

Н. Н. ЕВГРАФОВА, В. Л. КАГАН

Курс физики

*учебное пособие
для подготовительных
отделений
вузов*



53

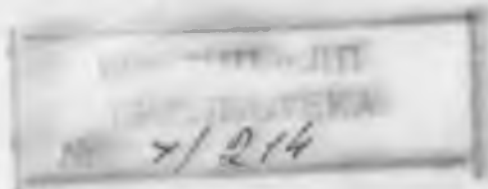
Е 14 Н. Н. ЕВГРАФОВА, В. Л. КАГАН

КУРС ФИЗИКИ

для подготовительных отделений вузов

Издание третье,
исправленное и переработанное

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для подготовительных отделений
высших учебных заведений



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1984

Е14

УДК 53: 389.151(075.4)

Рецензент

д-р физ.-мат. наук Н. П. Калашников
(Московский инженерно-физический институт)

- Евграфова Н. Н., Каган В. Л.
Е14 Курс физики для подготовительных отделений вузов: Учеб. пособие. — 3-е изд., испр. и перераб. — М.: Высш. шк., 1984. — 487 с., ил.

В пер.: 1 р. 40 к.

Пособие (2-е изд. вышло в 1978 г.) составлено в соответствии с программой по физике для подготовительных отделений вузов. По каждому разделу программы приводится теоретический материал, сопровождающийся примерами решения типовых задач. Дано математическое введение. В приложении рассмотрены некоторые вопросы, выходящие за рамки программы, но способствующие лучшему пониманию физического смысла программных тем и последующему усвоению вузовского курса.

Может быть полезно школьникам, учащимся техникумов и лицам, занимающимся самообразованием.

Е 4306021100 — 540
001(01) — 84 КБ 3 — 13 — 84

53

© Издательство «Высшая школа», 1973

© Издательство «Высшая школа», 1984, с изменениями

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Методические указания	8
Введение	13
§ 1. Роль науки в жизни человечества	13
§ 2. Материальность и познаваемость мира	14
§ 3. Движение материи	15
§ 4. О математике	16
Математическое введение	17
§ 1. Углы	17
§ 2. Скаляры и векторы	18
§ 3. Натуральные логарифмы	21
§ 4. Суммирование	22
§ 5. Элементы дифференциального исчисления	22
§ 6. Элементы интегрального исчисления	30
 Раздел I. Механика	
Глава 1. Кинематика	35
§ 1.1. Механическое движение	35
§ 1.2. Кинематика точки	36
§ 1.3. Частные случаи движения точки	39
§ 1.4. Поступательное движение твердого тела	47
§ 1.5. Вращательное движение твердого тела	48
§ 1.6. Принцип суперпозиции	51
Глава 2. Динамика	52
§ 2.1. Сила	52
§ 2.2. Сложение и разложение сил	54
§ 2.3. Момент силы	57
§ 2.4. Типы сил	59
§ 2.5. Преобразования Галилея	63
§ 2.6. Первый закон Ньютона	66
§ 2.7. Второй закон Ньютона	66
§ 2.8. Третий закон Ньютона	71
§ 2.9. Закон сохранения импульса	73
§ 2.10. Основное уравнение динамики поступательного движения	75
§ 2.11. Теорема о движении центра масс	76
§ 2.12. Движение материальной точки по окружности	77
§ 2.13. Вращение твердого тела	83
§ 2.14. Статика	89
§ 2.15. Тело в поле сил тяжести	91
Глава 3. Энергия и работа	93
§ 3.1. Работа	93
§ 3.2. Энергия	96
§ 3.3. Закон сохранения и превращения энергии	101
§ 3.4. Простые механизмы	103

Глава 4. Гидростатика. Аэростатика	107
§ 4.1. Закон Паскаля	107
§ 4.2. Закон Архимеда	113
§ 4.3. Условия плавания тел	114
§ 4.4. Гидростатическое взвешивание	116
§ 4.5. Атмосфера	117
§ 4.6. Измерение давления	120

Глава 5. Гидродинамика. Аэродинамика	121
§ 5.1. Давление в движущейся среде	121
§ 5.2. Эффект Магнуса	126
§ 5.3. Крыло	127
Задачи	128

Раздел II. Молекулярная физика

Глава 1. Молекулярно-кинетическая теория вещества	156
§ 1.1. Основные положения	156
§ 1.2. Статистические закономерности	158
§ 1.3. Тепловое расширение тел	162

Глава 2. Свойства газа	164
§ 2.1. Параметры	164
§ 2.2. Основное уравнение кинетической теории газов	164
§ 2.3. Газовые законы	167
§ 2.4. Термодинамическая шкала температур	170
§ 2.5. Уравнение состояния идеального газа	172
§ 2.6. Реальные газы	175

Глава 3. Свойства жидкостей и твердых тел	177
§ 3.1. Поверхностный слой	177
§ 3.2. Поверхностное натяжение	178
§ 3.3. Лапласово давление	180
§ 3.4. Взаимодействие жидкости с твердым телом	180
§ 3.5. Твердое тело	182

Глава 4. Термодинамика	183
§ 4.1. Первое начало термодинамики	183
§ 4.2. Калориметрия	185
§ 4.3. Теплота и работа	187
§ 4.4. Работа газа	188
§ 4.5. Второе начало термодинамики	189
§ 4.6. Некоторые тепловые машины	193

Глава 5. Изменение агрегатного состояния вещества	198
§ 5.1. Плавление. Кристаллизация	198
§ 5.2. Изменение объема при плавлении (отвердевании)	200
§ 5.3. Парообразование. Конденсация. Испарение	201
§ 5.4. Свойства паров	202
§ 5.5. Кипение	206
§ 5.6. Водяной пар в воздухе	208
Задачи	210

Раздел III. Электричество

Глава 1. Электростатика	214
§ 1.1. Электрическое поле	214
§ 1.2. Закон Кулона	216

§ 1.3.	Напряженность	217
§ 1.4.	Работа электростатического поля	220
§ 1.5.	Связь напряженности и разности потенциалов	224
§ 1.6.	Распределение зарядов на проводнике	226
§ 1.7.	Электростатическая индукция	228
§ 1.8.	Поляризация диэлектрика	230
§ 1.9.	Емкость	232
§ 1.10.	Энергия электростатического поля	236

Глава 2. Постоянный ток 237

§ 2.1.	Электрическая цепь	237
§ 2.2.	Закон Ома	242
§ 2.3.	Соединение проводников	244
§ 2.4.	Соединение источников тока	247
§ 2.5.	Работа и мощность тока	250
§ 2.6.	Закон Джоуля-Ленца	251
§ 2.7.	Ток в металлах	251
§ 2.8.	Работа выхода	253
§ 2.9.	Контакт металл — металл	254
§ 2.10.	Ток в жидкостях	254
§ 2.11.	Некоторые источники тока	257
§ 2.12.	Ток в газах	260
§ 2.13.	Ток в вакууме	263
§ 2.14.	Ток в полупроводниках	266
§ 2.15.	Контакт полупроводник — полупроводник	269

Глава 3. Электромагнетизм 272

§ 3.1.	Закон Био — Савара — Лапласа	272
§ 3.2.	Сила Лоренца	277
§ 3.3.	Сила Ампера	278
§ 3.4.	Взаимодействие параллельных токов	280
§ 3.5.	Рамка с током в магнитном поле	281
§ 3.6.	Магнитный поток	284
§ 3.7.	Магнетики	286
§ 3.8.	Электромагнитная индукция	293
§ 3.9.	Правило Ленца	296
§ 3.10.	Самондукция	299
§ 3.11.	Токи Фуко	301
§ 3.12.	Принцип работы генератора	302

Глава 4. Переменный ток 303

§ 4.1.	Генератор тока	303
§ 4.2.	Цепь переменного тока	304
§ 4.3.	Трехфазный ток	306
§ 4.4.	Асинхронный двигатель	307
§ 4.5.	Трансформатор	308
§ 4.6.	Передача электроэнергии	310
Задачи		312

Раздел IV. Колебания и волны

Глава 1. Колебания 324

§ 1.1.	Пружинный маятник	325
§ 1.2.	Физический маятник	328
§ 1.3.	Колебательный контур	330
§ 1.4.	Описание гармонических колебаний	334

§ 1.5. Энергия незатухающих гармонических колебаний	337
§ 1.6. Сложение колебаний	339
§ 1.7. Вынужденные колебания	340
§ 1.8. Автоколебания	347
Глава 2. Волны	349
§ 2.1. Движение связанных систем	349
§ 2.2. Упругие волны	350
§ 2.3. Плоская волна	353
§ 2.4. Эффект Доплера	357
§ 2.5. Энергия упругой волны	359
§ 2.6. Стоячие волны	361
§ 2.7. Акустика	365
§ 2.8. Электромагнитные волны	367
Задачи	375

Раздел V. Оптика

Глава 1. Геометрическая оптика	377
§ 1.1. Экспериментальные законы	377
§ 1.2. Плоское зеркало	380
§ 1.3. Сферические зеркала	381
§ 1.4. Полное отражение	385
§ 1.5. Преломление в плоскопараллельной пластинке	385
§ 1.6. Преломление в трехгранной призме	386
§ 1.7. Линзы	387
Глава 2. Фотометрия	392
§ 2.1. Основные фотометрические величины	392
§ 2.2. Законы освещенности	394
§ 2.3. Сравнение силы света источников	395
Глава 3. Оптические приборы	396
§ 3.1. Фотоаппарат	396
§ 3.2. Глаз	397
§ 3.3. Проекционный аппарат	398
§ 3.4. Зрительные приборы	399
Глава 4. Теории света	402
§ 4.1. Корпускулярная теория	402
§ 4.2. Волновая теория	403
§ 4.3. Измерение скорости света	406
Глава 5. Волновая оптика	407
§ 5.1. Интерференция	407
§ 5.2. Дифракция	413
§ 5.3. Дисперсия	417
§ 5.4. Спектры	419
§ 5.5. Давление света	423
Глава 6. Квантовая оптика	425
§ 6.1. Внешний фотоэффект	425
§ 6.2. Идея квантования	427
§ 6.3. Квантовая теория света	428
§ 6.4. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта	429
§ 6.5. Внутренний фотоэффект	430
§ 6.6. Эффект Комптона	430
§ 6.7. Квантовые действия света	432
Задачи	434

Раздел VI. Атомная физика

<i>Глава 1. Атом</i>	<i>439</i>
§ 1.1. Радиоактивность	439
§ 1.2. Закон радиоактивного распада	441
§ 1.3. Некоторые методы регистрации излучений	442
§ 1.4. Строение атома	444
<i>Глава 2. Ядро атома</i>	<i>448</i>
§ 2.1. Превращение элементов	448
§ 2.2. Ядерная энергия	450
§ 2.3. Термоядерная энергия	453
<i>Глава 3. Элементарные частицы</i>	<i>454</i>
§ 3.1. Волновые свойства материи	454
§ 3.2. Характеристика частиц	455
§ 3.3. Нейтрино	458
Заключение	459
Приложения	460

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целями преподавания физики на подготовительных отделениях вузов являются практически полное изучение элементарной физики, дальнейшее формирование диалектико-материалистического мировоззрения слушателей и подготовка их к последующему обучению. Поэтому настоящее учебное пособие нацелено не только на восстановление забытого школьного материала, но и на подготовку будущих студентов к предстоящей учебе в вузе.

В данном «Курсе физики» некоторые темы рассмотрены полнее и строже, чем в школьном учебнике; при изложении материала использованы сведения из высшей математики, приведенные в разделе «Математическое введение». В «Приложении» дан вывод ряда формул, выходящих за рамки программы, но необходимых для понимания изучаемых закономерностей; изложены основы специальной теории относительности; приведены некоторые сведения об измерениях и обработке их результатов, о единицах физических величин. В книге сохранено традиционное расположение материала курса физики, после каждого раздела приведены примеры решения задач.

Пособие представляет собой введение в вузовскую физику и рассчитано на то, чтобы способствовать развитию теоретического мышления слушателей и осознанию современной физической картины мира.

«Курс физики», предназначенный для слушателей подготовительных отделений вузов, будет полезен школьникам, учащимся средних специальных учебных заведений и лицам, самостоятельно готовящимся к поступлению в вуз.

Считаем приятным долгом выразить свою признательность рецензенту данного издания проф. Н. П. Калашникову за внимательность, доброжелательность и тщательное прочтение рукописи, способствующее улучшению книги.

Отзывы и замечания просим направлять в издательство «Высшая школа».

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для успешного изучения курса физики и подготовки к обучению в институте необходимо придерживаться определенной методики занятий. Основное условие успеха — *систематические занятия*.

Почти бесполезно только читать любой учебник, его нужно *конспектировать*, т. е. записывать самое *главное* из того, что вы поняли (записывать надо свои мысли, а не текст учебника). Все, что осталось непонятым, надо на ближайшем занятии спросить (после этого записать самое главное из вновь понятого, а оставшееся неясным — так бывает! — переспросить). Если даже целый раздел остался неясным, это не показатель ваших способностей; скорее всего вы еще не начали задавать вопросы себе и другим. А изучить физику даже в объеме средней школы без вопросов: зачем?, почему?, откуда? — *невозможно*.

Выводы, встречающиеся в курсе, необходимо *проделать самостоятельно* (спустя некоторое время после проработки и не заглядывая в конспект или учебник).

После того как вы научились давать определения (физически правильно и грамматически верно), записывать их математически, формулировать своими словами и записывать физические законы, объяснять, где и как они применяются, а также проделали лабораторные работы, ответили на вышеперечисленные вопросы, сделали выводы и научились решать задачи, можно считать изучение данного раздела законченным и *забыть* его. Ничего, включая важнейшие выводы, определения и, как любят говорить в школе, формулировки, *не надо* учить наизусть. При необходимости понятий и закрепленный материал вы легко вспомните. Прорабатывая материал, полезно пользоваться разными учебниками, при подготовке к экзаменам достаточно собственного конспекта.

В «Курсе» сохранен традиционный порядок изложения материала. Несколько расширено по сравнению с программой школы изложение основ механики и термодинамики. Параллельно рассмотрены механические и электрические колебания.

Сведения по высшей математике, без которых современное изложение курса физики невозможно, рассмотрены в математическом введении.

Материал, представляющий собой частные применения общих закономерностей, напечатан петитом.

Наиболее важные формулы имеют нумерацию в пределах каждого раздела. Номер над знаком равенства в каком-либо выражении означает ссылку на формулу, из которой получено это выражение. Если формула, на которую указывает ссылка, приведена в другом разделе, то после ее номера римскими цифрами указывается номер этого раздела. Например, $(ab)^{\frac{2}{3}} = (ba)^{\frac{2}{3}}$ — равенство написано на основании формулы (4) того же раздела; $\tau = \frac{8}{v}$ — написано на основании формулы (8) раздела I. Ссылки на математическое введение обозначены буквой М. Так, $S \stackrel{2-M}{=} \omega R^2$ означает, что выражение написано на основании формулы (2) математического введения. Аналогично ссылки на формулы из приложений обозначены буквой П: $m \stackrel{16-П}{=} m_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, $pV^{\frac{24-П}{3}} = \text{const}$.

Указания на материал «Курса» помещены в скобках с перечислением номеров раздела и параграфа. В данном разделе его номер опускается. Например, (см. разд. III, § 1.4) или (см. § 3.1).

Рисунки имеют сквозную нумерацию. Векторы на рисунках обозначены буквами со стрелками, в тексте — полужирными буквами без стрелок (**a**). Модуль вектора обозначается курсивом (*a*), а его проекция на некоторую ось — курсивом с буквенным индексом данной оси (*a_x*).

Усвоение курса во многом зависит от осмысленного выполнения *лабораторных работ* и от вдумчивого решения большого количества *задач*. Примеры решения задач даны в конце соответствующих разделов.

Рассмотрим методику решения задач, встречающихся в курсе физики.

Решить задачу — это значит найти неизвестную величину через заданные и табличные величины.

Чтобы научиться сравнительно легко решать задачи, полезно придерживаться определенного порядка действий:

1. Внимательно прочтя задачу, математически запишите ее условие. При этом одной буквой с разными индексами обозначьте различные значения одной величины, буквами с одинаковыми индексами — величины, относящиеся к одному объекту (состоянию).

2. Переведите все заданные величины в одну систему единиц. При этом не нужно подсчитывать результаты, так как при подстановке в буквенный ответ часть действий может оказаться лишней. В условии и в ответе задачи величины записываются с их названиями; при выполнении действий все величины подстав-

ляются с их единицами, выраженными через основные (если не очевидно их сокращение).

3. Сделайте необходимые построения и рисунки.

4. Обдумайте условие задачи. Представьте себе, какие процессы совершаются в ней, каким закономерностям они подчиняются. Наметьте примерный путь решения; при этом неизвестная величина должна вас «звать» вперед, а известные — «подсказывать» возможные пути решения.

5. Задачу лучше решать с конца*, отыскивая неизвестную величину. Задайте себе вопрос: из какого закона, определения или общей формулы можно найти искомую величину (не «чему она равна», а именно «откуда» ее можно найти)?

Соответствующее выражение, в которое входит определяемая величина, выбирают из пройденного материала, при необходимости пользуясь книгой или конспектом. Этот выбор представляет собой творческий процесс, надо выбрать наиболее целесообразный путь решения задачи. Этому нельзя научиться, ибо различных подходов к задачам во много раз больше, чем самих задач. Но этому можно научиться в процессе решения достаточного количества задач и выяснения всех возникающих вопросов (естественно, подразумевается понимание теории, на которой основана данная задача. В противном случае рано решать такие задачи и надо приняться за теорию). Запишите общий вид выбранного соотношения.

6. Перепишите выбранное соотношение в применении к конкретному процессу вашей задачи, употребляя по возможности обозначения данных и искомых величин. Постарайтесь при этом придать соотношению наиболее простой вид.

7. Рассмотрите полученное уравнение. Если в нем одна неизвестная величина, то найдите ее, и вы получите буквенный ответ задачи — выражение искомой величины через данные и табличные величины.

Если же неизвестных несколько, снова надо выбрать и записать в общем виде закон, определение или общую формулу, откуда можно найти другую неизвестную величину (разумеется, если такой записи еще нет в данной задаче). Повторите действия п. 6 и рассмотрите полученную систему уравнений.

Если число неизвестных превышает число уравнений, указанные действия повторите столько раз, сколько нужно для получения полной системы уравнений (в которой неизвестных столько же, сколько уравнений).

8. Алгебраическим способом решите полную систему уравнений относительно искомой величины (не определяя остальные неизвестные). Этот технический этап решения не менее важен, ибо ошибка ведет к неправильному решению задачи; но здесь надо только правильно применить имеющиеся математические знания.

9. Иногда проще вместо составления системы уравнений найти каждую неизвестную величину и подставить (в буквах) в уравнение искомой величины. Теперь в этом уравнении могут оказаться новые неизвестные величины, их отыскивают теми же методами. Рано или поздно в уравнении не останется других неизвестных величин. Решая получившееся уравнение с одним неизвестным, получают буквенный ответ задачи. В ответе могут отсутствовать некоторые заданные величины (иначе, в задаче бывают лишние данные), хотя такие задачи считаются некорректными.

10. В буквенный ответ подставьте числа и единицы заданных и табличных величин и произведите указанные действия (с единицами тоже). При подстановке удобно писать сомножители в числителе, а делители — в знаменателе обыкновенной дроби. В этом случае числа и единицы легко сокращаются, а запись становится компактной. Если в результате получена неверная единица, это прямое указание на допущенную ошибку. Верная единица не является доказательством правильности решения. Вычисления обычно производят с необходимой точностью,

* Иначе вы рискуете написать формулы, не нужные в данном решении.

соответствующей условию задачи. Не надо по возможности считать промежуточные величины.

Приближенные величины обычно округляют до четырех значащих цифр (если хотят в ответе получить три значащие цифры) или до количества значащих цифр, на единицу большего, чем у наименее точно заданной приближенной величины. В последнем случае числовой ответ округляют до количества значащих цифр в этой наименее точно заданной величине.

Величины, заданные точно, обычно рассматривают как заданные с достаточной точностью, т. е. до четырех значащих цифр. Таковы, в частности, все величины, заданные и вычисленные в задачах данного курса. В них для краткости опущены нули после запятой. В подавляющем большинстве задач ответ с тремя значащими цифрами может считаться достаточно точным (разумеется, если он правилен).

11. При решении динамических задач полезно дополнить ваши действия следующими:

1) после построения чертежа качественно проанализируйте движение, определите форму траектории, выберите положительное направление движения. При отсутствии сил сопротивления можно это направление выбрать произвольно. Если направление выбрано правильно, то скорости получатся положительными, если нет — отрицательными. Ускорения, совпадающие с этим направлением, положительные, в противном случае — отрицательны.

При наличии сил трения в условии должны содержаться указания относительно направления движения. Иначе решение задачи будет неоднозначным;

2) изобразите силы, действующие на каждое тело системы;

3) запишите основное уравнение динамики поступательного движения (если массы тел не изменяются) в векторной форме один раз, в скалярной форме — для каждого тела; эти уравнения пишутся для проекций сил на данное направление с учетом их знака.

4) запишите основное уравнение динамики вращательного движения (если моменты инерции вращающихся тел не изменяются) в векторной форме один раз, в скалярной форме — для каждого вращающегося тела; эти уравнения пишутся для проекций моментов сил на направления осей вращения с учетом знака;

5) запишите уравнения, необходимые для полноты системы уравнений. Это уравнения кинематических связей, свойств тел, стандартные допущения — невесомость нитей, блоков и т. д. Далее следует обычное решение.

12. Удобно такое оформление задачи: слева столбиком записывается математическое условие задачи и перевод единиц в одну систему; справа рисуется схема и оставляется место для общих формул (законов, определений), на основании которых решается задача. Само решение задачи часто можно вести в виде цепочки равенств, которая начинается с искомой величины и заканчивается буквенным ответом. В других случаях, как отмечено выше, решение задачи представляет собой полную систему уравнений, из которой получается буквенный ответ.

Разумеется, задачи бывают более или менее трудными. Но трудность задачи часто состоит в увеличении числа действий, о которых мы только что рассказали. Это увеличение связано с расширением круга теоретических сведений, используемых в данной задаче. Но принципиально метод решения остается тем же самым.

С этой точки зрения задачи «для десятиклассников» отличаются от задач «для первоклассников» только количеством «вопросов», с помощью которых решается данная задача.

Попробуйте сами решать задачи, не бойтесь при решении заглядывать в конспект или книгу, не делайте математических ошибок, и вы не только убедитесь, что можете решать задачи, но и почувствуете удовольствие от самого процесса решения.

Перед лабораторными работами необходимо ознакомиться с приложением 2.

Латинский алфавит

A, a — а	N, n — эн
B, b — бе	O, o — о
C, c — це	P, p — пе
D, d — де	Q, q — ку
E, e — е	R, r — эр
F, f — эф	S, s — эс
G, g — ге (же)	T, t — те
H, h — аш	U, u — у
I, i — и	V, v — ве
J, j — йот	W, w — дубль-ве
K, k — ка	X, x — икс
L, l — эль	Y, y — игрек
M, m — эм	Z, z — зет

Греческий алфавит

A, α — альфа	N, ν — ню
B, β — бета	Ξ, ξ — кси
Γ, γ — гамма	Ο, ο — омикрон
Δ, δ — дельта	Π, π — пи
Ε, ε — эпсилон	Ρ, ρ — ро
Ζ, ζ — дзэта	Σ, σ — сигма
Η, η — эта	Τ, τ — тау
Θ, θ — тэта	Υ, υ — ипсилон
Ι, ι — иота	Φ, φ — фи
Κ, κ — каппа	Χ, χ — хи
Λ, λ — ламбда	Ψ, ψ — пси
Μ, μ — мю	Ω, ω — омега

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Роль науки в жизни человечества

Как отмечал К. Маркс, обществу для существования необходимо потреблять (одежду, еду и т. д.), а чтобы потреблять, надо производить.

Такая категорическая необходимость требует накопления знаний о свойствах и взаимодействиях тел, участвующих в процессе производства в качестве сырья и орудий труда.

Первоначальные сведения о свойствах окружающих тел имеют и животные. О том, что камни острые и твердые, огонь горячий, вода жидкая и т. д., животные, так же как дети, «узнают» из опыта. Но вот применить, например, острый камень для обработки другого камня или палки, т. е. целесообразно соединить в процессе *труда* известные свойства орудий и сырья, — это исключительно человеческое качество. Человек, начав трудиться, выделился из животного мира, и начался процесс развития специфически человеческих органов: головного мозга, руки как орудия труда, гортани как средства общения. «...Труд создал самого человека»*. История общества — это история орудий труда (материальной культуры) и связанных с ними производственных отношений.

Добывание огня, возникновение цветной и черной металлургии, изобретение колеса, приручение животных, использование энергии ветра, воды, пара, создание двигателя внутреннего сгорания, овладение электрической и атомной энергией — вот лишь некоторые крупнейшие естественнонаучные открытия на пути развития человечества. Темпы научных открытий непрерывно растут. Если в доисторические времена одно крупное открытие от другого отделяли десятки тысяч лет, в эпоху Возрождения — 50—100 лет, то в наше время крупнейшие открытия в среднем следуют через каждые 10—15 лет.

Одна из причин такого ускорения — обратная связь техники, использующей новейшие научные данные, с самой наукой. Такие науки, как микробиология, физика твердого тела, атомная физика и т. д., немыслимы без очень прочной технической базы.

Наука увеличивает человеческие возможности, позволяет быстрее и лучше вести процесс производства и все полнее удовлетворять потребности человека. Техника развивается, используя новейшие научные достижения, и в свою очередь способствует новым научным открытиям.

Конечно, научные занятия доставляют творческую радость ученому, причем не только при положительном решении возникшей проблемы.

* Энгельс Ф. Диалектика природы. — М.: Политиздат, 1982. — с. 144.

Как во всякой деятельности, в науке много черновой работы, а открытия сравнительно редки. Поэтому чтобы успешно заниматься определенной наукой, человек должен ее любить. Но если отдельный человек может выбрать, заниматься ему наукой или делать что-либо другое, то у человечества выбора нет — ему наука необходима.

§ 2. Материальность и познаваемость мира

Изучая окружающий нас мир, мы прежде всего должны ответить на основной вопрос философии: что первично — материя или сознание? В. И. Ленин дал такое определение материи: «Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана человеку в ощущениях его, которая копируется, фотографируется, отображается нашими ощущениями, существуя независимо от них»*.

Материя, следовательно, существует объективно, независимо от субъекта, изучающего ее. Она существовала до появления человека и будет существовать всегда.

Но существуя объективно, она воздействует на органы чувств человека, создавая приблизительно верное отображение действительности.

То, что предмет или явление представляет собой «на самом деле» (объективно, независимо от понимания), в философии называют *абсолютной истиной*. Наши представления о предметах или явлениях носят характер *относительных истин*. Делая те или другие заключения и постоянно проверяя их в практической деятельности, человек методом «проб и ошибок» приближается к абсолютной истине.

Таким образом, мир познаваем. Но каждый объект познания по многообразию своих свойств и характеристик не исчерпаем, не может быть познан «до конца». Абсолютная истина недостижима, познание есть процесс бесконечного к ней приближения.

В то же время и сам процесс познания имеет диалектический характер. Так, в определенных вопросах в отдельные периоды мы можем удалиться от абсолютной истины, но затем, отдав дань неверным предположениям, все же снова начнем к ней приближаться.

Как же развивается наука? Первой необходимой ступенью всякого знания является *наблюдение*. Накопив достаточное количество наблюдений, относящихся к однородным явлениям, строят научное предположение — *гипотезу*, которая должна объяснить все наблюдаемые закономерности и предсказать новые. Эти предсказания проверяют на опыте — ставится *эксперимент*. Подтвержденная экспериментально гипотеза становится *теорией*, опровергнутая гипотеза отбрасывается и заменяется другой. Именно эксперимент (практика) является критерием истинности всякой теории. Вот почему, в частности, физика является экспериментальной наукой.

Всякая физическая теория является ограниченно верной, иначе говоря, относительной истиной. Рано или поздно человек сталкивается с фактами, которые «старая» теория объяснить не в состоянии.

Тогда выдвигается и проверяется «новая» гипотеза, которая в случае экспериментального подтверждения становится «новой» теорией. Эта

* Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 131.

«новая» теория автоматически является более «правильной», чем «старая», ибо объясняет более широкий круг явлений. Но и она — относительная истина. На практике мы применяем именно относительные истины; следовательно, чем «правильнее» теория, тем успешнее основанная на ней деятельность.

Например, сравнив плотины первых водяных мельниц и современных гидроэлектростанций, мы видим, насколько лучше человек узнал законы гидродинамики и насколько успешнее он применяет их в гидротехнических сооружениях.

§ 3. Движение материи

Материя существует, это значит — она движется, изменяется. «Движение... способ существования материи»*.

Таким образом, жизнь Вселенной представляет собой *движение* (изменение) материи.

«В мире нет ничего, кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени»**.

Еще Ньютон интуитивно представлял себе абсолютное (пустое!) пространство и абсолютную длительность (не связанную с объектом исследования!).

Но если материя существует, т. е. движется в пространстве и во времени, значит, пространство и время — *формы существования материи*. И как всякая форма неразрывно связана с содержанием и находится с ним в диалектическом единстве, пространство и время неразрывно связаны с материей. Нельзя, следовательно, представить себе материю вне времени и пространства. Но, пожалуй, еще более важно, что немыслима и форма в отрыве от содержания. В нашем случае не имеет физического смысла понятие «пустого» пространства или понятие времени в отрыве от материи.

Теория относительности, открытая Эйнштейном в 1905 г. и многократно подтвержденная экспериментально, устанавливает неразрывную связь материи с пространством и временем. По этой теории длина тела (пространственная характеристика) и длительность события (временная характеристика), происходящего с телом, зависят от скорости данного тела, т. е. находятся в неразрывной связи с материей (см. приложение 3).

Таким образом, предметом изучения всех естественных наук являются различные формы движения материи. В частности, *в физике *** изучаются некоторые наиболее общие формы движения материи и переходы от одной формы движения к другой*.

В каждом разделе физики изучается «своя» форма движения: механическое, молекулярное, электромагнитное, ядерное и т. д.

Естественные науки в настоящее время тесно переплелись, зачастую их сложно разграничить. На стыках наук появились такие дисциплины, как биофизика, биохимия, физическая химия, химическая физика, бионика, космическая медицина и т. п.

* Энгельс Ф. Диалектика природы. — М.: Политиздат, 1982. — с. 50.

** Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 181.

*** *physis* (греч.) — природа.

Именно на стыках наук сделаны наиболее крупные открытия последнего времени. Методы одной науки проникают в другие. Так, физические методы исследования используются в биологии, медицине, геологии и т. д. Соответственно возрастает роль математики: она широко применяется в биологии, антропологии, даже в филологии.

§ 4. О математике

Что такое математика? Конечно, мы не пытаемся дать точное исчерпывающее определение этой науки. Но хотелось бы сразу отвергнуть бытующее в школе определение «науки о величинах, числах или вычислениях». Нам математика представляется *способом мышления*, — одним из двух, доступных человеку. Первый способ — с помощью художественных образов, назовем его для краткости *художественным*, второй — с помощью математических образов — *математический*. Первый красочен, многогранен, нагляден, эмоционален, доступен; воспитание такого мышления у человека начинается буквально с пеленок, а у человечества — с самого начала его истории. Второй смок, лаконичен, абстрактен, точен, широк; воспитание такого мышления начинается лишь на определенной ступени развития, когда становятся доступны некоторые абстракции — как человеку, так и человечеству*. Конечно, между двумя этими способами мышления нельзя провести точной границы. Так, чеховское выражение «краткость — сестра таланта» — почти формула, а ломоносовское «раскрылась бездна, звезд полна, звездам числа нет, бездне — дна...» — поэзия. Но существует целый ряд вопросов, освещать которые удобнее, нагляднее, убедительнее с той или другой точки зрения. Так, говоря о войне 1812 г., большинство наших современников пользуются литературными (художественными) образами Л. Н. Толстого, а говоря о жилищном строительстве или о развитии металлургии, предпочитают цифры (математические образы) наших планов.

Нет необходимости доказывать, что человеку нужны оба способа мышления. В данном курсе мы будем, естественно, большей частью пользоваться математическим способом. «Математика есть наиболее чистое и непосредственное переживание истины» — как сказал крупный физик М. Лауэ.

Какое же место в математике занимают вычисления? Очень важное, ибо без вычислений ни один результат математической теории не может быть сформулирован. Но далеко не главное, так как вычисления сковывают мысль математика, заставляют его тратить время на техническую, не творческую, вычислительную работу. Поэтому в последнее время все больше вычислительных операций передается разнообразным вычислительным машинам, которые освобождают математика от технической работы.

Это является одной из причин невиданного расцвета математики, наблюдаемого во второй половине XX в.

* Точнее этот второй способ назвать научным, так как в некоторых науках используют не только математические абстракции. Но нам хотелось подчеркнуть именно роль математических образов в процессе мышления. Своеобразное сочетание научного и художественного способов мышления, употребляемое в физике, дает возможность говорить о «физическом» мышлении, свойственном представителям этой науки.

И здесь в соответствии с диалектикой количество переходит в новое качество: появилась возможность решать задачи, на которые при старых методах не хватило бы жизни даже многих математиков. Например, оптимизация (выбор наилучшего варианта) управления крупным современным производством. В перспективе — управление целыми отраслями промышленности в масштабах страны. Особенно успешным такое управление должно быть при социалистическом, плановом способе производства.

В «Курсе» используются некоторые сведения из высшей математики, изложенные в средней школе. Они приведены в математическом введении, которое должно помочь читателям вспомнить известные или ввести новые математические понятия, необходимые для сколько-нибудь строгого изложения физики.

Считаются известными первые семь действий арифметики и алгебры, основные понятия и формулы геометрии и тригонометрии из школьной математики.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Углы

Плоский угол α — часть плоскости, ограниченная двумя полупрямыми, исходящими из одной точки (рис. 1). В частности, *центральный угол* образован двумя радиусами окружности. Единицей плоского угла является радиан [рад].

Один радиан — центральный угол, длина дуги которого равна радиусу.



Рис. 1

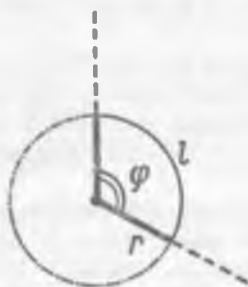


Рис. 2

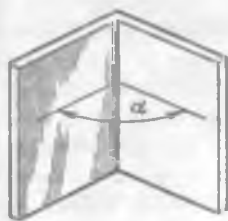


Рис. 3

Для того чтобы выразить в радианах какой-либо угол (рис. 2), надо сосчитать, сколько раз в нем содержится единичный угол; иначе говоря, сколько раз на дуге l укладывается радиус r . Таким образом, радианная мера угла

$$\varphi = l/r. \quad (1)$$

Двугранный угол — часть пространства, ограниченная двумя пересекающимися полуплоскостями (рис. 3); линия их пересечения — *ребро*. Мерой двугранного угла является плоский угол α , стороны которого перпендику-

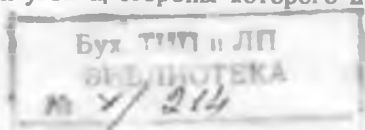




Рис. 4

лярны ребру и расположены в разных плоскостях данного двугранного угла.

Пространственный или телесный угол ω — часть пространства, ограниченная конической поверхностью (рис. 4).

Единица пространственного (телесного) угла — *стерадиан* [ср].

Один стерадиан — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на ее поверхности площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу этой сферы.

Для измерения телесного угла надо сосчитать, сколько раз на поверхности части сферы, вырезаемой конической поверхностью, укладывается площадка, равная квадрату радиуса. Значит, телесный угол в стерадианах равен

$$\omega = S/R^2. \quad (2)$$

§ 2. Скаляры и векторы

Различают величины скалярные и векторные.

Скалярными * величинами или *скалярами* называют величины, характеризующиеся числовым значением и знаком. Так, числовая ось состоит из положительных и отрицательных рациональных и иррациональных чисел и нуля. Скалярами являются температура, время, глубина погружения, высота подъема, освещенность, энергия и т. п. Читатель владеет, конечно, алгебраическими действиями со скалярами: сложением, вычитанием, умножением, делением, возведением в степень, извлечением корня и логарифмированием.

Вектором ** а называется величина, характеризующаяся числовым значением и направлением. Изображается вектор стрелкой, начинающейся в точке его определения. Длина этой стрелки в определенном масштабе изображает *модуль* *** (абсолютное значение) *вектора*. Модуль вектора неотрицателен ($a \geq 0$).

Направление некоторой прямой часто задается ее *единичным вектором* e , модуль которого равен единице ($e = 1$). Вектор a , параллельный такой прямой, можно записать в виде $a = ae$. Задать вектор a — это значит задать его направление и модуль.

Пусть имеется произвольная ось, направление которой определено ее единичным вектором e . *Проекция вектора a* на эту ось равна произведению модуля этого вектора и косинуса угла между данным вектором и единичным вектором оси: $a_x = a \cos(a, e)$.

Проекция вектора — величина алгебраическая, ее знак определяется

* scala (лат.) — лестница. Шкала — ряд величин, расположенных в порядке возрастания или убывания.

** vector (лат.) — несущий.

*** modulus (лат.) — мера.



Рис. 5

знаком косинуса угла между данным вектором и положительным направлением оси. Если угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ острый — проекция положительна, если тупой — отрицательна, а если прямой — равна нулю.

В векторной алгебре рассматриваются различные действия над векторами. Коротко сформулируем некоторые действия векторной алгебры, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — слагаемые или составляющие векторы (рис. 5, а). Векторной суммой называют вектор $\mathbf{c}$, изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на составляющих (правило параллелограмма):

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Тот же самый вектор $\mathbf{c}$ проще получить по правилу треугольника: если из конца вектора $\mathbf{a}$ отложить вектор $\mathbf{b}$, то замыкающий вектор $\mathbf{c}$ (соединяющий начало вектора $\mathbf{a}$ и конец вектора $\mathbf{b}$, см. рис. 5, б) будет векторной суммой $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Длина этого вектора может быть найдена по теореме косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta. \quad (3)$$

Сложение векторов — нахождение векторной суммы по данным составляющим векторам. Противоположное действие — разложение вектора — нахождение составляющих заданного вектора $\mathbf{c}$ (рис. 5, в). Как видно из рисунка, даже разложение на два составляющих вектора неоднозначно, существует бесконечно много возможностей такого разложения. Кроме того, каждый составляющий вектор можно разложить еще на два или несколько векторов и т. д.

Вычитание векторов — это сложение, при котором к первому вектору прибавляется вектор, противоположный второму:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Скалярное произведение двух векторов — число (скаляр), равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними (рис. 6):

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = ab \cos \alpha. \quad (4)$$

Легко видеть, что скалярное произведение равно произведению модуля одного из векторов и проекции второго вектора на направление первого:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) \stackrel{\Delta}{=} ab_a = a_b b.$$

Из определения видно, что скалярное произведение коммутативно, т. е. порядок сомножителей в нем несуществен:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{b}\mathbf{a}).$$

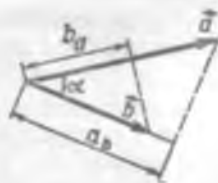


Рис. 6

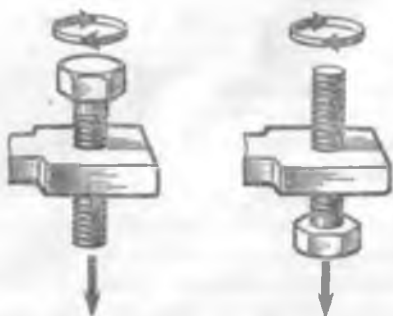


Рис. 7

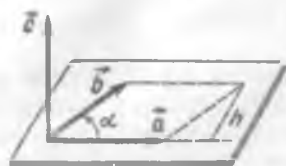


Рис. 8

Также видно, что скалярное произведение — алгебраическая величина. Ее знак зависит от угла между векторами-сомножителями. Если угол острый, скалярное произведение положительно, если тупой — отрицательно.

Векторное произведение двух векторов — вектор c , численно равный произведению модулей этих векторов на синус угла между ними, направленный перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы-сомножители, по правилу правого винта.

Правило правого винта: если поворачивать головку правого винта (болта, буравчика, штопора) в какую-нибудь сторону, он будет перемещаться в гайке (завинчиваться или вывинчиваться — безразлично, рис. 7) в определенном направлении — от наблюдателя, видящего вращение по часовой стрелке.

Следовательно, вектор c направлен в сторону осевого движения винта, головка которого поворачивается от первого сомножителя a ко второму b по наименьшему углу (рис. 8).

Векторное произведение записывают в виде

$$a \times b = [ab] = c, \quad (5)$$

где $c = ab \sin \alpha$. Заметим, что $b \sin \alpha = h$ и, следовательно, $c = ah$ — векторное произведение численно равно площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях.

Из определения векторного произведения видно, что оно антикоммутативно:

$$a \times b = -b \times a.$$

Следовательно, в векторном произведении существен порядок сомножителей.

Произведение вектора a на скаляр x — это вектор c , направленный вдоль заданного и по модулю равный произведению сомножителей:

$$c = xa,$$

где $c = |x|a$, а направления векторов c и a совпадают при $x > 0$ и противоположны при $x < 0$ (в этом случае $c = -|x|a$).

В физике мы часто используем *величины*, имеющие не только числовое значение, но и направление. Таковы скорость, перемещение,

ускорение, сила, импульс, напряженность и т. д. Предварительно выбрав масштаб, каждую из названных величин можно изобразить в виде вектора и применять к таким *векторным величинам* действия векторной алгебры. Поэтому мы будем, для краткости, называть *векторами* величины, характеризующиеся модулем и направлением и подчиняющиеся правилам векторного сложения. Но отметим различие в математическом и физическом понятиях вектора: складывать разнородные векторные величины физически бессмысленно; равные и параллельные векторные величины могут быть физически различными, в то время как математически — это один и тот же вектор.

§ 3. Натуральные логарифмы

Очень важным в математике и физике является предел функции $(1+x)^{1/x}$ при стремлении x к нулю. Это иррациональное число обозначается буквой e и вычислено с очень большой степенью точности (несколько сотен значащих цифр):

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}. \quad (6)$$

Числовое значение этой величины $e = 2,718281828459045\dots$

Как известно, *логарифмом* числа $N > 0$ по основанию $a > 0$ называется показатель степени x , в которую надо возвести основание, чтобы получить это число: $N = a^x$. Логарифм записывают в виде

$$x = \log_a N.$$

Если в качестве основания логарифмов выбрано число 10, то получают *десятичные логарифмы*: $\log_{10} N = \lg N$. Примем теперь в качестве основания логарифмов число e . Получим *натуральные логарифмы*, которые обозначают буквами $\ln$:

$$\log_e N = \ln N.$$

Число e является *основанием натуральных логарифмов*. Общее правило перехода к логарифму по другому основанию

$$\log_{a_2} N = \log_{a_1} N \log_{a_2} a_1.$$

Для перехода от натуральных к десятичным логарифмам положим $a_1 = 10$, $a_2 = e$. Тогда

$$\ln N = \lg N \ln 10.$$

Модулем этого перехода является *натуральный логарифм десяти*:

$$\ln 10 = 2,302585.$$

Поэтому для нахождения натурального логарифма числа можно использовать десятичный логарифм:

$$\ln N = 2,303 \lg N$$

(с точностью, достаточной для решения задач).

§ 4. Суммирование

Часто результаты измерений или вычислений представляют собой сумму определенного числа слагаемых. Обозначим все слагаемые суммы какой-нибудь буквой с индексом, который будет изменяться при переходе от одного слагаемого к другому. Например: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Сложение (суммирование, нахождение разного рода сумм — арифметической, геометрической, алгебраической) обозначают греческой заглавной буквой сигма (Σ). Результат суммирования тогда можно записать в виде

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Здесь a_i — i -й член суммы; i — индекс суммирования, который принимает последовательно все целочисленные значения от $i=1$ до $i=n$, как это указано около буквы Σ . Мы будем употреблять несколько сокращенную форму записи:

$$a = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Эта запись читается так: a равно сумме a_i по i от единицы до n .

Число слагаемых n может принимать любые значения до бесконечности. Правда, сумма бесконечного числа конечных слагаемых может быть бесконечно велика (например, если все они положительны). Но если с ростом числа слагаемых сами они достаточно уменьшаются, то сумма приобретает новые качества, может оказаться конечной и иметь определенный физический смысл (см. § 6).

§ 5. Элементы дифференциального исчисления

Производная. Пусть в некоторой непрерывной области значений x существует функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям дифференцирования, которые здесь не рассматриваются. В большинстве интересующих нас физических вопросов эти условия выполняются автоматически. Пример такой функции изображен на рис. 9.

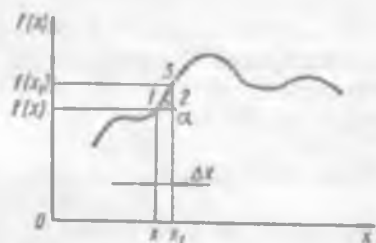


Рис. 9

Введем обозначения: $x_1 - x = \Delta x$ и $f(x_1) - f(x) = \Delta f(x)$. Достаточно малый участок кривой $f(x)$ между близкими точками 1 и 3 можно представить, как отрезок прямой и тем точнее, чем меньше приращение аргумента Δx . Мы получили элементарный треугольник 1 2 3,

в котором катетами являются приращение функции $\Delta f(x)$ и приращение аргумента Δx .

Их отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \operatorname{tg} \alpha$ характеризует скорость возрастания функции $f(x)$ при увеличении аргумента x , зависит от x и интервала Δx .

Устремим это отношение к пределу при $x_1 \rightarrow x$, т. е. «стянем» интервал Δx в точку x . При этом и приращение функции (2 3), и приращение аргумента (1 2) устремятся к нулю, т. е. станут *бесконечно малыми* величинами. Имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \text{tg } \alpha$$

Этот предел называется *первой производной* функции $f(x)$.

Пусть, например, задана функция $f(x) = x^2$. Ее производная

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x, \end{aligned}$$

а приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = f'(x)\Delta x + \Delta x^2$, т. е. почти равно произведению производной функции и приращения ее аргумента. Следовательно, отношение приращения функции к приращению ее аргумента $\Delta f(x)/\Delta x = f'(x) + \Delta x$ приблизительно равно производной этой функции и тем точнее, чем меньше приращение аргумента.

Обозначим *бесконечно малое* приращение буквой d (в отличие от обозначения конечного приращения Δ). Тогда сколь угодно малое (но не равное нулю!) приращение аргумента будет обозначено dx , соответствующее приращение функции $df(x)$ и $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) + dx \approx f'(x)$.

Аналогичное приближенное равенство справедливо и для других функций. Таким образом, производная

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \quad (7)$$

(с точностью до бесконечно малого слагаемого). При вычислении производных мы часто будем пользоваться последним приближенным равенством.

Как видно из рис. 9, производная характеризует скорость возрастания функции в точке x . Геометрический смысл производной понятен из рисунка: она равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x по отношению к оси абсцисс. Выражение $f'(x) > 0$ означает, что при возрастании аргумента x функция $f(x)$ увеличивается; наоборот, если $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ уменьшается при возрастании x . Условие

$$f'(x) = 0 \quad (8)$$

(касательная параллельна оси абсцисс) есть условие минимума, максимума или точки перегиба, в которой касательная к графику $y = f(x)$ горизонтальна.

Производная представляет собой новую функцию своего аргумента, обычно имеющую конечное значение, хотя пределы числителя и знаменателя в выражении (7) — нули (задав определенное значение аргумента, получим конкретное числовое значение производной).

От нее снова можно взять производную, это будет *вторая производная* первоначальной функции и т. д. Математическое действие, состоящее в нахождении производной от заданной функции, называется *дифференцированием* *. Функции многих переменных мы здесь рассматривать не будем. Свойства производной.

1. **Постоянный сомножитель.** Если $C = \text{const}$ ** и $f(x) = C\varphi(x)$, то

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{C\varphi(x+dx) - C\varphi(x)}{dx} = \\ &= C \frac{\varphi(x+dx) - \varphi(x)}{dx} = C\varphi'(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$[C\varphi(x)]' = C\varphi'(x). \quad (9)$$

Постоянный сомножитель можно вынести за знак производной.

2. **Производная суммы функций.** Пусть $y(x) = f(x) + \varphi(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx} = \frac{f(x+dx) + \varphi(x+dx) - f(x) - \varphi(x)}{dx} = \\ &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + \frac{\varphi(x+dx) - \varphi(x)}{dx} = f'(x) + \varphi'(x), \text{ т. е.} \\ [f(x) + \varphi(x)]' &= f'(x) + \varphi'(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Такое же соотношение справедливо при любом числе слагаемых:

$$\left[\sum_{i=1}^n f_i(x) \right]' = \sum_{i=1}^n f_i'(x). \quad (11)$$

Производная суммы функций равна сумме производных от этих функций.

3. **Производная произведения двух функций.** Пусть $y(x) = f(x)\varphi(x)$. Производная

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx} = \frac{f(x+dx)\varphi(x+dx) - f(x)\varphi(x)}{dx} = \\ &= \frac{[f'(x)dx + f(x)][\varphi'(x)dx + \varphi(x)] - f(x)\varphi(x)}{dx} = \\ &= \frac{f'(x)\varphi'(x)dx^2 + f'(x)\varphi(x)dx + f(x)\varphi'(x)dx + f(x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x)}{dx} = \\ &= f'(x)\varphi'(x)dx + f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x) = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x). \end{aligned}$$

* differentia (лат.) — разность. Производная — предел отношения разностей (приращений) функции и ее аргумента.

** constans (лат.) — постоянный.

В этом выражении опущено бесконечно малое первое слагаемое (в предельном оно равно нулю). Мы получили

$$[f(x)\varphi(x)]' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x). \quad (12)$$

Производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и первой функции на производную второй.

4. Производная отношения двух функций. Пусть $f(x) = y(x)/\varphi(x)$. Тогда $y(x) = f(x)\varphi(x)$ и

$$y'(x) \stackrel{12}{=} f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x) = f'(x)\varphi(x) + \frac{y(x)}{\varphi(x)}\varphi'(x).$$

$$\text{Отсюда } f'(x) = \frac{y'(x) - \frac{y(x)}{\varphi(x)}\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{y'(x)\varphi(x) - y(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}. \text{ Следовательно,}$$

$$\left[\frac{y(x)}{\varphi(x)} \right]' = \frac{y'(x)\varphi(x) - y(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}. \quad (13)$$

Производная отношения двух функций равна деленной на квадрат знаменателя разности произведений производной числителя на знаменатель и числителя на производную знаменателя (естественно, предполагается, что знаменатель не обращается в нуль).

Дифференциал. Выражение

$$df(x) \stackrel{?}{=} f'(x)dx \quad (14)$$

представляет собой линейную часть бесконечно малого приращения (изменения) функции и называется *дифференциалом* функции $f(x)$ одного переменного.

Для его вычисления, как видно из выражения (14), надо производную функции в данной точке умножить на приращение ее аргумента. В соответствии с формулой (14) дифференциал имеет свойства, аналогичные свойствам производной.

Свойства дифференциала.

1. Постоянный множитель. Если $C = \text{const}$ и $f(x) = C\varphi(x)$, то

$$\text{Значит, } df(x) \stackrel{14}{=} f'(x)dx \stackrel{?}{=} C\varphi'(x)dx \stackrel{14}{=} C d\varphi(x).$$

$$d[C\varphi(x)] = C d\varphi(x). \quad (15)$$

Постоянный множитель можно вынести за знак дифференциала.

2. Дифференциал суммы функций. Если $y(x) = f(x) + \varphi(x)$, то

$$dy(x) \stackrel{14}{=} y'(x)dx \stackrel{10}{=} [f'(x) + \varphi'(x)]dx = f'(x)dx + \varphi'(x)dx \stackrel{14}{=} df(x) + d\varphi(x).$$

Таким образом, $d[f(x) + \varphi(x)] = df(x) + d\varphi(x)$. Аналогично, если $y(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$, то

$$d \sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n df_i(x). \quad (16)$$

Дифференциал суммы функций равен сумме их дифференциалов.

3. Дифференциал произведения двух функций. Пусть $y(x) = f(x) \varphi(x)$. Тогда

$$dy(x) \stackrel{18}{=} y'(x) dx \stackrel{12}{=} [f'(x) \varphi(x) + f(x) \varphi'(x)] dx \stackrel{14}{=} df(x) \varphi(x) + f(x) d\varphi(x).$$

Следовательно,

$$d[f(x) \varphi(x)] = df(x) \varphi(x) + f(x) d\varphi(x). \quad (17)$$

Дифференциал произведения двух функций равен сумме произведений дифференциала первой функции на вторую и первой функции на дифференциал второй.

4. Дифференциал частного от деления двух функций:

$$d\left[\frac{y(x)}{\varphi(x)}\right] = \frac{dy(x) \varphi(x) - y(x) d\varphi(x)}{\varphi^2(x)} \quad (18)$$

Это выражение получается аналогично (13), если слово производная заменить словом дифференциал.

Производная сложной функции. Имеем функцию $y(x) = f[\varphi(x)]$, т. е. $f(\varphi)$ — функция, аргумент которой φ в свою очередь зависит от x (считаем, что функции определены и дифференцируемы в своих областях).

Дифференциал функции (в достаточном приближении)

$$dy \stackrel{14}{=} y'(\varphi) d\varphi = f'(\varphi) d\varphi.$$

Но $d\varphi$ — тоже дифференциал функции $\varphi(x)$. Следовательно, $d\varphi \stackrel{14}{=} \varphi'(x) dx$. Тогда

$$dy = f'(\varphi) \varphi'(x) dx \text{ и } y' \stackrel{14}{=} \frac{dy(x)}{dx} = f'(\varphi) \varphi'(x).$$

Производная сложной функции равна произведению производных функций, из которых она составлена.

Аналогично можно получить выражения для дифференциала функции $F\{f[\varphi(x)]\}$:

$$dF \stackrel{14}{=} F'(f) df \stackrel{14}{=} F'(f) f'(\varphi) d\varphi \stackrel{14}{=} F'(f) f'(\varphi) \varphi'(x) dx,$$

$$F'(x) \stackrel{14}{=} \frac{dF}{dx} = F'(f) f'(\varphi) \varphi'(x) \quad (19)$$

и т. д.

Простейшие производные.

1. Производная x . Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Для такой функции производная

$$f'(x) = (x)' \stackrel{7}{=} \frac{x + dx - x}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1. \quad (20)$$

2. Производная постоянной величины. Функция $f(x) = a = \text{const}$ — постоянная при всех значениях аргумента x из некоторой области. Ее производная

$$f'(x) \stackrel{7}{=} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{a - a}{dx} = 0$$

(бесконечно малое dx все же отлично от нуля).

Производная постоянной величины равна нулю.

3. Производная показательной функции. Функция $f(x) = a^x$ (a — постоянная величина). Ее производная

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего предела вспомним, что основание натуральных логарифмов задано в виде $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$. Прологарифмируем это выражение и перейдем от логарифма предела к пределу логарифма (что возможно для непрерывной функции):

$$\begin{aligned} \ln e &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (1+x)^{1/x}. \text{ Иначе (так как } \ln e = 1), 1 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln (1+x). \end{aligned} \text{ Следовательно,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (21)$$

Теперь можно вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$. Введем новую переменную $z = a^x - 1$ (при $x \rightarrow 0$ z тоже стремится к нулю). Тогда $a^x = z + 1$, $\ln a^x = x \ln a = \ln(z + 1)$ и $x = \frac{\ln(z + 1)}{\ln a}$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z + 1)} = \ln a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z + 1)} \stackrel{21}{=} \ln a$ [вместо z в выражении (21) фигурирует x и дробь перевернута, но это несущественно при стремлении переменной к нулю и дроби — к единице]. Именно этот предел стоит в правой части искомой производной.

Значит, $f'(x) = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$. Таким образом,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (22)$$

Производная показательной функции равна произведению этой функции и натурального логарифма ее основания.

Частным случаем такой производной является производная показательной функции с основанием $a = e$:

$$(e^x)' \stackrel{22}{=} e^x \ln e = e^x. \quad (23)$$

Производная показательной функции с основанием e равна самой этой функции.

4. Производная натурального логарифма. Известно, что $e^{1/x} = x$ при всех $x > 0$. Следовательно, $(e^{1/x})' = x' \stackrel{19,23}{=} e^{1/x} (\ln x)' \stackrel{20}{=} 1$. От-

сюда $(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$. Таким образом, производная от логарифма положительного x равна величине, обратной x :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (24)$$

5. Производная степенной функции. Имеем функцию $f(x) = x^n$, где n — произвольное действительное число. При $x > 0$ $x^n = e^{\ln(x^n)} = e^{n \ln x}$. Для всех иррациональных n это выражение принято в качестве определения степенной функции. Производная

$$f'(x) = (x^n)' = (e^{n \ln x})' \stackrel{9.24}{=} e^{n \ln x} (n \ln x)' \stackrel{9.24}{=} e^{n \ln(x^n)} n \frac{1}{x} = x^n n \frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$

Таким образом, для любых n при $x > 0$

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (25)$$

Производная степени равна произведению ее показателя на основание в степени, на единицу меньшей.

6. Производная синуса угла. Функция $f(x) = \sin x$, где x — угол, выраженный в радианах.

