести при постоянной скорости деформаці являются выпуклыми (рис. 12.8).

Продифференцируем дважды выражение (12.28) по σ. То получим

$$\xi^c \beta (\varepsilon^c)^{\beta-1} \frac{\partial \varepsilon^c}{\partial \sigma} = f'(\sigma);$$

$$\xi^c \beta (\beta - 1) (\varepsilon^c)^{\beta-2} \left(\frac{\partial \varepsilon^c}{\partial \sigma}\right)^2 + \xi^c \beta (\varepsilon^c)^{\beta-2} \frac{\partial^2 \varepsilon^c}{\partial \sigma^2} = f''(\sigma).$$

Исключая из этих двух выражений $\frac{\partial \varepsilon^c}{\partial \sigma}$, имеем

$$\beta \xi^c (\varepsilon^c)^{\beta-1} \frac{\partial^2 \varepsilon^c}{\partial \sigma^2} = f''(\sigma) - \frac{\beta - 1}{\beta} \frac{[f'(\sigma)]^2}{f(\sigma)}.$$

На основании неравенства (12.32) заключаем, что

$$f''(\sigma) - \frac{\beta - 1}{\beta} \frac{[f'(\sigma)]^2}{f(\sigma)} > 0. \qquad (12.3$$

Легко показать, что выражение (12.29) удовлетворяет этом неравенству при $\nu > \beta$, а соотношение (12.31) — всегда. Функці (12.30) не удовлетворяет неравенству (12.33) при малых значениях Поскольку, как отмечалось выше, для выражения (12.31) $f(0) \neq$ (из трех функций $f(\sigma)$ наилучшей следует признать функцию (12.2 при $\nu > \beta$.

Если использовать выражения (12.28) и (12.29), то тогда в обще случае неодноосного напряженного состояния соотношение (12.2 принимает вид

$$\sigma_i = \left[\frac{\xi_i^c}{\alpha}\left(\int \overline{d\varepsilon_i^c}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\nu}}. \qquad (12.3$$

Оно является необходимым дополнением к уравнениям (12.6 и (12.7).

Получим уравнение кривых ползучести, используя выражени (12.28) и (12.29). Учитывая формулу (11.3), имеем

$$(\varepsilon^c)^\beta \, d\varepsilon^c = \alpha \sigma^\nu \, dt. \qquad (12.35$$

Проинтегрируем это уравнение. При этом учтем, что напряжени постоянно, а при $t = 0$ $\varepsilon^c = 0$. Тогда получим уравнение кривых пол зучести

$$(\varepsilon^c) = [\alpha (\beta + 1)]^{\frac{1}{\beta+1}} \sigma^{\frac{\nu}{\beta+1}} t^{\frac{1}{\beta+1}}. \qquad (12.36$$

Полученное уравнение кривой ползучести является частным слу чаем уравнения (11.13). Согласно ему кривые ползучести геометри чески подобны. Поскольку в степенной зависимости деформаци ползучести от напряжения (11.13) показатель степени больше еди ницы, заключаем, что $\nu > \beta + 1$. Из условия С. А. Шестерикова (12.33) следует только, что $\nu > \beta$.

генсом угла наклона касательной в точке L к кривой ползучести при напряжении σ_1 (см. рис. 12.6). Точка L является точкой пересечения горизонтальной линии, проведенной из точки A, с кривой ползучести при напряжении σ_1.

Следовательно, согласно теории упрочнения во втором промежутке времени Δt_2 пластическая деформация нарастает по закону, изображенному линией AE_2, представляющей собой участок кривой ползучести при напряжении σ_1, передвинутой параллельно самой себе из точки L в точку A и взятой до пересечения в точке E_2 с вертикальной линией, отстоящей от оси ординат на расстоянии $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$. Продолжая подобные построения, получим кривую OE_2I_2.

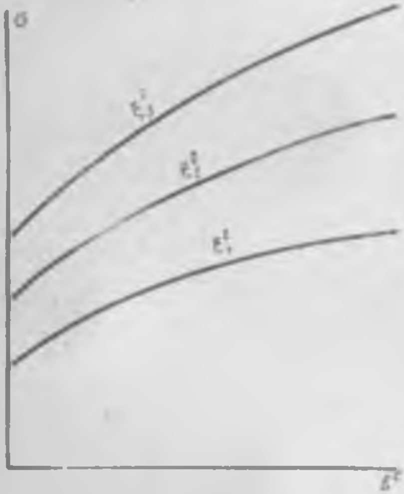


Рис. 12.8. Графики зависимости напряжения от деформации ползучести при постоянной скорости ее $(\xi_3^c > \xi_2^c > \xi_1^c)$

Ввиду того, что скорость деформации ползучести для некоторого значения времени по теории упрочнения меньше, чем по теории течения, кривая релаксации, построенная на ее основе, располагается всегда выше кривой релаксации, построенной по теории течения.

Аналитическая зависимость между скоростью деформации ползучести, деформацией ползучести и напряжением обычно представляется в виде

$$\xi^c (\varepsilon^c)^\beta = f(\sigma), \tag{12.28}$$

причем предполагается, что $f(0) = 0$. Для функции напряжения $f(\sigma)$ были предложены следующие выражения:

$$f(\sigma) = \alpha\sigma^\nu; \tag{12.29}$$

$$f(\sigma) = a\left(\exp\frac{\sigma}{b} - 1\right); \tag{12.30}$$

$$f(\sigma) = a\exp\frac{\sigma}{b}, \tag{12.31}$$

где α, β, ν, a и b — коэффициенты для определенного материала, зависящие от температуры. Очевидно, что выражение (12.31) несправедливо при малых напряжениях и при $\sigma = 0$, так как $f(0) \neq 0$.

С. А. Шестериковым [32] установлено необходимое условие, которому должна удовлетворять функция $f(\sigma)$.

Как показывают экспериментальные данные, с ростом нагрузки величина накопленной деформации ползучести растет быстрее, чем по линейному закону, т. е.

$$\frac{\partial^2\varepsilon^c}{\partial\sigma^2} > 0. \tag{12.32}$$

Это означает, что линии, по которым поверхность в координатах ε^c, ξ^c, σ пересекается плоскостями, перпендикулярными оси ξ^c, и которые представляют собой графики зависимости напряжения от деформации ползучести при постоянной скорости деформации, являются выпуклыми (рис. 12.8).

Продифференцируем дважды выражение (12.28) по σ. Тогда получим

$$\xi^c\beta (\varepsilon^c)^{\beta-1} \frac{\partial \varepsilon^c}{\partial \sigma} = f'(\sigma);$$

$$\xi^c\beta (\beta - 1) (\varepsilon^c)^{\beta-2} \left(\frac{\partial \varepsilon^c}{\partial \sigma}\right)^2 + \xi^c\beta (\varepsilon^c)^{\beta-1} \frac{\partial^2 \varepsilon^c}{\partial \sigma^2} = f''(\sigma).$$

Исключая из этих двух выражений $\frac{\partial \varepsilon^c}{\partial \sigma}$, имеем

$$\beta \xi^c (\varepsilon^c)^{\beta-1} \frac{\partial^2 \varepsilon^c}{\partial \sigma^2} = f''(\sigma) - \frac{\beta - 1}{\beta} \frac{[f'(\sigma)]^2}{f(\sigma)}.$$

На основании неравенства (12.32) заключаем, что

$$f''(\sigma) - \frac{\beta - 1}{\beta} \frac{[f'(\sigma)]^2}{f(\sigma)} > 0. \tag{12.33}$$

Легко показать, что выражение (12.29) удовлетворяет этому неравенству при $\nu > \beta$, а соотношение (12.31) — всегда. Функция (12.30) не удовлетворяет неравенству (12.33) при малых значениях σ. Поскольку, как отмечалось выше, для выражения (12.31) $f(0) \neq 0$, из трех функций $f(\sigma)$ наилучшей следует признать функцию (12.29) при $\nu > \beta$.

Если использовать выражения (12.28) и (12.29), то тогда в общем случае неодноосного напряженного состояния соотношение (12.26) принимает вид

$$\sigma_i = \left[\frac{\xi_i^c}{\alpha}\left(\int \overline{d\varepsilon_i^c}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\nu}}. \tag{12.34}$$

Оно является необходимым дополнением к уравнениям (12.6) и (12.7).

Получим уравнение кривых ползучести, используя выражения (12.28) и (12.29). Учитывая формулу (11.3), имеем

$$(\varepsilon^c)^{\beta}\, d\varepsilon^c = \alpha \sigma^{\nu}\, dt. \tag{12.35}$$

Проинтегрируем это уравнение. При этом учтем, что напряжение постоянно, а при $t = 0$ $\varepsilon^c = 0$. Тогда получим уравнение кривых ползучести

$$(\varepsilon^c) = [\alpha (\beta + 1)]^{\frac{1}{\beta+1}} \sigma^{\frac{\nu}{\beta+1}} t^{\frac{1}{\beta+1}}. \tag{12.36}$$

Полученное уравнение кривой ползучести является частным случаем уравнения (11.13). Согласно ему кривые ползучести геометрически подобны. Поскольку в степенной зависимости деформации ползучести от напряжения (11.13) показатель степени больше единицы, заключаем, что $\nu > \beta + 1$. Из условия С. А. Шестерикова (12.33) следует только, что $\nu > \beta$.

Теперь, исходя из зависимостей (12.28) и (12.29), получим уравнение кривых релаксации. Преобразуем уравнение (12.35), используя соотношения (11.1) и (11.2). В результате устанавливаем

$$-[\sigma(0)-\sigma]^{\beta}\frac{d\sigma}{\sigma^{\nu}}=\alpha E^{\beta+1}\,dt.$$

Проинтегрируем полученную зависимость, используя начальное условие при $t=0$ $\sigma=\sigma(0)$. Тогда имеем

$$t=\frac{1}{\alpha E^{\beta+1}}\int\limits_{\sigma}^{\sigma(0)}[\sigma(0)-\sigma]^{\beta}\frac{d\sigma}{\sigma^{\nu}}. \qquad (12.37)$$

Уравнение (12.37) является уравнением семейства кривых релаксации в неявном виде. В общем случае произвольных величин β и ν интеграл (12.37) определяется численно.

Рассмотрим описание ползучести при ступенчатом нагружении по теории упрочнения. Отличие от аналогичного исследования по теории течения заключается только в том, что по теории упрочнения после возрастания напряжения от величины σ_1 до σ_2 скорость деформации ползучести определяется углом наклона касательной в точке G к кривой ползучести при напряжении σ_2 (рис. 12.7). Точка G является точкой пересечения горизонтальной линии, проведенной через точку A, с кривой ползучести при напряжении σ_2. При $t>t_1$ деформация ползучести нарастает по закону, изображаемому линией AD_2, представляющей собой часть кривой ползучести при напряжении σ_2, передвинутой параллельно самой себе из точки G в точку A.

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, Ю. Н. Работновым [24] была предложена более общая теория, согласно которой в потенциал ползучести, кроме интенсивности скоростей деформаций ползучести, может быть включено несколько параметров, которые названы структурными. Кинетическое уравнение (12.10) для k-го структурного параметра приведено в предыдущем параграфе. Если за структурный параметр принять параметр Удквиста, получим изложенную выше теорию упрочнения.

Рассмотрим частный случай одного структурного параметра, когда за него принята работа внутренних сил на перемещениях, возникших в результате ползучести материала. В случае одноосного напряженного состояния

$$q=\int\sigma\,d\varepsilon^{c}. \qquad (12.38)$$

Тогда метод построения кривой релаксации по серии кривых ползучести аналогичен рассмотренному выше способу построения кривой релаксации на основе теории упрочнения. Различие заключается лишь в том, что согласно рассматриваемой теории скорость деформации ползучести определяется точкой K (см. рис. 12.6), ордината которой ε_K^c благодаря введенному структурному параметру (12.38) при $\sigma=\mathrm{const}$ определяется из условия

$$\sigma(0)\varepsilon_A^c=\sigma_1\varepsilon_K^c.$$

Следовательно, согласно рассматриваемой теории во втором промежутке времени Δt_2 деформация ползучести нарастает по закону, изображаемому линией AE_3, представляющей собой участок кривой ползучести при напряжении σ_1, взятый от точки K до пересечения в точке E_3 с вертикальной линией, отстоящей от оси ординат на расстоянии $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$. Продолжая подобные построения, получаем кривую OE_3I_3.

Ввиду того что скорость деформации ползучести для некоторого значения времени по рассматриваемой теории меньше, чем по теории упрочнения, процесс релаксации по этой теории идет медленнее, чем по теории упрочнения.

Получим уравнение кривой релаксации по рассматриваемой теории с помощью аналитических формулировок (12.28) и (12.29) теории упрочнения, используя вместо деформации структурный параметр (12.38).

Для того чтобы в частном случае постоянного напряжения

$$\sigma = \text{const}, \quad q = \sigma\varepsilon^c$$

выражение

$$\dot{\varepsilon}^c \left(\int \sigma \, d\varepsilon^c \right)^\beta = \alpha\sigma^{\nu_1}$$

совпало с соотношениями (12.28) и (12.29), необходимо положить

$$\nu_1 = \nu + \beta.$$

Тогда, используя выражение (11.3), получим

$$\left(\int \sigma \, d\varepsilon^c \right)^\beta d\varepsilon^c = \alpha\sigma^{\nu+\beta} \, dt.$$

Подставим соотношение (11.2) в это уравнение и введем пределы интегрирования от $\sigma(0)$ до σ. В результате имеем

$$-\left(- \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma} \sigma \frac{d\sigma}{E} \right)^\beta \frac{d\sigma}{E} = a\sigma^{\nu+\beta} \, dt,$$

откуда после разделения переменных и интегрирования с использованием начального условия при $t = 0$ $\sigma = \sigma(0)$ получаем

$$t = \frac{1}{2^\beta \alpha E^{\beta+1}} \int\limits_{\sigma}^{\sigma(0)} \frac{[\sigma^2(0) - \sigma^2]^\beta \, d\sigma}{\sigma^{\nu+\beta}}. \qquad (12.39)$$

Это уравнение и является уравнением семейства кривых релаксации в неявном виде. Интеграл (12.39) в общем случае произвольных величин β и ν определяется численно.

Построение кривой ползучести при ступенчатом нагружении производится аналогично тому, как это было сделано по теории упрочнения. Отличие заключается в том, что согласно рассматриваемой теории после возрастания напряжения от σ_1 до σ_2 (см. рис. 12.7) скорость деформации ползучести определяется углом

Теперь, исходя из зависимостей (12.28) и (12.29), получим уравнение кривых релаксации. Преобразуем уравнение (12.35), используя соотношения (11.1) и (11.2). В результате устанавливаем

$$-[\sigma(0)-\sigma]^{\beta}\frac{d\sigma}{\sigma^{\nu}}=\alpha E^{\beta+1}\,dt.$$

Проинтегрируем полученную зависимость, используя начальное условие при $t=0$ $\sigma=\sigma(0)$. Тогда имеем

$$t=\frac{1}{\alpha E^{\beta+1}}\int\limits_{\sigma}^{\sigma(0)}[\sigma(0)-\sigma]^{\beta}\frac{d\sigma}{\sigma^{\nu}}. \qquad (12.37)$$

Уравнение (12.37) является уравнением семейства кривых релаксации в неявном виде. В общем случае произвольных величин β и ν интеграл (12.37) определяется численно.

Рассмотрим описание ползучести при ступенчатом нагружении по теории упрочнения. Отличие от аналогичного исследования по теории течения заключается только в том, что по теории упрочнения после возрастания напряжения от величины σ_1 до σ_2 скорость деформации ползучести определяется углом наклона касательной в точке G к кривой ползучести при напряжении σ_2 (рис. 12.7). Точка G является точкой пересечения горизонтальной линии, проведенной через точку A, с кривой ползучести при напряжении σ_2. При $t>t_1$ деформация ползучести нарастает по закону, изображаемому линией AD_2, представляющей собой часть кривой ползучести при напряжении σ_2, передвинутой параллельно самой себе из точки G в точку A.

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, Ю. Н. Работновым [24] была предложена более общая теория, согласно которой в потенциал ползучести, кроме интенсивности скоростей деформаций ползучести, может быть включено несколько параметров, которые названы структурными. Кинетическое уравнение (12.10) для k-го структурного параметра приведено в предыдущем параграфе. Если за структурный параметр принять параметр Удквиста, получим изложенную выше теорию упрочнения.

Рассмотрим частный случай одного структурного параметра, когда за него принята работа внутренних сил на перемещениях, возникших в результате ползучести материала. В случае одноосного напряженного состояния

$$q=\int\sigma\,d\varepsilon^{c}. \qquad (12.38)$$

Тогда метод построения кривой релаксации по серии кривых ползучести аналогичен рассмотренному выше способу построения кривой релаксации на основе теории упрочнения. Различие заключается лишь в том, что согласно рассматриваемой теории скорость деформации ползучести определяется точкой K (см. рис. 12.6), ордината которой e_K благодаря введенному структурному параметру (12.38) при $\sigma=\mathrm{const}$ определяется из условия

$$\sigma(0)\varepsilon_A^{c}=\sigma_1\varepsilon_K^{c}.$$

Следовательно, согласно рассматриваемой теории во втором промежутке времени Δt_2 деформация ползучести нарастает по закону, изображаемому линией AE_3, представляющей собой участок кривой ползучести при напряжении σ_1, взятый от точки K до пересечения в точке E_3 с вертикальной линией, отстоящей от оси ординат на расстоянии $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$. Продолжая подобные построения, получаем кривую OE_3I_3.

Ввиду того что скорость деформации ползучести для некоторого значения времени по рассматриваемой теории меньше, чем по теории упрочнения, процесс релаксации по этой теории идет медленнее, чем по теории упрочнения.

Получим уравнение кривой релаксации по рассматриваемой теории с помощью аналитических формулировок (12.28) и (12.29) теории упрочнения, используя вместо деформации структурный параметр (12.38).

Для того чтобы в частном случае постоянного напряжения

$$\sigma = \text{const}, \quad q = \sigma\varepsilon^c$$

выражение

$$\dot{\varepsilon}^c \left(\int \sigma \, d\varepsilon^c \right)^\beta = \alpha\sigma^{\nu_1}$$

совпало с соотношениями (12.28) и (12.29), необходимо положить

$$\nu_1 = \nu + \beta.$$

Тогда, используя выражение (11.3), получим

$$\left(\int \sigma \, d\varepsilon^c \right)^\beta d\varepsilon^c = \alpha\sigma^{\nu+\beta} \, dt.$$

Подставим соотношение (11.2) в это уравнение и введем пределы интегрирования от $\sigma(0)$ до σ. В результате имеем

$$-\left(-\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma} \sigma \frac{d\sigma}{E} \right)^\beta \frac{d\sigma}{E} = \alpha\sigma^{\nu+\beta} \, dt,$$

откуда после разделения переменных и интегрирования с использованием начального условия при $t = 0$ $\sigma = \sigma(0)$ получаем

$$t = \frac{1}{2^\beta \alpha E^{\beta+1}} \int\limits_{\sigma}^{\sigma(0)} \frac{[\sigma^2(0) - \sigma^2]^\beta \, d\sigma}{\sigma^{\nu+\beta}}. \qquad (12.39)$$

Это уравнение и является уравнением семейства кривых релаксации в неявном виде. Интеграл (12.39) в общем случае произвольных величин β и ν определяется численно.

Построение кривой ползучести при ступенчатом нагружении производится аналогично тому, как это было сделано по теории упрочнения. Отличие заключается в том, что согласно рассматриваемой теории после возрастания напряжения от σ_1 до σ_2 (см. рис. 12.7) скорость деформации ползучести определяется углом наклона касательной в точке E к кривой ползучести при напряжении σ_2. Координата точки определяется из условия

$$\sigma_1 \varepsilon_A^c = \sigma_2 \varepsilon_E^c.$$

При $t > t_1$ деформация ползучести нарастает по закону, изображаемому линией AD_3, представляющей собой часть кривой ползучести при напряжении σ_2, взятой от точки E. Ввиду того что скорость деформации ползучести при $t = t_1$ по рассматриваемой теории больше, чем по теории упрочнения, кривая ползучести по ней расположится выше кривой ползучести по теории упрочнения.

Рассмотрим возможность отражения разупрочнения при помощи теории структурных параметров. Для простоты примем один структурный параметр, зависящий от деформации ползучести и времени, кинетическое уравнение для которого в случае одноосного напряженного состояния согласно формуле (12.10) имеет вид

$$dq = d\varepsilon^c - c\,dt.$$

Коэффициент при dt взят отрицательным, поскольку он характеризует скорость разупрочнения. Абсолютная величина его должна увеличиваться с увеличением степени упрочнения. Примем простейшую линейную зависимость ее от параметра q. Тогда

$$dq = d\varepsilon^c - \lambda q\,dt, \tag{12.40}$$

где λ — коэффициент для рассматриваемого материала, зависящий от температуры.

Зависимость между скоростью деформации ползучести, напряжением и структурным параметром q примем в форме (12.28), (12.29), т. е.

$$\xi^c q^\beta = \alpha \sigma^\nu. \tag{12.41}$$

Допустим, что в течение времени t_1 образец был нагрет до температуры ϑ и нагружен так, что в нем возникло постоянное во времени напряжение σ. Затем он был разгружен и в течение времени $t_2 - t_1$ находился при той же температуре ϑ, после чего образец был нагружен вновь до первоначального напряжения σ. Выясним, как повлияла разгрузка на процесс ползучести образца.

Располагая кривой ползучести, можно определить параметр q в момент времени t_1. Для этого представим выражение (12.40) в виде

$$\frac{dq}{dt} + \lambda q - \frac{d\varepsilon^c}{dt} = 0.$$

Интеграл этого линейного неоднородного дифференциального уравнения, как известно, имеет вид

$$q = \exp(-\lambda t)\left[C + \int_0^t \exp(\lambda t)\,\frac{d\varepsilon^c}{dt}\,dt\right].$$

Выполняя интегрирование по частям, устанавливаем

$$q = \exp(-\lambda t)\left[C + \exp(\lambda t)\,\varepsilon^c - \lambda\int_0^t \exp(\lambda t)\,\varepsilon^c\,dt\right].$$

Используем начальное условие при $t = 0$, $\varepsilon^c = 0$, $q = 0$. Тогда получим $C = 0$ и окончательно

$$q = \varepsilon^c - \lambda\exp(-\lambda t)\int_0^t \exp(\lambda t)\,\varepsilon^c\,dt.$$

Эта формула позволяет определить значение q_1 для момента времени t_1, при котором величина деформации ползучести равна ε_1^c:

$$q_1 = \varepsilon_1^c - \lambda\exp(-\lambda t_1)\int_0^{t_1} \exp(\lambda t)\,\varepsilon^c\,dt.$$

Далее при $t > t_1$ напряжение равно нулю и, следовательно, согласно выражению (12.41) скорость деформации ползучести равна нулю. Эта теория не описывает явления обратной ползучести. Поэтому из соотношения (12.40) имеем

$$dq = -\lambda q\,dt.$$

Интегрируя это уравнение и используя начальное условие при $t = t_1$, $q = q_1$, получаем

$$q = q_1\exp[-\lambda(t - t_1)].$$

При помощи этого уравнения можно определить величину q для значения времени t_2

$$q_2 = q_1\exp[-\lambda(t_2 - t_1)].$$

Очевидно, что величина $q_2 < q_1$ уменьшается с увеличением t_2 и, следовательно, согласно формуле (12.41) скорость деформации ползучести после вторичного нагружения до напряжения σ тем больше, чем больше время выдержки образца в ненагруженном состоянии при температуре ϑ (разупрочнение материала). Интегрирование выражения (12.41) позволяет получить уравнение кривой ползучести после вторичного нагружения.

§ 78. Теория ползучести с анизотропным упрочнением

В изложенных выше теориях ползучести предполагалось, что упрочнение является изотропным. Экспериментальные исследования ползучести при сложном нагружении указывают на существенно анизотропный характер упрочнения в условиях ползучести. Учет деформационной анизотропии может быть произведен путем разделения тензора напряжений на тензоры активных и добавочных напряжений (см. § 27).

На возможность построения такой теории было указано Генки [2] и Д. Д. Ивлевым [4]. В работах И. З. Паллея [20], [21] дана неизотермическая теория циклического нагружения, учитывающая эффект анизотропного упрочнения материалов.

Ниже изложена теория ползучести с анизотропным упрочнением, разработанная Г. М. Хажинским [14, 31, 41].

Примем, что тензор напряжения σ_{ij} может быть представлен в виде суммы двух тензоров: активного α_{ij} и добавочного χ_{ij} напряжений

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ij} + \chi_{ij}. \qquad (12.42)$$

Допустим, что девиаторы полных s_{ij}, активных β_{ij} и добавочных ρ_{ij} напряжений могут быть представлены в аналогичном виде

$$s_{ij} = \beta_{ij} + \rho_{ij} \qquad (12.43)$$

и что для одноосного напряженного состояния два главных напряжения тензоров активных и добавочных напряжений равны нулю.

Далее примем потенциал скоростей деформаций ползучести в такой же форме, как в § 27, когда предполагалось, что в процессе нагружения поверхность пластичности испытывает только жесткое смещение (трансляционное упрочнение). Тогда получим

$$f = \frac{3}{2}\beta_{ij}\beta_{ij} - \left[\Phi\left(\xi_i^c\right)\right]^2 = 0. \qquad (12.44)$$

Согласно определению потенциала скоростей деформаций ползучести компоненты скоростей деформаций ползучести даны формулой (12.1). Потенциал не зависит от среднего нормального напряжения. Направление вектора скорости деформации, которое согласно формуле (12.1) нормально к поверхности потенциала не изменяется при смещении ее как жесткого целого. Поэтому

$$\xi_{ij}^c = \lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\beta_{ij}} = 3\lambda\beta_{ij}.$$

Подставим эту величину в выражение для интенсивности скоростей деформаций ползучести (2.41). Тогда, используя соотношение (1.20), получим

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{\xi_i^c}{\alpha_i}$$

и, следовательно,

$$\xi_{ij}^c = \frac{3}{2}\frac{\xi_i^c}{\alpha_i}\beta_{ij}. \qquad (12.45)$$

Из соотношения (12.44), используя выражение (1.20), заключаем, что при определенной температуре интенсивность активных напряжений является функцией интенсивности скоростей деформаций. Примем, что интенсивность скоростей деформаций ползучести является произведением двух функций

$$\xi_i^c = GQ, \qquad (12.46)$$

одна из которых $G = G(\vartheta)$ есть функция температуры, а вторая $Q = Q(\alpha_i)$ — функция интенсивности активного напряжения.

Функция G обычно принимают в форме, которая была рассмотрена в § 71.

$$G = G_1\exp\left(-\frac{\Delta H_n}{RT}\right), \qquad (12.47)$$

где G_1 — постоянная для материала; ΔH_n — энергия активации ползучести; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура.

Функция интенсивности активного напряжения может быть принята в одной из форм, о которых говорилось ранее: степенная зависимость

$$Q(\alpha_i) = \alpha_i^n,$$

закон гиперболического синуса

$$Q(\alpha_i) = \operatorname{sh}\frac{\alpha_i}{b},$$

экспоненциальная зависимость

$$Q(\alpha_i) = \exp\frac{\alpha_i}{b}. \qquad (12.48)$$

Использование экспоненциальной зависимости позволяет значительно упростить расчеты. Очевидно, что она несправедлива при малых активных напряжениях, так как согласно формуле (12.48) $Q(0) \neq 0$.

Допустим, что приращение компонентов девиатора добавочного напряжения зависит от компонентов приращения деформации ползучести, а также приращения времени и может быть представлено в форме

$$d\rho_{ij} = \frac{2}{3}A\,de^c_{ij} - DQ(\chi_i)\frac{\rho_{ij}}{\chi_i}\,dt, \qquad (12.49)$$

где A и D — функции температуры, которые могут быть представлены в форме (12.47)

$$A = A_1\exp\left(-\frac{\Delta H_n}{RT}\right);$$

$$D = D_1\exp\left(-\frac{\Delta H_r}{RT}\right);$$

ΔH_r — энергия активации возврата (разупрочнения); $Q(\chi_i)$ — функция интенсивности добавочных напряжений, такая же как $Q(\alpha_i)$ — функция интенсивности активных напряжений. Для уточнения теории, особенно при напряжениях выше предела пропорциональности, можно принять, что величина A является функцией не только температуры, но также и интенсивности напряжений σ_i [14]. При записи соотношения (12.49) использована идея Бейли [33] о том, что в процессе ползучести механическое упрочнение (первое слагаемое) взаимодействует с термическим разупрочнением (второе слагаемое с отрицательным знаком) подобно тому, как это было сделано в теории структурных параметров (см. § 77).

Переходя к частному случаю одноосного напряженного состояния, при котором $\xi^c_i = |\xi^c|$; $\sigma_i = |\sigma| = |\alpha + \chi|$; $\alpha_i = |\alpha|$; $\chi_i = |\chi|$; $\rho = \frac{2}{3}\chi$ и используя экспоненциальную зависимость (12.48), получаем из соотношений (12.45)—(12.49)

$$\xi^c = G\,\mathrm{sign}(\sigma - \chi)\exp\frac{|\sigma - \chi|}{b}; \qquad (12.50)$$

$$d\chi = A\,de^c - D\,\mathrm{sign}\,\chi\exp\frac{|\chi|}{b}\,dt, \qquad (12.51)$$

где символом $\mathrm{sign}(\sigma - \chi)$, $\mathrm{sign}\,\chi$ обозначены знаки величин $\sigma - \chi$ и χ соответственно.

Рассмотрим вначале ползучесть при постоянном напряжении. Если до начального момента времени ползучесть отсутствовала и напряжение было меньше, чем предел пропорциональности материала при температуре испытания, то добавочное напряжение в начальный момент времени равно нулю и активное напряжение равно приложенному. В дальнейшем происходит увеличение во времени добавочного напряжения и уменьшение активного.

Получим уравнение кривых ползучести при постоянном напряжении, используя выражения (12.50) и (12.51) и учитывая, что в рассматриваемом случае $\mathrm{sign}(\sigma - \chi) = +1$ и $\mathrm{sign}\,\chi = +1$. Продифференцируем соотношение (12.50) по времени, учитывая, что напряжение во времени не изменяется. Тогда получим

$$\frac{d\xi^c}{dt} = -\frac{G}{b}\exp\frac{\sigma - \chi}{b}\,\frac{d\chi}{dt}.$$

Примем, что тензор напряжения σ_{ij} может быть представлен в виде суммы двух тензоров: активного α_{ij} и добавочного χ_{ij} напряжений

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ij} + \chi_{ij}. \tag{12.42}$$

Допустим, что девиаторы полных s_{ij}, активных β_{ij} и добавочных ρ_{ij} напряжений могут быть представлены в аналогичном виде

$$s_{ij} = \beta_{ij} + \rho_{ij} \tag{12.43}$$

и что для одноосного напряженного состояния два главных напряжения тензоров активных и добавочных напряжений равны нулю.

Далее примем потенциал скоростей деформаций ползучести в такой же форме, как в § 27, когда предполагалось, что в процессе нагружения поверхность пластичности испытывает только жесткое смещение (трансляционное упрочнение). Тогда получим

$$f = \frac{3}{2}\beta_{ij}\beta_{ij} - \left[\Phi\left(\xi_i^c\right)\right]^2 = 0. \tag{12.44}$$

Согласно определению потенциала скоростей деформаций ползучести компоненты скоростей деформаций ползучести даны формулой (12.1). Потенциал не зависит от среднего нормального напряжения. Направление вектора скорости деформации, которое согласно формуле (12.1) нормально к поверхности потенциала, не изменяется при смещении ее как жесткого целого. Поэтому

$$\xi_{ij}^c = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \beta_{ij}} = 3\lambda\beta_{ij}.$$

Подставим эту величину в выражение для интенсивности скоростей деформаций ползучести (2.41). Тогда, используя соотношение (1.20), получим

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{\xi_i^c}{\alpha_i}$$

и, следовательно,

$$\xi_{ij}^c = \frac{3}{2}\frac{\xi_i^c}{\alpha_i}\beta_{ij}. \tag{12.45}$$

Из соотношения (12.44), используя выражение (1.20), заключаем, что при определенной температуре интенсивность активных напряжений является функцией интенсивности скоростей деформаций. Примем, что интенсивность скоростей деформаций ползучести является произведением двух функций

$$\xi_i^c = GQ, \tag{12.46}$$

одна из которых $G = G(\vartheta)$ есть функция температуры, а вторая $Q = Q(\alpha_i)$ — функция интенсивности активного напряжения.

Функция G обычно принимают в форме, которая была рассмотрена в § 71.

$$G = G_1 \exp\left(-\frac{\Delta H_n}{RT}\right), \tag{12.47}$$

где G_1 — постоянная для материала; ΔH_n — энергия активации ползучести; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура.

Функция интенсивности активного напряжения может быть принята в одной из форм, о которых говорилось ранее: степенная зависимость

$$Q(\alpha_i) = \alpha_i^n,$$

закон гиперболического синуса

$$Q(\alpha_i) = \operatorname{sh}\frac{\alpha_i}{b},$$

экспоненциальная зависимость

$$Q(\alpha_i) = \exp\frac{\alpha_i}{b}. \tag{12.48}$$

Использование экспоненциальной зависимости позволяет значительно упростить расчеты. Очевидно, что она несправедлива при малых активных напряжениях, так как согласно формуле (12.48) $Q\ (0) \neq 0$.

Допустим, что приращение компонентов девиатора добавочного напряжения зависит от компонентов приращения деформации ползучести, а также приращения времени и может быть представлено в форме

$$d\rho_{ij} = \frac{2}{3} A\, d\varepsilon_{ij}^c - DQ(\chi_i)\frac{\rho_{ij}}{\chi_i}\,dt, \tag{12.49}$$

где A и D — функции температуры, которые могут быть представлены в форме (12.47)

$$A = A_1 \exp\left(-\frac{\Delta H_n}{RT}\right);$$

$$D = D_1 \exp\left(-\frac{\Delta H_r}{RT}\right);$$

ΔH_r — энергия активации возврата (разупрочнения); $Q(\chi_i)$ — функция интенсивности добавочных напряжений, такая же как $Q(\alpha_i)$ — функция интенсивности активных напряжений. Для уточнения теории, особенно при напряжениях выше предела пропорциональности, можно принять, что величина A является функцией не только температуры, но также и интенсивности напряжений σ_i [14]. При записи соотношения (12.49) использована идея Бейли [33] о том, что в процессе ползучести механическое упрочнение (первое слагаемое) взаимодействует с термическим разупрочнением (второе слагаемое с отрицательным знаком) подобно тому, как это было сделано в теории структурных параметров (см. § 77).

Переходя к частному случаю одноосного напряженного состояния, при котором $\xi_i^c = |\xi^c|$; $\sigma_i = |\sigma| = |\alpha + \chi|$; $\alpha_i = |\alpha|$; $\chi_i = |\chi|$; $\rho = \frac{2}{3}\chi$ и используя экспоненциальную зависимость (12.48), получаем из соотношений (12.45)—(12.49)

$$\xi^c = G\,\mathrm{sign}\,(\sigma - \chi)\exp\frac{|\sigma - \chi|}{b}; \tag{12.50}$$

$$d\chi = A\,d\varepsilon^c - D\,\mathrm{sign}\,\chi\exp\frac{|\chi|}{b}\,dt, \tag{12.51}$$

где символом sign $(\sigma - \chi)$, sign χ обозначены знаки величин $\sigma - \chi$ и χ соответственно.

Рассмотрим вначале ползучесть при постоянном напряжении. Если до начального момента времени ползучесть отсутствовала и напряжение было меньше, чем предел пропорциональности материала при температуре испытания, то добавочное напряжение в начальный момент времени равно нулю и активное напряжение равно приложенному. В дальнейшем происходит увеличение во времени добавочного напряжения и уменьшение активного.

Получим уравнение кривых ползучести при постоянном напряжении, используя выражения (12.50) и (12.51) и учитывая, что в рассматриваемом случае sign $(\sigma - \chi) = +1$ и sign $\chi = +1$. Продифференцируем соотношение (12.50) по времени, учитывая, что напряжение во времени не изменяется. Тогда получим

$$\frac{d\xi^c}{dt} = -\frac{G}{b}\exp\frac{\sigma-\chi}{b}\,\frac{d\chi}{dt}.$$

Подставляя в это выражение соотношение (12.51), используя еще раз уравнение (12.50), получаем после преобразований

$$\frac{d\xi^c}{dt} + a^2 (\xi^c)^2 - d^2 = 0, \tag{12.52}$$

где

$$a^2 = \frac{A}{b}; \quad d^2 = \frac{GD}{b} \exp \frac{\sigma}{b}. \tag{12.53}$$

Интеграл уравнения (12.52) имеет вид

$$\xi^c = \frac{d}{a} \frac{1 + p \exp(-2\,dat)}{1 - p \exp(-2\,dat)}, \tag{12.54}$$

где

$$p = \frac{\xi^c(0) - \dfrac{d}{a}}{\xi^c(0) + \dfrac{d}{a}}, \tag{12.55}$$

а $\xi^c(0)$ — скорость деформации ползучести в начальный момент времени. Эту величину определяем по формуле (12.50) при $\chi = 0$

$$\xi^c(0) = G \exp \frac{\sigma}{b}. \tag{12.56}$$

Из соотношения (12.54) следует, что минимальное значение скорости деформации ползучести при $t \to \infty$

$$\xi^c_{\min} = \frac{d}{a}. \tag{12.57}$$

Интегрируя уравнение (12.54) и учитывая, что при $t = 0$ $\varepsilon^c = 0$, получаем уравнение кривой ползучести

$$\varepsilon^c = \frac{1}{a^2} \ln \frac{1 - p \exp(-2\,dat)}{1 - p} + \frac{d}{a} t, \tag{12.58}$$

которое является частным случаем уравнения (11.11).

Получим теперь уравнение кривой релаксации напряжений. Используя выражение (11.2) и учитывая, что в рассматриваемом случае $\operatorname{sign}(\sigma - \chi) = +1$ и $\operatorname{sign} \chi = +1$, преобразуем уравнения (12.50) и (12.51) к виду:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -GE \exp \frac{\sigma - \chi}{b}; \tag{12.59}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{A}{E} \frac{d\sigma}{dt} - D \exp \frac{\chi}{b}. \tag{12.60}$$

Продифференцируем соотношение (12.59) по времени

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{GE}{b} \exp \frac{\sigma - \chi}{b} \left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\chi}{dt} \right).$$

Подставим в полученный результат выражение (12.60). После преобразований с использованием формулы (12.56) выводим дифференциальное уравнение для напряжения σ:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - g \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + h \exp \frac{\sigma}{b} = 0, \tag{12.61}$$

где

$$g = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{A}{E}\right), \quad h = \frac{DGE}{b}.$$

Это уравнение при помощи подстановки

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = y$$

может быть приведено к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{d\sigma} - 2gy + 2h \exp\frac{\sigma}{b} = 0.$$

Для интегрирования уравнения (12.61) необходимо знать в начальный момент времени не только напряжение $\sigma(0)$, но и его производную $\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0}$. Последняя может быть получена из соотношения (12.59) с учетом того, что при $t = 0$ $\chi = 0$

$$\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0} = -GE \exp\frac{\sigma(0)}{b}.$$

В результате интегрирования уравнения (12.61) и использования начальных условий получим уравнение кривых релаксации

$$t = \int\limits_{\sigma}^{\sigma(0)} \frac{d\sigma}{\sqrt{C \exp 2g\sigma - \frac{2hb}{1-2gb}\exp\frac{\sigma}{b}}}, \tag{12.62}$$

где

$$C = G^2E^2 \exp\left[2\,\frac{1-gb}{b}\,\sigma(0)\right] + \frac{2bh}{1-2gb}\exp\left[\frac{1-2gb}{b}\,\sigma(0)\right]. \tag{12.63}$$

Поскольку в основу вывода уравнения (12.62) положена формула (12.48), неверная при малых значениях напряжения, это уравнение дает погрешность при малых величинах напряжения.

Рассмотрим теперь ползучесть при ступенчатом нагружении. Представим, что вначале образец испытывается на ползучесть в течение времени t_1 при напряжении σ_1, а затем напряжение мгновенно увеличивается до величины σ_2. Очевидно, что как при напряжении σ_1, так и при напряжении σ_2 ползучесть описывается уравнением (12.58).

Различие состоит только в величинах напряжений, по которым определяются параметры d и $\dot{\xi}^c(0)$. Вычисление этих величин при σ_1 [формулы (12.53) и (12.56)], а также подсчет d при σ_2 [формула (12.53)] очевидны. Начальная скорость деформации ползучести после мгновенного изменения напряжения с σ_1 до σ_2 вычисляется по формуле (12.50) при $\text{sign}\,|\sigma_2 - \chi| = +1$

$$\dot{\xi}^c(0) = G \exp\frac{\sigma_2 - \chi_1}{b}. \tag{12.64}$$

Для вычисления добавочного напряжения χ_1 при $t = t_1$, возникшего в результате процесса ползучести при напряжении σ_1, обратимся к уравнениям (12.50) и (12.51). Из этих уравнений при $\text{sign}(\sigma_1 - \chi) = +1$, $\text{sign}\,\chi = +1$ и $\sigma = \sigma_1$ получаем дифференциальное уравнение для определения χ

$$\exp\frac{\chi}{b}\cdot\frac{d\chi}{dt} = AG \exp\frac{\sigma_1}{b} - D \exp\frac{2\chi}{b}.$$

Подставляя в это выражение соотношение (12.51), используя еще раз уравнение (12.50), получаем после преобразований

$$\frac{d\xi^c}{dt} + a^2 (\xi^c)^2 - d^2 = 0, \qquad (12.52)$$

где

$$a^2 = \frac{A}{b}; \quad d^2 = \frac{GD}{b} \exp \frac{\sigma}{b}. \qquad (12.53)$$

Интеграл уравнения (12.52) имеет вид

$$\xi^c = \frac{d}{a} \frac{1 + p \exp(-2\,dat)}{1 - p \exp(-2\,dat)}, \qquad (12.54)$$

где

$$p = \frac{\xi^c(0) - \dfrac{d}{a}}{\xi^c(0) + \dfrac{d}{a}}, \qquad (12.55)$$

а $\xi^c(0)$ — скорость деформации ползучести в начальный момент времени. Эту величину определяем по формуле (12.50) при $\chi = 0$

$$\xi^c(0) = G \exp \frac{\sigma}{b}. \qquad (12.56)$$

Из соотношения (12.54) следует, что минимальное значение скорости деформации ползучести при $t \to \infty$

$$\xi^c_{\min} = \frac{d}{a}. \qquad (12.57)$$

Интегрируя уравнение (12.54) и учитывая, что при $t = 0$ $\varepsilon^c = 0$, получаем уравнение кривой ползучести

$$\varepsilon^c = \frac{1}{a^2} \ln \frac{1 - p \exp(-2\,dat)}{1 - p} + \frac{d}{a} t, \qquad (12.58)$$

которое является частным случаем уравнения (11.11).

Получим теперь уравнение кривой релаксации напряжений. Используя выражение (11.2) и учитывая, что в рассматриваемом случае $\operatorname{sign}(\sigma - \chi) = +1$ и $\operatorname{sign}\chi = +1$, преобразуем уравнения (12.50) и (12.51) к виду:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -GE \exp \frac{\sigma - \chi}{b}; \qquad (12.59)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{A}{E} \frac{d\sigma}{dt} - D \exp \frac{\chi}{b}. \qquad (12.60)$$

Продифференцируем соотношение (12.59) по времени

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{GE}{b} \exp \frac{\sigma - \chi}{b} \left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\chi}{dt} \right).$$

Подставим в полученный результат выражение (12.60). После преобразований с использованием формулы (12.56) выводим дифференциальное уравнение для напряжения σ:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - g \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + h \exp \frac{\sigma}{b} = 0, \qquad (12.61)$$

где

$$g=\frac{1}{b}\left(1+\frac{A}{E}\right), \quad h=\frac{DGE}{b}.$$

Это уравнение при помощи подстановки

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2=y$$

может быть приведено к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{d\sigma}-2gy+2h\exp\frac{\sigma}{b}=0.$$

Для интегрирования уравнения (12.61) необходимо знать в начальный момент времени не только напряжение $\sigma(0)$, но и его производную $\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0}$. Последняя может быть получена из соотношения (12.59) с учетом того, что при $t=0$ $\chi=0$

$$\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0}=-GE\exp\frac{\sigma(0)}{b}.$$

В результате интегрирования уравнения (12.61) и использования начальных условий получим уравнение кривых релаксации

$$t=\int\limits_{\sigma}^{\sigma(0)}\frac{d\sigma}{\sqrt{C\exp 2g\sigma-\frac{2hb}{1-2gb}\exp\frac{\sigma}{b}}}, \tag{12.62}$$

где

$$C=G^2E^2\exp\left[2\,\frac{1-gb}{b}\,\sigma(0)\right]+\frac{2bh}{1-2gb}\exp\left[\frac{1-2gb}{b}\,\sigma(0)\right]. \tag{12.63}$$

Поскольку в основу вывода уравнения (12.62) положена формула (12.48), неверная при малых значениях напряжения, это уравнение дает погрешность при малых величинах напряжения.

Рассмотрим теперь ползучесть при ступенчатом нагружении. Представим, что вначале образец испытывается на ползучесть в течение времени t_1 при напряжении σ_1, а затем напряжение мгновенно увеличивается до величины σ_2. Очевидно, что как при напряжении σ_1, так и при напряжении σ_2 ползучесть описывается уравнением (12.58).