Рассмотрим предел дроби $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$. Из треугольника ODB (рис. 10) $\sin x = |BD|/r$. Угол $x = \cup AB/r$. Следовательно, $\frac{\sin x}{x} =$

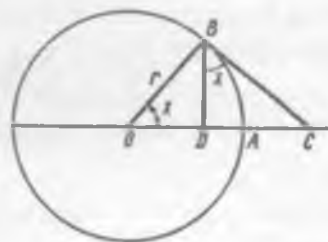


Рис. 10

$= \frac{|BD|/r}{r(\cup AB)} = |BD|/\cup AB < 1$, так как $\cup AB$ длиннее $|BD|$. Прямая $|BC|$ — касательная к окружности в точке B и, значит, перпендикулярна r ; отрезок $|BD|$ перпендикулярен $|OA|$ по построению, следовательно, углы DBC и x равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

Из треугольника BDC $\cos x = \frac{|BD|}{|BC|}$. От-

ношение $\frac{\sin x}{x} = \frac{|BD|}{\cup AB} > \frac{|BD|}{BC} = \cos x$ (так

как $|BC| > \cup AB$). Получается, что $\frac{\sin x}{x}$ меньше единицы, но больше

$\cos x$: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Устремим x к нулю; при этом оба неравенства остаются справедливыми, только пределы сближаются, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x =$

$= 1$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$ или $1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$. Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (26)$$

Если предел дроби равен единице, то числитель и знаменатель неограниченно приближаются друг к другу. Следовательно, для достаточно малых углов (в радианах!) синус приблизительно равен самому углу с любой степенью точности:

$$\sin x \approx x. \quad (27)$$

Возьмем производную от $\sin x$:

$$f'(x) \stackrel{7}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Разложив синус суммы по известной тригонометрической формуле, получаем (так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x = 1$):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} = \\ &= \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \stackrel{26}{=} \cos x. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (28)$$

Производная синуса произвольного угла равна косинусу того же угла.

7. Производная косинуса угла. Функция $f(x) = \cos x$. Ее производная $f'(x) \stackrel{7}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$.

Разложив косинус суммы двух углов по известной тригонометрической формуле, имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \cos x}{\Delta x} - \\ &- \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin \Delta x}{\Delta x} = -\sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \stackrel{26}{=} -\sin x. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (29)$$

Производная косинуса какого-либо угла равна взятому со знаком минус синусу этого угла.

8. Производная тангенса угла. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$\begin{aligned} \text{Ее производная } f'(x) &\stackrel{13}{=} \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \stackrel{28, 29}{=} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Производная тангенса произвольного угла равна единице, деленной на квадрат косинуса того же угла:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (30)$$

§ 6. Элементы интегрального исчисления

Интегрирование. Пусть задана функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 11 (функция предполагается непрерывной, дифференцируемой и т. д.; как мы говорили, эти требования для функций, имеющих физический смысл, обычно удовлетворяются). Мы хотим подсчитать, например, площадь криволинейной фигуры, ограниченной прямыми a и b , осью абсцисс и графиком $y = f(x)$. Заменим график ступенчатой линией с небольшими горизонтальными и вертикальными звеньями. Тогда искомая площадь может быть весьма приблизительно представлена суммой площадей полученных прямоугольников. Высота каждого прямоугольника равна $f(x_i)$, где x_i — какая-либо точка достаточно малого интервала $\Delta x_i \ll b - a$. Высота одного прямоугольника больше или меньше высоты другого (соседнего) на величину $\Delta f_i \ll f(x_i)$.

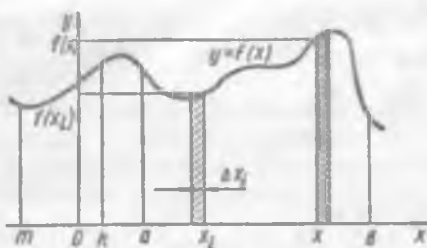


Рис. 11

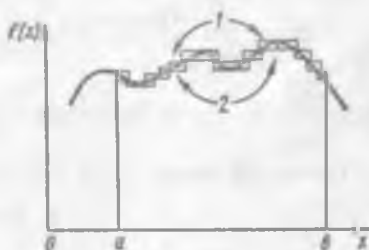


Рис. 12

Такое разбиение можно провести множеством способов, два из которых мы опишем (рис. 12). Одна ступенчатая линия лежит целиком над графиком $f(x)$, касаясь его только угловыми точками. Площадь, ограниченную линией 1, осью абсцисс и ординатами точек a и b , обозначим S^* .

Она равна $S^* = \sum_{i=1}^n \Delta S_i^* = \sum_{i=1}^n f_i^* \Delta x_i$. Другая ступенчатая линия лежит целиком под графиком $f(x)$, касаясь его только угловыми точками. Площадь, ограниченную этой линией 2, осью абсцисс и ординатами точек a и b , обозначим S^n . Она равна $S^n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i^n = \sum_{i=1}^n f_i^n \Delta x_i$. В этих формулах

n — количество интервалов Δx_i , которое может быть и различным в описанных разбиениях. Из рис. 12 видно, что $S^* > S^n$; больше того, искомая площадь меньше «верхней» площади S^* и больше «нижней» S^n , т. е. $S^* > S > S^n$. Представим себе теперь, что число ступенек, звеньев Δx_i неограниченно возрастает, а размеры всех звеньев Δx_i неограниченно уменьшаются, т. е. совершим *предельный переход* от конечного к бесконечному числу слагаемых. При этом S^* будет уменьшаться, приближаясь к S сверху (со стороны больших значений), а S^n будет увеличиваться, приближаясь к S снизу (со стороны меньших значений). В пределе (при всех $\Delta x_i \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$) эти площади сольются друг с другом и с искомой площадью S . Следовательно,

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} S^* = S = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} S^n. \quad (31)$$

Больше того, безразлично, как именно проводилось разбиение, если только высота каждого прямоугольника совпадала с каким-то значением функции $f(x_i)$ на данном интервале Δx_i . Искомая площадь равна пределу суммы площадей элементарных прямоугольников, когда площадь каждого из них стремится к нулю, а их число неограниченно возрастает:

$$S = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f_i \Delta x_i.$$

В этом пределе удобно от обозначений конечных интервалов Δx_i перейти к бесконечно малым приращениям dx .

Назовем *определенным интегралом* сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (32)$$

Здесь вместо $f_i(x)$ — i -го значения функции из заданного интервала Δx_i — фигурирует $f(x)$ — функция в точке x , к которой «стянут» i -й интервал; dx — бесконечно малый интервал значений x около этой точки. Знак суммирования «вытянулся» в интеграл (не правда ли, есть что-то общее: $\sum \rightarrow \int$. Впрочем, еще больше интеграл похож на первую букву латинского слова Summa). Выражение (32) читается так: S равно интегралу от $f(x) dx$ в пределах * от a до b .

Геометрический смысл определенного интеграла ясен из рис. 11: это площадь фигуры, которую мы описали. Не надо думать, что так можно подсчитать только площадь. Физический смысл интеграла (32) гораздо шире, как выяснится в дальнейшем.

Введем понятие *неопределенного интеграла* как площади (см. рис. 11), ограниченной функцией $f(x)$, осью абсцисс, ординатой в текущей точке x и ординатой в какой-нибудь неопределенной точке (m , k или какой-то еще). Неопределенный интеграл — это определение семейства функций в отличие от определенного интеграла, имеющего конкретное числовое значение. Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ записывается в виде

$$F(x) = \int f(x) dx. \quad (33)$$

Неопределенный интеграл равен определенному интегралу, нижний предел которого произволен, а верхний — независимая переменная:

$$F(x) \stackrel{**}{=} \int_m^x f(x) dx,$$

где m — произвольная точка оси x . В частности, $F(a) = \int_m^a f(x) dx$.

* Слово предел здесь употреблено в смысле «определенное значение» и не имеет отношения к понятию предела функции. Иногда вместо пределов интегрирования под обозначением $\int$ пишут величину, по которой ведется интегрирование (по объему, по площади, по массе...). Если объект интегрирования замкнут (замкнутый контур, замкнутая поверхность), то знак интеграла перечеркивается окружностью ($\oint$ или $\oint_S$).

$F(b) = \int_m^b f(x) dx$. Геометрически это площади, ограниченные кривой $f(x)$,

осью абсцисс и ординатами точек m и a (первый интеграл) или b (второй интеграл). Разность этих площадей (см. рис. 11) представляет собой определенный интеграл (32) (независимо от положения точки m).

Следовательно, для вычисления определенного интеграла от какой-либо функции надо найти разность значений неопределенного интеграла от этой функции при верхнем и нижнем пределах интегрирования:

$$S \stackrel{32}{=} \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (34)$$

(вертикальная черта с пределами интегрирования a и b означает, что $F(x)$ надо написать два раза: один — с верхним пределом вместо x и со знаком плюс, другой — с нижним пределом и со знаком минус).

Еще раз рассмотрим неопределенный интеграл $F(x) \stackrel{33}{=} \int f(x) dx \stackrel{32}{=} \int_m^x f(x) dx$, который равен площади под графиком $f(x)$ между ординатами m и x , и дадим ему бесконечно малое приращение

$$dF(x) \stackrel{33}{=} d \int f(x) dx = f(x) dx \quad (35)$$

— так как это площадь дважды заштрихованной полоски на рис. 11. Видим, что действия, обозначаемые символами d и $\int$, обратны.

Следовательно, неопределенный интеграл $F(x) \stackrel{33}{=} \int f(x) dx$ — это такая функция, производная которой равна подынтегральному выражению. Действительно,

$$\frac{dF(x)}{dx} \stackrel{35}{=} f(x). \quad (36)$$

Интегрирование * — это отыскание неопределенного интеграла (по которому можно найти определенный), т. е. функции $F(x)$, производная которой равна подынтегральной функции.

Таким образом, интегрирование — действие, обратное дифференцированию. Правильность интегрирования легко проверить, продифференцировав результат.

В соответствии с правилами дифференцирования, если к неопределенному интегралу прибавить произвольную постоянную, результат не изменится. Неопределенный интеграл находят с точностью до произвольной постоянной интегрирования C .

Приведем результаты интегрирования некоторых элементарных функций, которые вы можете проверить дифференцированием:

$$\int x^n dx \stackrel{25}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ если } n \neq -1, \quad (37)$$

$$\int \frac{dx}{x} \stackrel{24}{=} \ln x + C, \text{ если } x > 0, \quad (38)$$

* integratio (лат.) — восстановление.

$$\int a^x dx \stackrel{22}{=} \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (39)$$

$$\int e^x dx \stackrel{23}{=} e^x + C, \quad (40)$$

$$\int \cos x dx \stackrel{28}{=} \sin x + C, \quad (41)$$

$$\int \sin x dx \stackrel{29}{=} -\cos x + C. \quad (42)$$

Свойства интеграла

1. Интеграл суммы нескольких функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int \sum_{i=1}^n f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \int f_i(x) dx. \quad (43)$$

Для доказательства продифференцируем обе части уравнения (43):

$$\begin{aligned} \left[\int \sum_{i=1}^n f_i(x) dx \right]' &\stackrel{36}{=} \sum_{i=1}^n f_i(x); \\ \left[\sum_{i=1}^n \int f_i(x) dx \right]' &\stackrel{11}{=} \sum_{i=1}^n [\int f_i(x) dx]' \stackrel{36}{=} \sum_{i=1}^n f_i(x). \end{aligned}$$

Равенство производных доказывает справедливость уравнения (43).

2. Постоянный сомножитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad (44)$$

где $a = \text{const}$. Для доказательства продифференцируем обе части уравнения (44):

$$\begin{aligned} [\int a f(x) dx]' &\stackrel{36}{=} a f(x); \\ [a \int f(x) dx]' &\stackrel{9}{=} a [\int f(x) dx]' \stackrel{36}{=} a f(x). \end{aligned}$$

Равенство производных доказывает правильность формулы (44).

Большинство встречающихся в физике интегралов не сводится к табличным. В этих случаях для взятия интегралов требуется высокое математическое искусство. Иногда вид функции F ясен «из физических соображений», часто используются разнообразные математические приемы интегрирования.

К примеру, нужно вычислить $\int \sin^2(\omega t + \varphi) dt$, имеющий важный физический смысл. Воспользуемся известной тригонометрической формулой

$$\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha)/2. \quad (45)$$

Обозначив $\omega t + \varphi = \alpha/2$, получим: $\sin^2(\omega t + \varphi) \stackrel{45}{=} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)]/2$, откуда

$$\begin{aligned} \int \sin^2(\omega t + \varphi) dt &\stackrel{45}{=} \int \frac{1}{2} dt - \int \frac{\cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt \stackrel{44, 41}{=} \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\omega t + \varphi)}{2\omega} = \frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin 2(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (46)$$

Опущенная произвольная постоянная не мешает применению формулы (46), поскольку по этой формуле будут вычисляться определенные интегралы. Аналогично, при подстановке пределов интегрирования по формулам (37)–(42) произвольные постоянные тоже взаимно уничтожаются. Например,

$$\int_a^b x^n dx \stackrel{37}{=} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} + C - \frac{a^{n+1}}{n+1} - C = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Ограничимся изложенными сведениями из дифференциального и интегрального исчислений. Мы не очень строго и неполно изложили ряд математических положений, к которым надо привыкнуть.

Но и без ясного понимания всех выводов можно пользоваться результатами работы математического аппарата. Это одно из преимуществ науки математики. А строгое изложение будет дано в соответствующем месте полного курса математики, когда курс физики уже будет пройден. Желаящим можем рекомендовать книгу Я. Б. Зельдовича «Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике» (М., Наука, 1970).

РАЗДЕЛ I

МЕХАНИКА

ГЛАВА I

КИНЕМАТИКА

§ 1.1. Механическое движение

Механическое движение является простейшей формой движения материи и встречается буквально «на каждом шагу». Например, вы идете по улице, движутся автобусы, трамваи, поезда, самолеты, ракеты, спутники — относительно Земли; планеты, звезды, галактики — относительно Солнца; атомы, электроны — относительно лаборатории, и т. д.

Таким образом, *механическое движение* — перемещение тела как целого относительно других тел, принимаемых за неподвижные.

Основная задача механики состоит в определении положения тела в каждый момент времени.

Предметом *кинематики** является описание различных механических движений (без рассмотрения причин изменения того или иного вида движения).

Механическое движение *относительно*, выражение «тело движется» лишено смысла, пока не определено, относительно чего рассматривается движение.

Тело (или группа тел), принимаемое за неподвижное, называется *телом отсчета*. Совокупность тела отсчета и приборов для измерения расстояний и времени представляет собой *систему отсчета*, в которой рассматривается определенное движение. С системой отсчета обычно связывают некоторую систему координат.

Всякое явление или предмет имеет бесконечное количество самых разнообразных характеристик. При изучении того или иного явления или предмета приходится ограничиваться конечным числом характеристик, отбрасывая те, которые несущественны для данного процесса. Таким образом, предметом исследования является не само явление, а его более или менее упрощенная *модель*.

Но часто отделить существенное от несущественного чрезвычайно трудно, и только сравнение выводов с опытом показывает правильность такого отделения. Например, при изучении движения автомобиля по улице может оказаться несущественным его цвет или конструкция боковых стекол, в то время как эти факторы являются определяющими для температуры внутри автомобиля.

Рассматривая движение достаточно твердых тел, можно в большинстве случаев не обращать внимания на изменение их формы. Тогда удобнее

* kinēma (греч.) — движение.

рассматривать тело, расстояния между частицами которого не изменяются, — *абсолютно твердое тело*. Разумеется, ничего «абсолютного» в природе нет, но, например, изучив теоретически движение абсолютно твердого тела, мы узнаем закономерности движения реальных достаточно твердых тел.

Мы ограничимся *плоским движением*, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Во многих случаях движения тел несущественными являются их размеры. Тогда полезно ввести другую абстракцию — модель материальной точки.

Назовем *материальной точкой* тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Например, Земля — громадное тело, но при взаимодействии с Солнцем она может быть принята за материальную точку: ее радиус ≈ 6400 км, расстояние до Солнца $\approx 150 \cdot 10^6$ км, что гораздо больше радиуса Земли.

Описать движение произвольного тела — значит описать движение всех точек этого тела. Поэтому займемся описанием движения одной точки протяженного тела или одной материальной точки.

§ 1.2. Кинематика точки

Положение точки в декартовой системе координат описывается тремя ее координатами x, y, z или ее *радиусом-вектором* $\mathbf{r}$ — вектором, проведенным из начала координат к данной точке (проекции радиуса-вектора на оси координат равны соответственно x, y и z).

Совокупность всех положений движущейся точки представляет собой *траекторию* ее движения — в общем случае кривую линию, вид которой зависит от характера движения точки и от системы отсчета. Так, совершенно различны траектории движения лунохода относительно Луны и относительно Земли. Падающее в равномерно движущемся поезде тело относительно вагона летит по прямой, а относительно Земли — по параболе.

Пусть некоторая точка движется по кривой (в общем случае), изображенной на рис. 13. Вектор $\Delta \mathbf{r}$, соединяющий два последовательных положения движущейся точки, называют ее *перемещением*.

Легко видеть, что $\mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ и, значит, перемещение равно $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — приращению радиуса-вектора за некоторый промежуток времени Δt . Путь за это время представляет собой расстояние по криволинейной траектории от положения A до положения B , если направление движения не изменилось.

Необходимо различать понятия пути точки от A до B по ее траектории (скалярная величина, рис. 13) и ее перемещения $\Delta \mathbf{r}$. Даже модуль перемещения отличается, вообще говоря, от пути. Отличаются друг от друга модуль приращения некоторого вектора и приращение модуля этого вектора. В нашем случае модуль приращения радиуса-вектора $|\Delta \mathbf{r}| = |\overline{AB}|$, а приращение модуля радиуса-вектора $\Delta r = r_2 - r_1 \neq |\overline{AB}|$.

Разделив вектор перемещения на время, в течение которого это перемещение произошло, получим некоторую скорость движения:

$$\mathbf{v} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t.$$



Рис. 13



Рис. 14

Эта скорость, с которой (равномерно, см. § 1.4) двигалось бы тело за время Δt по прямой AB (рис. 14), пока не имеет почти никакого отношения к истинному движению данной точки.

Начнем теперь неограниченно уменьшать промежуток времени Δt , т. е. точку B будем приближать к точке A . Может быть не сразу, но рано или поздно перемещение Δr тоже устремится к нулю, а его направление — к направлению касательной к траектории в точке A . Вместе с тем скорость $\Delta r/\Delta t$ все меньше будет отличаться от действительной скорости точки, проходящей положение A .

Назовем *скоростью* точки в положении A предел, к которому стремится отношение $\Delta r/\Delta t$ при Δt , стремящемся к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \equiv \frac{dr}{dt}. \quad (1)$$

Итак, *скорость в точке A равна первой производной радиуса-вектора по времени.*

Таким образом, скорость измеряется отношением перемещения к промежутку времени, в течение которого это перемещение произошло (если за это время скорость можно считать неизменной). Направлен этот вектор по касательной к траектории в данной точке. Физический смысл вектора dr состоит в том, что при любом движении он настолько мал, что на всем его протяжении скорость v можно считать неизменной.

Другими словами, имеющиеся приборы не позволяют заметить различие скоростей во всех точках данного перемещения. Такое перемещение называют *физически бесконечно малым*. Для другого отрезка dr скорость будет другой, но неизменной на этом отрезке. Поэтому, зная скорость v , можно найти перемещение за малый промежуток времени dt :

$$dr = v dt. \quad (2)$$

Результирующее конечное перемещение ΔL можно получить, складывая (векторно!) малые перемещения:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i.$$

Эта формула тем точнее, чем меньше Δt_i и чем больше n . Значит, правильнее писать

$$\Delta L = \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i \equiv \int_A^B v dt. \quad (3)$$

Модуль бесконечно малого перемещения $dr \stackrel{?}{=} v dt$ неотличим от пути за время dt . Следовательно, для нахождения конечного пути за некоторое время движения нужно арифметически сложить все элементарные пути за это время:

$$l = \int_A^B v dt. \quad (4)$$

Можно ввести *криволинейную ось координат* X вдоль траектории (рис. 14). Координата X имеет смысл расстояния по кривой от некоторой точки O до движущейся точки. Разность криволинейных координат $x_B - x_A$ представляет собой путь только при движении в одну сторону.

Если в выражение (4) вместо модуля скорости поставить проекцию скорости v_x на выбранное направление касательной к траектории (при движении «вперед» $v_x = v$, а при движении «назад» $v_x = -v$ в каждой точке), то получится в общем случае не путь, а разность криволинейных координат $x_B - x_A$ (в случае произвольного движения могут быть участки, пройденные неоднократно в разных направлениях, и путь будет больше разности криволинейных координат).

Поясним это на примере.

Поезд прошел от Москвы до Ленинграда и возвратился в Москву. Учитывая знаки проекций скорости, получим $\Delta x = \int_{1-2-1} v_x dt = 0$, что в данном случае ана-

логично формуле (3). Складывая же все члены суммы (4) по модулю, получим удвоенное расстояние от Москвы до Ленинграда, т. е. пройденный поездом путь. Разумеется, он численно равен площади под графиком скорости в зависимости от времени (рис. 15; он аналогичен рис. 11). На рисунке заштрихованы полоски, равные малым путям, пройденным за интервалы времени Δt_1 и Δt_2 .

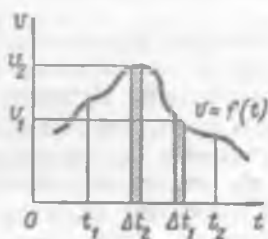


Рис. 15

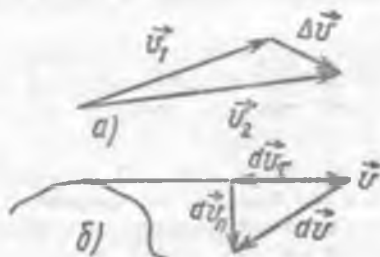


Рис. 16

Естественно, что в общем случае скорость точки не остается неизменной. Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ эта скорость изменилась на $\Delta v = v_2 - v_1$. В общем случае направление изменения скорости Δv не связано с направлениями скоростей v_1 и v_2 (рис. 16, а).

Разделив изменение скорости на время, за которое оно произошло, мы получим какое-то среднее изменение скорости за единицу времени, т. е. ускорение, которое пока не имеет почти никакого отношения к тому изменению скорости точки, которое происходит в действительности. Чтобы точнее охарактеризовать происходящий процесс, надо, как и в случае со скоростью, перейти к пределу.

Назовем *ускорением* точки предел, к которому стремится отношение $\Delta v / \Delta t$ при Δt , стремящемся к нулю:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (5)$$

Итак, ускорение — это первая производная скорости по времени или вторая производная радиуса-вектора по времени:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

Ускорение измеряется отношением изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло (если за это время скорость менялась равномерно). Направление вектора $\mathbf{a}$ определяется направлением вектора $d\mathbf{v}$ ($\mathbf{a}$ не $\mathbf{v}$!). В общем случае изменение скорости $d\mathbf{v}$ направлено под углом к скорости и это изменение можно разложить на две составляющие: тангенциальную * $d\mathbf{v}_t$, направленную по касательной к траектории, и нормальную ** $d\mathbf{v}_n$, направленную перпендикулярно касательной (рис. 16, б): $d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_t + d\mathbf{v}_n$.

Разделив все изменения скоростей на время dt ***, в течение которого они произошли, получим, что полное ускорение равно векторной сумме тангенциального и нормального ускорений:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n.$$

Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по модулю, нормальное — по направлению (если не ограничиваться только плоским движением, то надо рассматривать еще бинормальное ускорение, перпендикулярное плоскости рис. 16, б). Описать движение точки — значит в явном виде найти зависимости $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$.

§ 1.3. Частные случаи движения точки

Рассмотрим различные наиболее простые виды движения материальной точки.

Равномерное движение. Пусть точка движется по траектории в одну сторону. Тогда пройденный за конечное время путь

$$l = \int_0^t v dt. \quad (6)$$

Назовем *равномерным* такое движение, при котором модуль скорости не изменяется.

Путь при таком движении за время t

$$l \stackrel{44-M}{=} v \int_0^t dt \stackrel{37-M}{=} vt \quad (7)$$

— уравнение равномерного движения.

* tangens (лат.) — касающийся.

** normalis (лат.) — сделанный по углу, перпендикулярный (геом.).

*** Нужно было изменение скорости за конечное время Δt разложить на составляющие $\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_t + \Delta \mathbf{v}_n$, затем почленно это уравнение разделить на Δt и устремить к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Для краткости такие рассуждения мы обычно не проводим. Аналогичный смысл имеет обозначение бесконечно малых векторов на рис. 16, б и др.: изображаются конечные достаточно малые векторы, которые в дальнейшем устремляются к бесконечно малому пределу.

Неравномерным называют такое движение, при котором модуль скорости зависит от времени (и, следовательно, не может быть вынесен из-под интеграла).

В этих определениях ничего не сказано о направлении скорости, которое может быть произвольным (и произвольно изменяющимся!). Значит, равномерным (и неравномерным) бывает любое, в общем случае, криволинейное движение. Выражение

$$v = l/t \quad (8)$$

можно считать определением модуля скорости равномерного движения. Так как $v = \text{const}$, то пути, пройденные за любые равные промежутки времени t , одинаковы (это положение в школе рассматривалось как определение равномерности движения). Постройте график $v(t)$ для равномерного движения. Напомним, что модуль перемещения и путь за конечное время совпадают только при прямолинейном движении в одну сторону, смешение этих понятий недопустимо.

Единицу скорости можно было ввести уже по формуле (1). Но наиболее просто эту производную единицу задать по формуле (8), которая справедлива, если коэффициент пропорциональности положен равным безразмерной единице и потому опущен (см. приложение 1). Тогда за единицу скорости в СИ необходимо принять скорость равномерного движения точки, которая проходит путь длиной 1 м за 1 с. Эта единица называется *метр в секунду* [м/с].

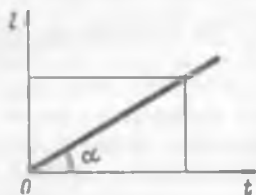


Рис. 17

При равномерном движении, как мы показали, модуль вектора скорости не меняется, тангенциальное ускорение равно нулю. В прямолинейном движении вектор скорости направлен вдоль траектории (касательная к траектории совпадает с ней самой), нормальное ускорение равно нулю. Следовательно, при равномерном прямолинейном движении вектор скорости остается постоянным ($v = \text{const}$). При таком движении вектор полного ускорения

$$a = 0.$$

График зависимости пути от времени при равномерном движении изображен на рис. 17. Тангенс угла наклона α численно равен отношению пути ко времени:

$$\operatorname{tg} \alpha = l/t = v.$$

Следовательно, по углу наклона такого графика можно судить о модуле скорости.

Равноускоренное движение. Равномерных движений, как всяких идеальных процессов, в жизни не бывает. Почти равномерными мы считаем непродолжительные движения с малыми тангенциальными ускорениями. Например, поезд где-то в середине перегона по горизонтальному участку пути движется практически равномерно. Те движения, с которыми мы сталкиваемся на опыте, конечно, неравномерны. Но, двигаясь с изменяющейся скоростью, тот же поезд проходит определенный путь за какое-то заданное время.

Следовательно, можно представить такое равномерное движение, при котором был бы пройден данный путь за указанное время, и сопоставить это движение с изучаемым неравномерным.

Модуль скорости равномерного движения, у которого путь и время соответственно равны пути и времени данного неравномерного движения, назовем *средней скоростью неравномерного движения*:

$$\langle v \rangle = l/t. \quad (9)$$

По данному определению, средняя скорость — скаляр. Обычно это понятие используется для вычисления пройденного пути.

За время dt изменение проекции скорости на направление движения $dv = a_t dt$. Конечное изменение скорости за промежуток времени от t_1 до t_2 :

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a_t dt. \quad (10)$$

Назовем *равноускоренным* такое движение, при котором проекция тангенциального ускорения на направление движения a_t не изменяется. Тогда

$$v_2 - v_1 \stackrel{44.34}{=} a_t \int_{t_1}^{t_2} dt \stackrel{37, 34.М}{=} a_t (t_2 - t_1),$$

откуда

$$a_t = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Так как $a_t = \text{const}$, то изменения модуля скорости за любые равные промежутки времени одинаковы. Здесь v_1 и v_2 — скорости точки соответственно в моменты времени t_1 и t_2 .

Подчеркнем, что нормальное ускорение при равноускоренном движении может быть произвольным. Обозначим $t_1 = 0$ начальный и $t_2 = t$ — конечный моменты времени; соответственно скорости в эти моменты называют начальной и конечной: $v_0 = v_1$, $v_t = v_2$ (эти названия имеют смысл относительно промежутка времени от $t = 0$ до t).

Получим привычное выражение проекции тангенциального ускорения в равноускоренном движении:

$$a_t = (v_t - v_0)/t. \quad (11)$$

Неравноускоренным называют движение, при котором проекция тангенциального ускорения зависит от времени [и, значит, не выносится из-под интеграла (10)].

Единицу ускорения можно было ввести по формуле (5). Но проще это сделать теперь. В формуле (11) коэффициент пропорциональности k положен равным безразмерной единице. Тогда в СИ за единицу ускорения надо принять ускорение точки, скорость которой в равноускоренном движении изменяется на 1 м/с за 1 с. Эту единицу называют метр на секунду в квадрате [м/с²].

Проекция скорости в произвольный момент времени t равна

$$v_t = v_0 + a_t t. \quad (12)$$

Это формула скорости в равноускоренном движении. Различают два вида такого движения — ускоренное и замедленное. Но нет необходимости для каждого из них писать разные формулы, отличаются эти движения друг от друга только знаком проекции тангенциального ускорения на направление скорости.

Действительно, при $v_t > v_0$ скорость с течением времени увеличивается, и по формуле (11) $a_t > 0$. При $v_t < v_0$ скорость уменьшается, числитель формулы (11) отрицателен, и $a_t < 0$. Для вывода формулы пути можно воспользоваться общим методом:

$$l \stackrel{4}{=} \int_0^t v dt \stackrel{12}{=} \int_0^t (v_0 + a_t t) dt \stackrel{43.М}{=} \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_t t dt \stackrel{44.М}{=} v_0 \int_0^t dt + a_t \int_0^t t dt \stackrel{37.М}{=} v_0 t + a_t t^2/2.$$

Пройденный путь численно равен площади под графиком скорости в зависимости от времени (рис. 18); это площадь трапеции, которую легко подсчитать:

$$l = v_0 t + \frac{1}{2} t (v_t - v_0) \stackrel{11}{=} v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2.$$

Естественно, получилась та же формула пути равноускоренного движения

$$l = v_0 t + a_t t^2 / 2. \quad (13)$$

Мы вывели в явном виде зависимости $l(t)$, $v(t)$, $a_t(t)$, т. е. описали равноускоренное движение.

Часто в задаче не задано время и не требуется его отыскать, а все приведенные формулы содержат эту величину. Исключим время из формул (11) и (13):

$$l = v_0 \frac{v_t - v_0}{a_t} + \frac{a_t (v_t - v_0)^2}{2a_t^2} = \frac{2v_0 v_t - 2v_0^2 + v_t^2 - 2v_0 v_t + v_0^2}{2a_t} = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2a_t}.$$

Это основная формула равноускоренного движения, не содержащая времени в явном виде:

$$v_t^2 - v_0^2 = 2a_t l. \quad (14)$$

Из формул (12)–(14) независимыми являются только две, поэтому при решении определенного вопроса в задаче можно использовать любые две из них. Эти формулы описывают равноускоренное движение точки независимо от формы ее траектории. Нормальное ускорение, как мы уже говорили, в равноускоренном движении может быть произвольным, с ним связано изменение направления скорости и, следовательно, форма траектории.

Если в таком движении нормальное ускорение все время равно нулю, то направление скорости не изменяется, движение является прямолинейным. Тогда полное ускорение совпадает с тангенциальным и остается постоянным не только по модулю, но и по направлению. Иными словами, при равноускоренном прямо-

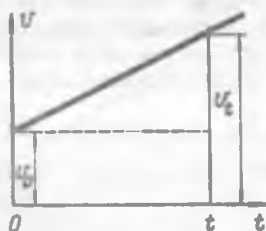


Рис. 18

линейном движении вектор полного ускорения неизменен. Определение такого движения записывается в виде: $a_n = 0$, $a_t = \text{const}$.

Равноускоренное движение без начальной скорости ($v_0 = 0$). Основные формулы при таком движении:

$$v_t^{12} = a_t t; \quad l^{13} = a_t t^2 / 2; \quad v_t^2 = 2a_t l.$$

Значит:

- 1) скорость тела прямо пропорциональна времени движения: $v_t \sim t^*$;
- 2) пройденный путь прямо пропорционален квадрату времени движения: $l \sim t^2$;
- 3) путь, пройденный телом за первую секунду движения, численно равен половине ускорения: $l_1^{13} = a_t / 2$;
- 4) пути, проходимые телом за последовательные равные промежутки времени, относятся как последовательные нечетные числа.

Для доказательства обозначим: l_1 — путь, пройденный телом за первую секунду движения, l_2 — за вторую, l_3 — за третью и т. д. Соответственно обозначим путь, пройденный телом за одну секунду, буквой l_1 , за две — l_2 , за три — l_3 и т. д. (рис. 19; естественно, путь за одну первую секунду $l_1 = l_1$). Запишем числовые равенства [на основании рис. 19 и формулы (13)]:

* tilde (исп.) — знак; $\sim$ — обозначение прямой пропорциональности.

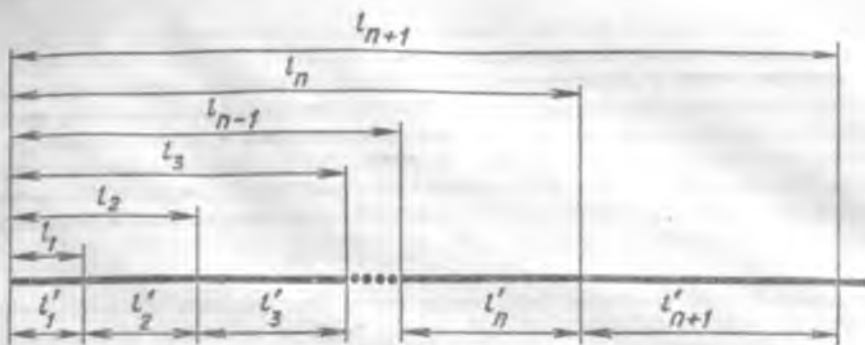


Рис. 19

$$l'_1 = \frac{a_t}{2};$$

$$l'_2 = l_2 - l_1 = \frac{a_t}{2} (2^2 - 1^2) = 3 \frac{a_t}{2};$$

$$l'_3 = l_3 - l_2 = \frac{a_t}{2} (3^2 - 2^2) = 5 \frac{a_t}{2};$$

.....

$$l'_n = l_n - l_{n-1} = \frac{a_t}{2} [n^2 - (n-1)^2] = (2n-1) \frac{a_t}{2};$$

$$l'_{n+1} = l_{n+1} - l_n = \frac{a_t}{2} [(n+1)^2 - n^2] = (2n+1) \frac{a_t}{2};$$

.....

Разделим эти равенства почленно ($a_t/2$ сокращаются):

$$l'_1 : l'_2 : l'_3 : \dots : l'_n : l'_{n+1} : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots : (2n-1) : (2n+1) : \dots$$

Это выражение не изменится, если взять другие равные промежутки времени.

Свободное падение. Свободным падением называется движение тела без начальной скорости под действием только силы тяжести (см. § 2.15).

Еще Галилей экспериментально и теоретически доказал, что все тела в данной точке Земли падают с одним и тем же ускорением.

Допустим, что более тяжелое тело 1 падает с большим ускорением, чем тело 2 (рис. 20, а). Скрепим тела так, как показано на рис. 20, б. Тогда соединенное тело, по предположению, должно падать с еще большим ускорением, чем тело 1. С другой стороны, тело 2 должно тормозить тело 1, и соединенное тело должно падать с ускорением меньшим, чем тело 1. Значит, допущение неверно.

Пусть, наоборот, ускорение тела 1 меньше, чем тела 2. Скрепим тела так, как показано на рис. 20, в. Тогда, по предположению, соединенное тело должно падать с еще меньшим ускорением, чем тело 1. С другой стороны, первое тело ускоряется вторым. Противоречие доказывает, что и это допущение неверно. Остается одна возможность: оба тела падают с одинаковыми ускорениями.

А как же быть с нашим повседневным «опытом»? Отпустите одновременно лист из тетради и саму тетрадь, расположенные горизонтально.

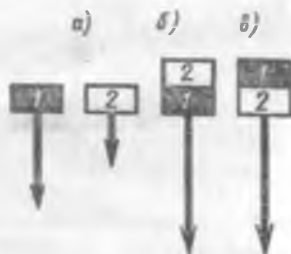


Рис. 20

Тетрадь падает гораздо быстрее. Теперь, не скрепляя, положите лист на тетрадь и отпустите. Объясните сделанные опыты.

Известен опыт с *эвакуированной** трубкой, в которой падают пушинка, пробка и дробинка с практически одинаковыми ускорениями. Измеряя пути, пройденные свободно падающим телом за равные промежутки времени, можно установить, что эти пути относятся друг к другу как последовательные нечетные числа. Следовательно, свободное падение — равноускоренное движение. Ускорение свободного падения обозначают g^{**} . Основные формулы для такого движения:

$$v_i^{12} = gt; \quad h^{13} = gt^2/2; \quad v_i^{14} = 2gh.$$

Движение тела, брошенного вертикально вверх. Это движение удобно рассматривать по частям: 1) движение вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (рис. 21) и проекцией ускорения $a_t = -g$; 2) свободное падение от конечной точки подъема.

Для первого движения

$$0^{12} = v_0 - gt \text{ и } 0 - v_0^{14} = -2gh,$$

откуда время и высота подъема

$$t = v_0/g, \quad h = v_0^2/(2g).$$

Для второго движения

$$(v_i)^2 - 0^{14} = 2gh = 2gv_0^2/(2g),$$

так как высота падения равна высоте подъема. Следовательно,

$$v_i = v_0.$$

По формуле скорости $v_i = 0 + gt'$, откуда время падения

$$t' = +v_i/g = v_0/g = t.$$

Итак, мы нашли высоту подъема, время подъема, время падения, конечную скорость падения и доказали, что время подъема равно времени падения, конечная скорость падения равна начальной скорости бросания.

Всякое реальное движение криволинейно. Как мы видели, в общем случае полное ускорение не совпадает со скоростью по направлению, и только в частном случае, когда нормальное ускорение равно нулю, движение прямолинейно. Следовательно, необходимым и достаточным условием криволинейности движения является наличие не равного нулю нормального ускорения. Другими словами,



Рис. 21

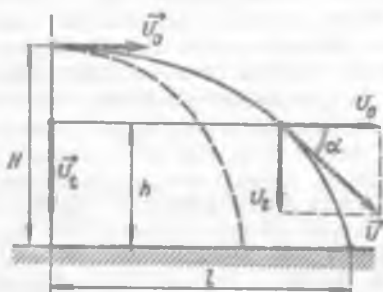


Рис. 22

* *evacuare* (лат.) — опоражнивать.

** *gravitas* (лат.) — тяжесть. Обычно произносят «же» — по-французски.

нужно, чтобы полное ускорение было направлено не вдоль скорости. Тогда появляется возможность рассмотреть данное движение как суперпозицию, по крайней мере, двух более простых движений. Значит, криволинейное движение — движение сложное. На какие составляющие разложить данное движение — это решается в каждом конкретном случае.

Движение тела, брошенного горизонтально. Пусть заданы скорость v_0 тела и высота H , с которой оно брошено (рис. 22). Надо определить дальность l полета и скорость тела в произвольной точке или в произвольный момент времени.

Данное движение можно рассматривать как результат двух независимых движений: горизонтального равномерного со скоростью v_0 и вертикального свободного падения. Отложив одинаковые перемещения за равные промежутки времени по горизонтальной оси и возрастающие перемещения за те же промежутки вдоль вертикальной оси, можно построить траекторию движения тела.

Дальность полета проще всего определить по уравнению равномерного движения $l = v_0 t$. Время этого движения равно времени свободного падения, которое можно найти по заданной высоте:

$$H = \frac{1}{2} g t^2,$$

тогда

$$l = v_0 \sqrt{2H/g}.$$

На самом деле, вследствие сопротивления воздуха тело будет двигаться по баллистической* кривой (рис. 22; пунктир), расчет которой достаточно сложен. Здесь мы сопротивления не учитываем.

Для расчета скорости в произвольной точке траектории построим горизонтальную и вертикальную составляющие скорости в этой точке. Горизонтальная составляющая v_0 не меняется.

В § 1.6 экспериментально доказано, что брошенное горизонтально тело участвует в таком же вертикальном движении, как свободно падающее с той же высоты тело. Следовательно, вертикальная составляющая v_t будет такой, как у свободно падающего с высоты H тела на высоте h (рис. 22). Если задана высота h , то

$$v_t^2 = 2g(H - h).$$

Если же задан момент времени t , то

$$v_t = gt.$$

Искомая скорость будет векторной суммой двух найденных составляющих, и ее модуль равен

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_t^2}.$$

Направление скорости можно определить либо из рисунка, либо по тангенсу угла α :

$$\operatorname{tg} \alpha = v_t / v_0.$$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Пусть заданы начальная скорость v_0 и угол α , под которым брошено тело (рис. 23). Нужно определить дальность l полета и скорость в произвольной точке траектории.

Разложим заданную скорость по горизонтальному и вертикальному направлениям. Ее составляющие $v_1 = v_0 \cos \alpha$, $v_2 = v_0 \sin \alpha$. Изучаемое движение склады-

* ballō (греч.) — бросаю. Баллистика — наука о движении брошенных тел.

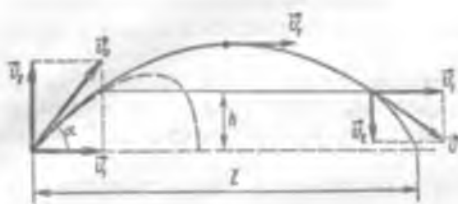


Рис. 23

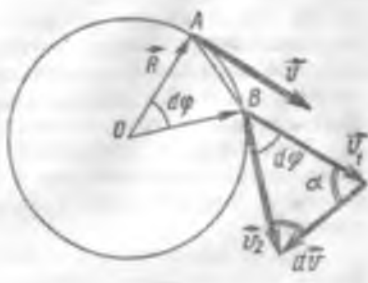


Рис. 24

вается из равномерного горизонтального движения со скоростью v_1 и движения тела, брошенного вертикально вверх со скоростью v_2 . Дальность полета $l = v_1 t$. При подъеме до верхней точки траектории $0 = v_2 - gt/2$, так как $a = -g$, а время подъема равно половине времени горизонтального движения (в случае 5 доказано, что время подъема равно времени падения). Тогда $t = 2v_2/g$. Путь при горизонтальном движении

$$l = v_1 \frac{2v_2}{g} = \frac{2v_0 \cos \alpha \cdot v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Итак, дальность полета при заданной начальной скорости зависит от угла бросания и достигает максимума при $\alpha = 45^\circ$.

Скорость в произвольной точке удобно искать в виде векторной суммы v_1 и v_2 , каждую из которых легко найти по заданным величинам. Аналогично предыдущему случаю может быть определен угол между v и v_1 (надо только различать две точки траектории, высоты которых h одинаковы; скорости в них одинаковы по модулю, но углы с горизонтальной плоскостью противоположны по знаку). И этот случай мы рассмотрели при отсутствии сопротивления воздуха. В реальных условиях получается несимметричная баллистическая траектория (рис. 23; пункт).

Движение по окружности. Это частный случай криволинейного движения. При таком движении скорость, определенная по формуле (1), называется *линейной*. Рассмотрим простейшее криволинейное движение — равномерное движение точки по окружности. При таком движении, по определению, модуль скорости постоянен, но направление линейной скорости изменяется и, следовательно, существует вектор ускорения. Если бы его не было, то вектор скорости в точке B, достаточно близкой к точке A, был бы равен вектору скорости в точке A: $v_1 = v$ (рис. 24). На самом деле в точке B скорость иная (v_2), и лишь модуль скорости не изменился: $v_2 = v = v_1$. Радиус-вектор R повернулся на бесконечно малый угол $d\phi$ за промежуток времени dt . Из рис. 24 имеем $v_1 + dv = v_2$ (нужно было взять достаточно малые величины $\Delta\phi$, Δt , Δv и затем устремить их к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Мы считаем эту операцию проделанной).

Из подобия равнобедренных треугольников (скорости перпендикулярны соответствующим радиусам) следует, что

$$dv/|AB| = v/R,$$

где $|AB| = |dR|$ — модуль перемещения за время dt . Следовательно,

$$dv = v |dR|/R \quad \text{и} \quad a = \frac{v}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{v |dR|}{R dt} = \frac{v^2}{R}.$$

Чтобы узнать направление вектора ускорения, найдем угол α из равнобедренного треугольника: $2\alpha + d\phi = \pi$; $\alpha = \pi/2 - d\phi/2$. Угол α бесконечно мало отли-

чается от $\pi/2$. Но это угол между линейной скоростью v и ее приращением dv , с которым одинаково направлен вектор ускорения a (напомним, что в данном случае $a_n = 0$ и $a = a_n$).

Следовательно, в произвольной точке A ($d\varphi = 0$ и $\alpha = \pi/2$) этот вектор перпендикулярен вектору линейной скорости, т. е. направлен по радиусу к центру траектории. Это нормальное (центростремительное) ускорение, как мы доказали, равно

$$a_n = v^2/R. \quad (15)$$

Вектор нормального ускорения в равномерном движении по окружности не изменяется по модулю.

Равномерное движение по окружности является частным случаем *периодического движения* — такого движения, при котором, начиная с определенного момента времени, все положения последовательно повторяются. Такой процесс описывается *периодической функцией*

$$f(t) = f(t + T). \quad (16)$$

Здесь наименьшее время повторения T называется *периодом* данного процесса. В нашем случае T — время одного полного обращения (оборота), а $f(t)$ — например, угол, описанный за время t радиусом-вектором R .

Если за время t сделано N полных оборотов, то время одного оборота в N раз меньше t :

$$T = t/N. \quad (17)$$

Для характеристики такого движения вводится *число полных оборотов за единицу времени*, сокращенно говорят: *число оборотов*. Если за время t сделано N полных оборотов, за единицу времени их было в t раз меньше:

$$n = N/t.$$

Сравнивая это выражение с (17), видим, что число оборотов и период — величины обратные:

$$n = 1/T. \quad (18)$$

Линейная скорость при таком движении равна

$$v = 2\pi RN/t \stackrel{17}{=} 2\pi R/T. \quad (19)$$

§ 1.4. Поступательное движение твердого тела

Научившись описывать движение точки, вернемся к движению твердого тела. Абсолютно твердое тело может совершать поступательное или вращательное движение.

Поступательным называют движение, при котором любая прямая связанная с телом (например, проведенная через две его точки), перемещается параллельно самой себе.

При поступательном движении траектории всех точек тела одинаковы, скорости и ускорения всех точек в данный момент времени равны. Поэтому для описания такого движения тела достаточно описать движение одной произвольной его точки (см. § 1.2).

Вращательным называют движение, при котором одна прямая, связанная с телом, не перемещается (в указанном выше смысле — неподвижна относительно тела отсчета). Эта прямая называется *осью вращения*.

Траектории всех точек вращающегося тела представляют собой системы концентрических окружностей, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Любое плоское движение можно представить как результат поступательного движения и вращения (рис. 25, поступательное движение вдоль BB' , затем вращение на угол $A'B'A''$).

В качестве примера плоского движения рассмотрим движение кабины колеса обозрения (без учета колебаний, рис. 26). Какое движение совершает кабина, каждая ее точка, обод колеса?

Кабина движется поступательно, любая прямая, например вертикальная, связанная с кабиной,

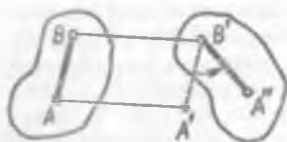


Рис. 25



Рис. 26

перемещаясь, остается вертикальной. Обод и спицы колеса, естественно, вращаются, причем ось вращения совпадает с осью симметрии колеса. Каждая точка кабины движется по окружности; центры этих окружностей смещены относительно оси колеса так же, как смещены рассматриваемые точки относительно оси подвеса кабины (напомним, что к движению точки неприменимы определения поступательного или вращательного движения тела).

Поступательно движутся автобусы, трамваи, поезда, автомобили на прямолинейных участках пути (но не их колеса!), поршни двигателя внутреннего сгорания и т. д.

§ 1.5. Вращательное движение твердого тела

При вращении твердого тела его точки имеют различные линейные скорости. Поэтому наряду с линейной скоростью рассматривается другая величина, характеризующая вращение всего тела, называемая *угловой скоростью*. Назовем *радиусом-вектором* некоторой точки относительно оси вектор R , проведенный от оси к данной точке и перпендикулярный оси вращения. Пусть за время Δt абсолютно твердое тело (n , следовательно, радиусы всех его точек) повернулось на угол $\Delta\varphi$. Разделим этот

угол на время поворота и устремим полученную дробь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Получим *модуль угловой скорости* — предел, к которому стремится отношение угла поворота вращающегося тела ко времени этого поворота при Δt , стремящемся к нулю:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \stackrel{\text{т.м}}{=} \frac{d\varphi}{dt}$$

Модуль угловой скорости равен первой производной угла по времени.

Но тело может вращаться с одинаковыми по модулю угловыми скоростями вокруг различных осей. Поэтому угловой скорости приписывают направление вдоль оси, связанное с направлением вращения правилом правого винта (см. рис. 7).

Таким образом, *вектор угловой скорости* измеряется отношением угла поворота любого радиуса ко времени этого поворота (если угловая скорость постоянна):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (20)$$

Здесь $d\varphi$ — вектор, направленный вдоль оси, связанный с вращением правилом правого винта и численно равный углу поворота вращающегося тела за время dt .

В виде вектора можно представить только бесконечно малый угол, так как конечные углы-векторы не подчинялись бы правилам векторного сложения, в частности коммутативности. Задав вектор угловой скорости, тем самым задают не только скорость вращения всех точек твердого тела, но и ориентацию оси и направление вращения.

Угловую скорость можно связать с линейной. Из рис. 27 радианная мера угла $d\varphi \stackrel{\text{т.м}}{=} dr/R$. Отсюда $dr = d\varphi \times R$ и $dr = d\varphi \times r$ ($dr = d\varphi r \sin \alpha$, $\sin \alpha = R/r$). Следовательно,

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \times r \stackrel{\text{т.м}}{=} \omega \times r.$$

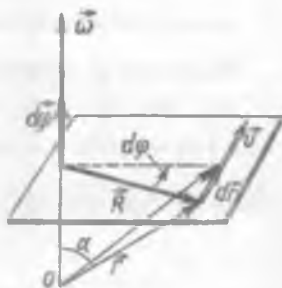


Рис. 27

Мы получили соотношение, выражающее связь скоростей:

$$v = \omega \times r. \quad (21)$$

Аналогично ускорению в поступательном движении, для характеристики вращения вводится *угловое ускорение*

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \stackrel{\text{т.м}}{=} \frac{d\omega}{dt}. \quad (22)$$

Это первая производная угловой скорости по времени или

$$\varepsilon \stackrel{\text{т.м}}{=} \frac{d\omega}{dt} \stackrel{\text{т.м}}{=} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

— вторая производная угла по времени.

Угловое ускорение — величина, измеряемая отношением изменения угловой скорости ко времени этого изменения (если угловая скорость меняется равномерно). Его направление в общем случае совпадает с направлением изменения угловой скорости (а не с ней самой). И только в плоском движении (в частности, при вращении около закрепленной оси) изменение угловой скорости параллельно этой скорости ($d\omega \parallel \omega$), и угловое ускорение можно рассматривать как скаляр, считая его алгебраической величиной.

Продифференцируем уравнение (21):

$$\frac{dv}{dt} \stackrel{12-M}{=} \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt},$$

$$\text{где } \frac{dr}{dt} \stackrel{1}{=} v, \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \quad \frac{dv}{dt} \stackrel{5}{=} a.$$

Следовательно,

$$a = \varepsilon \times r + \omega \times v.$$

В нашем случае первое слагаемое направлено по касательной к траектории и является тангенциальным ускорением $a_{\tau} = \varepsilon \times r$, а второе слагаемое — нормальное ускорение $a_n = \omega \times v$. Их векторная сумма (см. § 1.2) представляет собой полное ускорение. Модуль нормального ускорения

$$a_n = \omega v \stackrel{21}{=} v\omega/R = v^2/R,$$

что соответствует формуле (15).

Элементарное угловое перемещение в случае вращения вокруг закрепленной оси численно равно $d\varphi \stackrel{20}{=} \omega dt$, конечное угловое перемещение за время t $\varphi = \int_0^t d\varphi = \int_0^t \omega dt$. Равномерным назовем вращение, при котором неизменен модуль угловой скорости. Для такого вращения $\varphi \stackrel{44-M}{=} \omega \int_0^t dt \stackrel{37-M}{=} \omega t$, откуда

$$\omega = \varphi/t. \quad (23)$$

Естественно, при равномерном вращении равны углы поворота всех радиусов-векторов за любые равные промежутки времени.

Эта же формула является определением *средней угловой скорости* произвольного вращения (и эта средняя скорость определяется как скаляр аналогично средней скорости поступательного движения).

Единицу угловой скорости можно было ввести по формуле (20), но сейчас это проще. За единицу угловой скорости принимают *радиан в секунду* [рад/с].

Один *радиан в секунду* — угловая скорость равномерно вращающегося тела, которое поворачивается на угол 1 рад за 1 с.

Аналогично вводится и единица углового ускорения *радиан на секунду в квадрате* [рад/с²].

Один *радиан на секунду в квадрате* — угловое ускорение тела, скорость которого в равнопеременном вращении изменяется каждую секунду на 1 рад/с.

Очевидно, равномерное вращение твердого тела — движение периодическое, и для него справедливы формулы (16) — (19).

За один оборот каждая точка тела описывает длину окружности $2\pi R$. Следовательно, по формуле (1) математического введения любой радиус тела при

этом описывает угол 2π радиан. Если за время t тело совершило N оборотов, то его угловая скорость

$$\omega = 2\pi N/t = 2\pi/T. \quad (24)$$

Линейная скорость какой-либо точки равномерно вращающегося тела

$$v = l/t = 2\pi R/T = \omega R.$$

Связь скоростей соответствует общему виду выражения (21).

§ 1.6. Принцип суперпозиции

Моторная лодка движется под некоторым углом к течению реки (рис. 28). Если бы не было течения, то за промежуток времени dt лодка переместилась бы на dr_1 ; если бы течение было, но двигатель не работал, то лодка переместилась бы за это время на dr_2 . В действительности она перемещается по диагонали параллелограмма, построенного на этих перемещениях.

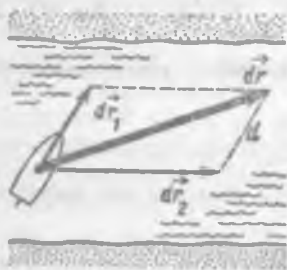


Рис. 28

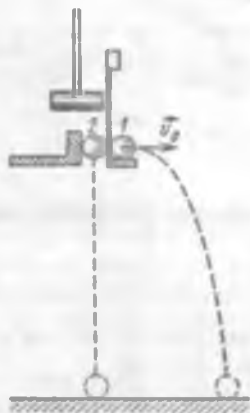


Рис. 29

На рис. 29 изображено падение двух одинаковых шариков, одного с начальной горизонтальной скоростью v_0 , другого без начальной скорости. Первый шарик одновременно движется горизонтально и падает, второй только падает. Несмотря на явное различие пройденных путей, оба шарика ударяются о подставку одновременно. Этот опыт доказывает, что первый шарик падал так же, как второй, т. е. так, как если бы не было горизонтального движения.

Приходим к выводу, который можно обобщить на любое количество произвольных движений: если разложить движение тела на несколько составляющих, то каждое из них совершается независимо от остальных (принцип независимости движений).

Значит, лодка одновременно участвует в двух независимых движениях. Ее результирующее перемещение, происходящее по диагонали параллелограмма (см. рис. 28), представляет собой векторную сумму

$$dr = dr_1 + dr_2.$$

В линейных системах (описываемых линейными уравнениями) обычно выполняется принцип суперпозиции (наложения): результирующий

процесс описывается соответствующей суммой величин, характеризующих составляющие процессы (это справедливо для процессов, не искажающих друг друга, т. е. независимых).

Например, результирующее перемещение в сложном движении представляет собой векторную сумму перемещений (за то же время) в составляющих движениях. Естественно, это справедливо для любого числа движений:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n d\mathbf{r}_i.$$

Разделим все векторы перемещений (рис. 28) на dt . Получим параллелограмм скоростей (рис. 30), подобный параллелограмму перемещений. Следовательно, по принципу суперпозиции, скорость результирующего движения (в данный момент времени) есть векторная сумма скоростей составляющих движений:

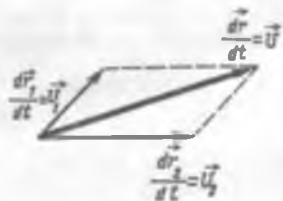


Рис. 30

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i.$$

Возьмем производную по времени от последнего выражения:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \stackrel{\text{II-14}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i.$$

Таким образом, результирующее ускорение равно векторной сумме составляющих:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i.$$

В § 2.4 мы увидим, что эти формулы представляют собой частный случай преобразований Галилея.

Мы говорили, что описать движение тела — значит описать движение всех его точек. Радиус-вектор любой точки тела в произвольный момент времени можно найти, задав вектор скорости в этот момент времени и начальные условия $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ (при $t = 0$). Скорость определяется по ускорению. А ускорение зависит от воздействия других тел. Поэтому мы должны перейти к изучению взаимодействия тел, в результате которого появляются ускорения.

ГЛАВА 2

ДИНАМИКА

§ 2.1. Сила

В кинематике мы описывали движение, не рассматривая причин его изменения. В динамике* изучаются всевозможные взаимодействия тел, приводящие к ускоренным движениям.

* dynamis (греч.) — сила.

Важнейшей характеристикой такого взаимодействия является сила. Когда несущественно, какое именно тело действует на данное, говорят: «на тело подействовала сила».

Сила — это обозначение и мера воздействия одного тела на другое. Понятия «тело подействовало» и «сила подействовала» равнозначны. Сила заставляет материальную точку изменять скорость, т. е. является причиной появления ускорения *. Надо научиться находить за каждым термином «сила» то тело, которое с данной силой действует. И, наоборот, если не удастся обнаружить тело, действующее на что-то определенной силой, следует отказаться от реальности существования этой силы (по крайней мере, в инерциальной системе отсчета), сколь бы очевидным не было ее действие. Сила характеризуется модулем, направлением и точкой приложения, как вектор. Именно в точке приложения находится начало вектора силы. Но подчиняются ли силы правилам векторной алгебры?