Различие состоит только в величинах напряжений, по которым определяются параметры d и $\xi^c(0)$. Вычисление этих величин при σ_1 [формулы (12.53) и (12.56)], а также подсчет d при σ_2 [формула (12.53)] очевидны. Начальная скорость деформации ползучести после мгновенного изменения напряжения с σ_1 до σ_2 вычисляется по формуле (12.50) при $\operatorname{sign}|\sigma_2-\chi|=+1$

$$\xi^c(0)=G\exp\frac{\sigma_2-\chi_1}{b}. \tag{12.64}$$

Для вычисления добавочного напряжения χ_1 при $t=t_1$, возникшего в результате процесса ползучести при напряжении σ_1, обратимся к уравнениям (12.50) и (12.51). Из этих уравнений при $\operatorname{sign}(\sigma_1-\chi)=+1$, $\operatorname{sign}\chi=+1$ и $\sigma=\sigma_1$ получаем дифференциальное уравнение для определения χ

$$\exp\frac{\chi}{b}\cdot\frac{d\chi}{dt}=AG\exp\frac{\sigma_1}{b}-D\exp\frac{2\chi}{b}.$$

После интегрирования этого уравнения с использованием подстановки

$$y = \exp\frac{\chi}{b}$$

получим

$$\exp\left(-\frac{\chi}{b}\right) = \frac{d}{aG}\exp\left(-\frac{\sigma_1}{b}\right)\cdot\frac{1+p\exp(-2\,dat)}{1-p\exp(-2\,dat)}. \qquad (12.65)$$

Для вычисления по этой формуле величины χ_1 необходимо вместо t подставить t_1, а параметры d, p и $\xi^c(0)$ определить по величине напряжения σ_1.

Выведем теперь уравнение кривой обратной ползучести. В этом случае может быть рассмотрен процесс ступенчатого нагружения при мгновенном уменьшении напряжения от σ до 0. В рассматриваемом случае $\operatorname{sign}(\sigma-\chi) = -1$, $\operatorname{sign}\chi = +1$ и уравнения (12.50) и (12.51) принимают вид

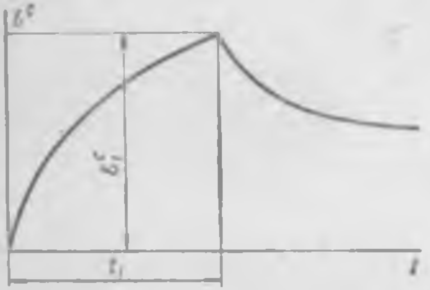


Рис. 12.9. К построению кривой обратной ползучести по теории ползучести с анизотропным упрочнением

$$\xi^c = -G\exp\frac{\chi}{b}; \qquad (12.66)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -(AG+D)\exp\frac{\chi}{b}. \qquad (12.67)$$

Проинтегрируем уравнение (12.67), учитывая, что при $t = t_1$ $\chi = \chi_1$. Тогда получим

$$\exp\left(-\frac{\chi}{b}\right) = \frac{AG+D}{b}(t-t_1) + \exp\left(-\frac{\chi_1}{b}\right). \qquad (12.68)$$

Величина добавочного напряжения χ_1, возникшего в результате ползучести при напряжении σ_1 в течение времени t_1, определяется так, как было указано при рассмотрении процесса ступенчатого нагружения.

Подставим выражение (12.68) в уравнение (12.66). Используя соотношение (11.3), получим

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = -\frac{G}{\frac{AG+D}{b}(t-t_1)+\exp\left(-\frac{\chi_1}{b}\right)}. \qquad (12.69)$$

Интегрируя это уравнение и используя начальное условие при $t = t_1$ $\varepsilon^c = \varepsilon_1^c$, получаем

$$\varepsilon_r^c = \varepsilon_1^c - \varepsilon^c = \frac{bG}{AG+D}\ln\left[\frac{AG+D}{b}(t-t_1)\exp\frac{\chi_1}{b}+1\right]. \qquad (12.70)$$

Формула (12.70) позволяет определить уменьшение деформации ползучести $\varepsilon_r^c = \varepsilon_1^c - \varepsilon^c$ после разгрузки.

§ 79. Экспериментальная проверка и анализ теорий ползучести

Наиболее простым способом экспериментальной проверки различных теорий ползучести является сопоставление экспериментальной кривой релаксации при постоянной деформации с теоретическими, построенными по различным теориям ползучести.

На рис. 12.10—12.12 сопоставлены теоретические кривые релаксации напряжений с экспериментальными, полученными в опытах Дэвиса [35] (рис. 12.10), Джонсона [38] (рис. 12.11), а также в опытах Ю. Н. Работнова, В. И. Даниловской и Г. М. Ивановой [3] (рис. 12.12).

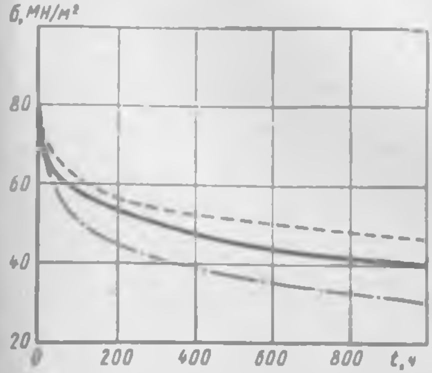


Рис. 12.10. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых релаксации для меди при температуре 165° С и начальном напряжении σ (0) = 94,9 МН/м². Штриховая линия по теории старения в формулировке (12.15), штрихпунктирная линия по теории течения Л. М. Качанова [26]

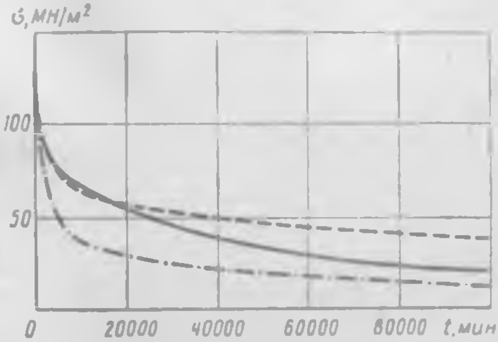


Рис. 12.11. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых релаксации для хромомолибденовой стали при температуре 525° С и начальном напряжении σ (0) = 146 МН/м². Штриховая линия — по теории старения в варианте (12.15), штрихпунктирная линия по теории течения Л. М. Качанова [26]

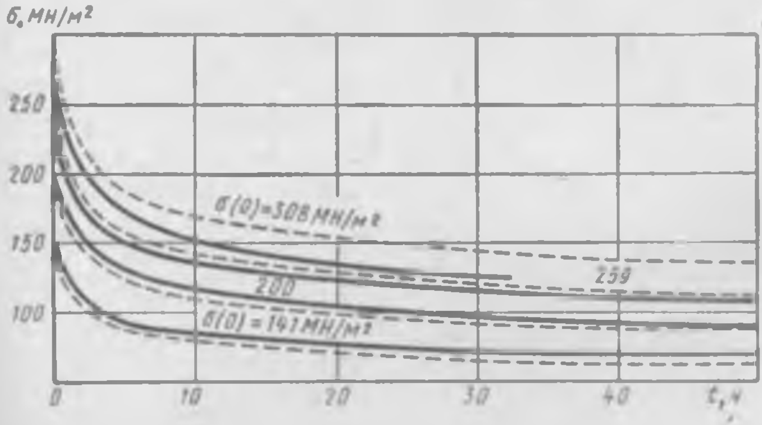


Рис. 12.12. Сопоставление экспериментальных кривых релаксации для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° С и различных начальных напряжениях (сплошные линии) с теоретическими, построенными по теории упрочнения в варианте (12.28), (12.29) (штриховые линии) [3]

Как следует из рис. 12.10 и 12.11, экспериментальная кривая релаксации располагается между теоретическими кривыми по гипотезам старения и течения. Теория упрочнения хорошо подтверждается экспериментально (рис. 12.12).

После интегрирования этого уравнения с использованием подстановки

$$y = \exp \frac{\chi}{b}$$

получим

$$\exp\left(-\frac{\chi}{b}\right) = \frac{d}{aG} \exp\left(-\frac{\sigma_1}{b}\right) \cdot \frac{1 + p\exp(-2\,dat)}{1 - p\exp(-2\,dat)}. \quad (12.65)$$

Для вычисления по этой формуле величины χ_1 необходимо вместо t подставить t_1, а параметры d, p и $\xi^c(0)$ определить по величине напряжения σ_1.

Выведем теперь уравнение кривой обратной ползучести. В этом случае может быть рассмотрен процесс ступенчатого нагружения при мгновенном уменьшении напряжения от σ до 0. В рассматриваемом случае $\operatorname{sign}(\sigma - \chi) = -1$, $\operatorname{sign}\chi = +1$ и уравнения (12.50) и (12.51) принимают вид

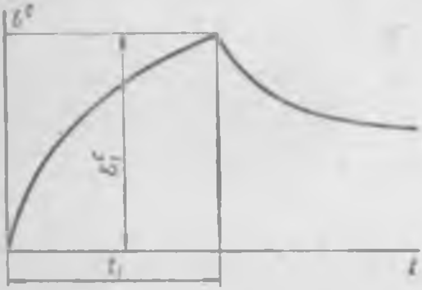


Рис. 12.9. К построению кривой обратной ползучести по теории ползучести с анизотропным упрочнением

$$\xi^c = -G\exp\frac{\chi}{b}; \quad (12.66)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -(AG + D)\exp\frac{\chi}{b}. \quad (12.67)$$

Проинтегрируем уравнение (12.67), учитывая, что при $t = t_1$ $\chi = \chi_1$. Тогда получим

$$\exp\left(-\frac{\chi}{b}\right) = \frac{AG + D}{b}(t - t_1) + \exp\left(-\frac{\chi_1}{b}\right). \quad (12.68)$$

Величина добавочного напряжения χ_1, возникшего в результате ползучести при напряжении σ_1 в течение времени t_1, определяется так, как было указано при рассмотрении процесса ступенчатого нагружения.

Подставим выражение (12.68) в уравнение (12.66). Используя соотношение (11.3), получим

$$\frac{de^c}{dt} = -\frac{G}{\frac{AG + D}{b}(t - t_1) + \exp\left(-\frac{\chi_1}{b}\right)}. \quad (12.69)$$

Интегрируя это уравнение и используя начальное условие при $t = t_1$ $e^c = e^c_1$, получаем

$$e^c_r = e^c_1 - e^c = \frac{bG}{AG + D}\ln\left[\frac{AG + D}{b}(t - t_1)\exp\frac{\chi_1}{b} + 1\right]. \quad (12.70)$$

Формула (12.70) позволяет определить уменьшение деформации ползучести $e^c_r = e^c_1 - e^c$ после разгрузки.

§ 79. Экспериментальная проверка и анализ теорий ползучести

Наиболее простым способом экспериментальной проверки различных теорий ползучести является сопоставление экспериментальной кривой релаксации при постоянной деформации с теоретическими, построенными по различным теориям ползучести.

На рис. 12.10—12.12 сопоставлены теоретические кривые релаксации напряжений с экспериментальными, полученными в опытах Дэвиса [35] (рис. 12.10), Джонсона [38] (рис. 12.11), а также в опытах Ю. Н. Работнова, В. И. Даниловской и Г. М. Ивановой [3] (рис. 12.12).

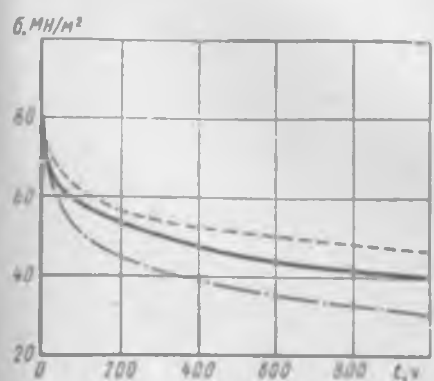


Рис. 12.10. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых релаксации для меди при температуре 165° С и начальном напряжении $\sigma(0) = 94{,}9$ МН/м². Штриховая линия по теории старения в формулировке (12.15), штрихпунктирная линия по теории течения Л. М. Качанова [26]

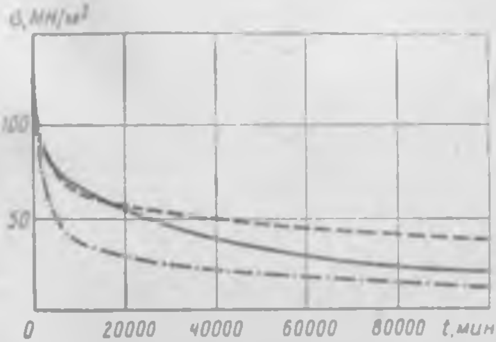


Рис. 12.11. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых релаксации для хромомолибденовой стали при температуре 525° С и начальном напряжении $\sigma(0) = 146$ МН/м². Штриховая линия — по теории старения в варианте (12.15), штрихпунктирная линия по теории течения Л. М. Качанова [26]

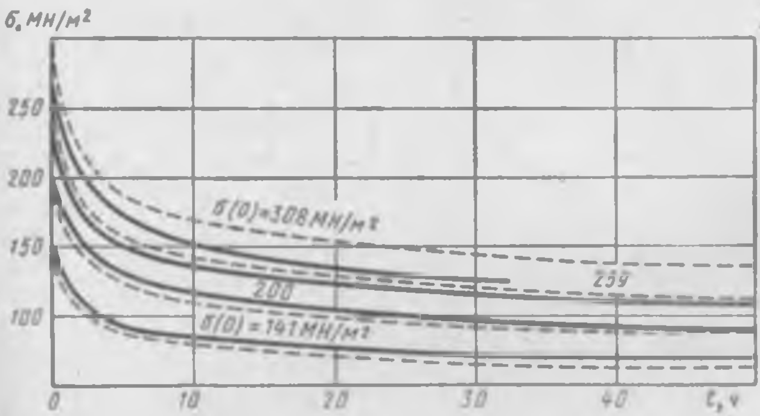


Рис. 12.12. Сопоставление экспериментальных кривых релаксации для хромомолибденовой стали 30ХМ при температуре 500° С и различных начальных напряжениях (сплошные линии) с теоретическими, построенными по теории упрочнения в варианте (12.28), (12.29) (штриховые линии) [3]

Как следует из рис. 12.10 и 12.11, экспериментальная кривая релаксации располагается между теоретическими кривыми по гипотезам старения и течения. Теория упрочнения хорошо подтверждается экспериментально (рис. 12.12).

Недостатком теории течения, как и теории старения, является то, что в основные уравнения этих теорий время включено явным образом, вследствие чего эти уравнения неинвариантны относительно изменения начала отсчета времени. Однако при плавно изменяющихся нагрузках теории течения и старения хорошо согласуются с результатами опытов.

Теория старения предполагает наличие функциональной связи между деформацией, напряжением и временем. В действительности это невозможно, так как наличие такой связи означало бы, что

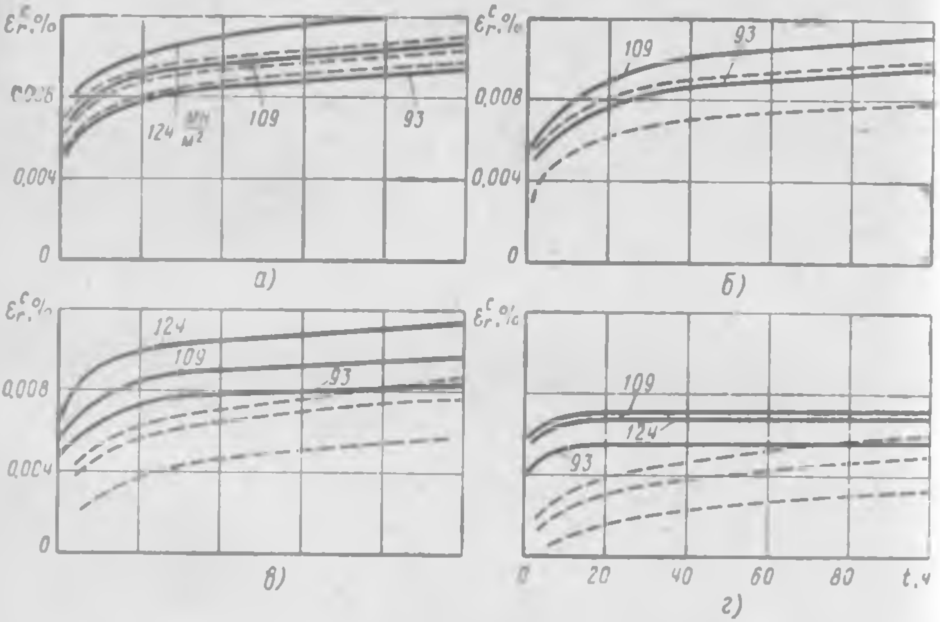


Рис. 12.16. Сопоставление экспериментальных (сплошные линии) и теоретических (штриховые линии) кривых обратной ползучести для малоуглеродистой стали при температуре 455° С после предварительной ползучести [41]:

а — после выхода во вторую стадию; *б* — 145 ч; *в* — 20 ч; *г* — 2 ч

величина деформации ε в момент времени t не зависит от процесса нагружения, т. е. от величин напряжений в моменты времени, предшествующие моменту t, что противоречит опыту.

Как указывалось выше, расчеты на ползучесть по теории старения Ю. Н. Работнова эквивалентны расчетам на прочность и жесткость при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями, заданных графически. Поэтому многочисленные решения подобных задач могут быть использованы в этом случае и для расчетов на ползучесть. В расчетах на ползучесть по теории старения Ю. Н. Работнова возможно непосредственное использование серии экспериментально полученных кривых ползучести, без аппроксимации их аналитическими зависимостями, что повышает точность расчетов.

Рассмотрим теперь экспериментальные исследования ползучести при неодноосном напряженном состоянии. В большинстве случаев они проводились путем испытания тонкостенных трубчатых образцов, нагруженных постоянными во времени внутренним давлением, растягивающей силой и крутящим моментом. При таком нагружении задача определения напряжений в образце является статически опре-

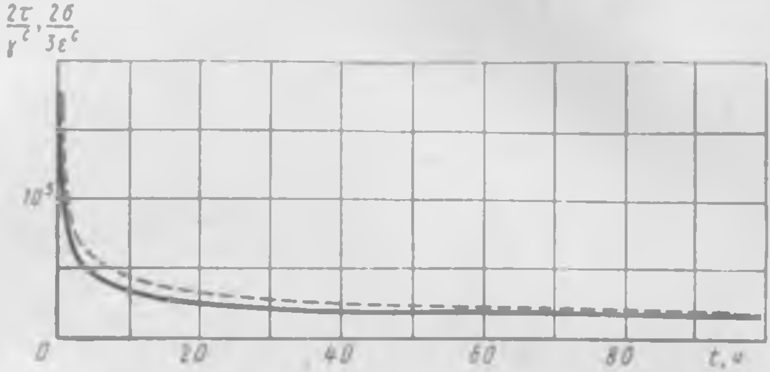


Рис. 12.17. Графики зависимости от времени величин $\frac{2\tau}{\gamma^c}$ (сплошная линия) и $\frac{2\sigma}{3\varepsilon^c}$ (штриховая линия) [17]

делимой и при постоянных во времени внешних силах напряжения во времени изменяться не будут. В этом случае результаты испытаний не позволяют оценить теорию ползучести. Они только дают возможность проверить гипотезы о существовании потенциала скоростей деформации ползучести.

На рис. 12.17 представлены результаты испытаний на ползучесть трубчатых образцов, нагруженных постоянными во времени растягивающей силой и крутящим моментом, проведенных В. С. Наместниковым [17]. Напряженное состояние при таком нагружении изображено на рис. 12.18.

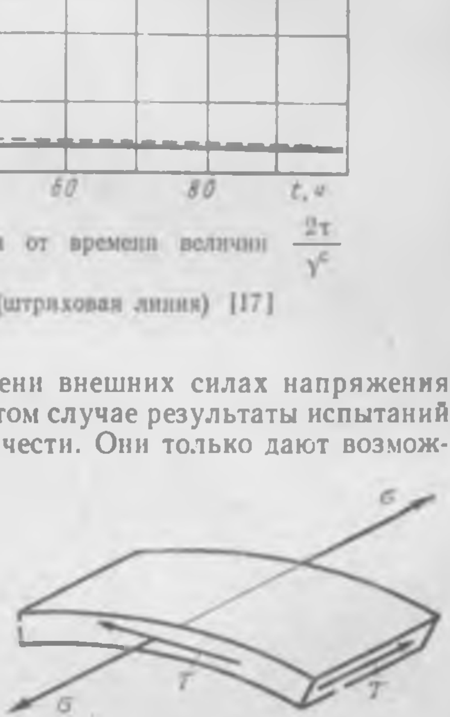


Рис. 12.18. Напряженное состояние при совместном растяжении и кручении трубчатого образца

Согласно формулам (12.7) для рассматриваемого напряженного состояния, с учетом того, что напряжения во времени не изменяются, скорости линейной деформации в направлении нормального напряжения и угловой деформации

$$\xi = \frac{\xi_i}{\sigma_i}\sigma; \quad \eta = 3\frac{\xi_i}{\sigma_i}\tau,$$

откуда

$$\frac{2\tau}{\eta} = \frac{2}{3}\frac{\sigma}{\xi}.$$

Недостатком теории течения, как и теории старения, является то, что в основные уравнения этих теорий время включено явным образом, вследствие чего эти уравнения неинвариантны относительно изменения начала отсчета времени. Однако при плавно изменяющихся нагрузках теории течения и старения хорошо согласуются с результатами опытов.

Теория старения предполагает наличие функциональной связи между деформацией, напряжением и временем. В действительности это невозможно, так как наличие такой связи означало бы, что

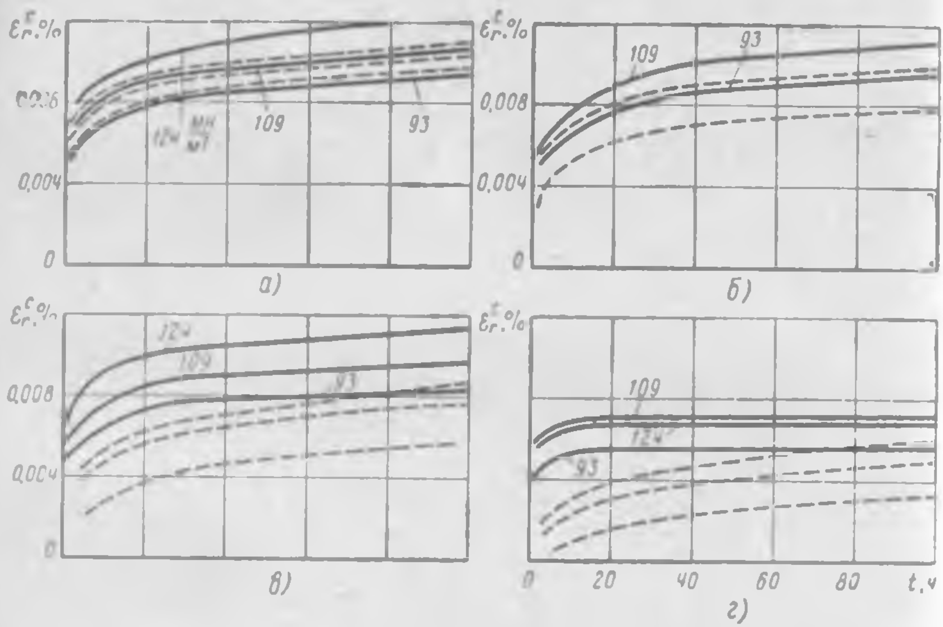


Рис. 12.16. Сопоставление экспериментальных (сплошные линии) и теоретических (штриховые линии) кривых обратной ползучести для малоуглеродистой стали при температуре 455° С после предварительной ползучести [41]:

а — после выхода во вторую стадию; *б* — 145 ч; *в* — 20 ч; *г* — 2 ч

величина деформации ε в момент времени t не зависит от процесса нагружения, т. е. от величин напряжений в моменты времени, предшествующие моменту t, что противоречит опыту.

Как указывалось выше, расчеты на ползучесть по теории старения Ю. Н. Работнова эквивалентны расчетам на прочность и жесткость при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями, заданных графически. Поэтому многочисленные решения подобных задач могут быть использованы в этом случае и для расчетов на ползучесть. В расчетах на ползучесть по теории старения Ю. Н. Работнова возможно непосредственное использование серии экспериментально полученных кривых ползучести, без аппроксимации их аналитическими зависимостями, что повышает точность расчетов.

Рассмотрим теперь экспериментальные исследования ползучести при неодноосном напряженном состоянии. В большинстве случаев они проводились путем испытания тонкостенных трубчатых образцов, нагруженных постоянными во времени внутренним давлением, растягивающей силой и крутящим моментом. При таком нагружении задача определения напряжений в образце является статически опре-

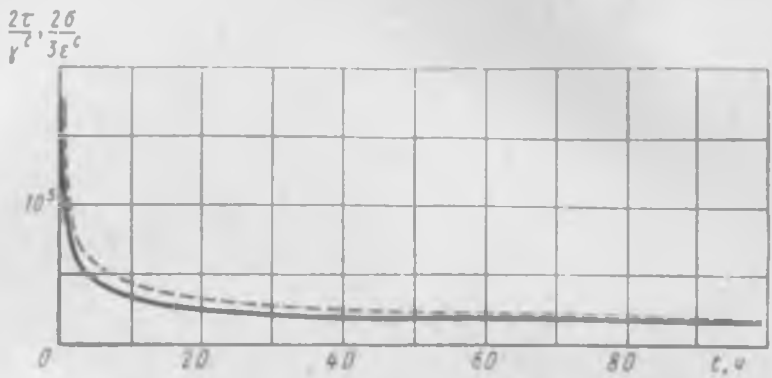


Рис. 12.17. Графики зависимости от времени величин $\frac{2\tau}{\gamma^c}$ (сплошная линия) и $\frac{2\sigma}{3\varepsilon^c}$ (штриховая линия) [17]

делимой и при постоянных во времени внешних силах напряжения во времени изменяться не будут. В этом случае результаты испытаний не позволяют оценить теорию ползучести. Они только дают возможность проверить гипотезы о существовании потенциала скоростей деформации ползучести.

На рис. 12.17 представлены результаты испытаний на ползучесть трубчатых образцов, нагруженных постоянными во времени растягивающей силой и крутящим моментом, проведенных В. С. Наместниковым [17]. Напряженное состояние при таком нагружении изображено на рис. 12.18.

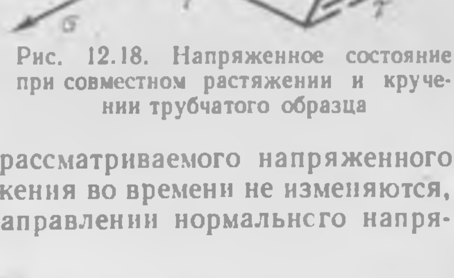


Рис. 12.18. Напряженное состояние при совместном растяжении и кручении трубчатого образца

Согласно формулам (12.7) для рассматриваемого напряженного состояния, с учетом того, что напряжения во времени не изменяются, скорости линейной деформации в направлении нормального напряжения и угловой деформации

$$\xi = \frac{\xi_i}{\sigma_i}\sigma; \quad \eta = 3\frac{\xi_i}{\sigma_i}\tau,$$

откуда

$$\frac{2\tau}{\eta} = \frac{2}{3}\frac{\sigma}{\xi}.$$

Как следует из рис. 12.17, экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими.

Очень интересны результаты экспериментального исследования ползучести при неодноосном напряженном состоянии в случае изменяющихся во времени нагрузок. При таких испытаниях проверяется не только гипотеза о существовании потенциала ползучести, но также и теория ползучести.

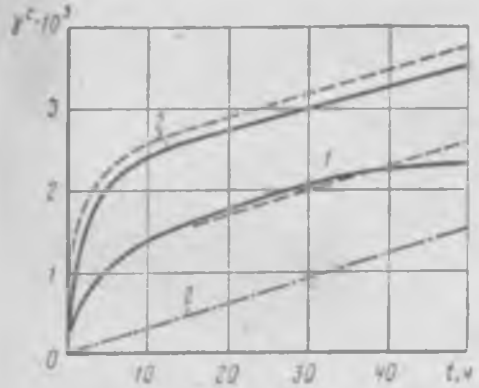


Рис. 12.19. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых ползучести при знакопеременном прямом (кривые 1) и обратном (кривые 2) кручении образцов из сплава Д16Т при температуре 150° С и напряжении $\tau = 140$ МН/м². Штриховая линия по теории ползучести с анизотропным упрочнением, штрихпунктирная по теории упрочнения [41]

На рис. 12.19 представлены теоретические данные и результаты испытаний на ползучесть трубчатых образцов, проведенных В. С. Наместниковым [18] по следующей программе. Вначале образец деформировался в течение пятидесяти часов при постоянном во времени

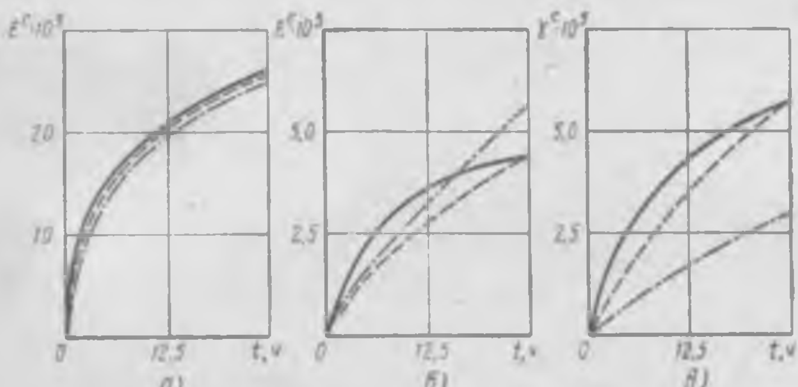


Рис. 12.20. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых ползучести трубчатых образцов из малоуглеродистой стали при температуре 450° С. Штриховые линии по теории ползучести с анизотропным упрочнением, штрихпунктирные по теории упрочнения [41]

крутящем моменте, создающем постоянное касательное напряжение, затем разгружался и вновь нагружался таким же по величине, но обратным по направлению, постоянным во времени крутящим моментом и вновь испытывался в течение 50 ч. Абсолютная величина деформации сдвига при обратном кручении больше, чем при прямом. Следовательно, предварительное кручение, по знаку обратное после-дующему, разупрочняет материал, что является проявлением деформационной анизотропии.

На рис. 12.20 приведены результаты экспериментального исследования ползучести при сложном нагружении, проведенного Джонсоном [39], и теоретические данные. Тонкостенные трубки из алюминиевого и магниевого сплавов, а также углеродистой стали вначале растягивались в течение 25 ч ($\sigma = 112$ МН/м²), а затем в течение такого же времени растягивались и скручивались ($\sigma = 112$ МН/м², $\tau = 18{,}6$ МН/м²). Из графиков следует, что теория ползучести с анизотропным упрочнением значительно лучше описывает ползучесть при сложном нагружении, чем теория упрочнения.

§ 80. Особенности кратковременной ползучести

Кратковременной ползучестью называют процесс ползучести, протекающий в течение секунд и минут при высоких напряжениях и температурах. Поэтому при рассмотрении кратковременной ползучести в простейшем случае одноосного растяжения снимем введенное выше ограничение об отсутствии мгновенных пластических деформаций. Тогда скорость деформации может быть представлена в виде суммы скоростей упругой деформации $\dot{\xi}^{e}$, мгновенной пластической деформации $\dot{\xi}^{p}$ и деформации ползучести $\dot{\xi}^{c}$

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}^{e} + \dot{\xi}^{p} + \dot{\xi}^{c}. \tag{12.71}$$

Экспериментальные исследования кратковременной ползучести различных материалов при одноосном растяжении позволили установить, что в определенном диапазоне температур и напряжений первая стадия на кривых ползучести отсутствует и начальные участки кривых ползучести являются прямыми. Этот диапазон температур и напряжений может быть представлен на диаграмме в координатах температура ϑ, напряжение σ (рис. 12.21). Линия AB на этой диаграмме представляет график зависимости предела прочности материала от температуры, и выше этой линии нагружение без мгновенного разрушения невозможно. Линия CD отделяет область (слева от нее), в которой ползучесть практически не наблюдается. Оставшаяся область BCD, в которой ползучесть существенна, может быть разделена на две. При меньших напряжениях и температурах (область $FECD$) существует первая стадия ползучести, при больших (область BEF) ползучесть протекает без первой стадии.

Для установления зависимости деформации от напряжения при одноосном растяжении подставим в формулу (12.71) зависимости скоростей деформаций от напряжений. Тогда получим

$$\dot{\xi} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \varkappa S'(\sigma)\dot{\sigma} + Q(\sigma), \tag{12.72}$$

где E — модуль упругости; $S(\sigma)$ — функция напряжения, отражающая мгновенную пластическую деформацию; $Q(\sigma)$ — постоянная во времени скорость деформации ползучести, точкой обозначена производная по времени. Величина $\varkappa$, равная единице или нулю

Как следует из рис. 12.17, экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими.

Очень интересны результаты экспериментального исследования ползучести при неодноосном напряженном состоянии в случае изменяющихся во времени нагрузок. При таких испытаниях проверяется не только гипотеза о существовании потенциала ползучести, но также и теория ползучести.

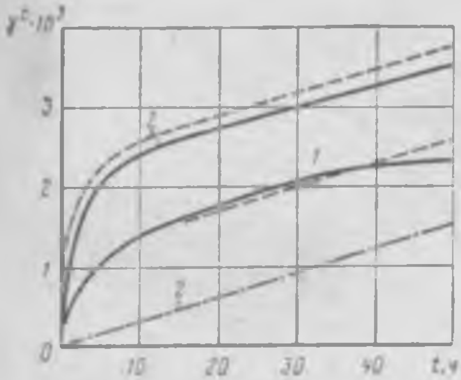


Рис. 12.19. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых ползучести при знакопеременном прямом (кривые *1*) и обратном (кривые *2*) кручении образцов из сплава Д16Т при температуре 150° С и напряжении $\tau = 140$ МН/м². Штриховая линия по теории ползучести с анизотропным упрочнением, штрихпунктирная по теории упрочнения [41]

На рис. 12.19 представлены теоретические данные и результаты испытаний на ползучесть трубчатых образцов, проведенных В. С. Наместниковым [18] по следующей программе. Вначале образец деформировался в течение пятидесяти часов при постоянном во времени

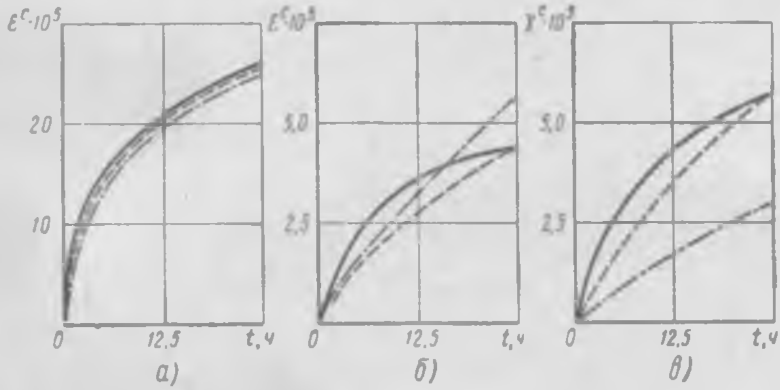


Рис. 12.20. Сопоставление экспериментальной (сплошная линия) и теоретических кривых ползучести трубчатых образцов из малоуглеродистой стали при температуре 450° С. Штриховые линии по теории ползучести с анизотропным упрочнением, штрихпунктирные по теории упрочнения [41]

крутящем моменте, создающем постоянное касательное напряжение, затем разгружался и вновь нагружался таким же по величине, но обратным по направлению, постоянным во времени крутящим моментом и вновь испытывался в течение 50 ч. Абсолютная величина деформации сдвига при обратном кручении больше, чем при прямом. Следовательно, предварительное кручение, по знаку обратное после-дующему, разупрочняет материал, что является проявлением деформационной анизотропии.

На рис. 12.20 приведены результаты экспериментального исследования ползучести при сложном нагружении, проведенного Джонсоном [39], и теоретические данные. Тонкостенные трубки из алюминиевого и магниевого сплавов, а также углеродистой стали вначале растягивались в течение 25 ч ($\sigma = 112$ МН/м^2), а затем в течение такого же времени растягивались и скручивались ($\sigma = 112$ МН/м^2, $\tau = 18{,}6$ МН/м^2). Из графиков следует, что теория ползучести с анизотропным упрочнением значительно лучше описывает ползучесть при сложном нагружении, чем теория упрочнения.

§ 80. Особенности кратковременной ползучести

Кратковременной ползучестью называют процесс ползучести, протекающий в течение секунд и минут при высоких напряжениях и температурах. Поэтому при рассмотрении кратковременной ползучести в простейшем случае одноосного растяжения снимем введенное выше ограничение об отсутствии мгновенных пластических деформаций. Тогда скорость деформации может быть представлена в виде суммы скоростей упругой деформации $\dot{\xi}^e$, мгновенной пластической деформации $\dot{\xi}^p$ и деформации ползучести $\dot{\xi}^c$

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}^e + \dot{\xi}^p + \dot{\xi}^c. \tag{12.71}$$

Экспериментальные исследования кратковременной ползучести различных материалов при одноосном растяжении позволили установить, что в определенном диапазоне температур и напряжений первая стадия на кривых ползучести отсутствует и начальные участки кривых ползучести являются прямыми. Этот диапазон температур и напряжений может быть представлен на диаграмме в координатах температура ϑ, напряжение σ (рис. 12.21). Линия AB на этой диаграмме представляет график зависимости предела прочности материала от температуры, и выше этой линии нагружение без мгновенного разрушения невозможно. Линия CD отделяет область (слева от нее), в которой ползучесть практически не наблюдается. Оставшаяся область BCD, в которой ползучесть существенна, может быть разделена на две. При меньших напряжениях и температурах (область $FECD$) существует первая стадия ползучести, при больших (область BEF) ползучесть протекает без первой стадии.

Для установления зависимости деформации от напряжения при одноосном растяжении подставим в формулу (12.71) зависимости скоростей деформаций от напряжений. Тогда получим

$$\dot{\xi} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \varkappa S'(\sigma)\dot{\sigma} + Q(\sigma), \tag{12.72}$$

где E — модуль упругости; $S(\sigma)$ — функция напряжения, отражающая мгновенную пластическую деформацию; $Q(\sigma)$ — постоянная во времени скорость деформации ползучести, точкой обозначена производная по времени. Величина $\varkappa$, равная единице или нулю

вводится в уравнение (12.72) для того, чтобы это уравнение отражало процессы нагружения в пределах упругости, за пределами упругости, а также процесс разгрузки. Если $\sigma > 0$ и σ больше любого из достигнутых ранее значений σ, то $\varkappa = 1$. В противном случае $\varkappa = 0$. Например, на рис. 12.22 изображен график изменения во времени напряжения. На участках OA и CD $\varkappa = 1$, а на участках AB и BC $\varkappa = 0$.

Интегрирование уравнения (12.72) по времени дает величину деформации

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varkappa S(\sigma) + \varepsilon^c \tag{12.73}$$

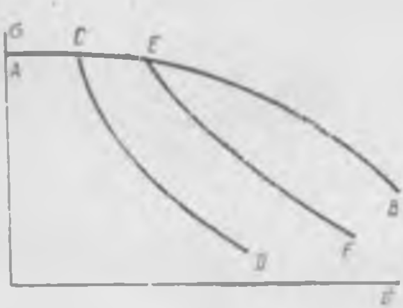


Рис. 12.21. Области ползучести с начальной стадией ($FECD$) и без нее (BEF)

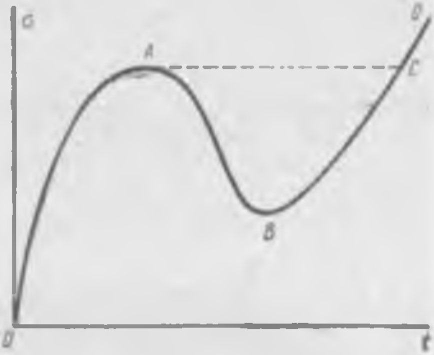


Рис. 12.22. График зависимости напряжения от времени

в виде суммы упругой деформации $\frac{\sigma}{E}$, мгновенной пластической деформации $\varkappa S(\sigma)$ и деформации ползучести ε^c

$$\varepsilon^c = \int_0^t Q(\sigma)\, dt. \tag{12.74}$$

Функция $Q(\sigma)$ может быть выбрана в виде степенной функции (11.4).

Из формулы (12.73) следует, что при высоких температурах ползучесть может оказать влияние на диаграмму растяжения материала. Деформации ползучести зависят, как это следует из формулы (12.74), от закона изменения во времени напряжений. Когда явление ползучести существенно, диаграмма растяжения уже не является характеристикой материала.

Получим теперь на основе соотношения (12.72) уравнения диаграмм растяжения материала при постоянных скоростях деформации и напряжения. Деформации будем предполагать малыми. Рассмотрим вначале случай постоянной скорости деформации (при испытании образца на растяжение с постоянной скоростью движения захвата испытательной машины). В этом случае $\xi = \mathrm{const}$ и из уравнения (12.72), учитывая, что $\varkappa = 1$, имеем

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\xi - Q(\sigma)}{\frac{1}{E} + S'(\sigma)}. \tag{12.75}$$

Из этой формулы следует, что при некоторой величине напряжения скорость изменения его обращается в нуль и в дальнейшем образец растягивается при постоянном напряжении.

Интегрируя уравнение (12.75) и умножая полученную величину времени на постоянную скорость деформации, выводим уравнение диаграммы растяжения

$$\varepsilon = \xi t = \xi \int\limits_0^{\sigma} \frac{\frac{1}{E} + S'(\sigma)}{\xi - Q(\sigma)}\, d\sigma. \tag{12.76}$$

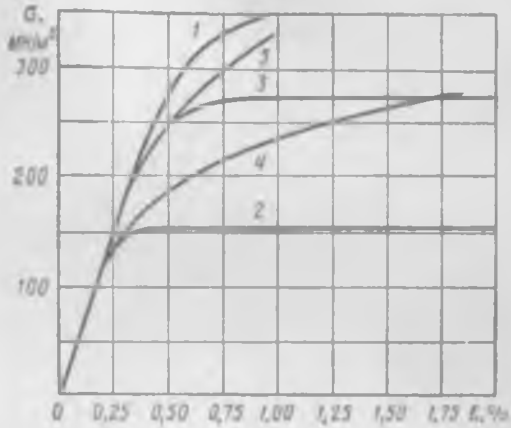


Рис. 12.23. Диаграмма мгновенного растяжения (кривая *1*) титанового сплава ВТ5-1 при температуре 600° С [25] и диаграммы растяжения при постоянных скоростях деформации: $\xi = 1{,}67 \cdot 10^{-4}$ 1/с (кривая *2*); $\xi = 16{,}7 \cdot 10^{-4}$ 1/с (кривая *3*) и постоянных скоростях напряжения $\dot{\sigma} = 7{,}5$ МН/м²с (кривая *4*) и $\dot{\sigma} = 75$ МН/м²с (кривая *5*) [13]

Рассмотрим теперь случай постоянной скорости изменения напряжения (для малых деформаций при испытании образца на растяжение с постоянной скоростью изменения растягивающей силы). Тогда $\dot{\sigma} = \mathrm{const}$ и $\sigma = \dot{\sigma} t$.

Подставляя последнюю величину в формулу (12.72) и интегрируя полученный результат по времени, учитывая, что $\varkappa = 1$, имеем

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + S(\sigma) + \int\limits_0^t Q(\dot{\sigma} t)\, dt\,. \tag{12.77}$$

Если использовать степенную зависимость (11.4), то тогда получим

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + S(\sigma) + \frac{k}{n+1} \frac{\sigma^{n+1}}{\dot{\sigma}}. \tag{12.78}$$

На рис. 12.23 представлены диаграммы мгновенного растяжения и диаграммы растяжения при постоянных скоростях изменения деформации и напряжения титанового сплава [13]. Этот рисунок подтверждает значительное влияние на диаграмму растяжения скоростей изменения деформаций или напряжений.

В работе [13] рассмотрено построение действительной диаграммы растяжения материалов при больших деформациях с учетом кратковременной ползучести, а в статьях [6, 8] описаны результаты экспериментального изучения кратковременной ползучести и растяжения при постоянных скоростях деформации и условного напряжения в случае больших деформаций.

вводится в уравнение (12.72) для того, чтобы это уравнение отражало процессы нагружения в пределах упругости, за пределами упругости, а также процесс разгрузки. Если $\sigma > 0$ и σ больше любого из достигнутых ранее значений σ, то $\varkappa = 1$. В противном случае $\varkappa = 0$. Например, на рис. 12.22 изображен график изменения во времени напряжения. На участках OA и CD $\varkappa = 1$, а на участках AB и BC $\varkappa = 0$.

Интегрирование уравнения (12.72) по времени дает величину деформации

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varkappa S(\sigma) + \varepsilon^c \qquad (12.73)$$

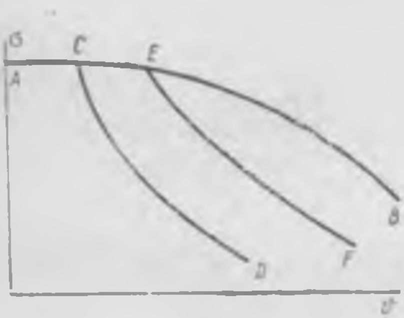


Рис. 12.21. Области ползучести с начальной стадией ($FECD$) и без нее (BEF)

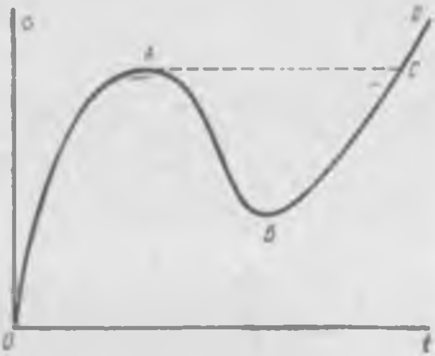


Рис. 12.22. График зависимости напряжения от времени

в виде суммы упругой деформации $\frac{\sigma}{E}$, мгновенной пластической деформации $\varkappa S(\sigma)$ и деформации ползучести ε^c

$$\varepsilon^c = \int_0^t Q(\sigma)\, dt. \qquad (12.74)$$

Функция $Q(\sigma)$ может быть выбрана в виде степенной функции (11.4).

Из формулы (12.73) следует, что при высоких температурах ползучесть может оказать влияние на диаграмму растяжения материала. Деформации ползучести зависят, как это следует из формулы (12.74), от закона изменения во времени напряжений. Когда явление ползучести существенно, диаграмма растяжения уже не является характеристикой материала.

Получим теперь на основе соотношения (12.72) уравнения диаграмм растяжения материала при постоянных скоростях деформации и напряжения. Деформации будем предполагать малыми. Рассмотрим вначале случай постоянной скорости деформации (при испытании образца на растяжение с постоянной скоростью движения захвата испытательной машины). В этом случае $\xi = \text{const}$ и из уравнения (12.72), учитывая, что $\varkappa = 1$, имеем

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\xi - Q(\sigma)}{\frac{1}{E} + S'(\sigma)}. \qquad (12.75)$$

Из этой формулы следует, что при некоторой величине напряжения скорость изменения его обращается в нуль и в дальнейшем образец растягивается при постоянном напряжении.

Интегрируя уравнение (12.75) и умножая полученную величину времени на постоянную скорость деформации, выводим уравнение диаграммы растяжения

$$\varepsilon = \xi t = \xi \int_0^{\sigma} \frac{\frac{1}{E} + S'(\sigma)}{\xi - Q(\sigma)}\, d\sigma. \qquad (12.76)$$

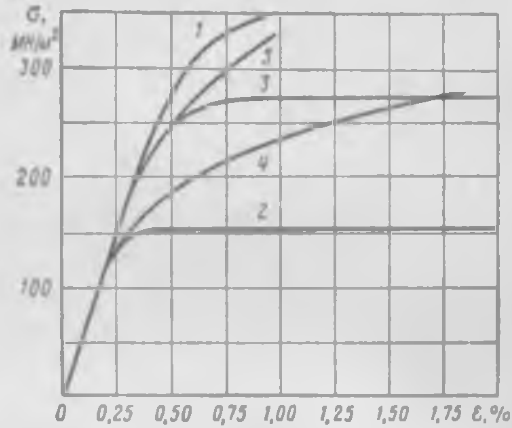


Рис. 12.23. Диаграмма мгновенного растяжения (кривая *1*) титанового сплава ВТ5-1 при температуре 600° С [25] и диаграммы растяжения при постоянных скоростях деформации: $\xi = 1{,}67\cdot10^{-4}$ 1/с (кривая *2*); $\xi = 16{,}7\cdot10^{-4}$ 1/с (кривая *3*) и постоянных скоростях напряжения $\dot\sigma = 7{,}5$ МН/м²с (кривая *4*) и $\dot\sigma = 75$ МН/м²с (кривая *5*) [13]

Рассмотрим теперь случай постоянной скорости изменения напряжения (для малых деформаций при испытании образца на растяжение с постоянной скоростью изменения растягивающей силы). Тогда $\dot\sigma = \text{const}$ и $\sigma = \dot\sigma t$.

Подставляя последнюю величину в формулу (12.72) и интегрируя полученный результат по времени, учитывая, что $\varkappa = 1$, имеем

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + S(\sigma) + \int_0^t Q(\dot\sigma t)\, dt\,. \qquad (12.77)$$

Если использовать степенную зависимость (11.4), то тогда получим

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + S(\sigma) + \frac{k}{n+1}\,\frac{\sigma^{n+1}}{\dot\sigma}. \qquad (12.78)$$

На рис. 12.23 представлены диаграммы мгновенного растяжения и диаграммы растяжения при постоянных скоростях изменения деформации и напряжения титанового сплава [13]. Этот рисунок подтверждает значительное влияние на диаграмму растяжения скоростей изменения деформаций или напряжений.

В работе [13] рассмотрено построение действительной диаграммы растяжения материалов при больших деформациях с учетом кратковременной ползучести, а в статьях [6, 8] описаны результаты экспериментального изучения кратковременной ползучести и растяжения при постоянных скоростях деформации и условного напряжения в случае больших деформаций.

вводится в уравнение (12.72) для того, чтобы это уравнение отражало процессы нагружения в пределах упругости, за пределами упругости, а также процесс разгрузки. Если $\sigma > 0$ и σ больше любого из достигнутых ранее значений σ, то $\varkappa = 1$. В противном случае $\varkappa = 0$. Например, на рис. 12.22 изображен график изменения во времени напряжения. На участках OA и CD $\varkappa = 1$, а на участках AB и BC $\varkappa = 0$.

Интегрирование уравнения (12.72) по времени дает величину деформации

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varkappa S(\sigma) + \varepsilon^c \tag{12.73}$$

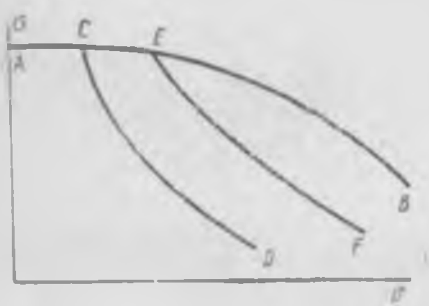


Рис. 12.21. Области ползучести с начальной стадией ($FECD$) и без нее (BEF)

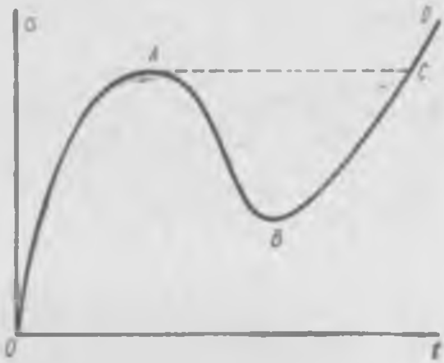


Рис. 12.22. График зависимости напряжения от времени

в виде суммы упругой деформации $\frac{\sigma}{E}$, мгновенной пластической деформации $\varkappa S(\sigma)$ и деформации ползучести ε^c

$$\varepsilon^c = \int_0^t Q(\sigma)\, dt. \tag{12.74}$$

Функция $Q(\sigma)$ может быть выбрана в виде степенной функции (11.4).

Из формулы (12.73) следует, что при высоких температурах ползучесть может оказать влияние на диаграмму растяжения материала. Деформации ползучести зависят, как это следует из формулы (12.74), от закона изменения во времени напряжений. Когда явление ползучести существенно, диаграмма растяжения уже не является характеристикой материала.

Получим теперь на основе соотношения (12.72) уравнения диаграмм растяжения материала при постоянных скоростях деформации и напряжения. Деформации будем предполагать малыми. Рассмотрим вначале случай постоянной скорости деформации (при испытании образца на растяжение с постоянной скоростью движения захвата испытательной машины). В этом случае $\xi = \text{const}$ и из уравнения (12.72), учитывая, что $\varkappa = 1$, имеем

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\xi - Q(\sigma)}{\frac{1}{E} + S'(\sigma)}. \tag{12.75}$$

Из этой формулы следует, что при некоторой величине напряжения скорость изменения его обращается в нуль и в дальнейшем образец растягивается при постоянном напряжении.

Интегрируя уравнение (12.75) и умножая полученную величину времени на постоянную скорость деформации, выводим уравнение диаграммы растяжения

$$\varepsilon = \xi t = \xi \int_0^{\sigma} \frac{\frac{1}{E} + S'(\sigma)}{\xi - Q(\sigma)}\, d\sigma. \tag{12.76}$$

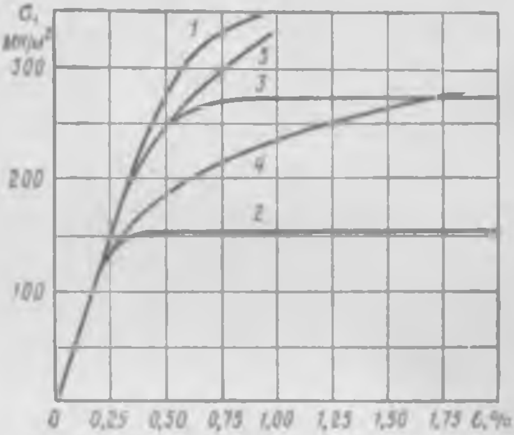


Рис. 12.23. Диаграмма мгновенного растяжения (кривая *1*) титанового сплава ВТ5-1 при температуре 600° С [25] и диаграммы растяжения при постоянных скоростях деформации: $\xi = 1{,}67 \cdot 10^{-4}$ 1/с (кривая *2*); $\xi = 16{,}7 \cdot 10^{-4}$ 1/с (кривая *3*) и постоянных скоростях напряжения $\dot{\sigma} = 7{,}5$ МН/м²с (кривая *4*) и $\dot{\sigma} = 75$ МН/м²с (кривая *5*) [13]

Рассмотрим теперь случай постоянной скорости изменения напряжения (для малых деформаций при испытании образца на растяжение с постоянной скоростью изменения растягивающей силы). Тогда $\dot{\sigma} = \text{const}$ и $\sigma = \dot{\sigma} t$.

Подставляя последнюю величину в формулу (12.72) и интегрируя полученный результат по времени, учитывая, что $\varkappa = 1$, имеем

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + S(\sigma) + \int_0^t Q(\dot{\sigma} t)\, dt\,. \tag{12.77}$$

Если использовать степенную зависимость (11.4), то тогда получим

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + S(\sigma) + \frac{k}{n+1}\,\frac{\sigma^{n+1}}{\dot{\sigma}}. \tag{12.78}$$

На рис. 12.23 представлены диаграммы мгновенного растяжения и диаграммы растяжения при постоянных скоростях изменения деформации и напряжения титанового сплава [13]. Этот рисунок подтверждает значительное влияние на диаграмму растяжения скоростей изменения деформаций или напряжений.

В работе [13] рассмотрено построение действительной диаграммы растяжения материалов при больших деформациях с учетом кратковременной ползучести, а в статьях [6, 8] описаны результаты экспериментального изучения кратковременной ползучести и растяжения при постоянных скоростях деформации и условного напряжения в случае больших деформаций.

§ 81. Неустановившаяся и установившаяся ползучесть

Неустановившейся ползучестью называют процесс ползучести, протекающий при изменяющихся во времени напряжениях. Если напряжения во времени постоянны, то этот процесс называют установившейся ползучестью.

Установившаяся ползучесть существует в случае статически определимых задач при постоянных во времени внешних силах. Это объясняется тем, что в таких задачах напряжения определяются только уравнениями статики, а поскольку внешние силы постоянны, напряжения также во времени не изменяются. Например, в образце, растянутом постоянной во времени силой при малых деформациях, когда можно пренебречь изменением площади поперечного сечения, напряжения во времени не изменяются. В тонкостенной трубке, нагруженной внутренним давлением, растягивающей силой и крутящим моментом, при постоянных нагрузках и малых деформациях напряжения также во времени не изменяются.

В статически неопределимых задачах для вычисления напряжений необходимо добавочно рассматривать деформации, которые изменяются во времени за счет ползучести материала. Поэтому в таких задачах даже при постоянных во времени внешних силах и малых деформациях изменение деформаций всегда связано с изменением напряжений и перераспределением их по объему детали. Если при решении этих задач приближенно предположить, что напряжения во времени постоянны, то получающиеся величины напряжений и закон распределения их отличны от таковых в начальный момент времени, когда деформаций за счет ползучести еще не было. Но процесс изменения напряжений во времени остается невыясненным.

В действительности, как показали исследования неустановившейся ползучести, напряжения непрерывно изменяются во времени, все более и более приближаясь к величинам, полученным в решении задачи установившейся ползучести. Таким образом, распределение напряжений при установившейся ползучести является как бы предельным. После некоторого промежутка времени распределение напряжений близко к установившемуся.

В решении задач неустановившейся ползучести условиям совместности деформаций должны удовлетворять компоненты полных деформаций.

В решении задач установившейся ползучести упругими деформациями по сравнению с деформациями ползучести можно пренебречь (это справедливо для достаточно больших значений времени). Тогда условиям совместности деформаций должны удовлетворять компоненты деформаций ползучести.

Для того чтобы наглядно проиллюстрировать установившуюся и неустановившуюся ползучесть, рассмотрим упругое и чисто пластическое состояния, а также состояния установившейся и неустановившейся ползучести для системы трех стержней AB, AC и AD одинаковой длины l, одинаковой площади поперечного сечения F

и из одинакового материала, нагруженных постоянной во времени силой P (рис. 12.24).

Основными уравнениями для рассматриваемой задачи является уравнение равновесия, которое может быть представлено в виде

$$\sigma_1 + \sigma_2 = s, \tag{12.79}$$

где σ_1 и σ_2 — напряжения соответственно в первом (AB и AD) и втором (AC) стержнях, $s = \frac{P}{F}$, а также условие совместности деформаций

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1. \tag{12.80}$$

Решая задачу в пределах упругости, устанавливаем величины напряжений в стержнях

$$\sigma_1' = \frac{1}{3}\,s; \quad \sigma_2' = \frac{2}{3}\,s.$$

При чисто пластическом состоянии системы (если упрочнение отсутствует) напряжения в стержнях одинаковы и из уравнения (12.79) имеем

$$\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \frac{s}{2}.$$

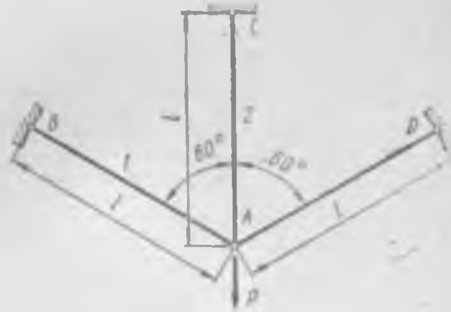


Рис. 12.24. Статически-неопределимая стержневая система

Для определения напряжений в условиях установившейся ползучести используем степенную зависимость деформации ползучести от напряжения (11.13). Подставляя величины деформации ползучести по этой формуле в условие совместности деформаций (12.80), имеем

$$(\sigma_2'')^n = 2\,(\sigma_1'')^n. \tag{12.81}$$

Решим уравнения (12.79) и (12.81). Тогда

$$\sigma_1'' = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{n}}}\,s; \quad \sigma_2'' = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{1 + 2^{\frac{1}{n}}}\,s. \tag{12.82}$$

Из соотношений (12.82) при $n = 1$ получаем величины напряжений в пределах упругости, а при $n = \infty$ значения напряжений в чисто пластическом состоянии.

Между полученными выше решениями существует следующая связь:

$$\sigma_1'' = \sigma_1^0 + k\,(\sigma_1' - \sigma_1^0);$$

$$\sigma_2'' = \sigma_2^0 + k\,(\sigma_2' - \sigma_2^0),$$

§ 81. Неустановившаяся и установившаяся ползучесть

Неустановившейся ползучестью называют процесс ползучести, протекающий при изменяющихся во времени напряжениях. Если напряжения во времени постоянны, то этот процесс называют установившейся ползучестью.

Установившаяся ползучесть существует в случае статически определимых задач при постоянных во времени внешних силах. Это объясняется тем, что в таких задачах напряжения определяются только уравнениями статики, а поскольку внешние силы постоянны, напряжения также во времени не изменяются. Например, в образце, растянутом постоянной во времени силой при малых деформациях, когда можно пренебречь изменением площади поперечного сечения, напряжения во времени не изменяются. В тонкостенной трубке, нагруженной внутренним давлением, растягивающей силой и крутящим моментом, при постоянных нагрузках и малых деформациях напряжения также во времени не изменяются.

В статически неопределимых задачах для вычисления напряжений необходимо добавочно рассматривать деформации, которые изменяются во времени за счет ползучести материала. Поэтому в таких задачах даже при постоянных во времени внешних силах и малых деформациях изменение деформаций всегда связано с изменением напряжений и перераспределением их по объему детали. Если при решении этих задач приближенно предположить, что напряжения во времени постоянны, то получающиеся величины напряжений и закон распределения их отличны от таковых в начальный момент времени, когда деформаций за счет ползучести еще не было. Но процесс изменения напряжений во времени остается невыясненным.

В действительности, как показали исследования неустановившейся ползучести, напряжения непрерывно изменяются во времени, все более и более приближаясь к величинам, полученным в решении задачи установившейся ползучести. Таким образом, распределение напряжений при установившейся ползучести является как бы предельным. После некоторого промежутка времени распределение напряжений близко к установившемуся.

В решении задач неустановившейся ползучести условиям совместности деформаций должны удовлетворять компоненты полных деформаций.

В решении задач установившейся ползучести упругими деформациями по сравнению с деформациями ползучести можно пренебречь (это справедливо для достаточно бо́льших значений времени). Тогда условиям совместности деформаций должны удовлетворять компоненты деформаций ползучести.

Для того чтобы наглядно проиллюстрировать установившуюся и неустановившуюся ползучесть, рассмотрим упругое и чисто пластическое состояния, а также состояния установившейся и неустановившейся ползучести для системы трех стержней AB, AC и AD одинаковой длины l, одинаковой площади поперечного сечения F

и из одинакового материала, нагруженных постоянной во времени силой P (рис. 12.24).

Основными уравнениями для рассматриваемой задачи является уравнение равновесия, которое может быть представлено в виде

$$\sigma_1 + \sigma_2 = s, \tag{12.79}$$

где σ_1 и σ_2 — напряжения соответственно в первом (AB и AD) и втором (AC) стержнях, $s = \frac{P}{F}$, а также условие совместности деформаций

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1. \tag{12.80}$$

Решая задачу в пределах упругости, устанавливаем величины напряжений в стержнях

$$\sigma_1' = \frac{1}{3}s; \quad \sigma_2' = \frac{2}{3}s.$$

При чисто пластическом состоянии системы (если упрочнение отсутствует) напряжения в стержнях одинаковы и из уравнения (12.79) имеем

$$\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \frac{s}{2}.$$

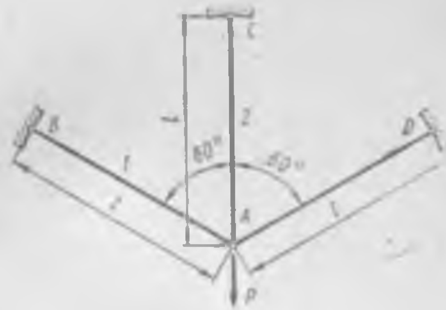


Рис. 12.24. Статически-неопределимая стержневая система

Для определения напряжений в условиях установившейся ползучести используем степенную зависимость деформации ползучести от напряжения (11.13). Подставляя величины деформации ползучести по этой формуле в условие совместности деформаций (12.80), имеем

$$(\sigma_2'')^n = 2(\sigma_1'')^n. \tag{12.81}$$

Решим уравнения (12.79) и (12.81). Тогда

$$\sigma_1'' = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{n}}}s; \quad \sigma_2'' = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{1 + 2^{\frac{1}{n}}}s. \tag{12.82}$$

Из соотношений (12.82) при $n = 1$ получаем величины напряжений в пределах упругости, а при $n = \infty$ значения напряжений в чисто пластическом состоянии.

Между полученными выше решениями существует следующая связь:

$$\sigma_1'' = \sigma_1^0 + k(\sigma_1' - \sigma_1^0);$$

$$\sigma_2'' = \sigma_2^0 + k(\sigma_2' - \sigma_2^0),$$

где

$$k = 3\frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

Решим теперь задачу неустановившейся ползучести, используя теорию течения в формулировке Л. М. Качанова и предполагая, что напряжения в стержнях меньше предела пропорциональности материала при данной температуре. В соответствии с этим величина скорости полной деформации согласно формуле (12.23)

$$\xi = \xi^e + \xi^c = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \sigma^n B. \tag{12.83}$$

Продифференцируем по времени условие совместности деформаций (12.80). Тогда получим

$$\xi_2 = 2\xi_1. \tag{12.84}$$

Подставляя в это уравнение выражения для скоростей полных деформаций, согласно формуле (12.83) устанавливаем

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma_2}{dt} + \sigma_2^n B = \frac{2}{E}\frac{d\sigma_1}{dt} + 2\sigma_1^n B. \tag{12.85}$$

Из уравнения равновесия (12.78) имеем

$$\sigma_1 = s - \sigma_2$$

и, следовательно, поскольку сила P и величина s постоянны во времени, получаем

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = -\frac{d\sigma_2}{dt};$$

подставим эти величины в уравнение (12.85). Тогда после преобразований выводим дифференциальное уравнение для σ_2:

$$\frac{d\sigma_2}{2(s - \sigma_2)^n - \sigma_2^n} = \frac{EBs^{n-1}}{3}\,dt. \tag{12.86}$$

Введем безразмерное напряжение σ_2^* и безразмерное время t^*:

$$\sigma_2^* = \frac{\sigma_2}{s}; \quad t^* = \frac{1}{3}E\Omega s^{n-1}.$$

Тогда уравнение (12.86) принимает вид

$$\frac{d\sigma_2^*}{2(1 - \sigma_2^*)^n - (\sigma_2^*)^n} = dt^*.$$

Проинтегрируем это уравнение, учитывая, что в начальный момент времени

$$\sigma_2(0) = \frac{2}{3}s; \quad \sigma_2^*(0) = \frac{2}{3}.$$

Тогда получим

$$t^* = \int\limits_{\frac{2}{3}}^{\sigma_2^*} \frac{d\zeta}{2(1-\zeta)^n - \zeta^n}, \tag{12.87}$$

где ζ — переменная интегрирования.

На рис. 12.25 представлен график зависимости (12.87) при $n = 2$, из которого следует, что с течением времени напряжения изменяются от начального упругого состояния $(\sigma_2^*)' = 0{,}667$ до установившегося $(\sigma_2^*)'' = 0{,}586$, причем состояние установившейся ползучести практически реализуется весьма быстро.

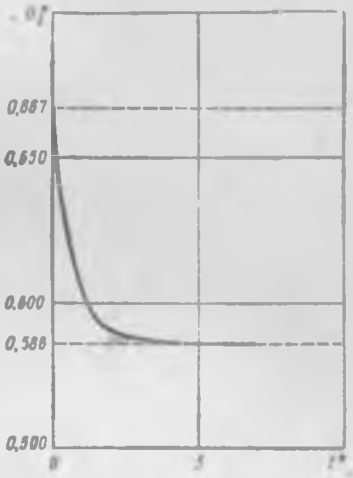


Рис. 12.25. График зависимости безразмерного напряжения σ^* от безразмерного времени t^*

Таким образом, поскольку расчеты с допущением установившейся ползучести значительно проще, чем без него, можно, если срок службы детали достаточно велик, использовать предположение установившейся ползучести.

Однако в тех случаях, когда необходимо исследовать изменение и перераспределение напряжений во времени, как например, в задаче о релаксации контактного давления в диске, посаженном на вал с натягом, предположение установившейся ползучести не может быть принято.

Зависимости компонентов скоростей деформации ползучести от компонентов напряжений в условиях установившейся ползучести можно получить из соотношений (12.7), полагая скорости изменения напряжений равными нулю,

$$\dot{\xi}_{ij} = \dot{\xi}_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\dot{\xi}_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0).$$

Интегрируя эти уравнения по времени, принимая во внимание, что напряжение во времени постоянны, получаем

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \tag{12.88}$$

Такие же соотношения следуют из зависимостей (12.9), если пренебречь упругими деформациями по сравнению с деформациями ползучести.

Зависимость интенсивности деформаций ползучести от напряжения может быть принята такой же, как и в теории старения [формула (12.19)], т. е.

$$\varepsilon_i^c = \sigma_i^n \Omega. \tag{12.89}$$

где

$$k = 3\,\frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

Решим теперь задачу неустановившейся ползучести, используя теорию течения в формулировке Л. М. Качанова и предполагая, что напряжения в стержнях меньше предела пропорциональности материала при данной температуре. В соответствии с этим величина скорости полной деформации согласно формуле (12.23)

$$\xi = \xi^{e} + \xi^{c} = \frac{1}{E}\,\frac{d\sigma}{dt} + \sigma^{n} B. \tag{12.83}$$

Продифференцируем по времени условие совместности деформаций (12.80). Тогда получим

$$\xi_2 = 2\xi_1. \tag{12.84}$$

Подставляя в это уравнение выражения для скоростей полных деформаций, согласно формуле (12.83) устанавливаем

$$\frac{1}{E}\,\frac{d\sigma_2}{dt} + \sigma_2^n B = \frac{2}{E}\,\frac{d\sigma_1}{dt} + 2\sigma_1^n B. \tag{12.85}$$

Из уравнения равновесия (12.78) имеем

$$\sigma_1 = s - \sigma_2$$

и, следовательно, поскольку сила P и величина s постоянны во времени, получаем

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = -\frac{d\sigma_2}{dt};$$

подставим эти величины в уравнение (12.85). Тогда после преобразований выводим дифференциальное уравнение для σ_2:

$$\frac{d\sigma_2}{2\,(s-\sigma_2)^n - \sigma_2^n} = \frac{EBs^{n-1}}{3}\,dt. \tag{12.86}$$

Введем безразмерное напряжение σ_2^* и безразмерное время t^*:

$$\sigma_2^* = \frac{\sigma_2}{s}; \quad t^* = \frac{1}{3}\,E\Omega s^{n-1}.$$

Тогда уравнение (12.86) принимает вид

$$\frac{d\sigma_2^*}{2\,(1-\sigma_2^*)^n - (\sigma_2^*)^n} = dt^*.$$

Проинтегрируем это уравнение, учитывая, что в начальный момент времени

$$\sigma_2(0) = \frac{2}{3}\,s; \quad \sigma_2^*(0) = \frac{2}{3}.$$

Тогда получим

$$t^* = \int\limits_{\frac{2}{3}}^{\sigma_2^*} \frac{d\zeta}{2(1-\zeta)^n - \zeta^n}, \tag{12.87}$$

где ζ — переменная интегрирования.

На рис. 12.25 представлен график зависимости (12.87) при $n = 2$, из которого следует, что с течением времени напряжения изменяются от начального упругого состояния $(\sigma_2^*)' = 0{,}667$ до установившегося $(\sigma_2^*)'' = 0{,}586$, причем состояние установившейся ползучести практически реализуется весьма быстро.

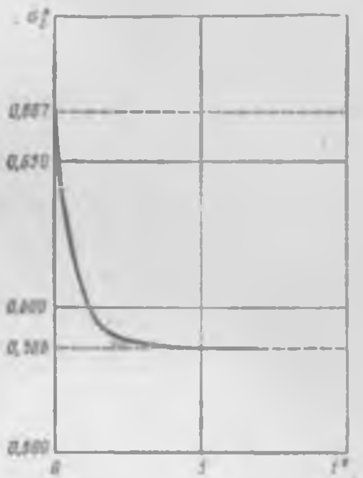


Рис. 12.25. График зависимости безразмерного напряжения σ^* от безразмерного времени t^*

Таким образом, поскольку расчеты с допущением установившейся ползучести значительно проще, чем без него, можно, если срок службы детали достаточно велик, использовать предположение установившейся ползучести.

Однако в тех случаях, когда необходимо исследовать изменение и перераспределение напряжений во времени, как например, в задаче о релаксации контактного давления в диске, посаженном на вал с натягом, предположение установившейся ползучести не может быть принято.

Зависимости компонентов скоростей деформации ползучести от компонентов напряжений в условиях установившейся ползучести можно получить из соотношений (12.7), полагая скорости изменения напряжений равными нулю,

$$\xi_{ij} = \xi_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\xi_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0).$$

Интегрируя эти уравнения по времени, принимая во внимание, что напряжение во времени постоянны, получаем

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0). \tag{12.88}$$

Такие же соотношения следуют из зависимостей (12.9), если пренебречь упругими деформациями по сравнению с деформациями ползучести.

Зависимость интенсивности деформаций ползучести от напряжения может быть принята такой же, как и в теории старения [формула (12.19)], т. е.

$$\varepsilon_i^c = \sigma_i^n \Omega. \tag{12.89}$$

Она следует также из степенной зависимости интенсивности скоростей деформаций ползучести от интенсивности напряжений (12.24), принятой в теории течения Л. М. Качанова, в случае постоянных во времени напряжений.

Таким образом, при установившейся ползучести вывод зависимостей компонентов деформаций ползучести от компонентов напряжений не связан с использованием теорий ползучести.

Поскольку в решениях задач установившейся ползучести условиям совместности деформаций должны удовлетворять компоненты деформаций ползучести, определяемые формулами (12.88), эти решения эквивалентны расчетам при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями. В частности, при использовании зависимости (12.89) они эквивалентны решениям чисто пластических задач со степенным упрочнением.

§ 82. Длительная прочность при неодноосном напряженном состоянии

Для расчета на прочность при длительном нагружении в условиях ползучести необходимо располагать теорией прочности, с помощью которой можно определить эквивалентное напряжение. Тогда коэффициент запаса для определенного интервала времени вычисляют как отношение предела длительной прочности для этого значения времени к эквивалентному напряжению.

Попытка использования известных теорий прочности для кратковременного нагружения привела к неудовлетворительным результатам. Поэтому были предложены эмпирические критерии прочности. Наиболее экспериментально проверенной является формула для эквивалентного напряжения, предложенная И. И. Труниным [30]. Эта формула имеет вид

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{2}\left[\sigma_i + \frac{1}{2}(\sigma_1 + |\sigma_1|)\right] a^{1-2\eta}, \tag{12.90}$$

где

$$\eta = \frac{3\sigma_0}{\sigma_i + \frac{1}{2}(\sigma_1 + |\sigma_1|)}. \tag{12.91}$$

Рассмотрим случаи одноосного растяжения ($\sigma_i = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), одноосного сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$) и чистого сдвига ($\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$).

По формулам (12.91) и (12.90), используя соотношение (1.19), имеем:

для одноосного растяжения

$$\eta = \frac{1}{2}; \quad \sigma_{экв} = \sigma;$$

для одноосного сжатия

$$\eta = -1; \quad \sigma_{экв} = \frac{\sigma a^3}{2}; \tag{12.92}$$

для чистого сдвига

$$\eta = 0; \quad \sigma_{экв} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\tau a. \tag{12.93}$$

Применим теперь соотношения (12.92) и (12.93) для случая разрушения, т. е. положим в них $\sigma_{экв} = \sigma_{дл.\,р}$; $\sigma = \sigma_{дл.\,сж}$; $\tau = \tau_{дл}$, где $\sigma_{дл.\,р}$, $\sigma_{дл.\,сж}$, $\tau_{дл.}$ — пределы длительной прочности при растяжении, сжатии и чистом сдвиге. Тогда получим

$$a = \sqrt[3]{\frac{2\sigma_{дл.\,р}}{\sigma_{дл.\,сж}}}$$

или

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}+1}\,\frac{\sigma_{дл.\,р}}{\tau_{дл}}.$$

Рис. 12.26. Графики зависимости от времени разрушающих эквивалентных напряжений. Черными кружочками изображены результаты испытания образцов при одноосном растяжении; светлыми кружочками — тонкостенных трубок, нагруженных внутренним давлением; крестиками — тонкостенных трубок при кручении и черными треугольничками — тонкостенных трубок при совместном растяжении и кручении [30]:

а — сталь 20, температура 500° С, *б* — сплав ЭИ 437Б, температура 700° С

Таким образом, величина a, зависящая для определенного материала от температуры и времени испытания до разрушения, может быть определена по результатам испытания на длительную прочность при двух напряженных состояниях.

Формула (12.90) построена таким образом, что эквивалентное напряжение при всестороннем равном растяжении ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$) не равно нулю, в то время как эта величина для всестороннего равного сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$) обращается в ноль, что, вероятно, должно согласоваться с данными опытов.

На рис. 12.26 представлены графики зависимости от времени разрушающих эквивалентных напряжений при различных напряженных состояниях. Как следует из этих графиков, формула (12.90) хорошо подтверждается опытами.

Она следует также из степенной зависимости интенсивности скоростей деформаций ползучести от интенсивности напряжений (12.24), принятой в теории течения Л. М. Качанова, в случае постоянных во времени напряжений.

Таким образом, при установившейся ползучести вывод зависимостей компонентов деформаций ползучести от компонентов напряжений не связан с использованием теорий ползучести.

Поскольку в решениях задач установившейся ползучести условиям совместности деформаций должны удовлетворять компоненты деформаций ползучести, определяемые формулами (12.88), эти решения эквивалентны расчетам при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями. В частности, при использовании зависимости (12.89) они эквивалентны решениям чисто пластических задач со степенным упрочнением.

§ 82. Длительная прочность при неодноосном напряженном состоянии

Для расчета на прочность при длительном нагружении в условиях ползучести необходимо располагать теорией прочности, с помощью которой можно определить эквивалентное напряжение. Тогда коэффициент запаса для определенного интервала времени вычисляют как отношение предела длительной прочности для этого значения времени к эквивалентному напряжению.

Попытка использования известных теорий прочности для кратковременного нагружения привела к неудовлетворительным результатам. Поэтому были предложены эмпирические критерии прочности. Наиболее экспериментально проверенной является формула для эквивалентного напряжения, предложенная И. И. Труниным [30]. Эта формула имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{2}\left[\sigma_i + \frac{1}{2}(\sigma_1 + |\sigma_1|)\right]a^{1-2\eta}, \tag{12.90}$$

где

$$\eta = \frac{3\sigma_0}{\sigma_i + \frac{1}{2}(\sigma_1 + |\sigma_1|)}. \tag{12.91}$$

Рассмотрим случаи одноосного растяжения ($\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), одноосного сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$) и чистого сдвига ($\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$).

По формулам (12.91) и (12.90), используя соотношение (1.19), имеем:

для одноосного растяжения

$$\eta = \frac{1}{2}; \quad \sigma_{\text{экв}} = \sigma;$$

для одноосного сжатия

$$\eta = -1; \quad \sigma_{\text{экв}} = \frac{\sigma a^3}{2}; \tag{12.92}$$

для чистого сдвига

$$\eta = 0; \quad \sigma_{экв} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\tau a. \tag{12.93}$$

Применим теперь соотношения (12.92) и (12.93) для случая разрушения, т. е. положим в них $\sigma_{экв} = \sigma_{дл.\,р}$; $\sigma = \sigma_{дл.\,сж}$; $\tau = \tau_{дл}$, где $\sigma_{дл.\,р}$, $\sigma_{дл.\,сж}$, $\tau_{дл.}$ — пределы длительной прочности при растяжении, сжатии и чистом сдвиге. Тогда получим

$$a = \sqrt[3]{\frac{2\sigma_{дл.\,р}}{\sigma_{дл.\,сж}}}$$

или

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}+1}\frac{\sigma_{дл.\,р}}{\tau_{дл}}.$$

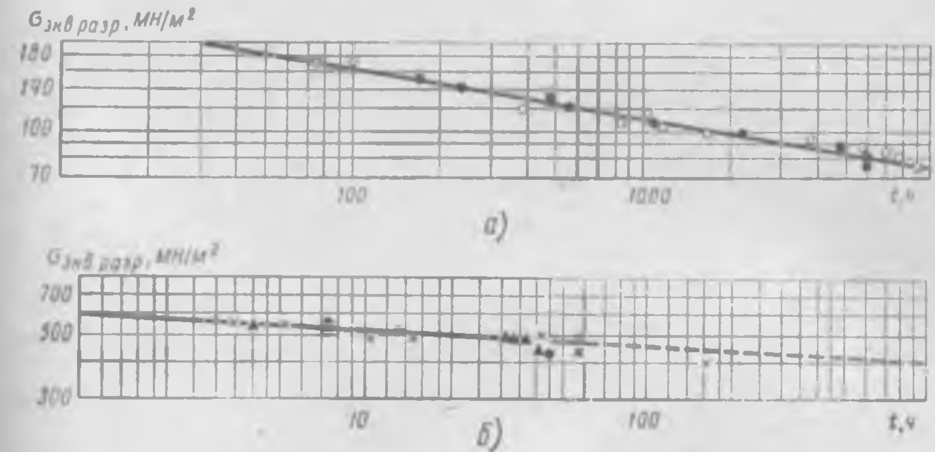


Рис. 12.26. Графики зависимости от времени разрушающих эквивалентных напряжений. Черными кружочками изображены результаты испытания образцов при одноосном растяжении; светлыми кружочками — тонкостенных трубок, нагруженных внутренним давлением; крестиками — тонкостенных трубок при кручении и черными треугольничками — тонкостенных трубок при совместном растяжении и кручении [30]:

а — сталь 20, температура 500° С, *б* — сплав ЭИ 437Б, температура 700° С

Таким образом, величина a, зависящая для определенного материала от температуры и времени испытания до разрушения, может быть определена по результатам испытания на длительную прочность при двух напряженных состояниях.

Формула (12.90) построена таким образом, что эквивалентное напряжение при всестороннем равном растяжении ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$) не равно нулю, в то время как эта величина для всестороннего равного сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$) обращается в ноль, что, вероятно, должно согласоваться с данными опытов.

На рис. 12.26 представлены графики зависимости от времени разрушающих эквивалентных напряжений при различных напряженных состояниях. Как следует из этих графиков, формула (12.90) хорошо подтверждается опытами.

Список литературы

1. **Высокотемпературная** ползучесть сплава ЭИ437Б при различных режимах нагружения — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1969, № 9, с 77—81. Авт.: В. Н. Бойков, Ю. И. Бойцов, Н. Н. Малинин, Г. М. Хажинский.

2. **Генки Г.** Новая теория пластичности, упрочнения, ползучести и опыты над неупругими материалами. В кн.: Теория пластичности. [Сборник статей]. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 427—446.

3. **Даниловская В. И., Иванова Г. М., Работнов Ю. Н.** Ползучесть и релаксация хромомолибденовой стали.— «Известия АН СССР, Отд. техн. наук», 1955, № 5, с. 102—109.

4. **Ивлев Д. Д.** К теории неустановившейся ползучести. В кн.: Проблемы механики сплошной среды. [Сборник статей]. М., Изд. АН СССР, 1961, с. 157—160.

5. **Ильюшин А. А., Ленский В. С.** Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959, 371 с.

6. **Исследование** растяжения сплава Д16 при повышенных температурах. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение». 1971, № 6, с. 21—24. Авт.: В. Н. Бойков, Ю. И. Бойцов, Э. С. Лазаренко, Н. Н. Малинин.

7. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960, 455 с.

8. **Кратковременная** ползучесть Д16 при больших деформациях.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1971, № 4, с. 34—37. Авт.: В. Н. Бойков, Ю. И. Бойцов, Э. С. Лазаренко, Н. Н. Малинин.

9. **Кулешова З. Г.** Проверка гипотезы упрочнения путем анализа экспериментальных исследований ползучести.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1959, № 12, с. 69—76.

10. **Людвик П.** Элементы технологической механики.— В кн.: Расчеты на прочность [Сборник статей]. Вып. 15, М., «Машиностроение», 1971, с. 132—166.

11. **Малинин Н. Н.** Основы расчетов на ползучесть. М., Машгиз, 1948, 120 с.

12. **Малинин Н. Н.** Обзор отечественных работ по расчетам деталей машин на ползучесть. В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей]. Вып. 11. М., Машиностроение, 1965, с. 229—278.

13. **Малинин Н. Н.** Действительные диаграммы растяжения при высоких температурах.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1968, № 1, с. 41—46.

14. **Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.** К построению теории ползучести с анизотропным упрочнением.— «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1969, № 3, с. 148—152.

15. **Надаи А.** Влияние времени на ползучесть.— В кн.: Теория пластичности [Сборник статей]. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 405—426.

16. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Т. I, М., изд. иностр. лит., 1954, 647 с.; т. II, М., «Мир», 1969, 863 с.

17. **Наместников В. С.** О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния.— «Известия АН СССР, Отд. техн. наук», 1957, № 4, с. 141—146.

18. **Наместников В. С.** Прямое и обратное кручение в условиях ползучести.— «Журнал прикладной механики и технической физики», 1960, № 3, с. 121—122.

19. **Наместников В. С.** О ползучести алюминиевого сплава при переменных нагрузках.— «Журнал прикладной механики и технической физики», 1964, № 2. с. 99—105.

20. **Паллей И. З.** Приложение теории остаточных микронапряжений к неизотермическому деформированию.— «Известия АН СССР. Механика», 1965, № 2. 110—113.

21. **Паллей И. З.** К построению неатермической теории циклических нагружений.— «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1968, № 1, 130—134.

22. **Работнов Ю. Н.** Расчет деталей машин на ползучесть.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1948, № 6, с. 789—800.

23. **Работнов Ю. Н.** Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1962, 455 с.

24. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.

25. **Работнов Ю. Н., Милейко С. Т.** Кратковременная ползучесть, М., «Наука», 1970, 222 с.

26. **Расчеты на прочность в машиностроении.** Т. II, М., Машгиз, 1958, 974 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.
27. **Соснин О. В.** К анизотропной ползучести материалов.— «Журнал прикладной механики и технической физики», 1966, № 4, с. 160—163.
28. **Соснин О. В.** Анизотропная ползучесть упрочняющихся материалов.— «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1968, № 4, с. 143—146.
29. **Соснин О. В.** К вопросу о существовании потенциала ползучести.— «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1971, № 5, с. 85—89.
30. **Трунин И. И.** Критерии прочности в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии.— «Прикладная механика», 1965, том I, вып. 7, с. 77—83.
31. **Хажинский Г. М.** Основные уравнения неизотермического деформирования.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1969, № 8, с. 30—35.
32. **Шестериков С. А.** Об одном условии для законов ползучести, «Известия АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение», 1959, № 1, с. 131.
33. **Bailey R. W.** The utilization of creep test data in engineering design.— «The Institution of mechanical engineers. Proceedings», 1935, Vol. 131, p. 131—269.
34. **Davenport C. C.** Correlation of creep and relaxation properties of copper.— «Journal of applied mechanics», 1938, Vol. 5, No 2, p. A—55+A—60.
35. **Davis E. A.** Creep and relaxation of oxygen—free copper.— «Journal of applied mechanics», 1943, Vol. 10, No 2, p. A—101+A—105.
36. **Finnie I., Heller W. R.**, Creep of engineering materials, Mc. Graw—Hill Book Company, Inc., 1959, 341 p.
37. **Johnson A. E.** The creep recovery of 0,17 per cent carbon steel.—«The Institution of Mechanical Engineers. Journal and Proceedings», 1941, Vol. 145, No 5, p. 210—220.
38. **Johnson A. E.** Creep and relaxation of metals at high temperatures.— «Engineering», 1949, Vol. 168, No 4362, p. 237—239.
39. **Johnson A. E., Henderson J., Mathur V.** Creep under changing complex stress system.—«Engineer», 1958, Vol. 206, No 5350, p. 209—216; No 5351, p. 251—257, No 5352, p. 287—291.
40. **Lubahn J. D., Felgar R. P.** Plasticity and creep of metals, John Wiley and Sons, Inc., 1961, 608 p.
41. **Malinin N. N., Khadjinsky G. M.**, Theory of creep with the anisotropic hardening — «International journal of mechanical sciences», 1972, Vol. 14, No 4, p. 235—246.
42. **Malinin N. N.** Tensile creep and some reference to metal processing.— «Archives of Mechanics. Archiwum mechaniki stosowanej», 1972, Vol. 24, issue 3, p. 439—448.
43. **Odqvist F. K. G.** Mathematical theory of creep and creep rupture, Clarendon Press, 1966, 170 p.
44. **Soderberg C. R.** The interpretation of creep tests for machine design.— «Transactions of the ASME», 1936, Vol. 58, No 8, p. 733—743.

Список литературы

1. **Высокотемпературная** ползучесть сплава ЭИ437Б при различных режимах нагружения — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1969, № 9, с. 77—81. Авт.: В. Н. Бойков, Ю. И. Бойцов, Н. Н. Малинин, Г. М. Хажинский.

2. **Генки Г.** Новая теория пластичности, упрочнения, ползучести и опыты над неупругими материалами. В кн.: Теория пластичности. [Сборник статей]. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 427—446.

3. **Даниловская В. И., Иванова Г. М., Работнов Ю. Н.** Ползучесть и релаксация хромомолибденовой стали.— «Известия АН СССР, Отд. техн. наук», 1955, № 5, с. 102—109.

4. **Ивлев Д. Д.** К теории неустановившейся ползучести. В кн.: Проблемы механики сплошной среды. [Сборник статей]. М., Изд. АН СССР, 1961, с. 157—160.

5. **Ильюшин А. А., Ленский В. С.** Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959, 371 с.

6. **Исследование** растяжения сплава Д16 при повышенных температурах. — «Известия высших учебных заведений. Машиностроение». 1971, № 6, с. 21—24. Авт.: В. Н. Бойков, Ю. И. Бойцов, Э. С. Лазаренко, Н. Н. Малинин.

7. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960, 455 с.

8. **Кратковременная** ползучесть Д16 при больших деформациях.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1971, № 4, с. 34—37. Авт.: В. Н. Бойков, Ю. И. Бойцов, Э. С. Лазаренко, Н. Н. Малинин.

9. **Кулешова З. Г.** Проверка гипотезы упрочнения путем анализа экспериментальных исследований ползучести.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1959, № 12, с. 69—76.

10. **Людвик П.** Элементы технологической механики.— В кн.: Расчеты на прочность [Сборник статей]. Вып. 15, М., «Машиностроение», 1971, с. 132—166.

11. **Малинин Н. Н.** Основы расчетов на ползучесть. М., Машгиз, 1948, 120 с.

12. **Малинин Н. Н.** Обзор отечественных работ по расчетам деталей машин на ползучесть. В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей]. Вып. 11. М., Машиностроение, 1965, с. 229—278.

13. **Малинин Н. Н.** Действительные диаграммы растяжения при высоких температурах.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1968, № 1, с. 41—46.

14. **Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.** К построению теории ползучести с анизотропным упрочнением.— «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1969, № 3, с. 148—152.