Привяжем к трем нитям, связанным в узел O , три динамометра. Их показания F_1, F_2, F_3 в определенном масштабе изображены на рис. 31. Так как узел O под действием этих сил покоится, то силы являются уравновешивающимися **, а каждая из них по отношению к двум другим — уравновешивающей ***. Если мы захотим замесить две силы, например F_1 и F_2 , их равнодействующей **** R , то она должна быть уравновешивающей по отношению к F_3 , т. е. $F_3 + R = 0$ и $R = -F_3$. Отложив R в том же масштабе на рис. 31, убеждаемся, что по модулю и направлению равнодействующая представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на составляющих силах: $R = F_1 + F_2$. Следовательно, сила — вектор.

Но с силами нельзя производить все операции векторной алгебры. Так, нельзя переносить силу параллельно самой себе, не изменяя ее действия на тело, если на него действуют другие силы. Представьте себе, как летел бы одномоторный самолет с двигателем на конце крыла.

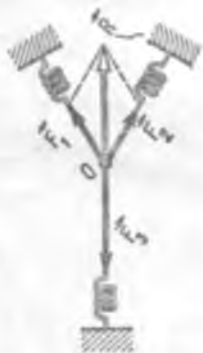


Рис. 31

* В результате действия нескольких сил неподвижное протяженное тело может быть деформировано. По деформации можно измерить силу (сравнить с эталонной).

** Уравновешивающимися называют силы, под действием которых тело движется так же, как при их отсутствии. Векторная сумма таких сил равна нулю ($\sum_{i=1}^n F_i = 0$). В частности, если уравновешиваются две силы, то они равны по модулю и противоположно направлены.

*** Уравновешивающей (по отношению к системе сил) называют такую силу, которая, будучи добавлена к данной системе, делает ее уравновешивающейся,

т. е. $F_{\text{уравн}} + \sum_{i=1}^n F_i = 0$. Отсюда $F_{\text{уравн}} = - \sum_{i=1}^n F_i$.

**** Равнодействующая — действующая так же.

Как же можно переносить силу в теле?

Имеем абсолютно твердое тело, на которое действует сила F , приложенная в точке A (рис. 32). Приложим к произвольной точке B , лежащей на линии действия силы F , две уравнивающиеся силы F_1 и F_2 , равные по модулю силе F и направленные вдоль AB . Действие всех сил на тело не изменится. Но силы F и F_2 , равные по модулю и противоположные по направлению, являются уравнивающимися и как таковые могут быть отброшены. Остается сила F_1 , равная F и приложенная в точке B , причем действие осталось прежним. Мы доказали, что в абсолютно твердом теле можно переносить точку приложения силы по линии ее действия.

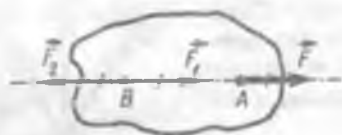


Рис. 32

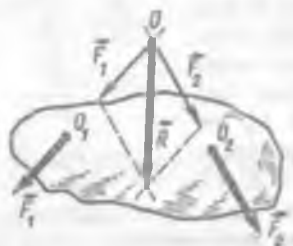


Рис. 33

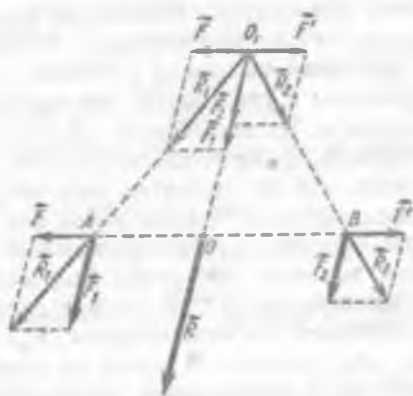


Рис. 34

§ 2.2. Сложение и разложение сил

Сложение сил — нахождение их равнодействующей по заданным составляющим.

Чтобы сложить любые две силы, приложенные к одному телу, их нужно перенести в одну точку. Если это возможно*, перенесем составляющие силы в точку пересечения линий их действия, затем произведем векторное сложение (рис. 33). Равнодействующую теперь можно перенести в любую точку по линии ее действия. Научившись складывать силы, приложенные в одной точке, мы тем самым научились обратному действию — разложению одной силы на две составляющие (каждую из которых в свою очередь можно разложить на две составляющие и т. д.).

Рассмотрим сложение параллельных одинаково направленных сил. Линии действия таких сил не пересекаются. Поэтому добавим в точках приложения составляющих F_1 и F_2 две равные по модулю и противоположные по направлению силы F и F' (рис. 34). Воздействие

* Когда силы расположены в одной плоскости и не параллельны.

на тело не изменится. Сложим попарно силы $F_1 + F$ и $F_2 + F'$ и перенесем равнодействующие R_1 и R_2 в точку их пересечения O_1 . Теперь их можно было бы сложить векторно. Но для удобства расчета лучше этого не делать.

Разложим каждую равнодействующую на составляющие по первоначальным направлениям. Получим систему четырех сил, приложенных в точке O_1 и действующих как первоначальные силы. Из равенства треугольников сил следует, что в точке O_1 приложены силы F_1 , F_2 и две равные и противоположные силы F и F' , которые можно отбросить. Оставшиеся силы сложим, перенеся по линии их действия в точку O . Их равнодействующая равна

$$R = F_1 + F_2.$$

Из подобия треугольника сил и ΔAOO_1 следует: $|AO|/F = |OO_1|/F_1$. Из подобия аналогичных правых треугольников: $|BO|/F' = |OO_1|/F_2$. Разделив почленно последние два равенства, получим

$$|AO|/|BO| = F_2/F_1.$$

Таким образом, равнодействующая двух параллельных одинаково направленных сил равна их сумме, параллельна им, направлена в ту же сторону, и точка ее приложения делит отрезок между точками приложения составляющих на части, обратно пропорциональные составляющим силам. Аналогично можно сложить сколько угодно таких сил.

Рассмотрим, например, однородный стержень (рис. 35). Разобьем его на части, на каждую из которых действует сила тяжести. Равнодействующую всех практически параллельных сил тяжести получим, если попарно сложим силы, действующие на симметричные части. Суммарная сила тяжести приложена в середине стержня. Точку приложения равнодействующей всех параллельных сил тяжести, не изменяющуюся при произвольном повороте тела, называют центром тяжести этого тела. В случае неоднородных тел или тел неправильной формы нахождение центра тяжести затруднительно.



Рис. 35

Эта задача легче решается экспериментально. Надо дважды подвесить тело за различные точки и отметить при этом положения вертикальных линий, проходящих через точку подвеса. Центр тяжести тела будет в точке их пересечения.

Научившись складывать параллельные одинаково направленные силы, мы тем самым научились разлагать одну силу на две параллельные составляющие (каждую из которых снова можно разложить на составляющие).

Рассмотрим антипараллельные силы F_1 и F_2 (рис. 36). Разложим большую силу F_1 на две параллельные составляющие R и F . Силу F выберем равной по модулю силе F_2 и приложенной к точке B . Из условий этого разложения $F_1 = F + R$ и $|AB|/|AO| = R/F$. Но из трех действующих теперь сил две (F и F_2) уравновешиваются и могут быть отброшены. Остается одна сила R , которая, таким образом, является

равнодействующей заданных сил. По условиям разложения, $R = F_1 - F_2$, $(|BO| - |AO|)/|AO| = (F_1 - F_2)/F_2$, откуда

$$\frac{|BO|}{|AO|} - 1 = \frac{F_1}{F_2} - 1 \quad \text{или} \quad \frac{|BO|}{|AO|} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Равнодействующая двух антипараллельных сил равна их разности, параллельна им, направлена в сторону большей силы и приложена на продолжении отрезка, соединяющего точки приложения составляющих, на расстояниях (от них), обратно пропорциональных составляющим силам.

Частным случаем антипараллельных сил является пара сил — две равные антипараллельные силы, расположенные на некотором расстоянии друг от друга.

Пусть, например (рис. 36), первая сила по модулю приближается ко второй. Тогда равнодействующая $R = F_1 - F_2$ стремится к нулю, отношение

$$\frac{|BO|}{|AO|} = \frac{|BA| + |AO|}{|AO|} = \frac{|BA|}{|AO|} + 1 = \frac{F_1}{F_2}$$

— к единице и, следовательно, дробь $|BA|/|AO|$ стремится к нулю. Но числитель этой дроби $|BA|$ не равен нулю, значит, знаменатель $|AO|$ неограниченно возрастает: $|AO| \rightarrow \infty$.

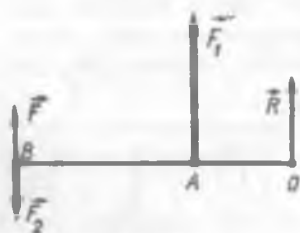


Рис. 36

При равенстве сил их равнодействующая оказалась бы равной нулю и приложенной в бесконечности. Следовательно, пара сил не имеет равнодействующей и не может привести покоящееся тело в поступательное движение или сообщить телу линейное ускорение.

Хорошо известно из практики, что пара сил может заставить покоящееся тело поворачиваться или сообщает телу угловое ускорение. Так действуют тормозные колодки на колесо вагона или автомобиля, аналогично поворачивается рулевое колесо или обыкновенный водопроводный кран.

Точки приложения *скрещающихся** сил тоже нельзя перенести в одну точку. Но одну из таких сил можно разложить на две составляющие — параллельную второй силе и лежащую в плоскости, перпендикулярной этой второй силе. Параллельную составляющую можно сложить со второй силой, получится их равнодействующая в той же плоскости. Тогда задача сведется к сложению взаимно перпендикулярных сил F_1 и F_2 , не лежащих в одной плоскости (рис. 37). Приложим к точке A две уравнивающиеся силы F_3 и F_4 , параллельные и равные по модулю F_2 , так что $F_3 = -F_4 = F_2$. Тогда силы F_2 и F_4 образуют пару сил, которая не имеет равнодействующей и вызовет поворот тела вокруг оси, совпадающей с моментом пары M (см. рис. 40). Оставшиеся силы F_1 и F_3 приложены в одной точке и легко складываются. Таким образом, скрещающиеся силы вызывают неплоское движение твердого тела.

* Скрещающимися называются прямые, которые не лежат в одной плоскости.

Силы действуют на тело независимо друг от друга (принцип независимости действия сил). Результат действия нескольких сил аналогичен результату действия их равнодействующей — это обобщение экспериментальных данных называется *принципом суперпозиции сил*.

По принципу суперпозиции, используя понятие уравнивающих сил, можно сравнивать и измерять силы. Приняв какую-то силу за эталон, можно добиться равномерного движения тела под действием этой и какой-то еще силы. При этом если две силы уравниваются, значит, они равны по модулю. Далее, можно эталон силы удвоить и повторить описанную операцию, потом утроить и т. д.

Полученный ряд сил можно использовать для измерения неизвестной силы. Из этого ряда подбирают силу, которая уравнивает неизвестную. Измерение тем точнее, чем больший набор сил используется экспериментатором (точность измерения увеличивается при уменьшении эталона).

Как мы видели, одну силу можно разложить на две или несколько составляющих. Если это действие не обусловлено какими-то требованиями, то оно многозначно.

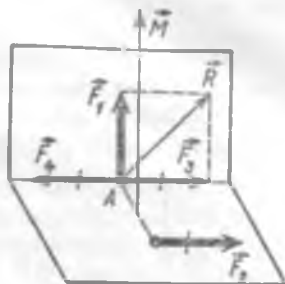


Рис. 37

§ 2.3. Момент силы

Тело, имеющее закрепленную ось вращения, не может двигаться поступательно (двери, окна, всевозможные колеса и т. п.). Почему, например, дверную ручку не приделывают вблизи петель? Оказывается, действие силы на тело, имеющее ось вращения, зависит не только от силы, но и от ее расположения относительно оси. Характеризуется это действие новой величиной — моментом силы.

Моментом силы относительно точки (начала координат) называется величина, равная векторному произведению радиуса-вектора силы (радиуса-вектора ее точки приложения) и самой силы:

$$M_0 = r \times F_0. \quad (25)$$

Пусть на тело, имеющее ось вращения, действует произвольно направленная сила F_0 , приложенная к точке A (рис. 38; r — радиус-вектор точки A относительно точки O , R — радиус-вектор точки A относительно оси). Разложим силу F_0 на две составляющие: $F_{\parallel}$, параллельную оси, и F , лежащую в плоскости, перпендикулярной оси. Момент силы F_0 относительно точки O

$$M_0 = r \times F_0 = r \times (F_{\parallel} + F) = r \times F_{\parallel} + (h + R) \times F = r \times F_{\parallel} + h \times F + R \times F.$$

Первые два момента перпендикулярны оси, поэтому не могут изменить вращение вокруг этой оси (и уравниваются моментами сил реакции в опорах). Третий момент направлен вдоль оси и равен

$$M = R \times F.$$

Это момент силы относительно оси — векторное произведение радиуса-вектора силы относительно оси и составляющей этой силы, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси (рис. 39). Он численно равен проекции вектора M_0 на ось.



Рис. 38



Рис. 39

Между силой и моментом силы существует аналогия. Действие силы вызывает появление ускорения (и скорость, если ранее материальная точка покоилась), момент силы приводит к возникновению углового ускорения (и угловой скорости, если он действует на покоящееся тело).

Определение момента силы дано так, чтобы угловое ускорение (и угловая скорость, если ее не было), вызванное действием этого момента, совпадало с ним по направлению.

Плечом l силы называют кратчайшее расстояние между направлением силы F и осью вращения. Из рис. 39 следует: $\sin \alpha = l/R$. Тогда модуль момента силы

$$M \stackrel{\text{м}}{=} RF \sin \alpha = Rl/R = lF,$$

т. е. момент силы относительно оси численно равен произведению составляющей этой силы, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси, и ее плеча. Ус-

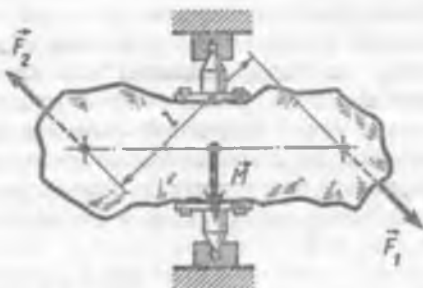


Рис. 40

коренное вращение тела вызывается именно моментами сил, действующих на это тело. Например, если на тело, имеющее ось вращения, действует пара перпендикулярных оси сил, расположенных симметрично (рис. 40), то моменты этих сил одинаково направлены и равны по модулю:

$$M_1 \stackrel{\text{м}}{=} (l/2) F_1 = M_2 = (l/2) F_2.$$

Здесь l — кратчайшее расстояние между направлениями действующих сил — плечо пары. Векторная сумма моментов этих сил является моментом пары сил.

Момент пары сил — вектор, численно равный произведению одной из сил на плечо пары и направленный вдоль оси по правилу правого винта. Его модуль

$$M_1 + M_2 = lF_1/2 + lF_2/2 = lF_1.$$

Заметим, что вторая составляющая силы F_{α} , параллельная оси и не показанная на рис. 39, уравнивается реакцией опор, в которых закреплена ось, или вызывает осевое смещение, не влияющее на вращение.

§ 2.4. Типы сил

В современной физике различают взаимодействия *гравитационные*, *электромагнитные*, *сильные* (ядерные) и *слабые* (в физике элементарных частиц). В механике рассматриваются силы гравитационные, упругости, трения. Два последних типа сил имеют электромагнитную природу.

Гравитационные силы. Силы тяготения являются частным случаем полевых сил, действующих между телами, удаленными друг от друга. Первоначально предполагалось, что такие тела взаимодействуют на расстоянии, и взаимодействие передается через разделяющее их пространство мгновенно (теория дальнодействия).

Со времен Фарадея считается правильной теория близкодействия, по которой взаимодействие (изменение свойств пространства) передается от какой-либо точки только соседним, бесконечно близким точкам и с конечной скоростью. Материальная среда, посредством которой осуществляется взаимодействие, называется соответствующим *полем*. Известны поля гравитационное, электромагнитное, ядерных сил. Источниками любых полей являются тела. Фактически тела взаимодействуют своими полями.

Для обнаружения гравитационного или электромагнитного поля надо внести в него пробное тело, являющееся источником такого же поля. На пробное тело тогда будет действовать сила, которую можно обнаружить и измерить.

В XVII в. были открыты три экспериментальных закона Кеплера, описывающих движение планет:

- 1) все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце;
- 2) площади, описываемые радиусом-вектором планеты за равные промежутки времени, одинаковы (закон постоянства секторальной скорости*);
- 3) квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей эллипсов, по которым они движутся:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

где T_1, T_2 — периоды обращения; R_1, R_2 — большие полуоси траекторий планет.

Ньютон математически вывел, что движение планет в соответствии с законами Кеплера может происходить только под действием сил, пропорциональных их массам и обратно пропорциональных квадратам расстояний до центра тяготения.

Такое же соотношение Ньютон получил для сил, действующих на Луну и тела, находящиеся на Земле. Следовательно, любые две материальные точки

* Секторальной скоростью называют величину, измеряемую отношением площади, описываемой радиусом-вектором данной точки, ко времени, за которое она описана.

притягиваются с силами, прямо пропорциональными произведению их масс, обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними и направленными по линии, соединяющей материальные точки (закон всемирного тяготения). Ньютон увидел закономерность в тех силах, которые действуют во Вселенной, проверил и записал ее. Этот экспериментальный закон в настоящее время записывают в виде

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R}, \quad (27)$$

Здесь $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая со стороны первой материальной точки m_1 на вторую m_2 ; $\mathbf{R}_{12}$ — вектор, направленный от первой точки ко второй; R — его модуль; $\mathbf{R}_{12}/R$ — единичный вектор выбранного направления ($|\mathbf{R}_{12}/R| = 1$); G — экспериментальный коэффициент пропорциональности (гравитационная постоянная, численно равная силе взаимодействия единичных масс на единичном расстоянии). Знак минус показывает, что гравитационные силы — это силы притяжения (см. разд. III, § 1.2).

О природе сил тяготения мы и сегодня знаем почти так же мало, как и во времена Ньютона.

Закон сформулирован для материальных точек. Но по нему можно определить силу притяжения и тел конечных размеров, если предварительно разбить их на материальные точки, а затем все силы взаимодействия сложить. Это трудная математическая задача, но принципиально она разрешима. Именно таким вычислением можно доказать, что формулу (27) можно применить к однородным шарам, расстояние между центрами которых R .

Гравитационную постоянную экспериментально определил Кавендиш на крутильных весах, принципиальная схема которых изображена на рис. 41.

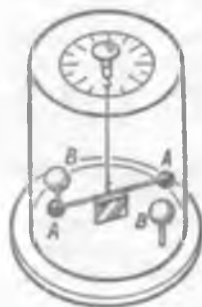


Рис. 41

Свинцовые шарики A на стержне, подвешенном на кварцевой нити, притягиваются к неподвижным большим шарам B , закручивая нить. Когда стержень успокоится, нить окажется закрученной на определенный угол, который может быть измерен с помощью зеркала, прикрепленного к стержню. Узкий луч света, падающий на зеркало, отражается по определенному направлению. При повороте стержня отраженный луч поворачивается на удвоенный угол; именно этот угол достаточно точно измерялся.

Подвес характеризуется постоянной прибора, которая численно равна моменту сил, закручивающих нить на единичный угол. Эта постоянная вычислялась с большой точностью по периоду крутильных колебаний системы. Зная постоянную системы и угол поворота стержня, можно вычислить закручивающий момент, а по нему — силы взаимного притяжения шаров. Измерив расстояния между центрами шаров и их массы, можно по формуле (27) определить гравитационную постоянную:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Гравитационная масса тела, фигурирующая в законе всемирного тяготения, и инертная масса этого тела из второго закона Ньютона (см. § 2.7) пропорциональны, как доказано с высокой точностью многочисленными экспериментами. Подобрав соответствующие единицы, эти массы можно считать равными (с той же точностью). Принципиальная неразличимость инертной и гравитационной масс в однородном гравитационном поле составляет принцип эквивалентности, положенный в основу общей теории относительности Эйнштейна.

Упругие силы. Упругие силы возникают в теле, испытывающем воздействие других тел или полей, и связаны с деформацией тела. Упругость — свойство восстанавливать форму тела после прекращения воздействия.

По экспериментальному закону Гука, силы, возникающие при упругой деформации, прямо пропорциональны этой деформации и направлены в сторону ее уменьшения:

$$F = -kx. \quad (28)$$

Здесь F — сила упругости; x — деформация; k — жесткость тела (величина, измеряемая отношением силы упругости к вызывающей ее деформации). Знак минус показывает, что сила упругости направлена в сторону уменьшения деформации.

Рассмотрим упругую деформацию растяжения (рис. 42). К образцу с площадью поперечного сечения S приложена растягивающая сила F . В образце возникает сила упругости F , равная и противоположная растягивающей силе F . Напряжением называют величину, измеряемую отношением силы упругости к площади поперечного сечения образца:

$$\sigma = F/S$$

(малым изменением площади поперечного сечения пренебрегаем). Введем следующие обозначения: абсолютное удлинение $\Delta l = l - l_0$; относительное удлинение $\varepsilon = \Delta l/l_0$.

Из опыта следует, что относительная деформация (в нашем случае — относительное удлинение) пропорциональна напряжению:

$$\frac{\Delta l}{l_0} \sim \sigma.$$

Иначе

$$\varepsilon = \alpha \sigma.$$

Это выражение закона Гука для деформации растяжения (сжатия). Вообще, для любого вида деформации закон Гука состоит в том, что относительная деформация пропорциональна напряжению.

Коэффициент упругости α численно равен относительному удлинению при единичном напряжении. Обычно вместо α вводят обратную величину $E = 1/\alpha$ — модуль продольной упругости или модуль Юнга. Закон Гука тогда переписывают в виде

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Модуль Юнга численно равен напряжению при единичной относительной деформации: $E = \sigma$, при $\varepsilon = 1$, иначе $\Delta l/l_0 = 1$, откуда $\Delta l = l_0$, $\Delta l = l_1 - l_0 = l_0$ и $l_1 = 2l_0$. Таким образом, модуль Юнга численно равен напряжению, при котором длина образца увеличилась бы в два раза (только немногие материалы — резина, некоторые полимеры — действительно выдерживают такое напряжение, но физический смысл модуля от этого не меняется).

Совершенно аналогично записывается закон Гука в случае любого другого вида деформации, для которого вводятся своя относительная деформация (относительный сдвиг, изгиб, кручение и т. д.) и соответствующий модуль.

Неупругие тела после снятия напряжения сохраняют частично измененную форму, т. е. имеют остаточную деформацию. Неупругие силы, возникающие при такой деформации, зависят от скорости образования деформации и обращаются в нуль при остановке процесса деформации.

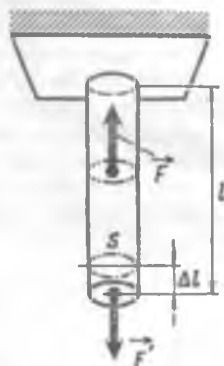


Рис. 42

Графически связь относительной деформации и напряжения изображена на рис. 43. На этом рисунке показаны два предела:

1) *предел упругости* $\sigma_{упр}$ — наибольшее напряжение, при снятии которого полностью восстанавливается форма образца (или наименьшее напряжение, при снятии которого появляется остаточная деформация. Разумеется, все это в пределах точности эксперимента: нет тел абсолютно упругих, как нет и абсолютно неупругих тел. Все дело в остаточной деформации. Если она пренебрежимо мала, тело выступает в данном опыте как абсолютно упругое и т. д.);

2) *предел прочности* $\sigma_{пр}$ — наименьшее напряжение, при котором начинается разрушение образца. Если в образце возникают напряжения в пределах упругости (т. е. меньше $\sigma_{упр}$), то выполняется закон Гука, после снятия напряжения относительная деформация становится равной нулю (деформация до ϵ_1 ; рис. 43). Испытывая напряжения больше $\sigma_{упр}$, образец выходит за пределы упругости и вступает в область *пластических деформаций* (ϵ_1, ϵ_2), которые остаются при снятии напряжения (пунктир; рис. 43). Благодаря пластическим деформациям можно изменять форму тела (ковка, прессование и т. п.). При напряжении, равном пределу прочности, образец переходит в область *текучести* (ϵ_2, ϵ_3), где относительная деформация увеличивается без изменения напряжения. Затем при относительных деформациях, больших ϵ_3 , образец разрушается, причем напряжения самопроизвольно падают.

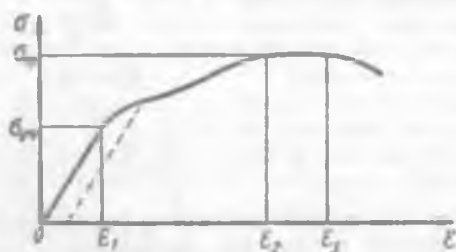


Рис. 43

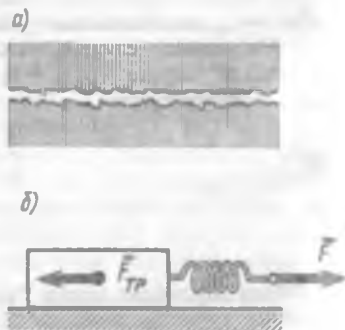


Рис. 44

Силы трения. Это тангенциальные силы, возникающие при соприкосновении поверхностей тел и препятствующие их относительному движению (две такие «гладкие» поверхности показаны на рис. 44, а).

Экспериментально исследуют силы трения на приборе, называемом трибометром* (рис. 44, б).

Измеряя силу F , под действием которой тело движется равномерно, мы измерим и равную ей силу трения. Опыт показывает, что все силы трения достаточно сложно зависят от скорости относительного движения. В случае *сухого трения скольжения* этой зависимостью можно в первом приближении пренебречь (рис. 45, а). График расположен во втором и четвертом квадрантах, так как силы трения направлены навстречу скорости: если скорость положительна, сила трения отрицательна, и наоборот.

При скорости $v = 0$ наблюдается *трение покоя*. Силы, возникающие между покоящимися поверхностями, могут принимать любые значения от нуля до некоторого максимума в зависимости от модуля и направления приложенной

* tribō (греч.) — растираю.

сдвигающей силы. При этом, конечно, сила трения покоя равна и противоположна сдвигающей силе.

На опыте можно убедиться, что силы трения скольжения зависят от рода соприкасающихся поверхностей и их обработки (гладкости).

Эти силы практически не зависят от площади соприкасающихся поверхностей. Для данных двух поверхностей сила трения оказывается пропорциональной силе нормального давления, прижимающей поверхности друг к другу:

$$F_{\text{тр}} \sim F_{\text{н}}.$$

Иначе, отношение силы трения к силе нормального давления есть величина постоянная для данной пары поверхностей. Эту величину называют коэффициентом трения:

$$k = F_{\text{тр}}/F_{\text{н}}. \quad (29)$$

При движении твердого тела в жидкой или газообразной среде возникают силы сопротивления. Примерная зависимость этих сил от скорости показана на рис. 45, б. В жидкости или газе нет трения покоя. При малых скоростях сила сопротивления пропорциональна скорости и направлена навстречу ей:

$$F_c = -rv \quad (30)$$

(зависимость, экспериментально установленная Ньютоном).

Коэффициент сил сопротивления r численно равен силе сопротивления, возникающей при движении с единичной скоростью. Этот коэффициент зависит от рода вязкой среды, от формы и размеров тела (см. § 5.1).

При больших скоростях сила сопротивления резко возрастает и пропорциональна второй, а затем и высшим степеням скорости. Поэтому для увеличения скорости нужна все большая мощность. Вот почему корабли на редане* и на подводных крыльях так быстроходны — они в основном преодолевают меньшее сопротивление воздуха.

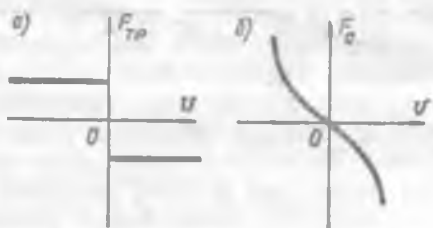


Рис. 45

§ 2.5. Преобразования Галилея

В динамике для рассмотрения самых разнообразных движений тел удобно выбрать такую систему отсчета, в которой поведение уединенного** тела было бы наипростейшим.

Опыт убеждает, что предоставленные самим себе движущиеся тела под действием всякого рода сопротивлений останавливаются.

Сообщим, например, телу, находящемуся на столе, какую-либо скорость. Многократные опыты позволяют установить, что тело движется замедленно и в конце концов останавливается (если, разумеется, стол достаточно велик). Заменим теперь поверхность стола другой, более гладкой. При той же начальной скорости тело будет двигаться дольше,

* redan (франц.) — выступ (на днище судна).

** Уединенное тело настолько удалено от других тел, что их действием на него можно пренебречь.

модуль ускорения уменьшится. Заменим поверхность еще более гладкой. Ускорение уменьшится заметнее, тело будет скользить еще дальше. Представим себе теперь бесконечную последовательность таких опытов, при которых поверхность становится все более гладкой, при этом сопротивления последовательно уменьшаются до нуля (без учета сопротивления воздуха; сделать такую бесконечную серию опытов невозможно, но ее можно вообразить). Прослеженная закономерность сохраняется, ускорения будут уменьшаться по модулю, и в пределе, очевидно, движение станет равномерным (когда сопротивления и, следовательно, воздействия всех других тел исчезнут).

Значит, наипростейшее поведение уединенного тела — равномерное прямолинейное движение. Свойство тел сохранять состояние покоя или прямолинейного равномерного движения названо *инерцией*. Системы отсчета, относительно которых уединенные тела движутся прямолинейно и равномерно (в частности, покоятся), называются *инерциальными*. Практически система может быть инерциальной лишь с той или иной степенью точности. Так, во многих опытах Земля — локально* инерциальная система отсчета (для малых расстояний и промежутков времени). Само открытие законов динамики является подтверждением инерциальности Земли. Но известны факты, объясняемые вращением Земли вокруг своей оси (смена дня и ночи, вращение плоскости качаний маятника Фуко) или движением Земли вокруг Солнца (смена времен года, видимое движение планет). В этих явлениях сказывается неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, зато инерциальной — с достаточной степенью точности — является гелиоцентрическая** система отсчета. Существуют явления, объясняемые движением Солнечной системы отно-

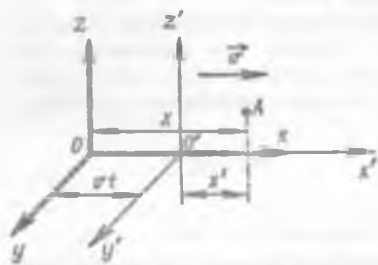


Рис. 46

сительно центра Галактики, в которых становится заметной неинерциальность гелиоцентрической системы, и т. д. Поэтому, говоря о реальной системе отсчета, надо указывать, с какой степенью приближения ее можно считать инерциальной.

Допустим, что имеется инерциальная система отсчета XYZ (рис. 46). Рассмотрим любую другую систему $X'Y'Z'$, движущуюся прямолинейно и равномерно со скоростью v относительно первой. Для простоты совместим в начальный момент оси соответствующих координат и направим скорость v параллельно осям X и X' . Положение какой-либо материальной точки A в произвольный момент времени t определяется соответственно координатами x, y, z в неподвижной системе и x', y', z' — в подвижной. Из рис. 46 нетрудно найти, что

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (31)$$

* localis (лат.) — местный.

** helios (греч.) — Солнце.

Мы получили в этом простейшем случае преобразования Галилея — преобразования координат неподвижной системы в координаты подвижной. Проекция перемещения точки A за некоторый достаточно малый промежуток времени Δt равны приращениям координат:

$$\Delta x' = \Delta x - v \Delta t, \Delta y' = \Delta y, \Delta z' = \Delta z.$$

Продифференцируем преобразования Галилея:

$$\frac{dx'}{dt} \stackrel{11-М}{=} \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

или

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z.$$

Здесь u'_x, u'_y, u'_z — проекции скорости u' точки A в подвижной системе; u_x, u_y, u_z — проекции скорости u точки A в неподвижной системе; v — скорость подвижной системы относительно неподвижной (*переносная скорость*) **.

Если произвольная изолированная материальная точка A движется в неподвижной системе равномерно, т.е. проекции скорости u постоянны, то постоянными будут и проекции скорости u' . Значит, такая произвольная точка движется равномерно и в подвижной системе отсчета. Следовательно, если существует хотя бы одна инерциальная (в известном ограниченном смысле) система отсчета, то любая другая система, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно первой, тоже будет инерциальной (с теми же ограничениями). Таких систем, естественно, может быть бесконечно много.

Одним из наиболее общих законов природы является принцип относительности: *все физические явления протекают одинаково* *** во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, никакими физическими экспериментами нельзя выделить какую-то инерциальную систему среди остальных.

Впервые только для механики сформулировал этот принцип Галилей. Эйнштейн распространил его на все физические явления (в том числе электромагнитные) и положил в основание теории относительности (см. приложение 3).

Можно поменять местами подвижную и неподвижную системы и ничего, кроме знака переносной скорости, не изменится. Другими сло-

* В момент времени $t + \Delta t$ координата точки A

$$x' + \Delta x' = x + \Delta x - v(t + \Delta t).$$

Вычитая из этой формулы почленно выражение для x' , получаем написанное равенство.

** Промежуток времени dt одинаков в обеих системах отсчета — предположение очевидное, но не доказанное и, несмотря на свою очевидность, неверное, вообще говоря. Мы не замечаем разницы в ходе часов на Земле и в движущемся поезде, но это не значит, что ее нет.

*** При одинаковых начальных условиях.

вами, преобразования Галилея *инвариантны* * относительно инерциальных систем отсчета.

Суперпозиция движений (см. § 1.6) представляет собой частный случай преобразований Галилея. Так, на рис. 28 можно с берегом связать неподвижную систему отсчета, с водой — подвижную, и перемещение лодки в неподвижной системе будет векторной суммой ее перемещения в подвижной системе и перемещения самой подвижной системы относительно неподвижной.

§ 2.6. Первый закон Ньютона

В 1687 г. в «Математических началах натуральной философии» Ньютон сформулировал три закона динамики, на основании которых построил все положения *классической механики*.

Как мы установили, в инерциальной системе уединенное тело движется по инерции. Изменить это состояние можно, только нарушив «уединение», т. е. воздействием других тел. Вот почему *первый экспериментальный закон динамики* часто называют законом инерции. Первый закон Ньютона: *всякое тело сохраняет состояние прямолинейного и равномерного движения, пока и поскольку оно не понуждается внешними силами изменить это состояние*.

Этот закон справедлив только в инерциальной системе отсчета. Поэтому лучше иначе сформулировать первый закон динамики: *существуют такие системы отсчета, в которых уединенное тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения*.

Итак, первый закон Ньютона позволяет выделить инерциальные системы отсчета.

§ 2.7. Второй закон Ньютона

Важнейшей характеристикой любого материального объекта является его *масса*.

Измерим массу Δm (см. § 2.15) какого-либо объема ΔV вещества и разделим ее на этот объем. Устремим дробь к пределу при $\Delta V \rightarrow 0$. Получим *плотность вещества в данной точке*:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (32)$$

Здесь $\frac{dm}{dV}$ — не производная, а отношение массы dm к объему dV .

Плотность вещества в данной точке — это величина, измеряемая отношением массы вещества к ее объему (если вещество однородно в рассматриваемом объеме).

* invariant (франц.) — неизменяющийся. Инвариантные преобразования такие, вид которых не изменяется, если подвижную и неподвижную системы поменять местами.

Масса произвольного тела может быть вычислена по известной плотности:

$$m = \int_0^m dm \stackrel{32}{=} \int_V \rho dV.$$

Если вещество однородно, то его плотность во всех точках одинакова и

$$m \stackrel{44-M}{=} \rho \int_V dV \stackrel{37-M}{=} \rho V.$$

Таким образом, плотность однородного вещества

$$\rho = m/V.$$

По этой же формуле можно определить среднюю плотность неоднородного тела. При достаточно малых скоростях ($v \ll c$, где c — скорость света в вакууме) масса тела неизменна.

Как известно из определения силы или из опыта, сила может сообщить телу ускорение. Количественные соотношения между силой, действующей на тело, массой этого тела и его ускорением в инерциальной системе отсчета выводятся экспериментально.

Пусть на материальную точку массы m , для простоты, без трения скользящую по горизонтальной поверхности, можно действовать различными силами, измеряемыми динамометром (рис. 47). Подействуем на нее постоянной силой и измерим, например, пути, проходимые за последовательные равные промежутки времени. Выяснится, что под действием постоянной силы тело движется равноускоренно. Если движение начато из состояния покоя, то можно определить ускорение, измерив путь и время при таком движении:



Рис. 47

$$a \stackrel{13}{=} 2l/t^2.$$

Проведем ряд опытов с данным телом, действуя на него разными силами $F_1, F_2, F_3, \dots, F$. Вычислим соответствующие ускорения $a_1, a_2, a_3, \dots, a$. Из опыта приходим к выводу:

$$a \sim F.$$

Ускорение материальной точки прямо пропорционально действующей на нее силе и направлено по линии ее действия. Значит, дробь

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \frac{F}{a}$$

есть величина постоянная для данного тела. Для другого тела аналогичная дробь тоже будет постоянной, но она будет иметь другое значение.

А зачем вообще действовать силой, чтобы сообщить телу ускорение? Ответ на этот вопрос должен быть совершенно ясен из первого

закона Ньютона: без воздействия сил тело движется по инерции, без ускорения.

Значит, чтобы сообщить телу ускорение, надо «преодолеть» его инертность*, заставить двигаться вопреки его стремлению сохранить неизменным вектор скорости.

Подеиствуем одинаковыми силами на разные тела, например два шарика массами m_1 и m_2 (рис. 48). Пусть для определенности $m_1 > m_2$. Вычислив ускорения, которые получают под действием сил F эти тела, приходим к выводу: $a_1/a_2 = m_2/m_1$, иначе

$$a \sim 1/m.$$

Ускорения, сообщаемые равными силами разным материальным точкам, обратно пропорциональны их массам.



Рис. 48

Одинаковые силы преодолевают инертность первого тела хуже, чем второго. Иначе говоря, если инертность имеет количественную меру, то она у первого тела больше, чем у второго, в a_2/a_1 раз. Но во столько же раз масса первого тела больше массы второго. Значит, инертность пропорциональна массе тела. Следовательно, масса — это мера инертности тела (в дальней-

шем увидим, что это относится не только к телам, а является общим свойством материи).

Вспомним, что у каждого из рассматриваемых нами тел есть своя, присущая только ему дробь F/a . Для первого тела — это постоянная величина F/a_1 , для второго — F/a_2 . Отношение этих дробей

$$\frac{F/a_1}{F/a_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2},$$

т. е. равно отношению масс тел. Следовательно, отношение силы к сообщенному ею ускорению, постоянное для данного тела (при изменении сил, действующих на него), пропорционально его массе:

$$\frac{F}{a} \sim m, \text{ или } \frac{F}{a} = km.$$

Оба экспериментальных положения ($a \sim F$, $a \sim 1/m$) удобно записать в виде

$$a = \frac{1}{k} \frac{F}{m}.$$

Физический смысл этого соотношения состоит именно в том, что ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе, обратно пропорционально ее массе и направлено в сторону действия силы.

* inert (лат.) — неподвижный, косный. Инертность — косность, свойство сохранять что-либо неизменным. Инерция — проявление инертности в механике.

Единицы величин, входящих в последнюю формулу, можно подобрать так, чтобы экспериментальный коэффициент пропорциональности k был равен безразмерной единице. Тогда

$$a = F/m.$$

Часто это выражение называют вторым законом Ньютона и недостаточно правильно его понимают. Так, простейший вопрос: можно ли это соотношение применить к лежащему на столе телу? — наталкивается на маловразумительные ответы. Типичный неправильный ответ: «На него действует сила тяжести $F = P$; ускорение $a = 0$ (после некоторого раздумья — еще хуже $a = g$!), значит, $P = m \cdot 0$, $P = 0$. Но ведь $P \neq 0$ и т. д.». А сама эта формула заслуживает того, чтобы в ней разобраться: ускорение a , которое материальная точка массой m получает под действием силы F , прямо пропорционально этой силе и обратно пропорционально массе тела. Если на тело действует несколько сил, то каждая из них по принципу независимости действия сил сообщает свое ускорение

$$a_i = F_i/m.$$

По принципу суперпозиции результирующее ускорение материальной точки

$$a = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n F_i.$$

Таким образом, если на тело действует n сил (тел), то его ускорение прямо пропорционально векторной сумме всех действующих на него сил или их равнодействующей:

$$a = \sum_{i=1}^n F_i/m. \quad (33)$$

Вспомним определение ускорения и преобразуем полученную формулу:

$$a \stackrel{33}{=} \frac{dv}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{m}. \text{ Тогда (если масса постоянна)}$$

$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{33}{=} \frac{d(mv)}{dt}.$$

Произведение массы материальной точки на ее скорость называют импульсом (количеством движения) этой точки:

$$p = mv.$$

Мы получили выражение, связывающее изменение импульса тела за единицу времени (скорость изменения импульса) с равнодействующей сил, действующих на это тело, — основной закон динамики или вто-

рой закон Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равна векторной сумме сил, действующих на эту точку:

$$\sum_{i=1}^n F_i = \frac{dp}{dt}, \quad (34)$$

где dp — изменение импульса за время dt .

Второй закон Ньютона* оказывается верен и в случае тела переменной массы, надо только учесть это изменение. В теории относительности Эйнштейна (см. приложение 3) доказывается зависимость массы материальной точки от скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 — масса покоя, т. е. масса тела в системе отсчета, относительно которой оно неподвижно; c — скорость света в вакууме; m — масса тела в системе отсчета, относительно которой оно движется со скоростью v (релятивистская** масса).

Из этой формулы видно, что массу тела можно считать неизменной при достаточно малых скоростях: $v \ll c$.

Единицу силы установим на основании уравнения (33), которое можно написать в простейшем случае движения тела под действием одной силы (без учета направления):

$$F = ma.$$

Эта единица в СИ называется ньютоном (Н).

Один ньютон — сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с²:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2.$$

Применим второй закон к гире, висящей на нити (рис. 49). Если быстро дернуть нижнюю нить, она обрывается; если повторить опыт, медленно натягивая нижнюю нить, то обрывается нить над гирей.

Изменение импульса гири $\Delta p = \sum_{i=1}^n F_i \Delta t$ в первом случае мало,

практически гиря остается неподвижной, рвется нижняя нить. Во втором случае время воздействия возрастает, и заметным становится изменение импульса гири, она приходит в движение, верхняя нить рвется.



Рис. 49

* Выражение (34) иначе можно записать так: $\sum_{i=1}^n F_i dt = d(mv)$. «Изменение

количества движения пропорционально движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует» — формулировка Ньютона (пер. акад. А. Н. Крылова). Произведение силы на время ее действия называют импульсом силы. В последующих примерах доказывается, что действие силы зависит и от времени. Мы не употребляем термин «импульс силы» во избежание его путаницы с термином «импульс тела».

** relativus (лат.) — относительный. Релятивистская теория — теория относительности, описывающая движения с большими скоростями.

Другой пример: если ударить чем-либо по стеклу, оно может разбиться или покрыться трещинами, расходящимися от места удара. Если же выстрелить в такое же стекло из малокалиберной винтовки, то пуля оставит в стекле небольшое круглое отверстие. Почему?

Второй закон Ньютона устанавливает основные количественные соотношения между динамическими и кинематическими характеристиками материальной точки. Теперь решение основной задачи механики для материальной точки представляет собой такую «цепочку»: по заданным силам определяется ускорение, из него — скорость, а из нее — искомая зависимость $r(t)$ (если, конечно, известны начальные условия r_0 и v_0). Добавим, что соотношение между силой, ускорением и массой тела было экспериментально установлено еще Галилеем. Заслугой же Ньютона является то, что он сформулировал законы в законченной форме и положил в основу построения механики.

§ 2.8. Третий закон Ньютона

В природе не встречается одностороннее действие одного тела на другое. Действия тел друг на друга взаимны — это *взаимодействия*. Экспериментально установлено (что можно подтвердить прямыми измерениями); «Действию всегда есть противодействие, иначе, взаимодействия тел друг на друга всегда равны по величине и противоположно направлены» (Ньютон). Это и есть третий закон Ньютона: *силы, возникающие при взаимодействии тел, равны по модулю, противоположны по направлению и приложены к разным телам* (рис. 50):

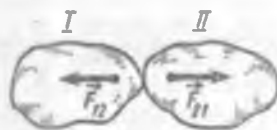


Рис. 50

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (35)$$

Применив к каждому из взаимодействующих тел уравнение (33), получим:

$$F_{12} = m_1 a_1; \quad F_{21} = m_2 a_2 \quad \text{и} \quad m_1 a_1 = -m_2 a_2.$$

Как видим, ускорения, приобретаемые телами при взаимодействии, противоположно направлены, а их модули обратно пропорциональны массам:

$$a_1/a_2 = m_2/m_1.$$

Это должно быть понятно, так как силы при взаимодействии одинаковы по модулю, а под действием любых одинаковых сил материальные точки получают ускорения, обратно пропорциональные их массам (см. § 27).

Таким образом, третий закон Ньютона позволяет измерять массы тел. Для этого достаточно принять массу одного из взаимодействующих тел за эталонную и измерить ускорения, которые данные тела получают при взаимодействии.

В качестве применения третьего закона Ньютона рассмотрим несколько примеров.

1. Приложим силу 20 Н к одному концу динамометра, который может без трения скользить по столу. Что покажет динамометр?

Силу, равную нулю, ибо нельзя растянуть невесомое тело (в нашем случае, динамометр), прикладывая к нему силу только с одной стороны.

2. Приложим к динамометру две силы по 20 Н, направленные в противоположные стороны. Что покажет динамометр? 20 Н.

3. Подействуем на динамометр двумя противоположно направленными и разными по модулю силами. Что покажет динамометр?

Большую из сил можно разложить на две, одна из которых по модулю равна меньшей силе F_1 (рис. 51). Тогда динамометр будет растянут одинаковыми силами F_1 (пример 2) и не будет растянут одной неуравновешенной силой F (пример 1). Следовательно, его показание равно F_1 .

Заметим, что роль большей силы может сыграть стенка или столб, к которым прикрепляется другой конец динамометра. В рабочем варианте знаменитого опыта Герике с магдебургскими полушариями эвакуированный шар привязывался верхним полушарием к каменному столбу, а к нижнему полушарию прикреплялся большой груз. Когда же опыт был вынесен «на публику», к полушариям привязали по восемь пар лошадей с каждой стороны (см. рис. 102). Вторые восемь пар лошадей с физической точки зрения можно было с успехом заменить одним достаточно прочным столбом.



Рис. 51

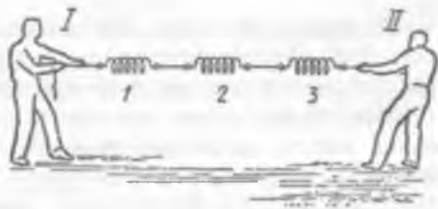


Рис. 52

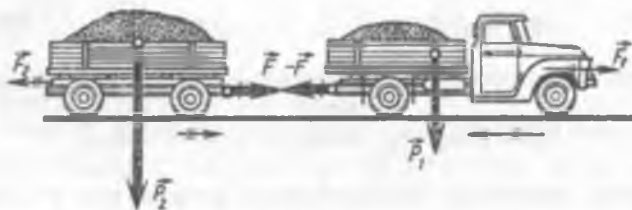


Рис. 53

4. Два человека могут развивать соответственно силы 900 и 500 Н. Они держат в руках динамометры, соединенные с третьим динамометром нерастяжимыми нитями (рис. 52). Каждый из них тянет к себе. Надо определить показания каждого динамометра (после разобранных выше примеров это нетрудно сделать самостоятельно).

5. Автомобиль с прицепом движется по земле (рис. 53, часто в книгах разбирается аналогичный пример с лошадью и телегой). При поверхностном «знании» третьего закона Ньютона возникает вопрос: почему автомобиль тянет за собой прицеп, а не наоборот — ведь силы взаимодействия равны!?

Действительно, сила F , с которой автомобиль действует на прицеп, по модулю равна силе $-F$, с которой прицеп действует на автомобиль. Но лишь этой констатации недостаточно для рассмотрения поставленного вопроса. Есть еще взаимо-

действующие (с равными по модулю и противоположными по направлению силами!) тела — автомобиль и земля, прицеп и земля.

Автомобиль при движении ведущими колесами отталкивает землю назад. С такой же по модулю силой земля толкает автомобиль вперед. Кроме того, на автомобиль действует со стороны земли сила трения ведомых колес, направленная навстречу движению. Равнодействующую F_1 этих двух сил — действия земли вперед и назад — можно назвать силой тяги автомобиля. Если она больше силы, с которой действует прицеп на автомобиль, последний движется ускоренно вперед (при других условиях возможны равномерное и замедленное движения).

Если сила F , с которой на прицеп действует автомобиль, больше силы F_2 , с которой земля тормозит прицеп, то последний движется ускоренно. Наконец, если сила тяги автомобиля больше силы, с которой земля тормозит прицеп ($F_1 > F_2$), то весь автопоезд движется ускоренно. Аналогичные силы надо рассматривать при изучении любого движения. Так, причиной движения человека или животных, транспорта и т. д. по земле является сила трения покоя, направленная вдоль движения. Если она мала, то сцепление ног или колес с землей недостаточно, происходит проскальзывание и связанный с ним «юз».

§ 2.9. Закон сохранения импульса

Третий закон Ньютона применяется к системе двух материальных точек. Таким образом, мы перешли к рассмотрению системы тел.

Имеем систему, состоящую из многих тел. Разобьем все тела этой системы на n материальных точек. На каждое тело системы могут действовать силы. Назовем *внутренними* (по отношению к данной системе) силы, действующие на тела системы со стороны других тел этой системы. *Внешними* назовем силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в данную систему. Для каждой материальной точки системы можно написать второй закон Ньютона:

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt},$$

Здесь $\mathbf{f}_i$ — равнодействующая всех внутренних сил, действующих на i -ю материальную точку системы; $\mathbf{F}_i$ — равнодействующая всех внешних сил, действующих на эту точку; $\mathbf{p}_i$ — импульс данной точки. Напишем n таких уравнений и сложим их почленно:

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{F}_1 = d\mathbf{p}_1/dt,$$

$$\mathbf{f}_2 + \mathbf{F}_2 = d\mathbf{p}_2/dt,$$

$$\mathbf{f}_n + \mathbf{F}_n = d\mathbf{p}_n/dt$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Векторные суммы $\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i$ и $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ — не равнодействующие, так как силы,

входящие в эти суммы, действуют на разные тела. Но $\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \stackrel{35}{=} 0$, потому что в этой сумме фигурируют все внутренние силы, которые попарно равны и противоположно направлены.

В соответствии с формулой (11-M) имеем:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \frac{d \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (36)$$

где сумма импульсов всех материальных точек системы $\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{p}$ — импульс системы тел.

Уравнение (36) только внешне похоже на основной закон динамики (34), оно применено к системе тел и показывает, что импульс системы нельзя изменить внутренними силами, а его изменение за единицу времени равно векторной сумме действующих на эту систему внешних сил.

Иначе, импульсы отдельных тел системы могут изменяться и внутренними силами, но импульс всей системы можно изменить только действием внешних сил.

Если векторная сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то система называется замкнутой. В частности, замкнутой является система, на которую не действуют внешние силы.

Для замкнутой системы

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0 \text{ и } \frac{d\mathbf{p}}{dt} \stackrel{36}{=} 0.$$

Следовательно, для такой системы

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{const.} \quad (37)$$

Мы получили закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел есть величина постоянная.

Но практически замкнутых систем не бывает. Зато иногда в незамкнутой системе находится такое направление x , для которого проекция суммы внешних сил $\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right)_x$ равна нулю. Система тогда называется замкнутой

по направлению x . Векторное равенство (36) эквивалентно трем скалярным равенствам для проекции на каждую из осей координат. Направим одну

ось по x . Тогда $\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right)_x \stackrel{36}{=} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_x = 0$ и

$$p_x = \left(\sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_x = \text{const} \quad (38)$$

— закон сохранения импульса для системы, замкнутой по направлению x .

Именно в такой форме применяется этот закон в процессе решения задач.

Одно из важнейших применений закона сохранения импульса — реактивное движение. Качественно оно напоминает явление отдачи, при котором, например, орудие после выстрела откатывается в направлении, противоположном направлению стрельбы. Представьте себе пушку, которая непрерывно стреляет мельчайшими снарядами и потому движется — получится реактивный двигатель.

Пусть система ракета — газ замкнута. В некоторый момент времени t ракета вместе с горючим имеет массу m и, следовательно, импульс mv (v — скорость ракеты относительно Земли или другой инерциальной системы). За некоторый достаточно малый промежуток времени dt масса dm газа со скоростью истечения u относительно ракеты будет выброшена назад, в результате чего скорость ракеты станет $v + dv$, а масса, естественно, $m - dm$.

Скорость газов относительно Земли в момент времени $t + dt$ равна $v + dv - u$. Суммарный импульс системы ракета — газ в момент времени $t + dt$ равен $(m - dm)(v + dv) + dm(v + dv - u)$. По закону сохранения импульса

$$(m - dm)(v + dv) + dm(v + dv - u) = mv.$$

Следовательно,

$$mv - v dm + m dv - dm dv + v dm + dm dv - u dm = mv,$$

откуда после преобразований имеем:

$$m dv - u dm = 0, \quad m dv = u dm.$$

Разделив последнее уравнение почленно на dt , получим

$$m \frac{dv}{dt} = m a = F = u \frac{dm}{dt}.$$

Здесь F — сила тяги двигателя ракеты, dm/dt — расход топлива.

Итак, сила тяги двигателя ракеты пропорциональна массе топлива, сгорающего за единицу времени, и скорости его истечения; направлена она, как мы учли при выводе, противоположно скорости истечения газов.

Основоположником теории межпланетных сообщений является К. Э. Циолковский. Многие его идеи осуществлены в наше время, а многие еще ждут осуществления. Он доказал возможность использования реактивного двигателя в космическом пространстве, вывел формулу количества топлива, необходимого для полета ракеты, изобрел многоступенчатую ракету, предложил искусственные спутники Земли, обосновал запуск космической ракеты со спутника и т. д.

§ 2.10. Основное уравнение динамики поступательного движения

Второй закон Ньютона (34) сформулирован для материальной точки. Но абсолютно твердое тело можно представить как совокупность достаточно большого числа материальных точек. Ограничимся поступательным движением тела, при котором ускорения всех его точек одинаковы. Это частный случай системы материальных точек, и для такого тела

$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{36}{=} \frac{d \sum_{i=1}^n p_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i v_i = \frac{d}{dt} \left(v \sum_{i=1}^n m_i \right) = \frac{d}{dt} (mv),$$

где $v = v_i$ — скорость, $\sum_{i=1}^n m_i = m$ — масса данного тела. Таким образом,

основной закон динамики для поступательно движущегося тела $\sum_{i=1}^n F_i = \frac{dp}{dt}$

имеет такой же вид, как и выражение (34), а сумма сил F_i является равнодействующей всех сил, приложенных к телу.

Если масса тела не изменяется, то сумма сил, действующих на тело, равна произведению его массы на ускорение:

$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{\text{н.м}}{=} m \frac{dv}{dt} \stackrel{\text{н.м}}{=} ma \quad (39)$$

— *основное уравнение динамики поступательного движения*. Оно похоже на экспериментально установленную для материальной точки зависимость (33), но там подчеркивалась зависимость ускорения материальной точки от массы и действующих на нее сил, а здесь записана математическая связь этих величин для поступательно движущегося тела. Разумеется, имея такую связь, можно найти одну из величин, если известны остальные.

Уравнение (39) является частным случаем основного закона динамики (34), оно справедливо только для тел неизменной массы. Аналогично второму закону Ньютона основное уравнение динамики поступательного движения применяется к одному телу. В динамике изучаются системы тел, поэтому уравнения движения обычно пишут для каждого тела данной системы.

§ 2.11. Теорема о движении центра масс

Все тела системы мысленно разобьем на n материальных точек. Положение i -й материальной точки зададим ее радиусом-вектором r_i . Скорость этой точки

$$v_i \stackrel{\text{н.м}}{=} \frac{dr_i}{dt}.$$

Импульс системы

$$p = \sum_{i=1}^n m_i v_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{dr_i}{dt} \stackrel{\text{н.м}}{=} \frac{d \sum_{i=1}^n m_i r_i}{dt}.$$

Введем в рассмотрение *центр масс* системы — точку, радиус-вектор которой (по определению)

$$r_{\text{ц.м}} = \sum_{i=1}^n m_i r_i / M,$$

где $M = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса всей системы. Тогда

$$p = \frac{d(r_{\text{ц.м}} M)}{dt} \stackrel{\text{н.м}}{=} M \frac{dr_{\text{ц.м}}}{dt} \stackrel{\text{н.м}}{=} M v_{\text{ц.м}}$$

где $dr_{ц.м.}/dt = v_{ц.м.}$ — скорость центра масс системы тел. Получаем

$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{3.6}{=} \frac{dp}{dt} = \frac{d(Mv_{ц.м.})}{dt} \stackrel{3.6}{=} M \frac{dv_{ц.м.}}{dt} \stackrel{3}{=} Ma_{ц.м.}$$

— доказательство теоремы о движении центра масс системы: центр масс системы материальных точек движется так, как под действием внешних сил должна двигаться точка, масса которой равна суммарной массе системы.

Если в качестве системы материальных точек рассмотреть одно тело, то у него тоже будет центр масс. Он является точкой приложения равнодействующей всех массовых сил (параллельные силы, действие которых на каждый элементарный объем тела пропорционально массе внутри этого объема).