15. **Надаи А.** Влияние времени на ползучесть.— В кн.: Теория пластичности [Сборник статей] М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 405—426.

16. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Т. I, М., изд. иностр. лит., 1954, 647 с.; т. II, М., «Мир», 1969, 863 с.

17. **Наместников В. С.** О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния.— «Известия АН СССР, Отд. техн. наук», 1957. № 4, с. 141—146.

18. **Наместников В. С.** Прямое и обратное кручение в условиях ползучести.— «Журнал прикладной механики и технической физики», 1960, № 3, с. 121—122.

19. **Наместников В. С.** О ползучести алюминиевого сплава при переменных нагрузках.— «Журнал прикладной механики и технической физики», 1964, № 2. с. 99—105.

20. **Паллей И. З.** Приложение теории остаточных микронапряжений к неизотермическому деформированию.— «Известия АН СССР. Механика», 1965, № 2. 110—113.

21. **Паллей И. З.** К построению неатермической теории циклических нагружений.— «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1968, № 1, 130—134.

22. **Работнов Ю. Н.** Расчет деталей машин на ползучесть.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1948, № 6, с. 789—800.

23. **Работнов Ю. Н.** Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1962, 455 с.

24. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.

25. **Работнов Ю. Н., Милейко С. Т.** Кратковременная ползучесть, М., «Наука», 1970, 222 с.

26. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. II, М., Машгиз, 1958, 974 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.
27. **Соснин О. В.** К анизотропной ползучести материалов.— «Журнал прикладной механики и технической физики», 1966, № 4, с. 160—163.
28. **Соснин О. В.** Анизотропная ползучесть упрочняющихся материалов.— «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1968, № 4, с. 143—146.
29. **Соснин О. В.** К вопросу о существовании потенциала ползучести.— «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1971, № 5, с. 85—89.
30. **Трунин И. И.** Критерии прочности в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии.— «Прикладная механика», 1965, том I, вып. 7, с. 77—83.
31. **Хажинский Г. М.** Основные уравнения неизотермического деформирования.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1969, № 8, с. 30—35.
32. **Шестериков С. А.** Об одном условии для законов ползучести, «Известия АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение», 1959, № 1, с. 131.
33. **Bailey R. W.** The utilization of creep test data in engineering design.— «The Institution of mechanical engineers. Proceedings», 1935, Vol. 131, p. 131—269.
34. **Davenport C. C.** Correlation of creep and relaxation properties of copper.— «Journal of applied mechanics», 1938, Vol. 5, No 2, p. A—55÷A—60.
35. **Davis E. A.** Creep and relaxation of oxygen—free copper.— «Journal of applied mechanics», 1943, Vol. 10, No 2, p. A—101÷A—105.
36. **Finnie I., Heller W. R.**, Creep of engineering materials, Mc. Graw—Hill Book Company, Inc., 1959, 341 p.
37. **Johnson A. E.** The creep recovery of 0,17 per cent carbon steel.—«The Institution of Mechanical Engineers. Journal and Proceedings», 1941, Vol. 145, No 5, p. 210—220.
38. **Johnson A. E.** Creep and relaxation of metals at high temperatures.— «Engineering», 1949, Vol. 168, No 4362, p. 237—239.
39. **Johnson A. E., Henderson J., Mathur V.** Creep under changing complex stress system.—«Engineer», 1958, Vol. 206, No 5350, p. 209—216; No 5351, p. 251—257, No 5352, p. 287—291.
40. **Lubahn J. D., Felgar R. P.** Plasticity and creep of metals, John Wiley and Sons, Inc., 1961, 608 p.
41. **Malinin N. N., Khadjinsky G. M.**, Theory of creep with the anisotropic hardening — «International journal of mechanical sciences», 1972, Vol. 14, No 4, p. 235—246.
42. **Malinin N. N.** Tensile creep and some reference to metal processing.— «Archives of Mechanics. Archiwum mechaniki stosowanej», 1972, Vol. 24, issue 3, p. 439—448.
43. **Odqvist F. K. G.** Mathematical theory of creep and creep rupture, Clarendon Press, 1966, 170 p.
44. **Soderberg C. R.** The interpretation of creep tests for machine design.— «Transactions of the ASME», 1936, Vol. 58, No 8, p. 733—743.

ГЛАВА XIII

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 83. Чистый изгиб бруса

Рассмотрим чистый изгиб бруса, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии x и y, причем одна из них (ось y) лежит в плоскости изгиба (рис. 13.1). Если механические свойства материала в условиях ползучести при растяжении и сжатии одинаковы, ось симметрии x является нейтральной.

При чистом изгибе бруса поперечное сечение его остается плоским. Поэтому деформация является линейной функцией расстояния y от нейтральной оси x. Поскольку, как указывалось в § 81, при установившейся ползучести условиям совместности деформации должны удовлетворять компоненты деформации ползучести, имеем

$$\varepsilon^c = y\varkappa^c, \tag{13.1}$$

где $\varkappa^c$ — кривизна оси бруса, образовавшаяся за счет ползучести материала.

Из выражений (11.13) и (13.1) получаем

$$\sigma = \left(\frac{\varkappa^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} |y|^{\frac{1}{n}-1} y. \tag{13.2}$$

Форма уравнения (13.2) обусловлена изменением знака напряжения σ при изменении знака координаты y.

Составим выражение изгибающего момента

$$M = \int_F \sigma y \, dF.$$

Подставляя в него соотношение (13.2), имеем

$$M = \left(\frac{\varkappa^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} dF. \tag{13.3}$$

Назовем интеграл в выражении (13.3) обобщенным моментом инерции поперечного сечения относительно оси x и обозначим его

$$J_{nx} = \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} dF. \tag{13.4}$$

Из соотношения (13.3), воспользовавшись выражением (13.4), представим кривизну изогнутой оси балки, возникшую в результате ползучести материала, в виде

$$\varkappa^c = \left(\frac{M}{J_{nx}}\right)^n \Omega. \tag{13.5}$$

Из выражений (13.2) и (13.5) получаем формулу для нормального напряжения в поперечном сечении бруса

$$\sigma = \frac{M\,|y|^{\frac{1}{n}-1}}{J_{nx}}\,y. \tag{13.6}$$

Рис. 13.1. Брус, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии

Для бруса прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h из формулы (13.4) устанавливаем

$$J_{nx} = 2b\int_0^{\frac{h}{2}} y^{\frac{n+1}{n}}\,dy.$$

Выполняя интегрирование, имеем

$$J_{nx} = \alpha_1 b h^{\frac{2n+1}{n}}, \tag{13.7}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n}}}\cdot\frac{n}{2n+1}. \tag{13.8}$$

Для бруса круглого полого сечения с наружным диаметром D и внутренним диаметром d по формуле (13.4)

$$J_{nx} = 4\int_0^{\frac{D}{2}} y^{\frac{n+1}{n}}\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2}\,dy - 4\int_0^{\frac{d}{2}} y^{\frac{n+1}{n}}\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2}\,dy.$$

Положим в первом и втором интегралах соответственно

$$\zeta_1 = \frac{2y}{D};\quad \zeta_2 = \frac{2y}{d}.$$

Тогда получим

$$J_{nx} = \frac{D^{\frac{3n+1}{n}}}{2^{\frac{n+1}{n}}}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{3n+1}{n}}\right] I, \tag{13.9}$$

ГЛАВА XIII

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 83. Чистый изгиб бруса

Рассмотрим чистый изгиб бруса, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии x и y, причем одна из них (ось y) лежит в плоскости изгиба (рис. 13.1). Если механические свойства материала в условиях ползучести при растяжении и сжатии одинаковы, ось симметрии x является нейтральной.

При чистом изгибе бруса поперечное сечение его остается плоским. Поэтому деформация является линейной функцией расстояния y от нейтральной оси x. Поскольку, как указывалось в § 81, при установившейся ползучести условиям совместности деформации должны удовлетворять компоненты деформации ползучести, имеем

$$\varepsilon^c = y\varkappa^c, \tag{13.1}$$

где $\varkappa^c$ — кривизна оси бруса, образовавшаяся за счет ползучести материала.

Из выражений (11.13) и (13.1) получаем

$$\sigma = \left(\frac{\varkappa^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} |y|^{\frac{1}{n}-1} y. \tag{13.2}$$

Форма уравнения (13.2) обусловлена изменением знака напряжения σ при изменении знака координаты y.

Составим выражение изгибающего момента

$$M = \int_F \sigma y \, dF.$$

Подставляя в него соотношение (13.2), имеем

$$M = \left(\frac{\varkappa^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} dF. \tag{13.3}$$

Назовем интеграл в выражении (13.3) обобщенным моментом инерции поперечного сечения относительно оси x и обозначим его

$$J_{nx} = \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} dF. \tag{13.4}$$

Из соотношения (13.3), воспользовавшись выражением (13.4), представим кривизну изогнутой оси балки, возникшую в результате ползучести материала, в виде

$$\varkappa^c = \left(\frac{M}{J_{nx}}\right)^n \Omega. \tag{13.5}$$

Из выражений (13.2) и (13.5) получаем формулу для нормального напряжения в поперечном сечении бруса

$$\sigma = \frac{M\,|y|^{\frac{1}{n}-1}}{J_{nx}}\,y. \tag{13.6}$$

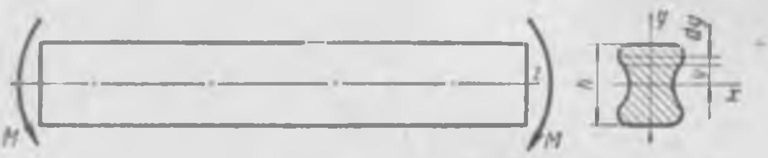


Рис. 13.1. Брус, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии

Для бруса прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h из формулы (13.4) устанавливаем

$$J_{nx} = 2b\int_0^{\frac{h}{2}} y^{\frac{n+1}{n}}\,dy.$$

Выполняя интегрирование, имеем

$$J_{nx} = \alpha_1 b h^{\frac{2n+1}{n}}, \tag{13.7}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n}}}\cdot\frac{n}{2n+1}. \tag{13.8}$$

Для бруса круглого полого сечения с наружным диаметром D и внутренним диаметром d по формуле (13.4)

$$J_{nx} = 4\int_0^{\frac{D}{2}} y^{\frac{n+1}{n}}\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2}\,dy - 4\int_0^{\frac{d}{2}} y^{\frac{n+1}{n}}\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2}\,dy.$$

Положим в первом и втором интегралах соответственно

$$\zeta_1 = \frac{2y}{D}; \quad \zeta_2 = \frac{2y}{d}.$$

Тогда получим

$$J_{nx} = \frac{D^{\frac{3n+1}{n}}}{2^{\frac{n+1}{n}}}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{3n+1}{n}}\right] I, \tag{13.9}$$

где

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - \zeta^2}\, \zeta^{\frac{n+1}{n}}\, d\zeta.$$

При помощи подстановки

$$\zeta^2 = u; \quad d\zeta = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du;$$

этот интеграл может быть приведен к виду

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - u)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2n}}\, du.$$

Поскольку бэта-функция или эйлеров интеграл первого рода определяется равенством [17]

$$B(p,\ q) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1}\, dx,$$

имеем

$$I = \frac{1}{2} B\left(\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{3}{2}\right).$$

Бэта-функция двух аргументов p и q связана с гамма-функцией или эйлеровым интегралом второго рода этих аргументов соотношением [17]

$$B(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n} + \frac{3}{2}\right)}.$$

Последнее выражение при помощи известных в теории специальных функций формул [17]

$$\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s);$$

$$\Gamma(s)\,\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s} \sqrt{\pi}\, \Gamma(2s),$$

а также соотношений

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

приводится к виду

$$I = \frac{2^{\frac{1}{n}} n}{3n+1} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{n}\right)}.$$

Поэтому согласно формуле (13.9) имеем

$$J_{nx} = \alpha_2 D^{\frac{3n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right], \tag{13.10}$$

где

$$\alpha_2 = \frac{n}{2(3n+1)} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n} \right) \right]^2}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{n} \right)}. \tag{13.11}$$

Для сплошного круглого бруса диаметром D имеем

$$J_{nx} = \alpha_2 D^{\frac{3n+1}{n}}. \tag{13.12}$$

Аналогично для бруса, поперечное сечение которого представляет собой тонкостенное кольцо со средним диаметром D и толщиной стенки δ, по формуле (13.4) получим

$$J_{nx} = \alpha_3 D^{\frac{2n+1}{n}} \delta, \tag{13.13}$$

где

$$\alpha_3 = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2n+1}{2n} \right) \right]^2}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{n} \right)}. \tag{13.14}$$

На рис. 13.2 представлены графики зависимостей этих коэффициентов от показателя степени n.

Максимальное нормальное напряжение можно получить по формуле (13.6), полагая $y = \frac{h}{2}$ (h — высота поперечного сечения). Тогда имеем

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_{nx}}, \tag{13.15}$$

где W_{nx} — обобщенный момент сопротивления изгибу поперечного сечения

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \frac{J_{nx}}{h^{\frac{1}{n}}}. \tag{13.16}$$

Для прямоугольного поперечного сечения

$$W_{nx} = \frac{n}{2(2n+1)} bh^2. \tag{13.17}$$

Для круглого полого сечения

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \alpha_2 D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right]. \tag{13.18}$$

Для круглого сплошного сечения

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \alpha_2 D^3. \qquad (13.19)$$

Для тонкостенного кольца

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \alpha_3 D^2 \delta. \qquad (13.20)$$

На рис. 13.3 представлены графики зависимостей $\frac{\sigma}{M/W_x}$ от $\frac{2y}{h}$, построенные по формулам (13.6)—(13.8). Эти графики характеризуют вид эпюр распределения напряжений в прямоугольном поперечном

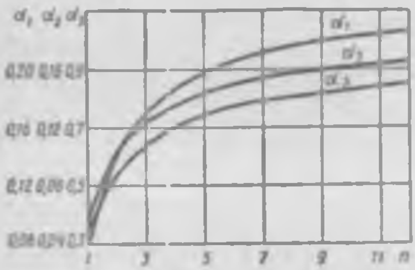


Рис. 13.2. Графики зависимостей коэффициентов α_1, α_2 и α_3 от показателя степени n

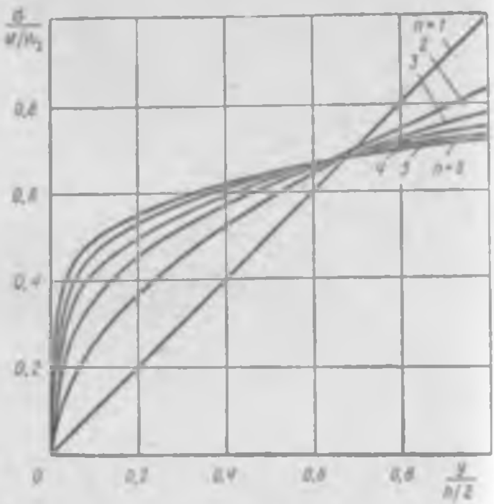


Рис. 13.3. Эпюры безразмерных нормальных напряжений в прямоугольном поперечном сечении изогнутого бруса в условиях установившейся ползучести при различных значениях показателя степени n

сечении бруса в случае различных величин показателя степени n при установившейся ползучести. Из графиков на рис. 13.3 заключаем, что максимальное нормальное напряжение при ползучести меньше, чем максимальное нормальное напряжение в начальный момент времени. Далее из этих графиков следует, что чем выше показатель степени n, тем значительнее уменьшается наибольшее нормальное напряжение и нормальные напряжения выравниваются по сечению.

Как отмечалось в § 81, расчеты на установившуюся ползучесть эквивалентны расчетам на прочность и жесткость при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями. Поэтому для решения задачи установившейся ползучести изогнутого бруса может быть использован один из вариационных методов. Рассмотрим применение принципа минимума дополнительной работы для исследования установившейся ползучести равномерно нагретого бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе.

Поскольку в условиях ползучести изменение объема равно нулю, а напряженное состояние при чистом изгибе является одноосным, то в формуле (7.9) можно положить $K=\infty$, $\sigma_i=\sigma$, $\varepsilon_i=\varepsilon_i^c=\varepsilon^c$. Тогда получим

$$R=\int_0^\sigma \varepsilon^c\,d\sigma.$$

Используя степенную зависимость деформации ползучести от напряжения (11.13), имеем

$$R=\int_0^\sigma \sigma^n\Omega\,d\sigma=\frac{\sigma^{n+1}\Omega}{n+1}.$$

Дополнительная работа для всего бруса

$$\bar{R}=\int_V R\,dV=\int_V\frac{\sigma^{n+1}\Omega}{n+1}\,dV.$$

Так как брус находится в условиях чистого изгиба и равномерно нагрет, имеем

$$\bar{R}=\frac{\Omega 2lb}{n+1}\int_0^{\frac{h}{2}}\sigma^{n+1}\,dy, \tag{13.21}$$

где b и h — ширина и высота поперечного сечения; l — длина бруса.

Допустим, как это было предложено Л. М. Качановым [2], что распределение напряжений в поперечном сечении бруса при установившейся ползучести может быть представлено в виде (см. также § 81)

$$\sigma=\sigma^0+k\,(\sigma'-\sigma^0), \tag{13.22}$$

где σ' — напряжения в пределах упругости; σ^0 — напряжения в предельном (чисто пластическом) состоянии.

Поскольку для прямоугольного сечения

$$\sigma^0=\frac{4M}{bh^2};\quad \sigma'=\frac{12My}{bh^3},$$

имеем

$$\sigma=\frac{4M}{bh^2}\left[1+k\left(\frac{3y}{h}-1\right)\right]. \tag{13.23}$$

Подставляя эту величину в формулу (13.21), получаем

$$\tilde{R}=\frac{2^{2n+3}M^{n+1}\Omega l}{(n+1)\,h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}\left[1+k\left(\frac{3y}{h}-1\right)\right]^{n+1}dy. \tag{13.24}$$

Согласно принципу минимума дополнительной работы из всех статически возможных напряженных состояний дополнительная работа для всего тела $\tilde{R}$ принимает минимальное значение только для истинного напряженного состояния. Поэтому для такого состояния

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial k} = 0.$$

Подставим в это выражение соотношение (13.24). Тогда получим

$$\int\limits_0^{\frac{h}{2}} \left[1 + k\left(\frac{3y}{h} - 1\right)\right]^n \left(\frac{3y}{h} - 1\right) dy = 0.$$

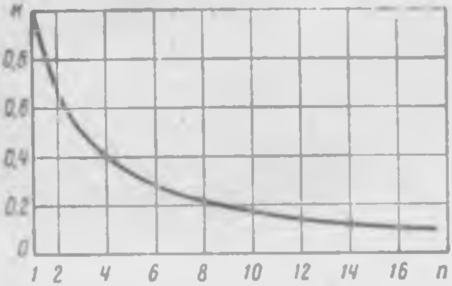


Рис. 13.4. График зависимости коэффициента k от показателя степени n

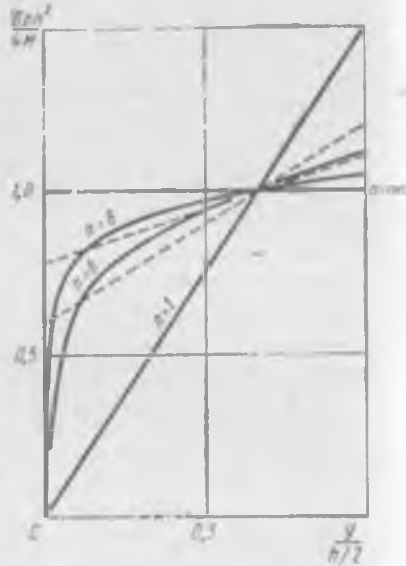


Рис. 13.5. Эпюры безразмерных нормальных напряжений в прямоугольном поперечном сечении изогнутого бруса в условиях установившейся ползучести для различных значений показателя степени n. Сплошные линии — эпюры, построенные по точной формуле (13.6). Штриховые линии — эпюры, построенные по приближенной формуле (13.23)

Выполняя интегрирование, выводим уравнение, из которого определяем коэффициент k в зависимости от показателя степени n

$$\frac{1 - \frac{n+1}{2}k}{1 + (n+1)k} = \left(\frac{1-k}{1+\frac{k}{2}}\right)^{n+1}. \tag{13.25}$$

Как следует из формулы (13.25), при $n = 1$ $k = 1$, при $n = \infty$ $k = 0$, чего на основании выражения (13.22) и следовало ожидать. На рис. 13.4 представлен график зависимости k от n, построенный по формуле (13.25). Сопоставление эпюр (рис. 13.5) показывает незначительное их различие.

§ 84. Поперечный изгиб бруса

Предположим, что поперечное сечение бруса имеет две оси симметрии, одна из которых лежит в плоскости изгиба.

В случае поперечного изгиба бруса в поперечном сечении его возникают касательные напряжения и при деформации бруса оно не остается плоским, как в случае чистого изгиба. Однако для бруса сплошного поперечного сечения влиянием касательных напряжений при поперечном изгибе можно пренебречь и приближенно принять, что поперечное сечение бруса при его деформации остается плоским, как и в случае чистого изгиба. Тогда выведенные в предыдущем параграфе формулы для напряжений и кривизны остаются приближенно справедливыми. Они являются точными для частного случая постоянной по длине бруса поперечной силы [21].

В отличие от чистого изгиба при поперечном изгибе изгибающий момент и кривизна не остаются постоянными по длине балки. Основной задачей в случае поперечного изгиба бруса является определение прогибов. При малых прогибах для определения их можно воспользоваться известной приближенной зависимостью кривизны изогнутой балки от прогиба [21]. На основании этой зависимости кривизна изогнутой балки $\varkappa^c$ и прогиб v^c, возникшие за счет ползучести материала, связаны соотношением

$$\varkappa^c = \frac{\partial^2 v^c}{\partial z^2}.$$

Подставляя в это соотношение кривизну по формуле (13.5), устанавливаем, что

$$\frac{\partial^2 v^c}{\partial z^2} = \left(\frac{M}{J_{nx}}\right)^n \Omega. \qquad (13.26)$$

Интегрирование последнего уравнения дает возможность получить величину прогиба, возникшего за счет ползучести материала балки.

Анализируя приведенное выше решение задачи о ползучести изогнутой балки, можно заключить, что оно полностью эквивалентно решению задачи об изгибе балки из материала, у которого диаграммы растяжения — сжатия могут быть аппроксимированы степенной функцией. Поэтому определение прогибов, возникших за счет ползучести в рассматриваемом случае, может быть произведено и при помощи интеграла Мора для определения перемещения брусьев, выполненных из материала, не подчиняющегося закону Гука [15]:

$$v^c = \int_l \varkappa^c M_1 \, dz, \qquad (13.27)$$

где $\varkappa^c$ — кривизна изогнутой оси балки, возникшая за счет ползучести материала; M — изгибающий момент в текущем сечении от единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения в той точке, перемещение которой определяется; интегрирование проводится по длине бруса.

Подставив соотношение (13.5) в выражение (13.27), получим

$$v^c = \int_l \left(\frac{M}{J_{nx}}\right)^n M_1 \Omega \, dz. \qquad (13.28)$$

Рассмотрим примеры определения линейных и угловых перемещений в балках в условиях установившейся ползучести.

эквивалентной балки от заданной нагрузки определяется формулой (13.31), а изгибающий момент в текущем сечении от единичного момента, приложенного в сечении B

$$M_1 = 1,$$

то по формуле (13.28) получаем

$$\theta_B^c = \frac{\Omega}{J_{nx}^n} \int_0^l (m - Xz)^n \, dz.$$

Выполняя интегрирование, имеем

$$\theta_B^c = \frac{\Omega}{(n+1) X J_{nx}^n} [m^{n+1} - (m - Xl)^{n+1}].$$

По полученной формуле после определения реакции опоры B может быть вычислен угол поворота сечения B для любого момента времени.

§ 85. Кручение бруса кольцевого поперечного сечения

При кручении бруса, поперечное сечение которого представляет собой круговое кольцо с наружным диаметром D и внутренним диаметром d, поперечные сечения бруса остаются плоскими, а радиусы прямолинейными. Поэтому в условиях установившейся ползучести угловая деформация γ^c, возникшая в результате ползучести материала в точке поперечного сечения на расстоянии r от центра, определяется формулой

$$\gamma^c = r\theta^c, \tag{13.34}$$

где θ^c — относительный угол закручивания, образовавшийся за счет ползучести материала бруса.

Интенсивности напряжений и деформаций ползучести для чистого сдвига согласно формулам (1.19) и (2.16)

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau; \quad \varepsilon_i^c = \frac{\gamma^c}{\sqrt{3}}. \tag{13.35}$$

Подставляя зависимости (13.35) в формулу (12.89), получаем

$$\gamma^c = 3^{\frac{n+1}{2}} \tau^n \Omega. \tag{13.36}$$

Сопоставляя выражения (13.36) и (13.34), устанавливаем закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении

$$\tau = \frac{1}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \left(\frac{\theta^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}. \tag{13.37}$$

Обратимся к определению относительного угла закручивания, возникающего за счет ползучести материала. Для этого составим выражение крутящего момента

$$M = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \tau r^2\, dr. \qquad (13.38)$$

Подставляя в этот интеграл касательное напряжение τ, по формуле (13.37) получим

$$M = \left(\frac{\theta^c}{3^{\frac{n+1}{2}} \Omega} \right)^{\frac{1}{n}} 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^{\frac{2n+1}{n}}\, dr. \qquad (13.39)$$

Выражение

$$J_{\text{пр}} = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^{\frac{2n+1}{n}}\, dr \qquad (13.40)$$

назовем обобщенным полярным моментом инерции кольцевого поперечного сечения.

После интегрирования получим

$$J_{\text{пр}} = \frac{\pi}{2^{\frac{2n+1}{n}}} \frac{n}{3n+1} D^{\frac{3n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right]. \qquad (13.41)$$

Для бруса круглого поперечного сечения величину обобщенного полярного момента инерции можно получить по формуле (13.41), полагая в ней $d = 0$. Тогда имеем

$$J_{\text{пр}} = \frac{\pi}{2^{\frac{2n+1}{n}}} \frac{n}{3n+1} D^{\frac{3n+1}{n}}. \qquad (13.42)$$

Из соотношения (13.39), с учетом выражения (13.40), находим величину относительного угла закручивания, возникшего за счет ползучести материала бруса

$$\theta^c = \left(\frac{M}{J_{\text{пр}}} \right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega. \qquad (13.43)$$

Если подставим выражение (13.43) в зависимость (13.37), то получим формулу для определения касательных напряжений

$$\tau = \frac{M r^{\frac{1}{n}}}{J_{\text{пр}}}. \qquad (13.44)$$

эквивалентной балки от заданной нагрузки определяется формулой (13.31), а изгибающий момент в текущем сечении от единичного момента, приложенного в сечении B

$$M_1 = 1,$$

то по формуле (13.28) получаем

$$\theta_B^c = \frac{\Omega}{J_{nx}^n} \int_0^l (m - Xz)^n \, dz.$$

Выполняя интегрирование, имеем

$$\theta_B^c = \frac{\Omega}{(n+1) X J_{nx}^n} \left[m^{n+1} - (m - Xl)^{n+1}\right].$$

По полученной формуле после определения реакции опоры B может быть вычислен угол поворота сечения B для любого момента времени.

§ 85. Кручение бруса кольцевого поперечного сечения

При кручении бруса, поперечное сечение которого представляет собой круговое кольцо с наружным диаметром D и внутренним диаметром d, поперечные сечения бруса остаются плоскими, а радиусы прямолинейными. Поэтому в условиях установившейся ползучести угловая деформация γ^c, возникшая в результате ползучести материала в точке поперечного сечения на расстоянии r от центра, определяется формулой

$$\gamma^c = r\theta^c, \tag{13.34}$$

где θ^c — относительный угол закручивания, образовавшийся за счет ползучести материала бруса.

Интенсивности напряжений и деформаций ползучести для чистого сдвига согласно формулам (1.19) и (2.16)

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau; \quad \varepsilon_i^c = \frac{\gamma^c}{\sqrt{3}}. \tag{13.35}$$

Подставляя зависимости (13.35) в формулу (12.89), получаем

$$\gamma^c = 3^{\frac{n+1}{2}} \tau^n \Omega. \tag{13.36}$$

Сопоставляя выражения (13.36) и (13.34), устанавливаем закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении

$$\tau = \frac{1}{3^{\frac{n+1}{2n}}} \left(\frac{\theta^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}. \tag{13.37}$$

Обратимся к определению относительного угла закручивания, возникающего за счет ползучести материала. Для этого составим выражение крутящего момента

$$M = 2\pi \int\limits_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \tau r^2 \, dr. \tag{13.38}$$

Подставляя в этот интеграл касательное напряжение τ, по формуле (13.37) получим

$$M = \left(\frac{\theta^c}{3^{\frac{n+1}{2}} \Omega} \right)^{\frac{1}{n}} 2\pi \int\limits_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^{\frac{2n+1}{n}} \, dr. \tag{13.39}$$

Выражение

$$J_{np} = 2\pi \int\limits_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^{\frac{2n+1}{n}} \, dr \tag{13.40}$$

назовем обобщенным полярным моментом инерции кольцевого поперечного сечения.

После интегрирования получим

$$J_{np} = \frac{\pi}{2^{\frac{2n+1}{n}}} \frac{n}{3n+1} D^{\frac{3n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right]. \tag{13.41}$$

Для бруса круглого поперечного сечения величину обобщенного полярного момента инерции можно получить по формуле (13.41), полагая в ней $d = 0$. Тогда имеем

$$J_{np} = \frac{\pi}{2^{\frac{2n+1}{n}}} \frac{n}{3n+1} D^{\frac{3n+1}{n}}. \tag{13.42}$$

Из соотношения (13.39), с учетом выражения (13.40), находим величину относительного угла закручивания, возникшего за счет ползучести материала бруса

$$\theta^c = \left(\frac{M}{J_{np}} \right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega. \tag{13.43}$$

Если подставим выражение (13.43) в зависимость (13.37), то получим формулу для определения касательных напряжений

$$\tau = \frac{M r^{\frac{1}{n}}}{J_{np}}. \tag{13.44}$$

Величина наибольшего касательного напряжения при $r = \frac{D}{2}$ по формуле (13.44)

$$\tau_{max} = \frac{M}{W_{np}}, \tag{13.45}$$

где W_{np} — обобщенный момент сопротивления кручению

$$W_{np} = \frac{\pi}{4}\frac{n}{3n+1}D^3\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{3n+1}{n}}\right]. \tag{13.46}$$

Для бруса круглого сечения

$$W_{np} = \frac{\pi}{4}\frac{n}{3n+1}D^3. \tag{13.47}$$

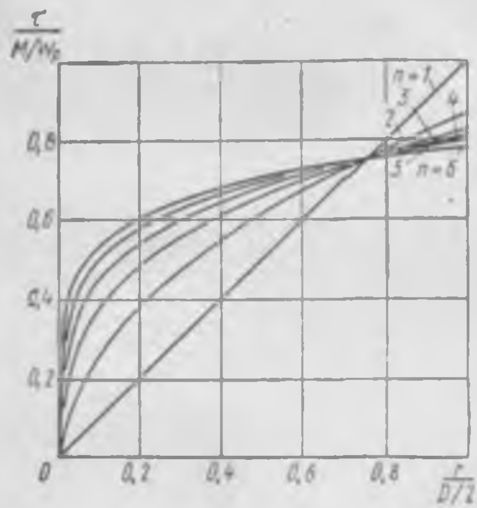


Рис. 13.10. Эпюры безразмерных касательных напряжений в поперечном сечении скрученного круглого бруса в условиях установившейся ползучести для различных значений показателя степени n

На рис. 13.10 представлены графики зависимости отношения $\frac{\tau}{M/W_{np}}$ от $\frac{r}{D/2}$ для бруса круглого поперечного сечения, построенные по формулам (13.44) и (13.42). Эти графики характеризуют вид эпюр распределения напряжений в поперечном сечении при установившейся ползучести. Из графиков на рис. 13.10 следует, что с увеличением показателя степени n наибольшее касательное напряжение уменьшается и распределение касательных напряжений по сечению становится все более и более равномерным.

§ 86. Кручение бруса некруглого поперечного сечения

Рассмотрим чистое кручение бруса, поперечное сечение которого ограничено односвязным контуром (рис. 13.11).

При чистом кручении бруса выполняются равенства (7.14), т. е. напряженное состояние всех точек бруса является чистым сдвигом.

Дифференциальные уравнения равновесия в рассматриваемой задаче такие же, как и в задаче, изложенной в § 45 [уравнение (7.15)]. С помощью соотношений (7.16) введем функцию напряжений Ф, которая для односвязного контура обращается в ноль на контуре. Крутящий момент связан с функцией напряжений Ф соотношением (7.17).

Зависимости компонентов перемещения u_x^c и u_y^c точек попере ного сечения, возникших в результате ползучести материала от с носительного угла закручивания за счет ползучести θ^c имеют т кой же вид, как и в пределах упругости [22]:

$$u_x^c = -\theta^c yz; \quad u_y^c = \theta^c xz. \qquad (13.4$$

Перемещение в направлении оси z—u_z^c, связанное с искажени плоскости поперечного сечения в случае бруса некруглого попере ного сечения, не равно нулю.

Зависимости угловых деформаций ползучести от компонентов перемещения, возникающего за счет ползучести материала, согласно формулам (2.1) имеют вид

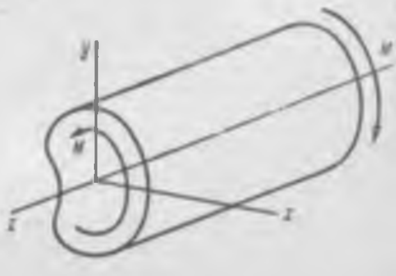


Рис. 13.11. Скрученный брус некру лого поперечного сечения

$$\gamma_{zx}^c = \frac{\partial u_x^c}{\partial z} + \frac{\partial u_z^c}{\partial x};$$

$$\gamma_{zy}^c = \frac{\partial u_y^c}{\partial z} + \frac{\partial u_z^c}{\partial y}.$$

Подставляя в эти выражения соотношения (13.48), устанавлива

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{zx}^c &= -\theta^c y + \frac{\partial u_z^c}{\partial x}; \\ \gamma_{zy}^c &= \theta^c x + \frac{\partial u_z^c}{\partial y}. \end{aligned}\right| \qquad (13.4$$

Продифференцируем первое из этих уравнений по y, а втор по x и из первого результата вычтем второй. Тогда получим услов совместности деформаций ползучести

$$\frac{\partial \gamma_{zx}^c}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}^c}{\partial x} + 2\theta^c = 0. \qquad (13.5$$

Зависимости компонентов деформаций ползучести от напряжени согласно формулам (12.88)

$$\gamma_{zx}^c = 3\frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i}\tau_{zx}; \quad \gamma_{zy}^c = 3\frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i}\tau_{zy}. \qquad (13.5$$

Подставим эти зависимости в условие совместности деформаци (13.50), используя соотношение (12.89). Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_i^{n-1}\tau_{zx}) - \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_i^{n-1}\tau_{zy}) + \frac{2}{3}\frac{\theta^c}{\Omega} = 0. \qquad (13.5$$

Отметим, что для рассматриваемой задачи интенсивность напр жений получаем из формулы (1.19), полагая в ней все компонент напряжений, кроме τ_{zx} и τ_{zy}, равными нулю

$$\sigma_i = \sqrt{3(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)}. \qquad (13.5$$

Величина наибольшего касательного напряжения при $r = \frac{D}{2}$ по формуле (13.44)

$$\tau_{max} = \frac{M}{W_{np}}, \qquad (13.45)$$

где W_{np} — обобщенный момент сопротивления кручению

$$W_{np} = \frac{\pi}{4}\frac{n}{3n+1}D^3\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{3n+1}{n}}\right]. \qquad (13.46)$$

Для бруса круглого сечения

$$W_{np} = \frac{\pi}{4}\frac{n}{3n+1}D^3. \qquad (13.47)$$

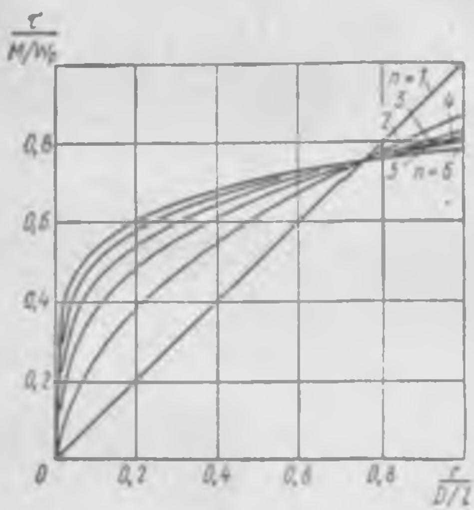


Рис. 13.10. Эпюры безразмерных касательных напряжений в поперечном сечении скрученного круглого бруса в условиях установившейся ползучести для различных значений показателя степени n

На рис. 13.10 представлены графики зависимости отношения $\frac{\tau}{M/W_{np}}$ от $\frac{r}{D/2}$ для бруса круглого поперечного сечения, построенные по формулам (13.44) и (13.42). Эти графики характеризуют вид эпюр распределения напряжений в поперечном сечении при установившейся ползучести. Из графиков на рис. 13.10 следует, что с увеличением показателя степени n наибольшее касательное напряжение уменьшается и распределение касательных напряжений по сечению становится все более и более равномерным.

§ 86. Кручение бруса некруглого поперечного сечения

Рассмотрим чистое кручение бруса, поперечное сечение которого ограничено односвязным контуром (рис. 13.11).

При чистом кручении бруса выполняются равенства (7.14), т. е. напряженное состояние всех точек бруса является чистым сдвигом.

Дифференциальные уравнения равновесия в рассматриваемой задаче такие же, как и в задаче, изложенной в § 45 [уравнение (7.15)]. С помощью соотношений (7.16) введем функцию напряжений Ф, которая для односвязного контура обращается в ноль на контуре. Крутящий момент связан с функцией напряжений Ф соотношением (7.17).

Зависимости компонентов перемещения u_x^c и u_y^c точек поперечного сечения, возникших в результате ползучести материала от относительного угла закручивания за счет ползучести θ^c имеют такой же вид, как и в пределах упругости [22]:

$$u_x^c = -\theta^c yz; \quad u_y^c = \theta^c xz. \tag{13.48}$$

Перемещение в направлении оси z—u_z^c, связанное с искажением плоскости поперечного сечения в случае бруса некруглого поперечного сечения, не равно нулю.

Зависимости угловых деформаций ползучести от компонентов перемещения, возникающего за счет ползучести материала, согласно формулам (2.1) имеют вид

$$\gamma_{zx}^c = \frac{\partial u_x^c}{\partial z} + \frac{\partial u_z^c}{\partial x};$$

$$\gamma_{zy}^c = \frac{\partial u_y^c}{\partial z} + \frac{\partial u_z^c}{\partial y}.$$

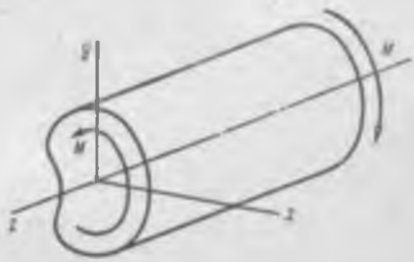


Рис. 13.11. Скрученный брус некруглого поперечного сечения

Подставляя в эти выражения соотношения (13.48), устанавливаем

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{zx}^c &= -\theta^c y + \frac{\partial u_z^c}{\partial x}; \\ \gamma_{zy}^c &= \theta^c x + \frac{\partial u_z^c}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{13.49}$$

Продифференцируем первое из этих уравнений по y, а второе по x и из первого результата вычтем второй. Тогда получим условие совместности деформаций ползучести

$$\frac{\partial \gamma_{zx}^c}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}^c}{\partial x} + 2\theta^c = 0. \tag{13.50}$$

Зависимости компонентов деформаций ползучести от напряжений согласно формулам (12.88)

$$\gamma_{zx}^c = 3\frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i}\tau_{zx}; \quad \gamma_{zy}^c = 3\frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i}\tau_{zy}. \tag{13.51}$$

Подставим эти зависимости в условие совместности деформаций (13.50), используя соотношение (12.89). Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_i^{n-1}\tau_{zx}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_i^{n-1}\tau_{zy}\right) + \frac{2}{3}\frac{\theta^c}{\Omega} = 0. \tag{13.52}$$

Отметим, что для рассматриваемой задачи интенсивность напряжений получаем из формулы (1.19), полагая в ней все компоненты напряжений, кроме τ_{zx} и τ_{zy}, равными нулю

$$\sigma_i = \sqrt{3\left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2\right)}. \tag{13.53}$$

Подставим эту величину в уравнение (13.52). Используя выражения компонентов напряжений через функцию напряжений (7.16), получаем дифференциальное уравнение для функции напряжений Φ в случае установившейся ползучести бруса некруглого поперечного сечения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\}+\frac{2\theta^c}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}=0. \qquad (13.54)$$

Если это уравнение при использовании граничного условия для функции напряжений на контуре (для односвязного контура $\Phi_{конт}=0$) будет решено, то затем при помощи формул (7.16) и (7.17) можно связать касательные напряжения и крутящий момент и определить зависимость относительного угла закручивания от крутящего момента.

Рис. 13.12. Поперечное сечение скрученного бруса в форме вытянутого прямоугольника

Решение уравнения (13.54) связано с большими трудностями. Оно может быть легко решено для поперечного сечения в форме тонкой полосы (рис. 13.12). В этом случае ($h \gg b$) можно приближенно принять

$$\tau_{zx}=0$$

и, следовательно, на основании соотношений (7.16)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0.$$

Тогда дифференциальное уравнение (13.54) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]=-\frac{2\theta^c}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}.$$

Проинтегрируем это уравнение, учитывая, что при $x=0$, $\tau_{zy}= =0$ $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0$. В результате получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\left(\frac{2\theta^c}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}|x|^{\frac{1}{n}-1}x.$$

Интегрируя еще раз, имеем

$$\Phi=C-\frac{n}{n+1}\left(\frac{2\theta^c}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}|x|^{\frac{n+1}{n}},$$

где C — постоянная интегрирования.

Последнюю можно получить из условия равенства нулю функции напряжений на контуре, а именно

при $x = b$ $\Phi = 0$.

Из этого условия находим

$$C = \frac{n}{n+1}\left(\frac{2\theta^c}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} b^{\frac{n+1}{n}}$$

и, следовательно,

$$\Phi = \frac{n}{n+1}\left(\frac{2\theta^c}{3^{\frac{n+1}{2}}\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\left(b^{\frac{n+1}{n}} - |x|^{\frac{n+1}{n}}\right). \tag{13.55}$$

Выражение для крутящего момента (7.17) в рассматриваемой задаче принимает вид

$$M = 8h\int_0^b \Phi\, dx.$$

Подставляя в него функцию напряжений по формуле (13.55), после интегрирования и преобразований получим

$$\theta^c = \left(\frac{M}{J_{nk}}\right)^n 3^{\frac{n+1}{2}}\Omega, \tag{13.56}$$

где жесткость при кручении

$$J_{nk} = \frac{n}{2n+1} 2h(2b)^{\frac{2n+1}{n}}. \tag{13.57}$$

Касательное напряжение определяем по второй формуле (7.16), используя соотношения (13.55) и (13.56). После преобразований получим

$$\tau_{zy} = 2^{\frac{1}{n}} \frac{M}{J_{nk}} |x|^{\frac{1}{n}-1} x. \tag{13.58}$$

Величину максимального касательного напряжения получаем, подставляя в эту формулу $x = b$. Тогда имеем

$$\tau_{zy\,\max} = \frac{M}{W_{nk}}, \tag{13.59}$$

где момент сопротивления кручению

$$W_{nk} = \frac{n}{2n+1} 2h(2b)^2. \tag{13.60}$$

Полученными результатами можно воспользоваться и для расчета бруса, поперечное сечение которого представляет собой тонкостенный открытый профиль в форме изогнутой полосы с постоянной

толщиной стенки (рис. 13.13) или состоящий из m отдельных полос (рис. 13.14).

В первом случае в выведенные выше формулы следует вместо $2b$ подставить толщину стенки профиля δ, а вместо $2h$ — длину средней линии l.

Во втором случае для получения расчетных формул можно приближенно считать, что отдельные полосы, составляющие профиль, поворачиваются на один и тот же угол.

Обозначим крутящий момент, воспринимаемый некоторой полосой, через M_i, а жесткость ее J_{nki}.

Рис. 13.13. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного незамкнутого профиля со стенкой постоянной толщины

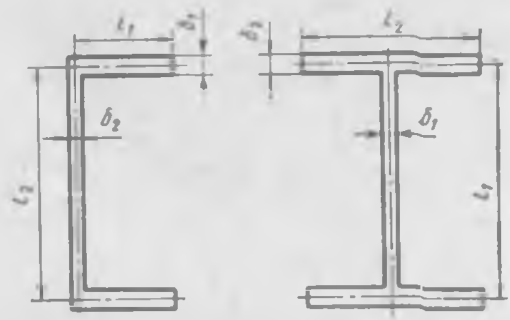


Рис. 13.14. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного открытого профиля, состоящего из отдельных полос

Согласно формуле (13.57)

$$J_{nki} = \frac{n}{2n+1} l_i \delta_i^{\frac{2n+1}{n}}, \tag{13.61}$$

где l_i и δ_i — длина и ширина i-ой полосы соответственно.