§ 2.12. Движение материальной точки по окружности

В § 1.3 было показано, что при криволинейном движении существует нормальное ускорение, или полное ускорение составляет некоторый угол с направлением скорости. Следовательно, материальная точка будет двигаться по кривой под действием силы, направленной под углом к ее скорости. В частности, такая точка массой m может равномерно двигаться по окружности радиусом R только под действием силы, направленной к центру и равной

$$F \stackrel{3.1.3}{=} mv^2/R.$$

В общем случае криволинейного движения материальной точки равнодействующая сил, приложенных к ней, не равна mv^2/R и даже не перпендикулярна траектории. Ее можно разложить на нормальную (к траектории) F_n и тангенциальную F_t составляющие. Нормальная составляющая сообщает точке нормальное ускорение, т. е. изменяет направление скорости:

$$F_n \stackrel{3.3}{=} ma_n \stackrel{1.5}{=} m \frac{v^2}{r} = \frac{2\pi mv^2}{2r} \stackrel{3.5}{=} \frac{2T}{r},$$

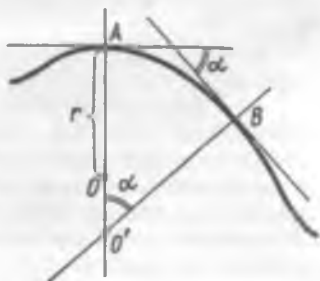
где r — радиус кривизны* траектории в данной точке.

* Пусть имеется плоская кривая. Угол α между касательными к этой кривой в точках A и B равен углу между нормальными AO и BO' (см. рисунок). Начнем неограниченно приближать точку B к точке A . При этом угол α устремится к нулю, а точка пересечения нормалей — к некоторому положению O .

Рассмотрим отношение длины дуги AB кривой к углу α . В пределе эта длина стремится к длине дуги некоторой окружности радиусом r с центром в точке O . Таким образом,

$$\lim_{B \rightarrow A} \frac{|AB|}{\alpha} \stackrel{1.4}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r\alpha}{\alpha} = r.$$

Этот предел отношения элемента кривой к углу между касательными в некоторой точке A и в текущей точке B (при стремлении текущей точки к неподвижной) называется радиусом кривизны данной кривой в точке A , а точка O — центром кривизны.



В этом равенстве кинетическая энергия T (см. § 3.2) зависит от предыстории материальной точки (от того, какие силы и как действовали на нее раньше, до описываемого момента времени), а сила F_n — от того, какие тела и как действуют на точку сейчас (в данный момент времени, когда у нее именно такое ускорение). Поэтому радиус кривизны траектории определяется этими двумя независимыми факторами и равен $r = 2T/F_n$.

Тангенциальная составляющая F_t сообщает точке тангенциальное ускорение, т. е. изменяет модуль скорости. При равномерном движении эта составляющая равна нулю, а равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, направлена по радиусу кривизны траектории.

В случае равномерного движения по окружности заданного радиуса R равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку, направлена к центру окружности и равна по модулю

$$\left| \sum_{i=1}^n F_i \right| = \frac{mv^2}{R}$$

Иначе вместо движения по заданной окружности мы получим криволинейное движение с радиусом кривизны траектории $r > R$ (если $\left| \sum_{i=1}^n F_i \right| < \frac{mv^2}{R}$) или $r < R$ (если $\left| \sum_{i=1}^n F_i \right| > \frac{mv^2}{R}$).

Эту равнодействующую можно назвать *центростремительной силой* (чтобы не появилось представление о каких-то дополнительных силах, мы не будем употреблять этот термин).

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

1. Камень на нити движется в горизонтальной плоскости (чтобы исключить из рассмотрения силу тяжести, рис. 54, а). Почему, двигаясь с линейной скоростью v , камень не улетает по касательной, как ему полагалось бы по первому закону Ньютона?

На камень действует сила натяжения Q (сила упругости). Если она достаточна для сообщения определенного нормального ускорения, то движение по окружности будет равномерным:

$$Q = \frac{mv^2}{R}$$

(сила упругости Q в данном случае сообщает камню центростремительное ускорение).

Если при движении камня перерезать нить в каком-либо ее положении, то камень полетит по касательной со скоростью v .

Это явление использовали еще древние люди, употреблявшие простейшее метательное устройство — пращу. Камень вкладывался в изгиб сложенного вдвое ремня, один конец которого был надет на руку, а другой зажат в кисти той же руки. Праща раскручивалась над головой, и в нужный момент рука освобождала конец ремня. Камень с большой скоростью летел по касательной и поражал цель. В настоящее время эту же, по существу, технику используют метатели диска и, в особенности, молота.

2. Земля движется вокруг Солнца, в первом приближении, по окружности (рис. 54, б) и притягивается к нему по закону всемирного тяготения (см. § 2.4) силой F . Часто возникает вопрос: почему Земля не падает на Солнце?

Тело движется не в направлении действия силы, а в направлении бесконечно малого перемещения, которое совпадает с направлением скорости. Значит, вопрос, требующий физического ответа, надо поставить совершенно иначе: почему Земля не улетает от Солнца по касательной к траектории (как следовало бы по первому закону Ньютона)? Ответ на этот вопрос ясен из рисунка: сила притяжения F заставляет

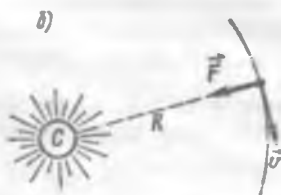
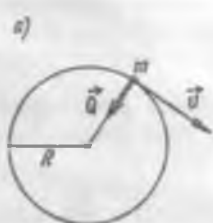


Рис. 54

Рис. 55

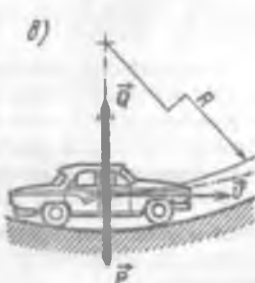
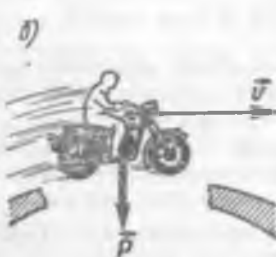
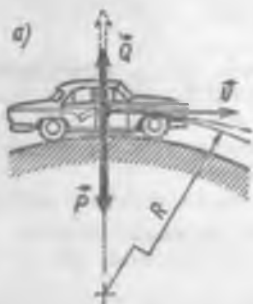


Рис. 56

линейную скорость изменяться по направлению, т. е. сообщает Земле нормальное ускорение: $F = mv^2/R$ (фактически это пример 1, в котором роль нити играет гравитационное притяжение).

3. Тело движется по окружности на «колесе смеха» — горизонтальном вращающемся диске (рис. 55). Центробежное ускорение в данном случае сообщает сила трения покоя (см. § 2.4), которая, как известно, может принимать любые значения от нуля до максимума:

$$F_{\text{тр}} = mv^2/R.$$

По мере роста скорости вращения сила трения увеличивается до своего максимального значения. При дальнейшем возрастании скорости нет достаточных «заворачивающих» сил, и тело почти по касательной движется на периферию диска.

В этих трех простейших примерах движение по окружности вызывалось одной силой. Как видно, любая сила может создавать нормальное ускорение.

4. Автомобиль стоит на середине выпуклого моста. Сила тяжести уравновешивается реакцией опоры: $P - Q = 0$ (рис. 56, а; пунктир). В начале движения сумма сил, направленных по вертикали, равна нулю. Колеса завертелись «вперед», вследствие наличия сил трения они отталкивают мост и Землю «назад», по третьему закону Ньютона Земля с такой же силой толкает автомобиль «вперед» (для простоты мы считаем все колеса автомобиля ведущими).

Под действием горизонтальной силы тяги двигателя автомобиль начинает горизонтальное движение, т. е. удаляется от центра кривизны моста. При этом деформация и, значит, сила упругости Q уменьшаются (по закону Гука, см. § 2.4). Часть силы тяжести теперь уравнивает реакцию опоры, а оставшаяся часть $P - Q$ искривляет траекторию. Но пока радиус кривизны траектории (штрихпунктирная линия) больше R , деформация и сила Q уменьшаются, $P - Q$ растет (все это относится к верхней точке моста, перемещения малы). Когда разность $P - Q$ станет достаточной для сообщения нужного центростремительного ускорения, радиус кривизны траектории практически будет равен радиусу кривизны моста, и движение автомобиля в верхней точке моста можно будет рассматривать как равномерное движение по окружности радиусом R :

$$P - Q = mv^2/R.$$

Центростремительное ускорение в данном случае сообщает равнодействующая сил тяжести и упругости, действующих на автомобиль. Сила реакции опоры

$$Q = P - mv^2/R,$$

т. е. меньше силы давления, с которой действует на мост неподвижный автомобиль. Можно рассчитать, при какой скорости автомобиль (мотоцикл, велосипед и т. п.) не давит на мост:

$$Q = 0, P = mg = mv^2/R, v = \sqrt{gR}.$$

Неизменным успехом пользуется цирковой аттракцион, при котором мотоциклист перелетает через разрыв моста (рис. 56, б). Так же как в примере 2, и здесь не физическим является вопрос: почему не падает?. Во всякой задаче на криволинейное движение необходимо ответить на вопрос: почему тело не движется по касательной к траектории в направлении вектора скорости?

В нашем примере тогда станет ясно, что вся сила тяжести сообщает необходимое нормальное ускорение (при скорости $v > \sqrt{gR}$ тело не может остаться на окружности радиусом R только под действием силы тяжести и улетает от центра кривизны).

В таком же положении находится спутник Земли (на круговой орбите) и все тела в нем.

Первая космическая скорость

$$v = \sqrt{gR},$$

достаточна для того, чтобы запущенное горизонтально тело не упало (без учета сопротивления воздуха). Вычислите эту скорость.

5. Автомобиль находится на вогнутом мосту. Условие равновесия: $Q - P = 0$. И в этом случае сила тяжести уравнивается силой реакции опоры.

Движение, как и в предыдущем примере, начинается по горизонтали (снова сумма сил, действующих по вертикали, равна нулю). Под действием горизонтальной силы тяги автомобиль будет «углубляться» в мост. При этом деформация моста (если он выдержит) возрастет, а с ней вместе увеличится сила упругости Q . Ее избыток начнет искривлять траекторию движения автомобиля. Но пока радиус кривизны траектории больше радиуса моста (штрихпунктир; рис. 56, в), деформация и, следовательно, сила упругости продолжают расти. Когда избыток силы упругости будет достаточен для сообщения нужного нормального ускорения, радиус кривизны траектории практически станет равен радиусу моста (все это относится к нижней точке траектории). Тогда движение автомобиля в нижней точке моста можно считать равномерным движением по окружности радиусом R :

$$Q - P = mv^2/R.$$

Центростремительное ускорение в данном случае сообщает равнодействующая сил упругости и тяжести. Сила упругости равна

$$Q = P + mv^2/R,$$

т. е. больше силы давления неподвижного автомобиля. Поэтому такие мосты не строят, но надо считаться с тем, что горизонтальный мост прогибается и становится вогнутым под действием идущего по нему транспорта. Это приходится учитывать при постройке, в частности, железнодорожных мостов.

Разберите сами, почему нет аттракциона с перелетанием мотоциклиста через разрыв вогнутого моста?

6. Рассмотрим регулятор Уатта (рис. 57). Два шарика на жестких шарнирно связанных тягах равномерно движутся по окружности определенного радиуса

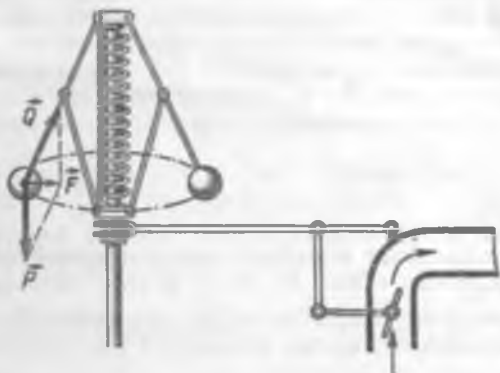


Рис. 57



Рис. 58

вокруг оси регулятора. Опять надо задать вопрос: почему они не движутся по касательной?

Силы, действующие на один шарик, изображены на рисунке. Это силы тяжести P и натяжения Q . Если их равнодействующая F сообщает шарiku необходимое нормальное ускорение, то он движется равномерно по окружности:

$$F = mv^2/R.$$

Как и в примерах 4, 5, нормальное ускорение шарiku сообщает равнодействующая двух сил.

7. Конькобежец, велосипедист на вираже, бегун на повороте наклоняются к центру виража. Рассмотрим движение велосипедиста на вираже (рис. 58, остальные картины аналогичны). Если равнодействующая сил Q и P направлена к центру кривизны траектории и равна $F = mv^2/R$, то она сообщает телу нормальное ускорение, и тело равномерно движется по окружности (сравните с примером 6). Для создания такого нормального ускорения делают наклонными полотна железной дороги, скоростные автомобильные дороги, велосипедные и мототреки, причем угол наклона рассчитан на определенную скорость движения.

При большей скорости тело станет отклоняться от центра и может начать радиальное скольжение или упасть по направлению «от оси». Это бывает при несоразмерных виражах. Аналогичное «проскальзывание» бывает при недостаточном крене самолета. При меньшей скорости избыток силы F может привести к падению в направлении центра поворота, чему способствует недостаточное сцепление с дорогой, например, при езде велосипедиста во время дождя или

по глинистой дороге. Такая же опасность (упасть во вне или внутрь окружности поворота) грозит ему при изменении угла наклона.

8. Рассмотрим, наконец, движение камня на веревке в вертикальной плоскости (рис. 59, аналогичным является движение сосуда с водой по окружности в вертикальной плоскости или летчика при совершении петли Нестерова).

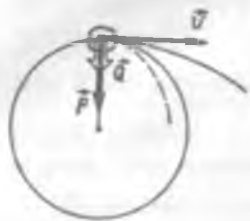


Рис. 59

Еще раз напомним, что вопрос «почему не падает, не выливается»? не имеет физического смысла. Тело, имеющее скорость v , по первому закону Ньютона должно двигаться по направлению этой скорости. Значит, физическим является вопрос: почему тело не движется по касательной? На тело действуют силы P и Q , которые сообщают ускорение, т. е. изменяют скорость движения. Для простоты рассматриваем только верхнее положение (в нижнем положении изменится направление Q ; в любом другом дело осложнится разложением всех сил на составляющие вдоль радиуса и касательной к траектории).

Если равнодействующая этих сил $P + Q$ сообщает телу необходимое центростремительное ускорение, то тело равномерно движется по окружности:

$$P + Q = mv^2/R;$$

становится понятным, почему при движении с достаточно большой скоростью камень не падает, вода не выливается. Стоит перерезать веревку в верхнем положении — камень полетит по направлению v (рис. 59). Если скорость уменьшить, то уменьшится и сила натяжения нити. При скорости $v = \sqrt{gR}$ ($mg = mv^2/R$; $v^2 = gR$) сила натяжения равна нулю, в верхней точке веревка не нужна. И только при скоростях $v < \sqrt{gR}$ часть силы тяжести сообщает необходимое ускорение $a = v^2/R$, а другая часть, сообщая дополнительное ускорение, искривляет траекторию внутрь окружности (рис. 59, пунктир).

В разобранных примерах (и во всех остальных случаях движения по окружности)

сумма сил может быть и не равна mv^2/R . Тогда она $\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)$ сообщает телу дру-

гое не центростремительное ускорение, и тело не движется равномерно по окружности. Так, если в примере 6 возрастает угловая скорость оси регулятора, то в первое время неизменявшаяся сила F не может сообщить новое нормальное ускорение v^2/R . Шарики сходят с круговой траектории, тяги расходятся на больший угол. Теперь возрастает сила упругости Q и новая равнодействующая F сил Q и P становится равной mv^2/R . При уменьшении скорости вращения происходит обратный процесс, и угол расхождения тяг уменьшается.

Ось регулятора соединяют с валом, например, паровой машины. Если теперь с тягами соединить заслонку, регулирующую поступление пара в цилиндры так, чтобы при увеличении угла расхождения тяг подача пара уменьшалась, и наоборот (см. рис. 57), то будет достигнуто автоматическое регулирование скорости данной машины. Поэтому такое устройство и называется регулятором.

Вернемся к примеру 1. На камень (тело, движущееся по окружности) действует одна сила натяжения нити. В свою очередь камень действует на нить с силой, по третьему закону Ньютона равной и противоположно направленной. Эта сила, приложенная к нити (к связи), направленная от центра, при желании может быть названа центробежной (пользы от такого названия нет, но и вреда такой термин — пока! — не приносит).

Обратимся к примеру 6. На шарик действуют две силы. Их равнодействующая приложена к шарiku и сообщает ему центростремительное ускорение. В свою

очередь шарик действует по третьему закону Ньютона на тягу с силой $-Q$ и на Землю с силой $-P$ (на связи, которых теперь две; рис. 60). Можно представить себе эти силы перенесенными в одну точку (хотя силу $-P$ нельзя вынести из Земли); этой точкой, как легко видеть, будет сам шарик. Но их векторная сумма $-F$ не может быть равнодействующей, так как силы приложены к разным телам. И к шарiku не приложены ни эти силы, ни их векторная сумма $-F$, иначе шарик двигался бы по кривой под действием уравновешивающихся сил!

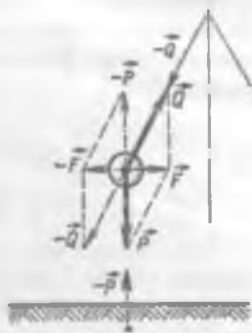


Рис. 60

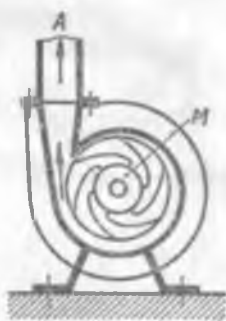


Рис. 61

Вспомним, что сила — это обозначение действия другого тела на данное. Центробежное ускорение появляется в результате действия равнодействующей реальных сил. А центробежная сила не является равнодействующей; нет тела, которое на что-либо действовало бы такой силой. Значит, нет и самой центробежной силы.

До сих пор употребляется исторически сложившееся название «центробежные механизмы». Одним из них является рассмотренный нами регулятор Уатта.

В центробежном насосе (рис. 61) крыльчатка M заставляет воду двигаться, стенки ее «заворачивают», т. е. сообщают нужное нормальное ускорение. Там, где нет стенки, нет сил, «заворачивающих» воду, и она устремляется с линейной скоростью по касательной к окружности — в трубу A .

§ 2.13. Вращение твердого тела

Наиболее общим непоступательным движением абсолютно твердого тела является движение тела с закрепленной точкой, которую удобно принять за начало координат (можно показать, что произвольное даже неплоское движение тела представляет собой суперпозицию такого движения вокруг закрепленной точки и поступательного движения). Через эту точку проходит мгновенная ось, вокруг которой тело поворачивается в данный момент времени.

Самое любопытное, что движение такого тела изменяется под действием не сил, а моментов сил. Например, волчок, вращающийся вокруг оси симметрии (рис. 62), не падает под действием силы тяжести P (как упал бы без вращения), а его ось под действием момента силы тяжести описывает почти коническую поверхность.

Рассмотрим движение материальной точки, находящейся на некотором расстоянии от начала координат (такова, в частности, любая материаль-

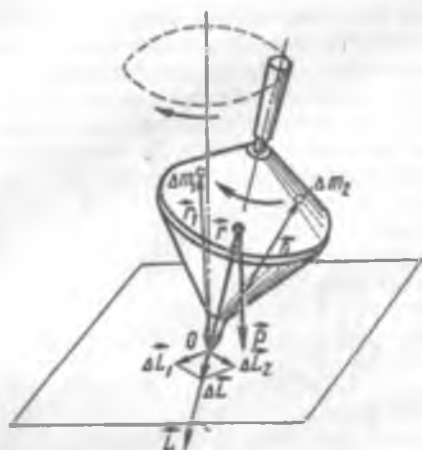


Рис. 62

ная точка абсолютно твердого тела с закрепленной точкой). Для такой точки второй закон Ньютона:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \stackrel{34}{=} d\mathbf{p}/dt.$$

Умножим это выражение почленно векторно слева на радиус-вектор данной точки (относительно начала координат):

$$\mathbf{r} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Аналогично моменту силы относительно точки [см. (25)] введем определение момента импульса материальной точки относительно начала координат как векторного произведения радиуса-вектора данной материальной точки на ее импульс:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (40)$$

Производная момента импульса по времени

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} \stackrel{12, M}{=} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \stackrel{5, M}{=} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

так как $d\mathbf{r}/dt \stackrel{1}{=} \mathbf{v} \uparrow \mathbf{p}$. Следовательно,

$$\mathbf{r} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i \stackrel{25}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \frac{d\mathbf{L}_0}{dt}$$

или

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = d\mathbf{L}_0/dt \quad (41)$$

— основной закон динамики вращательного движения: скорость изменения момента импульса материальной точки равна векторной сумме моментов сил, действующих на эту точку (сравните со вторым законом Ньютона).

Разобьем систему тел на n материальных точек. Для каждой точки можно написать основной закон динамики вращательного движения:

$$\mathbf{M}_i + \mathbf{N}_i \stackrel{41}{=} d\mathbf{L}_i/dt,$$

где $\mathbf{L}_i$ — момент импульса данной точки относительно начала координат; $\mathbf{M}_i$ и $\mathbf{N}_i$ — результирующие моменты соответственно внешних и внутренних сил, действующих на данную точку (тоже относительно начала коор-

динат). Таких уравнений можно написать n — по числу материальных точек. Почленно сложим n таких уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i = \sum_{i=1}^n d\mathbf{L}_i/dt.$$

Моменты внутренних сил, например, действующих между некоторыми материальными точками 1 и 2 (рис. 63), противоположно направлены и равны по модулю: $M_1 \stackrel{25}{=} r_1 f_1 \sin \alpha_1 = r_1 f_1 \sin \beta_1 = f_1 l$; $M_2 \stackrel{25}{=} r_2 f_2 \sin \alpha_2 = -r_2 f_2 \sin \beta_2 = -f_2 l$. Так как силы взаимодействия численно равны по третьему закону Ньютона, то сумма моментов всех внутренних сил равна нулю. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} \stackrel{11-M}{=} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \frac{d\mathbf{L}_0}{dt}, \quad (42)$$



Рис. 63

где

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i \stackrel{40}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (43)$$

— момент импульса системы тел (векторная сумма моментов импульсов всех тел системы).

Уравнение (42) только похоже на основной закон динамики вращательного движения (41), оно написано для системы тел, векторная сумма моментов сил в нем — не равнодействующий момент, так как силы приложены к разным точкам системы. Уравнение (42) показывает, что момент импульса всей системы тел изменяется только под действием моментов внешних сил, и скорость изменения этого момента равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на все тела данной системы.

Назовем замкнутой (в смысле вращения) систему тел, для которой сумма моментов внешних сил равна нулю. Для такой системы $\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} \stackrel{42}{=}$

$$\stackrel{42}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = 0 \text{ и}$$

$$\mathbf{L}_0 = \text{const} \quad (44)$$

— закон сохранения момента импульса (сформулируйте его сами).

Аналогично поступательному движению и здесь не бывает замкнутых систем, но иногда в незамкнутой системе находится направление, для которого проекция суммы моментов внешних сил обращается в нуль. Для такой системы, замкнутой по направлению x :

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i \right)_x \stackrel{42}{=} \left(\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} \right)_x = \frac{dL_x}{dt} = 0,$$

откуда

$$L_x = \text{const.} \quad (45)$$

Абсолютно твердое тело с закрепленной точкой является частным случаем системы тел. Следовательно, основной закон динамики вращательного движения для твердого тела формулируется аналогично закону для материальной точки:

$$\sum_{i=1}^n M_i \stackrel{42}{=} \frac{dL_0}{dt}, \quad (46)$$

где $\sum_{i=1}^n M_i$ — равнодействующий момент сил, приложенных к данному телу;

$L_0 \stackrel{43}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ — момент импульса этого тела (все относительно точки).

Если однородное симметричное тело достаточно быстро вращается вокруг своей оси симметрии (например, волчок на рис. 62), то, перебрав попарно симметричные точки Δm_i , получим, что направление момента импульса практически совпадает с осью симметрии. Через некоторый промежуток времени dt вектор L (см. рис. 62) должен измениться на $dL \stackrel{44}{=} M dt$ в направлении момента силы тяжести, что приведет к указанному вращению оси вращения (определите направление $M \stackrel{45}{=} \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ и изобразите несколько последовательных положений волчка).

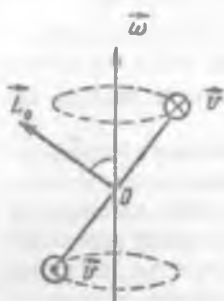


Рис. 64

Еще более частным случаем является движение тела с закрепленной осью, в одной из точек которой удобно расположить начало координат.

При произвольном вращении такого тела направления угловой скорости ω и момента импульса L_0 не совпадают (рис. 64, в качестве тела выбрана гантель, состоящая из двух материальных точек, расположенных на невесомом стержне, жестко связанном в точке O с осью вращения, вдоль которой направлен вектор ω).

Момент импульса некоторой материальной точки A относительно начала координат (рис. 65)

$$L_0 \stackrel{46}{=} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (\mathbf{h} + \mathbf{R}) \times \mathbf{p} = \mathbf{h} \times \mathbf{p} + \mathbf{R} \times \mathbf{p} = L_h + L$$

имеет составляющие L_h , перпендикулярную оси, и L , расположенную вдоль оси. Величина

$$L = \mathbf{R} \times \mathbf{p} \quad (47)$$

называется моментом импульса материальной точки A относительно оси. Соответственно момент импульса всего тела относительно точки O будет иметь составляющие вдоль и перпендикулярно оси. Вращаясь в подшипниках, такое тело «бьет», а предоставленное самому себе не будет вращаться вокруг данной оси. И только при вращении вокруг некоторых осей направ-

ления L_0 и ω совпадают, предоставленное самому себе тело продолжает вращение. Такие оси называются *свободными*, в однородном симметричном теле ось симметрии обычно является свободной осью. При вращении

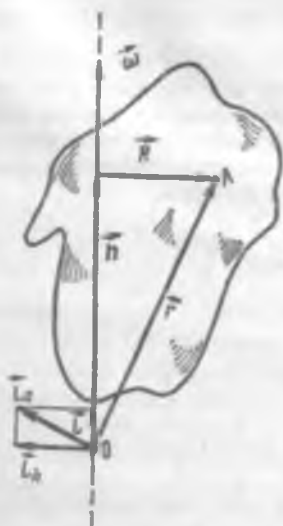


Рис. 65

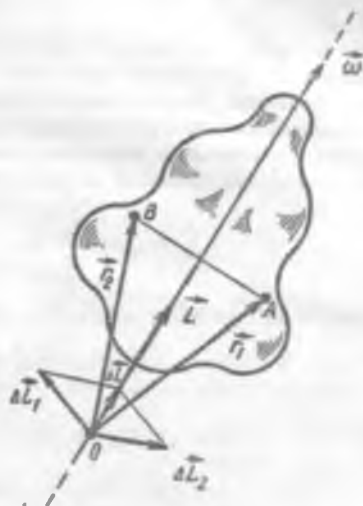


Рис. 66

около такой оси каждой точке A (рис. 66) найдется симметричная точка B , так что суммарный момент импульса будет направлен вдоль оси и равен

$$L \stackrel{47}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i \stackrel{31}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times \Delta m_i \omega \times \mathbf{R}_i = \omega \sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2,$$

причем это выражение тем точнее, чем больше n и меньше Δm_i . Назовем величину

$$J = \lim_{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2 \stackrel{32-M}{=} \int_M R^2 dm \quad (48)$$

моментом инерции тела относительно указанной оси. Тогда $L = J\omega$, и основной закон динамики вращательного движения для тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, примет вид

$$\sum_{i=1}^n M_i \stackrel{46}{=} \frac{d(J\omega)}{dt},$$

где слева стоит сумма моментов сил относительно оси.

Вспомним, что момент произвольной силы относительно точки O (см. рис. 38) имеет две составляющие, перпендикулярные оси, и составляющую, направленную вдоль оси. Изменение момента импульса данного тела производит только продоль-

ная составляющая, а перпендикулярные составляющие автоматически компенсируются моментами сил реакции в подшипниках.

Если закрепленная ось не является свободной, то возникают дополнительные моменты реакций подшипников, изменяющие направление момента импульса относительно точки. Это приводит к вращению момента импульса L_0 вокруг оси, как показано на рис. 64.

Из рис. 66 видно, что вектор L численно равен проекции вектора L_0 на ось, а в § 2.3 отмечалось, что момент силы относительно оси численно равен проекции вектора M_0 на эту ось. Следовательно, можно было определить моменты импульса и силы относительно оси как проекции моментов импульса и силы относительно точки на ось (проходящую через эту точку) и последнее равенство написать в скалярной форме для проекций соответствующих векторов:

$$\sum_{i=1}^n M_{oi} = \frac{dL_{oi}}{dt} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^n M_{oi} = \frac{d(J\omega)}{dt}.$$

Момент инерции материальной точки

$$J_0 = \int R^2 dm \stackrel{44-M}{=} R^2 \int dm \stackrel{37-M}{=} mR^2,$$

следовательно, момент инерции тела — это сумма моментов инерции его материальных точек.

Чем дальше от оси расположены частицы тела, тем больше его момент инерции. Таким образом, момент инерции тела характеризует распределение масс данного тела относительно оси вращения.

Между поступательным и вращательным движениями можно установить достаточно глубокую аналогию. Соответствуют друг другу линейная и угловая скорости, линейное и угловое ускорения, малые перемещения и углы поворота, основные законы динамики поступательного и вращательного движений; роль силы во вращательном движении играет момент силы, вместо импульса фигурирует момент импульса. Закону сохранения импульса соответствует закон сохранения момента импульса.

Аналогом массы является момент инерции, который представляет собой меру инертности во вращательном движении.

Маховики в двигателях или машинах (тела, большая часть массы которых расположена вдали от оси) имеют большие моменты инерции и с трудом разгоняются или останавливаются, сохраняя «по инерции» свое состояние покоя или равномерного вращения вокруг свободной оси.

Но есть у вращательного движения и некоторая специфика. Пусть, например, на симметричное тело не действуют извне силы или, что чаще бывает, векторная сумма моментов этих сил равна нулю $\left(\sum_{i=1}^n M_i = 0 \right)$. Тогда

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad J\omega = \text{const.}$$

Аналогично при равенстве нулю суммы сил, действующих на поступательно движущееся тело:

$$\frac{d(mv)}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad mv = \text{const.}$$

Отсюда для тел неизменяющейся массы следует постоянство скорости. Но при вращении можно изменить момент инерции. Как, например, входит в пируэт фигуристка? Она отставляет ногу, разводит руки и начинает вращаться (быстро этого не сделаешь), а потом группируется к оси — подгибает ногу, сводит руки, короче, уменьшает свой момент инерции. Соответственно увеличивается угловая скорость. При остановке — наоборот. То, что бурные аплодисменты вспыхивают именно в момент быстрого вращения, показывает, как хорошо забыли зрители теорию вращения...

Если при вращении момент инерции тела не изменяется, то из основного закона можно получить *основное уравнение динамики вращательного движения*:

$$\sum_{i=1}^n M_i \stackrel{\text{9.51}}{=} J \frac{d\omega}{dt} \stackrel{22}{=} J\varepsilon. \quad (49)$$

Это уравнение тоже можно было написать в скалярной форме — для проекций соответствующих векторов.

При решении динамических задач наряду с уравнениями поступательного движения необходимо составлять и уравнения вращательного движения для всех вращающихся тел системы.

В кинематике отмечалось, что направления ускорений не связаны с соответствующими скоростями. Теперь должно быть ясно, что модули и направления ускорений определяются силами и моментами сил.

Мы сформулировали законы динамики поступательного и вращательного движений. Напомним, что основные количественные соотношения устанавливаются вторым законом Ньютона; первый закон позволяет выделить инерциальные системы отсчета; с помощью третьего закона можно измерить массу.

§ 2.14. Статика

Часто встречаются тела, неподвижные относительно данной системы отсчета. Так, покоятся дома по отношению к Земле; пассажиры летящего самолета — относительно его корпуса и т. д. Часть динамики, в которой изучаются условия равновесия тел, называется *статикой*^{*}.

Мы уже говорили, что действие силы приводит к появлению ускорения, а момента силы — к появлению углового ускорения. *Равновесием* тела называется такое его положение, которое сохраняется без дополнительных воздействий. Значит, неподвижное тело в положении равновесия должно оставаться достаточно долго без воздействий извне. В соответствии с основными уравнениями динамики поступательного и вращательного движений, покоящееся тело не начнет двигаться поступательно, если сумма сил, действующих на него, равна нулю. Аналогично, неподвижное тело не будет вращаться, если сумма моментов сил, действующих на него, равна нулю. Значит, *условиями равновесия* покоящегося тела являются равенства нулю сумм сил и моментов сил, действующих на это тело:

$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{39}{=} 0, \quad \sum_{i=1}^n M_i \stackrel{49}{=} 0. \quad (50)$$

^{*} statos (греч.) — стоящий.

Но для того, чтобы судить о поведении тела в реальных условиях, мало знать, что оно находится в равновесии. Надо еще оценить это равновесие. Для этого надо немного (в пределе — бесконечно мало) вывести тело из равновесия. При этом, возможно, появятся силы или моменты сил, и условия равновесия будут нарушены. Если возникшие силы или моменты сил возвращают тело к положению равновесия, то это равновесие *устойчиво*; если уведат дальше — равновесие *неустойчиво*, если, наконец, суммы сил и моментов сил остаются равными нулю — равновесие *безразличное*.

В качестве примера рассмотрим положения однородного прямоугольного параллелепипеда на горизонтальной поверхности (рис. 67). В позиции *а* тело не находится в равновесии, ибо предоставленное самому себе изменит это положение под действием момента силы тяжести P . В позициях *б—д* суммы сил и моментов сил равны нулю. Следовательно, в этих положениях наблюдается равновесие.

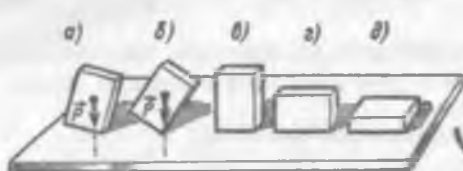


Рис. 67

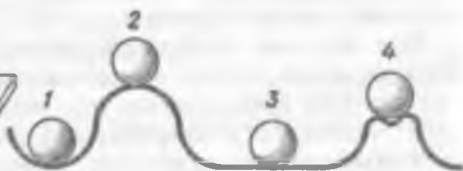


Рис. 68

Тело на горизонтальной плоскости находится в равновесии, если вертикальная проекция центра тяжести располагается в площади опоры. Но равновесия бывают разные. На рис. 68 изображены четыре положения равновесия. Чтобы оценить равновесие тела, чуть-чуть выведем его из начального положения и предоставим самому себе. Тело возвращается обратно (положения 1 и 4) — равновесие устойчиво; удаляется от положения 2 равновесия — оно неустойчиво; сохраняет измененное положение 3 — равновесие безразличное. Отсюда видно, что устойчивое равновесие связано с минимумом потенциальной энергии (см. § 3.2) — по отношению ко всем близким соседним положениям тела; неустойчивое равновесие — с максимумом потенциальной энергии по отношению к таким же положениям; безразличное равновесие связано с неизменной потенциальной энергией всех близких состояний. В гравитационном поле то же самое можно сказать о высоте центра тяжести. В устойчивом равновесии высота центра тяжести минимальна по сравнению со всеми близкими положениями; в неустойчивом — максимальна; в безразличном — одинакова во всех достаточно близких положениях.

Вернемся теперь к рис. 67. Ясно, что равновесие на рис. 67, *б* неустойчиво, потому что при отклонении тела от него в любую сторону возникает момент силы тяжести, уводящий тело от этого положения. Равновесия на рис. 67, *в—д* устойчивы.

Но устойчивость их различна. Сравните устойчивость двух столиков с тремя ножками. При одинаковых размерах (и массах) их устойчивость тем больше, чем больше площадь опоры. Это справедливо для тел, центр тяжести которых проецируется в середину площади опоры. Представьте себе два грузовика с грузами чугуна и сена равных масс. Второй грузовик менее устойчив. Таким образом, устойчивость равновесия повышается при увеличении площади опоры и уменьшения высоты центра тяжести.

Мы видим, что положения равновесия на рис. 67, *в—д* расположены в порядке возрастания устойчивости.

Если тело имеет закрепленную ось, то условием равновесия является равенство нулю суммы моментов действующих на него сил (равенство нулю суммы сил, действующих на тело, учитывая реакции осевых подшипников, достигается в этом случае автоматически; именно поэтому такое тело не может двигаться поступательно).

§ 2.15. Тело в поле сил тяжести

Тела в поле сил тяготения Земли (или иной планеты) испытывают действие нескольких сил. На тело, находящееся, например, на поверхности Земли, действует сила тяготения F (гравитационная), направленная к центру Земли (рис. 69). При отсутствии сил трения одна из составляющих этой силы сообщает телу нормальное ускорение.

Тело совершает движение по окружности вместе с Землей под действием этой составляющей:

$$F_1 = \frac{15.39}{r} \frac{m \text{г}^2}{\text{г}} = \frac{21}{r} \frac{m \omega^2 r^2}{\text{г}} = m \omega^2 R \cos \varphi \stackrel{24}{=} m \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \varphi,$$

где m — масса тела; T — период обращения Земли вокруг своей оси (сутки); R — радиус Земли; φ — широта данного места.

Вторая составляющая силы тяготения P направлена, как видно из рис. 69, не к центру Земли, а по отвесной (не радиальной!) линии (именно по этой линии располагается отвес). Эту приложенную к телу силу P называют силой тяжести.

Еще при образовании земного шара, когда его поверхность не была достаточно твердой, под действием сил тяжести некоторая масса Земли «сползла» от полюсов к экватору. Поэтому Земля представляет собой несколько сплюснутый у полюсов шар — *геоид**. Легко видеть, что сила тяжести зависит от места расположения тела, в частности от широты.

С точки зрения наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета (связанной, например, с Солнцем), проведенное нами разложение силы тяготения носит искусственный характер и не однозначно (особенно, если есть силы трения). Единственная причина, по которой такое введение силы тяжести имеет смысл, заключается во вращении Земли, которая, таким образом, является неинерциальной системой отсчета. Поэтому тела на Земле движутся как будто под действием силы тяжести, а не тяготения.

В частности, ускорение свободного падения создается силой тяжести.

Кроме указанных сил отвесно вверх действует архимедова сила (см. § 4.2), так что при измерениях она вычитается из вертикальной составляющей силы тяготения. Именно эта разность является силой тяжести в обычных опытах на Земле,

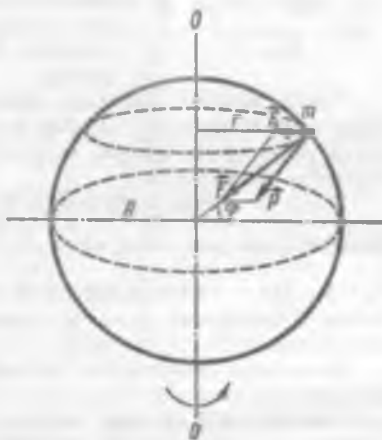


Рис. 69

* ге (греч.) — Земля.

она тянет тело вниз и тем самым создает вес тела. Но поправки на архимедову силу невелики, ими обычно пренебрегают.

С понятием веса связано много ошибок, главной из которых является его смешение с силой тяжести. «Сила, с которой тело притягивается к Земле», — это не вес.

Весом тела называют силу G , с которой тело действует на неподвижную относительно него горизонтальную опору (или на неподвижный относительно него подвес). Вес тела приложен к опоре, а не к самому телу, и может изменяться в зависимости от движения опоры.

Предоставленное самому себе тело под действием силы тяжести свободно падает с ускорением g . Следовательно, сила тяжести

$$P = mg.$$

Если тело находится на подставке (рис. 70), то на него кроме силы тяжести P действует сила реакции опоры N . По третьему закону Ньютона, силы взаимодействия G и N равны по модулю и противоположны по направлению.

Уравнение движения тела $P - N = ma$, откуда сила

$$N = m(g - a),$$



Рис. 70

равная по модулю весу тела, может быть больше, меньше или равна силе тяжести. Рассмотрите три различных случая движения тела на подставке, например в лифте с ускорением $a > 0$ (ускорение направлено вниз), $a < 0$ (ускорение направлено вверх), без ускорения.

При свободном падении тела ($a = g$) наступает невесомость: $N = 0$, $G = 0$. При этом тело не давит на подставку. Именно в таком состоянии находятся все тела на спутниках Земли. Сила тяжести P продолжает действовать и сообщает телу ускорение, равное ускорению опоры.

Чтобы испытать состояние невесомости, не обязательно находиться в космосе. Первое время падения с любой высоты — это состояние невесомости. Для тренировки космонавтов высоко летящий самолет начинает пикировать — в его кабине наступает невесомость.

Когда в магазине взвешивают покупку, вас интересует ее масса. Условие равновесия на рычажных весах $\sum_{i=1}^n M_i g = 0$ приводит к равенству: $G_1 r = G_2 r$ и $G_1 = G_2$. Но в случае покоя $a = 0$ и $G = N = mg$. Следовательно, $m_1 = m_2$. Оказывается, сравнивались массы покупки и гири. Взвешивание на пружинных весах аналогично.

Вследствие сравнительно медленного вращения Земли вокруг своей оси различие сил тяготения и тяжести невелико и обычно не учитывается. Сила F_1 составляет меньше 0,4% от силы тяжести. Еще меньше станет это различие, если учесть действие сил трения покоя, которые, как в примере с «колесом смеха» (см. § 2.4), участвуют в создании нормального ускорения.

Наибольшее различие сил тяготения и тяжести наблюдается на экваторе, где они совпадают по направлению. Разность этих сил

$$F - N = mv^2/R.$$

Здесь сила реакции опоры по модулю равна силе тяжести: $N = P$. Относительная погрешность при замене этих сил не больше

$$\frac{F - P}{P} = \frac{mv^2}{Rmg} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 Rg} = 4\pi^2 \frac{R}{gT^2} \approx 4\pi^2 \frac{6,37 \cdot 10^6 \text{ м} \cdot \text{с}^2}{9,78 \text{ м} \cdot 24^2 \cdot 3600^2 \text{ с}^2} = 0,34\%.$$

($g = 9,78 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения на экваторе). Таким образом, принципиально эти силы надо различать, а при грубых измерениях такого различия можно не делать.

В § 2.11 мы ввели понятие массовых сил и центра масс. Силы гравитационные (тяготения), строго говоря, не являются массовыми, поскольку направлены к центру тяготения и, значит, не параллельны. Но, например, на Земле размеры тел много меньше ее радиуса, что позволяет считать силы тяготения и тяжести почти параллельными. С такой же незначительной погрешностью можно считать совпадающими центр тяжести тела (см. § 2.2) и его центр масс.

ГЛАВА 3

ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

§ 3.1. Работа

Понятие работы проникло в науку из человеческой деятельности: человек что-то «делал» и «устал» — значит, «работал». Но постепенно понятия «усталость» и «работа» разделились, физическое понятие «работа» получило новое содержание, которое мы еще рассмотрим.

Пока же дадим простейшее определение: *работа* — физическая величина, характеризующая действие силы на определенном пути. Пусть сила, направленная вдоль пути, действует на прямолинейно движущееся тело. Тогда работа

$$A = Fl.$$

При равенстве нулю одного из сомножителей (нет силы или нет пути) равна нулю и работа. В частности, если сила F поддерживает неподвижный груз в поле сил тяжести, то ее работа равна нулю. Если тело движется горизонтально (рис. 71), то сила F по-прежнему удерживает тело от падения и, следовательно, на этом пути ее работа равна нулю.

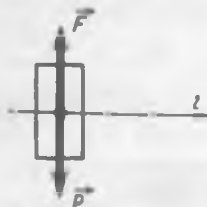


Рис. 71

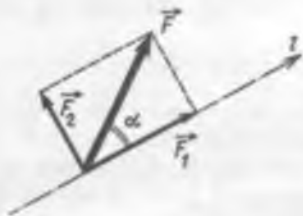


Рис. 72

Вообще, сила, перпендикулярная пути, на этом пути работы не совершает.

Пусть теперь постоянная сила действует на прямолинейном пути l под углом α к нему. Ее работу можно представить как сумму работ ее составляющих, направленных параллельно и перпендикулярно пути

(рис. 72). Но работа перпендикулярной составляющей равна нулю. Следовательно, работа заданной силы равна работе ее продольной составляющей, т. е.

$$A = Fl \cos \alpha.$$

Работа положительна, если направления продольной составляющей силы и пути совпадают ($\alpha < 90^\circ$, $\cos \alpha > 0$), и наоборот.

В общем случае сила переменна, путь криволинеен, угол α изменяется произвольно. Тогда для вывода формулы работы нужно разбить путь на такие малые (в пределе бесконечно малые) перемещения, на которых можно считать силу и угол неизменными, и воспользоваться выведенной формулой. Элементарная работа тогда равна

$$dA = F dl \cos \alpha \stackrel{4-M}{=} (F dl).$$

Конечная работа равна сумме элементарных работ и тем точнее, чем меньше каждое перемещение и чем больше их число:

$$A = \lim_{\substack{\Delta l_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n (F_i \Delta l_i) \stackrel{51-M}{=} \int_l (F dl). \quad (51)$$

Это выражение является определением физического понятия «работа».

Пусть продольная составляющая F какой-либо силы произвольно зависит от пути (рис. 73). Элементарная работа графически изобразится площадью той или иной заштрихованной полоски. Конечная работа на пути от точки l_1 до точки l_2 по формуле (51) графически изобразится площадью криволинейной фигуры, ограниченной осью абсцисс, ординатами l_1 и l_2 начала и конца пути и графиком $F(l)$.

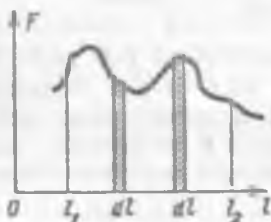


Рис. 73



Рис. 74

В случае неизменяющейся силы, действующей вдоль пути, силу и косинус соответствующего угла (в данном случае $\alpha = 0$) можно вынести за знак интеграла, и $A \stackrel{51}{=} Fl$, как и было отмечено в начале параграфа.

В СИ единицей работы является джоуль (Дж).

Один джоуль равен работе, которая совершается силой 1 Н на пути длиной 1 м в направлении действия силы:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2.$$

Назовем консервативными силы, работа которых не зависит от формы пути (зависит только от его начала и конца). Обозначим работы перемещения точки из положения 1 в положение 2 по разным путям буквами A_1 и A_2 (рис. 74). По определению консервативности сил, $A_1 = A_2$.

Работа перемещения точки из положения 2 в положение 1 по второму пути равна, естественно, $-A_2$. Если перевести точку из положения 1 в положение 2 по первому пути, а затем обратно по второму, т. е. провести по замкнутому пути 121, то суммарная работа будет равна

$$A_1 + (-A_2) = 0.$$

Следовательно, работа консервативных сил на замкнутом контуре равна нулю. В механике консервативными являются силы упругости и гравитации.

Вычислим работу сил упругости при деформации упругого тела:

$$\begin{aligned} A &\stackrel{51}{=} \int_1^2 (F dl) \stackrel{44-M}{=} \int_1^2 F dl \cos \alpha = \int_{x_1}^{x_2} -F dx \stackrel{28}{=} - \int_{x_1}^{x_2} kx dx \stackrel{44-M}{=} -k \int_{x_1}^{x_2} x dx \stackrel{37-M}{=} \\ &= -\frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2), \end{aligned}$$

где α — угол между направлениями перемещения и силы, $\cos \alpha = -dx/dl$; x — деформация, а dx — ее приращение.

При увеличении деформации ($dx > 0$) $\cos \alpha = -1$, при уменьшении деформации ($dx < 0$) $\cos \alpha = +1$. В первом случае элементарная работа сил упругости отрицательна, во втором — положительна. Конечная работа сил упругости отрицательна при увеличении деформации ($x_2 > x_1$) и положительна при ее уменьшении ($x_2 < x_1$). Это связано с тем, что сила упругости направлена навстречу деформации.

Пусть $x_1 = 0$, а $x_2 = x$, тогда деформация x равна пути, на котором совершает работу переменная сила упругости, например растягиваемой пружины. Эта работа равна

$$A \stackrel{51}{=} \int_1^2 (F dl) \stackrel{28}{=} \int_0^x -kx dx = -\frac{kx^2}{2}. \quad (52)$$

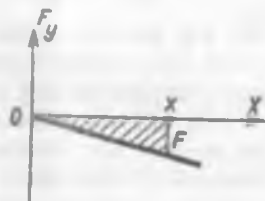


Рис. 75

Знак минус показывает, что работа совершена над пружиной. Графически эта работа равна площади треугольника (рис. 75; это частный случай рис. 73).

Можно было растянуть пружину иначе (в пределах упругости), подойти к тому же удлинению x через другие значения, и работа была бы такой же. Таким образом, работа упругой силы действительно не зависит от формы пути.

Рассмотрим работу сил гравитации при перемещении тела массой m из точки 1 в точку 2 поля сил тяготения некоторой звезды или планеты, масса которой m_0 (рис. 76, а):

$$\begin{aligned} A &\stackrel{51}{=} \int_1^2 (F dl) \stackrel{44-M}{=} \int_1^2 F dl \cos \alpha \stackrel{27}{=} \int_{R_1}^{R_2} -G \frac{mm_0}{R^2} dR \stackrel{44-M}{=} -Gmm_0 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} \stackrel{37-M}{=} \\ &= -Gmm_0 \left(-\frac{1}{R} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = -Gmm_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \end{aligned} \quad (53)$$

где α — угол между направлениями силы и перемещения, а $\cos \alpha = -dR/dl$. Не надо думать, что во всех точках косинус отрицателен, это алгебраическая величина, он отрицателен в тех точках, где положительно приращение радиуса ($dR > 0$), и положителен в точках, где $dR < 0$. Другими словами, элементарная работа поля при удалении от центра гравитации отрицательна, а работа приближения к центру гравитации положительна. Должно быть ясно, что при $R_2 > R_1$ конечная работа гравитационного поля (на всем пути) отрицательна. Это объясняется тем, что гравитационные силы — это силы притяжения.

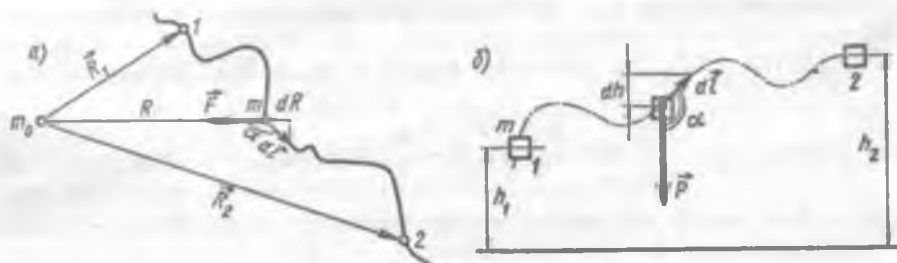


Рис. 76

В частности, работа неизменной силы тяжести на Земле (рис. 76, б):

$$A \stackrel{31}{=} \int_1^2 (F dl) = \int_1^2 (P dl) \stackrel{4M}{=} \int_1^2 P dl \cos \alpha = \int_{h_1}^{h_2} -P dh \stackrel{4+M}{=} -P(h_2 - h_1),$$

так как $\cos \alpha = -dh/dl$. Здесь dh — проекция перемещения dl на направление подъема — вертикально вверх. Знак минус означает, что проекция перемещения и $\cos \alpha$ имеют разные знаки.

Убеждаемся в том, что и эти силы консервативны, так как работа не зависит от положения промежуточных точек. Из законов Гука и всемирного тяготения видно, что консервативные силы зависят от взаимного расположения тел системы. Эти силы совершают работу при изменении конфигурации системы — взаимного расположения ее тел.

§ 3.2. Энергия

Как было сказано во введении, предметом физики является изучение различных форм движения материи. В дальнейшем мы разберем, как может материя переходить от одной формы движения к другой.

Но поскольку возможен такой переход, должна существовать мера движения, которая сохраняет свой смысл при изменении формы движения. Такой наиболее общей мерой движения материи является энергия*.

Изменить энергию системы можно в процессе совершения работы**. Подчеркнем, что работа — это процесс. Ни до, ни после него у системы

* *energeia* (греч.) — деятельность.

** В термодинамике рассматривается еще один известный способ изменения энергии — теплообмен.

нет «работы», ее нельзя накопить, это не «запас». До совершения работы у системы была определенная энергия, после совершения работы у системы остается какая-то другая энергия.

Теперь можно дать новое важнейшее определение работы: *работа* — это процесс, в котором под действием сил изменяется энергия системы, и одновременно количественная мера этого изменения. Мы можем изменить энергию, заставив систему совершить определенную работу.

Естественно, измеряют энергию в единицах работы. В механике различают два вида энергии — кинетическую и потенциальную.

Кинетическая энергия — это энергия, которой система тел обладает благодаря их движению. Если все тела системы покоятся, ее кинетическая энергия равна нулю. Значит, кинетическая энергия системы зависит от скоростей ее тел. Скорости тел зависят от выбора системы отсчета.

В разных системах отсчета скорости одного и того же тела в данный момент времени могут быть различными. Если, например, тело движется относительно вагона поезда, который идет по железной дороге, то скорости тела относительно Земли и вагона будут разными. Отличаться поэтому будут и кинетические энергии тела относительно Земли и вагона. Следовательно, кинетическая энергия — величина относительная. Говоря о кинетической энергии, необходимо предварительно выбрать систему отсчета.

Кинетическая энергия системы тел представляет собой сумму кинетических энергий всех тел этой системы:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i. \quad (54)$$

Изменение кинетической энергии системы складывается из изменений кинетической энергии ее тел:

$$dT = d \sum_{i=1}^n T_i \stackrel{16-31}{=} \sum_{i=1}^n dT_i.$$

Изменение кинетической энергии тела складывается из изменений кинетических энергий его материальных точек.

Рассмотрим изменение кинетической энергии одной материальной точки массой m . Пусть в какой-нибудь момент времени она движется со скоростью v и испытывает действие сил, равнодействующая которых F . Элементарная работа всех сил, действующих на выбранную точку, равна

$$\begin{aligned} dA = (F \, dl) &\stackrel{14}{=} \left(\frac{dp}{dt} \, dl \right) = \left(dp \frac{dl}{dt} \right) \stackrel{1}{=} (dp \, v) = v \, d(mv) \stackrel{15-31}{=} mv \, (dv_t + dv_n) = \\ &= m \, (v \, dv_t) + m \, (v \, dv_n) \stackrel{15-31}{=} mv \, dv. \end{aligned}$$

Вынося массу m за знак дифференциала, мы считаем ее постоянной, что справедливо в классической механике, т. е. при скоростях, гораздо меньших скорости света ($v \ll c$).

Отметим, что сила, перпендикулярная скорости (и перемещению), не совершает работы и не изменяет модуля скорости. Отличную от нуля

работу совершает лишь тангенциальная составляющая силы, она изменяет модуль скорости.

Конечная работа всех сил, действующих на данную точку:

$$A \stackrel{51}{=} \int_1^2 (\mathbf{F} d\mathbf{l}) = \int_{v_1}^{v_2} m v dv \stackrel{44-45}{=} m \int_{v_1}^{v_2} v dv \stackrel{37-38}{=} \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} \stackrel{34-35}{=} \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Эта работа является мерой изменения кинетической энергии точки $T_2 - T_1$. Следовательно, в начале выбранного промежутка времени кинетическая энергия $T_1 = mv_1^2/2$, а в конце — $T_2 = mv_2^2/2$. Приходим к выводу, что материальная точка массой m , движущаяся со скоростью v , обладает кинетической энергией

$$T = mv^2/2. \quad (55)$$

Кинетическая энергия материальной точки в данной системе отсчета равна половине произведения ее массы на квадрат скорости.

Итак, мерой изменения кинетической энергии является работа тангенциальной силы, т. е. силы, вызывающей тангенциальное ускорение.

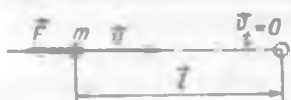


Рис. 77

В частности, если к материальной точке массой m , равномерно движущейся со скоростью v (рис. 77), приложена постоянная тормозящая сила F , то, равнозамедленно пройдя путь l , точка остановится. Изменение ее кинетической энергии равно работе тормозящей силы:

$$T_2 - T_1 = -Fl.$$

После остановки $T_2 = 0$. Значит, $-T_1 = -Fl$. Но $-F \stackrel{39}{=} ma$ и $l \stackrel{39}{=} -v^2/(2a)$. Следовательно,

$$-T_1 = ma \left(-\frac{v^2}{2a} \right) = -\frac{mv^2}{2},$$

что согласуется с формулой (55).

Кинетическая энергия всей системы равна сумме кинетических энергий ее материальных точек:

$$T \stackrel{54}{=} \sum_{i=1}^n T_i \stackrel{55}{=} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2},$$

где m_i — масса; v_i — скорость i -й материальной точки; n — число материальных точек, на которые разбиты все тела данной системы.

По этой формуле можно рассчитать кинетическую энергию поступательного движения абсолютно твердого тела массой m , движущегося со скоростью v (так как все k его материальных точек движутся в данный момент времени с одинаковыми скоростями):

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum_{i=1}^k m_i = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела может быть найдена по формуле

$$T_{\text{вр}} \stackrel{55}{=} \lim_{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} \stackrel{32-M, 21}{=} \int_m \frac{dm \omega^2 R^2}{2} \stackrel{44-M}{=} \frac{\omega^2}{2} \int_m R^2 dm \stackrel{48}{=} \frac{J \omega^2}{2}. \quad (56)$$

Изменение кинетической энергии материальной точки

$$dT \stackrel{55}{=} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \stackrel{15-M}{=} \frac{m}{2} d(v^2) \stackrel{17-M}{=} \frac{m}{2} (v dv + dv v) = mv dv$$

равно работе всех сил, действующих на эту точку: $dT = dA$. Это справедливо и для тела, движущегося поступательно. Конечно, величины, входящие в это уравнение, имеют алгебраический смысл: положительная работа dA приводит к увеличению кинетической энергии тела ($dT > 0$); отрицательная работа dA приводит к уменьшению кинетической энергии ($dT < 0$). Положительная работа связана с положительным ускорением, т. е. с увеличением скорости и тем самым кинетической энергии.

Значит, работа силы, вызывающей ускоренное движение тела, приводит к увеличению его кинетической энергии.

Если проекция действующей силы на направление скорости равна нулю (равномерное движение), то ее работа и изменение кинетической энергии равны нулю, кинетическая энергия тела не изменяется. В частности, неизменна кинетическая энергия равномерно движущейся по окружности материальной точки, равномерно вращающегося тела.

Уравнения такого вида можно написать для каждой материальной точки системы. Сложив почленно эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^n dT_i \stackrel{16-M}{=} d \sum_{i=1}^n T_i \stackrel{56}{=} dT = \sum_{i=1}^n dA_i.$$

Обозначим суммарную работу всех сил, действующих на все тела системы, dA . Тогда

$$dT = dA. \quad (57)$$

Изменение кинетической энергии системы тел равно суммарной работе всевозможных сил, действующих на все тела этой системы.

Потенциальная* энергия — это энергия, которой система тел обладает благодаря их взаимному расположению (конфигурации системы). Лишено физического смысла понятие «потенциальная энергия одного тела» (если, конечно, не говорят о деформированном теле, но и тогда имеется в виду энергия взаимного расположения частей тела, которые здесь выступают как отдельные тела). Говоря об энергии поднятого над Землей камня, имеют в виду энергию системы камень — Земля и т. д.**

Практически недостижима такая конфигурация сколько-нибудь сложной системы, при которой ее потенциальная энергия обратилась бы в нуль.

* potentia (лат.) — возможность.

** В частности, фраза «энергия тела в некотором поле» тоже означает энергию системы.

Но при различных процессах нас интересует не сама потенциальная энергия, а ее изменение, которое не зависит от начального уровня отсчета энергии. Поэтому в качестве нулевого выбирают произвольный уровень энергии.

Неправильно называть потенциальной энергией неподвижных тел (еще хуже — неподвижного тела). Например, потенциальные энергии двух систем камень — Земля (рис. 78) одинаковы, так как одинаковы конфигурации систем, несмотря на то, что первый камень покоится относительно Земли, а второй — движется.

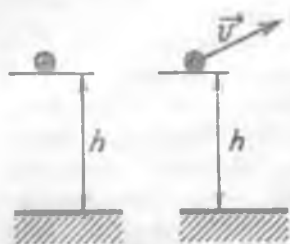


Рис. 78

При изменении конфигурации системы изменяется ее потенциальная энергия и совершается работа. Какие силы совершают эту работу? Определенному изменению конфигурации системы соответствует совершенно определенное изменение ее потенциальной энергии.

Изменение конфигурации системы связано только с состояниями системы в начале и в конце процесса, оно не зависит от промежуточных конфигураций, через которые проходила система. Следовательно, изменение потенциальной энергии системы не зависит от промежуточных состояний.

В то же время только консервативные силы системы совершают определенную работу, которая не зависит от промежуточных состояний системы. Таким образом, изменение потенциальной энергии системы связано с работой только консервативных сил этой системы, так как лишь такие силы однозначно связаны с ее конфигурацией.

Если камень падает в гравитационном поле Земли, то консервативные силы системы камень — Земля совершают положительную работу. Конфигурация системы при этом изменяется так, что ее потенциальная энергия уменьшается. Вообще, изменение потенциальной энергии системы равно работе ее консервативных сил (внутренних по отношению к системе), взятой с обратным знаком:

$$dW = -dA_{\text{к}}. \quad (58)$$

Например, изменение потенциальной энергии системы тело — Земля равно работе силы тяжести, взятой с обратным знаком:

$$W_2 - W_1 = \Delta W_{\text{тяж}}^{\text{ЗЗ}} P(h_2 - h_1) = mg(h_2 - h_1).$$

Приняв за нуль потенциальную энергию системы при $h_1 = 0$ и обозначив $W_2 = W$ и $h_2 = h$, получим

$$W = mgh. \quad (59)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины

$$W_{\text{пруж}}^{\text{ЗЗ}} = kx^2/2.$$

Аналогично, изменение потенциальной энергии системы звезда (планета) — тело при переносе тела из точки 1 в точку 2 (см. рис. 76, а):

$$W_2 - W_1 \stackrel{\text{ЗЗ}}{=} Gmm_0 (1/R_1 - 1/R_2).$$

Примем за нуль потенциальную энергию системы, когда тело бесконечно удалено ($R_2 \rightarrow \infty$, $W_2 \rightarrow 0$). Тогда потенциальная энергия системы подчиняется соотношению $-W_1 = Gmm_0/R_1$ или

$$W = -Gmm_0/R,$$

где $W_1 = W$ — потенциальная энергия системы звезда (планета) — тело, когда тело массой m находится на расстоянии $R_1 = R$ от центра звезды (планеты) массой m_0 . Отрицательная потенциальная энергия получилась из-за выбора максимальной энергии в качестве нулевой.

§ 3.3. Закон сохранения и превращения энергии

«Движение, ... как форма существования материи, неуничтожимо, как и сама материя»*. Следовательно, в произвольных процессах должна сохраняться характеристика движения — энергия.

Таким образом, важнейший закон природы, открытый в результате обобщения тысячелетней человеческой деятельности, многократно подтвержденный экспериментально — закон сохранения и превращения энергии, непосредственно связан с движением материи.

Рассмотрим систему, состоящую из n тел (материальных точек). Она обладает кинетической и потенциальной энергиями, сумму которых называют *полной энергией*:

$$E = T + W.$$

Изменяются энергии в процессе совершения работы. Среди сил, действующих на тела системы, мы различали внутренние и внешние, консервативные и неконсервативные.

Изменение кинетической энергии системы равно суммарной работе всех сил, действующих на ее тела, — внешних и внутренних, консервативных и неконсервативных:

$$dT = dA.$$

Изменение потенциальной энергии системы равно взятой с обратным знаком работе внутренних консервативных сил:

$$dW = -dA_{\text{вн.}}$$

Сложим почленно последние два уравнения:

$$dT + dW = dA - dA_{\text{вн.}} = dA_1,$$

где dA_1 — суммарная работа всех внешних (консервативных и неконсервативных) и внутренних неконсервативных сил. Иначе $d(T + W) = dA_1$ или

$$dE = dA_1. \quad (60)$$

Мы получили важнейший вывод: в произвольной системе тел изменение полной энергии равно работе всех внешних и внутренних неконсервативных сил.

* Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд., т. 20, с. 561.

Ограничим круг рассматриваемых систем. Назовем *изолированной* систему тел, на которые не действуют внешние силы; *консервативной* — систему, в которой действуют только консервативные силы. Для изолированной консервативной системы $dE^{60} = dA_1 = 0$ и

$$E = W + T = \text{const.} \quad (91)$$

Это закон сохранения энергии в механике: *полная энергия изолированной консервативной системы — величина постоянная.*

Например, полная энергия системы камень — Земля при свободном падении камня, когда он находится на высоте h (рис. 79):

$$E = mgh + mv^2/2 \stackrel{14}{=} mgh + (m/2)2g(H - h) = mgH = \text{const.},$$

т. е. не зависит от времени. По мере уменьшения высоты уменьшается потенциальная энергия и соответственно увеличивается кинетическая.

Еще пример: надо определить *вторую космическую скорость* — скорость, с которой надо запустить тело, чтобы оно удалилось от планеты в бесконечность: $W + T \stackrel{11}{=} 0$ (по условию, в бесконечности скорость равна нулю и потенциальная энергия системы — тоже). Иначе — $Gm m_0/R + mv_{\infty}^2/2 = 0$, откуда

$$\text{Для Земли} \quad v_{\infty 2} = \sqrt{2Gm_0/R}.$$

$$v_{\infty 2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}}{64 \cdot 10^3 \text{ с}^2 \cdot \text{кг}^2 \cdot \text{м}}} = 11,2 \text{ км/с.}$$

Общая формулировка закона сохранения и превращения энергии: *энергия не создается и не исчезает, а лишь передается от одного тела к другому или превращается из одной формы в другую в равных количествах.*

Например, если тело неупруго ударилось о Землю и остановилось (рис. 79), то его полная энергия mgH перешла в другой вид:

$$mgH \stackrel{60}{=} \Delta A_1,$$

где ΔA_1 — работа внутренних (по отношению к системе Земля — тело) неконсервативных неупругих сил. Эта работа является мерой энергии, перешедшей из механической во внутреннюю (см. разд. II, § 1.1).

Аналогично, при установившемся падении тела с постоянной скоростью в воздухе потенциальная энергия уменьшается, кинетическая неизменна:

$$mg \Delta H \stackrel{60}{=} \Delta A_1,$$

где ΔA_1 — работа внутренних (по отношению к системе Земля — воздух — тело) неконсервативных сил сопротивления. И в этом процессе механическая энергия (потенциальная) переходит во внутреннюю. На примерах работы внешних сил мы не останавливаемся.

При решении механических задач по законам сохранения можно не рассматривать промежуточные состояния системы, а сразу сравнить начальное и конечное состояния. Поэтому при решении задачи полезно выяснить, нельзя ли применить законы сохранения — это облегчит и ускорит решение.

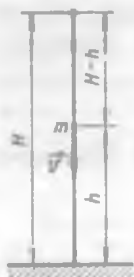


Рис. 79

Рассмотрим идеализированные удары — кратковременные взаимодействия тел.

Абсолютно упругий центральный удар двух тел. Заданы массы m_1 , m_2 и скорости v_1 , v_2 этих тел, направленные по линии их центров. После удара тела получают скорости u_1 и u_2 , направленные вдоль той же линии. По закону сохранения импульса

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

По закону сохранения энергии

$$m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 = m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными решается сравнительно несложно. Ту же задачу решить по законам динамики достаточно трудно, так как под действием изменяющихся сил тела получают переменные ускорения.

Абсолютно неупругий центральный удар. После такого удара тела слипаются и движутся вместе, так как нет сил, восстанавливающих форму тел и, следовательно, их расталкивающих. Новую общую скорость u можно найти по закону сохранения импульса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u.$$

Динамически эту задачу решить чрезвычайно трудно. При таком ударе часть механической энергии переходит во внутреннюю; по закону сохранения и превращения энергии можно узнать эти потери:

$$\Delta E = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 - (m_1 + m_2) u^2 / 2.$$

§ 3.4. Простые механизмы

Простыми механизмами называются устройства, позволяющие совершать работу без применения источников немеханической энергии. С их помощью удается изменить модуль или направление силы, совершающей работу. К простым механизмам относятся наклонная плоскость, клин, рычаг, блоки, ворот, различные комбинации блоков, винт, гидравлический пресс (см. § 4.1) и т. д.

Рассмотрим несколько примеров работы простых механизмов.

Рычаг — тело, имеющее ось вращения, к которому приложены силы, поворачивающие его в разные стороны. Например, рычажные весы представляют собой *рычаг первого рода* (точки приложения сил расположены по разные стороны от точки опоры). В технике применяются как *равноплечие* ($l_1 = l_2$; рис. 80, а), так и *разноплечие* весы. В последнем случае должно быть известно отношение l_1 / l_2 .

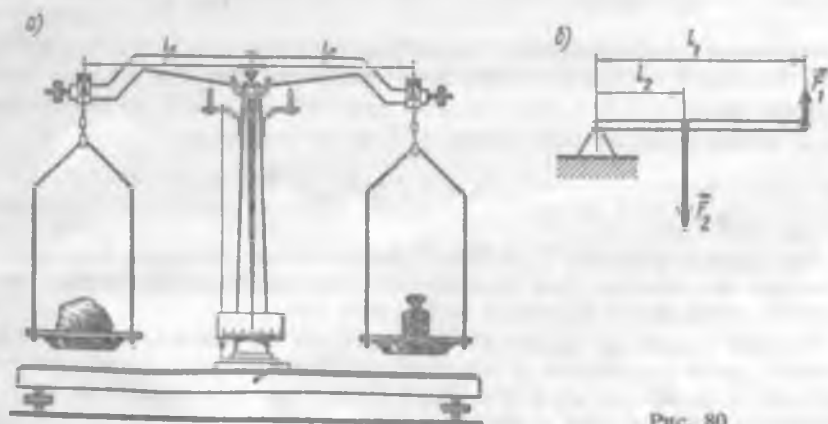


Рис. 80

На рис. 80,б схематически изображен рычаг второго рода (точки приложения сил расположены по одну сторону от точки опоры). Условие равновесия любого рычага

$$F_1 l_1 - F_2 l_2 \stackrel{80}{=} 0,$$

откуда

$$F_1/F_2 = l_2/l_1.$$

При равновесии рычага силы обратно пропорциональны его плечам.

Рассмотрим работу рычага первого рода (рис. 81). При равномерном повороте на угол α работа, совершенная силой F_1 :

$$A_1 \stackrel{81}{=} -F_1 h_1.$$

Аналогично

$$A_2 \stackrel{81}{=} F_2 h_2.$$

Можно сумму этих работ приравнять нулю на основании закона сохранения энергии (кинетическая энергия не изменилась, потенциальная энергия данной системы не определялась). Но можно непосредственно сравнить модули этих работ, применив условие равновесия рычага:

$$A_1/A_2 = F_1 h_1/(F_2 h_2) = l_2 h_1/(l_1 h_2) = 1,$$

так как из подобия треугольников (рис. 81)

$$h_1/h_2 = l_1/l_2.$$

Рычаг второго рода работает так же.

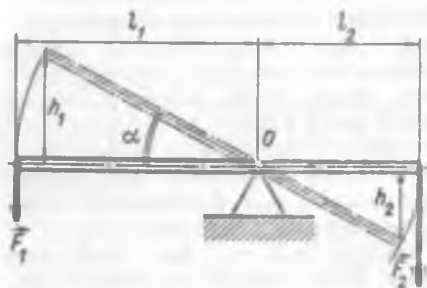


Рис. 81

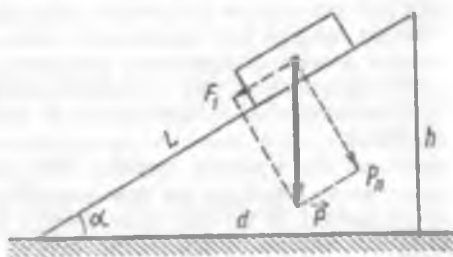


Рис. 82

Наклонная плоскость (рис. 82). Чтобы поднимать равномерно (без трения) груз вдоль наклонной плоскости, к нему надо приложить силу $F = -F_1$. Ее работа (без учета знака) $A_1 \stackrel{81}{=} F_1 L$. При поднятии груза без наклонной плоскости совершается работа (тоже без учета знака) $A_2 \stackrel{81}{=} Ph$. Их отношение

$$A_1/A_2 = F_1 L/(Ph) = 1$$

(так как $F_1/P = h/L$).

Неподвижный блок (рис. 83, а). Блок — обычно колесо с желобом, через которое перекинута нить (веревка, трос). *Неподвижным* называют блок, ось которого неподвижна (сам блок может вращаться вокруг этой оси).

Условие равновесия блока: $Pr \stackrel{80}{=} Fr$ приводит к равенству $P = F$. Следовательно, для подъема груза с помощью неподвижного блока надо приложить такую же силу, как и без блока. Такой блок не дает выигрыша в силе, он применяется для изменения ее направления.

Работа силы натяжения $A_1 = FL$ (L — длина, равная высоте подъема h груза). Работа поднятия груза $A_2 = Ph$. Условие равномерного подъема аналогично условию равновесия $Pr = Fr$. Отсюда

$$A_1/A_2 = FL/(Ph) = 1.$$

Подвижный блок (рис. 83, б). Ось такого блока может перемещаться, к ней обычно прикрепляется груз или прикладывается сила. Для того чтобы понять применение этого блока, предварительно ответим на вопрос: вокруг какой оси вращается колесо велосипеда, катящееся по дороге (рис. 84)? Первый несобдуманный ответ на этот вопрос: вокруг оси колеса. Это типичная точка зрения велосипедиста, иначе говоря, это правильный ответ в подвижной системе отсчета, связанной с велосипедом. Для неподвижного же наблюдателя, связанного с Землей,

неподвижной (в данный момент времени) является нижняя точка колеса, через нее перпендикулярно плоскости рисунка проходит мгновенная ось, вокруг которой в данный момент вращается колесо вместе со всеми изображенными на рисунке хордами. Если вы еще сомневаетесь, представьте себе ко-

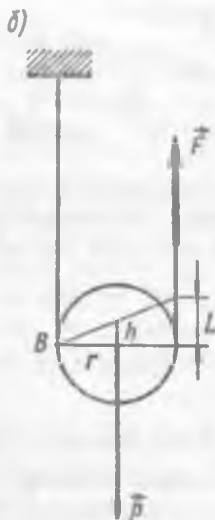
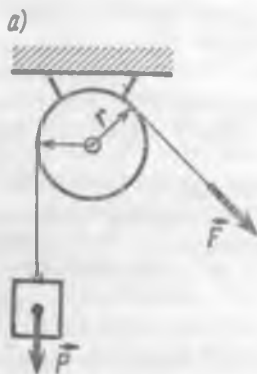


Рис. 83

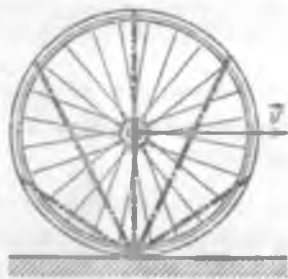


Рис. 84

лесо, снабженное шипами, оставляющими на дороге характерные вмятины, а не борозды. Значит, нижний шип колеса в момент соприкосновения с дорогой неподвижен.

Теперь вернемся к подвижному блоку. Он поднимается вверх по неподвижной веревке, следовательно, мгновенная ось проходит через точку B . Условие равновесия блока: $Pr = F \cdot 2r$, откуда

$$F = P/2.$$

При подъеме груза таким блоком мы получаем выигрыш в силе — поднимаем груз вдвое меньшей силой. При этом $A_1 = FL$, $A_2 = Ph$, тогда

$$A_1/A_2 = FL/(Ph).$$

Из подобия треугольников $L/h = 2r/r$. Следовательно,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1.$$

На этих примерах мы убедились в правильности экспериментального «золотого правила» механики: с помощью простого механизма нельзя получить

выигрыш в работе (другими словами: во сколько раз выигрываем в силе, во столько раз проигрываем в расстоянии). Должно быть ясно, что это правило вытекает из закона сохранения энергии.

Во всех рассмотренных примерах отсутствовали силы сопротивления. На самом деле приходится совершать работу по преодолению неизбежных сопротивлений, т. е. совершать работу больше полезной. Для учета этой разницы вводят коэффициент полезного действия — число, которое показывает, какую часть совершенной работы A составляет полезная работа A_1 :

$$\eta = A_1/A. \quad (62)$$

Заметим, что крупное механизированное производство не только производительнее мелкого, но и выгоднее, так как имеет более высокий к. п. д. Очень простой пример: нужно поднять на 12-й этаж строящегося дома тонну кирпичей. Это можно сделать вручную или подъемным краном. Кран совершит меньшую, чем грузчики, работу (при той же полезной). И, конечно, быстрее.

Быстрота совершения работы описывается мощностью.

Мощность — физическая величина, измеряемая отношением работы к промежутку времени, в течение которого она совершалась:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \quad (63)$$

Средняя мощность за какое-то время t , в течение которого совершена работа A :

$$\langle N \rangle = A/t.$$

В частности, при движении с сопротивлением совершается работа по преодолению этого сопротивления. Развиваемая при этом мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{(F dl)}{dt} = (Fv),$$

где v — мгновенная скорость.

Мощность, развиваемую постоянной силой, можно подсчитать, пользуясь определением средней скорости (см. § 1.3):

$$N = A/t = Fl/t = F \langle v \rangle.$$

Единицу мощности (ватт — Вт) установим на основании формулы (63).

Один ватт — мощность, при которой за 1 с совершается работа 1 Дж:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ с}.$$

Пользуясь определением ватта, вводят единицу работы $1 \text{ Вт} \cdot \text{с} = 1 \text{ Дж}$ и ее производные: $1 \text{ гВт} \cdot \text{с}$, $1 \text{ кВт} \cdot \text{с}$; $1 \text{ гВт} \cdot \text{ч} = 3600 \text{ гВт} \cdot \text{с}$; $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 10^3 \cdot 3600 \text{ Вт} \cdot \text{с}$.

§ 4.1. Закон Паскаля

В гидростатике* изучаются условия равновесия практически несжимаемой жидкости, данная масса которой имеет определенный объем, но не имеет своей формы и принимает форму сосуда, в который налита. В аэростатике** изучаются условия равновесия газа.

До сих пор мы изучали свойства твердых тел. Перейдем к изучению механических свойств жидкостей и газов.

Одной из важнейших характеристик таких тел является давление. О природе давления в жидкости или газе мы будем говорить в следующем разделе. Там выяснится, что давление жидкости или газа — результат взаимодействия движущихся молекул со стенками сосуда (или с телом, погруженным в жидкость или газ). Пока же определим давление и рассмотрим, как оно изменяется в неподвижной жидкости (или газе).

Давлением называется величина, измеряемая отношением силы, действующей по нормали на некоторую поверхность, к площади этой поверхности (если по данной поверхности сила распределена равномерно). По определению, эта величина — скаляр.

Пусть на поверхность dS действует по нормали сила давления dF . Тогда давление равно

$$p = dF/dS, \quad (64)$$

откуда $dF = p dS$. Сила давления, действующая по нормали на конечную поверхность, равна $F = \int_S p dS$. В случае равномерного распределения да-

вления по такой поверхности $F \stackrel{44-M}{=} p \int_S dS \stackrel{37-M}{=} pS$, откуда давление равно

$$p = F/S.$$

По этой же формуле определяется среднее давление.

В СИ давление выражается в паскалях (Па).

Один паскаль — давление, производимое силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м²:

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/1 м}^2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 \cdot \text{м}^2.$$

Понятия давления и силы давления совершенно различны (даже по размерностям). Ганк массой 40 т может проехать по непроходимому для человека болоту — сила давления танка, конечно, больше, чем человека, а давление меньше. Булавка вдавливается в поверхность стола силой 10 Н (сила давления), площадь острия 0,001 мм². Давление булавки на стол

$$p = F/S = 10 \text{ Н/} 10^{-3} \text{ мм}^2 = 10^4 \text{ Н} \cdot 10^6/\text{м}^2 = 10^{10} \text{ Па}.$$

* hydor (греч.) — вода.

** aer (греч.) — воздух.

При соприкосновении жидкости и твердого тела на него действуют силы, перпендикулярные поверхности (иначе равновесие нарушилось бы; вообще в жидкости нет сил, препятствующих сдвигу, следовательно, нет тангенциальных сил — касательных к поверхности, поэтому нет трения покоя; см. § 2.4).

Допустим, что на жидкость действуют только поверхностные* силы. Практически это осуществляется, если жидкость находится в невесомости или под большим давлением, так что по сравнению с силой давления можно пренебречь весом жидкости (рис. 85). Выделим мысленно какой-то малый цилиндрический произвольно ориентированный объем жидкости. Он находится в равновесии, а это возможно только при выполнении условий (50). Силы, действующие на боковую поверхность, перпендикулярны оси цилиндра. Следовательно, вдоль его оси действуют только силы F_1 и F_2 , которые должны уравниваться:

$$F_1 + F_2 = 0, \text{ иначе } F_1 - F_2 = 0.$$

Отсюда

$$p_1 \Delta S = p_2 \Delta S \text{ и } p_1 = p_2.$$

Таким образом, давления во всех точках одинаковы, если на жидкость действуют только поверхностные силы.



Рис. 85

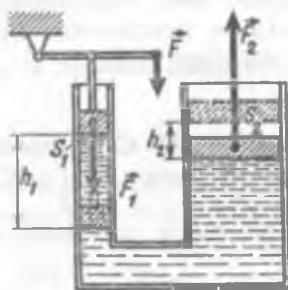


Рис. 86

Если, например, сила F (рис. 85) производит на жидкость внешнее воздействие, то давления p_1 и p_2 будут изменяться в зависимости от этой силы, но их равенство сохранится. Вообще, *жидкость (или газ) передает производимое на нее поверхностными силами внешнее давление по всем направлениям без изменения (закон Паскаля).*

Одно из применений этого закона — гидравлический пресс. Два сообщающихся** сосуда заполнены жидкостью (водой или маслом) и закрыты поршнями различной площади (рис. 86). По закону Паскаля, давления под поршнями одинаковы: $p_1 = p_2$. Пренебрегая малым давлением столба жидкости по сравнению

* Поверхностными называются силы, действующие на поверхность элемента тела. В случае равновесия жидкости или газа это силы давления.

** Сообщающимися называются сосуды, соединенные между собой так, что жидкость может перетекать из одного такого сосуда в остальные.

с внешними давлениями, имеем $F_1/S_1 = F_2/S_2$, откуда $F_2/F_1 = S_2/S_1$, т. е. сила давления второго поршня больше силы давления первого во столько раз, во сколько площадь второго поршня больше площади первого. Гидравлический пресс — простой механизм (см. § 3.4), позволяющий развивать колоссальные силы, используемые для прессования различных изделий из металлов и пластмасс.

Обозначим h_1 и h_2 — ходы поршней. Работы за один ход: $A_1 = F_1 h_1$, $A_2 = F_2 h_2$, их отношение

$$A_1/A_2 = F_1 h_1 / (F_2 h_2)$$

(без учета сопротивлений). Вследствие практической несжимаемости объемы жидкости, перешедшей из одного цилиндра в другой, одинаковы: $S_1 h_1 = S_2 h_2$. Отсюда $h_1/h_2 = S_2/S_1$. Следовательно,

$$A_1/A_2 = S_1 S_2 / (S_2 S_1) = 1.$$

Значит, и здесь справедливо «золотое правило» механики.

Рассмотрим равновесие однородной жидкости в поле сил тяжести. Мысленно снова выделим узкий цилиндрический объем l , расположенный горизонтально (рис. 87). Силы, действующие по горизонтали, должны уравниваться (равновесие):

$F_1 = F_2$. Отсюда

$$p_1 \Delta S = p_2 \Delta S \text{ и } p_1 = p_2$$

для любых двух точек, находящихся на одной горизонтальной поверхности. Условие равновесия цилиндра 2 (рис. 87) запишется несколько иначе $F_4 - P - F_3 = 0$. Значит,

$$p_4 \Delta S - p_3 \Delta S = P = mg = \rho g V,$$

где P, ρ, V — сила тяжести, плотность и объем выделенной жидкости. Получаем

$$p_4 - p_3 = \rho g \Delta S (h_4 - h_3) / \Delta S = \rho g \Delta h.$$

Таким образом, разность давлений для любых двух достаточно близких точек, находящихся на одной вертикали:

$$\Delta p = \rho g \Delta h.$$

Рассмотрим поверхность в виде сферы исчезающе малого радиуса r , находящуюся на глубине h (рис. 87; говорить о глубине h можно только при условии $r \ll h$). Жидкость, заключенная в этой сфере, находится в состоянии равновесия. Это значит, что силы, действующие по направлению любого диаметра, уравниваются, что возможно только при равенстве давлений. Строго говоря, давления на нижней полусфере больше давлений на верхней полусфере, но в пределе, когда $r \rightarrow 0$, разность давлений тоже стремится к нулю. Следовательно, давления в одной точке одинаковы независимо от направления. Иными словами, давление, производимое на заданной глубине на площадку, не зависит от ориентации площадки (конечно, это справедливо и для давления поверхностных сил, передающегося по закону Паскаля).

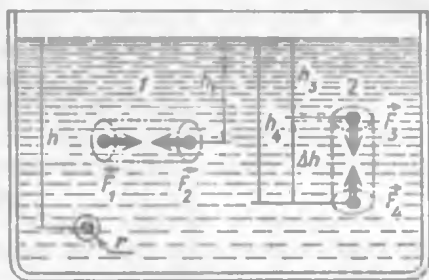


Рис. 87

Если рассмотреть любые две точки в жидкости, то их можно соединить одним или несколькими цилиндрами, расположенными горизонтально и вертикально. Для вертикальных цилиндров справедлива последняя формула, а давления на основаниях горизонтальных цилиндров одинаковы. Следовательно, разность давлений любых точек в глубине жидкости

$$\Delta p = \int_{h_1}^{h_2} \rho g dh. \quad (65)$$

В случае однородной жидкости (и малой разности глубин, чтобы g можно было считать неизменным)

$$\Delta p = \rho g \int_{h_1}^{h_2} dh \stackrel{65}{=} \rho g (h_2 - h_1).$$

Представим себе столб жидкости с единичным сечением S и заданной высотой $(h_2 - h_1)$. Его вес равен $\rho g (h_2 - h_1)S$. Значит, для любых двух точек в жидкости разность давлений численно равна весу столба жидкости с единичной площадью поперечного сечения и высотой, равной разности глубин этих точек. Давление в жидкости, обусловленное ее весом, называется *гидростатическим*. Естественно, на поверхности оно равно нулю (положим на рис. 87 $h_3 = 0$, тогда $F_3 = 0$); следовательно, на глубине h (если ρ и g постоянны)

$$p \stackrel{65}{=} \rho g h. \quad (66)$$

Опыт подтверждает наличие гидростатического давления в жидкости, находящейся в поле сил тяжести.

Опустим воронку, затянутую резиновой пленкой и соединенную с манометром*, в сосуд с какой-либо жидкостью (рис. 88). По мере погружения рези-

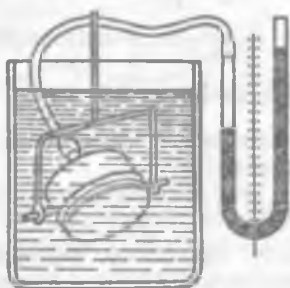


Рис. 88

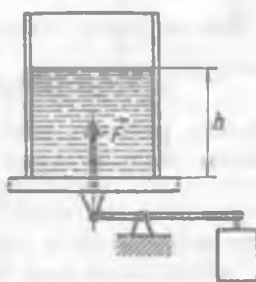


Рис. 89

новая пленка все более прогибается внутрь воронки и все большей становится разница уровней жидкости в коленях манометра. При изменении ориентации воронки на данной глубине и при движении воронки вдоль горизонтального

* manos (греч.) — редкий, неплотный. Манометр — прибор для измерения давлений. Устройство такого манометра должно быть ясным после изучения закона Паскаля. См. также закон сообщающихся сосудов в конце этого параграфа.

уровня показания манометра не меняются. Вывод: гидростатическое давление увеличивается с глубиной погружения и не зависит от направления на заданной глубине.

Рассмотрим давление жидкости на дно сосуда. Для этого используем прибор Паскаля — цилиндр, к которому дно прижимается некоторой силой F (рис. 89). Нальем в сосуд столько жидкости, чтобы ее вес отжал дно от сосуда; тогда излишек жидкости выльется. При определенном уровне h жидкости сила давления — вес жидкости — уравновесивается равновесом. Давление жидкости на дно сосуда (и, как мы доказали, давление по любому направлению в этой жидкости на глубине h)

$$p = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho g Sh}{S} = \rho gh,$$

где S — площадь дна сосуда; P и ρ — сила тяжести и плотность жидкости.

Давление на дно, как видно, соответствует формуле (66).

Изменим форму стенок сосуда, вернув в ту же обойму другие сосуды (дно и уравновешивающий груз те же, рис. 90). Сосуд A имеет больший объем, но дно будет отжато, и жидкость начнет выливаться при той же высоте столба жидкости (а не при том же количестве жидкости, ее в сосуде A гораздо больше). Большее количество жидкости производит на дно (и, следовательно, на любую поверхность на глубине h) такое же давление $p = \rho gh$, как меньшее количество жидкости в цилиндрическом сосуде (тонкими линиями показан объем сосуда, изображенного на рис. 89). Это можно объяснить тем, что сила тяжести любой частицы жидкости вне цилиндра, разложенная, как показано на рис. 90, действует на стенки, а не на дно сосуда.

Нальем жидкость в сосуд B , имеющий гораздо меньший объем. Дно будет отжато, т. е. давление на дно будет прежним при той же величине h (и при гораздо меньшем количестве жидкости, чем в цилиндрическом сосуде). Меньшее количество жидкости давит на дно с той же силой. Это можно объяснить,

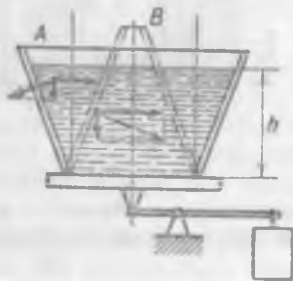


Рис. 90

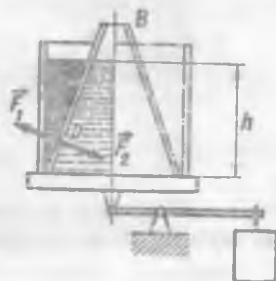


Рис. 91

только приняв во внимание действие стенок. Вспомним, что жидкость не имеет своей формы и растекается под действием сил тяжести. Стенки препятствуют этому растеканию нормальными (к стенке) силами. В случае цилиндра и сосуда A эти силы не имели составляющих, направленных вниз (поэтому мы их не упоминали). Теперь их можно разложить так, как показано на рис. 90. Вертикальная составляющая силы упругости стенки добавляется к весу жидкости в сосуде B .

Чтобы оценить добавочное воздействие, рассмотрим цилиндрический сосуд, заполненный жидкостью до уровня h (рис. 91). В каждой точке D стенки погру-

женного сосуда B испытывают действие уравновешивающихся сил F_1 изнутри и F_2 снаружи. Если удалить жидкость из заштрихованного объема, исчезнет сила F_2 , но останется равная ей сила F_1 , с которой жидкость изнутри действует на стенку сосуда B .

Следовательно, на всю стенку сосуда B действует в сторону заштрихованного объема такая же сила, как та, с которой действовала жидкость из этого объема до ее удаления. По третьему закону Ньютона, стенка действует на жидкость в сосуде B с такой же силой. Ее вертикальная составляющая добавляется к весу жидкости в сосуде B (см. рис. 90) и создает такую же суммарную силу давления на дно, как жидкость в цилиндрическом сосуде. Можно было вернуть в ту же обложку сосуда самой разнообразной формы, и во всех случаях дно было бы отжато при той же высоте h жидкости. Значит, всегда гидростатическое давление однородной жидкости выражается формулой (66).

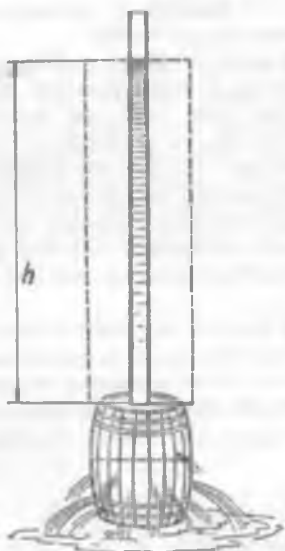


Рис. 92

Сам Паскаль нашел оригинальное доказательство своего закона. Опыт Паскаля состоит в том, что наливают воду в высокую трубку, вставленную в бочку, наполненную водой (рис. 92). Узкий высокий столбик воды действует на бочку с такой же силой давления, с которой действовала бы вода в объеме, ограниченном пунктиром, — бочка превращается в решето. Этот опыт наглядно доказы-

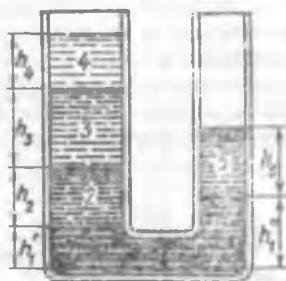


Рис. 93

вает, что действует не вес воды в трубке (который ничтожно мал по сравнению с весом воды не только в объеме, очерченном пунктиром, но и в бочке), а сила давления $F = pS$.

Еще один опыт: эбонитовая банка с водой служит мишенью для выстрелов из мелкокалиберной винтовки. Выстрел выше уровня воды, оставляет на банке два отверстия от пули — входное и выходное. Выстрел ниже уровня воды приводит к разрыву банки. Под пулей развивается достаточно большое давление, которое передается по закону Паскаля и вызывает соответствующее действие сил давления — банка разваливается на куски.

Мы доказали, что гидростатическое давление на глубине всегда выражается формулой (65) или, если жидкость однородна, (66).

Из закона Паскаля вытекает и закон сообщающихся сосудов: однородная жидкость устанавливается в сообщающихся сосудах так, что давления во всех точках, расположенных в одной горизонтальной плоскости, одинаковы:

$$p_1 = p_2 \quad (67)$$

где i и j — номера любых сообщающихся сосудов. Иными словами, однородная жидкость устанавливается в сообщающихся сосудах так же, как в одном; поверхность равных давлений горизонтальна. Допустим, что это не так. Тогда две точки, находящиеся на одном горизонтальном уровне и имеющие разное давление, можно соединить системой цилиндров, расположенных горизонтально и вертикально (как на рис. 87). Разность давлений сделает такую систему цилиндров неуравновешенной, и жидкость начнет перетекать (пока автоматически давления на одном уровне не сравняются).

Например, в сообщающиеся сосуды (рис. 93) налиты разные несмешивающиеся жидкости. Выберем любой общий уровень нижней жидкости и для него напишем закон $p_1 = p_j$ или

$$\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 + \rho_4 g h_4 + p_{\text{атм}} = \rho_1 g h_1' + \rho_5 g h_5 + p_{\text{атм}}.$$

В открытых сообщающихся сосудах атмосферное давление действует на оба столба жидкостей, поэтому его обычно не учитывают. Из написанного уравнения можно найти одну неизвестную величину, если остальные известны. В случае одной жидкости

$$\rho g h_1 = \rho g h_2 \text{ и } h_1 = h_2,$$

т. е. такая жидкость устанавливается на одном уровне. Часто именно последнее положение считают законом сообщающихся сосудов. Это ошибка, ибо даже однородная жидкость не всегда устанавливается на одном уровне (см. разд. II § 3.4).

§ 4.2. Закон Архимеда

На тело, погруженное в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила, существование которой открыл греческий ученый Архимед. Она объясняется тем, что нижняя часть тела испытывает действие большей силы давления, чем верхняя.

Пусть тело, погруженное в жидкость, имеет форму прямого цилиндра (рис. 94). Силы, действующие на боковую поверхность вдоль каждой горизонтали, уравниваются. Силы F_1 и F_2 отличаются друг от друга, они аналогичны силам F_3 и F_4 , действующим на цилиндр 2 (см. рис. 87). Эти силы можно сложить (но нельзя писать условие равновесия, так как цилиндр из другого вещества может быть неуравновешен). Действующую вверх разность указанных сил $F_1 - F_2 = p_1 \Delta S - p_2 \Delta S = \Delta S \Delta p = \Delta S \rho_1 g \Delta h = \rho_1 g \Delta V = P_1 = G_1 = F_{\text{Арх}}$ — архимедова сила, равная весу жидкости в объеме тела. Мы обозначили плотность, вес и силу тяжести жидкости буквами ρ_1 , G_1 и P_1 , чтобы не путать их с соответствующими характеристиками погруженного тела.

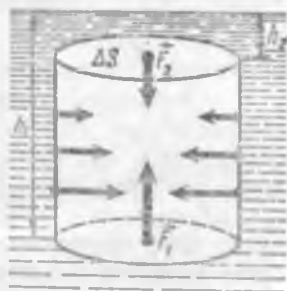


Рис. 94

Тело произвольной формы можно сколь угодно точно разбить на достаточно большое число цилиндров, к каждому из которых будет приложена такая же сила.

Понять существование архимедовой силы можно и иначе: выделим в жидкости некоторый объем (рис. 95, а). Эта жидкость покоится, значит, сумма сил давления, приложенных к выбранному объему со стороны окружающих слоев жидкости, равна и противоположна весу жидкости в данном объеме. Эта сумма сил давления и представляет собой архимедову силу.

Мысленно удалим жидкость из рассмотренного объема и вместо нее поместим твердое тело такой же формы (рис. 95, б).

Силы, действующие со стороны окружающих слоев, не изменятся, и их равнодействующая $F_{\text{Арх}}$ будет теперь действовать на тело. Она равна

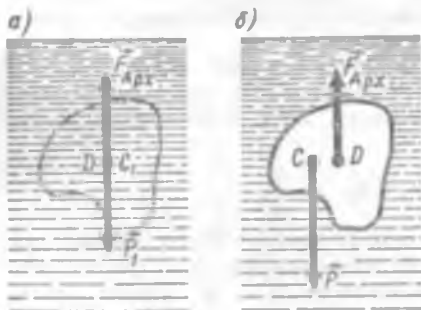
весу вытесненной жидкости, направлена вверх и приложена к центру масс вытесненной телом жидкости — центру давления D . Итак, по закону Архимеда, на тело, погруженное в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа) и приложенная к центру давления:

$$F_{\text{Арх}} = G_1 = P_1 = \rho_1 g V. \quad (68)$$

На тело, погруженное в жидкость, действуют сила тяжести P и архимедова сила. Их направления, вообще говоря, не совпадают. Но так как в жидкости нет трения покоя,

моменты этих сил заставят тело повернуться так, что обе указанные силы будут расположены вдоль одной вертикали. Их равнодействующая численно равна $F_{\text{Арх}} - P$ и называется *подъемной силой* (аналогичная сила действует и в газе).

Рис. 95



§ 4.3. Условия плавания тел

В зависимости от модуля и знака подъемной силы погруженное тело ведет себя по-разному. Возможны три качественно различных случая:

1. Архимедова сила больше силы тяжести тела, подъемная сила положительна, тело всплывает до поверхности и его верхняя часть поднимается над поверхностью жидкости (условия плавания на поверхности разберем ниже).

2. Архимедова сила равна силе тяжести тела, подъемная сила равна нулю. Это состояние безразличного равновесия, при котором тело может плавать на данной глубине бесконечно долго.

3. Архимедова сила меньше силы тяжести тела, подъемная сила отрицательна, тело тонет и опускается на дно, если глубина не очень велика. При погружении на очень большую глубину (океанские впадины, атмосфера Венеры и т. п.) может сказаться увеличение ускорения свободного падения и плотности жидкости или газа по мере погружения и связанное с ними возрастание силы Архимеда [см. (68)]. Погружение может прекратиться на глубине, для которой $\rho_1 g V = P$.

Рассмотрим условия плавания на поверхности жидкости. Пока цилиндр (см. рис. 94) всплывал, на него действовала сила Архимеда:

$$F_{\text{Арх}} = \rho_1 g \Delta S (h_1 - h_2).$$

Величины ΔS , ρ_1 , g постоянны; h_1 и h_2 уменьшаются, но их разность равна высоте тела и не меняется.

При $h_2 = 0$ верхняя кромка тела достигла поверхности, при этом $F_2 = 0$, $F_{\text{Арх}} = \rho_1 g \Delta S h_1$. Но всплытие продолжается, h_1 уменьшается, и начинает уменьшаться архимедова, а значит, и подъемная сила:

$$F_{\text{Арх}} - P = \rho_1 g \Delta S h_1 - P.$$

Когда она станет равна нулю, всплытие прекратится, и тело будет плавать на поверхности при условии $\rho_1 g \Delta S h_1 = P$. Иначе

$$\rho_1 g V_1 = P,$$

где $V_1 = \Delta S h_1$ — объем погруженной части тела (рис. 96). Следовательно, условие плавания тел на поверхности жидкости

$$F_{\text{Арх}} = \rho_1 g V_1 = P. \quad (69)$$

Устойчивость равновесия плавающих в жидкости предметов, в частности кораблей (надводных и подводных), зависит от соотношения сил тяжести и архимедовой, а также от взаимного расположения центров давления и тяжести. Уже на рис. 95 было видно, что центр тяжести C тела и центр давления D могут не совпадать. Для подводного корабля (вообще для тела, погруженного в жидкость) условием устойчивого равновесия является расположение центра тяжести ниже центра давления. Тогда равновесие наступит при их нахождении на одной вертикали, а момент сил, возникающий при отклонении от этого положения, будет возвращающим. При обратном расположении центров тяжести и давления на одной вертикали равновесие будет неустойчивым. При совпадении — равновесие безразличное. Такое равновесие аналогично равновесию тела, подвешенного за центр давления.

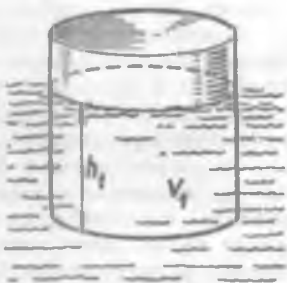


Рис. 96

Равновесие тела, плавающего на поверхности, тоже наступает, если центры тяжести и давления лежат на одной вертикали. Но условия устойчивости здесь изменяются, так как при отклонении от вертикали у тел (не шарообразной или цилиндрической формы) изменяется расположение центра давления. Если при этом он выше центра тяжести, то равновесие устойчиво (возникающий момент возвращает тело к положению равновесия). Если же центр давления ниже центра тяжести, то равновесие может быть устойчивым (рис. 97, а) или неустойчивым (рис. 97, б) в зависимости от того, как при отклонении смещается центр давлений. Здесь условием устойчивости равновесия является расположение метacentра M — точки пересечения вертикали, проведенной через центр давления, с плоскостью симметрии судна, — выше центра тяжести корабля. Если метациентр ниже центра тяжести, то равновесие неустойчиво.

Это равновесие тоже аналогично равновесию подвешенного тела, у которого роль точки подвеса играет метациентр. Соответственно устойчивость равновесия кораблей возрастает при увеличении расстояния между центром тяжести и центром

давления или метacentром. Поэтому центр тяжести корабля должен быть как можно ниже; тяжелые грузы убирают с палубы, порожние корабли загружают балластом. Тогда корабль меньше раскачивается и быстрее возвращается в положение равновесия.

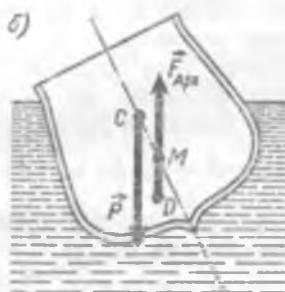
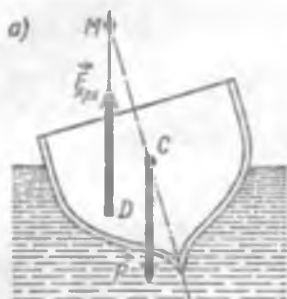


Рис. 97

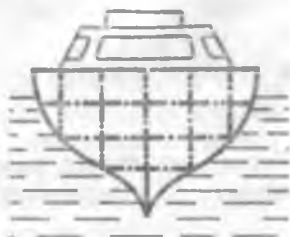


Рис. 98

На рис. 98 изображено поперечное сечение подпалубной части корабля, корпус которого разделен водонепроницаемыми переборками на отсеки. При получении пробоины в подводной части корабля затопится соответствующий отсек, и корабль не тонет. Но при этом у корабля появляется крен на поврежденный борт. Если повреждений несколько и все они по одному борту, то крен увеличивается, и корабль может опрокинуться.

Замечательный советский судостроитель академик А. Н. Крылов создал теорию непотопляемости корабля, по которой необходимо в случае получения пробоины в подводной части корабля затопить соответствующий отсек противоположного борта. Корабль глубже сядет в воду, но сохранит вертикальное положение и устойчивость. Эта теория находит применение и в настоящее время.

Подводная лодка в надводном положении подчиняется условиям плавания тел на поверхности жидкости. Под водой подъемная сила немного больше нуля, так что если лодка «потеряет ход», то она медленно всплывает. При движении ей не дают всплыть горизонтальные рули, которые чуть-чуть «переложены на погружение». И только в случае внезапного возникновения опасности подается команда «к экстренному погружению», и заполняется специальная цистерна экстренного погружения. Тогда сила тяжести лодки резко возрастает, становится больше архимедовой силы, и лодка идет на дно.

§ 4.4. Гидростатическое взвешивание

На погруженное в жидкость тело (см. § 4.3) действуют две силы — архимедова и тяжести. Равнодействующую этих сил можно измерить, уравнеся тело на весах. Взвешивание погруженного в жидкость тела называется *гидростатическим*. Пусть тело, которое тяжелее вытесненной им жидкости, уравновешено на гидростатических весах (рис. 99, а). На него действуют сила тяжести P и архимедова сила $F_{ар}$. Их равнодействующая $P_1 = P + F_{ар}$ уравновешивается равновесием и является силой тяжести тела в жидкости (при условии $P < F_{ар}$ надо подвесить тело на стержне и использовать рычаг второго рода; рис. 99, б).

С помощью гидростатического взвешивания можно определить плотность неизвестного твердого тела или жидкости. В первом случае взвешивают твердое тело в воздухе (обычно можно пренебречь архимедовой силой и считать, что

взвешивание происходит в вакууме³² и в жидкости с известной плотностью ρ_1 . По определению плотности, $\rho = m/V$. Объем находят из условия гидростатического взвешивания: $P_1 = P - \rho_1 g V$. Отсюда

$$\rho = \frac{P \rho_1 g}{g(P - P_1)} = \frac{\rho_1 P}{P - P_1}.$$

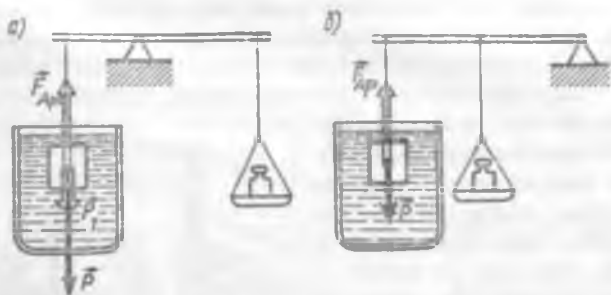


Рис. 99

Во втором случае взвешивают твердое тело в воздухе, в жидкости с известной плотностью ρ_1 и в жидкости с неизвестной плотностью ρ_2 . Условия гидростатического взвешивания

$$P_1 = P - \rho_1 g V \text{ и } P_2 = P - \rho_2 g V.$$

Из последних уравнений получим $\rho_1 g V = P - P_1$, $\rho_2 g V = P - P_2$

$$\rho_2 g V / (\rho_1 g V) = (P - P_2) / (P - P_1).$$

Искомая плотность

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{P - P_2}{P - P_1}.$$

§ 4.5. Атмосфера

Газ занимает любой предоставленный ему объем (в отличие от жидкости), поэтому никогда не образует свободной поверхности. Условия равновесия газа во многом сходны с соответствующими условиями для жидкости. Так, введенные выше понятия давления и силы давления сохраняют тот же смысл и для газа. Справедливы для газа законы Паскаля и Архимеда, условия плавания тел (не на поверхности, разумеется); разность значений аэростатического давления внутри газа соответствует формуле (65). Но есть и отличия. Например, для газа неизвестно, что принять за уровень $h = 0$. Свойства газов мы разберем подробно во втором разделе.

Большую роль в жизни на Земле играет смесь газов, окружающая Землю, — ее атмосфера. В частности, живя на дне воздушного океана, мы испытываем действие атмосферного давления. Так же как глубоководные рыбы не реагируют на колоссальное гидростатическое давление, человек не замечает внешнего атмосферного давления, ибо все его

органы находятся под тем же давлением изнутри. Поэтому ученые еще в первой половине XVII в. не подозревали о существовании атмосферного давления.

Но практика, как всегда, ставит вопросы, требующие ответа. Строились шахты, которые заливала вода. Воду надо было откачивать, изобрели насосы, принцип действия которых изображен на рис. 100. Поршень в цилиндре поднимается внешней силой. За ним поднимается вода, которая при обратном ходе поршня вытесняется в трубу. Почему вода поднимается за поршнем? В свое время ученые отвечали на этот вопрос достаточно остроумно и категорически: природа боится пустоты. Но шло время, шахты становились глубже, длиннее становились трубы насосов, и вдруг обнаружилось, что вода за поршнем поднимается не безгранично, «природа боится пустоты» лишь до высоты водяного столба примерно 10,34 м, затем вода за поршнем не идет!

В 1643 г. Торричелли проделал

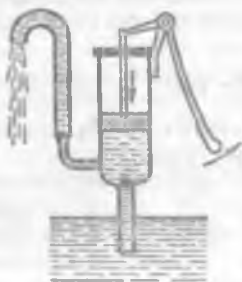


Рис. 100

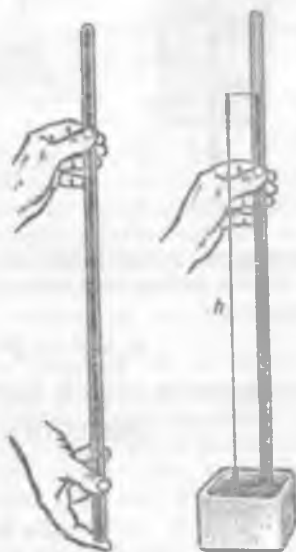


Рис. 101

опыт (рис. 101). Стекланную трубку, закрытую с одного конца, заполнили ртутью и опустили свободным концом в чашку со ртутью. Вылилась только часть ртути. Трубка и чашка представляют собой сообщающиеся сосуды. По закону сообщающихся сосудов [см. (67)], давления на одном уровне должны быть одинаковыми. На уровне ртути в чашке давление равно давлению ртутного столба высотой h и «торричеллиевой пустоты» * над ртутью в трубке. Это и есть атмосферное давление. Оно подвержено разнообразным изменениям, связанным с состоянием атмосферы, например с погодой.

Так как давление внутри жидкости зависит от ее рода и высоты столба жидкости, то появляется возможность измерять атмосферное (и всякое другое) давление в миллиметрах ртутного столба. В частности, нор-

* Это объем, заполненный насыщенным паром ртути (см. разд. II, § 5.4).

маленькое давление $p_0 = 760$ мм рт. ст. Чтобы выразить его в СИ, воспользуемся формулой (66):

$$\begin{aligned} 760 \text{ мм рт. ст.} &= 13,5951 \text{ г/см}^3 \cdot 9,80665 \text{ м/с}^2 \cdot 760 \text{ мм} = \\ &= 13,5951 \cdot 9,80665 \cdot 760 \frac{\text{кг} \cdot 10^6 \cdot \text{м}^2}{10^6 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^2} = 101\,325 \text{ Па} \end{aligned}$$

(напомним, что 760 мм рт. ст. задано точно, т.е. можно писать 760,000).

Опыт с магдебургскими полушариями Герике — один из первых прямых опытов, доказывающих существование атмосферного давления. Полушария, из которых выкачивался воздух, настолько сильно прижимались силой давления атмосферы друг к другу, что их не могли разорвать несколько пар лошадей (рис. 102).



Рис. 102

Опыт Торричелли может служить для измерения атмосферного давления $p_{\text{атм}} = \rho g h$, если пренебречь давлением «торричеллиевой пустоты».

Так устроен ртутный барометр. Теперь становится понятным, почему и до каких пор вода поднимается за поршнем. Ее поднимает атмосферное давление (ведь под поршнем нет воздуха).

Обозначим p , ρ_1 ; h , h_1 плотности и высоты столбов соответственно ртути и воды, уравновешивающих нормальное атмосферное давление:

$$p_{\text{атм}} = \rho g h \text{ и } p_{\text{атм}} = \rho_1 g h_1.$$

Приравняв правые части этих равенств, получим

$$h_1 = \frac{\rho h}{\rho_1} \approx \frac{13,6 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot 760 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot 1,00 \cdot 10^3 \text{ кг}} = 10,3 \text{ м}.$$

Какова была бы толщина атмосферы, если бы плотность воздуха не изменялась с высотой?

На законе Архимеда основано воздухоплавание в частности полет человека на аппаратах легче воздуха — аэростатах, стратостатах, дирижаблях.

Самостоятельный раздел техники представляет собой пневматика. Это совокупность технических устройств, работающих на сжатых газах. О развитии и перспективах этого раздела техники говорит хотя бы беглый перечень пневматических устройств: от шин, тормозов, отбойных молотков до струйных вычислительных машин.

§ 4.6. Измерение давления

Для измерения давления газа применяются технические манометры (рис. 103). Латунная трубка, профиль которой виден на рисунке, сгибается по окружности и присоединяется к сосуду, в котором измеряемое давление, например, больше атмосферного. На каждый квадратный сантиметр поверхности трубки действует избыточное давление, направленное изнутри. Но площадь наружной поверхности трубки больше ее внутренней поверхности. Поэтому суммарная сила давления отгибает концы трубки наружу, распрямляя трубку. Барабан со стрелкой соединен с концом трубки, а шкала проградуирована в единицах давления.



Рис. 103

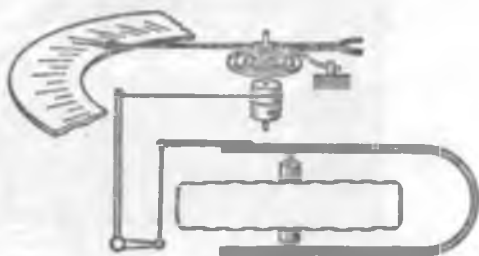


Рис. 104

Присоединим манометр к сосуду, в котором измеряемое давление меньше атмосферного. На каждый квадратный сантиметр поверхности теперь действует избыточное давление, направленное внутрь трубки. Но большая площадь наружной поверхности испытывает при этом большую силу давления, трубка сгибается внутрь, ее концы сближаются. Соответствующим образом проградуировав шкалу, получаем манометр для измерения указанных давлений.

Для измерения атмосферного давления применяются наряду с ртутными металлические барометры-анероиды* (рис. 104). Основная часть такого барометра — металлическая коробочка, из которой выкачан воздух. Под воздействием атмосферного давления она прогибается; стрелка, соединенная с коробочкой, поворачивается.

Если шкалу такого прибора проградуировать в метрах, то получится альтиметр** — прибор для измерения высоты по уменьшению атмосферного давления.

Измеряют давление и с помощью U-образного сосуда по разности уровней жидкости (см. рис. 88).

* *neros* (греч.) — влажный, *eidos* — вид, *a* — частица отрицания.