Приравнивая относительный угол закручивания профиля относительному углу закручивания i-ой полосы, по формуле (13.56) получим

$$\left(\frac{M}{J_{nk}}\right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega = \left(\frac{M_i}{J_{nki}}\right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega,$$

откуда

$$M_i = M \frac{J_{nki}}{J_{nk}}. \tag{13.62}$$

Просуммируем крутящие моменты на всех m полосах и приравняем полученную сумму моменту M. Тогда, принимая во внимание соотношение (13.62), получим

$$M = \sum_{i=1}^{m} M_i = \frac{M}{J_{nk}} \sum_{i=1}^{m} J_{nki}.$$

откуда на основании соотношения (13.61) имеем

$$J_{nk}=\frac{n}{2n+1}\sum_{i=1}^{m} l_i \delta_i^{\frac{2n+1}{n}}. \tag{13.63}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, относительный угол закручивания, возникающий за счет ползучести материала, находим по формуле (13.56). Жесткость J_{nk} в этой формуле определяется выражением (13.63).

Наибольшее касательное напряжение можно вычислить по формуле (13.59), причем согласно соотношению (13.58) момент сопротивления кручению

$$W_{nk}=\frac{J_{nk}}{\delta_{\max}^{\frac{1}{n}}}.$$

Несколько особый случай представляет собой брус, поперечное сечение которого — тонкостенный замкнутый профиль (рис. 13.15). Задача кручения такого бруса статически определима с точки зрения вычисления напряжений, и поэтому при постоянном во времени крутящем моменте напряжения во времени изменяться не будут. Таким образом, в рассматриваемом случае процесс ползучести является установившимся.

Как известно [21], касательное напряжение при кручении бруса, поперечное сечение которого представляет собой тонкостенный замкнутый профиль, определяют по формуле

$$\tau=\frac{M}{2f\delta}, \tag{13.64}$$

где δ — толщина стенки; f — площадь, ограниченная средней линией тонкостенного сечения.

Рассмотрим определение относительного угла закручивания бруса. За основу примем условие однозначности осевого смещения

$$\oint du_z^c=0. \tag{13.65}$$

Используя соотношение (13.49), получаем

$$du_z^c=\frac{\partial u_z^c}{\partial x}dx+\frac{\partial u_z^c}{\partial y}dy=\gamma_{zx}^c\,dx+\gamma_{zy}^c\,dy+\theta^c(y\,dx-x\,dy).$$

Преобразуем это выражение, используя формулы (13.51), (12.89) и (13.53), а также замечая, что $dx=ds\cos\alpha$; $dy=ds\sin\alpha$, где ds — длина элемента дуги средней линии контура, а α — угол между касательной к контуру и осью (рис. 13.16). Тогда получим

$$du_z^c=3^{\frac{n+1}{2}}\tau^{n-1}\Omega(\tau_{zx}\cos\alpha+\tau_{zy}\sin\alpha)\,ds+\theta^c(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\,ds,$$

где

$$\tau=\sqrt{\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2} \tag{13.66}$$

— полное касательное напряжение.

толщиной стенки (рис. 13.13) или состоящий из m отдельных полос (рис. 13.14).

В первом случае в выведенные выше формулы следует вместо $2b$ подставить толщину стенки профиля δ, а вместо $2h$ — длину средней линии l.

Во втором случае для получения расчетных формул можно приближенно считать, что отдельные полосы, составляющие профиль, поворачиваются на один и тот же угол.

Обозначим крутящий момент, воспринимаемый некоторой полосой, через M_i, а жесткость ее J_{nki}.

Рис. 13.13. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного незамкнутого профиля со стенкой постоянной толщины

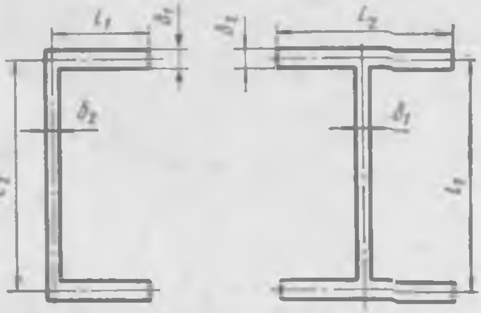


Рис. 13.14. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного открытого профиля, состоящего из отдельных полос

Согласно формуле (13.57)

$$J_{nki} = \frac{n}{2n+1} l_i \delta_i^{\frac{2n+1}{n}}, \qquad (13.61)$$

где l_i и δ_i — длина и ширина i-ой полосы соответственно.

Приравнивая относительный угол закручивания профиля относительному углу закручивания i-ой полосы, по формуле (13.56) получим

$$\left(\frac{M}{J_{nk}}\right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega = \left(\frac{M_i}{J_{nki}}\right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega,$$

откуда

$$M_i = M \frac{J_{nki}}{J_{nk}}. \qquad (13.62)$$

Просуммируем крутящие моменты на всех m полосах и приравняем полученную сумму моменту M. Тогда, принимая во внимание соотношение (13.62), получим

$$M = \sum_{i=1}^{m} M_i = \frac{M}{J_{nk}} \sum_{i=1}^{m} J_{nki},$$

откуда на основании соотношения (13.61) имеем

$$J_{nk} = \frac{n}{2n+1} \sum_{i=1}^{m} l_i \delta_i^{\frac{2n+1}{n}}. \tag{13.63}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, относительный угол закручивания, возникающий за счет ползучести материала, находим по формуле (13.56). Жесткость J_{nk} в этой формуле определяется выражением (13.63).

Наибольшее касательное напряжение можно вычислить по формуле (13.59), причем согласно соотношению (13.58) момент сопротивления кручению

$$W_{nk} = \frac{J_{nk}}{\delta_{max}^{\frac{1}{n}}}.$$

Несколько особый случай представляет собой брус, поперечное сечение которого — тонкостенный замкнутый профиль (рис. 13.15). Задача кручения такого бруса статически определима с точки зрения вычисления напряжений, и поэтому при постоянном во времени крутящем моменте напряжения во времени изменяться не будут. Таким образом, в рассматриваемом случае процесс ползучести является установившимся.

Как известно [21], касательное напряжение при кручении бруса, поперечное сечение которого представляет собой тонкостенный замкнутый профиль, определяют по формуле

$$\tau = \frac{M}{2f\delta}, \tag{13.64}$$

где δ — толщина стенки; f — площадь, ограниченная средней линией тонкостенного сечения.

Рассмотрим определение относительного угла закручивания бруса. За основу примем условие однозначности осевого смещения

$$\oint du_z^c = 0. \tag{13.65}$$

Используя соотношение (13.49), получаем

$$du_z^c = \frac{\partial u_z^c}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z^c}{\partial y} dy = \gamma_{zx}^c dx + \gamma_{zy}^c dy + \theta^c (y\, dx - x\, dy).$$

Преобразуем это выражение, используя формулы (13.51), (12.89) и (13.53), а также замечая, что $dx = ds \cos\alpha$; $dy = ds \sin\alpha$, где ds — длина элемента дуги средней линии контура, а α — угол между касательной к контуру и осью (рис. 13.16). Тогда получим

$$du_z^c = 3^{\frac{n+1}{2}} \tau^{n-1} \Omega (\tau_{zx} \cos\alpha + \tau_{zy} \sin\alpha)\, ds + \theta^c (y \cos\alpha - x \sin\alpha)\, ds,$$

где

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \tag{13.66}$$

— полное касательное напряжение.

толщиной стенки (рис. 13.13) или состоящий из m отдельных полос (рис. 13.14).

В первом случае в выведенные выше формулы следует вместо $2b$ подставить толщину стенки профиля δ, а вместо $2h$ — длину средней линии l.

Во втором случае для получения расчетных формул можно приближенно считать, что отдельные полосы, составляющие профиль, поворачиваются на один и тот же угол.

Обозначим крутящий момент, воспринимаемый некоторой полосой, через M_i, а жесткость ее J_{nki}.

Рис. 13.13. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного незамкнутого профиля со стенкой постоянной толщины

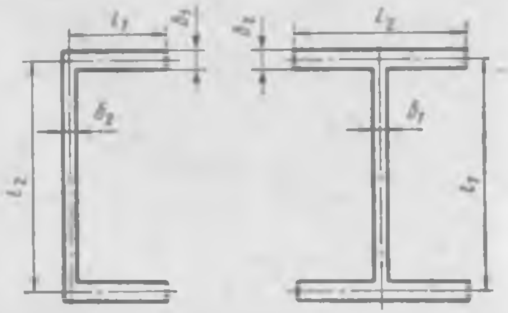


Рис. 13.14. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного открытого профиля, состоящего из отдельных полос

Согласно формуле (13.57)

$$J_{nki} = \frac{n}{2n+1} l_i \delta_i^{\frac{2n+1}{n}}, \qquad (13.61)$$

где l_i и δ_i — длина и ширина i-ой полосы соответственно.

Приравнивая относительный угол закручивания профиля относительному углу закручивания i-ой полосы, по формуле (13.55) получим

$$\left(\frac{M}{J_{nk}}\right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega = \left(\frac{M_i}{J_{nki}}\right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega,$$

откуда

$$M_i = M \frac{J_{nki}}{J_{nk}}. \qquad (13.62)$$

Просуммируем крутящие моменты на всех m полосах и приравняем полученную сумму моменту M. Тогда, принимая во внимание соотношение (13.62), получим

$$M = \sum_{i=1}^{m} M_i = \frac{M}{J_{nk}} \sum_{i=1}^{m} J_{nki},$$

откуда на основании соотношения (13.61) имеем

$$J_{nk}=\frac{n}{2n+1}\sum_{i=1}^{m} l_i\delta_i^{\frac{2n+1}{n}}. \qquad (13.63)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, относительный угол закручивания, возникающий за счет ползучести материала, находим по формуле (13.56). Жесткость J_{nk} в этой формуле определяется выражением (13.63).

Наибольшее касательное напряжение можно вычислить по формуле (13.59), причем согласно соотношению (13.58) момент сопротивления кручению

$$W_{nk}=\frac{J_{nk}}{\delta_{\max}^{\frac{1}{n}}}.$$

Несколько особый случай представляет собой брус, поперечное сечение которого — тонкостенный замкнутый профиль (рис. 13.15). Задача кручения такого бруса статически определима с точки зрения вычисления напряжений, и поэтому при постоянном во времени крутящем моменте напряжения во времени изменяться не будут. Таким образом, в рассматриваемом случае процесс ползучести является установившимся.

Как известно [21], касательное напряжение при кручении бруса, поперечное сечение которого представляет собой тонкостенный замкнутый профиль, определяют по формуле

$$\tau=\frac{M}{2f\delta}, \qquad (13.64)$$

где δ — толщина стенки; f — площадь, ограниченная средней линией тонкостенного сечения.

Рассмотрим определение относительного угла закручивания бруса. За основу примем условие однозначности осевого смещения

$$\oint du_z^c=0. \qquad (13.65)$$

Используя соотношение (13.49), получаем

$$du_z^c=\frac{\partial u_z^c}{\partial x}dx+\frac{\partial u_z^c}{\partial y}dy=\gamma_{zx}^c dx+\gamma_{zy}^c dy+\theta^c(y\,dx-x\,dy).$$

Преобразуем это выражение, используя формулы (13.51), (12.89) и (13.53), а также замечая, что $dx=ds\cos\alpha$; $dy=ds\sin\alpha$, где ds — длина элемента дуги средней линии контура, а α — угол между касательной к контуру и осью (рис. 13.16). Тогда получим

$$du_z^c=3^{\frac{n+1}{2}}\tau^{n-1}\Omega(\tau_{zx}\cos\alpha+\tau_{zy}\sin\alpha)\,ds+\theta^c(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\,ds,$$

где

$$\tau=\sqrt{\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2} \qquad (13.66)$$

— полное касательное напряжение.

толщиной стенки (рис. 13.13) или состоящий из m отдельных полос (рис. 13.14).

В первом случае в выведенные выше формулы следует вместо $2b$ подставить толщину стенки профиля δ, а вместо $2h$ — длину средней линии l.

Во втором случае для получения расчетных формул можно приближенно считать, что отдельные полосы, составляющие профиль, поворачиваются на один и тот же угол.

Обозначим крутящий момент, воспринимаемый некоторой полосой, через M_i, а жесткость ее J_{nki}.

Рис. 13.13. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного незамкнутого профиля со стенкой постоянной толщины

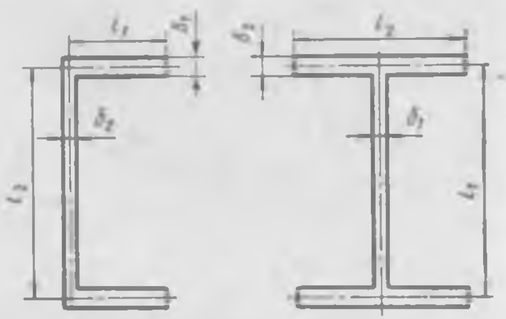


Рис. 13.14. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного открытого профиля, состоящего из отдельных полос

Согласно формуле (13.57)

$$J_{nki} = \frac{n}{2n+1} l_i \delta_i^{\frac{2n+1}{n}}, \tag{13.61}$$

где l_i и δ_i — длина и ширина i-ой полосы соответственно.

Приравнивая относительный угол закручивания профиля относительному углу закручивания i-ой полосы, по формуле (13.55) получим

$$\left(\frac{M}{J_{nk}}\right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega = \left(\frac{M_i}{J_{nki}}\right)^n 3^{\frac{n+1}{2}} \Omega,$$

откуда

$$M_i = M \frac{J_{nki}}{J_{nk}}. \tag{13.62}$$

Просуммируем крутящие моменты на всех m полосах и приравняем полученную сумму моменту M. Тогда, принимая во внимание соотношение (13.62), получим

$$M = \sum_{i=1}^{m} M_i = \frac{M}{J_{nk}} \sum_{i=1}^{m} J_{nki}.$$

откуда на основании соотношения (13.61) имеем

$$J_{nk}=\frac{n}{2n+1}\sum_{i=1}^{m}l_i\delta_i^{\frac{2n+1}{n}}. \tag{13.63}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, относительный угол закручивания, возникающий за счет ползучести материала, находим по формуле (13.56). Жесткость J_{nk} в этой формуле определяется выражением (13.63).

Наибольшее касательное напряжение можно вычислить по формуле (13.59), причем согласно соотношению (13.58) момент сопротивления кручению

$$W_{nk}=\frac{J_{nk}}{\delta_{max}^{\frac{1}{n}}}.$$

Несколько особый случай представляет собой брус, поперечное сечение которого — тонкостенный замкнутый профиль (рис. 13.15). Задача кручения такого бруса статически определима с точки зрения вычисления напряжений, и поэтому при постоянном во времени крутящем моменте напряжения во времени изменяться не будут. Таким образом, в рассматриваемом случае процесс ползучести является установившимся.

Как известно [21], касательное напряжение при кручении бруса, поперечное сечение которого представляет собой тонкостенный замкнутый профиль, определяют по формуле

$$\tau=\frac{M}{2f\delta}, \tag{13.64}$$

где δ — толщина стенки; f — площадь, ограниченная средней линией тонкостенного сечения.

Рассмотрим определение относительного угла закручивания бруса. За основу примем условие однозначности осевого смещения

$$\oint du_z^c=0. \tag{13.65}$$

Используя соотношение (13.49), получаем

$$du_z^c=\frac{\partial u_z^c}{\partial x}dx+\frac{\partial u_z^c}{\partial y}dy=\gamma_{zx}^c\,dx+\gamma_{zy}^c\,dy+\theta^c(y\,dx-x\,dy).$$

Преобразуем это выражение, используя формулы (13.51), (12.89) и (13.53), а также замечая, что $dx=ds\cos\alpha$; $dy=ds\sin\alpha$, где ds — длина элемента дуги средней линии контура, а α — угол между касательной к контуру и осью (рис. 13.16). Тогда получим

$$du_z^c=3^{\frac{n+1}{2}}\tau^{n-1}\Omega(\tau_{zx}\cos\alpha+\tau_{zy}\sin\alpha)\,ds+\theta^c(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\,ds,$$

где

$$\tau=\sqrt{\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2} \tag{13.66}$$

— полное касательное напряжение.

Как следует из рис. 13.16

$$\tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{zy}\sin\alpha = \tau,$$
$$-y\cos\alpha + x\sin\alpha = r,$$

где r — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на направление касательного напряжения. Следовательно,

$$du_z^c = 3^{\frac{n+1}{2}}\tau^n\Omega\,ds - \theta^c r\,ds.$$

Рис. 13.15. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного замкнутого профиля

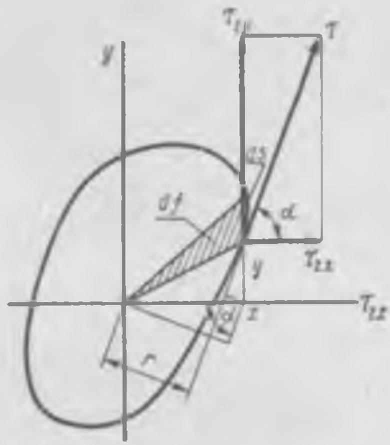


Рис. 13.16. К выводу формулы для угла закручивания бруса, поперечное сечение которого имеет форму тонкостенного замкнутого профиля

Поскольку

$$r\,ds = 2df,$$

где df — площадь элемента, поштрихованного на рис. 13.16, имеем

$$du_z^c = 3^{\frac{n+1}{2}}\tau^n\Omega\,ds - 2\theta^c\,df.$$

Подставим это выражение в формулу (13.65). Используя формулу (13.64), заключаем, что выражение для относительного угла закручивания за счет ползучести материала может быть приведено к виду (13.56), где жесткость при кручении определяется формулой

$$J_{nk} = 2^{\frac{n+1}{n}}\frac{f^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\oint\frac{ds}{\delta^n}\right)^{\frac{1}{n}}}. \qquad (13.67)$$

В более сложных случаях для решения задач кручения некруглых брусьев может быть использовано выведенное в § 45 вариационное уравнение кручения бруса некруглого сечения при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями (7.20).

Угловая деформация ползучести связана с касательным напряжением соотношением (13.36), что позволяет представить уравнение (7.20) в виде

$$\delta I = 0, \tag{13.68}$$

где

$$I = \int_F \left(\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \Omega \tau^{n+1} - 2\theta^c \Phi \right) dF.$$

Используя уравнения (13.66) и (7.16), имеем

$$I = \int_F \left\{ \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \Omega \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} - 2\theta^c \Phi \right\} dF. \tag{13.69}$$

Вариационное уравнение (13.68) может быть решено методом Ритца. При этом функция Ф выбирается в виде

$$\Phi = \sum_{i=1} C_i \Phi_i. \tag{13.70}$$

Все функции Φ_i для односвязного контура обращаются в ноль на контуре. Коэффициенты C_i определяются из условий равенства нулю вариации интеграла (13.68)

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0. \tag{13.71}$$

В. Д. Вылекжаниным [1] дана верхняя и нижняя оценка жесткости при кручении стержня произвольного поперечного сечения. Им установлено, что

$$\chi J_{np} \leqslant J_{nk} \leqslant J_{np},$$

где

$$J_{np} = \frac{2nF^{\frac{3n+1}{2n}}}{(3n+1)\,\pi^{\frac{n+1}{2n}}}$$

— обобщенный полярный момент инерции стержня круглого поперечного сечения, площадь которого F равна площади заданного стержня:

$$\chi = 1 - \left[\lambda^{\frac{3n+1}{n}} + \frac{3n+1}{n} \left(\lambda^2 - \lambda^{\frac{3n+1}{n}} \right) \right];$$

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{4\pi F}{L^2}},$$

L — периметр поперечного сечения.

Как следует из рис. 13.16

$$\tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{zy}\sin\alpha = \tau,$$

$$-y\cos\alpha + x\sin\alpha = r,$$

где r — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на направление касательного напряжения. Следовательно,

$$du_z^c = 3^{\frac{n+1}{2}}\tau^n\Omega\,ds - \theta^c r\,ds.$$

Рис. 13.15. Поперечное сечение скрученного бруса в форме тонкостенного замкнутого профиля

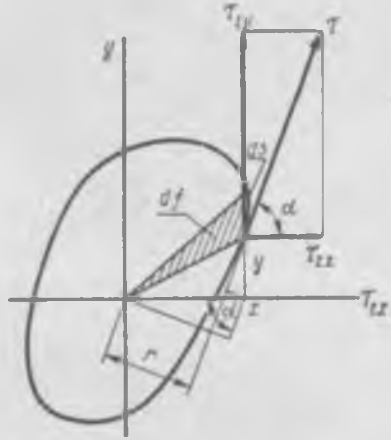


Рис. 13.16. К выводу формулы для угла закручивания бруса, поперечное сечение которого имеет форму тонкостенного замкнутого профиля

Поскольку

$$r\,ds = 2df,$$

где df — площадь элемента, поштрихованного на рис. 13.16, имеем

$$du_z^c = 3^{\frac{n+1}{2}}\tau^n\Omega\,ds - 2\theta^c\,df.$$

Подставим это выражение в формулу (13.65). Используя формулу (13.64), заключаем, что выражение для относительного угла закручивания за счет ползучести материала может быть приведено к виду (13.56), где жесткость при кручении определяется формулой

$$J_{nk} = 2^{\frac{n+1}{n}}\frac{f^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\oint\frac{ds}{\delta^n}\right)^{\frac{1}{n}}}. \qquad (13.67)$$

В более сложных случаях для решения задач кручения некруглых брусьев может быть использовано выведенное в § 45 вариационное уравнение кручения бруса некруглого сечения при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями (7.20).

Угловая деформация ползучести связана с касательным напряжением соотношением (13.36), что позволяет представить уравнение (7.20) в виде

$$\delta I = 0, \tag{13.68}$$

где

$$I = \int\limits_{F} \left(\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \Omega \tau^{n+1} - 2\theta^c \Phi \right) dF.$$

Используя уравнения (13.66) и (7.16), имеем

$$I = \int\limits_{F} \left\{ \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \Omega \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} - 2\theta^c \Phi \right\} dF. \tag{13.69}$$

Вариационное уравнение (13.68) может быть решено методом Ритца. При этом функция Φ выбирается в виде

$$\Phi = \sum_{i=1} C_i \Phi_i. \tag{13.70}$$

Все функции Φ_i для односвязного контура обращаются в ноль на контуре. Коэффициенты C_i определяются из условий равенства нулю вариации интеграла (13.68)

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0. \tag{13.71}$$

В. Д. Вылекжаниным [1] дана верхняя и нижняя оценка жесткости при кручении стержня произвольного поперечного сечения. Им установлено, что

$$\chi J_{np} \leqslant J_{nk} \leqslant J_{np},$$

где

$$J_{np} = \frac{2nF^{\frac{3n+1}{2n}}}{(3n+1)\,\pi^{\frac{n+1}{2n}}}$$

— обобщенный полярный момент инерции стержня круглого поперечного сечения, площадь которого F равна площади заданного стержня:

$$\chi = 1 - \left[\lambda^{\frac{3n+1}{n}} + \frac{3n+1}{n} \left(\lambda^2 - \lambda^{\frac{3n+1}{n}} \right) \right];$$

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{4\pi F}{L^2}},$$

L — периметр поперечного сечения.

§ 87. Тонкостенные цилиндрические трубы

Выше, в § 79, при изложении результатов экспериментальной проверки теорий ползучести были рассмотрены частные случаи нагружения тонкостенных цилиндрических труб в условиях ползучести.

Разберем теперь более общий случай нагружения тонкостенной цилиндрической трубы со средним диаметром D, толщиной стенки h, внутренним давлением p, осевой силой N, которую будем считать растягивающей, и крутящим моментом M (рис. 13.17). Напряженное состояние такой трубы двухосное и однородное.

В рассматриваемом случае задача вычисления напряжений является статически определимой, так как напряжения подсчитывают из одних уравнений статики. Поэтому при постоянных во времени внутренних силовых факторах напряжения изменяться не будут, т. е. процесс ползучести будет установившимся.

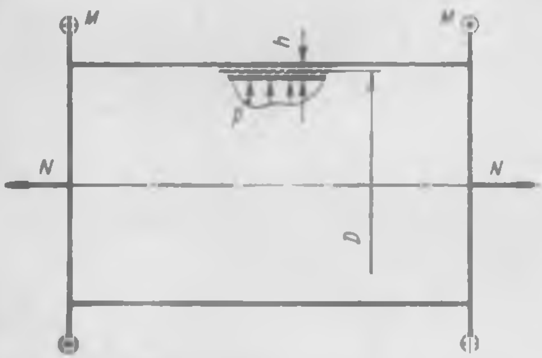


Рис. 13.17. Тонкостенная цилиндрическая труба, нагруженная внутренним давлением p, осевой растягивающей силой N и крутящим моментом M

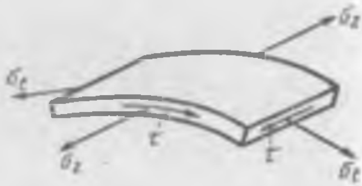


Рис. 13.18. Напряженное состояние элемента тонкостенной цилиндрической трубы, изображенной на рис. 13.17

Компоненты напряжений определяются по общеизвестным формулам сопротивления материалов [21]. Нормальные осевое σ_z и окружное σ_t напряжения

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi D h}, \quad \sigma_t = \frac{pD}{2h}. \tag{13.72}$$

Касательное напряжение подсчитываем по формуле

$$\tau = \frac{2M}{\pi D^2 h}. \tag{13.73}$$

Модель напряженного состояния представлена на рис. 13.18.

Интенсивность напряжений и среднее нормальное напряжение для рассматриваемой задачи получаем по формулам (1.19) и (1.5)

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_z^2 - \sigma_z\sigma_t + \sigma_t^2 + 3\tau^2}; \tag{13.74}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_z + \sigma_t}{3}. \tag{13.75}$$

Зависимость компонентов деформаций ползучести от компонентов напряжений устанавливаем по формулам (12.88), используя соотношения (12.89), (13.74) и (13.75). В результате получаем

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_t^c &= \frac{1}{2}\left(\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau^2\right)^{\frac{n-1}{2}}(2\sigma_t - \sigma_z)\,\Omega,\\
\varepsilon_z^c &= \frac{1}{2}\left(\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau^2\right)^{\frac{n-1}{2}}(2\sigma_z - \sigma_t)\,\Omega,\\
\gamma^c &= 3\left(\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\tau\Omega.
\end{aligned}\right\} \quad (13.76)$$

Располагая величинами деформаций ползучести, можно определить перемещения, образовавшиеся в результате ползучести материала.

Удлинение трубы длиной l:

$$\Delta l^c = \varepsilon_z^c l.$$

Приращение среднего диаметра можно определить из зависимости

$$\Delta D^c = \varepsilon_t^c D.$$

Угол закручивания трубы при условии, что крутящий момент не меняется по длине

$$\varphi^c = \frac{2\gamma^c}{D}\,l.$$

Если тонкостенная труба, имеющая днища, подвергается воздействию только внутреннего давления p и крутящего момента M, то

$$N = p\,\frac{\pi D^2}{4}$$

и согласно формулам (13.72)

$$\sigma_z = \frac{\sigma_t}{2}.$$

Сопоставляя это выражение со второй формулой (13.76), заключаем, что в этом случае деформации в осевом направлении отсутствуют.

В работе [18] дано решение задачи установившейся ползучести тонкостенной трубы, нагруженной внутренним давлением, изгибающим и крутящим моментами и осевой силой.

§ 88. Толстостенные трубы

Рассмотрим толстостенную трубу с днищами, нагруженную внутренним давлением p и осевой силой N (см. рис. 6.1).

Обозначим внутренний радиус трубы через r_1, а наружный радиус r_2.

Примем, что осевая деформация ползучести трубы

$$\varepsilon_z^c = 0. \tag{13.77}$$

Как будет показано далее, так же, как и в расчете толстостенных труб за пределами упругости (см. § 32), это справедливо в том случае, когда осевая сила возникает только за счет давления на днища.

На основании зависимостей, приведенных в § 32, в рассматриваемом случае установившейся ползучести окружная ε_t^c и радиальная ε_r^c деформации ползучести в некоторой точке трубы на расстоянии r от ее центра могут быть выражены через радиальное смещение u^c в этой точке, возникающее за счет ползучести материала, следующим образом:

$$\varepsilon_t^c = \frac{u^c}{r}; \quad \varepsilon_r^c = \frac{\partial u^c}{\partial r}. \tag{13.78}$$

Условие несжимаемости материала имеет вид

$$\varepsilon_t^c + \varepsilon_r^c + \varepsilon_z^c = 0. \tag{13.79}$$

Подставляя выражения (13.77) и (13.78) в соотношение (13.79), получаем

$$\frac{\partial u^c}{\partial r} = -\frac{u^c}{r}.$$

Интегрируя это уравнение по радиусу, можно установить закон изменения по радиусу радиального перемещения, возникшего за счет ползучести материала трубы

$$u^c = \frac{C}{r}, \tag{13.80}$$

где C — некоторая функция времени.

Подставим теперь выражение (13.80) в соотношения (13.78). Тогда

$$\varepsilon_t^c = \frac{C}{r^2}; \quad \varepsilon_r^c = -\frac{C}{r^2}. \tag{13.81}$$

Интенсивность деформаций ползучести в рассматриваемой задаче, согласно формулам (2.18) и (13.77), запишем следующим образом:

$$\varepsilon_i^c = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_t^c)^2 + \varepsilon_t^c\varepsilon_r^c + (\varepsilon_r^c)^2}. \tag{13.82}$$

Подставляя в уравнение (13.82) выражения (13.81), имеем

$$\varepsilon_i^c = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{C}{r^2}. \tag{13.83}$$

Зависимости компонентов напряжений от компонентов деформаций ползучести для рассматриваемой задачи, согласно формулам (12.88), определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3e_i^c}\varepsilon_t^c; \\ \sigma_r - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3e_i^c}\varepsilon_r^c; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3e_i^c}\varepsilon_z^c. \end{aligned}\right| \tag{13.84}$$

Из формул (13.84), учитывая выражение (13.77), получаем

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_r &= \frac{2\sigma_i}{3e_i^c}(\varepsilon_t^c - \varepsilon_r^c); \\ \sigma_z - \sigma_r &= -\frac{2\sigma_i}{3e_i^c}\varepsilon_r^c. \end{aligned}\right| \tag{13.85}$$

Преобразуем теперь выражения (13.85) при помощи соотношений (12.89), (13.83) и (13.81).

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_r &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}; \\ \sigma_z - \sigma_r &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}. \end{aligned}\right| \tag{13.86}$$

Подставляя первое соотношение (13.86) в дифференциальное уравнение равновесия элемента трубы (6.5), имеем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{r^{\frac{n+1}{n}}}.$$

Проинтегрируем это уравнение по радиусу, тогда

$$\sigma_r = C_1 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\frac{n}{2}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}. \tag{13.87}$$

Используя краевые условия:

при $r = r_1$ $\sigma_r = -p$, при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$, из соотношения (13.87) получаем

$$\sigma_r = -p + \frac{n}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{r_1^{2/n}} - \frac{1}{r^{2/n}}\right), \qquad (13.88)$$

$$p = \frac{n}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} r_1^{\frac{2}{n}}}. \qquad (13.89)$$

Из выражения (13.89) следует, что

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n}\,\frac{p r_2^{\frac{2}{n}} r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}. \qquad (13.90)$$

Подставим соотношения (13.90) в уравнение (13.88). Тогда, используя выражение (13.89), получим формулу для радиального напряжения

$$\sigma_r = \frac{p r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}\left(1 - \frac{r_2^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}}\right). \qquad (13.91)$$

Формулы для окружного и осевого напряжений выводим из выражений (13.86), используя соотношения (13.90) и (13.88):

$$\sigma_t = \frac{p r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}\left(1 + \frac{2-n}{n}\,\frac{r_2^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}}\right); \qquad (13.92)$$

$$\sigma_z = \frac{p r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}\left(1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{r_2^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}}\right). \qquad (13.93)$$

На рис. 13.19 представлены эпюры напряжений в толстостенной трубе, подверженной воздействию внутреннего давления. При этом принято, что отношение внутреннего радиуса трубы к наружному $\frac{r_1}{r_2} = 0{,}5$, а величина показателя степени $n = 3$. Эпюры окружных напряжений при установившейся ползучести и в пределах упругости различны. При установившейся ползучести наибольшее окружное напряжение возникает в точках наружного контура, а не в точках внутреннего контура, как в пределах упругости.

Определим радиальное перемещение, возникающее за счет ползучести материала трубы. Из формулы (13.90) имеем

$$C = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2n^n} p^n \frac{r_2^2 r_1^2}{\left(r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}\right)^n} \Omega.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (13.80), получаем

$$u^c = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2n^n} p^n \frac{r_2^2 r_1^2}{\left(r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}\right)^n r} \Omega. \tag{13.94}$$

Докажем теперь, что осевая деформация трубы равна нулю в том случае, когда продольная сила возникает только за счет давления на днища.

Подставляя в формулу (6.97) соотношение (13.93), после интегрирования и преобразований получаем выражение (6.28), что и подтверждает сказанное.

В работах [19, 20] даны решения задач установившейся ползучести толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и изгибающим моментом, а также внутренним давлением и крутящим моментом.

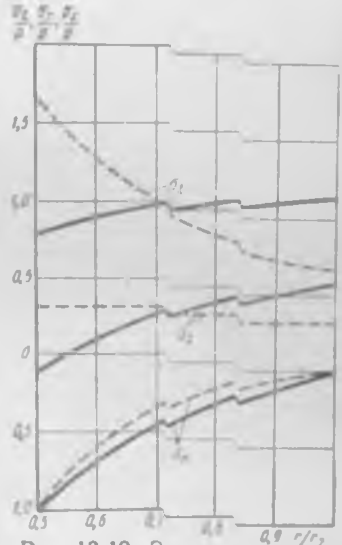


Рис. 13.19. Эпюры напряжений в толстостенной трубе, нагруженной внутренним давлением при установившейся ползучести (сплошные линии) и в пределах упругости (штриховые линии)

§ 89. Вращающиеся диски

Как уже отмечалось в § 81, решение задач установившейся ползучести эквивалентно исследованию пластического состояния при заданной зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций. Поэтому расчет диска на установившуюся ползучесть может быть выполнен, например, методом переменных параметров упругости (см. § 40).

Ниже изложено решение задачи установившейся ползучести вращающегося с постоянной угловой скоростью ω равномерно нагретого диска переменной толщины при использовании степенной зависимости интенсивности деформации ползучести от интенсивности напряжения (12.89). В решении использован метод последовательных приближений.

Дифференциальное уравнение движения элемента диска переменной толщины имеет вид [8]

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r h) - \sigma_t h + \frac{\gamma \omega^2 h r^2}{g} = 0,$$

где γ — удельный вес материала диска.

получаем

$$\sigma_r = -p + \frac{n}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{r_1^{2/n}} - \frac{1}{r^{2/n}}\right), \tag{13.88}$$

$$p = \frac{n}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} r_1^{\frac{2}{n}}}. \tag{13.89}$$

Из выражения (13.89) следует, что

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n}\frac{p r_2^{\frac{2}{n}} r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}. \tag{13.90}$$

Подставим соотношения (13.90) в уравнение (13.88). Тогда, используя выражение (13.89), получим формулу для радиального напряжения

$$\sigma_r = \frac{p r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}\left(1 - \frac{r_2^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}}\right). \tag{13.91}$$

Формулы для окружного и осевого напряжений выводим из выражений (13.86), используя соотношения (13.90) и (13.88):

$$\sigma_t = \frac{p r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}\left(1 + \frac{2-n}{n}\frac{r_2^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}}\right); \tag{13.92}$$

$$\sigma_z = \frac{p r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}\left(1 - \frac{n-1}{n}\frac{r_2^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}}\right). \tag{13.93}$$

На рис. 13.19 представлены эпюры напряжений в толстостенной трубе, подверженной воздействию внутреннего давления. При этом принято, что отношение внутреннего радиуса трубы к наружному $\frac{r_1}{r_2} = 0{,}5$, а величина показателя степени $n = 3$. Эпюры окружных напряжений при установившейся ползучести и в пределах упругости различны. При установившейся ползучести наибольшее окружное напряжение возникает в точках наружного контура, а не в точках внутреннего контура, как в пределах упругости.

Определим радиальное перемещение, возникающее за счет ползучести материала трубы. Из формулы (13.90) имеем

$$C = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2n^n} p^n \frac{r_2^2 r_1^2}{\left(r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}\right)^n} \Omega.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (13.80), получаем

$$u^c = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2n^n} p^n \frac{r_2^2 r_1^2}{\left(r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}\right)^n r} \Omega. \tag{13.94}$$

Докажем теперь, что осевая деформация трубы равна нулю в том случае, когда продольная сила возникает только за счет давления на днища.

Подставляя в формулу (6.97) соотношение (13.93), после интегрирования и преобразований получаем выражение (6.28), что и подтверждает сказанное.

В работах [19, 20] даны решения задач установившейся ползучести толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением и изгибающим моментом, а также внутренним давлением и крутящим моментом.

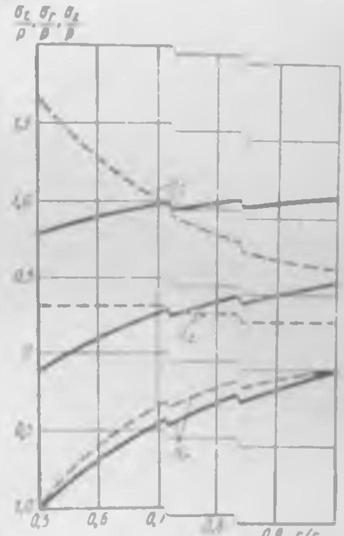


Рис. 13.19. Эпюры напряжений в толстостенной трубе, нагруженной внутренним давлением при установившейся ползучести (сплошные линии) и в пределах упругости (штриховые линии)

§ 89. Вращающиеся диски

Как уже отмечалось в § 81, решение задач установившейся ползучести эквивалентно исследованию пластического состояния при заданной зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций. Поэтому расчет диска на установившуюся ползучесть может быть выполнен, например, методом переменных параметров упругости (см. § 40).

Ниже изложено решение задачи установившейся ползучести вращающегося с постоянной угловой скоростью ω равномерно нагретого диска переменной толщины при использовании степенной зависимости интенсивности деформации ползучести от интенсивности напряжения (12.89). В решении использован метод последовательных приближений.

Дифференциальное уравнение движения элемента диска переменной толщины имеет вид [8]

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r h) - \sigma_t h + \frac{\gamma \omega^2 h r^2}{g} = 0,$$

где γ — удельный вес материала диска.

Проинтегрируем его в пределах от r_1 до r, учитывая, что на внутреннем контуре при $r = r_1$ $\sigma_r = -p_1$. Тогда получим

$$\sigma_r rh + p_1 r_1 h_1 - \int_{r_1}^{r} \sigma_t h\, dr + \Phi = 0, \tag{13.95}$$

где

$$\Phi = \frac{\gamma\omega^2}{g} \int_{r_1}^{r} hr^2\, dr. \tag{13.96}$$

Отметим, что при $r = r_1$

$$\Phi = 0. \tag{13.97}$$

Интеграл в формуле (13.96) представляет собой момент инерции части радиального сечения диска относительно его оси.

Полагая в уравнении (13.95) $r = r_2$ и учитывая, что на внешнем контуре при $r = r_2$ $\sigma_r = p_2$, получаем

$$p_2 r_2 h_2 + p_1 r_1 h_1 - \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t h dr + \Phi_2 = 0, \tag{13.98}$$

где Φ_2 — значение функции Φ на внешнем контуре.

Из уравнения (13.35) имеем

$$\sigma_r = \frac{1}{rh}\left(-p_1 r_1 h_1 + \int_{r_1}^{r} \sigma_t h\, dr - \Phi\right). \tag{13.99}$$

Перейдем к рассмотрению деформации. Как и в предыдущем параграфе, окружная и радиальная деформации ползучести в некоторой точке диска на расстоянии r от центра могут быть выражены через радиальное смещение u^c в этой точке, возникающее за счет ползучести материала, соотношениями (13.78).

Исключая из выражений (13.78) радиальное перемещение u^c, получим условие совместности деформаций в виде

$$r\frac{\partial \varepsilon_t^c}{\partial r} + \varepsilon_t^c - \varepsilon_r^c = 0. \tag{13.100}$$

Зависимости компонентов деформаций ползучести от компонентов напряжения определяются формулами (12.88). Преобразуя эти уравнения для рассматриваемого частного случая плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$), получаем

$$\varepsilon_t^c = \frac{\chi}{2}(2\sigma_t - \sigma_r),\ \varepsilon_r^c = \frac{\chi}{2}(2\sigma_r - \sigma_t), \tag{13.101}$$

где

$$\chi = \frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i}, \tag{13.102}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_r + \sigma_r^2}. \tag{13.103}$$

Из выражения (13.102), используя соотношения (12.89) и (13.103), получаем

$$\chi = \sigma_i^{n-1}\Omega = \left(\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_r + \sigma_r^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\Omega. \qquad (13.104)$$

Подставляя зависимости (13.101) в уравнение (13.100), имеем

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left[\chi\left(2\sigma_t - \sigma_r\right)\right] + 3\chi\left(\sigma_t - \sigma_r\right) = 0.$$

Поделим каждый член этого равенства на $\chi(2\sigma_t - \sigma_r)$. Тогда получим

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left[\chi\left(2\sigma_t - \sigma_r\right)\right]}{\chi\left(2\sigma_t - \sigma_r\right)} = -\frac{3}{r}\,\frac{1-\beta}{2-\beta}, \qquad (13.105)$$

где

$$\beta = \frac{\sigma_r}{\sigma_t}. \qquad (13.106)$$

Интегрируя уравнение (13.105), устанавливаем, что

$$\ln\left[\chi\left(2\sigma_t - \sigma_r\right)\right] - \ln C = -3\int_{r_1}^{r}\frac{1-\beta}{2-\beta}\,\frac{dr}{r}$$

и, следовательно,

$$\chi\left(2\sigma_t - \sigma_r\right) = C\exp\left(-3\int_{r_1}^{r}\frac{1-\beta}{2-\beta}\,\frac{dr}{r}\right),$$

где C — некоторая функция времени.

Подставляя в это выражение соотношение (13.104) и используя обозначение (13.106), имеем

$$\sigma_t^n\left(1 - \beta + \beta^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(2 - \beta\right)\Omega = C\exp\left(-3\int_{r_1}^{r}\frac{1-\beta}{2-\beta}\,\frac{dr}{r}\right),$$

откуда

$$\sigma_t = \left(\frac{C}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}}\eta, \qquad (13.107)$$

где

$$\eta = \left[\frac{\exp\left(-3\int_{r_1}^{r}\frac{1-\beta}{2-\beta}\,\frac{dr}{r}\right)}{\left(1 - \beta + \beta^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(2 - \beta\right)}\right]^{\frac{1}{n}}. \qquad (13.108)$$

Для диска без отверстия в центральной точке при $r = 0$ $\sigma_t = \sigma_r$. Поэтому согласно выражению (13.106) в центральной точке при $r = 0$ $\beta = 1$. В связи с этим для центральной точки подынтегральная функция в интеграле, входящем в выражение (13.108), обращается в неопределенность. Можно показать после раскрытия неопределенности, что она равна нулю, т. е.

$$\lim_{r\to 0}\frac{1-\beta}{2-\beta}\,\frac{1}{r}=0.$$

Далее из соотношения (13.108) следует, что в диске без отверстия для центральной точки прн $r=0$ $\eta=1$.

Для определения функции времени $C^{\frac{1}{n}}$ в формуле (13.107) подставим окружное напряжение по формуле (13.107) в уравнение (13.98). После преобразований получим

$$C^{\frac{1}{n}}=\frac{p_2r_2h_2+p_1r_1h_1+\Phi_2}{\int\limits_{r_1}^{r_2}h\eta\,dr}\,\Omega^{\frac{1}{n}}$$

и, следовательно, на основании соотношения (13.107)

$$\sigma_t=\frac{p_2r_2h_2+p_1r_1h_1+\Phi_2}{\int\limits_{r_1}^{r_2}h\eta\,dr}\,\eta. \qquad (13.109)$$

Подставляя выражение (13.109) в интегральное уравнение равновесия (13.99), получаем

$$\sigma_r=\frac{1}{rh}\left(-p_1r_1h_1+\frac{p_2r_2h_2+p_1r_1h_1+\Phi_2}{\int\limits_{r_1}^{r_2}h\eta\,dr}\int\limits_{r_1}^{r}h\eta\,dr-\Phi\right). \qquad (13.110)$$

Выясним, что дают формулы (13.109) и (13.110) в центральной точке диска без отверстия. Полагая в формуле (13.109) $r_1=0$ и $r=0$, используя соотношение (13.108), имеем

$$\sigma_{t_1}=\frac{p_2r_2h_2+\Phi_2}{\int\limits_{0}^{r_2}h\eta\,dr}. \qquad (13.111)$$

Подставляя в формулу (13.110) $r=0$ и $r_1=0$, раскрывая неопределенность и используя соотношение (13.108), получаем

$$\sigma_{r_1}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{rh}\left(\frac{p_2r_2h_2+\Phi_2}{\int\limits_{0}^{r_2}h\eta\,dr}\int\limits_{0}^{r}h\eta\,dr\right)=$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{p_2r_2h_2+\Phi_2}{\int\limits_{0}^{r_2}h\eta\,dr}h\eta\right)=\frac{p_2r_2h_2+\Phi_2}{\int\limits_{0}^{r_2}h\eta\,dr}. \qquad (13.112)$$

Сопоставляя выражения (13.111) и (13.112), заключаем, что в центральной точке диска без отверстия $\sigma_{t_1} = \sigma_{r_1}$; это, как очевидно, и должно иметь место.

Уравнения (13.109) и (13.110) являются основными уравнениями расчета диска при установившейся ползучести. По ним определяются напряжения. После этого может быть подсчитано радиальное перемещение, возникшее за счет ползучести материала диска. Из первой формулы (13.78) имеем

$$u^c = \varepsilon_t^c r.$$

Подставим в это соотношение окружную деформацию ползучести по формуле (13.101), используя при этом выражение (13.104). Тогда получим

$$u^c = \frac{1}{2}\left(\sigma_t^2 - \sigma_t\sigma_r + \sigma_r^2\right)^{\frac{n-1}{2}}(2\sigma_t - \sigma_r)\,\Omega r. \qquad (13.113)$$

Уравнения (13.109) и (13.110) будем решать по методу последовательных приближений. В исходном нулевом приближении примем, что напряжения распределяются таким же образом, как и в пределах упругости; такой выбор нулевого приближения обеспечивает достаточно быструю сходимость процесса.