** *altus* (лат.) — высокий.

§ 5.1. Давление в движущейся среде

В гл. 4 мы рассматривали условия равновесия. Перейдем теперь к рассмотрению механических свойств движущейся жидкости (или газа). Если подкрасить движущуюся жидкость, струйки краски покажут траектории частиц жидкости — *линии тока*. Течение, в котором линии тока неподвижны, называется *стационарным*. Течение, в котором положение линий тока изменяется со временем, называется *вихревым*.

Измерение давления в движущейся жидкости (или газе) сопряжено с искажениями течения и, следовательно, с ошибками. Манометр, движущийся вместе с жидкостью (иными словами, неподвижный относительно ее частиц), показывает *статическое давление*. Покоящийся манометр, мембрана которого перпендикулярна скорости течения (частицы жидкости «набегают» на нее), измеряет *полное давление*. Практически трудно осуществить движение манометра, поэтому его делают неподвижным, но сводят к минимуму эффекты, связанные с остановкой частиц

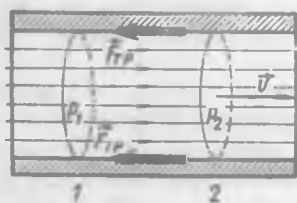


Рис. 105

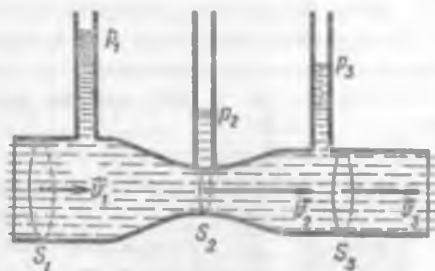


Рис. 106

движущейся жидкости. Обычно для этого узкую манометрическую трубку (зонд) с вырезанными сбоку отверстиями направляют закрытым «обтекаемым» концом навстречу течению. Иногда вместо зонда используют боковое отверстие в трубе, по которой течет жидкость, вставляя в него вертикальную манометрическую трубку. Высота столба жидкости в этой трубке позволяет приблизительно оценить разность статического и атмосферного давлений.

Теперь можно экспериментально оценить распределение давлений в трубе, по которой течет жидкость. Если по трубе равномерно протекает жидкость, то любой ее объем находится в условиях равновесия. В частности, разность сил давления, действующих на выделенный объем (рис. 105), равна сумме сил трения. Для этого давление p_1 должно превышать давление p_2 . При увеличении скорости течения увеличиваются силы вязкого трения, следовательно, возрастает разность давлений.

В достаточно широкой и короткой трубе одинаковых сечений при малой скорости течения силы трения пренебрежимо малы, и статическое давление можно считать одинаковым во всех точках. Но в трубе

переменных сечений (рис. 106) опыт обнаруживает различие статических давлений ($p_1 > p_3 > p_2$ при $S_1 > S_3 > S_2$). Это можно объяснить, если вспомнить, что жидкость практически несжимаема. За какой-то промежуток времени Δt через каждое сечение пройдут одинаковые массы жидкости, имеющие равные объемы (это верно и для сжимаемых газов, если течение установилось, т. е. нет накопления масс газа в каких-то точках, и не «вдувается» газ в трубу сбоку):

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = S_3 v_3 \Delta t.$$

Это уравнение неразрывности для установившегося течения. Из него находим, что скорости потока обратно пропорциональны его сечениям:

$$v_1/v_2 = S_2/S_1 \text{ и т. д.}$$

Но если есть изменение скорости при переходе от одной части трубы к другой, то должно быть у частиц ускорение, направленное в переходе 1–2 вперед, а в переходе 2–3 назад. Ускорение должно быть вызвано силой, которая может появиться только вследствие разности давлений.

Система линий тока, пересекающих какую-либо поверхность, образует *трубку тока* (выбранная поверхность — одно из сечений данной трубки тока). В стационарном течении нет перехода частиц жидкости из одной трубки в другую, и уравнение неразрывности справедливо не только для всей трубы, но и для любых двух сечений произвольной трубки тока.

Рассмотрим горизонтальный отрезок некоторой трубки тока при стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости. Идеальной назовем

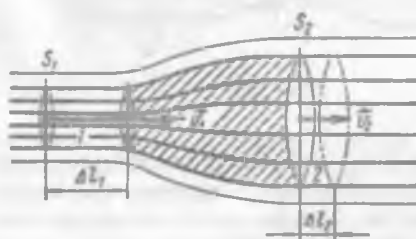


Рис. 107

жидкость, в которой отсутствуют силы трения. Между сечениями S_1 и S_2 этой трубки (рис. 107) содержится масса m жидкости.

Некоторая часть этой массы Δm , проходя через сечение S_1 трубки за промежуток времени Δt со скоростью v_1 , имеет кинетическую энергию $T_1 = \Delta m v_1^2/2$. Такая же масса Δm , проходя за то же время через сечение трубки S_2 со скоростью v_2 , имеет кинетическую энергию $T_2 = \Delta m v_2^2/2$.

Изменение кинетической энергии массы m жидкости равно разности кинетических энергий T_2 и T_1 , потому что кинетические энергии частиц из заштрихованного объема не изменились (некоторые частицы из этого объема ушли в объем 2, другие пришли из объема 1, но ни масса в заштрихованном объеме, ни скорости частиц в каждой его точке не изменились — стационарное течение). Изменение потенциальной энергии несжимаемой жидкости в горизонтальной трубке тока равно нулю. А полная энергия массы m жидкости могла измениться только в результате действия внешних по отношению к выбранному объему сил давления (трения нет).

Изменение полной или в данном случае кинетической энергии за промежуток времени Δt равно суммарной работе сил давления с двух сторон выбранного объема:

$$T_2 - T_1 \stackrel{60}{=} \Delta A_1$$

или

$$\begin{aligned} \Delta m v_2^2/2 - \Delta m v_1^2/2 &\stackrel{51}{=} \\ &= F_1 \Delta l_1 - F_2 \Delta l_2 \stackrel{64}{=} p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2. \end{aligned}$$

Используя определение плотности [см. (32)], получаем

$$\rho S_2 \Delta l_2 v_2^2/2 - \rho S_1 \Delta l_1 v_1^2/2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2.$$

Но из уравнения неразрывности следует, что объемы 1 и 2 жидкости, протекающей через разные сечения трубки тока за одинаковые промежутки времени, равны: $S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho v_2^2/2 - \rho v_1^2/2 &= p_1 - p_2 \text{ или} \\ \rho v_1^2/2 + p_1 &= \rho v_2^2/2 + p_2 = \text{const} \end{aligned} \quad (70)$$

— величина, одинаковая для любых сечений S_1 и S_2 , находящихся на одной высоте в произвольной трубке тока несжимаемой жидкости.

Мы получили уравнение Бернулли для несжимаемой идеальной жидкости. Там, где скорость течения возрастает (в местах сужения), давление должно уменьшаться.

Значит, $p_1 > p_2$ и $p_2 < p_3$ (см. рис. 106), что и подтверждается опытом.

Закон Бернулли: давление в движущейся жидкости тем меньше, чем больше ее скорость течения.

Закон Бернулли является важнейшим законом динамики движущихся жидкостей и газов. На нем основано всасывающее действие жидкости, которое можно продемонстрировать на установке, изображенной на рис. 108.

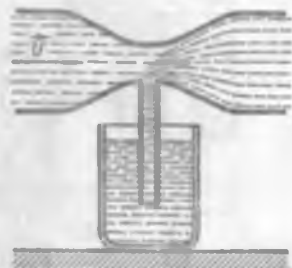


Рис. 108

Через горизонтальную трубку переменного сечения с некоторой скоростью прокачивается вода. Вертикальный отросток трубки опущен в стакан с подкрашенным раствором. В самом узком месте горизонтальной трубки, по закону Бернулли, наименьшее давление. Начнем увеличивать скорость течения воды по горизонтальной трубке. В узкой ее части давление будет уменьшаться и рано или поздно станет меньше атмосферного. Тогда, по закону сообщающихся сосудов, подкрашенный раствор начнет подниматься по вертикальному отростку и при достаточной скорости прокачиваемой воды достигнет горизонтальной трубки и будет смешиваться с водой. Это явление можно использовать для получения смесей определенного состава.

На этом же законе основано устройство пульверизатора (рис. 109), водоструйного насоса (рис. 110), диффузора D в двигателе внутреннего сгорания (рис. 111; P — поплавок, связанный с иглой H , регулирующей поступление бензина в поплавковую камеру карбюратора; 3 — дроссельная заслонка, регули-

рующая поступление горючей смеси в цилиндры). Объясните самостоятельно их работу.

Закон Бернулли позволяет объяснить, почему легкий шарик удерживается в струе фонтана. Пусть он отклонился от оси симметрии струи в какую-

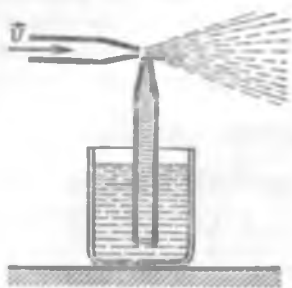


Рис. 109

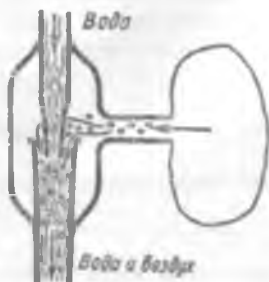


Рис. 110

либо сторону (рис. 112). Тогда скорость обтекания станет больше со стороны, обращенной к оси симметрии, т. е. к середине струи. Давление там будет меньше, и сила, появившаяся в результате разницы давлений и направленная в сторону меньшего давления, будет возвращать шарик к середине струи.

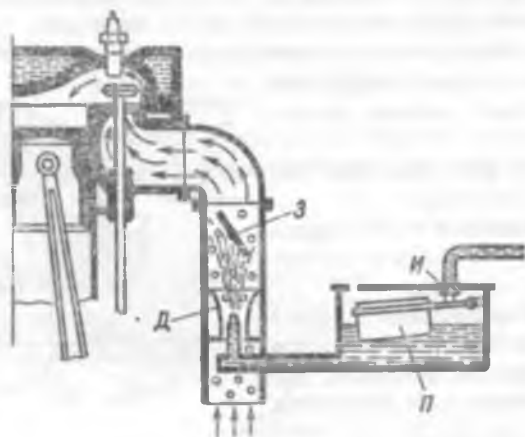


Рис. 111



Рис. 112

При движении тела в реальной жидкости или газе возникают силы сопротивления (см. I § 2.4). Даже при малых скоростях, когда обтекание тела можно считать стационарным, сопротивление создается благодаря силам *внутреннего трения*, возникающим между соприкасающимися слоями жидкости или газа и препятствующим их относительному движению.

При движении тела с большими скоростями в жидкости или газе возникают *вихри* (рис. 113) — нестационарные местные круговые движения частиц. Так как частицы не успевают «раступиться», то перед быстро движущимся телом создается уплотнение, а за ним — зона вихрей, где велика скорость движения частиц и, по закону Бернулли, мало давление.

Возникает разность давлений, тормозящая движение. Вот почему при увеличении скорости сопротивление возрастает нелинейно. Оно зависит от свойств среды, поперечных размеров тела и в сильнейшей степени от скорости движения и формы тела.

Движение тела в вязкой среде связано с изменением сил сопротивления. Так, дождевая капля, ускоренно падающая на Землю, испытывает все большую силу сопротивления, поэтому движется с уменьшающимся ускорением (уравнение движения $mg + F_c = ma$). При достаточно большой высоте падения устанавливается постоянная скорость и

$$mg - r v^{\frac{39}{2}} = 0.$$

Парашютист, совершающий затычный прыжок с самолета, тоже через некоторое время движется равномерно с установившейся скоростью $r_1 = mg/r_1$. Но стоит ему раскрыть парашют, коэффициент сил сопротивления резко возрастает, и тело получает ускорение, направленное вдоль силы сопротивления:

$$mg - r_2 v^{\frac{39}{2}} = ma.$$

Это ускорение приводит к уменьшению скорости и тем самым силы сопротивления. Уменьшение силы сопротивления в свою очередь вызывает уменьшение ускорения. Но пока ускорение отлично от нуля, скорость продолжает уменьшаться. Изменение скорости прекратится, когда ускорение станет равным нулю. При этом установится новая скорость

$$r_2 = mg/r_2.$$

Она во столько раз меньше скорости v_1 , во сколько раз коэффициент сил сопротивления с парашютом больше соответствующего коэффициента при движении без парашюта. Так, скорость установившегося движения становится безопасной для приземления.

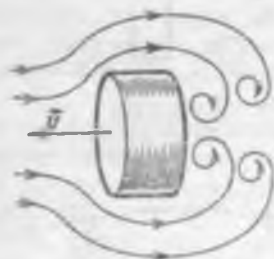


Рис. 113

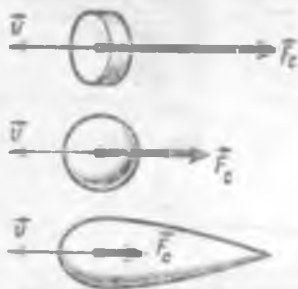


Рис. 114

Возьмем тела с одинаковыми поперечными сечениями и экспериментально исследуем зависимость силы сопротивления от формы тела. Естественно, что, скругляя переднюю часть, мы уменьшаем лобовое сопротивление. Но еще сильнее оно уменьшается при округлении и вытягивании части тела, за которой образуются вихри; при этом уменьшается мощность вихрей и, следовательно, разность давлений. На рис. 114 показаны для сравнения силы сопротивления в подобном

опыте. Современная обтекаемая форма уменьшает сопротивление при прочих равных условиях больше чем в два десятка раз.

Наименьшее сопротивление движению испытывают «обтекаемые» тела (рыбы, дельфины, самолеты).

По мере роста скорости тела увеличивается плотность среды перед ним; это уплотнение препятствует движению со скоростью звука; говорят, чтобы получить большие скорости, надо преодолеть звуковой барьер.

В момент прохождения звукового барьера образуется характерная ударная волна, появление которой связано с резким возрастанием сопротивления. Вот почему для движения при сверхзвуковых скоростях переднюю часть тела делают заостренной — так легче пробить звуковое уплотнение, хотя это и ухудшает обтекание при дозвуковых скоростях.

§ 5.2. Эффект Магнуса

Рассмотрим движение вращающегося тела, например цилиндра в газе (рис. 115). При движении цилиндр увлекает прилегающие слои газа, они тоже начинают вращаться. В верхней части рисунка линейная скорость этого вращения складывается с относительной скоростью набегающих частиц, в нижней — вычитается. Создается, таким образом, разность скоростей и, по закону Бернулли,

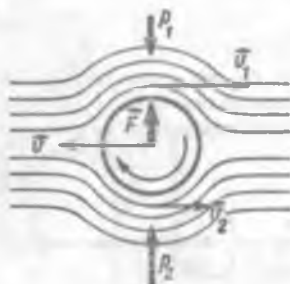


Рис. 115

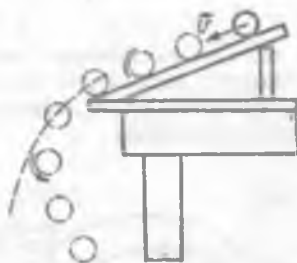


Рис. 116

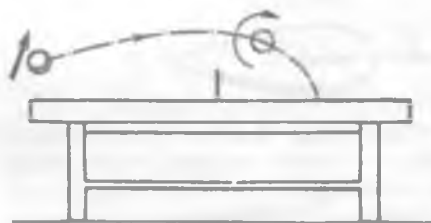


Рис. 117

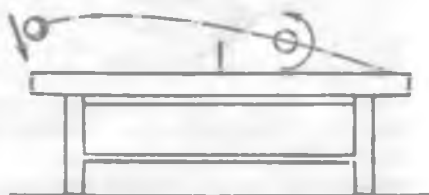


Рис. 118

разность давлений. Поэтому в поперечном направлении возникает сила F , действующая на вращающееся тело и направленная к области меньших давлений. В этом и состоит эффект Магнуса, обнаруживающийся при любом вращении тела в жидкости или газе.

Например: при движении вращающихся артиллерийских снарядов в воздухе их сносит в сторону; при падении в воздухе вращающегося цилиндра (опыт Жуковского; рис. 116) скорость относительного движения частиц справа от падающего цилиндра больше, чем слева, появляется разность давлений и сила, уводящая цилиндр с параболической пунктирной траектории; при крученых ударах в теннисе, футболе, волейболе мячи движутся по криволинейной траектории и т. д. Аналогичные силы действуют на шарик в настольном теннисе. При ударе ракетка резко идет вверх, закручивая шарик по направлению стрелки (рис. 117). Вследствие эффекта Магнуса траектория становится более крутой (если при ударе шарик летит за стол, то в следующий раз надо резче поднимать ракетку). Наоборот, подсекая мяч резким движением ракетки вниз, придают ему вращение по стрелке (рис. 118). Тогда дополнительная сила поднимает его и делает траекторию отлогой.

§ 5.3. Крыло

Всевозможные крылья имеют самые различные формы, но у всех крыльев одна кромка длиннее другой. Характерный профиль крыла показан на рис. 119. При обтекании верхней кромки, срываясь с крыла, частицы воздуха или воды образуют вихрь против часовой стрелки. Вихрь противоположного направления (по закону сохранения момента импульса, см. § 2.13) возникает вокруг крыла. Эта циркуляция вокруг крыла, по закону Бернулли, приводит к появлению силы F , вертикальная составляющая которой является *подъемной силой* крыла (не путать с подъемной силой в гидро- и аэростатике). Горизонтальная составляющая этой силы уравнивается силой тяги двигателя. Благодаря силам трения оба вихря должны были бы исчезнуть. Но на месте вихря, образовавшегося за крылом и унесенного воздушным потоком, возникает новый вихрь, вызывающий усиление циркуляции вокруг крыла.

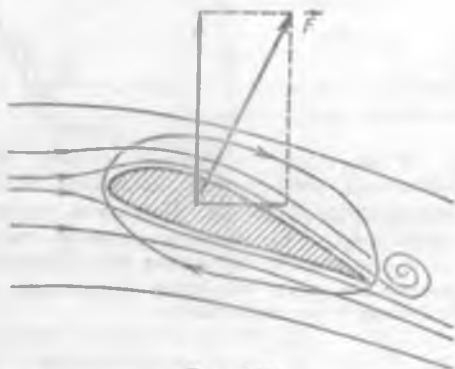


Рис. 119

При равномерном полете самолета такие вихри возникают и срываются с крыла почти регулярно, поэтому циркуляция вокруг крыла практически постоянна. Так же постоянна при этом подъемная сила. Такая же сила действует на подводные крылья корабля. При достижении расчетной скорости подъемная сила достаточна для уравнивания силы тяжести, и корпус корабля на подводных крыльях выходит из воды, что позволяет развить большую скорость. Естественно, вихри не будут возникать и не будет подъемной силы, если нет относительного движения крыла и среды. Аналогично работают тянущие и толкающие винты самолетов и кораблей, подъемный винт вертолета и т. д. При работе этих винтов еще большее значение имеет реакция струи — реактивный эффект отбрасывания назад определенной

массы воды или воздуха, который можно рассчитать по закону сохранения импульса.

Гидро- и аэродинамика в наши дни продолжают бурно развиваться. Новые проблемы возникают в связи со сверхзвуковыми скоростями движения, появлением самолетов с изменяющейся геометрией крыла и ко- раблей на воздушной подушке.

Самостоятельное значение имеет теория обтекания, в частности проблемы моделирования «кожи дельфина».

Движение... Старая мечта человечества. Человек все быстрее движется по Земле, плавает по воде, путешествует и живет под водой; летает по воздуху; овладевает космическим пространством; ступает по Луне; исследует планеты. Круг вопросов, которыми занимается древняя наука механика, непрерывно расширяется...

ЗАДАЧИ*

Задача 1.1. Стоя на ступеньке движущегося эскалатора метро, пассажир спускается за 1 мин, а по неподвижному эскалатору идет 40 с. Сколько времени займет спуск пассажира, идущего по движущемуся вниз эскалатору?

$$t_1 = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с},$$

$$t_2 = 40 \text{ с},$$

$$t = ?$$



$$v = l/t; \quad v = \sum_{i=1}^n v_i$$

Решение. Обдумывая условие, видим, что в задаче описаны два независимых равномерных движения. Поэтому справа от рисунка пишем соответствующие формулы. Перепишав вторую формулу в обозначениях нашей задачи: $v = v_1 + v_2$, находим искомое время, подставляем скорость результирующего движения в выражения для составляющих скоростей. После сокращения неизвестного пути получаем буквенный ответ задачи, в который подставляем величины с их единицами:

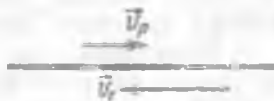
$$t = \frac{l}{v} = \frac{l}{l/t_1 + l/t_2} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{60 \text{ с} \cdot 40 \text{ с}}{100 \text{ с}} = 24 \text{ с}.$$

Задача 1.2. От одной пристани до другой вниз по реке теплоход идет 8 ч. Возвращается он (против течения) за 10 ч. Скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч. Определить расстояние между пристанями.

$$t_1 = 8 \text{ ч};$$

$$t_2 = 10 \text{ ч};$$

$$v_T = 18 \text{ км/ч}$$



$$v = \sum_{i=1}^n v_i; \quad v = l/t.$$

* Перед тем как приступить к решению задач, внимательно прочтите методические указания. Заставьте себя следовать установленному порядку, даже если задачи кажутся вам достаточно легкими. В дальнейшем такая «прищипка» пригодится.

Решение. По принципу суперпозиции скорость теплохода относительно берега алгебраически складывается из его скорости относительно воды и скорости течения реки относительно берега:

$$\begin{cases} v_T + v_P = l/t_1, \\ v_T - v_P = l/t_2. \end{cases}$$

Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными. Сложим эти уравнения почленно:

$$2v_T = l \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) = l \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}; \text{ отсюда}$$

$$l = \frac{2v_T t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot 18 \text{ км} \cdot 8 \text{ ч} \cdot 10 \text{ ч}}{4 \cdot 18 \text{ ч}} = 160 \text{ км}.$$

Могла быть поставлена задача отыскания скорости течения; тогда надо было бы уравнения системы почленно разделить.

Задача 1.3. Два поезда идут навстречу друг другу (по параллельным колесам) со скоростями v_1 и v_2 . Длина каждого вагона первого поезда l_1 , число вагонов n_1 ; второго — соответственно l_2 и n_2 . Сколько времени пассажиры в окне видят встречный поезд?

$$v_1; v_2;$$

$$l_1; n_1;$$

$$l_2; n_2;$$

$$t_1 - ? \quad t_2 - ?$$

$$v = \sum_{i=1}^n v_i; \quad v = l/t.$$

Решение. Удобно воспользоваться относительностью движения и принять «свою» систему отсчета за неподвижную. Тогда встречный поезд будет двигаться относительно наблюдателя со скоростью $v_1 + v_2$. Имеем:

$$v_1 + v_2 = n_1 l_1 / t_1; \quad v_1 + v_2 = n_2 l_2 / t_2,$$

где t_1 — время, в течение которого пассажир второго поезда видит первый; t_2 — время, в течение которого пассажир первого поезда видит второй. Следовательно,

$$t_1 = n_1 l_1 / (v_1 + v_2); \quad t_2 = n_2 l_2 / (v_1 + v_2).$$

Что изменится в ответе, если поезда идут в одну сторону?

Задача 1.4. Электропоезд отошел от станции с ускорением $0,2 \text{ м/с}^2$. Через 2 мин после начала движения он стал двигаться равномерно. Найти скорость равномерного движения и путь, пройденный поездом за 5 мин после отправления. Построить график скорости движения.

$$a = 0,2 \text{ м/с}^2;$$

$$t_2 = 2 \text{ мин} = 120 \text{ с};$$

$$t = 5 \text{ мин} = 300 \text{ с};$$

$$v - ? \quad l - ?$$

$$v_t \stackrel{12}{=} v_0 + at;$$

$$l \stackrel{13}{=} v_0 t + at^2/2; \quad l \stackrel{7}{=} vt.$$

Решение. В задаче есть скрытое данное: $v_0 = 0$. По общим формулам $v = at_1 = 0,2 \text{ м/с}^2 \cdot 120 \text{ с} = 24 \text{ м/с};$

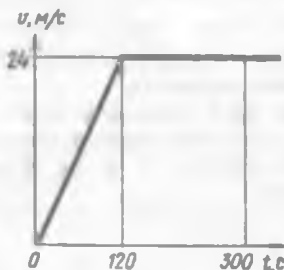
$$l = l_1 + l_2 = at_1^2/2 + v(t - t_1) = at_1^2/2 + at_1(t - t_1) = at_1(t - t_1/2) =$$

$$= 0,2 \text{ м/с}^2 \cdot 120 \text{ с} \cdot 240 \text{ с} = 5,76 \text{ км}.$$

Обратите внимание на то, что в буквенном ответе для пути нельзя оставить величину v , даже если она предварительно сосчитана, ибо эта величина не

дана в условии и не является табличной (нужно получить буквенный ответ и для l , потому что иначе возможная ошибка в вычислениях в автоматически влечет за собой ошибку в вычислении l).

Для построения графика удобно использовать миллиметровую бумагу. Строим оси координат v и t . Определяем наибольшую скорость, в данном случае — равномерного движения. Находим наибольшее время, в нашей задаче 5 мин. Выбираем удобный масштаб и откладываем наибольшие значения величин в противоположном относительно начала координат углу координатной плоскости. Это делается для того, чтобы вся площадь графика «работала», и в то же время точки не выходили за ее границы. Начальная скорость равна нулю. Откладываем на графике 2 мин и найденное значение скорости. Соединяем полученную точку с началом координат. Затем от этой точки проводим прямую, параллельную оси абсцисс.



Задача 1.5. Пуля вылетает из винтовки со скоростью 700 м/с, пролетает 2 км и со скоростью 670 м/с попадает в земляной вал, где застревает на глубине 0,5 м. Найти ускорения пули в воздухе и внутри вала, считая оба движения равнозамедленными.

$$\begin{aligned} v_0 &= 700 \text{ м/с}; \\ l &= 2 \text{ км} = 2000 \text{ м}; \\ v_1 &= 670 \text{ м/с}; \\ h &= 0,5 \text{ м}. \end{aligned} \quad v_1^2 - v_0^2 \stackrel{14}{=} 2al.$$

$$a_1 = ? \quad a_2 = ?$$

Решение. Ускорения находим по общей формуле

$$a_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2l} = \frac{(v_1 + v_0)(v_1 - v_0)}{2l} = \frac{-1370 \text{ м} \cdot 30 \text{ м}}{\text{с}^2 \cdot 2 \cdot 2000 \text{ м}} = -10,3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = \frac{0 - v_1^2}{2h} = -\frac{670^2 \text{ м}^2}{\text{с}^2 \cdot 2 \cdot 0,5 \text{ м}} = -4,49 \cdot 10^5 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1.6. Тело трогается с места и с ускорением 1 м/с^2 проходит расстояние 12,5 м; затем оно движется равномерно в течение 15 с; потом до остановки равнозамедленно проходит 20 м. Найти скорость и путь равномерного движения, время и ускорение замедленного движения. Построить график скорости тела.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \text{ м/с}^2; & v_1^2 - v_0^2 &\stackrel{14}{=} 2al; \\ l_1 &= 12,5 \text{ м}; & a &\stackrel{14}{=} (v_1 - v_0)/t; \quad l \stackrel{17}{=} vt. \\ t_2 &= 15 \text{ с}; \\ l_3 &= 20 \text{ м}. \end{aligned}$$

$$v_2 = ? \quad l_2 = ? \quad a_3 = ? \quad t_3 = ?$$

Решение. Разобьем путь движущегося тела на участки равноускоренного, равномерного и равнозамедленного движений. Конечная скорость на первом участке является скоростью движения на втором и начальной скоростью на третьем. Начальная скорость на первом участке и конечная — на третьем равны нулю. Применяя общие формулы к каждому участку, находим искомые величины:

$$v_2^2 = 2a_1 l_1; v_2 = \sqrt{2a_1 l_1} = \sqrt{2 \cdot 1 \text{ м/с}^2 \cdot 12,5 \text{ м}} = 5 \text{ м/с};$$

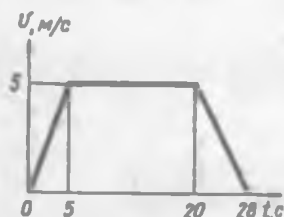
$$l_2 = v_2 t_2 = \sqrt{2a_1 l_1} t_2 = \sqrt{2 \cdot 1 \text{ м/с}^2 \cdot 12,5 \text{ м}} \cdot 15 \text{ с} = 75 \text{ м};$$

$$0 - v_2^2 = 2a_3 l_3; a_3 = -\frac{v_2^2}{2l_3} = -\frac{2a_1 l_1}{2l_3} = -\frac{a_1 l_1}{l_3} = -\frac{1 \text{ м} \cdot 12,5 \text{ м}}{\text{с}^2 \cdot 20 \text{ м}} = -0,625 \text{ м/с}^2;$$

$$t_3 = \frac{0 - v_2}{a_3} = \frac{\sqrt{2a_1 l_1}}{a_1 l_1} l_3 = \sqrt{\frac{2}{a_1 l_1}} l_3 = \sqrt{\frac{2 \text{ с}^2}{1 \text{ м} \cdot 12,5 \text{ м}}} \cdot 20 \text{ м} = 8 \text{ с}.$$

Для построения графика нужно еще найти время ускоренного движения;

$$t_1 = \frac{v_2}{a_1} = \frac{\sqrt{2a_1 l_1}}{a_1} = \sqrt{\frac{2l_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12,5 \text{ м} \cdot \text{с}^2}{1 \text{ м}}} = 5 \text{ с}.$$



Задача 1.7. Тело брошено вертикально вверх со скоростью 39,2 м/с. На какой высоте оно потеряет $\frac{2}{3}$ скорости? Через какое время тело упадет на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$v_0 = 39,2 \text{ м/с}; \quad v_1^2 - v_0^2 = 2al;$$

$$v_1 = \frac{1}{3} v_0; \quad a = \frac{v_1 - v_0}{t}.$$

$$h = ? \quad t = ?$$

Решение. При движении вертикально вверх ускорение $a = -g$ (см. рис. 21). Тогда

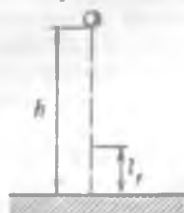
$$h = \frac{\frac{1}{9}v_0^2 - v_0^2}{-2g} = \frac{8v_0^2}{9 \cdot 2g} = \frac{4v_0^2}{9g} = \frac{4 \cdot 39,2^2 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot 9 \cdot 9,81 \text{ м}} = 69,7 \text{ м}$$

Время подъема равно времени падения: $t/2 = (0 - v_0)/(-g) = v_0/g$, откуда

$$t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 39,2 \text{ м} \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot 9,81 \text{ м}} = 8 \text{ с}.$$

Задача 1.8. Свободно падающее тело за последние 2 с прошло 196 м. С какой высоты оно упало?

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 \text{ с;} \\ l_1 &= 196 \text{ м.} \\ h &= ? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v_1^2 - v_0^2 &= 2al; \\ v_1 &= v_0 + at. \end{aligned}$$

Решение. Обозначим: v_1 — скорость на высоте l_1 , v_1 — скорость перед падением тела. Тогда $v_1^2 = 2gh$, $v_1^2 - v_1^2 = 2gl_1$ и $v_1 = v_1 + gt_1$. Отсюда $(v_1 + v_1)(v_1 - v_1) = 2gl_1$ и $(v_1 + v_1 - gt_1) = 2gl_1/(gt_1)$. Следовательно,

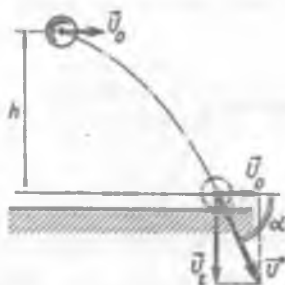
$$2v_1 = 2l_1/t_1 + gt_1 \text{ и } v_1 = l_1/t_1 + gt_1/2.$$

Искомая высота

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{l_1}{t_1} + \frac{gt_1}{2} \right)^2 = \frac{1 \cdot c^2}{2 \cdot 9,81 \text{ м}} \left(\frac{196 \text{ м}}{2 \text{ с}} + \frac{9,81 \text{ м} \cdot 2 \text{ с}}{c^2 \cdot 2} \right)^2 = 592 \text{ м.}$$

Задача 1.9. Из гондолы дирижабля, движущегося горизонтально со скоростью 10 м/с на высоте 450 м, выпало тело. С какой скоростью и под каким углом к горизонту упадет оно на землю, если пренебречь сопротивлением воздуха?

$$\begin{aligned} h &= 450 \text{ м;} \\ v_0 &= 10 \text{ м/с.} \\ v - ? \quad \alpha - ? \end{aligned}$$



$$v_1^2 - v_2^2 = 2al;$$

$$v = \sum_{i=1}^n v_i.$$

Решение. Искомая скорость представляет собой векторную сумму: $v = v_0 + v_1$, где $v_1^2 = 2gh$. Отсюда

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{100 \text{ м}^2/\text{с}^2 + 2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 450 \text{ м}} = 94,5 \text{ м/с.}$$

Угол проще всего найти по тангенсу угла в прямоугольном треугольнике:

$$\operatorname{tg} \alpha = v_t/v_0 = \sqrt{2gh}/v_0, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 450 \text{ м}}}{10 \text{ м/с}} = 83,9^\circ.$$

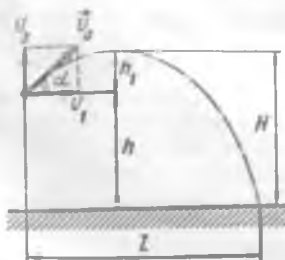
Задача 1.10. С высоты 10 м брошено тело под углом 30° к горизонту со скоростью 20 м/с. Найти наибольшую высоту подъема и горизонтальное расстояние от точки бросания до места падения тела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$h_1 = 10 \text{ м};$$

$$v_0 = 20 \text{ м/с};$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

$$H = ? \quad l = ?$$



$$v_1^2 - v_0^2 = 2al; \quad l = vt;$$

$$v_1 = v_0 + at; \quad l = v_0 t + at^2/2.$$

Решение. Описываемое движение представляет собой суперпозицию горизонтального равномерного движения со скоростью v_1 и движения тела, брошенного вертикально вверх со скоростью v_2 , причем $\sin \alpha = v_2/v_0$, $\cos \alpha = v_1/v_0$. При движении вверх с ускорением $a = -g$ имеем $0 - v_2^2 = -2gh_1$, откуда $h_1 = v_2^2/(2g) = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$.

Общая высота

$$H = h + h_1 = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 10 \text{ м} + \frac{20^2 \text{ м}^2 \cdot \sin^2 30^\circ}{\text{с}^2 \cdot 2 \cdot 9,81 \text{ м}} = 15,1 \text{ м}.$$

Обозначим t_1 время подъема на высоту h_1 ; t — время падения с высоты H .

Тогда $l = v_1(t_1 + t)$; $t_1 = v_2/g$; $H = gt^2/2$; $t = \sqrt{2H/g}$. Следовательно,

$$l = v_1 \left(\frac{v_2}{g} + \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) = v_0 \cos \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \right) =$$

$$= \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \left(v_0 \sin \alpha + \sqrt{2gh + v_0^2 \sin^2 \alpha} \right) =$$

$$= \frac{20 \text{ м} \cdot \cos 30^\circ \cdot \text{с}^2}{\text{с} \cdot 9,81 \text{ м}} \left(\frac{20 \text{ м} \cdot \sin 30^\circ}{\text{с}} + \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 10 \text{ м} + \frac{20^2 \text{ м}^2 \cdot \sin^2 30^\circ}{\text{с}^2}} \right) =$$

$$= 48,1 \text{ м}.$$

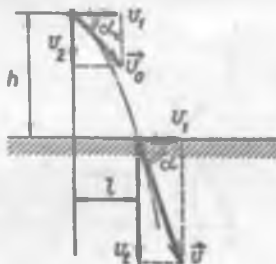
Задача I.11. Пикирующий бомбардировщик в момент сбрасывания бомбы на высоте 1000 м летел под углом 60° к горизонту со скоростью 900 км/ч. Под каким углом и на каком горизонтальном расстоянии бомба вошла бы в землю, если бы не было сопротивления воздуха?

$$h = 1000 \text{ м};$$

$$\alpha_0 = 60^\circ;$$

$$v_0 = 900 \text{ км/ч} = 250 \text{ м/с}.$$

$$\alpha = ? \quad l = ?$$



$$l = vt,$$

$$a = (v_1 - v_0)/t,$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2al.$$

Задача 1.8. Свободно падающее тело за последние 2 с прошло 196 м. С какой высоты оно упало?

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 \text{ с;} \\ l_1 &= 196 \text{ м.} \\ h &= ? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v_1^2 - v_0^2 &= 2al; \\ v_1 &= v_0 + at. \end{aligned}$$

Решение. Обозначим: v_1 — скорость на высоте l_1 , v_1 — скорость перед падением тела. Тогда $v_1^2 = 2gh$, $v_1^2 - v_1^2 = 2gl_1$ и $v_1 = v_1 + gt_1$. Отсюда $(v_1 + v_1)(v_1 - v_1) = 2gl_1$ и $(v_1 + v_1 - gt_1) = 2gl_1/(gt_1)$. Следовательно,

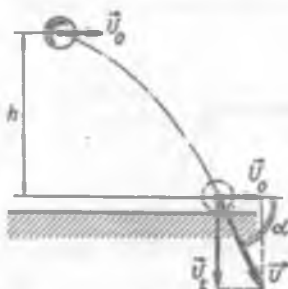
$$2v_1 = 2l_1/t_1 + gt_1 \text{ и } v_1 = l_1/t_1 + gt_1/2.$$

Искомая высота

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{l_1}{t_1} + \frac{gt_1}{2} \right)^2 = \frac{1 \cdot c^2}{2 \cdot 9,81 \text{ м}} \left(\frac{196 \text{ м}}{2 \text{ с}} + \frac{9,81 \text{ м} \cdot 2 \text{ с}}{c^2 \cdot 2} \right)^2 = 592 \text{ м.}$$

Задача 1.9. Из гондолы дирижабля, движущегося горизонтально со скоростью 10 м/с на высоте 450 м, выпало тело. С какой скоростью и под каким углом к горизонтали упадет оно на землю, если пренебречь сопротивлением воздуха?

$$\begin{aligned} h &= 450 \text{ м;} \\ v_0 &= 10 \text{ м/с.} \\ v &= ? \text{ и } ? \end{aligned}$$



$$v_1^2 - v_2^2 = 2al;$$

$$v = \sum_{i=1}^n v_i.$$

Решение. Искомая скорость представляет собой векторную сумму: $v = v_0 + v_1$, где $v_1^2 = 2gh$. Отсюда

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{100 \text{ м}^2/\text{с}^2 + 2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 450 \text{ м}} = 94,5 \text{ м/с.}$$

Угол проще всего найти по тангенсу угла в прямоугольном треугольнике:

$$\operatorname{tg} \alpha = v_1/v_0 = \sqrt{2gh}/v_0, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 450 \text{ м}}}{10 \text{ м/с}} = 83,9^\circ.$$

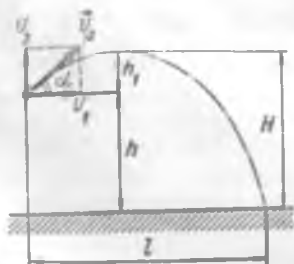
Задача 1.10. С высоты 10 м брошено тело под углом 30° к горизонту со скоростью 20 м/с. Найти наибольшую высоту подъема и горизонтальное расстояние от точки бросания до места падения тела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$h = 10 \text{ м};$$

$$v_0 = 20 \text{ м/с};$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

$$H = ? \quad l = ?$$



$$v_t^2 - v_0^2 = 2al; \quad l = vt;$$

$$v_t = v_0 + at; \quad l = v_0 t + at^2/2.$$

Решение. Описываемое движение представляет собой суперпозицию горизонтального равномерного движения со скоростью v_1 и движения тела, брошенного вертикально вверх со скоростью v_2 , причем $\sin \alpha = v_2/v_0$, $\cos \alpha = v_1/v_0$. При движении вверх с ускорением $a = -g$ имеем $0 - v_2^2 = -2gh_1$, откуда $h_1 = v_2^2/(2g) = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$.

Общая высота

$$H = h + h_1 = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 10 \text{ м} + \frac{20^2 \text{ м}^2 \cdot \sin^2 30^\circ}{c^2 \cdot 2 \cdot 9,81 \text{ м}} = 15,1 \text{ м}.$$

Обозначим t_1 время подъема на высоту h_1 ; t — время падения с высоты H .

Тогда $l = v_1(t_1 + t)$; $t_1 = v_2/g$; $H = gt^2/2$; $t = \sqrt{2H/g}$. Следовательно,

$$l = v_1 \left(\frac{v_2}{g} + \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) = v_0 \cos \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \right) =$$

$$= \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \left(v_0 \sin \alpha + \sqrt{2gh + v_0^2 \sin^2 \alpha} \right) =$$

$$= \frac{20 \text{ м} \cdot \cos 30^\circ \cdot c^2}{c \cdot 9,81 \text{ м}} \left(\frac{20 \text{ м} \cdot \sin 30^\circ}{c} + \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 10 \text{ м} + \frac{20^2 \text{ м}^2 \cdot \sin^2 30^\circ}{c^2}} \right) =$$

$$= 48,1 \text{ м}.$$

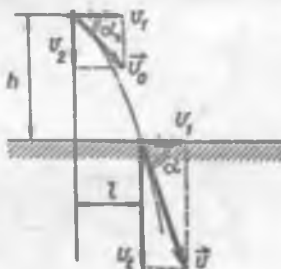
Задача 1.11. Пикирующий бомбардировщик в момент сбрасывания бомбы на высоте 1000 м летел под углом 60° к горизонту со скоростью 900 км/ч. Под каким углом и на каком горизонтальном расстоянии бомба вошла бы в землю, если бы не было сопротивления воздуха?

$$h = 1000 \text{ м};$$

$$\alpha_0 = 60^\circ;$$

$$v_0 = 900 \text{ км/ч} = 250 \text{ м/с}.$$

$$\alpha = ? \quad l = ?$$



$$l = vt,$$

$$a = (v_t - v_0)/t,$$

$$v_t^2 - v_0^2 = 2al.$$

Решение. По аналогии с предыдущей задачей

$$\cos \alpha_0 = v_1/v_0, \quad \sin \alpha_0 = v_2/v_0, \quad t = (v_1 - v_2)/g.$$

$$\begin{aligned} l &= v_1 t = v_1 \frac{v_1 - v_2}{g} = v_1 \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_2}{g} = \\ &= \frac{v_0 \cos \alpha_0}{g} \left(\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gh} - v_0 \sin \alpha_0 \right) = \\ &= \frac{250 \text{ м} \cdot \cos 60^\circ \cdot c^2}{c \cdot 9,81 \text{ м}} \left(\sqrt{\frac{250^2 \text{ м}^2 \sin^2 60^\circ}{c^2} + 2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1000 \text{ м}} - 250 \text{ м/с} \cdot \sin 60^\circ \right) = \\ &= 527 \text{ м}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{v_0 \cos \alpha_0} = \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{250^2 \text{ м}^2/\text{с}^2 \sin^2 60^\circ + 2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1000 \text{ м}}}{250 \text{ м/с} \cdot \cos 60^\circ} = 64,1^\circ. \end{aligned}$$

Задача 1.12. На сколько путь, пройденный свободно падающим телом за какую-нибудь секунду его падения, больше пути, пройденного за предыдущую секунду?

Условие этой задачи не имеет явно заданных величин, в обозначениях, принятых в § 1.3, оно может быть записано так:

$$l_n - l_{n-1} = ? \quad l^{13} = v_0 t + at^2/2.$$

Решение. Для равноускоренного движения без начальной скорости известно: $l_n : l_1 = (2n - 1) : 1$. Тогда

$$l_n = l_1 (2n - 1).$$

Аналогично, $l_{n-1} : l_1 = (2n - 3) : 1$, откуда

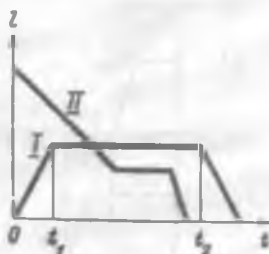
$$l_{n-1} = l_1 (2n - 3)$$

(n — нечетное число $2n - 1$, предыдущее нечетное число $2n - 3$).

Для такого движения $l_1 = (g/2) \cdot (1 \text{ с})^2$. Получаем

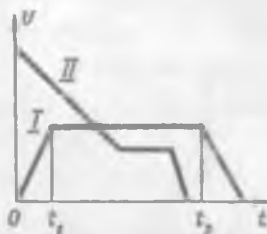
$$l_n - l_{n-1} = l_1 (2n - 1 - 2n + 3) = \frac{g}{2} \cdot 2 \cdot 1 \text{ с}^2 = 9,81 \text{ м}.$$

Задача 1.13. Опишите движения, графики которых изображены на рисунке. Что означает их точка пересечения?



Решение. По уравнению (7) первое тело от нуля до t_1 двигалось равномерно из начала координат, в момент времени t_1 остановилось, простояло до момента времени t_2 , затем равномерно вернулось в начало координат. Второе тело, находясь на некотором расстоянии от начала координат, начало равномерное движение к началу координат, затем на некоторое время остановилось, после чего с большей скоростью равномерно пришло в начало координат. Точка пересечения графиков означает место и время встречи, в этот момент первое тело покоилось, а второе равномерно двигалось через ту же точку по направлению к началу координат.

Задача I.14. Опишите движения, графики которых изображены на рисунке. Что означает их точка пересечения? Сравните эту задачу с предыдущей.

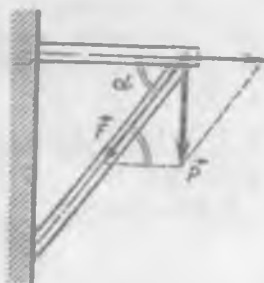


Решение. В соответствии с формулой (12) первое тело начало равноускоренное движение с начальной скоростью, равной нулю; в момент времени t_1 начало двигаться равномерно с достигнутой к этому времени скоростью; с момента времени t_2 тело равнозамедленно двигалось до остановки. Второе тело двигалось равнозамедленно, затем равномерно, затем снова равнозамедленно с большим, чем в первом случае, по модулю ускорением до остановки. Точка пересечения графиков означает, что в некоторый момент времени модули скоростей этих тел были одинаковы, причем первое тело двигалось равномерно, а второе — равнозамедленно.

О месте нахождения тел по этому графику ничего сказать нельзя.

Задача I.15. На прямоугольном кронштейне висит груз весом 2 Н. Сила, сжимающая укосину, равна 2,5 Н. Чему равен угол между поперечной и укосиной?

$$\begin{aligned} G &= 2 \text{ Н}; \\ F &= 2,5 \text{ Н}. \\ \alpha &= ? \end{aligned}$$



$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{?}{=} 0.$$

Решение. Из рисунка следует $\sin \alpha = P/F$ ($P = G$), значит

$$\alpha = \arcsin(G/F) = \arcsin(2 \text{ Н}/2,5 \text{ Н}) = 53^\circ.$$

Задача I.16. Найти силу, уравнивающую две силы 2 и 3 Н, действующие под углом 60° .

$$\begin{aligned} F_1 &= 2 \text{ Н}; \\ F_2 &= 3 \text{ Н}; \\ \alpha &= 60^\circ. \\ F &= ? \end{aligned}$$



$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{?}{=} 0.$$

Решение. По теореме косинусов:

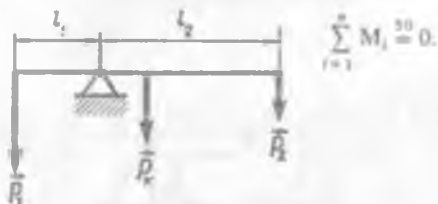
$$R^2 \stackrel{1M}{=} F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta,$$

где $\beta = 180^\circ - \alpha$. Следовательно,

$$F = R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} = \sqrt{2^2 H^2 + 3^2 H^2 + 2 \cdot 2H \cdot 3H \cos 60^\circ} = 4,36 \text{ Н.}$$

Задача 1.17. На разноплечих весах взвешивается тело массой 0,3 кг. Отношение плеч $l_1/l_2 = 1/3$, сумма плеч $l_1 + l_2 = 0,24$ м. Сила тяжести коромысла 1,5 Н. Определить массу равновеса, уравновешивающего данный груз.

$$\begin{array}{l} m_1 = 0,3 \text{ кг;} \\ l_1/l_2 = 1/3; \\ l_1 + l_2 = 0,24 \text{ м;} \\ P_k = 1,5 \text{ Н.} \\ \hline m_2 = ? \end{array}$$



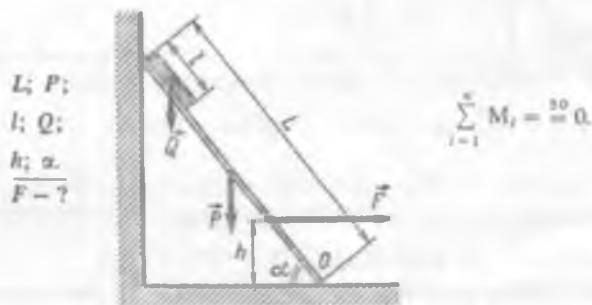
Решение. Подобные задачи можно решать сложением параллельных сил. Но короче и, следовательно, красивее применить условие равновесия тел, имеющих ось вращения.

Уравнение моментов (50) надо переписать, применяя обозначения величин, данных в условии, и неизвестных. Это трудно, зато почти сразу получается буквенный ответ задачи:

$$m_2 g l_2 + P_k [l_2 - (l_1 + l_2)/2] = m_1 g l_1;$$

$$m_2 = m_1 \frac{l_1}{l_2} - \frac{P_k}{2g} \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) = 0,3 \text{ кг} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1,5 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{2 \cdot 9,81 \text{ м}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ кг}.$$

Задача 1.18. К верхнему краю доски длиной L и силой тяжести P прибит брусок длиной l , сила тяжести которого Q . Доска закреплена в точке O и прислонена к стене под углом α к основанию. При какой горизонтальной силе, приложенной на высоте h , равновесие доски не нарушится, если убрать стенку?



Решение. Аналогично предыдущей задаче,

$$Fh - P l/2 L \cos \alpha - Q(L - l/2) \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$F = [PL + Q(2L - l)] \cos \alpha / (2h).$$

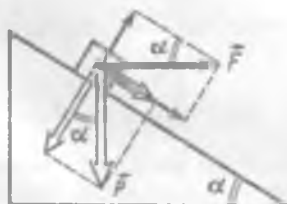
Задача 1.19. К телу весом 20 Н, расположенному на наклонной плоскости с углом наклона 30° , приложена дополнительная горизонтальная сила 10 Н. Определить силы, действующие вдоль и перпендикулярно наклонной плоскости.

$$G = 20 \text{ Н};$$

$$\alpha = 30^\circ;$$

$$F = 10 \text{ Н}.$$

$$F_t = ? \quad F_n = ?$$



$$P = G.$$

Решение. В таких задачах удобно сразу спроецировать все силы на наклонную плоскость и на нормаль к ней:

$$F_t = F \cos \alpha + P \sin \alpha = 10 \text{ Н} \cos 30^\circ + 20 \text{ Н} \sin 30^\circ = 18,7 \text{ Н};$$

$$F_n = P \cos \alpha - F \sin \alpha = 20 \text{ Н} \cos 30^\circ - 10 \text{ Н} \sin 30^\circ = 12,3 \text{ Н}.$$

Решите эту задачу еще раз, направив силу F в противоположную сторону.

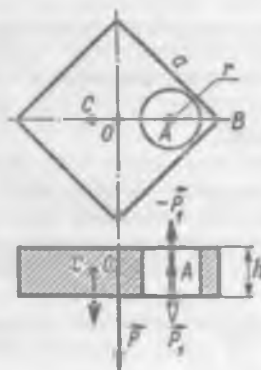
Задача 1.20. Из квадратной стальной пластины со стороной 20 см вырезан прямой круглый цилиндр радиусом 5 см, ось которого перпендикулярна основанию пластины и расположена на диагонали основания на расстоянии четвертой части этой диагонали от ближайшей вершины квадрата. Найти положение центра тяжести такой пластины.

$$a = 0,2 \text{ м};$$

$$r = 0,05 \text{ м};$$

$$|AB| = \frac{1}{4} \cdot 2 |OB|;$$

$$|CO| = ?$$



$$\rho = \frac{m}{V}; \quad V = Sh;$$

$$P = mg.$$

Решение. Введем обозначения: h — толщина пластины, $S_1 = \pi r^2$ — площадь круга. Нахождение центра тяжести фигур неправильной геометрической формы или неоднородных — достаточно сложная интегральная задача. Но в случае однородных тел, полученных сложением (или вычитанием) тел правильной геометрической формы, можно воспользоваться простым искусственным приемом.

Центр тяжести сплошной квадратной пластины расположен в точке O ; вырезанного цилиндра — в точке A ; искомой фигуры — в точке приложения равнодействующей антипараллельных сил тяжести P и P_1 . Для сложения таких сил известно: $|CO|/|AC| = P_1/P$. Иначе $|CO|/(|AO| + |CO|) = P_1/P$. Значит,

$$|AO|/|CO| + 1 = P/P_1 \text{ или } |AO|/|CO| = P/P_1 - 1,$$

где $|AO|$ — четверть диагонали основания пластины, а диагональ равна $2|OB| = a\sqrt{2}$. Следовательно, $|AO| = |AB| = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$. Искомый отрезок

$$|CO| = \frac{|AO|}{P/P_1 - 1} = \frac{\sqrt{2}a}{4[mg/(m_1g) - 1]} = \frac{\sqrt{2}a}{4[\rho V/(\rho V_1) - 1]} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{4[Sh/(S_1h) - 1]} = \frac{\sqrt{2}a}{4[a^2/(\pi r^2) - 1]} = \frac{\sqrt{2} \cdot 0,2 \text{ м}}{4[0,2^2 \text{ м}^2/(\pi \cdot 0,05^2 \text{ м}^2) - 1]} = 1,73 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Задача 1.21. Два груза массами 5 и 15 кг, связанные невесомой нерастяжимой нитью, движутся без трения по горизонтальной поверхности под действием силы 30 Н, параллельной этой поверхности и приложенной ко второму телу. Найти силу натяжения нити при движении грузов.

$m_1 = 5 \text{ кг};$
 $m_2 = 15 \text{ кг};$
 $F = 30 \text{ Н};$
 $T = ?$



$\sum_{i=1}^2 F_i = ma.$

Решение. Назовем силой натяжения силу, с которой растянутая нить действует на тело (T_1 и T_2 в нашей задаче). Можно было бы в качестве сил натяжения нити рассматривать силы, с которыми тела действуют на привязанную к ним нить. Но в большинстве задач масса нити гораздо меньше массы тел, и ею пренебрегают. Тогда применение уравнения движения к нити ($T_2 + T_1 = -ma = 0$) приводит к равенству сил $T_1 = -T_2$ и $T_1 = T_2$. Если же не пренебрегать массой нити, то ее можно рассматривать как третье тело, движущееся с тем же ускорением. Тогда, разумеется, силы будут неодинаковы, и их сумма не равна нулю.

Силы взаимодействия нити и соответствующего тела равны друг другу по третьему закону Ньютона: $T_1 = -T_1$; $T_2 = -T_2$. Следовательно, $T_1 = T_1$; $T_2 = T_2$ и $T_1 = T_2$, если нить невесома.

Для отыскания неизвестной силы надо найти тело, на которое она действует, и применить к нему уравнение движения. В данном случае это очень просто. Изобразим все силы, действующие на выбранное тело и имеющие проекции на направление движения, и выберем положительное направление — в данном случае, очевидно, вправо (этот выбор может быть произвольным).

Уравнение движения первого тела (в скалярной форме для проекций на направление движения): $T_1 = m_1a$; оно содержит две неизвестные величины. Уравнение движения второго тела: $F - T_2 = m_2a$. Учтя равенство сил натяжения, получили полную систему уравнений:

$$T = m_1a, \quad F - T = m_2a.$$

Чтобы избавиться от ненужного неизвестного, разделим почленно второе уравнение на первое: $F/T - 1 = m_2/m_1$, откуда $F/T = m_2/m_1 + 1$ и $T = \frac{Fm_1}{m_1 + m_2} =$

$$= \frac{30 \text{ Н} \cdot 5 \text{ кг}}{20 \text{ кг}} = 7,5 \text{ Н}.$$

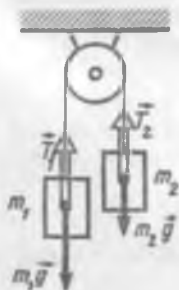
Любопытно, что, сложив почленно уравнения, мы получили бы уравнение движения системы двух тел, представляющей собой одно соединенное твердое тело, поскольку нить нерастяжима:

$$F = (m_1 + m_2)a.$$

Но такое применение основного уравнения динамики возможно только в частном случае. Напомним, что принципиально это уравнение составляется для каждого тела системы.

Задача 1.22. Два груза связаны нитью, перекинутой через неподвижный блок. Массы грузов 2,14 и 1,93 кг. Массой блока и сопротивлениями можно пренебречь. Определить силу натяжения нити при движении грузов.

$$\begin{aligned} m_1 &= 2,14 \text{ кг;} \\ m_2 &= 1,93 \text{ кг.} \\ T &= ? \end{aligned}$$



$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

Решение. Неподвижный блок только изменяет направление силы.

Если блок не имеет массы и нет сопротивлений, то два груза взаимодействуют посредством невесомой нити, и силы взаимодействия, как мы доказали в предыдущей задаче, равны по модулю. Выберем груз m_1 , на который действует неизвестная сила, и изобразим все силы, действующие на него.

За положительное направление удобно принять направление движения грузов. К выбранному грузу применим основное уравнение динамики поступательного движения: $m_1 g - T = m_1 a$. В этом уравнении два неизвестных.

Составим аналогичное уравнение движения второго груза: $T - m_2 g = m_2 a$.