После подсчета напряжений в нулевом приближении из соотношения (13.106) определим величину β. Затем по формуле (13.108) подсчитаем функцию η. После этого с помощью выражений (13.109) и (13.110) вычислим окружное и радиальное напряжения в первом приближении.

В дисках без центрального отверстия очень часто на большей части радиуса (от центра до обода) окружное и радиальное напряжения почти постоянны и равны между собой. В таком случае расчет значительно упрощается, поскольку на указанном участке в первом приближении можно допустить, что величины β и η равны единице.

Напряжения во втором и последующих приближениях подсчитывают так же, как и в первом приближении, причем за исходные принимают напряжения предыдущего приближения. Как следует из многочисленных расчетов, второе приближение дает очень хорошую степень точности. В случае грубых, ориентировочных подсчетов можно ограничиться даже первым приближением.

П р и м е р. Определить напряжения и зависимость от времени радиального перемещения на наружной поверхности обода для диска газовой турбины, профиль которого изображен на рис. 13.20, *а*. Частота вращения $n = 7200$ об/мин. Интенсивность равномерно распределенной по наружной поверхности обода нагрузки $p_2 = 173$ МН/м². Давление на внутренней расточке равно нулю. Температура равномерного нагрева диска 600° С. Материал диска — сталь 45Х14Н14В2М. Удельный вес $\gamma = 0{,}0785$ МН/м³. Среднее значение коэффициента линейного расширения в интервале температур 20—600° С $\alpha_{ср} = 18\cdot10^{-6}$ 1/°С. Модуль упругости при температуре 600° С $E = 1{,}40\cdot10^5$ МН/м². На рис. 13.21 изображен ориентировочный график функции Ω для стали 45Х14Н14В2М при 600° С. Величина показателя степени для этой стали при указанной температуре $n = 3{,}00$.

Вначале методом, изложенным в книге [8], определяем напряжения в нулевом приближении $(\sigma_t)_0$ и $(\sigma_r)_0$ (в пределах упругости). При этом коэффициент поперечной деформации принимаем равным 0,5. Эти величины приведены в табл. 13.1. Затем из соотношения (13.106) устанавливаем величину β, после чего по формуле (13.108) подсчитываем функцию η. Эту функцию умножаем на толщину диска и потом вычисляем интеграл $\int_{r_1}^{r} h\eta\, dr$. Произведенные подсчеты позволили по формулам (13.109) и (13.110) определить напряжения в первом приближении. Вычисление напряжений во втором приближении производим в таком же порядке, как и в первом приближении, с тем отличием, что величину β определяем по напряжениям первого приближения. Результаты подсчетов сведены в табл. 13.2.

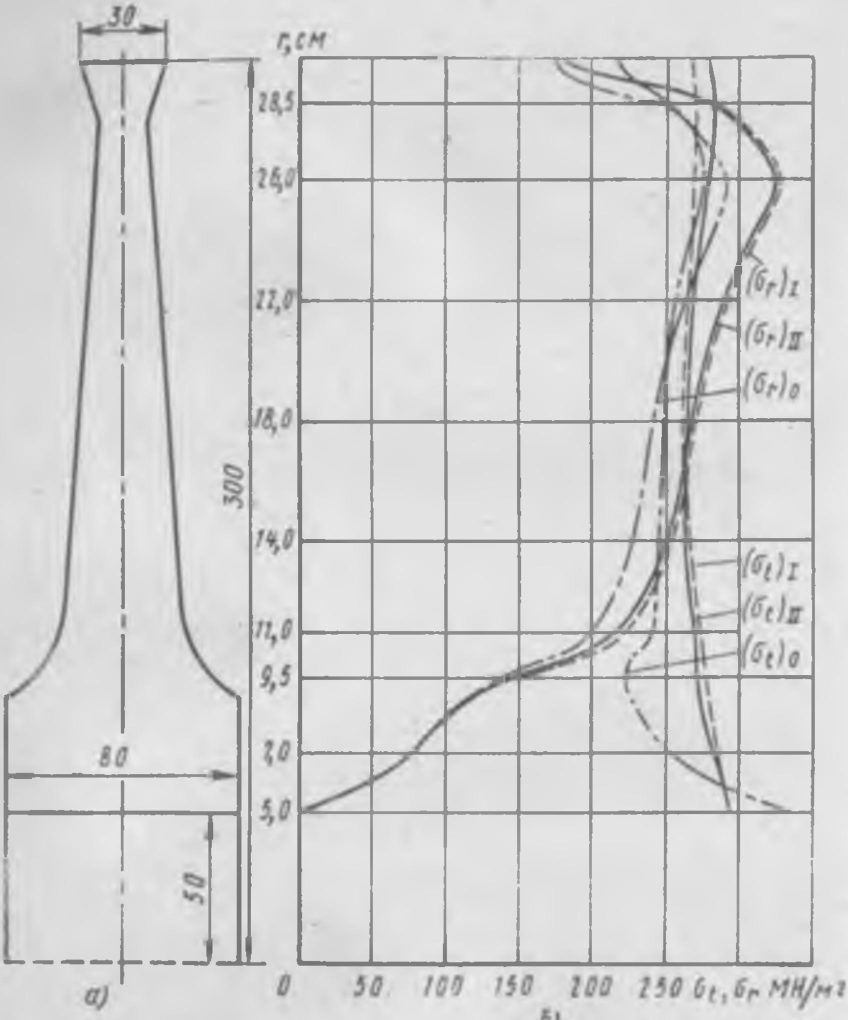


Рис. 13.20. Эпюры напряжений в диске газовой турбины в нулевом (штрихпунктирные линии), первом (штриховые линии) и втором (сплошные линии) приближениях

Из эпюр (рис. 13.20, б) следует, что напряжения второго приближения незначительно отличаются от соответствующих величин первого приближения.

Таблица 13.1

К расчету диска газовой турбины на ползучесть. Подготовка расчета

r, см	h, см	$\int_{r_1}^{r} hr^2\,dr$, см⁴	Ф, Н	$(\sigma_t)_0$	$(\sigma_r)_0$
				МН/м²	
5	8	0,0	0	341,0	0,0
7	8	581,3	26 440	254,4	78,34
9,5	6,4	1 918	87 250	223,1	135,6
11	4,4	2 732	124 300	242,2	199,9
14	3,7	4 588	208 700	246,0	226,7
18	3,1	8 062	366 800	249,3	242,4
22	2,5	12 520	569 500	257,8	260,5
26	1,9	17 570	799 200	275,3	290,9
28,5	2,0	20 830	947 500	253,9	246,1
29,5	2,6	22 770	1 036 000	218,9	178,4
30	3,0	24 010	1 092 000	214,7	172,8

После вычисления напряжений определяем перемещения. Установим зависимость от времени радиального перемещения в точках наружного контура. Для этого находим из табл. 13.2 напряжения на наружном контуре диска во втором приближении. Они равны: $(\sigma_{t_2})_{II} = 276$ МН/м²; $(\sigma_{r_2})_{II} = 173$ МН/м². Подставляя эти величины в формулу (13.113) и учитывая, что $n = 3{,}00$ и $r = r_2 = 30$ см, получаем величину радиального перемещения, образовавшегося за счет ползучести материала, в зависимости от времени

$$u_2^c = 0{,}03332 \cdot 10^{13}\Omega.$$

Полное радиальное перемещение складывается из радиального упругого перемещения, возникающего в начальный момент времени в результате вращения u_2^{ω} и нагрева u_2^{ϑ}, и радиального перемещения, образующегося за счет ползучести материала диска.

Величина u_2^{ω} определяется формулой

$$u_2^{\omega} = \frac{r_2}{E}\left[(\sigma_{t_2})_0 - \mu\,(\sigma_{r_2})_0\right], \tag{13.114}$$

где $(\sigma_{t_2})_0$ и $(\sigma_{r_2})_0$ — окружное и радиальное напряжения в точках наружного контура в пределах упругости. Как следует из табл. 13.1 $(\sigma_{t_2})_0 = 215$ МН/м², $(\sigma_{r_2})_0 = 173$ МН/м². Подставляя их в формулу (13.104) и учитывая, что модуль упругости $E = 1{,}40 \cdot 10^5$ МН/м², получаем $u_2^{\omega} = 0{,}0275$ см.

Величина

$$u_2^{\vartheta} = \alpha_{\text{ср}}\left(\vartheta - \vartheta_{\text{н}}\right) r_2, \tag{13.115}$$

где ϑ — температура нагрева диска; $\vartheta_{\text{н}}$ — начальная температура ненапряженного диска, которую примем равной 20° С. По формуле (13.115), учитывая, что $\alpha_{\text{ср}} = 18 \cdot 10^{-6}$ 1/°С, получаем $u_2^{\vartheta} = 0{,}313$ см. Полное радиальное перемещение точек наружного контура в начальный момент времени определяем путем сложения радиальных перемещений, возникших в результате вращения и нагрева диска

$$u_2(0) = u_2^{\omega} + u_2^{\vartheta} = 0{,}341 \text{ см}.$$

из соотношения (13.106) устанавливаем величину β, после чего по формуле (13.108) подсчитываем функцию η. Эту функцию умножаем на толщину диска и потом вычисляем интеграл $\int_{r_1}^{r} h\eta\, dr$. Произведенные подсчеты позволили по формулам (13.109) и (13.110) определить напряжения в первом приближении. Вычисление напряжений во втором приближении производим в таком же порядке, как и в первом приближении, с тем отличием, что величину β определяем по напряжениям первого приближения. Результаты подсчетов сведены в табл. 13.2.

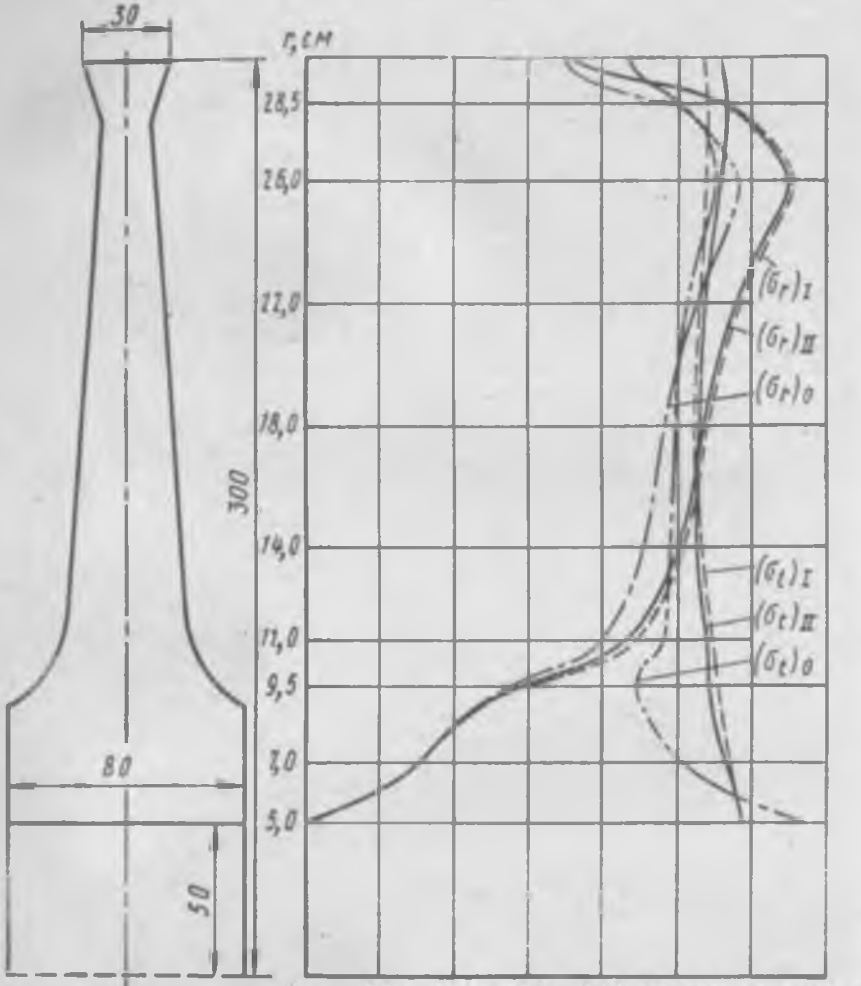


Рис. 13.20. Эпюры напряжений в диске газовой турбины в нулевом (штрихпунктирные линии), первом (штриховые линии) и втором (сплошные линии) приближениях

Из эпюр (рис. 13.20, *б*) следует, что напряжения второго приближения незначительно отличаются от соответствующих величин первого приближения.

Таблица 13.1

К расчету диска газовой турбины на ползучесть. Подготовка расчета

r, см	h, см	$\int_{r_1}^{r} hr^2\,dr$, см^4	Ф, Н	$(\sigma_t)_0$, МН/м^2	$(\sigma_r)_0$, МН/м^2
5	8	0,0	0	341,0	0,0
7	8	581,3	26 440	254,4	78,34
9,5	6,4	1 918	87 250	223,1	135,6
11	4,4	2 732	124 300	242,2	199,9
14	3,7	4 588	208 700	246,0	226,7
18	3,1	8 062	366 800	249,3	242,4
22	2,5	12 520	569 500	257,8	260,5
26	1,9	17 570	799 200	275,3	290,9
28,5	2,0	20 830	947 500	253,9	246,1
29,5	2,6	22 770	1 036 000	218,9	178,4
30	3,0	24 010	1 092 000	214,7	172,8

После вычисления напряжений определяем перемещения. Установим зависимость от времени радиального перемещения в точках наружного контура. Для этого находим из табл. 13.2 напряжения на наружном контуре диска во втором приближении. Они равны: $(\sigma_{t_2})_{II} = 276$ МН/м^2; $(\sigma_{r_2})_{II} = 173$ МН/м^2. Подставляя эти величины в формулу (13.113) и учитывая, что $n = 3{,}00$ и $r = r_2 = 30$ см, получаем величину радиального перемещения, образовавшегося за счет ползучести материала, в зависимости от времени

$$u_2^c = 0{,}03332 \cdot 10^{13}\Omega.$$

Полное радиальное перемещение складывается из радиального упругого перемещения, возникающего в начальный момент времени в результате вращения u_2^ω и нагрева u_2^ϑ, и радиального перемещения, образующегося за счет ползучести материала диска.

Величина u_2^ω определяется формулой

$$u_2^\omega = \frac{r_2}{E}\left[(\sigma_{t_2})_0 - \mu\,(\sigma_{r_2})_0\right], \tag{13.114}$$

где $(\sigma_{t_2})_0$ и $(\sigma_{r_2})_0$ — окружное и радиальное напряжения в точках наружного контура в пределах упругости. Как следует из табл. 13.1 $(\sigma_{t_2})_0 = 215$ МН/м^2, $(\sigma_{r_2})_0 = 173$ МН/м^2. Подставляя их в формулу (13.104) и учитывая, что модуль упругости $E = 1{,}40 \cdot 10^5$ МН/м^2, получаем $u_2^\omega = 0{,}0275$ см.

Величина

$$u_2^\vartheta = \alpha_{\text{ср}}\left(\vartheta - \vartheta_{\text{н}}\right) r_2, \tag{13.115}$$

где ϑ — температура нагрева диска; $\vartheta_{\text{н}}$ — начальная температура ненапряженного диска, которую примем равной 20° С. По формуле (13.115), учитывая, что $\alpha_{\text{ср}} = 18 \cdot 10^{-6}$ 1/°С, получаем $u_2^\vartheta = 0{,}313$ см. Полное радиальное перемещение точек наружного контура в начальный момент времени определяем путем сложения радиальных перемещений, возникших в результате вращения и нагрева диска

$$u_2(0) = u_2^\omega + u_2^\vartheta = 0{,}341 \text{ см}.$$

Таблица 13.2

К расчету диска газовой турбины на ползучесть

r, см	β	β^2	$(1-\beta+\beta^2)^{\frac{n-1}{2}}(2-\beta)$	$\frac{1-\beta}{2-\beta}\frac{1}{r}$, 1/см	$3\int_0^r \frac{1-\beta}{2-\beta}\frac{dr}{r}$	$\exp\left[-3\int_0^r \frac{1-\beta}{2-\beta}\frac{dr}{r}\right]$	η^n	η	$h\eta$, см	$\int_0^r h\eta\, dr$, см²	σ_t, МН/м²	σ_r, МН/м²
						Первое приближение						
5	0,000	0,00000	2,000	0,1000	0,0000	1,000	0,5000	0,7937	6,350	0,00	293,9	0,00
7	0,3079	0,09480	1,331	0,05843	0,4752	0,6218	0,4672	0,7760	6,208	12,56	287,4	78,32
9,5	0,6081	0,3698	1,060	0,02963	0,8055	0,4469	0,4216	0,7499	4,799	26,32	277,8	146,0
11	0,8252	0,6810	1,006	0,01353	0,9027	0,4055	0,4031	0,7387	3,250	32,36	273,6	221,9
14	0,9215	0,8492	1,001	0,005196	0,9870	0,3727	0,3723	0,7194	2,662	41,23	266,4	254,3
18	0,9723	0,9454	1,000	0,001497	1,027	0,3581	0,3581	0,7101	2,201	50,96	262,9	272,4
22	1,011	1,022	0,9999	—0,005055	1,006	0,3657	0,3657	0,7151	1,788	58,94	264,8	293,2
26	1,056	1,115	0,9997	—0,002282	0,9618	0,3822	0,3823	0,7258	1,379	65,27	268,8	327,6
28,5	0,9694	0,9397	1,000	0,001041	0,9570	0,3840	0,3840	0,7268	1,454	68,81	269,1	280,9
29,5	0,8151	0,6644	1,006	0,005288	0,9666	0,3804	0,3781	0,7231	1,880	70,48	267,8	205,3
30	0,8048	0,6477	1,007	0,005443	0,9747	0,3773	0,3747	0,7209	2,163	71,49	267,0	172,8
						Второе приближение						
5	0,0000	0,00000	2,000	0,1000	0,0000	1,000	0,5000	0,7937	6,350	0,00	294,8	0,00
7	0,2725	0,07426	1,386	0,06014	0,4803	0,6186	0,4463	0,7642	6,114	12,46	283,8	77,89
9,5	0,5257	0,2764	1,107	0,03387	0,8328	0,4348	0,3928	0,7324	4,687	25,96	272,0	144,1
11	0,8111	0,6579	1,007	0,01445	0,9414	0,3901	0,3874	0,7290	3,208	31,88	270,7	218,9
14	0,9546	0,9113	0,9998	0,003103	1,020	0,3606	0,3607	0,7119	2,634	40,64	264,4	251,0
18	1,036	1,073	0,9997	—0,002074	1,014	0,3628	0,3629	0,7133	2,211	50,33	265,0	269,1
22	1,107	1,225	0,9984	—0,005445	0,9690	0,3795	0,3801	0,7244	1,811	58,37	269,0	290,3
26	1,219	1,486	0,9895	—0,01078	0,8715	0,4183	0,4227	0,7505	1,426	64,84	278,8	325,6
28,5	1,044	1,090	1,000	—0,001615	0,8250	0,4382	0,4382	0,7596	1,519	68,52	282,1	280,2
29,5	0,7667	0,5878	1,012	0,006414	0,8322	0,4351	0,4299	0,7547	1,962	70,26	280,2	205,2
30	0,6472	0,4189	1,044	0,008693	0,8436	0,4302	0,4121	0,7442	2,233	71,31	276,3	172,8

Складывая теперь эту величину с найденным выше пластическим радиальным перемещением, окончательно получим зависимость от времени полного радиального перемещения точек наружного контура,

$$u_2 = 0{,}341 + 0{,}333 \cdot 10^{13}\Omega.$$

На рис. 13.22 представлен построенный по этой формуле график зависимости u_2 от времени.

Как следует из этого графика, за время, равное 500 ч, радиальное перемещение возрастает примерно на одну четверть величины радиального перемещения в начальный момент времени.

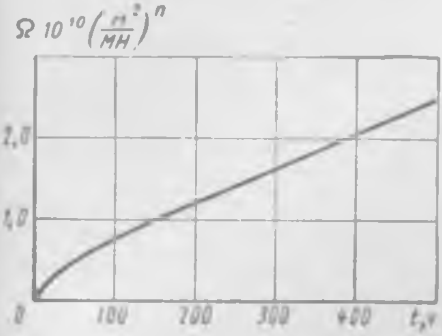


Рис. 13.21. Ориентировочный график функции Ω для стали 45Х14Н14В2М при температуре 600° С

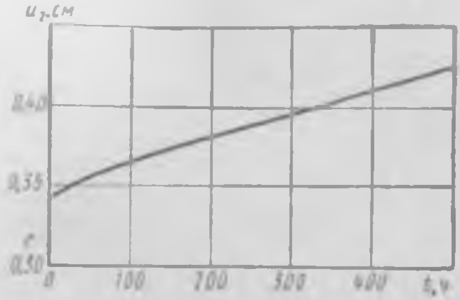


Рис. 13.22. График зависимости от времени радиального перемещения в точках наружного контура диска

§ 90. Использование критерия Треска—Сен-Венана

Из предыдущего параграфа следует, что решение задачи установившейся ползучести при плоском напряженном состоянии (вращающийся диск) сложнее, чем при плоской деформации (толстостенная труба). Для осесимметричных задач плоского напряженного состояния возможно упрощение решений за счет использования критерия Треска — Сен-Венана. Этот вопрос был исследован В. И. Розенблюмом [16]. Ю. В. Немировским [12] для решения таких задач применен критерий максимального приведенного напряжения.

В случае использования критерия Треска — Сен-Венана потенциал деформаций ползучести может быть представлен в виде

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - \Phi\left(\varepsilon_i^c\right) = 0, \tag{13.116}$$

причем

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3.$$

Используя ассоциированный закон течения (12.8) и соотношение (13.116), получаем

$$\varepsilon_1^c = \lambda,\ \varepsilon_2^c = 0,\ \varepsilon_3^c = -\lambda. \tag{13.117}$$

Поскольку в случае одноосного растяжения зависимость деформации ползучести от напряжения определяется формулой (11.13), получаем $\lambda = (\sigma_1 - \sigma_3)^n\,\Omega$ и, следовательно,

$$\varepsilon_1^c = (\sigma_1 - \sigma_3)^n\Omega,\ \varepsilon_2^c = 0,\ \varepsilon_3^c = -(\sigma_1 - \sigma_3)^n\,\Omega. \tag{13.118}$$

Последние соотношения могут быть использованы для расчета вращающихся дисков.

В случае равномерно нагретого диска с отверстием, когда $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_r$, $\sigma_3 = 0$ согласно соотношению (13.118) имеем

$$\varepsilon_t = \sigma_t^n \Omega; \ \varepsilon_r = 0; \ \varepsilon_z = -\sigma_t^n \Omega.$$

Вспоминая зависимости (13.78), получаем

$$\frac{\partial u^c}{\partial r} = 0; \ u^c = u^c(t) = r\sigma_t^n \Omega. \tag{13.119}$$

Использование дифференциального уравнения движения диска и краевых условий для радиальных напряжений совместно с соотношением (13.119) позволяет определить радиальное и окружное напряжения.

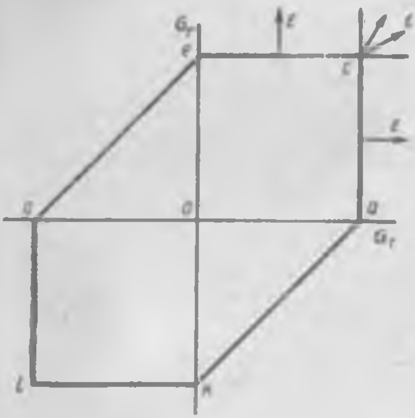


Рис. 13.23. Графическое изображение условия Треска—Сен-Венана

Если диск не имеет отверстия, то тогда в окрестности центральной точки (круг радиуса r_1) $\sigma_t = \sigma_r$, что соответствует ребру c призмы Треска—Сен-Венана (рис. 13.23). Ребро c является пересечением плоскостей ac и ce.

Для точек плоскости ac $\sigma_1 = \sigma_t$; $\sigma_2 = \sigma_r$; $\sigma_3 = 0$ и согласно формулам (13.118)

$$\varepsilon_t^c = \sigma_t^n \Omega; \ \varepsilon_r^c = 0; \ \varepsilon_z^c = -\sigma_t^n \Omega.$$

Для точек плоскости ce $\sigma_1 = \sigma_r$; $\sigma_2 = \sigma_t$; $\sigma_3 = 0$ и по тем же соотношениям (13.118)

$$\varepsilon_r^c = \sigma_r^n \Omega; \ \varepsilon_t^c = 0; \ \varepsilon_r^c = -\sigma_r^n \Omega.$$

Как отмечалось в § 22 [см. формулу (4.17)], течение на ребре получается комбинацией течений справа и слева от ребра, т. е. на ребре c

$$\varepsilon_t^c = \lambda_1 \sigma_t^n \Omega; \ \varepsilon_r^c = \lambda_2 \sigma_r^n \Omega;$$

$$\varepsilon_z^c = -\lambda_1 \sigma_t^n \Omega - \lambda_2 \sigma_r^n \Omega.$$

Полагая $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и учитывая, что $\sigma_t = \sigma_r$, получаем в точках ребра c

$$\varepsilon_t^c = \lambda_1 \sigma_r^n \Omega; \ \varepsilon_r^c = (1 - \lambda_1)\sigma_r^n \Omega; \ \varepsilon_z^c = -\sigma_r^n \Omega, \tag{13.120}$$

причем $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$.

Таким образом, если диск без отверстия, возможны две области $0 \leqslant r \leqslant r_1$ и $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. В первой справедливы соотношения (13.120), а во второй (13.119).

Подробное изложение решений задач установившейся ползучести дисков на основе этих соотношений приведено в работах [3, 23, 29—31].

В качестве примера рассмотрим растяжение бесконечной пластины с отверстием силами, приложенными на бесконечности осесимметрично относительно центра отверстия в условиях плоского напряженного состояния (см. рис. 6.8). В этом случае

$$\sigma_1 = \sigma_t; \ \sigma_2 = \sigma_r; \ \sigma_3 = 0,$$

причем радиальное перемещение u^c является функцией только времени и от радиуса не зависит.

Из выражения (13.119) устанавливаем закон изменения по радиусу окружного напряжения

$$\sigma_t = \left(\frac{u^c}{\Omega r}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{13.121}$$

Дифференциальное уравнение равновесия элемента пластины имеет такой же вид, как и дифференциальное уравнение равновесия элемента трубы (6.5). Оно может быть представлено в форме

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_t = 0.$$

Подставим в это уравнение соотношение (13.121). Тогда получим

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \left(\frac{u^c}{\Omega r}\right)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\sigma_r = \frac{n}{n-1}\left(\frac{u^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} r^{-\frac{1}{n}} + \frac{C}{r}.$$

Используем краевое условие
при $r = r_1$ $\sigma_r = 0$.
Тогда устанавливаем

$$C = -\frac{n}{n-1}\left(\frac{u^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} r_1^{-\frac{1}{n}+1}$$

и, следовательно,

$$\sigma_r = \frac{n}{n-1}\left(\frac{u^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} r_1^{-\frac{1}{n}}\left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{r_1}{r}\right]. \tag{13.122}$$

Как следует из формул (13.121) и (13.122), при увеличении радиуса окружное напряжение уменьшается, а радиальное возрастает. Однако радиальное напряжение не может быть больше окружного, так как это означало бы равенство нулю радиального перемещения.

Найдем радиус окружности r^*, в точках которой радиальное и окружное напряжения равны между собой. Приравнивая соотношения (13.121) и (13.122), получаем

$$r^* = n^{\frac{n}{n-1}} r_1. \tag{13.123}$$

При $r < r^*$ законы изменения окружного и радиального напряжений определяются формулами (13.121), (13.122). При $r > r^*$ они равны между собой и, как это следует из краевого условия, при $r \to \infty$ $\sigma_r \to p$.
при $r > r^*$

$$\sigma_t = \sigma_r = p. \tag{13.124}$$

Приравнивая окружное напряжение при $r = r^*$ величине p, получаем

$$\left(\frac{u^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} = p\,(r^*)^{\frac{1}{n}} \tag{13.125}$$

и, следовательно,

$$u^c = p^n r^* \Omega. \tag{13.126}$$

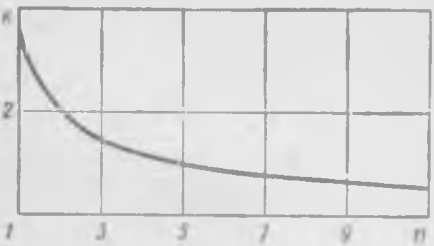


Рис. 13.24. График зависимости от показателя степени n коэффициента концентрации напряжений в бесконечной пластине с отверстием, растянутой силами, приложенными на бесконечности симметрично относительно центра отверстия, в условиях плоского напряженного состояния

Используя соотношения (13.125) и (13.123), преобразуем формулы для напряжений (13.121) и (13.122) к окончательному виду

$$\sigma_t = p n^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{1}{n}}; \tag{13.127}$$

$$\sigma_r = p\,\frac{n^{\frac{n}{n-1}}}{n-1}\left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{r_1}{r}\right]. \tag{13.128}$$

Из формулы (13.128) следует, что наибольшее окружное напряжение возникает в точках внутреннего контура при $r = r_1$ и коэффициент концентрации напряжений

$$k = n^{\frac{1}{n-1}}. \tag{13.129}$$

На рис. 13.24 представлен график зависимости его от показателя степени n.

При $n = 1$

$$k = \lim_{n\to 1} n^{\frac{1}{n-1}} = e = 2{,}78.$$

Как известно, в пределах упругости величина его равна двум. Таким образом, в этом случае погрешность рассмотренного решения составляет 36%, т. е. весьма значительна.

Эта задача применительно к пластическому и упруго-пластическому деформированию с использованием критериев Хубера—Мизеса и Треска—Сен-Венана была решена в работах [4, 11].

Список литературы

1. **Вылекжанин В. Д.** Неравенства для жесткого кручения призматического стержня при установившейся ползучести.— «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1972, № 5, с. 191—195.

2. **Качанов Л. М.** Приближенное решение задач установившейся ползучести.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение», 1959, № 3, с. 84—95.

3. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960, 455 с.

4. **Костюк А. Г.** О равновесии кольцевой пластинки при степенном законе упрочнения. — «Прикладная математика и механика», 1950, т. XIV, вып. 3, с. 319—320.

5. **Малинин Н. Н.** Основы расчетов на ползучесть. М., Машгиз, 1948, 120 с.

6. **Малинин Н. Н.** Расчет на ползучесть вращающихся неравномерно нагретых дисков переменной толщины.—В кн.: Вопросы прочности материалов и конструкций. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 268—286.

7. **Малинин Н. Н.** Закономерности ползучести металлов и расчеты на ползучесть деталей машин.— «Вестник машиностроения», 1959, № 1, с. 6—14.

8. **Малинин Н. Н.** Прочность турбомашин. М., Машгиз, 1962, 291 с.

9. **Малинин Н. Н.** Обзор отечественных работ по расчетам деталей машин на ползучесть.— В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей], вып. 11, М., «Машиностроение», 1965, с. 229—278.

10. **Малинин Н. Н.** Ползучесть элементов машин. Обзор.— В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей]. Вып. 14, М., «Машиностроение», 1969, с. 217—267.

11. **Махонина Т. М.** Упруго-пластическое состояние шайбы при степенном упрочнении материала.— В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей]. Вып. 5. М., Машгиз, 1960, с. 97—106.

12. **Немировский Ю. В.** Об уравнениях ползучести, основанных на критерии максимального приведенного напряжения.— «Известия АН СССР. Механика и машиностроение», 1964, № 3, с. 117—122.

13. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.

14. **Расчеты** конструкций на тепловые воздействия. М., «Машиностроение», 1969, 599 с. Авт.: В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, А. М. Синюков.

15. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. II. М., Машгиз, 1958, 974 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихачев и др.

16. **Розенблюм В. И.** О приближенных уравнениях ползучести.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение», 1959, № 5, с. 157—160.

17. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2, М., Физматгиз, 1958, 674 с.

18. **Стасенко И. В.** Установившаяся ползучесть тонкостенной трубы в общем случае действия сил.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1973, № 7, с. 21—25.

Найдем радиус окружности r^*, в точках которой радиальное и окружное напряжения равны между собой. Приравнивая соотношения (13.121) и (13.122), получаем

$$r^* = n^{\frac{n}{n-1}} r_1. \tag{13.123}$$

При $r < r^*$ законы изменения окружного и радиального напряжений определяются формулами (13.121), (13.122). При $r > r^*$ они равны между собой и, как это следует из краевого условия, при $r \to \infty$ $\sigma_r \to p$,

при $r > r^*$

$$\sigma_t = \sigma_r = p. \tag{13.124}$$

Приравнивая окружное напряжение при $r = r^*$ величине p, получаем

$$\left(\frac{u^c}{\Omega}\right)^{\frac{1}{n}} = p\,(r^*)^{\frac{1}{n}} \tag{13.125}$$

и, следовательно,

$$u^c = p^n r^* \Omega. \tag{13.126}$$

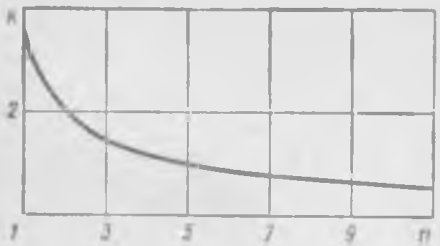


Рис. 13.24. График зависимости от показателя степени n коэффициента концентрации напряжений в бесконечной пластине с отверстием, растянутой силами, приложенными на бесконечности симметрично относительно центра отверстия, в условиях плоского напряженного состояния

Используя соотношения (13.125) и (13.123), преобразуем формулы для напряжений (13.121) и (13.122) к окончательному виду

$$\sigma_t = p n^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{1}{n}}; \tag{13.127}$$

$$\sigma_r = p\,\frac{n^{\frac{n}{n-1}}}{n-1}\left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{r_1}{r}\right]. \tag{13.128}$$

Из формулы (13.128) следует, что наибольшее окружное напряжение возникает в точках внутреннего контура при $r = r_1$ и коэффициент концентрации напряжений

$$k = n^{\frac{1}{n-1}}. \tag{13.129}$$

На рис. 13.24 представлен график зависимости его от показателя степени n.

При $n = 1$

$$k = \lim_{n \to 1} n^{\frac{1}{n-1}} = e = 2{,}78.$$

Как известно, в пределах упругости величина его равна двум. Таким образом, в этом случае погрешность рассмотренного решения составляет 36%, т. е. весьма значительна.

Эта задача применительно к пластическому и упруго-пластическому деформированию с использованием критериев Хубера—Мизеса и Треска—Сен-Венана была решена в работах [4, 11].

Список литературы

1. **Вылекжанин В. Д.** Неравенства для жесткого кручения призматического стержня при установившейся ползучести.— «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1972, № 5, с. 191—195.

2. **Качанов Л. М.** Приближенное решение задач установившейся ползучести.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение», 1959, № 3, с. 84—95.

3. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960, 455 с.

4. **Костюк А. Г.** О равновесии кольцевой пластинки при степенном законе упрочнения. — «Прикладная математика и механика», 1950, т. XIV, вып. 3, с. 319—320.

5. **Малинин Н. Н.** Основы расчетов на ползучесть. М., Машгиз, 1948, 120 с.

6. **Малинин Н. Н.** Расчет на ползучесть вращающихся неравномерно нагретых дисков переменной толщины.—В кн.: Вопросы прочности материалов и конструкций. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 268—286.

7. **Малинин Н. Н.** Закономерности ползучести металлов и расчеты на ползучесть деталей машин.— «Вестник машиностроения», 1959, № 1, с. 6—14.

8. **Малинин Н. Н.** Прочность турбомашин. М., Машгиз, 1962, 291 с.

9. **Малинин Н. Н.** Обзор отечественных работ по расчетам деталей машин на ползучесть.— В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей], вып. 11, М., «Машиностроение», 1965, с. 229—278.

10. **Малинин Н. Н.** Ползучесть элементов машин. Обзор.— В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей]. Вып. 14, М., «Машиностроение», 1969, с. 217—267.

11. **Махонина Т. М.** Упруго-пластическое состояние шайбы при степенном упрочнении материала.— В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей]. Вып. 5. М., Машгиз, 1960, с. 97—106.

12. **Немировский Ю. В.** Об уравнениях ползучести, основанных на критерии максимального приведенного напряжения.— «Известия АН СССР. Механика и машиностроение», 1964, № 3, с. 117—122.

13. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.

14. **Расчеты** конструкций на тепловые воздействия. М., «Машиностроение», 1969, 599 с. Авт.: В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, А. М. Синюков.

15. **Расчеты** на прочность в машиностроении. Т. II. М., Машгиз, 1958, 974 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихачев и др.

16. **Розенблюм В. И.** О приближенных уравнениях ползучести.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение», 1959, № 5, с. 157—160.

17. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2, М., Физматгиз, 1958, 674 с.

18. **Стасенко И. В.** Установившаяся ползучесть тонкостенной трубы в общем случае действия сил.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1973, № 7, с. 21—25.

19. **Стасенко И. В.** Установившаяся ползучесть толстостенной трубы при действии внутреннего давления и изгибающего момента.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1973, № 8, с. 18—22.

20. **Стасенко И. В.** Установившаяся ползучесть толстостенной трубы.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1974, № 2, с. 14—17.

21. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М., «Наука», 1974, 559 с.

22. **Филоненко-Бородич М. М.** Теория упругости. М., Физматгиз, 1959, 364 с.

23. **Creep** tests of rotating disks at elevated temperature and comparison with theory. «Journal of applied mechanics», 1954, Uol. 21, No 3, p. 225—235. Aut.: A. M. Wahl, G. O. Sankey, M. J. Manjoine, E. Shoemaker.

24. **Finnie I., Heller W. R.** Creep of engineering materials, Mc. Graw—Hill Book Company, Inc. 1959, 341 p.

25. **Hult J.** Creep in egineering structures, Blaisdell Publishing Company, 1966, 115 p.

26. **Lubahn J. D., Felgar R. P.** Plasticity and creep of metals, John Wiley and Sons, Inc., 1961, 608 p.

27. **Odqvist F. K. G., Hult J.**, Kriechfestigkeit metallisher Werkstoffe, Springler—Verlag, 1962, 303 s.

28. **Odqvist F. K. G.** Mathematical theory of creep and creep rupture, Clarendon Press, 1966, 170 p.

29. **Wahl A. M.** Analysis of creep in rotating disks based on the Tresca criterion and associated flow rule.—«Journal of applied mechanics», 1956, Vol. 23, No 2, p. 231—238.

30. **Wahl A. M.** Stress distributions in rotating disks subjected to creep at elevated temperature —«Journal of applied mechanics», 1957, Vol. 24, No 2, p. 299—305.

31. **Wahl A. M.** Futher studies of stress distribution in rotating disks and cylinders under elevated temperature creep conditions.—«Journal of applied mechanics», 1958, Vol. 25, No 2, p. 243—250.

ГЛАВА XIV

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 91. Теория старения

В решениях задач неустановившейся ползучести в отличие от задач установившейся ползучести учитывается изменение напряжений во времени. Последнее позволяет решать задачи при переменных во времени нагрузках, что недопустимо в предположении уста-

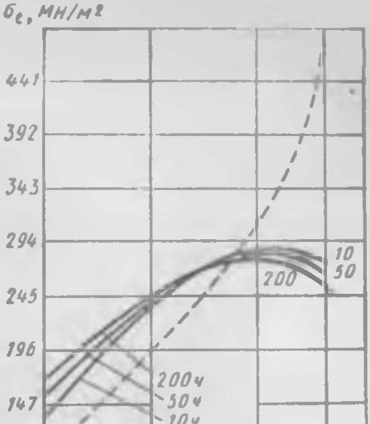


Рис. 14.1. Эпюры окружных напряжений для различных значений времени (сплошные линии) и в пределах упругости (штриховая линия) в равномерно нагретом до температуры 575° C диске постоянной толщины с отверстием из стали Р3 [14]

новившейся ползучести. Перед тем как решать задачу неустановившейся ползучести, необходимо выбрать теорию ползучести. Рассмотрим вначале применение теории старения в решениях задач неустановившейся ползучести. Как уже указывалось в § 75, определение напряжений и деформаций для некоторого значения времени по теории старения эквивалентно решению задачи по теории малых упруго-пластических деформаций для известной диаграммы деформирования. Этой диаграммой является изохронная кривая ползучести. Для установления кинетики напряженного и деформированного состояния необходимо произвести ряд однотипных расчетов по различным изохронным кривым деформирования. В случае постоянных во времени внешних силах напряженное состояние с течением времени стабилизируется, приближаясь к состоянию установившейся ползучести.

На рис. 14.1 представлены полученные расчетом эпюры окружных напряжений для различных значений времени в равномерно нагретом вращающемся диске постоянной толщины с отверстием [14].

Как следует из этих эпюр, напряжения почти полностью перераспределяются за первые десять часов.

В литературе [8—12] приведены методы расчетов многих элементов машиностроительных конструкций по теории старения.

§ 92. Теория течения

Рассмотрим применение теории течения в расчетах на неустановившуюся ползучесть на примере простейшей задачи чистого изгиба бруса прямоугольного поперечного сечения (рис. 14.2). По-

Рис. 14.2. Брус прямоугольного поперечного сечения в условиях чистого изгиба

скольку при чистом изгибе бруса поперечное сечение его остается плоским, деформация ε в точках на расстоянии y от нейтральной оси связана с кривизной $\varkappa$ соотношением

$$\varepsilon = y\varkappa.$$

Дифференцируя его по времени, получим скорость деформации

$$\xi = y\dot{\varkappa}, \tag{14.1}$$

где $\dot{\varkappa} = \frac{d\varkappa}{dt}$ — скорость изменения кривизны.

Выражение для скорости деформации в частном случае одноосного напряженного состояния $\left(\sigma_i = \sigma,\ \sigma_0 = \frac{\sigma}{3}\right)$ по теории течения согласно формулам (12.7) и (12.24) имеет вид

$$\xi = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sigma^n B. \tag{14.2}$$

Сопоставляя выражения (14.1) и (14.2), имеем

$$y\dot{\varkappa} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sigma^n B. \tag{14.3}$$

Зависимость изгибающего момента M от нормальных напряжений σ в рассматриваемой задаче определяется формулой

$$M = 2b\int\limits_0^{\frac{h}{2}} \sigma y\, dy. \tag{14.4}$$

Таким образом, для определения двух функций $\varkappa = \varkappa(t)$ и $\sigma = \sigma(y, t)$ получены два уравнения (14.3) и (14.4). Решение их связано с большими трудностями. В более сложных задачах эти трудности возрастают. Поэтому в расчетах на неустановившуюся ползучесть большое значение имеют приближенные методы. Ниже будет изложен установленный Л. М. Качановым [3, 4] вариационный принцип минимума дополнительной мощности, а затем рассмотрены основанные на нем приближенные методы решения задач, разработанные также Л. М. Качановым [3, 4].

А. А. Ильюшиным и И. И. Поспеловым [2, 13] разработан метод последовательных приближений в решении задач неустановившейся ползучести по теории течения. В этом методе нелинейная задача неустановившейся ползучести по теории течения сводится к последовательности задач линейной теории вязкоупругости с нестационарными (фиктивными) внешними силами.

§ 93. Принцип минимума дополнительной мощности

В § 42 был установлен принцип возможных изменений напряженного состояния, который записывается в виде равенства (7.7). Переходя в нем от перемещений и деформаций к их скоростям, имеем

$$\int_V \delta X_i v_i dV + \int_S \delta X_{\nu i} v_i dS = \int_V \delta\sigma_{ij}\xi_{ij} dV. \tag{14.5}$$

Скорости деформаций по теории течения определяются формулой (12.7). Первое слагаемое в этой формуле представляет собой скорость упругой деформации.

Компоненты упругой деформации связаны с удельной потенциальной энергией деформации U соотношением (3.7). Последняя может быть представлена в виде

$$U = \frac{\sigma_0^2}{2K} + \frac{\sigma_i^2}{6G}. \tag{14.6}$$

Формулы (3.7) и (14.6) могут быть получены из соотношений (7.9) и (7.10). Для этого следует использовать зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций в пределах упругости $\sigma_i = 3G\varepsilon_i$.

Таким образом, скорости упругой деформации

$$\xi_{ij}^e = \frac{\partial^2 U}{dt\, \partial\sigma_{ij}}. \tag{14.7}$$

Аналогично тем же соотношениям (7.9) и (7.10), учитывая, что в условиях ползучести изменение объема равно нулю ($\mu = 0{,}5$; $K = \infty$), можно получить скорость деформации ползучести

$$\xi_{ij}^c = \frac{\partial\Lambda}{\partial\sigma_{ij}}, \tag{14.8}$$

где функция напряжений и времени

$$\Lambda = \int_0^{\sigma_i} \xi_i^c \, d\sigma_i \tag{14.9}$$

называется дополнительным рассеянием.

В случае степенной зависимости интенсивности скоростей деформаций от интенсивности напряжений (12.24) выражение (14.9) принимает вид

$$\Lambda = \frac{\sigma_i^{n+1} B}{n+1}. \tag{14.10}$$

Складывая соотношения (14.7) и (14.8), получаем скорости полной деформации

$$\dot{\xi}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda \right). \tag{14.11}$$

Функцию

$$W = \frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda \tag{14.12}$$

назовем дополнительной мощностью деформации. Тогда

$$\dot{\xi}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \tag{14.13}$$

и соотношение (14.5) принимает вид

$$\int_V \delta X_i v_i \, dV + \int_S \delta X_{\nu i} v_i \, dS = \delta \bar{W}, \tag{14.14}$$

где

$$\bar{W} = \int_V W \, dV \tag{14.15}$$

— дополнительная мощность деформации всего тела.