Система двух таких уравнений легко решается, и можно найти ускорение системы или, как в нашей задаче, силу натяжения нити. Для этого разделим уравнения почленно:

$$(m_1 g - T)/(T - m_2 g) = m_1/m_2.$$

Решая это уравнение, находим искомую силу натяжения:

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 2,14 \text{ кг} \cdot 1,93 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2}{2,14 \text{ кг} + 1,93 \text{ кг}} = 19,9 \text{ Н}.$$

В этой задаче также, сложив почленно уравнения, мы получили бы

$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

— уравнение движения всей системы. Но оно справедливо только при невесомом блоке и отсутствии трения в оси блока (при этих условиях равны силы натяжения нитей). В общем случае это не так, и надо составлять уравнения движения всех тел системы, в том числе блока.

Задача 1.23. Два груза массами по 300 г связаны нитью, перекинутой через неподвижный невесомый блок, вращающийся без трения. На один из грузов положен перегрузок массой 20 г. Определить силу давления перегрузка на груз при движении системы.

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 = 0,3 \text{ кг}; \\ m = 0,02 \text{ кг}. \\ F = ? \end{aligned}$$



$$\sum_{i=1}^n F_i = ma.$$

Решение. По условию нить не взаимодействует с перегрузком. Уравнения движения всех тел системы:

$$m_1g - T + F = m_1a, \quad T - m_2g = m_2a, \quad mg - F = ma.$$

Сложим почленно первые два уравнения:

$$m_1g - T + F + T - m_2g = (m_1 + m_2)a.$$

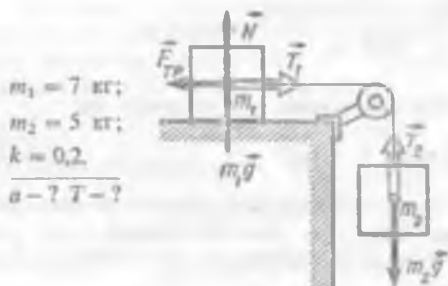
Разделим последнее уравнение системы почленно на полученное уравнение, учитывая, что $m_1 = m_2$:

$$\frac{mg - F}{F} = \frac{m}{2m_1}.$$

Отсюда искомая сила давления

$$F = \frac{2mm_1g}{m + 2m_1} = \frac{2 \cdot 0,02 \text{ кг} \cdot 0,3 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2}{0,02 + 0,6} = 0,19 \text{ Н}.$$

Задача 1.24. По горизонтальному столу движется брусок массой 7 кг, связанный с грузом массой 5 кг нитью, перекинутой через неподвижный невесомый блок. Коэффициент трения бруска о стол 0,2. Найти ускорение системы и силу натяжения нити при движении тел.



$$\begin{aligned} m_1 = 7 \text{ кг}; \\ m_2 = 5 \text{ кг}; \\ k = 0,2. \\ a = ? \quad T = ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i &= ma; \\ k &= F_{\text{тр}}/N. \end{aligned}$$

Решение. Уравнения движения тел системы: $T - km_1g = m_1a$, $m_2g - T = m_2a$. Сложим их почленно:

$$T - km_1g + m_2g - T = (m_1 + m_2)a.$$

Отсюда

$$a = \frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2} g = \frac{5 \text{ кг} - 0,2 \cdot 7 \text{ кг}}{12 \text{ кг}} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 2,94 \text{ м/с}^2.$$

Разделим уравнения системы почленно:

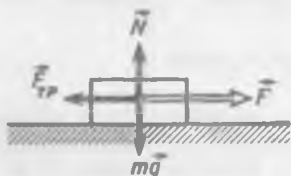
$$(T - km_1g)/(m_2g - T) = m_1/m_2.$$

Решая полученное уравнение, находим

$$T = \frac{m_1 m_2 g (1 + k)}{m_1 + m_2} = \frac{5 \text{ кг} \cdot 7 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м} \cdot 1,2}{\text{с}^2 \cdot 12 \text{ кг}} = 34,3 \text{ Н}.$$

Задача 1.25. По горизонтальному столу (предыдущей задачи) движется брусок массой 7 кг под действием горизонтальной силы 49 Н. Коэффициент трения о стол тот же: 0,2. Найти ускорение бруска.

$$\begin{aligned} m &= 7 \text{ кг}; \\ k &= 0,2; \\ F &= 49 \text{ Н}. \\ a &= ? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i &\stackrel{30}{=} ma; \\ k &\stackrel{29}{=} F_{\text{тр}}/N. \end{aligned}$$

Решение. Уравнение движения: $F - kmg = ma$. Отсюда

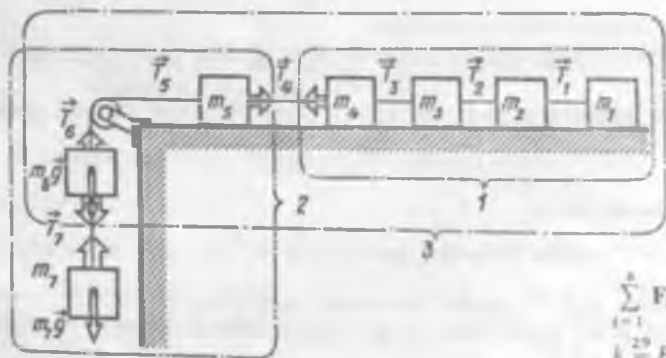
$$a = \frac{F - kmg}{m} = \frac{F}{m} - kg = \frac{49 \text{ кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot 7 \text{ кг}} - 0,2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 5,04 \text{ м/с}^2.$$

Силы, действующие в этой задаче (49 Н и сила трения), такие же, как в предыдущей. Почему же это ускорение не равно ускорению системы в задаче 1.24?

Под действием силы $F - km_1g$ в задаче 1.24 движутся два тела, а в данной — одно. Иначе, в задаче 1.24 первое тело движется под действием равнодействующей $T - km_1g$, где сила натяжения T меньше 49 Н (иначе второе тело не имело бы ускорения).

Задача 1.26. Пять одинаковых грузов массами по 1,5 кг, связанных нитями, движутся по столу под действием двух таких же грузов, подвешенных на нити, перекинутой через невесомый блок, вращающийся без трения. Коэффициент трения грузов о стол 0,08. Найти силы натяжения T_4 и T_7 .

$$\begin{aligned} m_i &= m = 1,5 \text{ кг}; \\ k &= 0,08. \\ T_4 &= ? \quad T_7 = ? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i &\stackrel{30}{=} ma; \\ k &\stackrel{29}{=} F_{\text{тр}}/N. \end{aligned}$$

Решение. Блок задан невесомым и без трения в оси, в этом случае $T_3 = T_6$, как было доказано в задаче 1.21. Составляем уравнения движения всех тел системы:

$$\begin{aligned} T_1 - km_1g &= m_1a, & T_3 - T_4 - km_3g &= m_3a, \\ T_2 - T_1 - km_2g &= m_2a, & T_7 - T_6 + m_6g &= m_6a, \\ T_3 - T_2 - km_3g &= m_3a, & m_7g - T_7 &= m_7a, \\ T_4 - T_3 - km_4g &= m_4a, \end{aligned}$$

Нити нерастяжимы, поэтому все ускорения одинаковы. В данном случае есть возможность сократить число уравнений. Сложим почленно первые четыре уравнения:

$$T_4 - 4kmg = 4ma.$$

Точно такое уравнение мы получили бы, составляя уравнение движения тела, состоящего из первых четырех грузов (пунктир 1). Сложим почленно последние три уравнения:

$$2mg - T_4 - kmg = 3ma.$$

Именно таково уравнение движения тела, составленного из последних трех грузов (пунктир 2), в предположении невесомости блока и отсутствия трения в нем (если бы это условие не было выполнено, то силы натяжения T_3 и T_6 не были бы равны, и нельзя было бы рассматривать последние три тела как одно).

Для определения силы T_4 этих двух уравнений достаточно. Для нахождения силы T_7 тоже можно составить в данном случае два уравнения: для соединенного тела, обозначенного пунктиром 3, и груза 7. Действительно, сложим почленно первые шесть уравнений нашей системы:

$$m_6g + T_7 - 5kmg = 6ma.$$

Это и есть уравнение движения соединенного «тела» 3 (не забудьте, что под действием сил левой его части движется и масса m_6). Это уравнение совместно с седьмым позволяет определить T_7 .

Таким образом, в подобных задачах при выполнении требований нерастяжимости нити, невесомости блока и отсутствия трения в блоке появляется возможность сократить число рассматриваемых уравнений, применяя уравнение движения к совокупности связанных тел:

$$T_4 - 4kmg = 4ma \quad (\text{«тело» 1});$$

$$2mg - T_4 - kmg = 3ma \quad (\text{«тело» 2}).$$

Эта система легко решается:

$$T_4 = \frac{3}{7}mg(1+k) = \frac{3}{7} \cdot 1,5 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1,08 = 18,2 \text{ Н}.$$

Для решения второй части задачи используется система уравнений:

$$mg - T_7 = ma, \quad T_7 + mg - 5kmg = 6ma \quad (\text{«тело» 3}).$$

Искомая сила

$$T_7 = \frac{5}{7}mg(1+k) = \frac{5}{7} \cdot 1,5 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1,08 = 11,4 \text{ Н}.$$

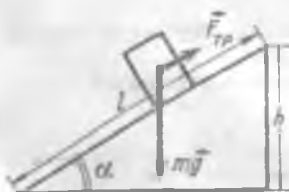
Задача 1.27. Тело без начальной скорости скользит с наклонной плоскости высотой 5 м. Угол наклона 30° . Коэффициент трения 0,05. Найти время движения.

$$h = 5 \text{ м};$$

$$\alpha = 30^\circ;$$

$$k = 0,05;$$

$$t = ?$$



$$\sum_{i=1}^n F_i = ma;$$

$$k = F_{\text{тр}}/N; a = (v_1 - v_0)/t;$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2al.$$

Решение. Из определения ускорения

$$t = v_1/a = \sqrt{2al}/a = \sqrt{2h/(\alpha \sin \alpha)},$$

так как $\sin \alpha = h/l$.

Ускорение найдем из уравнения движения:

$$mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha = ma.$$

Следовательно,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g(\sin \alpha - k \cos \alpha) \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ м} \cdot \text{с}^2}{9,81 \text{ м} (\sin 30^\circ - 0,05 \cos 30^\circ) \sin 30^\circ}} = 2,11 \text{ с}.$$

Задача 1.28. Три груза связаны, как показано на рисунке. Угол наклона плоскости 30° . Коэффициент трения о плоскость 0,05. Массы грузов 0,3; 0,2 и 0,1 кг. Блок невесом, трение в оси отсутствует. Найти силы натяжения нитей при движении грузов вниз по наклонной плоскости.

$$m_1 = 0,3 \text{ кг};$$

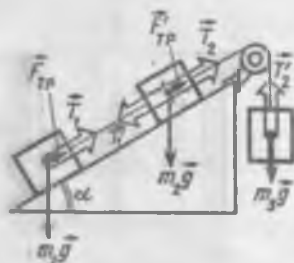
$$m_2 = 0,2 \text{ кг};$$

$$m_3 = 0,1 \text{ кг};$$

$$k = 0,05;$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

$$T_1 = ? \quad T_2 = ?$$



$$\sum_{i=1}^n F_i = ma;$$

$$k = F_{\text{тр}}/N.$$

Решение. Запишем уравнения движения в проекциях на направление движения:

$$m_1 g \sin \alpha - T_1 - k m_1 g \cos \alpha = m_1 a,$$

$$m_2 g \sin \alpha + T_1 - T_2 - k m_2 g \cos \alpha = m_2 a,$$

$$T_2 - m_3 g = m_3 a.$$

Сложим все уравнения почленно:

$$m_1 g \sin \alpha - k m_1 g \cos \alpha + m_2 g \sin \alpha - k m_2 g \cos \alpha - m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3) a.$$

Отсюда

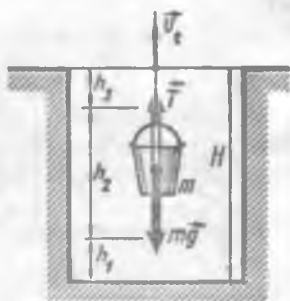
$$a = \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - k(m_1 + m_2) \cos \alpha - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = \frac{(m_1 + m_2)(\sin \alpha - k \cos \alpha) - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g.$$

Теперь находим T_1 и T_2 соответственно из первого и третьего уравнений:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= m_1 g (\sin \alpha - k \cos \alpha) - m_1 a = m_1 g \left[(\sin \alpha - k \cos \alpha) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(m_1 + m_2) (\sin \alpha - k \cos \alpha) - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right] = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + m_3} [(\sin \alpha - k \cos \alpha) (m_1 + \\
 &\quad + m_2 + m_3 - m_1 - m_2) + m_3] = \frac{m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} (1 + \sin \alpha - k \cos \alpha) = \\
 &= \frac{0,3 \text{ кг} \cdot 0,1 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м}}{\text{с}^2 \cdot 0,6 \text{ кг}} (1 + \sin 30^\circ - 0,05 \cos 30^\circ) = 0,715 \text{ Н.} \\
 T_2 &= m_3 g \left[1 + \frac{(m_1 + m_2) (\sin \alpha - k \cos \alpha) - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right] = \\
 &= \frac{m_3 (m_1 + m_2) g}{m_1 + m_2 + m_3} (1 + \sin \alpha - k \cos \alpha) = \\
 &= \frac{0,1 \text{ кг} \cdot 0,5 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м}}{\text{с}^2 \cdot 0,6 \text{ кг}} (1 + \sin 30^\circ - 0,05 \cos 30^\circ) = 1,19 \text{ Н.}
 \end{aligned}$$

Задача 1.29. Пустое ведро массой 2,2 кг и емкостью 8 л опускается в колодезь на глубину 10 м равноускоренно (без начальной скорости) за 2,4 с. Поднимается это ведро с той же глубины, причем первые два метра подъема сила натяжения веревки равна 120 Н, затем шесть метров — 100 Н, последние два метра — 90 Н. Определить силу натяжения веревки при опускании ведра, ускорения — при подъеме, скорость ведра после подъема на уровень земли.

$$\begin{aligned}
 m &= 2,2 \text{ кг}; \\
 V &= 8 \text{ л} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3; \\
 H &= 10 \text{ м}; \\
 t &= 2,4 \text{ с}; \\
 h_1 &= 2 \text{ м}; \quad h_2 = 6 \text{ м}; \quad h_3 = 2 \text{ м}; \\
 T_1 &= 120 \text{ Н}; \quad T_2 = 100 \text{ Н}; \quad T_3 = 90 \text{ Н}. \\
 \hline
 T - ? \quad a_1 - ? \quad a_2 - ? \quad a_3 - ? \quad v_1 - ?
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 F_i &\stackrel{39}{=} ma; \\
 a &\stackrel{11}{=} (v_1 - v_0)/t; \\
 l &\stackrel{13}{=} v_0 t + at^2/2; \\
 v_1^2 - v_0^2 &\stackrel{14}{=} 2al; \\
 \rho &\stackrel{38}{=} m/V.
 \end{aligned}$$

Решение. Уравнение движения пустого ведра $mg - T = ma$. Его ускорение $a = 2H/t^2$. Значит, сила натяжения веревки

$$T = m \left(g - \frac{2H}{t^2} \right) = 2,2 \text{ кг} \left(9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \frac{2 \cdot 10 \text{ м}}{2,4^2 \text{ с}^2} \right) = 13,9 \text{ Н.}$$

Уравнение движения ведра с водой при подъеме на участке h_1 : $T_1 - (m + m')g = (m + m')a_1$. Отсюда

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{T_1 - (m + \rho'V)g}{m + \rho'V} = \frac{120 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 - (2,2 \text{ кг} + 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) 9,81 \text{ м}}{\text{с}^2 (2,2 \text{ кг} + 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3)} = \\
 &= 1,95 \text{ м}/\text{с}^2.
 \end{aligned}$$

Аналогично для участка h_2 : $T_2 - (m + m')g = (m + m')a_2$, откуда

$$a_2 = \frac{T_2 - (m + \rho'V)g}{m + \rho'V} = \frac{100 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 - (2,2 \text{ кг} + 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) 9,81 \text{ м/с}^2}{2,2 \text{ кг} + 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = -0,006 \text{ м/с}^2$$

(практически равномерное движение).

Для участка h_3 : $T_3 - (m + m')g = (m + m')a_3$. Следовательно,

$$a_3 = \frac{T_3 - (m + \rho'V)g}{m + \rho'V} = \frac{90 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 - (2,2 \text{ кг} + 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) 9,81 \text{ м/с}^2}{2,2 \text{ кг} + 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = -0,986 \text{ м/с}^2.$$

Для участка h_1 :

$$v^2 = 2a_1h_1.$$

Скорость почти равномерного подъема (на h_2)

$$v = \sqrt{2a_1h_1} = \sqrt{2h_1 \frac{T_1 - (m + \rho'V)g}{m + \rho'V}}.$$

Она является начальной для участка h_3

$$v_1^2 - 2h_1 \frac{T_1 - (m + \rho'V)g}{m + \rho'V} = 2a_3h_3.$$

Отсюда находим искомую скорость

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2 \left[h_1 \frac{T_1 - (m + \rho'V)g}{m + \rho'V} + h_3 \frac{T_3 - (m + \rho'V)g}{m + \rho'V} \right]} = \\ &= \sqrt{2 \left[\frac{h_1 T_1 + h_3 T_3}{m + \rho'V} - g(h_1 + h_3) \right]} = \\ &= \sqrt{2 \left[\frac{2 \text{ м} \cdot 120 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 + 2 \text{ м} \cdot 90 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2}{2,2 \text{ кг} + 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} - 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 4 \text{ м} \right]} = 1,97 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Задача 1.30. Парашютист с раскрытым парашютом падает с установившейся скоростью 2 м/с. Какое ускорение у него было после раскрытия парашюта в момент, когда скорость была 3,1 м/с (после раскрытия парашюта можно коэффициент сил сопротивления считать неизменным)?

$$\begin{aligned} b &= 2 \text{ м/с}; & \sum_{i=1}^n F_i &= ma; \\ \frac{v_1 = 3,1 \text{ м/с}}{a_1 = ?} & & F_{\text{сопр}} &= -rv. \end{aligned}$$

Решение. Уравнение установившегося движения: $mg - rv = 0$. Отсюда $r = mg/v$. Уравнение движения в заданный момент $mg - rv_1 = ma_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{mg - rv_1}{m} = \frac{mg - mg/v \cdot v_1}{m} = g \left(1 - \frac{v_1}{v} \right) = \\ &= \frac{g}{v} (v - v_1) = \frac{9,81 \text{ м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot 2 \text{ м}} (-1,1 \text{ м/с}) = -5,4 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Задача 1.31. Найти силу тяготения, действующую на тело массой 9 кг, поднятое над землей на расстояние, равное трети земного радиуса.



Решение. Пренебрегая эффектом вращения Земли, архимедовой силой и т. д., можно написать

$$mg = G \frac{mm_3}{r^2}.$$

С другой стороны,

$$F = G \frac{mm_3}{(r + r/3)^2}.$$

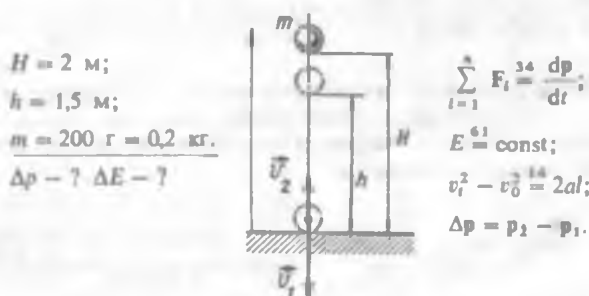
Отсюда

$$\frac{F}{mg} = G \frac{mm_3 r^2}{r^2 (\frac{4}{3})^2 G mm_3}.$$

Следовательно,

$$F = \frac{9}{16} mg = \frac{9}{16} \cdot 9 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 49,7 \text{ Н}.$$

Задача 1.32. На пол с высоты 2 м свободно падает мяч массой 200 г и подпрыгивает на высоту полутора метров. Определить переданный полу импульс и энергию, перешедшую в немеханические формы при не вполне упругом соударении с полом (сопротивлением воздуха пренебречь).



Решение. Непосредственно перед падением мяч имеет скорость v_1 , причем $v_1^2 = 2gH$. Сразу после удара мяч имеет скорость v_2 , причем $0 - v_2^2 = -2gh$. Переданный полу импульс численно равен изменению импульса мяча.

Сила, изменяющая импульс мяча, — это сила реакции пола, она направлена вверх. Поэтому импульсы мяча надо проецировать на вертикаль, направленную вверх. При этом импульс p_2 проецируется с плюсом, а импульс p_1 — с минусом. Следовательно, изменение импульса мяча численно равно $\Delta(mv) = mv_2 - (-mv_1) =$

$= m(v_2 + v_1)$. Искомый переданный полу импульс направлен вниз и численно равен

$$\Delta p = m(\sqrt{2gh} + \sqrt{2gH}) = m\sqrt{2g}(\sqrt{h} + \sqrt{H}) = 0,2 \text{ кг} \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2}(\sqrt{1,5 \text{ м}} + \sqrt{2 \text{ м}}) = 2,34 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

По закону сохранения энергии кинетическая энергия перед ударом равна потенциальной перед началом падения, а кинетическая энергия сразу после удара равна потенциальной после окончания подъема: $T_1 = mgH$; $T_2 = mgh$. По закону сохранения и превращения энергии $T_1 = T_2 + \Delta E$, откуда

$$\Delta E = T_1 - T_2 = mgH - mgh = mg(H - h) = 0,2 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 0,5 \text{ м} = 0,981 \text{ Дж}.$$

Задача 1.33. С неподвижной лодки массой 50 кг на берег прыгает человек, масса которого 80 кг. Скорость человека 1,2 м/с. С какой скоростью начнет двигаться лодка?

$$m_1 = 80 \text{ кг};$$

$$v_1 = 1,2 \text{ м/с}; \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_x \stackrel{\text{за}}{=} \text{const.}$$

$$m_2 = 50 \text{ кг};$$

$$v_2 = ?$$

Решение. Система лодка — человек замкнута по горизонтальному направлению, так как сопротивление воды в начале движения пренебрежимо мало. Тогда $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$, откуда

$$v_2 = - \frac{m_1 v_1}{m_2} = - \frac{80 \text{ кг} \cdot 1,2 \text{ м}}{50 \text{ кг}} = -1,92 \text{ м/с}.$$

Задача 1.34. На железнодорожной платформе, движущейся с некоторой скоростью, закреплено орудие в горизонтальной плоскости под углом 60° к направлению колен. Масса платформы (с орудием) 15 т. Орудие стреляет снарядом, вылетающим со скоростью 900 м/с, масса которого 200 кг. На сколько изменится скорость платформы в результате выстрела?

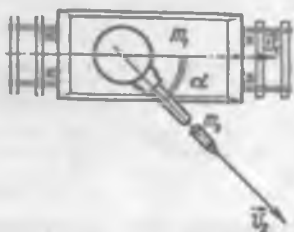
$$m_1 = 15 \text{ т} = 15 \cdot 10^3 \text{ кг};$$

$$\alpha = 60^\circ;$$

$$m_2 = 200 \text{ кг};$$

$$v_2 = 900 \text{ м/с}.$$

$$\Delta v = ?$$



$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_x \stackrel{\text{за}}{=} \text{const.}$$

Решение. Система снаряд — платформа замкнута по направлению колен:

$$(m_1 + m_2) v_1 = m_1 v'_1 + m_2 (v_2 \cos \alpha + v_1).$$

Отсюда

$$m v_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v_2 \cos \alpha$$

и

$$\Delta v = v'_1 - v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 \cos \alpha = - \frac{200 \text{ кг}}{15 \cdot 10^3 \text{ кг}} \cdot 900 \text{ м/с} \cdot \cos 60^\circ = -6 \text{ м/с}.$$

При другом направлении скорости платформы возможно $\alpha = 120^\circ$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -0,5$; $\Delta v = 6 \text{ м/с} > 0$.

Задача 1.35. В мешке с ватой массой 2 кг, висящем на подвесе, застревает летевшая горизонтально со скоростью 600 м/с пуля массой 10 г. Определить наибольший угол отклонения подвеса от вертикали, если расстояние от точки подвеса до центра масс мешка (и до линии выстрела) равно 11 м. Найти энергию, перешедшую в немеханические формы.

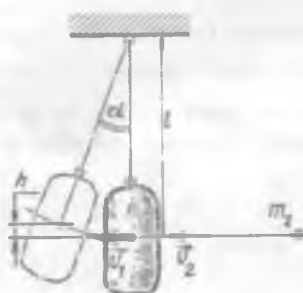
$$m_1 = 2 \text{ кг};$$

$$l = 11 \text{ м};$$

$$m_2 = 10 \text{ г} = 0,01 \text{ кг};$$

$$v_2 = 600 \text{ м/с}.$$

$$\alpha - ? \quad \Delta E - ?$$



$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_x \stackrel{28}{=} \text{const};$$

$$E \stackrel{61}{=} \text{const}.$$

Решение. Из рисунка $\cos \alpha = (l - h)/l$. По закону сохранения энергии после удара $(m_1 + m_2) v_1^2/2 = (m_1 + m_2) gh$. По закону сохранения импульса, $m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_1$. Следовательно,

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2 2g}.$$

$$\text{Поэтому } \cos \alpha = 1 - \frac{m_2^2 v_2^2}{2gl(m_1 + m_2)^2} \text{ и}$$

$$\alpha = \arccos \left[1 - \frac{m_2^2 v_2^2}{2gl(m_1 + m_2)^2} \right] = \arccos \left[1 - \frac{0,01^2 \text{ кг}^2 \cdot 600^2 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot 2 \cdot 9,81 \text{ м} \cdot 11 \text{ м} \cdot 2,01^2 \text{ кг}^2} \right] = 16,5^\circ.$$

По закону сохранения и превращения энергии $m_2 v_2^2/2 = (m_1 + m_2) v_1^2/2 + \Delta E$, откуда

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) = \\ &= \frac{m_1 m_2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{2 \text{ кг} \cdot 0,01 \text{ кг} \cdot 6^2 \cdot 10^4 \text{ м}^2}{\text{с}^2 \cdot 2 \cdot 2,01 \text{ кг}} = 1,79 \text{ кДж}. \end{aligned}$$

Любопытно оценить отношение этой «потерянной» (в механическом смысле) энергии ко всей энергии системы, т. е. к энергии, которой обладала пуля до удара:

$$\frac{2\Delta E}{m_2 v_2^2} = \frac{2m_1 m_2 v_2^2}{2(m_1 + m_2) m_2 v_2^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 \text{ кг}}{2,01 \text{ кг}} = 99,5\%.$$

Отметим, что пренебрегая массой пули по сравнению с массой мешка в знаменателе последней дроби, мы пренебрегли бы механической энергией, оставшейся у системы после удара, по сравнению с энергией первоначальной.

Задача 1.36. Ведро с водой массой 10 кг поднимают из колодца глубиной 8 м равноускоренно за 3,2 с. Определить совершенную при этом работу. Во что превращается энергия, затраченная в процессе совершения этой работы?

$$\begin{aligned}
 m &= 10 \text{ кг}; & \sum_{i=1}^5 F_i &= ma; \\
 h &= 8 \text{ м}; & A &= \int (F dl); \\
 t &= 3,2 \text{ с.} & l &= v_0 t + at^2/2; \quad W = mgh; \\
 A &= ? & v_1^2 - v_0^2 &= 2al; \quad T = mv^2/2.
 \end{aligned}$$

Решение. Такой колодец изображен на рисунке в задаче 1.29. Работа постоянной силы при подъеме $A = Fh$. Силу найдем из уравнения движения $F - mg = ma$. Ускорение $a = 2h/t^2$. Следовательно,

$$A = m(g + a)h = m(g + 2h/t^2)h = mgh + 2mh^2/t^2.$$

Исключим ускорение из уравнений (13) и (14):

$$h^2/t^2 = v_1^2/4.$$

Произведенная работа больше сообщенной потенциальной энергии на величину второго слагаемого:

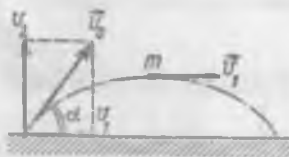
$$2mh^2/t^2 = 2mv_1^2/4 = mv_1^2/2 = T,$$

т. е. на кинетическую энергию, которая остается у ведра в верхней точке подъема. Искомая работа

$$A = mh \left(g + \frac{2h}{t^2} \right) = 10 \text{ кг} \cdot 8 \text{ м} \left(9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} + \frac{2 \cdot 8 \text{ м}}{3,2^2 \text{ с}^2} \right) = 0,91 \text{ кДж}.$$

Задача 1.37. Тело массой 2 кг брошено под некоторым углом к горизонтальной плоскости. В начальный момент его кинетическая энергия 400 Дж. В верхней точке траектории его кинетическая энергия 150 Дж. Определить, с какой скоростью и под каким углом брошено тело. Сопротивление воздуха не учитывать.

$$\begin{aligned}
 m &= 2 \text{ кг}; \\
 T_0 &= 400 \text{ Дж}; \\
 T_1 &= 150 \text{ Дж.} \\
 v_0 &= ? \quad \alpha = ?
 \end{aligned}$$



$$T = mv^2/2.$$

Решение. По определению, $T_1 = mv_1^2/2$; $T_0 = mv_0^2/2$, откуда

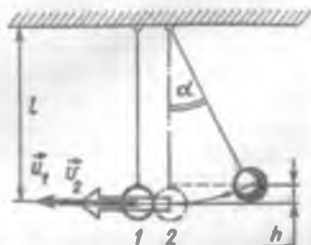
$$v_0 = \sqrt{\frac{2T_0}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \text{ кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot 2 \text{ кг}}} = 20 \text{ м/с}.$$

Из рисунка $\cos \alpha = v_1/v_0$. Значит, $\cos \alpha = \sqrt{2T_1/m}/\sqrt{2T_0/m} = \sqrt{T_1/T_0}$ и

$$\alpha = \arccos \sqrt{T_1/T_0} = \arccos \sqrt{150/400} = 52^\circ 20'.$$

Задача 1.38. Два абсолютно упругих шара одинаковых размеров и масс висят, касаясь друг друга так, что их центры масс расположены на расстоянии l ниже точек подвеса. Один из них отводят в сторону, чтобы его нить отклонилась от вертикали на угол α , и отпускают. Какие скорости получают шары после соударения?

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 = m; \\ l; \alpha. \\ u_1 = ? \quad u_2 = ? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} T &= mv^2/2; \quad W = mgh; \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_{\text{с}} &= \text{const}; \quad E = \text{const.} \end{aligned}$$

Решение. Система шаров замкнута по горизонтальному направлению:

$$m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2; \quad m_2 gh = m_2 v_2^2/2;$$

$$\cos \alpha = (l - h)/l; \quad h = l(1 - \cos \alpha);$$

$$m_2 v_2^2/2 = m_1 u_1^2/2 + m_2 u_2^2/2;$$

$$\begin{cases} v_2^2 - u_2^2 = u_1^2; \\ v_2 - u_2 = u_1. \end{cases}$$

Разделим почленно первое уравнение на второе: $(v_2 + u_2)(v_2 - u_2)/(v_2 - u_2) = u_1$. Получаем $v_2 + u_2 = u_1$. Следовательно, из второго уравнения $v_2 - u_2 = v_2 + u_2$, откуда $u_2 = 0$. Тогда

$$u_1 = v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

При таком соударении происходит обмен скоростями: первый шар (ранее неподвижный) начинает двигаться со скоростью второго, второй же останавливается. При движении без потерь первый шар остановится, когда его нить отклонится на угол α от вертикали, и далее такой же процесс пойдет в обратную сторону.

Задача 1.39. Тело массой 20 кг подвешено на веревке длиной 1 м и площадью поперечного сечения 0,75 см². Веревка выдерживает максимальное напряжение $\sigma_{\text{пр}} = 4,2 \cdot 10^6$ Па. На какой наибольший угол ее можно отклонить от вертикали, чтобы она не порвалась после того, как груз будет отпущен? Размеры тела малы по сравнению с длиной веревки.

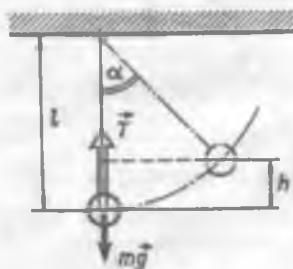
$$m = 20 \text{ кг};$$

$$l = 1 \text{ м};$$

$$S = 0,75 \text{ см}^2 = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_{\text{пр}} = 4,2 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

$$\alpha = ?$$



$$mgh = mv^2/2;$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = ma;$$

$$\sigma = F/S;$$

$$a_n = v^2/r.$$

Решение. Наибольшее натяжение веревка испытывает в вертикальном положении. Следовательно, если она не порвется в этом положении, соответствующее отклонение допустимо. Уравнение движения тела в нижнем положении:

$$\begin{aligned} T - mg &= mv^2/l, \quad \cos \alpha = (l - h)/l = 1 - h/l = 1 - v^2/(2gl) = 1 - (T - mg)/(2mg) = \\ &= 1,5 - \sigma_{\text{пр}} S/(2mg); \text{ следовательно,} \end{aligned}$$

$$\alpha = \arccos \left(1,5 - \frac{4,2 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot 2 \cdot 20 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м}} \right) = 45,8^\circ.$$

Задача 1.40. Подвесной мост имеет радиус кривизны 200 м и выдерживает нагрузку 18 кН. С какой максимальной скоростью может по нему проехать автомобиль, масса которого (с грузом и людьми) равна 1,5 т?

$$R = 200 \text{ м};$$

$$F_{\text{макс}} = 18 \text{ кН} = 18\,000 \text{ Н};$$

$$m = 1,5 \text{ т} = 1500 \text{ кг}.$$

$$v_{\text{макс}} = ?$$



$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{33}{=} m\ddot{x};$$

$$a_n \stackrel{15}{=} v^2/R.$$

Решение. Сила давления автомобиля на мост равна силе упругости F , действующей со стороны моста на автомобиль.

Уравнение движения автомобиля

$$F - mg = mv^2/R.$$

При максимально допустимой скорости сила давления автомобиля на мост не должна превышать $F_{\text{макс}}$. Следовательно, $v_{\text{макс}}^2 = (F_{\text{макс}} - mg)R/m$ и

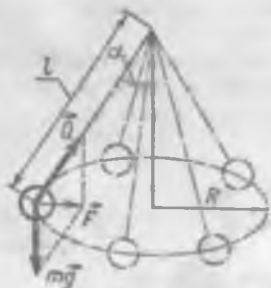
$$v_{\text{макс}} = \sqrt{\left(\frac{F_{\text{макс}}}{m} - g\right)R} = \sqrt{\left(\frac{18 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot 1500 \text{ кг}} - 9,81 \text{ м/с}^2\right) \cdot 200 \text{ м}} = 20,9 \text{ м/с}.$$

Задача 1.41. Какой угол с вертикалью образует нить конического маятника (тело, подвешенное на нити, которая описывает коническую поверхность) длиной 1,2 м, если его период обращения 2 с?

$$l = 1,2 \text{ м};$$

$$T = 2 \text{ с}.$$

$$\alpha = ?$$



$$F \stackrel{33,1}{=} mv^2/R;$$

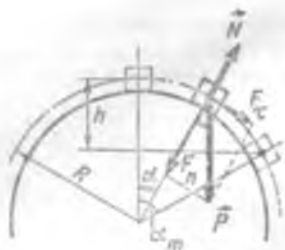
$$v \stackrel{18}{=} 2\pi R/T.$$

Решение. Из рисунка $\lg \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = F/(mg) = mv^2/(Rmg) = 4\pi^2 R^2 / (T^2 Rg) = 4\pi^2 l \sin \alpha / (T^2 g)$. Отсюда $\cos \alpha = gT^2 / (4\pi^2 l)$ и

$$\alpha = \arccos \frac{gT^2}{4\pi^2 l} = \arccos \frac{9,81 \text{ м} \cdot 4 \text{ с}^2}{\text{с}^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 1,2 \text{ м}} = 34,1^\circ.$$

Задача 1.42. Материальная точка без трения соскальзывает с внешней поверхности сферы, описывая траекторию радиусом R . На какой высоте она оторвется от этой поверхности?

$$\frac{R}{h} = ?$$



$$a_n^{13} = v^2/R; \quad \sum_{i=1}^n F_i^{33} = ma;$$

$$E^{61} = \text{const.}$$

Решение. Рассмотрим произвольное промежуточное положение (радиус под углом α к вертикали), где материальная точка еще скользит по сфере. Почему она не отрывается от сферы? На нее действуют две силы: реакция опоры N и сила тяжести P , которую мы разложили на нормальную (F_n) и тангенциальную (F_t) к траектории составляющие. Сила F_t сообщает тангенциальное ускорение, т. е. увеличивает модуль скорости. Равнодействующая сил F_n и N сообщает необходимое нормальное ускорение: $F_n - N = mv^2/R$. Из рисунка $\sin \alpha = F_t/(mg)$; $\cos \alpha = F_n/(mg)$. С течением времени растет угол α и возрастает F_t . Поэтому скорость возрастает неравномерно — это неравноускоренное движение. При увеличении угла α уменьшается $F_n = mg \cos \alpha$, увеличивается скорость и, следовательно, правая часть рассматриваемого уравнения. Может ли соблюдаться равенство, правая часть которого непрерывно возрастает, а единственное положительное слагаемое левой части непрерывно уменьшается?

Может, если второе (отрицательное) слагаемое левой части будет уменьшаться по модулю быстрее, чем первое. Но уменьшение модуля силы реакции N возможно лишь до нуля. В соответствующей точке (радиус под углом α_m к вертикали) еще возможно создание необходимого нормального ускорения и $F_n = mv_m^2/R$, а в следующий момент времени скорость возрастает, F_n уменьшится, и не будет сил, сообщающих необходимое нормальное ускорение, — материальная точка оторвется от сферы. Следовательно, условие отрыва $N = 0$. В точке отрыва $mg \cos \alpha_m = mv_m^2/R$. Из рисунка $\cos \alpha_m = (R - h)/R$.

Значит, $mg(R - h)/R = mv_m^2/R$. Из закона сохранения энергии $mgh = mv_m^2/2$. Следовательно, $g(R - h) = 2gh$, откуда $h = R/3$.

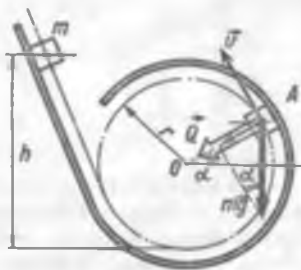
Задача 1.43. По желобу вертикальной петли скользит без трения тело массой 200 г. С какой силой тело давит на желоб в точке A , если $\alpha = 30^\circ$; $h = 3r$, а $r = 40$ см? При какой высоте h_1 тело перестанет давить на желоб в данной точке?

$$m = 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг};$$

$$\alpha = 30^\circ; h = 3r;$$

$$r = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м.}$$

$$Q = ? \quad h_1 = ?$$



$$\sum_{i=1}^n F_i^{33} = ma; \quad E^{61} = \text{const};$$

$$a_n^{13} = v^2/r.$$

Решение. Из основного уравнения динамики и закона сохранения энергии имеем:

$$mg \sin \alpha + Q = mv^2/r, \quad mgh^{61} = mg(r + r \sin \alpha) + mv^2/2.$$

Отсюда

$$v^2 = 2 [gh - gr(1 + \sin \alpha)] = 2gr(3 - 1 - \sin \alpha) = 2gr(2 - \sin \alpha).$$

Сила, с которой тело давит на желоб, по модулю равна силе действия желоба на тело:

$$Q = m \cdot 2gr(2 - \sin \alpha)/r - mg \sin \alpha = mg(4 - 2 \sin \alpha - \sin \alpha) = mg(4 - 3 \sin \alpha) = 0,2 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2(4 - 3 \sin 30^\circ) = 4,9 \text{ Н}.$$

Тело перестанет давить на желоб в данной точке при $Q_1 = 0$. Тогда

$$mg \sin \alpha = mv_1^2/r \text{ и } mgh_1 = mg(r + r \sin \alpha) + mv_1^2/2.$$

Следовательно,

$$h_1 = r + r \sin \alpha + gr \sin \alpha / (2g) = r(1 + 1,5 \sin \alpha) = 0,4 \text{ м}(1 + 1,5 \sin 30^\circ) = 0,7 \text{ м}.$$

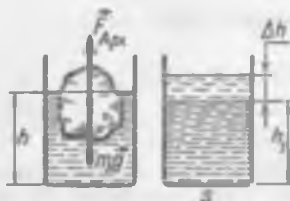
Задача 1.44. В цилиндрический сосуд с площадью дна 100 см^2 налита жидкость, плотность которой $1,2 \text{ г/см}^3$. В ней плавает кусок льда массой 300 г . На сколько большее давление испытывает дно сосуда благодаря наличию льда? Как изменится давление на дно, если лед растает?

$$S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$\rho = 1,2 \text{ г/см}^3 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$m_{\text{л}} = 300 \text{ г} = 0,3 \text{ кг}.$$

$$\Delta p_1 = ? \quad \Delta p_2 = ?$$



$$\rho = m/V; V = Sh;$$

$$p = \rho gh;$$

$$F_{\text{Арх}} = \rho_1 g V_1 = P$$

Решение. Условие плавания льда $F_{\text{Арх}} = m_{\text{л}}g$. По закону Архимеда выталкивающая сила $F_{\text{Арх}} = \rho g V'$, где V' — объем погруженной части льда. Если бы льда в сосуде не было, то уровень жидкости был бы равен h_1 и $V' = S(h - h_1)$. Давление на дно тогда было бы равно $p_1 = p_{\text{атм}} + \rho gh_1$. В присутствии льда давление на дно $p_2 = p_{\text{атм}} + \rho gh$. Разность давлений

$$\Delta p_1 = p_2 - p_1 = \rho g(h - h_1) = \rho g V' / S = F_{\text{Арх}} / S = m_{\text{л}}g / S = \frac{0,3 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2}{10^{-2} \text{ м}^2} = 294 \text{ Па}.$$

При таянии льда получившаяся вода растечется на поверхности данной жидкости (глубина которой станет h_1) плоским слоем толщиной Δh . Теперь давление на дно

$$p' = p_{\text{атм}} + \rho gh_1 + \rho_{\text{л}} g \Delta h.$$

По определению плотности $\rho_{\text{л}} = m_{\text{л}} / V_{\text{л}} = m_{\text{л}} / (S \Delta h)$. Отсюда $\rho_{\text{л}} \Delta h = m_{\text{л}} / S$. Следовательно,

$$p' = p_{\text{атм}} + \rho gh_1 + m_{\text{л}}g / S.$$

Искомая разность давлений

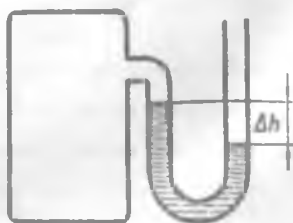
$$\begin{aligned} \Delta p_2 &= p' - p_2 = p_{\text{атм}} + \rho gh_1 + m_{\text{л}}g / S - p_{\text{атм}} - \rho gh = \\ &= p_1 + m_{\text{л}}g / S - p_2 = m_{\text{л}}g / S - (p_2 - p_1) = 0. \end{aligned}$$

При таянии льда суммарное давление на дно не изменилось, несмотря на уменьшение объема воды (по сравнению с объемом льда).

Задача 1.45. Давление в баллоне измеряется водяным манометром, представляющим собой U-образную трубку. Разность уровней воды в коленях 20 см. Атмосферное давление 760 мм рт. ст. Найти давление в баллоне.

$$\Delta h = 0,2 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} p_{\text{атм}} &= 760 \text{ мм рт. ст.} = \\ &= 0,76 \text{ м} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2. \\ p &= ? \end{aligned}$$



$$p_1 = p_f$$

Решение. Давление на уровне нижнего мениска воды, по закону сообщающихся сосудов, одинаково в обоих коленях:

$$p_{\text{атм}} = p + \rho g \Delta h.$$

Следовательно, искомое давление

$$\begin{aligned} p = p_{\text{атм}} - \rho g \Delta h &= 0,76 \text{ м} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 - 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 0,2 \text{ м} = \\ &= 9,94 \cdot 10^4 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Задача 1.46. Воздушный шар общим объемом 600 м^3 находится в равновесии. Какую массу балласта надо выбросить за борт, чтобы он начал подниматься с ускорением $0,1 \text{ м/с}^2$?

$$\begin{aligned} a &= 0,1 \text{ м/с}^2; \\ V &= 600 \text{ м}^3. \\ \Delta m &= ? \end{aligned}$$



$$\sum_{i=1}^n F_i = ma;$$

$$F_{\text{Арх}} = \rho_1 g V.$$

Решение. Условие равновесия $\rho_1 g V - mg = 0$, отсюда $m = \rho_1 V$ (m — масса оболочки, гондолы и газа внутри оболочки). Уравнение движения после сбрасывания балласта

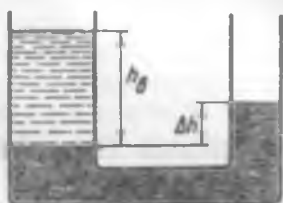
$$\rho_1 g V - (m - \Delta m) g = (m - \Delta m) a.$$

Отсюда $\Delta m g = (m - \Delta m) a$ и $\Delta m (g + a) = ma$. Искомая масса балласта

$$\Delta m = \frac{\rho_1 V a}{g + a} = \frac{1,29 \text{ кг} \cdot 600 \text{ м}^3 \cdot 0,1 \text{ м/с}^2}{9,81 \text{ м/с}^2 + 0,1 \text{ м/с}^2} = 7,81 \text{ кг}.$$

Задача I.47. В сообщающиеся сосуды налита ртуть, поверх которой в одном из них находится вода. Разность уровней ртути 15 мм. Найти высоту столба воды.

$$\frac{\Delta h = 15 \text{ мм} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м.}}{h_2 = ?}$$



$$p = \rho g h;$$

$$p_1 = p_2.$$

Решение. По закону сообщающихся сосудов $p_{\text{атм}} + \rho_2 g h_2 = p_{\text{атм}} + \rho g \Delta h$, откуда

$$h_2 = \frac{\rho \Delta h}{\rho_2} = \frac{13,6 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot 15 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot 10^3 \text{ кг}} = 2,04 \cdot 10^{-1} \text{ м.}$$

РАЗДЕЛ II

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ГЛАВА I

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЕЩЕСТВА

§ 1.1. Основные положения

В механике мы рассматривали движения макроскопических (больших) тел, в большинстве случаев не интересуясь их структурой. В молекулярной физике мы переходим к изучению микроскопических (достаточно малых, не видимых невооруженным глазом) объектов, к которым обычно не применяется термин «тело». В этом разделе изучается движение молекул.

Еще древнегреческие философы путем логических рассуждений (они считали опыт недостойным «мыслящего» человека) пришли к представлению об «атомах»*, как о «кирпичах мироздания». В средние века вещества рассматривались как непрерывные. С XVII в. для объяснения наблюдаемых опытов возрождаются представления древнегреческих атомистов, а в XIX в. доказывается атомный и молекулярный состав вещества.

Физические и химические свойства частиц вещества достаточно хорошо известны, существование их не вызывает сомнений, некоторые из этих частиц доступны непосредственному наблюдению и получаются искусственно.

За исключением положения о хаотическом движении молекул, основные положения молекулярно-кинетической теории вещества не претерпели существенных изменений со времен Ломоносова:

1. Вещество состоит из молекул. Молекула** — мельчайшая частица вещества, сохраняющая некоторые его свойства. Это предел делимости вещества, при дальнейшем дроблении которого данное вещество исчезает. В состав молекулы входят атомы — мельчайшие частицы химического элемента, сохраняющие его химические свойства. При дроблении атомов исчезает данный химический элемент (такие превращения рассматриваются в атомной физике).

Доказательствами молекулярного строения вещества являются броуновское движение, диффузия — явление переноса массы вещества хаотически движущимися молекулами; распространение запахов, при котором отдельные молекулы раздражают центры обоняния; растворение вещества, при котором его молекулы проникают в промежутки между молекулами растворителя.

2. Молекулы находятся на определенных расстояниях друг от друга. Доказательством существования таких расстоя-

* atomos (греч.) — неделимый.

** moles (лат.) — масса, cula — уменьшительный суффикс.

ний является возможность сжатия, при котором молекулы сближаются. Невозможны были бы перечисленные процессы, если бы молекулы одного вещества не могли проникать в промежутки между молекулами другого.

3. Молекулы связаны друг с другом силами молекулярного взаимодействия — притяжения и отталкивания. Эти силы зависят от расстояния между молекулами. На рис. 120 изображены графики зависимости сил притяжения и отталкивания, а также их равнодействующей (жирная линия) от расстояния между центрами двух молекул. Силы отталкивания гораздо больше сил притяжения на малых расстояниях, но гораздо быстрее убывают с увеличением расстояния между молекулами. Силы притяжения тоже быстро убывают с увеличением расстояния, так что начиная с некоторого расстояния r_0 между центрами молекул их взаимодействием можно пренебречь. Наибольшее расстояние r_0 , на котором молекулы еще взаимодействуют, называют *радиусом молекулярного действия*.

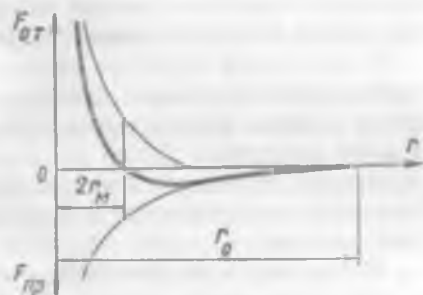


Рис. 120

Расстояние между центрами молекул, при уменьшении которого начинают превалировать силы отталкивания, называют (чисто условно) удвоенным радиусом молекулы ($2r_m$ — если бы молекулы были почти жесткими шариками, при таком расстоянии между центрами они соприкасались бы, при дальнейшем сжатии — деформировались и потому отталкивались бы).

Жирую кривую около точки $2r_m$ можно приблизительно считать прямой. Тогда выполняется закон Гука. При уменьшении межмолекулярных расстояний возникает результирующая сила отталкивания, препятствующая деформации и пропорциональная ей. При увеличении расстояний результирующей является сила притяжения, тоже препятствующая деформации и ей пропорциональная. Если нет других воздействий, то молекулы располагаются на расстояниях $2r_m$ и находятся в устойчивом равновесии. И те и другие силы достаточно велики на малых расстояниях и очень быстро (гораздо быстрее гравитационных) убывают с расстоянием. Например, для воды $F_{пр} \sim 1/r^7$; $F_{от} \sim 1/r^{12}$. Для того чтобы эти силы проявились, надо молекулы достаточно сблизить. Так, свсжеразрезанный свинцовый цилиндр «срастается» и даже выдерживает определенную нагрузку, если достаточно близко сдвинуть и сдавить его части.

Силы молекулярного взаимодействия по своей природе электромагнитны.

4. Молекулы находятся в непрерывном беспорядочном движении. Доказательством движения молекул является та же диффузия, растворение, распространение запахов, испарение жидкости и т. п. Прямое доказательство движения молекул — броуновское движение. Это движение впервые наблюдал английский врач Броун. Микроскопические броуновские частицы (не молекулы, а большие — относительно

размеров молекул — частицы, наблюдаемые в микроскоп) беспорядочно движутся под ударами молекул жидкости.

Но говоря о беспорядочности движения, мы имели в виду только механический беспорядок. В первом приближении молекула — механическая частица, к которой применимы законы динамики. Казалось бы, написав и решив систему уравнений движения всех частиц, мы опишем полностью прошлое и будущее тела или системы тел. То, что уравнений много, — это временное затруднение для вычислительных машин. Но в полном соответствии с диалектикой количество (в данном случае молекул) переходит в новое качество — качественно новый вид движения со своими специфическими законами — статистическими (см. § 1.2).

5. Молекулярная система обладает энергией. Движущиеся молекулы имеют кинетическую энергию. Они связаны молекулярными силами, следовательно, образуют систему, обладающую потенциальной энергией.

Внутренней энергией данной системы тел является сумма кинетических, потенциальных и всяких других (ядерных, атомных) энергий всех частиц этой системы.

Мы выделили энергии кинетические и потенциальные, потому что в процессах, изучаемых в молекулярной физике, все другие виды энергии практически не изменяются (как правило, нас будет интересовать не внутренняя энергия системы, а ее изменение).

§ 1.2. Статистические закономерности

Нельзя, не договорившись предварительно, утверждать, что тот или иной слушатель после занятий пойдет в определенный кинотеатр, на определенный сеанс и сядет на определенное место. Это событие может произойти, но точно предсказать его — почти то же самое, что угадать все шесть чисел в спортивном лото. Но при случайном характере одного посещения кинотеатра одним человеком можно, оказывается, построить теорию многих посещений кинотеатров многими людьми и на основе этой теории сосчитать, сколько (приблизительно, но достаточно строго) зрителей тогда-то пойдет в кино. Если бы в соответствии с этой теорией было построено достаточно кинозалов (с определенным количеством посадочных мест), то можно было бы в субботу вечером легко попасть в кинотеатр без предварительного заказа.

Эта же теория позволяет рассчитать количество магазинов, парикмахерских, кафе, столовых, автомобилей, троллейбусов и т. д., необходимых для ликвидации всяких очередей.

Все такие явления, в которых участвует большое число однородных объектов, называют *массовыми*. Закономерности, которым подчиняются массовые явления, — *статистические*. В таких явлениях нельзя получить ответы на вопросы о точном поведении конкретного объекта. Правомочен лишь вопрос о вероятности того или другого события.

Будем подбрасывать, например, игральную кость — кубик с цифрами на каждой грани от единицы до шести. Пусть мы задались целью получить число 4. Считаем выпадение того или иного числа случайным и равновероятным с остальными событиями; исключаем падение кубика на

ребро или вершину; убеждены, что он обязательно упадет. Бросаем кубик много раз и считаем результаты. Обозначим N — число испытаний, N_1 — число благоприятных событий (в нашем случае — выпадений цифры 4). Назовем вероятностью данного события предел, к которому стремится отношение числа благоприятных событий к числу испытаний при неограниченном возрастании числа испытаний:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N}.$$

В нашем примере цифра 4 (или любая другая) выпадает с вероятностью $P = 1/6$. Теперь вы сами можете подсчитать вероятность определенного выигрыша в лотерее.

Аналогичен подход к любым статистическим явлениям. Нельзя сказать, сколько частиц тела имеют определенные скорости или координаты в данный момент времени (строго говоря, ни одной), можно лишь вычислить вероятность нахождения в заданном объеме той или иной частицы со скоростью из заданного интервала скоростей. Можно иначе поставить тот же вопрос: сколько (приблизительно, но достаточно строго) частиц тела в данный момент имеют скорости и координаты из заданных интервалов? Точность ответа на этот вопрос будет тем выше, чем больше частиц в рассматриваемом объекте.



Рис. 121

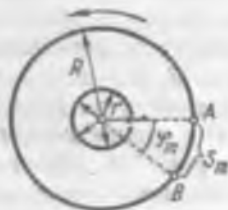


Рис. 122



Рис. 123

Имеем статистически большой ансамбль частиц. Мы утверждали, что они беспорядочно движутся. И действительно, неизвестны скорости всех частиц в произвольный момент времени. Но, оказывается, разные скорости различных частиц встречаются с разными вероятностями. В этом можно убедиться на опыте Штерна. Раскаленная нить, покрытая серебром, расположена на оси двух коаксиальных (имеющих общую ось, рис. 121) цилиндров, помещенных в вакуумированный сосуд. Некоторые атомы серебра покидают нить и по радиусам разлетаются в разные стороны.

Во внутреннем цилиндре радиусом r вдоль его образующих сделана узкая длинная щель. Атомы серебра осаждаются на внутренней поверхности внутреннего цилиндра. И только те атомы, которые попали в щель, достигают внутренней поверхности внешнего цилиндра радиусом R в точках, расположенных в районе образующей A (рис. 122). Они создают здесь изображение щели, которое можно увидеть, если через некоторое время развернуть внутреннюю поверхность этого цилиндра (рис. 123, а).

Приведем оба цилиндра, жестко связанные друг с другом, в равномерное вращение с угловой скоростью ω (например, против часовой стрелки). Нить при этом остается неподвижной, поэтому атомы серебра по-прежнему движутся по радиусам и осаждаются на внутреннем цилиндре. Те атомы, которые прошли сквозь щель, продолжают по радиусу двигаться к внешнему цилиндру. Но за время движения атома по пути $R - r$ система успевает повернуться на некоторый угол ϕ (см. рис. 122), так что эти атомы попадают в другие точки внешнего цилиндра.

Если бы все атомы серебра в данном опыте имели одинаковые скорости, то они проходили бы путь $R - r$ за одинаковые промежутки времени и попадали бы на одну образующую B . Через некоторое время на внутренней поверхности внешнего цилиндра было бы геометрическое изображение щели в точке B (рис. 123, б).

В действительности, развернув через некоторое время внутреннюю поверхность внешнего цилиндра, мы увидим изображение (рис. 123, в), ширина которого гораздо больше геометрического изображения щели. Это можно объяснить только тем, что атомы серебра отделяются от нити с различными скоростями. Атомы, летящие с некоторой скоростью, попадают в точку B . Атомы, летящие быстрее, попадают на внешний цилиндр ближе к точке A , летящие медленнее — дальше от точки A (за B). В результате рис. 123, в представляет собой развертку атомов серебра по скоростям. Каждой точке изображения соответствует определенная скорость, которую достаточно просто определить из опыта.

Но каждой точке соответствует и определенное количество атомов, движущихся приблизительно с этой скоростью, о котором можно судить по толщине отложившегося слоя серебра. Если сделать срез, параллельный плоскости рис. 122, то его вид под микроскопом будет примерно соответствовать изображенному на рис. 124. Конечно, если повторить эксперимент, количество атомов, имеющих скорости из какого-либо интервала скоростей, изменится, но изменение будет мало по сравнению с числом таких атомов, если атомов статистически много. Другими словами, характер распределения атомов по скоростям не изменится. Значит, мы можем изобразить зависимость числа атомов, имеющих скорости из какого-то интервала, от скорости, и эта зависимость будет статистически верной при всех одинаковых опытах (рис. 125).