Рассмотрим три задачи неустановившейся ползучести для случая отсутствия объемных сил $\delta X_i = 0$.

1. Основная задача. На всей поверхности тела заданы напряжения. Тогда $\delta X_{\nu i} = 0$.

2. Релаксационная задача. На всей поверхности тела заданы постоянные во времени смещения. Тогда скорости их

$$v_i = 0.$$

3. Смешанная задача. На части поверхности тела S_1 заданы напряжения, а на другой ее части S_2 постоянные во времени смещения. Тогда на S_1 $\delta X_{\nu i} = 0$, на S_2 $v_i = 0$.

Этими тремя случаями не исчерпываются все возможные задачи неустановившейся ползучести.

Однако для них соотношение (14.14) принимает особенно простой вид

$$\delta \bar{W} = 0. \tag{14.16}$$

Можно доказать, что вторая вариация дополнительной мощности деформации положительна [4].

Таким образом, для указанных частных случаев получаем *принцип минимума дополнительной мощности деформации, согласно которому из всех статически возможных напряженных состояний только для истинного напряженного состояния дополнительная мощность деформации всего тела принимает минимальное значение.*

§ 94. Приближенные методы решения задач неустановившейся ползучести

Рассмотрим приближенные методы решения основной и релаксационной задач неустановившейся ползучести.

В случае основной задачи приближенное решение записывают в форме

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \chi(\bar{\sigma}_{ij} - \sigma'_{ij}), \tag{14.17}$$

где σ'_{ij} — напряжения в пределах упругости, $\bar{\sigma}_{ij}$ — напряжения, вычисленные в предположении установившейся ползучести, $\chi = \chi(t)$ — функция времени.

Допустим, как обычно, что в начальный момент времени пластические деформации отсутствуют и что с течением времени распределение напряжений стремится к установившемуся. В таком случае значения функции χ для нулевого значения времени и для бесконечности $\chi(0) = 0$, $\chi(\infty) = 1$.

Если использовать выражение (14.17), то тогда из формул (14.15), (14.12), (14.6) и (14.10) очевидно, что дополнительная мощность деформации всего тела является функцией параметра χ. Условие минимума этой функции имеет вид

$$\frac{d\bar{W}}{d\chi} = 0. \tag{14.18}$$

Из этого условия может быть найдена функция $\chi = \chi(t)$. После этого при помощи формул (14.17) могут быть подсчитаны напряжения, а затем на основании соотношений (12.7) скорости деформаций.

В случае релаксационной задачи неустановившейся ползучести приближенное решение записывают в форме

$$\sigma_{ij} = \nu\sigma'_{ij}, \tag{14.19}$$

где $\nu = \nu(t)$ — функция времени.

Поскольку, как было принято ранее, в начальный момент времени пластические деформации отсутствуют и с течением времени напряжения стремятся к нулю, $\nu(0) = 1$, $\nu(\infty) = 0$.

где функция напряжений и времени

$$\Lambda = \int_0^{\sigma_i} \xi_i^c \, d\sigma_i \tag{14.9}$$

называется дополнительным рассеянием.

В случае степенной зависимости интенсивности скоростей деформаций от интенсивности напряжений (12.24) выражение (14.9) принимает вид

$$\Lambda = \frac{\sigma_i^{n+1} B}{n+1}. \tag{14.10}$$

Складывая соотношения (14.7) и (14.8), получаем скорости полной деформации

$$\xi_{ij} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda \right). \tag{14.11}$$

Функцию

$$W = \frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda \tag{14.12}$$

назовем дополнительной мощностью деформации. Тогда

$$\xi_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \tag{14.13}$$

и соотношение (14.5) принимает вид

$$\int_V \delta X_i v_i \, dV + \int_S \delta X_{\nu i} v_i \, dS = \delta \tilde{W}, \tag{14.14}$$

где

$$\tilde{W} = \int_V W \, dV \tag{14.15}$$

— дополнительная мощность деформации всего тела.

Рассмотрим три задачи неустановившейся ползучести для случая отсутствия объемных сил $\delta X_i = 0$.

1. Основная задача. На всей поверхности тела заданы напряжения. Тогда $\delta X_{\nu i} = 0$.

2. Релаксационная задача. На всей поверхности тела заданы постоянные во времени смещения. Тогда скорости их

$$v_i = 0.$$

3. Смешанная задача. На части поверхности тела S_1 заданы напряжения, а на другой ее части S_2 постоянные во времени смещения. Тогда на S_1 $\delta X_{\nu i} = 0$, на S_2 $v_i = 0$.

Этими тремя случаями не исчерпываются все возможные задачи неустановившейся ползучести.

Однако для них соотношение (14.14) принимает особенно простой вид

$$\delta \bar{W} = 0. \tag{14.16}$$

Можно доказать, что вторая вариация дополнительной мощности деформации положительна [4].

Таким образом, для указанных частных случаев получаем *принцип минимума дополнительной мощности деформации, согласно которому из всех статически возможных напряженных состояний только для истинного напряженного состояния дополнительная мощность деформации всего тела принимает минимальное значение.*

§ 94. Приближенные методы решения задач неустановившейся ползучести

Рассмотрим приближенные методы решения основной и релаксационной задач неустановившейся ползучести.

В случае основной задачи приближенное решение записывают в форме

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \chi(\sigma''_{ij} - \sigma'_{ij}), \tag{14.17}$$

где σ'_{ij} — напряжения в пределах упругости, σ''_{ij} — напряжения, вычисленные в предположении установившейся ползучести, $\chi = \chi(t)$ — функция времени.

Допустим, как обычно, что в начальный момент времени пластические деформации отсутствуют и что с течением времени распределение напряжений стремится к установившемуся. В таком случае значения функции χ для нулевого значения времени и для бесконечности $\chi(0) = 0$, $\chi(\infty) = 1$.

Если использовать выражение (14.17), то тогда из формул (14.15), (14.12), (14.6) и (14.10) очевидно, что дополнительная мощность деформации всего тела является функцией параметра χ. Условие минимума этой функции имеет вид

$$\frac{d\bar{W}}{d\chi} = 0. \tag{14.18}$$

Из этого условия может быть найдена функция $\chi = \chi(t)$. После этого при помощи формул (14.17) могут быть подсчитаны напряжения, а затем на основании соотношений (12.7) скорости деформаций.

В случае релаксационной задачи неустановившейся ползучести приближенное решение записывают в форме

$$\sigma_{ij} = \nu\sigma'_{ij}, \tag{14.19}$$

где $\nu = \nu(t)$ — функция времени.

Поскольку, как было принято ранее, в начальный момент времени пластические деформации отсутствуют и с течением времени напряжения стремятся к нулю, $\nu(0) = 1$, $\nu(\infty) = 0$.

В рассматриваемой задаче дополнительная мощность деформации всего тела является функцией параметра ν и поэтому условие минимума этой функции имеет вид

$$\frac{d\tilde{W}}{d\nu} = 0. \tag{14.20}$$

Из этого условия определяется функция $\nu = \nu(t)$. После этого при помощи формулы (14.19) могут быть подсчитаны напряжения.

Рассмотрим решение основной задачи для чистого изгиба бруса прямоугольного поперечного сечения (рис. 14.2). Напряженное состояние во всех точках бруса одноосное $\left(\sigma_i = \sigma;\ \sigma_0 = \frac{\sigma}{3}\right)$ и согласно формулам (14.6) и (14.10) получаем

$$U = \frac{\sigma^2}{2E}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\sigma}{E}\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \tag{14.21}$$

а

$$\Lambda = \frac{\sigma^{n+1}B}{n+1}. \tag{14.22}$$

Подставляя соотношения (14.21) и (14.22) в формулу (14.12), получаем

$$W = \frac{\sigma}{E}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma^{n+1}B}{n+1}. \tag{14.23}$$

Примем нормальное напряжение σ в форме (14.17)

$$\sigma = \sigma' + \chi(\sigma'' - \sigma'). \tag{14.24}$$

В рассматриваемой задаче напряжение в пределах упругости

$$\sigma' = \frac{My}{J_x}, \tag{14.25}$$

а напряжение в условиях установившейся ползучести σ'' определяется формулой (13.6). Подставляя выражения (14.25) и (13.6) в формулу (14.24) и используя формулы (13.7) и (13.8), получаем

$$\sigma = \sigma_{max}(0)(\zeta + \chi Y), \tag{14.26}$$

где

$$\sigma_{max}(0) = \frac{Mh}{2J_x}$$

— максимальное напряжение в начальный момент времени;

$$\zeta = \frac{2y}{h}; \quad Y = \frac{2n+1}{3n}\zeta^{\frac{1}{n}} - \zeta. \tag{14.27}$$

Подставим теперь уравнение (14.26) в соотношение (14.23). Тогда получим

$$W = \frac{\sigma_{\max}^2(0)}{E}(\zeta + \chi Y)\, Y \frac{d\chi}{dt} + \frac{\sigma_{\max}^{n+1}(0)\, B}{n+1}(\zeta + \chi Y)^{n+1}. \tag{14.28}$$

Преобразуем условие (14.18), учитывая соотношения (14.15), (14.28), а также то, что в рассматриваемой задаче

$$dV = \frac{lbh}{2}\, d\zeta.$$

Тогда получим

$$\frac{d}{d\chi}\int_0^1 \left[\frac{\sigma_{\max}^2(0)}{E}(\zeta + \chi Y)\, Y \frac{d\chi}{dt} + \frac{\sigma_{\max}^{n+1}(0)\, B}{n+1}(\zeta + \chi Y)^{n+1}\right] d\zeta = 0.$$

После преобразований, принимая во внимание, что

$$\int_0^1 Y^2\, d\zeta = \frac{(n-1)^2}{9n(n+2)}$$

и обозначая

$$Q = \int_0^1 (\zeta + \chi Y)^n\, Y\, d\zeta,$$

получаем

$$\frac{9n(n+2)}{(n-1)^2} E\sigma_{\max}^{n-1}(0)\, B\, dt = -\frac{d\chi}{Q}. \tag{14.29}$$

Введем безразмерное время

$$t^* = \frac{9n(n+2)}{(n-1)^2} E\sigma_{\max}^{n-1}(0)\, \Omega \tag{14.30}$$

Тогда выражение (14.29) примет вид

$$dt^* = -\frac{d\chi}{Q}.$$

Интегрируя с учетом того, что при $t = 0$, $t^* = 0$, $\chi = 0$, получаем

$$t^* = -\int_0^{\chi} \frac{d\chi}{Q}. \tag{14.31}$$

Это уравнение устанавливает зависимость безразмерного времени от параметра χ. С помощью уравнения (14.31) может быть вычислена величина χ для любого значения времени, после чего по формуле (14.24) можно определить напряжения, а по формуле (14.3) скорость изменения кривизны.

На рис. 14.3 представлен график функции $\chi = \chi(t^*)$, где $n = 3$, а на рис. 14.4 эпюры безразмерных напряжений в поперечном сечении для различных значений безразмерного времени.

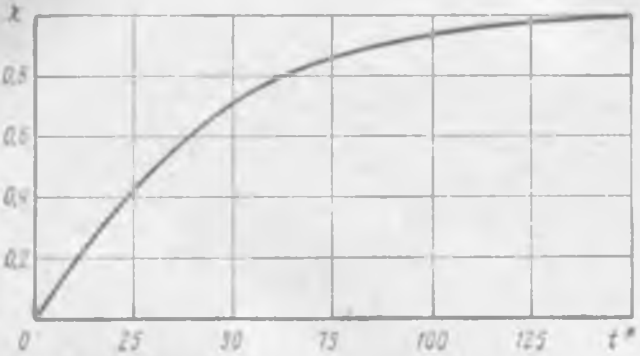


Рис. 14.3. График функции $\chi = \chi(t^*)$

Разберем теперь решение релаксационной задачи для кручения бруса круглого поперечного сечения. В этом случае напряженное состояние во всех точках бруса — чистый сдвиг ($\sigma_i = \sqrt{3}\tau$, $\sigma_0 = 0$) и согласно формулам (14.6) и (14.10) имеем

$$U = \frac{\tau^2}{2G}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\tau}{G}\frac{\partial \tau}{\partial t}, \qquad (14.32)$$

а

$$\Lambda = \frac{\tau^{n+1} 3^{\frac{n+1}{2}} B}{n+1}. \qquad (14.33)$$

Подставляя соотношения (14.32) и (14.33) в формулу (14.12), получаем

$$W = \frac{\tau}{G}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\tau^{n+1} 3^{\frac{n+1}{2}} B}{n+1}. \qquad (14.34)$$

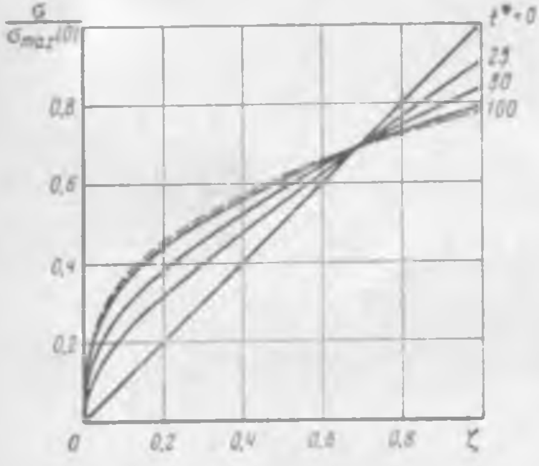


Рис. 14.4. Эпюры безразмерных напряжений в поперечном сечении изогнутой балки для различных значений безразмерного времени t^* (сплошные линии) и в условиях установившейся ползучести (штриховая линия)

Примем касательное напряжение в форме (14.19)

$$\tau = \nu\tau', \qquad (14.35)$$

где ν — искомая функция времени: $\nu = \nu(t)$, а τ' — касательное напряжение в пределах упругости. Последнее может быть представлено в виде

$$\tau' = \tau_{max}(0)\,\rho,$$

где

$$\rho = \frac{2r}{D}$$

и, следовательно,

$$\tau = \tau_{\max}(0)\,\rho\nu. \tag{14.36}$$

Подставим уравнение (14.36) в соотношение (14.34). Тогда получим

$$W = \frac{\tau_{\max}^2(0)}{G}\rho^2\nu\frac{d\nu}{dt} + \frac{\tau_{\max}^{n+1}(0)\,\rho^{n+1}\nu^{n+1}}{n+1}3^{\frac{n+1}{2}}B. \tag{14.37}$$

Преобразуем условие (14.20), учитывая соотношения (14.15) и (14.37), а также то, что в рассматриваемой задаче

$$dV = 2\pi r\,dr\,l = \frac{\pi D^2}{2}l\rho\,d\rho.$$

Тогда получим

$$\frac{d}{d\nu}\int_0^1\left[\frac{\tau_{\max}^2(0)}{G}\rho^2\nu\frac{d\nu}{dt} + \frac{\tau_{\max}^{n+1}(0)\,\rho^{n+1}\nu^{n+1}}{n+1}3^{\frac{n+1}{2}}B\right]\rho\,d\rho = 0.$$

Выполнив интегрирование и дифференцирование, приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d\nu}{\nu^n} = -\frac{4}{n+3}G\tau_{\max}^{n-1}(0)\,3^{\frac{n+1}{2}}B\,dt.$$

Проинтегрируем последнее уравнение, введя безразмерное время

$$t^* = (n-1)\,G\tau_{\max}^{n-1}(0)\,3^{\frac{n+1}{2}}\Omega. \tag{14.38}$$

Тогда получим

$$\nu = \left(1 + \frac{4}{n+3}t^*\right)^{\frac{1}{1-n}}. \tag{14.39}$$

Следовательно, согласно формуле (14.36)

$$\tau = \tau_{\max}(0)\,\rho\left(1 + \frac{4}{n+3}t^*\right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

Подставим эту величину касательного напряжения в выражение для крутящего момента

$$M = 2\pi\int_0^{\frac{D}{2}}\tau r^2\,dr = \frac{\pi D^3}{4}\int_0^1\tau\rho^2\,d\rho. \tag{14.40}$$

Учитывая, что

$$\tau_{\max}(0)\frac{\pi D^3}{16} = M(0) \tag{14.41}$$

крутящий момент при $t = 0$, получим закон изменения во времени крутящего момента

$$M = M(0)\left(1 + \frac{4}{n+3} t^*\right)^{\frac{1}{1-n}}. \quad (14.42)$$

Рассматриваемая задача может быть решена точно в замкнутом виде. Интересно сопоставить приведенное выше приближенное решение задачи, основанное на принципе минимума дополнительной мощности, с точным.

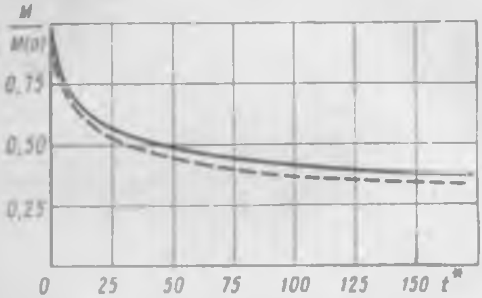


Рис. 14.5. Графики изменения во времени безразмерного крутящего момента по точному (сплошная линия) и приближенному (штриховая линия) решениям

Разберем точное решение. Угловая деформация в некоторой точке поперечного сечения на радиусе r связана с относительным углом закручивания бруса θ соотношением

$$\gamma = r\theta$$

и, следовательно, при постоянном во времени относительном угле закручивания угловая деформация во всех точках поперечного сечения постоянна, а скорость ее

$$\eta = 0. \quad (14.43)$$

Согласно формулам (12.7) и (12.24) по теории течения, учитывая что $\sigma_i = \sqrt{3}\tau$, имеем

$$\eta = \frac{\dot{\tau}}{G} + \tau^n 3^{\frac{n+1}{2}} B,$$

откуда на основании выражения (14.43)

$$\frac{d\tau}{\tau^n} = -G 3^{\frac{n+1}{2}} B\, dt.$$

Проинтегрируем это уравнение, введя безразмерное время по формуле (14.38). Учитывая, что при $t = 0$ $\tau = \tau(0) = \tau_{\max}(0)\rho$, получаем закон изменения во времени касательного напряжения в текущей точке поперечного сечения с безразмерной координатой ρ

$$\tau = \tau_{\max}(0)\rho(1 + t^*\rho^{n-1})^{\frac{1}{1-n}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (14.40) и используя соотношение (14.41), устанавливаем закон изменения во времени крутящего момента

$$M = 4M(0)\int_0^1 \rho^3 (1 + t^* \rho^{n-1})^{\frac{1}{1-n}} d\rho. \tag{14.44}$$

На рис. 14.5 представлены графики изменения во времени крутящих моментов по точному (14.44) и приближенному (14.42) решениям для $n = 5$. Как следует из рис. 14.5, различие между ними невелико.

§ 95. Теория упрочнения

Решение задач неустановившейся ползучести по теории упрочнения связано со значительно бо́льшими трудностями, чем по другим теориям. Эффективным методом расчета с использованием электронных вычислительных машин является предложенный Ю. Н. Работновым [15] метод расчета шагами во времени. Проиллюстрируем этот метод на примере расчета стержневой системы, рассмотренной в § 81 (см. рис. 12.26). Примем аналитическую формулировку теории упрочнения (12.28) и (12.29). Задача решается на основе уравнения равновесия (12.79), условия совместности деформаций (12.80) и зависимостей между скоростями деформаций ползучести, деформациями ползучести и напряжениями, записанными для первого и второго стержней.

Разобьем интервал времени, за который необходимо исследовать процессы изменения во времени напряжений и деформаций на ряд небольших интервалов Δt, которые могут быть равны или неравны между собой. Допустим, что в момент времени t_k напряжения и деформации известны. Выведем уравнения, которые позволят по этим величинам определить напряжения и деформации в момент времени $t_{k+1} = t_k + \Delta t_k$.

Для этого момента времени уравнение равновесия (12.79) принимает вид

$$\sigma_{1,\,k+1} + \sigma_{2,\,k+1} = S. \tag{14.45}$$

Преобразуем условие совместности деформации (12.80), разделив в нем полную деформацию на упругую и деформацию ползучести и записав его для момента времени t_{k+1}:

$$\frac{\sigma_{2,\,k+1}}{E} + \varepsilon^c_{2,\,k+1} = 2\left(\frac{\sigma_{1,\,k+1}}{E} + \varepsilon^c_{1,\,k+1}\right). \tag{14.46}$$

При помощи зависимостей (12.28) и (12.29) свяжем деформации ползучести в моменты времени t_{k+1} и t_k для первого и второго стержней. При этом учтем, что

$$\dot{\varepsilon}^c_k = \frac{\varepsilon^c_{k+1} - \varepsilon^c_k}{\Delta t_k}.$$

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^c_{1,\,k+1} &= \varepsilon^c_{1,\,k} + \alpha\left(\varepsilon^c_{1,\,k}\right)^{-\beta} \sigma^{\nu}_{1,\,k}\,\Delta t_k; \\ \varepsilon^c_{2,\,k+1} &= \varepsilon^c_{2,\,k} + \alpha\left(\varepsilon^c_{2,\,k}\right)^{-\beta} \sigma^{\nu}_{2,\,k}\,\Delta t_k. \end{aligned}\right\} \qquad (14.47)$$

Четыре уравнения (14.45)—(14.47) позволяют определить четыре неизвестных: два напряжения и две деформации ползучести для момента времени t_{k+1} по значениям их для момента времени t_k.

Уравнения (14.47) неудобны для использования в начальный момент времени, когда деформация ползучести равна нулю, поскольку эта величина в правой части уравнений возводится в отрицательную

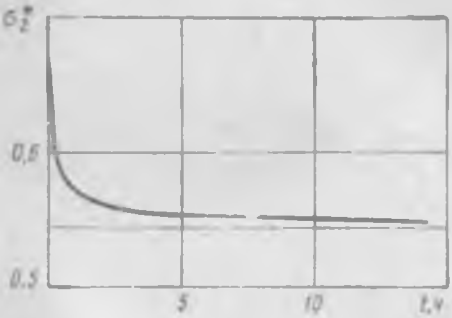


Рис. 14.6. График изменения во времени безразмерного напряжения во втором стержне для стержневой системы, представленной на рис. 12.26

степень. Для этого случая зависимости между деформациями ползучести в моменты времени t_{k+1} и t_k могут быть представлены в иной форме.

Интегрируя выражение (12.28) в пределах изменения t от t_k до t_{k+1}, используя соотношение (12.29), получаем

$$\left(\varepsilon^c_{k+1}\right)^{\beta+1} = \left(\varepsilon^c_k\right)^{\beta+1} + \alpha\,(\beta+1)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma^{\nu}\,dt.$$

Полагая в течение малого промежутка времени $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ напряжение постоянным $\sigma = \sigma_k$, получаем для первого и второго стержней

$$\left.\begin{aligned} \left(\varepsilon^c_{1,\,k+1}\right)^{\beta+1} &= \left(\varepsilon^c_{1,\,k}\right)^{\beta+1} + \alpha\,(\beta+1)\,\sigma^{\nu}_{1,\,k}\,\Delta t_k; \\ \left(\varepsilon^c_{2,\,k+1}\right)^{\beta+1} &= \left(\varepsilon^c_{2,\,k}\right)^{\beta+1} + \alpha\,(\beta+1)\,\sigma^{\nu}_{2,\,k}\,\Delta t_k. \end{aligned}\right\} \qquad (14.48)$$

Эти уравнения несколько сложнее уравнений (14.47), однако они могут быть использованы и для начального момента времени.

На рис. 14.6 изображен график изменения во времени безразмерного напряжения во втором стержне

$$\sigma^*_2 = \frac{\sigma_2}{s}$$

в предположении, что материал стержней сталь 30ХМ, температура $\vartheta = 500^\circ$ С. Постоянные в уравнениях (12.28) и (12.29) для этого материала при указанной температуре [5]:

$$\beta = 0{,}630; \; \nu = 6{,}63;$$
$$\alpha = 1{,}00\cdot 10^{-11}\ (\text{м}^2/\text{МН})^{\nu}\ 1/\text{ч}.$$

Из графика следует, что так же, как и в случае решения задачи по теории течения (см. § 81), напряжения быстро изменяются от начального упругого состояния до установившегося. Величина безразмерного напряжения в условиях установившейся ползучести при $n = \frac{\nu}{1+\beta} = 4{,}07$, согласно формуле (12.82), $(\sigma^{\circ})'' = 0{,}543$.

Список литературы

1. **Биргер И. А.** Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести.— «Известия АН СССР. Механика», 1965, № 2, с. 113—119.
2. **Ильюшин А. А., Поспелов И. И.** О методе последовательных приближений в задаче о неустановившейся ползучести. — «Инженерный журнал», 1964, т. IV, вып. 4, с. 697—704.
3. **Качанов Л. М.** К теории неустановившейся ползучести.— «Прикладная математика и механика», 1949, т. XIII, вып. 4, с. 381—390.
4. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960, с. 455.
5. **Кулешова З. Г.** Проверка гипотезы упрочнения путем анализа экспериментальных исследований ползучести.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1959, № 12, с. 69—76.
6. **Куратов П. С., Розенблюм В. И.** Об интегрировании уравнений неустановившейся ползучести твердых тел.— «Прикладная математика и механика», 1960, т. XXIV, вып. I, с. 146—148.
7. **Малинин Н. Н.** Основы расчетов на ползучесть. М., Машгиз, 1948, 120 с.
8. **Малинин Н. Н.** Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести.— «Инженерный сборник», т. X, Изд-во АН СССР, 1951, с. 17—34.
9. **Малинин Н. Н.** Обзор отечественных работ по расчета деталей машин на ползучесть. В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей]. Вып. 11, М., «Машиностроение», 1965, с. 229—278.
10. **Малинин Н. Н.** Ползучесть элементов машин. Обзор. В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей]. Вып. 14. «Машиностроение», 1969, с. 217—267.
11. **Подгорный А. Н.** Ползучесть толстостенного цилиндра конечной длины.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 5, Киев «Наукова думка», 1965, с. 260—269.
12. **Подгорный А. Н.** Толстостенный цилиндр конечной длины в условиях ползучести.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 11. Киев, «Наукова думка», 1971, с. 155—159.
13. **Поспелов И. И.** Метод последовательных приближений в задаче о неустановившейся ползучести и нелинейной упругости.— «Ученые записки ЦАГИ», 1970, т. 1, № 2, с. 94—100.
14. **Рабинович В. П.** Прочность турбинных дисков. М., «Машиностроение», 1966, 151 с.
15. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.
16. **Расчеты на прочность в машиностроении.** Т. II. М., Машгиз, 1958, 974 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др.
17. **Шестериков С. А.** Об одном вариационном принципе в теории ползучести.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1957, № 2, с. 122—123.
18. **Шестериков С. А.** Расчет дисков на релаксацию.— «Журнал прикладной механики и технической физики», 1960, № 1, с. 117—120.
19. **Finnie I., Heller W. R.** Creep of engineering materials, Mc Graw—Hill Book Company Inc, New-York, Toronto, London, 1959, 341 p.
20. **Hult J.** Creep in engineering structures, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, Toronto, London, 1966, 115 p.
21. **Lubahn J. D., Felgar R. P.** Plasticity and creep of metals, John Wiley and Sons, Inc. New-York, London, 1961, 608 p.
22. **Odqvist F. K. G., Hult J.** Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe, Springer—Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962, 303 s.
23. **Odqvist F. K. G.** Mathematical theory of creep and creep rupture, Oxford, At the Clarendon Press, 1966, 170 p.

ГЛАВА XV

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАЗРУШЕНИЯ

§ 96. Растяжение стержня

Выше в § 73 было рассмотрено определение коэффициента запаса в случае одноосного растяжения как при стационарном, так и при нестационарном режимах нагружения и нагрева. В § 82 приведена величина эквивалентного напряжения для оценки длительной прочности при неодноосном напряженном состоянии. В простейшем случае стационарных режимов нагружения и нагрева оценка прочности производилась путем сопоставления эквивалентного напряжения с пределом длительной прочности. Возможен иной путь исследования длительной прочности: определение времени разрушения элемента конструкции. При этом следует рассмотреть различные типы разрушений: вязкое при больших деформациях, хрупкое при малых, а также смешанное.

Изложим вначале решение задачи определения времени вязкого разрушения растянутого стержня. Это решение было дано Хоффом [24]. Обозначим изменяющиеся во времени площадь поперечного сечения стержня и его длину через F и l соответственно. Значения их в начальный момент времени F_0 и l_0.

Из условия несжимаемости материала имеем

$$Fl = F_0 l_0. \tag{15.1}$$

Напряжение в поперечном сечении стержня

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

или с использованием соотношения (15.1)

$$\sigma = \frac{P}{F_0}\frac{l}{l_0}. \tag{15.2}$$

Ввиду того что вязкое разрушение возникает при больших деформациях, пренебрежем упругими деформациями по сравнению с деформациями ползучести, которые будем оценивать логарифмическими деформациями (см. § 15).

$$\overline{\varepsilon^c} = \ln\frac{l}{l_0}.$$

Скорость логарифмической деформации ползучести

$$\bar{\xi}^c = \frac{d\bar{e}^c}{dt} = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}. \qquad (15.3)$$

Допустим, что зависимость скорости логарифмической деформации ползучести от напряжения является степенной, так же, как и при малых деформациях [см. формулу (11.4)]

$$\bar{\xi}^c = k\sigma^n.$$

Подставим в это выражение соотношения (15.2) и (15.3). Тогда получим

$$\frac{dl}{l^{n+1}} = \frac{k\sigma_0^n}{l_0^n}\,dt.$$

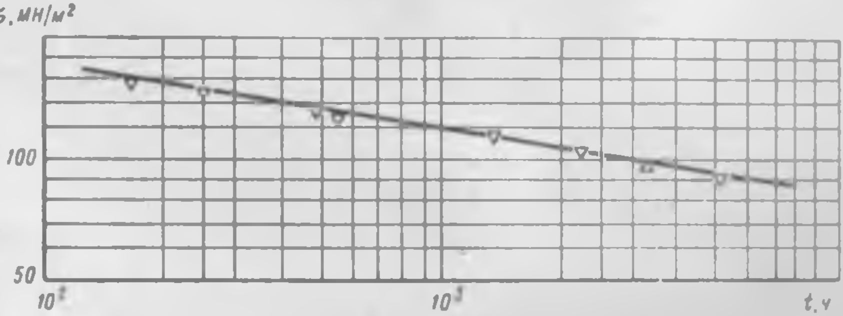


Рис. 15.1. Сопоставление графика зависимости (15.5) с результатами опытов [7]

Проинтегрируем полученное уравнение, используя условие при $t = 0$ $l = l_0$.

Тогда после преобразований с учетом соотношения (15.1) имеем

$$\frac{l_0}{l} = \frac{F}{F_0} = (1 - nk\sigma_0^n t)^{\frac{1}{n}}. \qquad (15.4)$$

Назовем временем вязкого разрушения время, для которого площадь поперечного сечения стержня обращается в нуль или для которого длина стержня стремится к бесконечности. Из выражения (15.4) получаем время вязкого разрушения

$$t_p^s = \frac{1}{nk\sigma_0^n}. \qquad (15.5)$$

На рис. 15.1 представлен график этой зависимости и даны точки, полученные в опытах Ш. Н. Каца [7]. Экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими.

Однако изложенная выше концепция имеет ограниченное применение, так как она не отражает хрупкие разрушения, происходящие при малых деформациях. В частности, согласно рассмотренной схеме, в случае ползучести скрученного стержня невозможно разрушение, так как при кручении не происходит изменения размеров стержня.

Л. М. Качановым [5, 7] была предложена теория хрупкого и вязко-хрупкого разрушений элементов конструкций. Процесс разрушения рассматривается как процесс возникновения и развития трещин в условиях ползучести. При этом принимается, что процесс развития трещин не влияет на деформацию ползучести.

Введем понятие сплошности ψ, которое характеризует развитие трещин (поврежденность материала). В начальный момент времени при отсутствии поврежденности $\psi = 1$. С течением времени сплошность ψ убывает. Допустим, что в момент хрупкого разрушения $\psi = 0$.

Примем следующую зависимость сплошности от максимального главного напряжения:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_{max}}{\psi}\right)^m, \tag{15.6}$$

где A и m — постоянные для материала при определенной температуре. Отношение $\frac{\sigma_{max}}{\psi}$ можно рассматривать как некоторое действительное (эффективное) напряжение.

Определим время хрупкого разрушения растянутого стержня. В этом случае, пренебрегая изменением площади поперечного сечения, имеем

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0} = \sigma_0$$

и из формулы (15.6) получаем

$$\psi^m d\psi = -A\sigma_0^m dt.$$

Проинтегрируем это уравнение, используя условие

при $t = 0$ $\psi = 1$. (15.7)

Тогда получим

$$\psi^{m+1} - 1 = -(m+1)A\sigma_0^m t.$$

Время хрупкого разрушения t_p^x получим, полагая в этом уравнении $\psi = 0$

$$t_p^x = \frac{1}{(m+1)A\sigma_0^m}. \tag{15.8}$$

Установим теперь время вязко-хрупкого разрушения растянутого стержня. При этом учтем изменение площади поперечного сечения в процессе ползучести материала.

Тогда согласно формулам (15.4) и (15.5)

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} = \sigma_0\left(1 - \frac{t}{t_p^в}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Подставим эту величину в формулу (15.6). Тогда получим дифференциальное уравнение для функции ψ

$$\psi^m d\psi = -A\sigma_0^m\left(1 - \frac{t}{t_p^в}\right)^{-\frac{m}{n}} dt.$$

Проинтегрируем его, принимая во внимание условие (15.7). После преобразований с использованием соотношения (15.8) имеем

$$\psi^{m+1}-1=\frac{n}{n-m}\,\frac{t_{\mathrm{p}}^{*}}{t_{\mathrm{p}}^{x}}\left[\left(1-\frac{t}{t_{\mathrm{p}}^{*}}\right)^{\frac{n-m}{n}}-1\right]. \qquad (15.9)$$

Полагая в этом уравнении $\psi = 0$, получим время вязко-хрупкого разрушения t_{p}:

$$t_{\mathrm{p}}=t_{\mathrm{p}}^{*}\left[1-\left(1-\frac{n-m}{n}\,\frac{t_{\mathrm{p}}^{x}}{t_{\mathrm{p}}^{*}}\right)^{\frac{n}{n-m}}\right]. \qquad (15.10)$$

В логарифмических координатах $\lg t_{\mathrm{p}}$, $\lg \sigma_0$ (рис. 15.2) уравнения (15.5) и (15.8) описывают прямые AB и CD. Учитывая, что прямая CD, соответствующая хрупкому разрушению, наклонена под большим углом к оси абсцисс, чем прямая AB для вязкого разрушения, заключаем, что $n > m$. Уравнение (15.10) в тех же координатах является уравнением кривой линии GH, асимптотически приближающейся к прямой CD. Ординату точки G пересечения этой кривой с прямой AB можно определить, приравнивая выражения (15.5) и (15.10). После преобразований с использованием соотношений (15.5) и (15.8) получаем

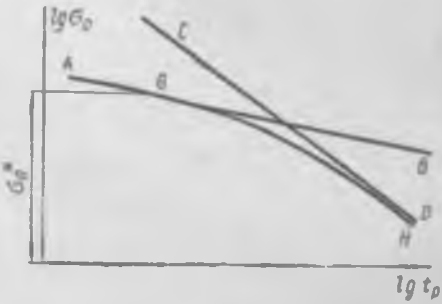


Рис. 15.2. Графики зависимостей (15.5) — AB, (15.8) — CD и (15.10) — GH

$$\sigma_0^{*}=\left[\frac{(m+1)A}{(n-m)k}\right]^{\frac{1}{n-m}}. \qquad (15.11)$$

При больших напряжениях разрушение является вязким, и время разрушения подсчитывают по формуле (15.5).

§ 97. Кручение круглого стержня

Как уже указывалось в предыдущем параграфе, при кручении стержня вязкое разрушение невозможно, так как в этом случае размеры стержня не изменяются. Приведем полученное Л. М. Качановым [5] решение задачи определения времени хрупкого разрушения круглого стержня при кручении.

Хрупкое разрушение начинается в момент времени t_{p}^{*} в наиболее напряженных точках при $r=\frac{D}{2}$. Этот промежуток времени называют стадией скрытого разрушения. Возникшее разрушение с течением времени распространяется и в момент времени t_{p} происходит полное разрушение. Промежуток $t_{\mathrm{p}}-t_{\mathrm{p}}^{*}$ называют стадией распространения разрушения.

Определим время начала разрушения $t_{\text{р}}^*$. В случае чистого сдвига $\sigma_{\max} = \tau$. Подставляя в формулу (15.6) величину касательного напряжения по формулам (13.44) и (13.42), получаем

$$\psi^m d\psi = -A\left[\frac{(3n+1)M}{n2\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}\right]^m \left(\frac{2r}{D}\right)^{\frac{m}{n}} dt.$$

Проинтегрируем это уравнение, используя условие (15.7). Тогда получим

$$\psi^{m+1} - 1 = -(m+1)A\left[\frac{(3n+1)M}{n2\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}\right]^m \left(\frac{2r}{D}\right)^{\frac{m}{n}} t. \qquad (15.12)$$

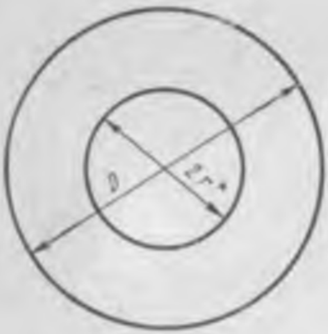


Рис. 15.3. Несущее ядро радиуса r^* в поперечном сечении круглого скрученного бруса

В момент начала разрушения при

$$r = \frac{D}{2} \quad \psi = 0.$$

Из этого условия получим время начала разрушения

$$t_{\text{р}}^* = \frac{1}{(m+1)A\left[\frac{(3n+1)M}{n2\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}\right]^m}. \qquad (15.13)$$

Сплошность в момент начала разрушения ψ^* в зависимости от радиуса получаем по формуле (15.12)

$$(\psi^*)^{m+1} - 1 = -(m+1)A\left[\frac{(3n+1)M}{n2\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}\right]^m \left(\frac{2r}{D}\right)^{\frac{m}{n}} t_{\text{р}}^*. \qquad (15.14)$$

После начала разрушения в точках, наиболее удаленных от центра при $r = \frac{D}{2}$, оно распространяется к центру и в некоторый момент t захватывает область, ограниченную окружностями радиусов r^* и $\frac{D}{2}$ (рис. 15.3). Радиус r^* несущего ядра является функцией времени.

В несущем ядре $0 \leqslant r \leqslant r^*$ сплошность $\psi > 0$, а на границе его (окружность радиуса r^*), которая в рассматриваемом случае является фронтом разрушения, $\psi = 0$. Поскольку это равенство выполняется в любой момент времени, имеем при $r = r^*$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{r=r^*} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial r^*}\frac{dr^*}{dt}\right)_{r=r^*} = 0,$$

откуда

$$\frac{dr^*}{dt} = -\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{r=r^*}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial r^*}\right)_{r=r^*}}. \tag{15.15}$$

Для вычисления производных, стоящих в числителе и знаменателе этой формулы, получим вначале выражение для ψ.

После возникновения области разрушения касательное напряжение в некоторой точке поперечного сечения на радиусе r определяем по формулам (13.44) и (13.42) путем подстановки в них вместо радиуса сечения $\frac{D}{2}$ радиуса несущего ядра r^*. Тогда получим

$$\tau = \frac{(3n+1)M}{2\pi n\,(r^*)^3}\left(\frac{r}{r^*}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Подставим эту величину τ в формулу (15.6). Тогда получим

$$\psi^m d\psi = -A\left[\frac{(3n+1)M}{2\pi n\,(r^*)^3}\right]^m \left(\frac{r}{r^*}\right)^{\frac{m}{n}} dt. \tag{15.16}$$

Из уравнения (15.16) следует, что

$$\left(\psi^m \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{r=r^*} = -A\left[\frac{(3n+1)M}{2\pi n}\right]^m (r^*)^{-3m}. \tag{15.17}$$

Проинтегрируем уравнение (15.16), учитывая, что при $t = t_p^*$

$$\psi = \psi^*.$$

Тогда получим

$$\psi^{m+1} - (\psi^*)^{m+1} = -(m+1)A\left[\frac{(3n+1)M}{2\pi n}\right]^m r^{\frac{m}{n}} \int_{t_p^*}^{t} (r^*)^{-3m-\frac{m}{n}} dt.$$

Продифференцируем это соотношение по радиусу r. В результате имеем

$$\psi^m \frac{\partial \psi}{\partial r} - (\psi^*)^m \frac{\partial \psi^*}{\partial r} = -\frac{m}{n} A\left[\frac{(3n+1)M}{2\pi n}\right]^m r^{\frac{m-n}{n}} \int_{t_p^*}^{t} (r^*)^{-3m-\frac{m}{n}} dt. \tag{15.18}$$

Величину $(\psi^*)^m \frac{\partial \psi^*}{\partial r}$ устанавливаем при помощи формулы (15.14)

$$(\psi^*)^m \frac{\partial \psi^*}{\partial r} = -\frac{m}{n} A\left[\frac{(3n+1)M}{2\pi n}\right]^m \left(\frac{D}{2}\right)^{-3m-\frac{m}{n}} r^{\frac{m-n}{n}} t_p^*.$$

Подставим эту величину в формулу (15.18) и затем положим $r = r^*$. Тогда получим

$$\left(\psi^m \frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=r^*} = -\frac{m}{n} A \left[\frac{(3n+1) M}{2\pi n}\right]^m \cdot$$

$$(r^*)^{\frac{m-n}{n}} \left[\left(\frac{D}{2}\right)^{-3m-\frac{m}{n}} t_p^* + \int\limits_{t_p^*}^{t} (r^*)^{-3m-\frac{m}{n}} dt\right]. \qquad (15.19)$$

Подставим теперь выражения (15.17) и (15.19) в формулу (15.15). Тогда получим

$$\frac{dr^*}{dt} = -\frac{\frac{n}{m}(r^*)^{-3m-\frac{m}{n}+1}}{\left(\frac{D}{2}\right)^{-3m-\frac{m}{n}} t_p^* + \int\limits_{t_p^*}^{t} (r^*)^{-3m-\frac{m}{n}} dt}. \qquad (15.20)$$

Обозначим

$$R = (r^*)^{3m+\frac{m}{n}}. \qquad (15.21)$$

Тогда уравнение (15.20) приводится к виду

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{3n+1}{\left(\frac{D}{2}\right)^{-3m-\frac{m}{n}} t_p^* + \int\limits_{t_p^*}^{t} R^{-1} dt}. \qquad (15.22)$$

Перепишем уравнение (15.22) в форме

$$\left(\frac{D}{2}\right)^{-3m-\frac{m}{n}} t_p^* + \int\limits_{t_p^*}^{t} R^{-1} dt = -\frac{3n+1}{\frac{dR}{dt}}$$

и полученный результат продифференцируем по времени. Тогда имеем

$$R^{-1} = \frac{(3n+1)\frac{d^2R}{dt^2}}{\left(\frac{dR}{dt}\right)^2}$$

или

$$\frac{\frac{d^2R}{dt^2}}{\frac{dR}{dt}} - \frac{1}{3n+1}\frac{\frac{dR}{dt}}{R} = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{dR}{dt} - \frac{1}{3n+1}\ln R\right) = 0. \qquad (15.23)$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение

$$\ln\frac{dR}{dt} - \frac{1}{3n+1}\ln R = \ln\frac{3n+1}{3n} C_1$$

и, следовательно,

$$R^{-\frac{1}{3n+1}} \frac{dR}{dt} = \frac{3n+1}{3n} C_1. \qquad (15.24)$$

Интегрируя еще раз, имеем

$$R^{\frac{3n}{3n+1}} = C_1 t + C_2. \qquad (15.25)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из условий, которые следуют из выражений (15.21) и (15.22):

$$\text{при } t = t_p^* \quad r^* = \frac{D}{2} \quad R = \left(\frac{D}{2}\right)^{3m+\frac{m}{n}};$$

$$\text{при } t = t_p^* \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{3n+1}{t_p^*}\left(\frac{D}{2}\right)^{3m+\frac{m}{n}}.$$

Используя эти условия и соотношения (15.24) и (15.25), получаем

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{3n}{t_p^*}\left(\frac{D}{2}\right)^{3m}; \\ C_2 &= (3n+1)\left(\frac{D}{2}\right)^{3m}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.26)$$

Время полного хрупкого разрушения t_p определяется из условия равенства нулю радиуса r^* и, следовательно, согласно формуле (15.21) из условия равенства нулю величины R. Полагая в формуле (15.25) $R = 0$ и используя соотношения (15.26), устанавливаем

$$t_p = -\frac{C_2}{C_1} = \left(1 + \frac{1}{3n}\right) t_p^*. \qquad (15.27)$$

Поскольку величина n обычно значительно больше единицы, в рассматриваемом случае стадия распространения разрушения по времени значительно меньше стадии скрытого разрушения.

§ 98. Тонкостенные трубы

Ниже изложены полученные Л. М. Качановым [5, 7] решения задач определения времени вязкого, хрупкого и вязко-хрупкого разрушения тонкостенных труб. Вначале разберем определение времени вязкого разрушения.

Рассмотрим тонкостенную трубу с днищами, нагруженную внутренним давлением p. Обозначим изменяющиеся во времени толщину и средний диаметр трубы соответственно через h и D. Значения их в начальный момент времени h_0 и D_0.

Из условия несжимаемости материала имеем

$$Dh = D_0 h_0. \qquad (15.28)$$

Окружное и осевое напряжения в тонкостенной трубе с днищами, нагруженной внутренним давлением,

$$\sigma_t = \frac{pD}{2h}, \quad \sigma_z = \frac{pD}{4h}. \tag{15.29}$$

Радиальное напряжение в тонкостенной трубе, нагруженной внутренним давлением, может быть приближенно принято равным нулю $\sigma_r = 0$. Величину интенсивности напряжений определяем по формуле (1.21)

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_t = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{pD}{h}. \tag{15.30}$$

Как и в § 96, учитывая, что вязкое разрушение возникает при больших деформациях, пренебрежем упругими деформациями по сравнению с деформациями ползучести, которые будем оценивать логарифмическими деформациями.

Зависимости скоростей логарифмических деформаций от напряжений примем в форме (12.6), (12.24), учитывая, что для больших значений времени $B = k$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi}_t &= \frac{3}{2} k\sigma_i^{n-1}(\sigma_t - \sigma_0); \\ \bar{\xi}_r &= \frac{3}{2} k\sigma_i^{n-1}(0 - \sigma_0); \\ \bar{\xi}_z &= \frac{3}{2} k\sigma_i^{n-1}(\sigma_z - \sigma_0). \end{aligned}\right| \tag{15.31}$$

Поскольку для рассматриваемого напряженного состояния

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_t + \sigma_r}{3} = \sigma_z = \frac{\sigma_t}{2},$$

получаем, используя соотношения (15.28) — (15.31),

$$\bar{\xi}_t = -\bar{\xi}_r = \frac{3}{4} k\sigma_i^{n-1}\sigma_t = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n+1}} k\sigma_t^n =$$

$$= \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2^{2n+1}} k\left(\frac{pD}{h}\right)^n = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2^{2n+1}} k\left(\frac{pD^2}{D_0 h_0}\right)^n; \tag{15.32}$$

$$\bar{\xi}_z = 0.$$

В рассматриваемой задаче логарифмическая окружная деформация

$$\bar{e}_t = \ln\frac{D}{D_0},$$

а скорость ее

$$\bar{\xi}_t = \frac{1}{D}\frac{dD}{dt} \tag{15.33}$$

Приравнивая выражения (15.32) и (15.33), получаем дифференциальное уравнение для среднего диаметра трубы

$$\left(\frac{D}{D_0}\right)^{-2n-1} d\left(\frac{D}{D_0}\right) = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2^{2n+1}}\left(\frac{pD_0}{h_0}\right)^n k\,dt.$$

Проинтегрируем это уравнение, используя условие при $t = 0$ $D = D_0$.

Тогда после преобразований с использованием соотношения (15.28) имеем

$$\frac{D_0}{D} = \frac{h}{h_0} = \left(1 - \frac{t}{t_p^{\text{в}}}\right)^{\frac{1}{2n}}, \tag{15.34}$$

где

$$t_p^{\text{в}} = \frac{1}{2n\bar{\xi}_{t_0}} \tag{15.35}$$

— время вязкого разрушения, для которого толщина стенки трубы обращается в ноль, а диаметр стремится к бесконечности;

$$\bar{\xi}_{t_0} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2^{2n+1}}\left(\frac{pD_0}{h_0}\right)^n k \tag{15.36}$$

— скорость логарифмической деформации в начальный момент времени.

Сопоставляя выражение (15.34) для тонкостенной цилиндрической трубы с соответствующими ему соотношениями (15.4) и (15.5) для растянутого стержня, приходим к выводу, что для первого случая показатель степени вдвое меньше, чем для второго. Учитывая, что постоянная n обычно значительно больше единицы, заключаем, что для тонкостенной трубы «последний» период деформирования, в котором происходит резкое уменьшение толщины стенки трубы, еще меньше, чем «последний» период деформирования для растянутого стержня, когда происходит резкое уменьшение площади поперечного сечения. Это объясняется тем, что в тонкостенной трубе напряжение растет не только за счет уменьшения толщины стенки, но также и вследствие увеличения диаметра трубы. Для растянутого стержня «последний» период деформирования тем меньше, чем больше показатель степени n.

Перейдем теперь к определению времени хрупкого разрушения трубы. В этом случае можно пренебречь изменением размеров трубы в процессе ползучести. Тогда максимальное главное напряжение $\sigma_{\max}$ равняется окружному напряжению в начальный момент времени σ_{t_0}

$$\sigma_{\max} = \sigma_{t_0} = \frac{pD_0}{2h_0}. \tag{15.37}$$

Из формулы (15.6) получаем

$$\psi^m d\psi = -A\sigma_{t_0}^m dt.$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия (15.7), имеем

$$\psi^m d\psi = -A\sigma_{t_0}^m dt.$$

Полагая в этом уравнении $\psi = 0$, устанавливаем время хрупкого разрушения трубы

$$t_p^x = \frac{1}{(m+1)A\sigma_{t_0}^m}. \tag{15.38}$$

Выведем теперь формулу для времени вязко-хрупкого разрушения трубы. При этом учтем изменение толщины стенки в процессе ползучести материала. Тогда согласно формулам (15.29), (15.34) и (15.37) получаем

$$\sigma_t = \sigma_{t_0}\left(1 - \frac{t}{t_p^в}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Подставляя эту величину в формулу (15.6), устанавливаем

$$\psi^m d\psi = -A\sigma_{t_0}^m\left(1 - \frac{t}{t_p^в}\right)^{-\frac{m}{n}} dt.$$

Проинтегрируем полученное уравнение, принимая во внимание условие (15.7). После преобразований с использованием соотношения (15.38) получаем выражение (15.9). Полагая в нем $\psi = 0$, находим время вязко-хрупкого разрушения тонкостенной трубы в форме (15.10), такой же, как и для растянутого стержня. Однако следует помнить, что величины $t_p^в$ и t_p^x определяются иначе, чем в случае растянутого стержня.

Как и для растянутого стержня, формула (15.10) имеет смысл при $t_p < t_p^в$. Из этого неравенства, используя соотношения (15.10), (15.35); (15.38) и (15.32), заключаем, что формула (15.10) справедлива при окружных напряжениях в начальный момент времени, меньших величины

$$\sigma_{t_0}^* = \left[\frac{2^n(m+1)A}{3^{\frac{n+1}{2}}k(n-m)}\right]^{\frac{1}{n-m}}. \tag{15.39}$$

При окружных напряжениях, больших этой величины, разрушение является вязким и время разрушения определяется формулой (15.35).

В работах [1, 3—12, 20, 21, 23, 26] решены задачи определения времени разрушения различных элементов конструкций. В работах [2, 13—19, 22, 23] рассмотрен несколько иной подход к определению времени разрушения.

Список литературы

1. **Григорьев А. С.** О времени вязкого разрушения и критическом времени в условиях ползучести.— «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1968, № 4, с. 147—148.

2. **Ильюшин А. А.** Об одной теории длительной прочности.— «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1967, № 3, с. 21—35.

3. **Кац Ш. Н.** Ползучесть и разрушение труб под действием внутреннего давления.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1957, № 10, с. 86—89.

4. **Кац Ш. Н.** О разрушении в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии.— «Известия АН СССР. Механика и машиностроение», 1960, № 4, с. 160—162.

5. **Качанов Л. М.** О времени разрушения в условиях ползучести.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1958, № 8, с. 26—31.

6. **Качанов Л. М.** О времени разрушения в условиях ползучести.— «Известия АН СССР, Механика и машиностроение», 1960, № 5, с. 88—92.

7. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960, 455 с.

8. **Качанов Л. М.** Время разрушения в условиях ползучести. В кн.: Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н. И. Мусхелишвили. М., Изд-во АН СССР, 1961, с. 186—200.

9. **Качанов Л. М.** Некоторые вопросы разрушения в условиях ползучести.— В кн.: Ползучесть и длительная прочность. Труды Всесоюзного совещания по теории расчетов на ползучесть и длительную прочность, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1963, с. 3—14.

10. **Качанов Л. М.** К вопросу о разрушениях в условиях ползучести. В кн.: ЛГУ им. А. А. Жданова. Исследования по упругости и пластичности. Сборник 6, Л., Изд. Ленинградского университета, 1967, с. 18—24.

11. **Качанов Л. М.** Хрупкие разрушения в условиях ползучести при циклическом нагружении. В кн.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. К шестидесятилетию академика В. В. Новожилова. М., «Судостроение», 1970, с. 197—204.

12. **Качанов Л. М.** Разрушения в условиях ползучести при сложном нагружении.— «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1972, № 5, с. 11—15.

13. **Милейко С. Т.** Оценка долговечности в условиях ползучести.— «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1968, № 5, с. 82—87.

14. **Наместников В. С.** О времени разрушения при ползучести.— «Журнал прикладной механики и технической физики», 1961, № 1, с. 137—139.

15. **Немировский Ю. В.** О времени эксплуатации и разрушения конструкций в условиях ползучести.— «Прикладная механика», 1970, том VI, вып. 3, с. 47—54.

16. **Работнов Ю. Н.** О механизме длительного разрушения. В кн.: Вопросы прочности материалов и конструкций. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 5—7.

17. **Работнов Ю. Н.** О разрушении вследствие ползучести.— «Журнал прикладной механики и технической физики», 1963, № 2, с. 113—123.

18. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.

19. **Работнов Ю. Н.** Влияние концентрации напряжений на длительную прочность.— «Инженерный журнал. МТТ», 1967, № 3, с. 36—41.

20. **Розенблюм В. И.** Время до разрушения вращающегося диска в условиях ползучести.— «Прикладная математика и механика», 1957, т. XXI, вып. 3, с. 440—444.

21. **Розенблюм В. И.** Влияние пластических деформаций на время разрушения при ползучести.— В кн.: Ползучесть и длительная прочность. Труды Всесоюзного совещания по теории расчетов на ползучесть и длительную прочность. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1963, с. 63—69.

22. **Хажинский Г. М.** О теории ползучести и длительной прочности металлов.— «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1971, № 6, с. 29—36.

23. **Хжановски М.** Влияние перераспределения напряжений на время хрупкого разрушения в условиях ползучести.— «Известия высших учебных заведений. Машиностроение», 1971, № 11, с. 13—21.

24. **Hoff H. J.** The neckling and the rupture of rods, subjected to constant tensile loads.—«Journal of applied mechanics», 1953, Vol. 20, No 1, p. 105—108.

25. **Odqvist F. K. G.** Mathematical theory of creep and creep rupture, Oxford, At the Clarendon Press, 1966, 170 p.

26. **Piechnik S.**, Chrzanowcki M., Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending.—«International journal of solids structures», 1970. Vol. 6, p. 453—477.

ГЛАВА XVI

ВЯЗКОУПРУГОСТЬ

§ 99. Механические модели деформируемого тела

Явление ползучести может быть описано также при помощи ме-анических моделей тел и наследственных теорий ползучести, ко-зрые можно рассматривать как обобщение механических моделей. Іаследственные теории ползучести нашли применение в расчетах лементов конструкций из полимерных материалов и бетонов, также в описании ползучести грунтов и горных пород. Имеются тдельные попытки использования наследственных теорий (в нели-ейных вариантах) в расчетах конструкций из металлов.

Рассмотрим вначале два основных элемента механических моде-іей тел: упругий и вязкий.

Конструктивно упругий элемент можно представить себе в виде ружины (рис. 16.1). Удлинение ее $\delta_у$ пропорционально приложен-юй силе P

$$\delta_у = k_1 P, \tag{16.1}$$

де k_1 — коэффициент пропорциональности.

Вязкий элемент может быть изображен в виде цилиндра, запол-іенного жидкостью, внутри которого перемещается поршень так, іто жидкость вытекает через зазор между цилиндром и поршнем рис. 16.2). Скорость перемещения $\delta_в$ поршня относительно цилиндра іропорциональна приложенной силе P:

$$\frac{d\delta_в}{dt} = k_2 P, \tag{16.2}$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности.

Если соединить упругий и вязкий элементы последовательно (рис. 16.3), то изменение расстояния между точками приложения сил P будет равно сумме удлинения пружины $\delta_у$ и перемещения поршня относительно цилиндра $\delta_в$:

$$\delta = \delta_у + \delta_в;$$

дифференцируя это соотношение по времени и используя выражения (16.1) и (16.2), имеем

$$\frac{d\delta}{dt} = k_1 \frac{dP}{dt} + k_2 P.$$

Переходя от перемещения δ и силы P к деформации ε и напряжению σ и заменяя коэффициенты k_1 и k_2 на $\frac{1}{E}$ и $\frac{1}{\eta}$ соответственно, где E — модуль упругости, η — коэффициент вязкости, получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}. \qquad (16.3)$$

Последнее уравнение описывает так называемое вязко-упругое тело Максвелла, а модель, изображенная на рис. 16.3, называют моделью вязко-упругого тела Максвелла, или элементом Максвелла.

Рис. 16.1. Упругий элемент

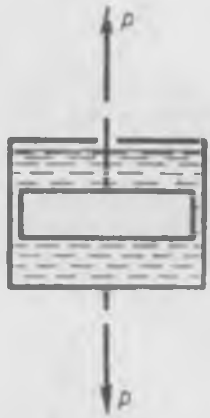


Рис. 16.2. Вязкий элемент

Рис. 16.3. Модель тела Максвелла — последовательное соединение упругого и вязкого элементов

Рассмотрим некоторые свойства этого тела. Как следует из уравнения (16.3), при постоянном во времени напряжении деформация растет с постоянной скоростью, пропорциональной напряжению, т. е. материал течет подобно вязкой жидкости, что не подтверждается экспериментальными исследованиями конструкционных материалов.

При постоянной деформации из уравнения (16.3) следует, что

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение и используя начальное условие при $t = 0$ $\sigma = \sigma(0)$, получим

$$\sigma = \sigma(0)\exp\left(-\frac{t}{t_0}\right),$$

где величина

$$t_0 = \frac{\eta}{E} \qquad (16.4)$$

ГЛАВА XVI

ВЯЗКОУПРУГОСТЬ

§ 99. Механические модели деформируемого тела

Явление ползучести может быть описано также при помощи механических моделей тел и наследственных теорий ползучести, которые можно рассматривать как обобщение механических моделей. Наследственные теории ползучести нашли применение в расчетах элементов конструкций из полимерных материалов и бетонов, а также в описании ползучести грунтов и горных пород. Имеются отдельные попытки использования наследственных теорий (в нелинейных вариантах) в расчетах конструкций из металлов.

Рассмотрим вначале два основных элемента механических моделей тел: упругий и вязкий.

Конструктивно упругий элемент можно представить себе в виде пружины (рис. 16.1). Удлинение ее $\delta_у$ пропорционально приложенной силе P

$$\delta_у = k_1 P, \tag{16.1}$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности.

Вязкий элемент может быть изображен в виде цилиндра, заполненного жидкостью, внутри которого перемещается поршень так, что жидкость вытекает через зазор между цилиндром и поршнем (рис. 16.2). Скорость перемещения $\delta_в$ поршня относительно цилиндра пропорциональна приложенной силе P:

$$\frac{d\delta_в}{dt} = k_2 P, \tag{16.2}$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности.

Если соединить упругий и вязкий элементы последовательно (рис. 16.3), то изменение расстояния между точками приложения сил P будет равно сумме удлинения пружины $\delta_у$ и перемещения поршня относительно цилиндра $\delta_в$:

$$\delta = \delta_у + \delta_в;$$

дифференцируя это соотношение по времени и используя выражения (16.1) и (16.2), имеем

$$\frac{d\delta}{dt} = k_1 \frac{dP}{dt} + k_2 P.$$

Переходя от перемещения δ и силы P к деформации ε и напряжению σ и заменяя коэффициенты k_1 и k_2 на $\frac{1}{E}$ и $\frac{1}{\eta}$ соответственно, где E — модуль упругости, η — коэффициент вязкости, получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}. \tag{16.3}$$

Последнее уравнение описывает так называемое вязко-упругое тело Максвелла, а модель, изображенная на рис. 16.3, называют моделью вязко-упругого тела Максвелла, или элементом Максвелла.

Рис. 16.1. Упругий элемент

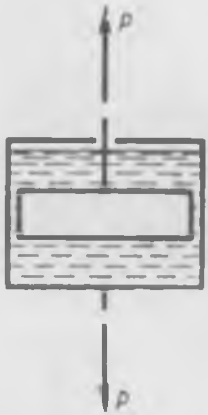


Рис. 16.2. Вязкий элемент

Рис. 16.3. Модель тела Максвелла — последовательное соединение упругого и вязкого элементов

Рассмотрим некоторые свойства этого тела. Как следует из уравнения (16.3), при постоянном во времени напряжении деформация растет с постоянной скоростью, пропорциональной напряжению, т. е. материал течет подобно вязкой жидкости, что не подтверждается экспериментальными исследованиями конструкционных материалов.

При постоянной деформации из уравнения (16.3) следует, что

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение и используя начальное условие при $t = 0$ $\sigma = \sigma(0)$, получим

$$\sigma = \sigma(0)\exp\left(-\frac{t}{t_0}\right),$$

где величина

$$t_0 = \frac{\eta}{E} \tag{16.4}$$

представляет собой время, за которое начальное напряжение σ (0) уменьшается в $e = 2{,}718$ раз. Эту величину называют *временем релаксации*. Согласно полученной зависимости напряжение уменьшается во времени по экспоненциальному закону, стремясь к нулю (рис. 16.4).

Соединим теперь упругий и вязкий элементы параллельно (рис. 16.5). Тогда очевидно, что сила P, воспринимаемая соединением элементов, равна сумме сил $P_у$ и $P_в$, действующих на упругий и вязкий элементы

$$P = P_у + P_в.$$

Используя выражения (16.1) и (16.2), получаем

$$P = \frac{\delta}{k_1} + \frac{1}{k_2}\frac{d\delta}{dt}.$$

Переходя от силы P и перемещения δ к напряжению σ и деформации ε и заменяя так же, как и раньше, коэффициенты k_1 и k_2 на $\frac{1}{E}$ и $\frac{1}{\eta}$ соответственно, получаем

Рис. 16.4. Кривая релаксации напряжений в теле Максвелла

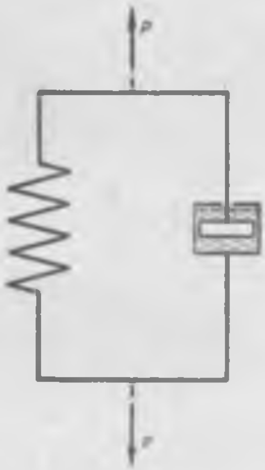


Рис. 16.5. Модель тела Фойгта — параллельное соединение упругого и вязкого элементов

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (16.5)$$

Это уравнение описывает так называемое вязко-упругое тело Фойгта, а модель, изображенную на рис. 16.5, называют моделью вязко-упругого тела Фойгта или элементом Фойгта.

Интегрируя уравнение (16.5) при постоянном напряжении и учитывая, что в начальный момент времени деформация равна нулю, получаем

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)\right]. \qquad (16.6)$$

Из уравнения (16.6) заключаем, что деформация растет по экспоненциальному закону, стремясь к величине $\frac{\sigma}{E}$ (рис. 16.6).

Как следует из уравнения (16.5), при постоянной деформации напряжение постоянно, т. е. это уравнение не отражает релаксации напряжений, что является его недостатком.

Как следует из изложенного, модели Максвелла и Фойгта только качественно отражают некоторые стороны сложных процессов деформирования материалов во времени.

Рассмотрим более сложную модель, состоящую из упругого элемента *1*, последовательно соединенного с двумя параллельно соединенными упругим элементом *2* и вязким элементом *3* (рис. 16.7).

В этом случае изменение расстояния между точками приложения сил P будет

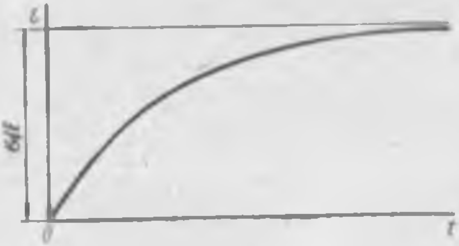


Рис. 16.6. Кривая последействия в теле Фойгта

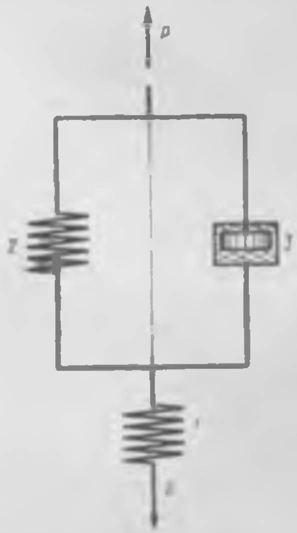


Рис. 16.7. Модель тела Кельвина

равно сумме удлинения пружины $1 - \delta_1$ и удлинения пружины $2 - \delta_2$, равного перемещению поршня относительно цилиндра в вязком элементе *3*

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получаем

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_1}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt}. \qquad (16.7)$$

Зависимости между перемещениями δ_1 и δ_2 и силами, действующими на модель, — P, на пружину 2 — $P_у$ и поршень 3 — $P_в$

$$\delta_1 = k_1 P;\ \delta_2 = k_2 P_у;\ \frac{d\delta_2}{dt} = k_3 P_в, \qquad (16.8)$$

причем

$$P = P_у + P_в. \qquad (16.9)$$

Подставим соотношения (16.8) в выражение (16.7), используя при этом равенство (16.9). Тогда получим

$$\frac{d\delta}{dt} = k_1\frac{dP}{dt} + k_3 P_в = k_1\frac{dP}{dt} + k_3(P - P_у) = k_1\frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2}\delta_2 =$$

$$= k_1\frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2}(\delta - \delta_1) = k_1\frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2}\delta + \frac{k_3 k_1}{k_2}P.$$

откуда

$$\frac{dP}{dt}+\frac{k_3(k_1+k_2)}{k_1k_2}P=\frac{1}{k_1}\frac{d\delta}{dt}+\frac{k_3}{k_1k_2}\delta.$$

Переходя от перемещения δ и силы P к деформации ε и напряжению σ и заменяя коэффициенты k_1 и k_2 соответственно на $\frac{1}{E_1}$ и $\frac{1}{E_2}$, а k_3 на $\frac{1}{\eta}$, получаем

$$\frac{d\sigma}{dt}+\alpha\sigma=E\left(\frac{d\varepsilon}{dt}+\beta\varepsilon\right), \tag{16.10}$$

где

$$\alpha=\frac{E_1+E_2}{\eta};\ \beta=\frac{E_2}{\eta};\ E=E_1. \tag{16.11}$$

Уравнение (16.10) описывает вязко-упругое тело Кельвина, а модель, изображенная на рис. 16.7, называется моделью вязко-упругого тела Кельвина.

В частном случае очень быстрого приложения нагрузки, когда производные по времени от напряжений и деформаций достаточно велики и вторыми слагаемыми в правой и левой частях равенства (16.10) по сравнению с первыми можно пренебречь, получаем

$$\frac{d\sigma}{dt}=E\frac{d\varepsilon}{dt}$$

и, следовательно,

$$\sigma=E\varepsilon.$$

Таким образом, величина E представляет собой мгновенный модуль упругости. В другом частном случае очень медленного приложения нагрузки, когда производные по времени от напряжений и деформаций малы и ими по сравнению со вторыми слагаемыми в правой и левой частях выражения (16.10) можно пренебречь, получаем

$$\sigma=\frac{E\beta}{\alpha}\varepsilon.$$

Следовательно, величину $\frac{E\beta}{\alpha}$ можно назвать длительным модулем упругости.

Из соотношений (16.11) заключаем, что $\frac{\beta}{\alpha}<1$ и поэтому длительный модуль упругости меньше мгновенного.

Вначале решим уравнение (16.10) относительно деформации. При этом предположим, что в начальный момент времени $t=0$ деформации являются упругими, а модуль упругости равен мгновенному модулю E. Тогда после преобразований получим

$$\varepsilon=\frac{1}{E}\left\{\sigma+(\alpha-\beta)\int_0^t\sigma(\zeta)\exp\left[-\beta(t-\zeta)\right]d\zeta\right\}. \tag{16.12}$$

В случае постоянного напряжения $\sigma = \text{const}$ (процесс ползучести или последействия) получаем уравнение кривой ползучести

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left\{1 + \frac{\alpha - \beta}{\beta}\left[1 - \exp(-\beta t)\right]\right\}. \tag{16.13}$$

Из этой формулы следует, что ордината асимптоты кривой ползучести в выбранном масштабе равна деформации, подсчитанной по напряжению σ при помощи длительного модуля упругости $\frac{\alpha}{\beta}\frac{\sigma}{E}$ (рис. 16.8).

Если процесс ползучести при постоянном напряжении σ протекает в течение времени t_1 (рис. 16.8), а затем напряжение мгновенно уменьшается до нуля, то деформация мгновенно уменьшится на величину упругой деформации $\frac{\sigma}{E}$, а последующий процесс изменения деформации (обратная ползучесть или обратное последействие) будет определяться формулой (16.12)

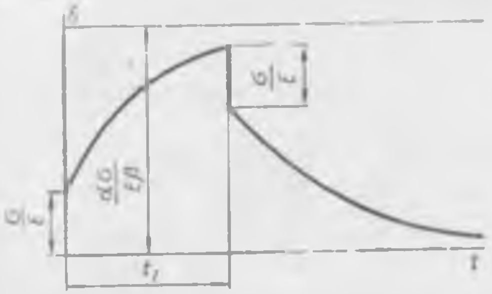


Рис. 16.8. Кривая ползучести до и после разгрузки (обратной ползучести)

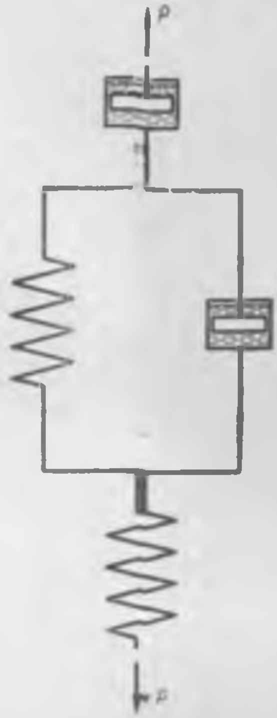


Рис. 16.9. Модель тела из четырех элементов

$$\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{E}\int_0^{t_1} \sigma \exp[-\beta(t - \zeta)]\,d\zeta =$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{\beta}\frac{\sigma}{E}\{\exp[-\beta(t - t_1)] - \exp(-\beta t)\}. \tag{16.14}$$

Из полученного уравнения следует, что при неограниченном увеличении времени деформация ε стремится к нулю, т. е. вся деформация ползучести является обратимой и последействие в теле Кельвина упругое.

Решим теперь уравнение (16.10) относительно σ. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ деформации являются упру-

Простейшим ядром интегрального уравнения (16.18) является затухающая показательная функция

$$H(t-\zeta) = Ce^{-a(t-\zeta)}. \tag{16.21}$$

Подставляя ее в выражение (16.18), получим

$$E\varepsilon = \sigma + \int_0^t Ce^{-a(t-\zeta)}\sigma(\zeta)\,d\zeta. \tag{16.22}$$

Продифференцируем это уравнение по t. Тогда имеем

$$E\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + C\sigma - a\int_0^t Ce^{-a(t-\zeta)}\sigma(\zeta)\,d\zeta. \tag{16.23}$$

Исключая из уравнений (16.22) и (16.23) интеграл, устанавливаем

$$\frac{d\sigma}{dt} + (C+a)\sigma = E\left(\frac{d\varepsilon}{dt} + a\varepsilon\right).$$

Сопоставляя полученный результат с уравнением (16.10), заключаем, что они совпадают, причем

$$\alpha = C + a;\ \beta = a.$$

Таким образом, выбор ядра в виде функции (16.21) равносилен использованию модели вязко-упругого тела Кельвина.

Если $a = 0$ и ядро выбираем в виде постоянной величины, получаем тело Максвелла [см. уравнение (16.3)].

Ядро интегрального уравнения (16.18) может быть выбрано в виде суммы затухающих показательных функций

$$H(t-\zeta) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-a_i(t-\zeta)}. \tag{16.24}$$

Можно показать, что в таком случае интегральное уравнение (16.18) эквивалентно линейному дифференциальному уравнению n-го порядка (16.17).

Больцманом было предложено ядро интегрального уравнения в виде

$$H(t-\zeta) = \frac{C}{t-\zeta}. \tag{16.25}$$

Ядро Больцмана (16.25) имеет сильную особенность в том смысле, что в начальный момент времени скорость деформации бесконечно велика и интеграл от него расходится. Этот недостаток может быть устранен выбором ядра в виде, предложенном Дюффингом

$$H(t-\zeta) = \frac{C}{(t-\zeta)^a}, \tag{16.26}$$

где $0 < a < 1$.

В таком случае из выражения (16.18) получаем уравнение кривой ползучести при постоянном напряжении

$$\varepsilon = \frac{\sigma(0)}{E}\left(1 + \frac{C}{1-a}\, t^{1-a}\right).$$

В работах [4, 10, 14] приведены иные типы ядер. Ю. Н. Работновым [12,13] введено ядро вида

$$H(t-\zeta) = \frac{(t-\zeta)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{16.27}$$

где $\Gamma(1+\alpha)$ — гамма функция, и разработана теория так называемого $Э_{\alpha}$ оператора, ядро которого является резольвентой ядра (16.27).

Из формулы (16.19) следует, что предел деформации при стремлении времени к бесконечности

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma(0)}{E}\left[1 + \int_0^{\infty} H(\chi)\, d\chi\right].$$

Таким образом, величина

$$\frac{E}{1 + \int\limits_0^{\infty} H(\chi)\, d\chi}$$

может быть названа длительным модулем упругости.

Рассмотрим явление обратной ползучести. Допустим, что после ползучести стержня при постоянном напряжении $\sigma(0)$ в течение времени t_1 стержень разгружается. Мгновенное уменьшение деформации при разгрузке по закону разгрузки (закону Гука) равно $\frac{\sigma(0)}{E}$. Дальнейшее уменьшение деформации устанавливаем согласно формуле (16.19)

$$\varepsilon = \frac{\sigma(0)}{E}\int_0^{t_1} H(t-\zeta)\, d\zeta = -\frac{\sigma(0)}{E}\int_t^{t-t_1} H(\chi)\, d\chi =$$

$$= \frac{\sigma(0)}{E}\int_{t-t_1}^{t} H(\chi)\, d\chi = \frac{\sigma(0)}{E}\left[\int_0^{t} H(\chi)\, d\chi - \int_0^{t-t_1} H(\chi)\, d\chi\right]. \tag{16.28}$$

Разность интегралов в квадратных скобках равна заштрихованной на рис. 16.10 разности площадей, которая, очевидно, уменьшается с увеличением времени t и стремится к нулю при стремлении времени t к бесконечности. Таким образом, как и в случае тела Кельвина, последействие является упругим (см. рис. 16.8).

Простейшим ядром интегрального уравнения (16.18) является затухающая показательная функция

$$H(t-\zeta)=Ce^{-a(t-\zeta)}. \tag{16.21}$$

Подставляя ее в выражение (16.18), получим

$$E\varepsilon=\sigma+\int_0^t Ce^{-a(t-\zeta)}\sigma(\zeta)\,d\zeta. \tag{16.22}$$

Продифференцируем это уравнение по t. Тогда имеем

$$E\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}+C\sigma-a\int_0^t Ce^{-a(t-\zeta)}\sigma(\zeta)\,d\zeta. \tag{16.23}$$

Исключая из уравнений (16.22) и (16.23) интеграл, устанавливаем

$$\frac{d\sigma}{dt}+(C+a)\sigma=E\left(\frac{d\varepsilon}{dt}+a\varepsilon\right).$$

Сопоставляя полученный результат с уравнением (16.10), заключаем, что они совпадают, причем

$$\alpha=C+a;\ \beta=a.$$

Таким образом, выбор ядра в виде функции (16.21) равносилен использованию модели вязко-упругого тела Кельвина.

Если $a=0$ и ядро выбираем в виде постоянной величины, получаем тело Максвелла [см. уравнение (16.3)].

Ядро интегрального уравнения (16.18) может быть выбрано в виде суммы затухающих показательных функций

$$H(t-\zeta)=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-a_i(t-\zeta)}. \tag{16.24}$$

Можно показать, что в таком случае интегральное уравнение (16.18) эквивалентно линейному дифференциальному уравнению n-го порядка (16.17).

Больцманом было предложено ядро интегрального уравнения в виде

$$H(t-\zeta)=\frac{C}{t-\zeta}. \tag{16.25}$$

Ядро Больцмана (16.25) имеет сильную особенность в том смысле, что в начальный момент времени скорость деформации бесконечно велика и интеграл от него расходится. Этот недостаток может быть устранен выбором ядра в виде, предложенном Дюффингом

$$H(t-\zeta)=\frac{C}{(t-\zeta)^a}, \tag{16.26}$$

где $0<a<1$.

В таком случае из выражения (16.18) получаем уравнение кривой ползучести при постоянном напряжении

$$\varepsilon = \frac{\sigma(0)}{E}\left(1 + \frac{C}{1-a} t^{1-a}\right).$$

В работах [4, 10, 14] приведены иные типы ядер. Ю. Н. Работновым [12,13] введено ядро вида

$$H(t-\zeta) = \frac{(t-\zeta)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \qquad (16.27)$$

где $\Gamma(1+\alpha)$ — гамма функция, и разработана теория так называемого $Э_{\alpha}$ оператора, ядро которого является резольвентой ядра (16.27).

Из формулы (16.19) следует, что предел деформации прн стремлении времени к бесконечности

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma(0)}{E}\left[1 + \int_0^{\infty} H(\chi)\, d\chi\right].$$

Таким образом, величина

$$\frac{E}{1 + \int\limits_0^{\infty} H(\chi)\, d\chi}$$

может быть названа длительным модулем упругости.

Рассмотрим явление обратной ползучести. Допустим, что после ползучести стержня при постоянном напряжении $\sigma(0)$ в течение времени t_1 стержень разгружается. Мгновенное уменьшение деформации при разгрузке по закону разгрузки (закону Гука) равно $\frac{\sigma(0)}{E}$. Дальнейшее уменьшение деформации устанавливаем согласно формуле (16.19)

$$\varepsilon = \frac{\sigma(0)}{E}\int_0^{t_1} H(t-\zeta)\, d\zeta = -\frac{\sigma(0)}{E}\int_t^{t-t_1} H(\chi)\, d\chi =$$

$$= \frac{\sigma(0)}{E}\int_{t-t_1}^{t} H(\chi)\, d\chi = \frac{\sigma(0)}{E}\left[\int_0^{t} H(\chi)\, d\chi - \int_0^{t-t_1} H(\chi)\, d\chi\right]. \qquad (16.28)$$

Разность интегралов в квадратных скобках равна поштрихованной на рис. 16.10 разности площадей, которая, очевидно, уменьшается с увеличением времени t и стремится к нулю при стремлении времени t к бесконечности. Таким образом, как и в случае тела Кельвина, последействие является упругим (см. рис. 16.8).

где функция разности двух переменных $R(t-\zeta)$ — резольвента интегрального уравнения (16.18).

Уравнение (16.39) позволяет по заданному закону изменения деформаций определять закон изменения напряжений и, в частности, описать явление релаксации при постоянной деформации. В этом частном случае $\varepsilon(t)=\varepsilon(0)=\text{const}$ и из уравнения (16.39) имеем

$$\sigma=E\varepsilon(0)\left[1-\int_0^t R(t-\zeta)\,d\zeta\right]. \qquad (16.40)$$

При помощи последнего уравнения может быть построена кривая релаксации напряжений при постоянной деформации, если известна резольвента интегрального уравнения (16.18). Последняя определяется по изображению R^* с помощью формулы (16.31), которое, в свою очередь, определяется формулой (16.35).

Переход от изображения к оригиналу по формуле (16.31) обычно связан с преодолением значительных трудностей математического характера.

§ 102. Принцип Вольтерра

В случае неодноосного напряженного состояния разложим тензоры напряжений и деформаций на шаровые тензоры и девиаторы. Выразим компоненты девиатора деформаций через компоненты девиатора напряжений, используя те же рассуждения, что и при подсчете деформации в простейшем случае одноосного напряженного состояния (§ 100). Тогда получим

$$e_{ij}=\frac{1}{2G}\left[s_{ij}+\int_0^t H(t-\zeta)\,s_{ij}(\zeta)\,d\zeta\right]. \qquad (16.41)$$

Поскольку обычно при всесторонних равных растяжениях и сжатиях механические свойства материалов практически не зависят от времени, можно принять, что средняя линейная деформация e_0 и среднее нормальное напряжение σ_0 связаны законом Гука (3.3).

Таким образом, для решения задач линейной теории наследственности имеем следующую систему уравнений: дефференциальные уравнения равновесия (1.4), условия на поверхности (1.2), зависимости компонентов деформаций от компонентов перемещений (2.3) и зависимости компонентов деформаций от компонентов напряжений (16.41) и (3.3).

Эта система уравнений отличается от системы уравнений линейной теории упругости только уравнением (16.41). Поскольку свойства материала, определяющие операторы по времени в уравнении (16.41), для однородных тел не зависят от координат, временные и пространственные операции переставимы и при решении задач можно произвольно выбирать порядок выполнения операций. Если вначале выполнить все операции по координатам, полагая операторы по времени постоянными и используя граничные условия для текущего момента времени, получим решение упругой задачи, в котором упругие постоянные заменены реологическими операторами. Таким образом, для получения решения задачи линейной теории наследственности следует в решении задачи линейной теории упругости заменить упругие постоянные соответствующими им операторами. Этот принцип называют принципом Вольтерра. Из него следует, что все результаты теории упругости, не зависящие от упругих постоянных, справедливы и в условиях линейной наследственности. Очевидно, что при формулировке принципа Вольтерра существенно, чтобы граничные условия не изменялись в процессе деформации. Ограничение, связанное с предположением об однородности тела, может быть снято при помощи преобразования Лапласа. Применим его для рассмотренной выше системы уравнений линейной теории наследственности.

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overset{*}{\sigma}_{ij}}{\partial x_i} + \overset{*}{X}_j = 0; \\ &\overset{*}{X}_{\nu j} = \overset{*}{\sigma}_{ij} n_i; \\ &\overset{*}{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{*}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{*}{u}_j}{\partial x_i}\right); \\ &\overset{*}{e}_{ij} = \frac{\overset{*}{s}_{ij}}{2G}(1 + H^*); \\ &\overset{*}{e}_0 = \frac{\overset{*}{\sigma}_0}{3K}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.42)$$

При преобразовании уравнения (16.41) была использована формула (16.32).

Уравнения (16.42) представляют собой систему уравнений линейной теории упругости для изображений. Таким образом, для получения решений задачи линейной теории наследственности нужно решить задачу линейной теории упругости и от полученных величин изображений $\overset{*}{\sigma}_{ij}$ и $\overset{*}{u}_i$ перейти к оригиналам σ_{ij} и u_i.

В качестве примера рассмотрим нагружение толстостенной трубы с днищами внутренним давлением p. Внутренний и наружный радиусы трубы соответственно r_1 и r_2.

Напряжения в пределах упругости определяются формулами [20]:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right); \\ &\sigma_t = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right); \\ &\sigma_z = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.43)$$

Поскольку в рассматриваемом случае напряжения не зависят от упругих постоянных, формулы (16.43) справедливы и в условиях линейной наследственности. Для определения радиального перемещения используем уравнение (16.41).

$$u = \varepsilon_t r = (e_t + \varepsilon_0) r = \varepsilon_0 r + \frac{r}{2G}\left[\sigma_t - \sigma_0 + \int_0^t H(t-\zeta)(\sigma_t - \sigma_0)\,d\zeta\right] =$$

$$= \frac{\sigma_0}{3K} r + \frac{\sigma_t - \sigma_0}{2G} r\left[1 + \int_0^t H(t-\zeta)\,d\zeta\right].$$

Подставим в это выражение величины окружного напряжения по формуле (16.43) и среднего нормального напряжения σ_0, которое согласно формулам (16.43)

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_r + \sigma_t + \sigma_z}{3} = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Тогда после преобразований, используя соотношение (3.4), получим

$$u = \frac{pr_1^2 r}{E(r_2^2 - r_1^2)}\left\{1 - 2\mu + (1+\mu)\frac{r_2^2}{r^2}\left[1 + \int_0^t H(t-\zeta)\,d\zeta\right]\right\}. \quad (16.44)$$

Последняя формула позволяет подсчитать радиальное перемещение для произвольной точки трубы на радиусе r в любой момент времени t, если известно ядро интегрального уравнения $H(t-\zeta)$.

§ 103. Нелинейные теории наследственности

Стремление наиболее полно отразить процессы деформирования различных материалов во времени вызвало разработку нелинейных вариантов теории наследственности.

Чтобы описать деформирование бетона при напряжениях, превышающих половину временного сопротивления, Н. Х. Арутюняном предложена теория нелинейной наследственности [2], отражающая явления ползучести и старения материала. По этой теории

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \int_{\zeta_1}^t \sigma(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{E(\zeta)}\right]d\zeta - \int_{\zeta_1}^t f[\sigma(\zeta)]\frac{\partial C(t,\zeta)}{\partial\zeta}\,d\zeta. \quad (16.45)$$

Для описания процессов деформирования металлов Ю. Н. Работнов [13] предложил обобщить линейную теорию наследственности и представил основное уравнение, связывающее деформацию, напряжение и время в виде

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t H(t-\zeta)\sigma(\zeta)\,d\zeta. \quad (16.46)$$

В уравнении (16.46) функция $\varphi(\varepsilon)$ является функцией только деформации. Она описывает диаграмму растяжения материала (при $t = 0$). Эта теория получила название теории пластической наследственности. Автор ее предлагает следующее выражение для ядра:

$$H(t-\zeta) = \alpha\beta(t-\zeta)^{\beta-1}.$$

Иной вариант теории нелинейной наследственности предложен М. И. Розовским [16—18]. Согласно ему

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[\sigma + \int_0^t H(t-\zeta) f[\sigma(\zeta)]\, d\zeta\right]. \tag{16.47}$$

Еще Вольтерра предложил нелинейную теорию наследственности в форме

$$E\varepsilon = \int_0^t H_1(t-\zeta)\sigma(\zeta)\, d\zeta + \int_0^t\int_0^t H(t-\zeta_1, t-\zeta_2)\sigma(\zeta_1)\sigma(\zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$+ \int_0^t\int_0^t\int_0^t H(t-\zeta_1, t-\zeta_2, t-\zeta_3)\sigma(\zeta_1)\sigma(\zeta_2)\sigma(\zeta_3)\, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 + \cdots$$

Можно показать, что из последней зависимости как частный случай вытекают уравнения нелинейной теории наследственности Ю. Н. Работнова и М. И. Розовского [15].

Список литературы

1. **Алфрей Т.** Механические свойства высокополимеров. М., Изд. иностр. лит 1952, 619 с.

2. **Арутюнян Н. Х.** Некоторые вопросы теории ползучести. М., ГИТТЛ, 1952, 323 с.

3. **Бленд Д.** Теория линейной вязко-упругости. М., «Мир», 1965, 199 с.

4. **Бронский А. П.** Явление последействия в твердом теле.— «Прикладная математика и механика», 1941, т. V, в. I, с. 31—56.

5. **Бугаков И. И.** Ползучесть полимерных материалов. Теория и приложения. М., «Наука», 1973, 287 с.

6. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Операционное исчисление. М., «Высшая школа», 1966, 405 с.

7. **Ильюшин А. А., Победря Б. Е.** Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970, 280 с.

8. **Ишлинский А. Ю.** Уравнения деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1945, № 1—2, с. 34—45.

9. **Ишлинский А. Ю.** Пространственное деформирование не вполне упругих и вязко-пластических тел.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1945, № 3, с. 250—260.

10. **Москвитин В. В.** Сопротивление вязко-упругих материалов. М., «Наука», 1972, 327 с.

11. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд. иностр. лит, т. I, 1954, 647 с., т. II, 1969, 863 с.

12. **Работнов Ю. Н.** Равновесие упругой среды с последействием.— «Прикладная математика и механика», 1948, т. XII; в. 1, с. 53—62.

13. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.

14. **Ржаницын А. Р.** Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М., ГИТТЛ, 1949, 252 с.

15. **Ржаницын А. Р.** Теория ползучести. М., Госстройиздат, 1968, 416 с.

16. **Розовский М. И.** Ползучесть и длительное разрушение материалов.— «Журнал технической физики», 1951, т. XXI, вып. II, с. 1311—1318.

17. **Розовский М. И.** О некоторых особенностях упруго-пластических сред.— «Известия АН СССР. Механика и машиностроение», 1961, № 2, с. 30—36.

18. **Розовский М. И.** Механика упруго-наследственных сред. В кн.: Итоги науки. Упругость и пластичность, 1965. М., ВИНИТИ, 1967, с. 165—250.

19. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики, т. IV. М., Физматгиз, 1958, 812 с.

20. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М., «Наука», 1974, 559 с.

21. **Frendenthal A. M.** The inelastic behavior of engineering materials and structures, John Wiley and Sons, Inc., 1950, 587 p.

22. **Nowacki W.** Teoria pełzania, Arkady, 1963, 170 s.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ж

З

И

К

Ж

З

И

К

Л

М

Н

Л

М

Н

У

Ф

Ч

ОГЛАВЛЕНИЕ

Николай Николаевич Малинин

· ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ
ПЛАСТИЧНОСТИ
И ПОЛЗУЧЕСТИ

Редактор издательства *Т. С. Грачева*
Технический редактор *Л. А. Макарова*
Корректор *О. Е. Мишина*
Художник *Е. Г. Шубенцов*

Сдано в набор 24/X 1974 г. Подписано к печати 4/IV 1975 г.
Т-06196 Формат 60×90/16. Бумага типографская № 3
Усл. печ. л. 25,0. Уч.-изд. л. 29,75
Тираж 18 000 экз. Заказ 1332
Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Машиностроение», 107885, Москва,
Б-78, 1-й Басманный, д. 3

Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10