Пусть ΔN — число частиц, имеющих скорости из интервала Δv ; v — одна из скоростей этого интервала (безразлично, какая именно, если интервал достаточно мал). Произведение

$$\frac{\Delta N}{\Delta v} \Delta v = \Delta N$$

графически показано заштрихованной площадкой. Мы видим, что числа частиц, имеющих скорости из равных интервалов Δv_1 , Δv_2 и Δv_3 , резко различны.

Существует какая-то скорость, около которой расположены наиболее «населенные» интервалы. Она называется *наиболее вероятной скоростью* v_m и ей соответствует максимум на рис. 124. Чем больше скорость частиц отличается от v_m , тем меньше число таких частиц. Мы получили



Рис. 124

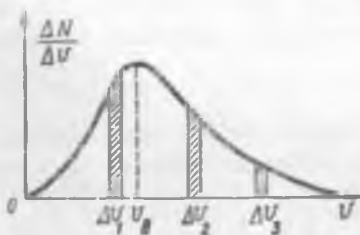


Рис. 125

кривую *распределения Максвелла молекул по скоростям* (рис. 125). Опыт Штерна позволяет экспериментально определить наиболее вероятную скорость. Для этого нужно найти, под каким углом φ_m расположен максимум распределения (относительно радиуса в точке А, рис. 122) или на каком расстоянии s_m от точки А он расположен на развертке (см. рис. 123, в). Тогда

$$v_m = \frac{R-r}{\tau} \frac{23-1}{\varphi_m} \omega \frac{1-M}{s_m} \frac{R-r}{R\omega}.$$

Такому распределению подчиняются молекулы всевозможных веществ в различных состояниях при данной температуре. Увеличим теперь температуру. Тогда возрастет наиболее вероятная скорость, больше появится быстрых частиц, вся кривая сместится (рис. 126).

Если сложить все элементарные площадки (рис. 125), то получится площадь под кривой распределения молекул по скоростям (до оси абсцисс), численно равная числу частиц, имеющих какую-нибудь скорость, т. е. общее число частиц N . Это число при нагревании тела не изменилось, площадь под кривой должна остаться прежней. Но увеличилось количество быстрых частиц, следовательно,

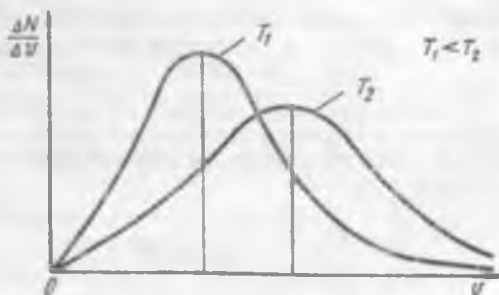


Рис. 126

уменьшилось число частиц медленных и даже тех, которые движутся со скоростями, близкими к наиболее вероятной.

Если существует распределение молекул по скоростям, то ему должно соответствовать определенное распределение молекул по энергиям, так как

кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы $W_i = mv_i^2/2$. Среднюю кинетическую энергию молекул получим по определению среднего арифметического:

$$\langle W_k \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N mv_i^2/2}{N} = \frac{m \sum_{i=1}^N v_i^2}{2N} = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2}, \quad (1)$$

где

$$\langle v^2 \rangle = \sum_{i=1}^N v_i^2/N \quad (2)$$

— квадрат средней квадратичной скорости. При увеличении температуры тела возрастает средняя квадратичная скорость

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} \propto \sqrt{\sum_{i=1}^N v_i^2/N}.$$

Значит, растет и средняя кинетическая энергия

$$\langle W_k \rangle = m \langle v^2 \rangle/2.$$

Оказывается, средняя кинетическая энергия частиц тела пропорциональна его температуре:

$$\langle W_k \rangle \sim T.$$

Физический смысл температуры состоит именно в том, что она является мерой средней кинетической энергии поступательного движения частиц тела.

§ 1.3. Тепловое расширение тел

Все тела при нагревании расширяются, при охлаждении сжимаются. Исключение: вода при охлаждении от 4 до 0°C расширяется и имеет самую большую плотность при 4°C. Для твердых длинных тел имеет смысл говорить о линейном расширении. Например, очень важно знать,

* Читается: корень квадратный из среднего значения квадрата скорости (под корнем не v среднее в квадрате, а v^2 квадрат среднее). Квадратом средней квадратичной какой-либо величины называется среднее арифметическое значение квадратов этой величины:

$$\langle a^2 \rangle = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}$$

(напомним, что угловые скобки — знак усреднения). Средней квадратичной этой величины называется корень квадратный из квадрата средней квадратичной:

$$\sqrt{\langle a^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}.$$

как зимой и летом изменяется длина железнодорожных рельсов, но несущественно изменение их ширины или высоты.

Для характеристики такого расширения введем следующие обозначения: l_T — длина тела при температуре T , l_0 — длина этого же тела при температуре $T_0 = 273$ К. Изменение длины тела при нагревании от T_0 до T равно $l_T - l_0$. Относительное изменение длины при таком нагревании $(l_T - l_0)/l_0$.

Отношение относительного изменения длины к вызвавшему его изменению температуры называется *коэффициентом линейного расширения*:

$$\alpha = \frac{l_T - l_0}{l_0 \Delta T}. \quad (3)$$

Отсюда длина тела при любой температуре

$$l_T \stackrel{3}{=} l_0 (1 + \alpha \Delta T). \quad (4)$$

Для характеристики объемного расширения тел обозначим: V_0 и V_T — соответственно объемы тела при температурах $T_0 = 273$ К и T . Тогда $V_T - V_0$ — изменение объема тела при нагревании на $\Delta T = T - T_0$; $(V_T - V_0)/V_0$ — относительное изменение объема при таком нагревании.

Отношение относительного изменения объема к соответствующему изменению температуры называется *коэффициентом объемного расширения*:

$$\beta = \frac{V_T - V_0}{V_0 \Delta T}. \quad (5)$$

Объем тела при произвольной температуре

$$V_T \stackrel{5}{=} V_0 (1 + \beta \Delta T). \quad (6)$$

Для твердых тел в таблицы внесен только коэффициент линейного расширения, так как между коэффициентами линейного и объемного расширения существует определенная связь.

Возьмем куб из данного вещества с ребром l_0 при температуре T_0 (рис. 127). Его объем $V_0 = l_0^3$. Нагреем его на ΔT кельвинов. Длина ребра увеличится до l_T , объем — до V_T , но куб останется кубом, т. е. $V_T = l_T^3$. Подставим в эту формулу выражения (4) и (6):

$$V_0 (1 + \beta \Delta T) = l_0^3 (1 + \alpha \Delta T)^3.$$

Коэффициенты при скобках одинаковы. Значит,

$$1 + \beta \Delta T = 1 + 3\alpha \Delta T + 3\alpha^2 \Delta T^2 + \alpha^3 \Delta T^3.$$

Коэффициент линейного расширения для твердых веществ порядка 10^{-3} К $^{-1}$. Следовательно, в последнем выражении можно пренебречь членами, содержащими α^2 и α^3 , как бесконечно малыми высших порядков относительно члена, содержащего α в первой степени. Получаем $\beta \Delta T = 3\alpha \Delta T$, откуда

$$\beta = 3\alpha. \quad (7)$$

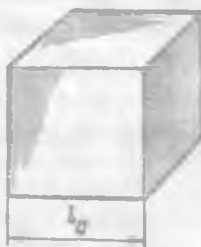


Рис. 127

Мы рассмотрели некоторые общие свойства вещества. В различных агрегатных состояниях — твердом, жидком, газообразном, плазменном — вещества имеют специфические свойства. Мы начнем изучение агрегатных состояний с наипростейшего — газообразного.

ГЛАВА 2

СВОЙСТВА ГАЗОВ

§ 2.1. Параметры

Газ — обычно совокупность слабо связанных молекул. Поэтому рассмотрим модель *идеального газа* — такого газа, молекулы которого исчезающе малы (по сравнению с размерами сосуда), свободно движутся между столкновениями (без взаимодействия) и сталкиваются по законам абсолютно упругого удара.

Для описания заданного состояния массы m газа надо знать некоторые определяющие величины, называемые *параметрами* *:

1) V — объем данной массы газа. При отсутствии массовых (см. разд. I, § 2.11) сил статистически наиболее вероятно равномерное распределение молекул газа по объему.

При этом определенная часть массы m газа занимает такую же часть объема сосуда. Если V — объем массы m , то $V_1 = V/n$ — объем массы $m_1 = m/n$, где n — произвольное число;

2) T — температура газа (см. § 2.5);

3) p — давление газа — величина, измеряемая отношением средней силы ударов молекул о тело (например, стенки сосуда) к площади его поверхности.

К параметрам газа можно отнести и его плотность ρ . Такие параметры, как температура, давление, плотность, могут изменяться с течением времени или при переходе от одной точки к другой.

Система находится в *равновесном состоянии*, если все ее параметры остаются неизменными без каких-либо внешних воздействий. В частности, если газ находится в равновесном состоянии под действием только поверхностных (см. разд. I, § 4.1) сил, то его температура, давление, плотность и т. д. одинаковы по всему объему и неизменны.

§ 2.2. Основное уравнение кинетической теории газов

Пусть N молекул газа находятся в равновесном состоянии внутри куба с ребром l (рис. 128), причем газ настолько разрежен, что можно пренебречь столкновениями молекул друг с другом.

Движение всех молекул можно разложить по трем направлениям осей координат и рассматривать независимые движения, параллельные этим координатным осям. При хаотическом движении все направления равновероятны, поэтому можно считать, что вдоль каждой оси движется $N_x = N_y = N_z = N/3$ молекул. Усредненная сила ударов этих молекул о стенки

* parametron (греч.) — отмеривающий.

сосуда, отнесенная к единице поверхности, представляет собой давление газа на стенку. При ударе о стенку сосуда отмеченная на рис. 128 молекула отскакивает абсолютно упруго, т. е. изменяет свою скорость v_1 на обратную. Изменение ее импульса равно

$$\Delta p = p'_1 - p_1 = m_1 v_1 - (-m_1 v_1) = 2m_1 v_1.$$

По второму закону Ньютона изменение импульса за единицу времени равно силе, с которой стенка действует на молекулу:

$$f_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m_1 v_1}{\Delta t}.$$

Здесь f_1 — средняя (за время удара Δt) сила, с которой стенка действует на молекулу, по третьему закону Ньютона она равна силе, с которой эта молекула действует на стенку; Δt — время одного соударения данной молекулы со стенкой (направления сил ясны из рисунка). За какое-то время t эта молекула ударится о выбранную стенку ($x = 0$, рис. 128) k раз и передаст ей импульс $2m_1 v_1 k$. Значит, средняя (за время t) сила, действующая на молекулу со стороны стенки (или на стенку со стороны выбранной молекулы), равна

$$F_1 = \frac{k \cdot 2m_1 v_1}{t}.$$

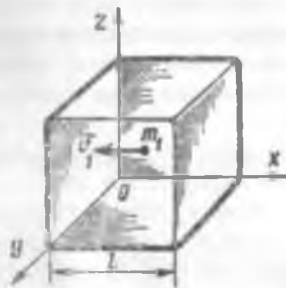


Рис. 128

Число k соударений легко узнать, зная время t между двумя последовательными соударениями данной молекулы с этой стенкой:

$$k = \frac{t}{\tau} = \frac{t}{2l} v_1,$$

так как $v_1 = 2l/\tau$. Получаем

$$F_1 = \frac{t}{2l} v_1 \frac{2m_1 v_1}{t} = \frac{m_1 v_1^2}{l}.$$

откуда средняя (за произвольное время t) сила давления выбранной молекулы на стенку $F_1 = m_1 v_1^2/l$. Другая молекула будет действовать на эту стенку аналогичной силой $F_2 = m_2 v_2^2/l$ (мы считаем массы молекул одинаковыми: $m_1 = m_2$) и т. д. Сложим силы давления от всех N_x молекул, движущихся вдоль оси x :

$$\langle F \rangle = \frac{m_1}{l} \sum_{i=1}^{N_x} v_i^2.$$

* Это выражение справедливо и для не очень разреженного газа, где существенны столкновения молекул друг с другом. Такие столкновения, если они абсолютно упруги, приводят только к изменению скоростей отдельных молекул, но не их суммы. Даже изменение направления движения отдельных молекул сопровождается соответствующим изменением скоростей других молекул, так что суммарное движение вдоль выбранных осей остается статистически неизменным.

По определению, квадрат средней квадратичной скорости

$$\langle v^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N_x} v_i^2 / N_x$$

отсюда

$$\langle F \rangle = \frac{m_1}{l} N_x \langle v^2 \rangle, \text{ или } \langle F \rangle = \frac{m_1}{l} \frac{N}{3} \langle v^2 \rangle.$$

Тогда давление на стенку

$$p \equiv \frac{\langle F \rangle}{l^2} = \frac{m_1 N}{l^2 \cdot 3} \langle v^2 \rangle = \frac{m_1}{V} \frac{N}{3} \langle v^2 \rangle,$$

где $l^3 = V$ — объем сосуда.

Величина, равная отношению числа молекул в объеме V к этому объему, называется *концентрацией молекул*:

$$n_0 = \frac{N}{V}. \quad (8)$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы

$$m_1 \langle v^2 \rangle / 2 \equiv \langle W_x \rangle.$$

Следовательно,

$$p = \frac{m_1 n_0}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n_0 \frac{m_1 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{2}{3} n_0 \langle W_x \rangle \quad (9)$$

— основное уравнение кинетической теории газов.

Давление газа зависит от его концентрации (от которой зависит количество ударов о стенку) и от средней кинетической энергии поступательного движения его молекул (с которой связана сила каждого удара и их число), зависящей в свою очередь от температуры.

Мы получили связь *макропараметров* (характеристики статистически больших ансамблей частиц) с усредненными *микропараметрами* (характеристики каждой частицы ансамбля). Макропараметрами в данном случае являются температура и давление. Бессмысленно говорить о давлении или температуре одной молекулы. Микропараметрами у нас были скорости и кинетические энергии каждой молекулы (естественно, $\langle v^2 \rangle$ или $\langle W_x \rangle$) как средние значения микропараметров относятся к статистическому ансамблю частиц).

Если давление производит смесь газов, то аналогичный вывод приведет нас к закону Дальтона: *давление смеси газов равно сумме их парциальных* давлений*:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (10)$$

* pars (лат.) — часть. *Парциальное давление* — давление отдельного газа в смеси. Именно такое давление производил бы этот газ при отсутствии других газов в данном сосуде.

§ 2.3. Газовые законы

Параметры вещества в любом состоянии связаны друг с другом *уравнением состояния*, вида которого мы в большинстве случаев не знаем. Только для случая газов, частицы которых достаточно далеки друг от друга и почти не взаимодействуют, такое уравнение известно сравнительно точно.

Равновесное состояние газа удобно изображать на *p-V-диаграмме* — графике зависимости давления от объема. Точка на таком графике соответствует заданному давлению и объему данной массы газа и, по уравнению состояния, некоторой температуре. Определенные давление и температуру во всех точках данного объема заданная масса газа может иметь лишь в равновесном состоянии.

Процесс описывается изменением параметров. Процессы, изображаемые на *p-V-диаграмме*, являются идеализированными, потому что всякое изменение параметров в реальной системе влечет за собой локальные отклонения параметров от их общих значений и, следовательно, *неравновесность* состояния.

Процесс, состоящий из бесконечно близких равновесных состояний, называется *равновесным* и может быть изображен на *p-V-диаграмме*. Реальные процессы могут быть только приблизительно похожи на равновесные. Но изучить закономерности изменения параметров в процессах удобно именно в идеализированном случае. Первоначально взаимосвязь параметров была исследована экспериментально. Были открыты *газовые законы*, устанавливающие такую связь для определенной массы газа в *изопроцессах** (процессы, при которых один из параметров не изменяется).

Закон Бойля — Мариотта. Определенная масса *m* газа заперта в трубке *A* над ртутью (рис. 129, *I*). Процесс, состоящий в изменении объема при неизменной температуре, приводит к соответствующему изменению давления. Поднимем трубку *B* так, чтобы объем *A*, предоставленный газу, уменьшился вдвое (рис. 129, *II*). Тогда, по закону сообщающихся сосудов (см. разд. I, § 4.1), давление газа будет равно сумме давлений избыточного столба ртути и атмосферного. Оно оказывается вдвое больше первоначального (атмосферного) давления.

Опустим теперь сосуд *B* так, чтобы объем газа *A* увеличился вдвое (по сравнению с первоначальным; рис. 129, *III*). Тогда давление в сосуде *A* станет меньше атмосферного на давление соответствующего ртутного столба. Оно оказывается вдвое меньше атмосферного, т. е. первоначального давления.

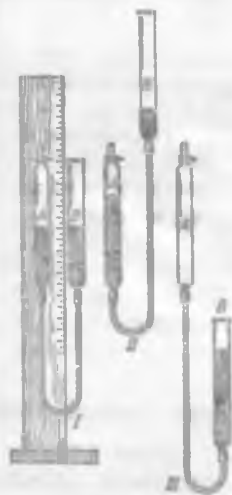


Рис. 129

* *isoz* (греч.) — равный, одинаковый.

Таким образом, произведение объема данной массы газа на его давление есть величина постоянная при неизменной температуре:

$$pV = \text{const} \quad (11)$$

— закон Бойля — Мариотта.

Процесс, протекающий при постоянной температуре, называется *изотермическим**. Кривая изотермического процесса называется *изотермой*, особенностью такой кривой на p - V -диаграмме является то, что она представляет собой множество вершин равновеликих прямоугольников (рис. 130). Пользоваться законом Бойля — Мариотта можно в виде

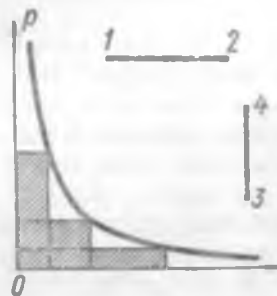


Рис. 130

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (12)$$

— для любых двух состояний данной массы газа или

$$pV = p_0 V_0,$$

где V_0 — объем, который данная масса газа (при той же температуре) примет под нормальным давлением $p_0 = 101\,325$ Па (см. разд. I, § 4.5).

Этот закон можно получить теоретически из основного уравнения кинетической теории газов. В самом деле,

$$pV = \frac{2}{3} n_0 V \langle W_k \rangle;$$

число молекул в данном объеме связано с постоянной Авогадро $N_A = 6,022045 \times 10^{23}$ моль⁻¹ — числом молекул в одном моле газа — и числом молей в массе m .

Обозначим буквой M молярную массу — массу моля данного газа. Тогда число молей, содержащееся в некоторой массе m газа, найдется как частное от деления этой массы на массу одного моля: m/M . Следовательно, число молекул в данном объеме

$$N = n_0 V = N_A \frac{m}{M},$$

поэтому

$$pV = \frac{2}{3} N_A \frac{m}{M} \langle W_k \rangle = \text{const}$$

(при постоянной температуре и, следовательно, средней кинетической энергии).

Закон Гей-Люссака. Тепловое расширение тел характеризуется коэффициентом объемного расширения β . Объем данной массы газа при любой температуре связан с объемом той же массы при 273 К и неизменном давлении формулой (6).

Практически измерить объем и температуру данной массы газа при неизменном давлении можно на газовом термометре (рис. 131). Снаружи действует атмосферное давление, при равновесии капли ртути в го-

* *thermos* (греч.) — теплый; термический — относящийся к теплоте, температуре.

ризонгальной трубе давления на эту каплю снаружи и изнутри одинаковы, значит, внутри — тоже атмосферное давление. Измеряя коэффициенты объемного расширения ряда газов, Гей-Люссак помещал газовый термометр в тающий лед, затем в пары кипящей воды. На опыте он доказал, что коэффициенты объемного расширения всех газов одинаковы и равны

$$\beta = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1} = \frac{1}{T_0}$$

— закон Гей-Люссака.

Процесс, протекающий под неизменным давлением, называется *изобарным**, кривая такого процесса — *изобара* (см. рис. 130, 1—2).

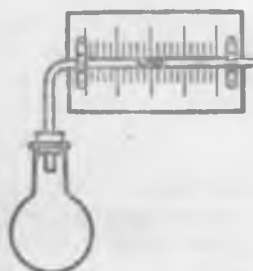


Рис. 131

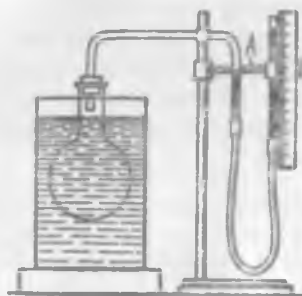


Рис. 132

Закон Шарля. Зависимость давления от температуры при постоянном объеме можно исследовать на газовом термометре Шарля (рис. 132). Правое колено манометра сделано подвижным и по мере увеличения давления в сосуде поднимается так, чтобы уровень ртути в левом колене всегда оставался около метки А. Тем самым обеспечено постоянство предоставленного газу объема.

Пусть p_0 и p_T — давления газа при температурах $T_0 = 273 \text{ K}$ и T , $p_T - p_0$ — изменение давления при нагревании от T_0 до T , $(p_T - p_0)/p_0$ — относительное изменение давления при таком нагревании, $\Delta T = T - T_0$. Отношение относительного изменения давления газа к изменению его температуры называется *термическим коэффициентом давления*:

$$\gamma = \frac{p_T - p_0}{p_0 \Delta T} \quad (13)$$

Давление газа при произвольной температуре

$$p_T = p_0 (1 + \gamma \Delta T). \quad (14)$$

Помещая колбу с исследуемым газом в тающий лед и в пары кипящей воды, Шарль определял давления (при неизменном объеме) и вычислял термические коэффициенты давления разных газов. Он

* baros (греч.) — тяжесть.

получил, что *термические коэффициенты давления всех газов одинаковы и равны*

$$\gamma = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1} = \frac{1}{T_0}$$

— закон Шарля.

Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется *изохорным**. Кривая такого процесса — *изохора* (см. рис. 130, 3—4).

Давление газа

$$p = \frac{2}{3} n_0 \langle W_k \rangle.$$

При изохорном повышении температуры на 1 К возрастает средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы $\langle W_k \rangle$ и давление на $1/273$ первоначальной величины. При этом n_0 постоянно. При изобарном нагревании так же возрастает $\langle W_k \rangle$, но соответственно (на $1/273$ первоначальной величины) увеличивается объем и уменьшается концентрация.

Равенство $\beta = \gamma$ можно доказать и из закона Бойля — Мариотта: пусть некоторая масса газа при $T_0 = 273$ К имеет параметры p_0, V_0 ; нагреем ее до температуры T изобарно. Параметры нового состояния

$$p_0, V_T = V_0 (1 + \beta \Delta T).$$

Повторим нагревание, но проведем его изохорно. Параметры теперь станут равны

$$p_T = p_0 (1 + \gamma \Delta T), V_0.$$

В этих двух конечных состояниях одинаковые температуры T . Следовательно,

$$p_0 V_T = p_T V_0.$$

Иначе $p_0 V_0 (1 + \beta \Delta T) = p_0 V_0 (1 + \gamma \Delta T)$. Отсюда $1 + \beta \Delta T = 1 + \gamma \Delta T$ или $\beta = \gamma$.

Мы экспериментально изучили попарное изменение параметров газа. Как всякие экспериментальные выводы, газовые законы приблизительно верны. Они хорошо описывают поведение газов при невысоких давлениях и не слишком низких температурах, при которых были выведены.

Точно подчиняется газовым законам (при всех давлениях и температурах) только идеальный газ. Реальные газы подчиняются газовым законам приблизительно, поскольку можно пренебречь взаимодействием молекул на расстоянии и размерами самих молекул.

§ 2.4. Термодинамическая шкала температур

В формуле (14) $\Delta T = t$ представляет собой температуру по шкале Цельсия, где за нуль принята температура таящего льда при нормальном давлении ($t_0 = 0^\circ \text{C} \approx 273$ К).

* *chōra* (греч.) — пространство.

Давление идеального газа при любой температуре t (по этой шкале)

$$p_t = p_0 (1 + \gamma t).$$

Изобразим графически эту зависимость давления от температуры (рис. 133). Еще Ломоносов писал, что увеличивать давление при нагревании можно неограниченно, а уменьшать при охлаждении — только до определенной температуры. Если зависимость (14) справедлива в области очень низких температур, то можно дойти до температуры, при которой давление должно обратиться в нуль:

$$p_{t_1} = 0; 0 = p_0 (1 + \gamma t_1).$$

Но $p_0 \neq 0$, значит, $1 + \gamma t_1 = 0$. Отсюда

$$t_1 = -\frac{1}{\gamma} = -273^\circ \text{C}.$$

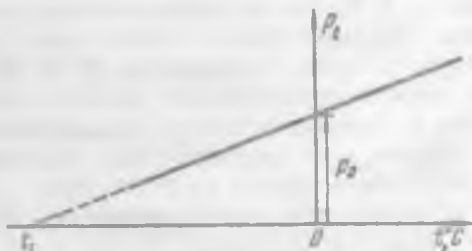


Рис. 133



Рис. 134

Английский физик Томсон (лорд Кельвин) предложил принять за нуль *абсолютной (термодинамической) шкалы температур* именно эту температуру t_1 , которую он назвал *абсолютным нулем температуры*. Шкала Кельвина имеет деления, равные градусам Цельсия. Такая шкала с делениями, равными 2К или 2°C , изображена на рис. 134.

В действительности, ни зависимость (14), ни само понятие идеального газа не сохраняются при температурах, близких к 0 К, поэтому наш расчет имеет ориентировочный характер. По уточненным данным, абсолютный нуль температуры равен $t_1 = -273,15^\circ \text{C}$.

Об измерении температуры сказано в § 2.5. Ее единицы введены в § 4.5. Пока только напомним, что по шкале Цельсия температурный интервал между точками таяния льда и кипения воды при нормальном давлении разбит на сто равных частей — градусов. Первая из этих точек 0°C , вторая — 100°C (рис. 134). Температура таяния льда была названа *нормальной температурой*. Ее значение по термодинамической шкале $T_0 = 273,15 \text{ K}$.

Физический смысл 0 К состоит в том, что при этой температуре исчезает давление, которое является результатом ударов молекул о стенки сосуда. Значит, при этой температуре должно прекратиться поступательное движение молекул (молекулы могут вращаться, атомы

в молекуле колебаться и т. д.). Практически 0 К недостижим, к этой температуре можно подойти сколь угодно близко. Сейчас достигнута температура $T = 0,0001$ К. Не имеет в молекулярной физике смысла температура $T < 0$ К, так как не может быть движения с отрицательным квадратом скорости. Как видно из рис. 134, любая температура T (по термодинамической шкале) связана с соответствующей температурой t (по шкале Цельсия) формулой

$$T = t + 273 \text{ К.} \quad (15)$$

§ 2.5. Уравнение состояния идеального газа

Газовые законы связывают параметры данной массы газа попарно. В произвольных процессах изменяются все параметры, связанные друг с другом уравнением состояния. Пусть определенная масса m газа занимает при нормальных условиях (давлении p_0 и температуре T_0) объем V_0 . Переведем из этого состояния газ изотермическим процессом в другое состояние с параметрами p_1, V, T_0 . Затем, чтобы изменить все параметры, переведем газ из второго — промежуточного — состояния в третье изохорным процессом. Параметры в этом состоянии p, V, T . В это произвольное состояние газ из первого состояния мог попасть любым другим произвольным процессом, а связь параметров начала и конца процесса не зависит от его формы (от промежуточных состояний), так как параметры характеризуют именно данное состояние.

Для первого процесса связь параметров устанавливаем из закона Бойля — Мариотта:

$$p_0 V_0 \stackrel{12}{=} p_1 V.$$

Для второго — из закона Шарля:

$$p \stackrel{14}{=} p_1 (1 + \gamma \Delta T).$$

В этих двух уравнениях один параметр (p_1) относится только к промежуточному состоянию. Исключим его из этих уравнений, разделив почленно второе уравнение на первое:

$$\frac{p}{p_0 V_0} = \frac{1 + \gamma \Delta T}{V}.$$

Получено уравнение состояния, ибо оно связывает параметры двух состояний — нормального и произвольного. Но его можно упростить, преобразовав числитель правой части:

$$1 + \gamma \Delta T = 1 + \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{T}{T_0}.$$

Здесь T — термодинамическая температура газа в конечном состоянии, $\gamma = 1/T_0$ — по закону Шарля. Уравнение состояния принимает вид $p/(p_0 V_0) = T/(V T_0)$ или

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}. \quad (16)$$

Величина, стоящая справа, постоянна для данной массы газа (при нормальных условиях данная масса газа занимает определенный объем V_0). Следовательно, для произвольного состояния

$$\frac{pV}{T} = B. \quad (17)$$

Мы получили уравнение Клапейрона: произведение давления на объем данной массы газа, деленное на его термодинамическую температуру, есть величина постоянная (для этой массы газа).

Его можно использовать для определения одного из параметров либо в виде (16), либо в виде

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (18)$$

— для любых первого и второго состояний данной массы газа.

По закону Авогадро, моль любого газа при нормальных условиях занимает объем $V_{m0} = 22,4136 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$. Поэтому можно написать для моля газа

$$\frac{pV_m}{T} = \frac{p_0 V_{m0}}{T_0} = R$$

(V_m — молярный объем при условиях p и T) или

$$pV_m = RT,$$

где R — молярная газовая постоянная. Ее значение

$$R = \frac{101325 \text{ Па} \cdot 22,4136 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}}{273,15 \text{ К}} = 8,31433 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}). \quad (19)$$

Обозначим число молей в произвольной массе газа v . Для этой массы газа $m = vM$. Объем такой массы газа при условиях p и T будет в v раз больше молярного объема при тех же условиях: $V = vV_m$. Следовательно,

$$pV/v = RT \text{ или } pV = vRT.$$

Но $v = m/M$. Тогда для произвольной массы идеального газа уравнение Клапейрона — Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (20)$$

Этим уравнением состояния газа удобнее пользоваться, потому что в него входят параметры, относящиеся к одному состоянию идеального газа.

Уравнение Клапейрона — Менделеева является обобщением экспериментальных газовых законов и включает их в качестве частных случаев.

Так, если $T = \text{const}$, то

$$pV = \frac{m}{M} RT = \text{const}$$

(закон Бойля — Мариотта).

Если $p = \text{const}$, то

$$\frac{V}{T} = \frac{m}{M} R \frac{1}{p} = \text{const}$$

(закон Гей-Люссака); действительно, $\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} \left(1 + \frac{T - T_0}{T_0} \right) = \frac{V_0}{T_0} \frac{T}{T_0} = \frac{V}{T_0} = \text{const.}$

Здесь V_0 — объем массы m данного газа при условиях T_0, p .
Если $V = \text{const}$, то

$$\frac{p}{T} = \frac{m}{M} R \frac{1}{V} = \text{const}$$

(закон Шарля); в самом деле, $\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} \left(1 + \frac{T - T_0}{T_0} \right) = \frac{p_0 T}{T T_0} = \text{const.}$

Здесь p_0 — давление массы m данного газа в заданном объеме V при температуре T_0 .

Используя уравнение состояния газа, можно получить связь средней кинетической энергии поступательного движения молекул и температуры.

Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n_0 \langle W_k \rangle.$$

Умножим это уравнение почленно на объем и сравним с уравнением Клапейрона — Менделеева:

$$pV = \frac{2}{3} n_0 V \langle W_k \rangle, \quad pV = \frac{m}{M} RT.$$

Приравняем правые части этих уравнений: $\frac{2}{3} n_0 V \langle W_k \rangle = \frac{m}{M} RT$.

$$\text{Отсюда } \langle W_k \rangle = \frac{3}{2} \frac{mRT}{M n_0 V}.$$

Объем газа связан с молярным объемом и числом молей в данной массе: $V = V_m \cdot m/M$. Поэтому

$$\langle W_k \rangle = \frac{3}{2} \frac{mRTM}{M n_0 V_m m} = \frac{3}{2} \frac{RT}{n_0 V_m}.$$

Произведение $n_0 V_m$ представляет собой число молекул одного моля, т. е. равно постоянной Авогадро. Следовательно,

$$\langle W_k \rangle = \frac{3}{2} \frac{RT}{N_A}.$$

Введем новую величину как частное от деления двух постоянных величин — *постоянную Больцмана*:

$$k = R/N_A. \quad (21)$$

Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы

$$\langle W_{\text{п}} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (22)$$

Таким образом, температура действительно пропорциональна $\langle W_{\text{п}} \rangle$ и является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул, как мы предположили в § 1.2.

Подставим теперь полученное значение средней кинетической энергии поступательного движения молекул в основное уравнение кинетической теории газов:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \frac{3}{2} kT = n_0 kT. \quad (23)$$

Видим, что в соответствии с принятой моделью давления газа чем больше концентрация молекул и чем выше температура, тем больше давление.

Кроме того, мы получили возможность свести технически трудный процесс измерения температур к более простому процессу измерения давлений.

Газовый термометр (см. рис. 132) представляет собой сосуд с водородом — газом, свойства которого наиболее близки к свойствам идеального газа. Сосуд приводится в тепловой контакт с телом, температура которого измеряется. По прошествии достаточного времени, когда сосуд будет в *тепловом равновесии* с измеряемым телом, измеряется давление в термометре, температура которого считается равной измеряемой температуре:

$$T = p/(kn_0).$$

Затем (или ранее) сосуд приводится в тепловой контакт с телом, температура которого известна или принята за эталонную. По прошествии достаточного времени измеряется давление в термометре (при том же объеме водорода и, следовательно, его концентрации), температура которого теперь считается эталонной:

$$T_0 = p_0/(kn_0).$$

Разделив полученные уравнения почленно, имеем $T/T_0 = p/p_0$, откуда искомая температура

$$T = T_0 p/p_0.$$

На практике температуру измеряют разными термометрами, но все они градуируются и проверяются по газовому.

§ 2.6. Реальные газы

Подобно газовым законам уравнение Клапейрона — Менделеева является уравнением состояния идеального газа и для реальных газов выполняется приближенно на сравнительно небольших интервалах температур и давлений.

В модели идеального газа мы пренебрегли размерами молекул (по сравнению с размерами сосуда) и их взаимодействием на расстоянии.

Учтем теперь, что молекулы газа имеют какой-то объем. В уравнении

$$pV_m = RT,$$

написанном для моля идеального газа, молярный объем V_m предоставлен движущимся молекулам данного газа. Если же суммарный объем самих молекул моля газа равен b , то для движения молекул остается только объем $V_m - b$, и уравнение принимает вид

$$p(V_m - b) = RT.$$

Давление газа по этому уравнению

$$p = RT/(V_m - b).$$

Это давление — результат ударов молекул газа о стенки сосуда, если, как было сказано, молекулы не взаимодействуют на расстоянии. На самом деле молекулы газа притягиваются друг к другу. Следовательно, непосредственно прилегающий к стенке слой молекул испытывает притяжение к остальным молекулам газа, направленное от стенки в глубь сосуда, в результате чего средняя сила ударов молекул о стенку уменьшается. Поэтому в действительности давление будет меньше выведенного нами, и уменьшение давления зависит от силы притяжения молекул друг к другу, которая в свою очередь зависит от расстояния между молекулами, т. е. от предоставленного молю объема. Другими словами, уменьшение давления должно быть обратно пропорционально объему моля в какой-то степени:

$$\Delta p \sim \frac{1}{V_m^n}.$$

Голландский физик Ван-дер-Ваальс экспериментально определил, что $n = 2$ и $\Delta p = a/V_m^2$. Таким образом, уравнение состояния реального газа выглядит так:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \Delta p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2},$$

откуда

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT.$$

В этом уравнении Ван-дер-Ваальса коэффициенты a и b подобраны экспериментально для каждого газа. Это уравнение состояния выполняется для реальных газов значительно точнее, чем уравнение (20). Еще раз напомним, что выведено оно для моля газа.

Уравнение Ван-дер-Ваальса — это уравнение третьей степени относительно V_m и, следовательно, имеет три корня, т. е. при постоянной температуре и определенном давлении у моля газа могут быть три различных объема!

Если по точкам построить кривую, изображающую это уравнение при определенной температуре, — изотерму Ван-дер-Ваальса (сплошная линия, рис. 135), то на ней будет целая область давлений, которым соответствуют три объема.

Сравним изотерму Ван-дер-Ваальса с экспериментальной изотермой реального газа (пунктир, рис. 135). Видим, что изотермы практически совпадают в областях I и III. В области II изотерма реального газа горизонтальна (давление постоянно). Область I соответствует жидкому состоянию, область III — ненасыщенному пару (газу), область II — двухфазной системе жидкость — насыщенный пар. К обсуждению свойств вещества в этих состояниях мы еще вернемся.

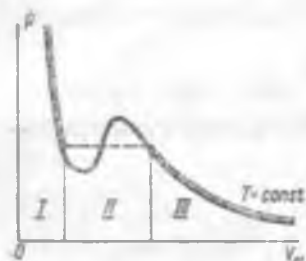


Рис. 135

СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 3.1. Поверхностный слой

Сравнивая плотности жидкостей и газов при нормальных условиях, легко заметить, что плотности и, следовательно, концентрации молекул в жидкостях больше, чем в газах.

Молекулы жидкости находятся гораздо ближе друг к другу, чем молекулы газа. Поэтому сильнее их взаимодействие, больше сказывается потенциальная энергия взаимодействия молекул.

В отличие от газа жидкость имеет определенный объем, очень слабо изменяющийся при *всестороннем* сжатии. В первом приближении можно принять модель несжимаемой жидкости. В § 1.1 было введено определение радиуса молекулярного действия r_0 . Назовем *сферой молекулярного действия* данной молекулы часть пространства, в котором заметно взаимодействие этой молекулы с другими. В однородной среде это пространство ограничено сферой радиусом r_0 . Рассмотрим молекулу, находящуюся в глубине жидкости (А, рис. 136). Симметричные молекулы из ее сферы молекулярного действия притягивают центральную с равными и противоположно направленными силами, так что равнодействующая всех сил взаимодействия, действующих на выбранную молекулу, равна нулю.

Выделим молекулу на поверхности жидкости (В, рис. 136). Все молекулы жидкости, действующие на нее, можно перебрать попарно симметрично относительно перпендикуляра к поверхности, так что равнодействующие их сил взаимодействия с данной молекулой направлены по этому перпендикуляру. Равнодействующая всех таких сил направлена нормально поверхности в глубь жидкости, так как аналогичная равнодействующая со стороны молекул пара гораздо меньше (концентрация молекул пара в обычных условиях много меньше концентрации молекул жидкости).

Опишем теперь сферу молекулярного действия вокруг любой молекулы (С, рис. 136) из *поверхностного слоя* — слоя жидкости около ее поверхности толщиной в радиус молекулярного действия. Все молекулы из заштрихованного симметричного шарового пояса можно попарно перебрать, как молекулы из сферы А. Равнодействующая их сил притяжения равна нулю. Все молекулы из незаштрихованных сегментов можно попарно перебрать, как молекулы из сферы В. Равнодействующая их сил взаимодействия направлена в глубь жидкости перпендикулярно ее поверхности (объемы сегментов одинаковы, концентрация в нижнем гораздо больше). Следовательно, на все молекулы поверхностного слоя действуют равнодействующие сил молекулярного взаимодействия, направленные в

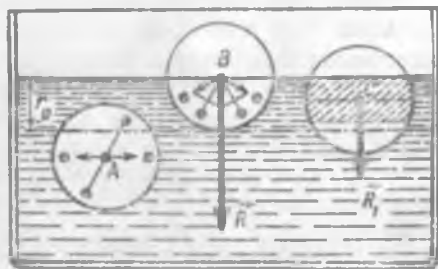


Рис. 136

глубь жидкости нормально ее поверхности. Поэтому поверхностный слой производит на жидкость *молекулярное давление*. Под действием сил молекулярного давления молекулы, если могут, переходят из поверхностного слоя в глубь жидкости и поверхность жидкости становится минимальной для данных условий. Так, предоставленная самой себе жидкость принимает шарообразную форму — для тел заданного объема минимальную поверхность имеет шар. Жидкость может быть предоставлена самой себе только в космосе, но этот опыт не обязательно делать на корабле-спутнике. Достаточно посмотреть на только что оторвавшуюся каплю воды или на маленькие капельки ртути.

На Земле вода в сосуде имеет горизонтальную поверхность под действием сил тяжести. Действием сил молекулярного давления можно объяснить малую сжимаемость жидкости — она уже сжата значительными силами. Эти силы не передаются по закону Паскаля, действуя только на молекулы жидкости, а не на погруженные в нее тела. Молекулы жидкости располагаются друг от друга на расстояниях, немного меньших $2r_m$, поэтому силы отталкивания молекул компенсируют давление поверхностного слоя. Надо полагать, что расстояния между молекулами поверхностного слоя увеличиваются по мере приближения к поверхности жидкости.

Молекулы поверхностного слоя обладают избыточной потенциальной энергией (по сравнению с «глубинными» молекулами). Поэтому наблюдаемая тенденция к уменьшению поверхности согласуется с обычным стремлением всякой механической системы к устойчивому равновесию, связанному с минимумом потенциальной энергии. Увеличение поверхности жидкости требует совершения определенной работы.

§ 3.2. Поверхностное натяжение

В предыдущем параграфе, перебирая действия всех молекул из сферы молекулярного действия, мы, естественно, не обнаружили действия молекул, расположенных на одном уровне с выбранной. Но если притяжение этих молекул в глубине жидкости компенсируется отталкиванием, то притяжение таких молекул поверхностного слоя может привести к некоторым эффектам.

Мы уже сказали, что расстояния между молекулами поверхностного слоя несколько больше таких расстояний в глубине жидкости. Тогда силы притяжения молекул, расположенных на одной горизонтали в поверхностном слое, несколько больше соответствующих сил отталкивания.

Итак, предположим, что вдоль поверхности жидкости действуют *силы поверхностного натяжения* — молекулярные силы притяжения, направленные перпендикулярно любому контуру l на этой поверхности, стремящиеся уменьшить ее площадь.

Эти силы притяжения действуют между молекулами, расположенными на одинаковой глубине в поверхностном слое, и уменьшают его поверхность. Силы поверхностного натяжения максимальны у поверхности жидкости и постепенно уменьшаются до нуля на глубине, равной радиусу молекулярного действия.

Пусть свободно расположенная нить находится на мыльной пленке (1, рис. 137, а). Силы поверхностного натяжения, приложенные к нити, уравниваются, и их сумма, действующая на любой элемент нити, равна нулю. Прорвем пленку под нитью. Тогда под действием оставшихся сил поверхностного натяжения нить примет положение 2. Следовательно, существование сил, параллельных поверхности, перпендикулярных свободно расположенной нити и уменьшающих поверхность жидкости, экспериментально подтверждается.

На проволоочном прямоугольнике свободно расположено проволоочное «седло» (рис. 137, б). Погрузив прямоугольник в мыльный раствор, поднимаем мыльную пленку, которая силами поверхностного натяжения

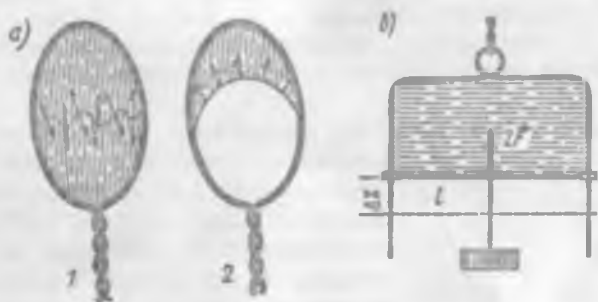


Рис. 137

поднимает «седло» с привязанным к нему небольшим грузом. Можно растянуть пленку, она будет квазиупруго* деформироваться. Измерив силу $2F$, разделим ее на длину $2l$ контура (на проволоку действуют две силы F — со стороны, ближайшей к читателю, и с противоположной, приложенные к двум длинам l). Получим коэффициент поверхностного натяжения — величину, измеряемую отношением силы поверхностного натяжения к длине контура, на которую она действует:

$$\sigma = F/l. \quad (24)$$

Мы уже говорили, что для увеличения поверхности жидкости необходимо совершить некоторую работу. Теперь мы можем ее подсчитать. Пусть, например, проволоочное «седло» (рис. 137, б) под внешним воздействием опустилось на расстояние Δx , растянув пленку на площадь $\Delta S = 2l \Delta x$. При этом силы поверхностного натяжения совершили работу $\Delta A = -2F \Delta x = -2\sigma l \Delta x = -\sigma \Delta S$ (напомним, что увеличились обе поверхности пленки и работали силы поверхностного натяжения с двух сторон проволоки).

За счет работы внешних сил увеличилась потенциальная энергия жидкости на $\Delta W \stackrel{\text{§ 1}}{=} -\Delta A = \sigma \Delta S$. Соответствующее изменение потенциальной энергии произойдет при уменьшении поверхности жидкости, когда положительную работу совершат силы поверхностного натяжения. Теперь можно определить коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = \Delta W / \Delta S -$

* quasi (лат.) — как будто.

как величину, измеряемую отношением изменения потенциальной энергии при изотермическом расширении поверхности жидкости к соответствующему изменению площади поверхности. Этот коэффициент зависит от рода жидкости, наличия примесей, температуры.

Итак, на любой элемент длины, расположенный в плоской поверхности жидкости (так, что жидкость расположена по обе его стороны), действуют уравновешивающиеся силы поверхностного натяжения.

§ 3.3. Лапласово давление

Если по каким-то причинам поверхность жидкости изгибается, то появляется равнодействующая сил поверхностного натяжения, направленная к центру кривизны (см. разд. I, § 2.12). Силы поверхностного натяжения в этом случае приводят к появлению добавочного лапласова давления, направленного к центру кривизны изогнутой поверхности.

Чтобы найти это давление, представим себе элемент изогнутой поверхности радиусом R (рис. 138). На его границу — окружность радиусом r — действуют силы поверхностного натяжения F_i . Их составляющие $F_i \cos \alpha$ действуют по нормали на площадь круга $S = \pi r^2$. Следовательно, лапласово давление

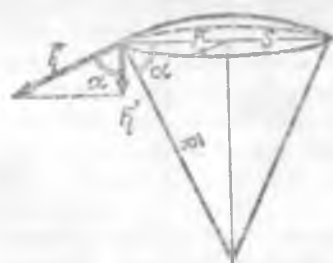


Рис. 138

$$p_{\text{Л}} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha}{\pi r^2} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha}{\pi r^2}.$$

Сумму сил поверхностного натяжения можно найти из определения соответствующего коэффициента: $\sum_{i=1}^n F_i = \sigma l$. Значит,

$$p_{\text{Л}} = \sigma \cdot 2\pi r \cos \alpha / (\pi r^2) = 2\sigma \cos \alpha / r.$$

Но $\cos \alpha = r/R$, поэтому

$$p_{\text{Л}} = 2\sigma / (Rr) = 2\sigma / R. \quad (25)$$

Благодаря этому давлению может лежать на поверхности воды стальная бритва, положенная плашмя; по той же причине не проваливается на поверхности воды водомерка.

Если выдуть из раствора на концах одной трубки два мыльных пузыря, то меньший из них начнет уменьшаться, перекачивая воздух в больший. Этот процесс ускорится по мере увеличения разности радиусов, что подтверждает формулу (25).

§ 3.4. Взаимодействие жидкости с твердым телом

Поместим какой-либо предмет в жидкость и вытащим обратно. Произойдет одно из двух: либо предмет станет мокрым, покрытым каплями жидкости, либо останется сухим. В первом случае, очевидно, вытаскивая предмет из

жидкости, мы отрывали частицы жидкости друг от друга; во втором — частицы жидкости от частиц твердого тела. Это объясняется различием в силах сцепления. Если силы сцепления частиц жидкости и твердого тела больше сцепления частиц жидкости, то жидкость называют *смачивающей* данное твердое тело; если силы сцепления частиц жидкости и твердого тела меньше сцепления частиц жидкости, — *не смачивающей* это тело. Одна жидкость может быть смачивающей и не смачивающей по отношению к разным телам. Так, вода смачивает человеческую руку и не смачивает жирную поверхность; ртуть — не смачивает стекло, но смачивает цинк. Одно тело может смачиваться одной жидкостью и не смачиваться другой. Например, стекло смачивается водой и не смачивается ртутью.

Посмотрим, как ведет себя смачивающая жидкость около стенок сосуда (рис. 139, а). Нарисуем сферу молекулярного действия ближайшей к стенке молекулы поверхности жидкости. Обозначим равнодействующие сил, действующих

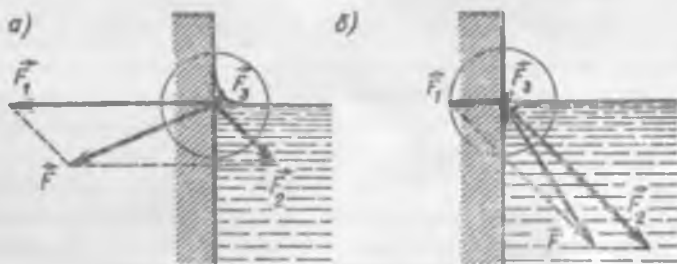


Рис. 139

на эту молекулу: F_1 — со стороны молекул твердого тела; F_2 — со стороны молекул жидкости; F_3 — со стороны молекул газа. Сила F_1 перпендикулярна стенке, F_2 направлена под углом 45° к стенке и гораздо меньше предыдущей (смачивающая жидкость!). Сила F_3 направлена по биссектрисе угла между горизонтальной поверхностью жидкости и вертикальной стенкой, эта сила в данном масштабе исчезающе мала — в дальнейшем ее не учитываем. Векторная сумма всех этих равнодействующих является силой молекулярного давления, приложенной к данной молекуле, и, как таковая, должна быть направлена в глубь жидкости перпендикулярно ее поверхности. Значит, поверхность вблизи стенок не горизонтальна, а изгибается вверх. На рис. 139, б изображена не смачивающая жидкость в сосуде. По аналогичным соображениям, ее поверхность вблизи стенок изгибается вниз. Итак, поверхность свободной жидкости вблизи стенок искривляется.

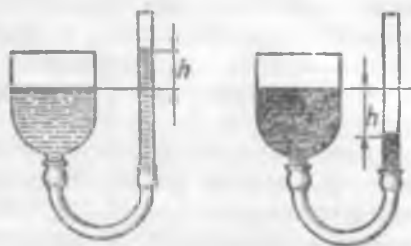


Рис. 140

Возьмем теперь такой узкий сосуд, чтобы в нем вся поверхность жидкости была изогнута, т. е. представляла собой *мениск** (касательная к поверхности горизонтальна только в одной точке). Такой сосуд называется *капиллярным***.

Для сравнения рассмотрим сообщающиеся сосуды с однородной жидкостью, один из которых — капиллярный (рис. 140).

* *meniskos* (греч.) — лунный серп, выпуклость.
 ** *capillaris* (лат.) — волосной, тонкий.

Если в них налита смачивающая жидкость, то мениск вогнутый и лапласово давление действует вверх.

По закону сообщающихся сосудов (см. разд. I, § 4.1), давления на одном уровне (например, отмеченном тонкой линией) должны быть одинаковыми:

$$P_{\text{атм}} \stackrel{66, 67-1}{=} \rho g h - P_{\text{л}} + P_{\text{атм}},$$

отсюда

$$\rho g h \stackrel{21}{=} 2\sigma/R.$$

Следовательно, разность уровней

$$h = 2\sigma/(\rho g R). \quad (26)$$

Смачивающая жидкость в капиллярном сосуде устанавливается выше общего уровня.

Если жидкость — несмачивающая, то мениск выпуклый и лапласово давление прибавляется к гидростатическому. Жидкость будет находиться в равновесии при условии

$$\rho g h + P_{\text{атм}} \stackrel{67-1}{=} P_{\text{атм}} + P_{\text{л}},$$

откуда

$$\rho g h \stackrel{21}{=} 2\sigma/R \text{ и } h = 2\sigma/(\rho g R).$$

Уровень несмачивающей жидкости в капилляре устанавливается ниже общего уровня. Чем уже сосуд, тем больше разность уровней (радиус кривизны поверхности уменьшается при уменьшении диаметра капилляра).

В жизни мы достаточно часто встречаемся с капиллярностью. Поднятие воды в почве, система кровеносных сосудов в легких, корневая система у растений, фитиль и промокательная бумага — капиллярные системы.

§ 3.5. Твердое тело

Многие тела, с которыми человек сталкивается на Земле, — твердые. На первый взгляд, основное отличие таких тел — их достаточно устойчивая форма. Само понятие тела в физике возникло из представления о твердом теле. Но, как и многие другие, это понятие претерпело значительные изменения, в особенности за последние 40 лет, когда создавалась целая самостоятельная наука — физика твердого тела.

В зависимости от структуры различают *кристаллические* и *аморфные* тела.

Кристалл — естественное образование правильной геометрической формы. Атомы или молекулы в кристаллическом веществе беспорядочно движутся около положений равновесия, расположенных в узлах кристаллической решетки. В зависимости от формы ячеек решетки изменяются свойства веществ. Так, уголь, алмаз и графит состоят из одинаковых атомов углерода. Но и у них разной формы решетки и поэтому совершенно различные свойства. Явление образования различных кристаллических структур одинаковыми атомами называется *полиморфизмом**.

* polymorphos (греч.) — многообразный.

Физические свойства кристаллов — прочность, теплопроводность, электропроводность и т. п. — различны по разным направлениям — кристаллы обладают *анизотропией**. Некоторые кристаллические вещества изотропны потому, что состоят из кристаллов, ориентированных беспорядочно. Такие вещества называются *поликристаллическими*. Например, сталь состоит из анизотропных кристаллов, но изотропна.

В современной физике твердыми телами называют только кристаллические тела. Характерным признаком кристаллических веществ является наличие температуры плавления.

Аморфные вещества не имеют кристаллической структуры, при увеличении температуры постепенно размягчаются, они являются очень вязкими или переохлажденными жидкостями. Таким образом, наличие твердости не служит существенным признаком состояния (стекло достаточно твердо), нужно изучать структуру вещества.

Кристаллическая структура вещества связана с минимумом потенциальной энергии. Поэтому при длительном пребывании в соответствующих условиях аморфное вещество может кристаллизоваться. Так мутнеет стекло или засахаривается варенье.

Идеальный порядок в кристаллической решетке нарушается хаотическим движением атомов. Кроме того, в реальных веществах встречаются атомы примесей, внедренные в решетку, местами недостает атомов или даже групп атомов, т. е. наблюдаются разнообразные искажения кристаллической структуры — *дислокации*. С наличием дислокаций связаны такие свойства вещества, как пластичность, прочность, электрическое сопротивление. Так, разрушается образец именно в местах дислокаций. Изготовив в лабораторных условиях образец без дислокаций, ученые получили на опыте прочность на несколько порядков выше, чем у необработанных материалов.

ГЛАВА 4

ТЕРМОДИНАМИКА

§ 4.1. Первое начало термодинамики

Термодинамика — часть физики, в которой изучаются наиболее общие закономерности преобразования энергии. Тела обладают запасами внутренней энергии. При прочих равных условиях большей внутренней энергией обладает более нагретое тело. Если приведены в соприкосновение два вещества с разными температурами, то наблюдается процесс передачи энергии без совершения работы — *теплообмен*, который происходит за счет обмена энергиями хаотически движущихся молекул (*кондуктивный*** — теплопроводность или *конвективный**** — при движении струй жидкости

* *изос* (греч.) — равный, *трос* — свойство, *ан* — не, *изотропия* — одинаковость свойств по разным направлениям, *анизотропия* — неодинаковость таких свойств.

** *conductor* (лат.) — сопровождающий, проводник.

*** *convectio* (лат.) — привод, принесение.

или газа). Более сложный вид теплообмена — *излучение*. Это теплообмен посредством электромагнитного поля, он не требует соприкосновения обменивающихся энергиями веществ: так энергия Солнца передается на Землю через космическое пространство. Но и здесь, чтобы энергия тел заметно изменялась, необходимо наличие разности температур. При этом энергия самопроизвольно переходит от тела с большей к телу с меньшей температурой.

Мерой переданной при теплообмене внутренней энергии является *количество теплоты*. Количество теплоты — не запас, а именно мера переданной энергии. У тела нет количества теплоты до или после процесса теплообмена, до или после этого процесса есть определенные запасы внутренней энергии (U_1 и U_2), их разность равна полученному или отданному при теплообмене количеству теплоты.

Практически изменение внутренней энергии может быть осуществлено всего двумя принципиально различными способами: совершением работы и теплообменом.

В первом случае изменение внутренней энергии системы равно работе внешних сил:

$$dU_1 = -\delta A$$

(δA — работа системы над внешними телами).

Во втором случае изменение внутренней энергии равно количеству теплоты, переданному системе:

$$dU_2 = \delta Q.$$

В общем случае происходит суммарное изменение внутренней энергии:

$$dU = dU_1 + dU_2 = \delta Q - \delta A. \quad (27)$$

Подчеркнем, что внутреннюю энергию системы можно изменить только двумя способами — сообщая извне внутреннюю энергию в процессе теплообмена и совершая над системой работу, т. е. передавая системе любую другую энергию в процессе совершения работы.

Найдем количество теплоты, переданное системе извне в процессе теплообмена:

$$\delta Q \stackrel{27}{=} dU + \delta A. \quad (28)$$

Количество теплоты, переданное системе, увеличивает ее внутреннюю энергию и превращается в работу, совершаемую системой против внешних сил, — первое начало термодинамики или наиболее общая формулировка закона сохранения и превращения энергии. Величины, входящие в выражение (28), могут быть и положительными, и отрицательными. Если в данном процессе внутренняя энергия системы уменьшилась, то $dU < 0$. Если система отдала некоторое количество теплоты, то $\delta Q < 0$. Если, наконец, над системой была извне совершена некоторая работа, то $\delta A < 0$. Первое начало термодинамики является обобщением тысячелетнего человеческого опыта.

Разница в написании бесконечно малого изменения внутренней энергии dU и бесконечно малого количества теплоты δQ , сообщенного системе, или работы δA , совершенной системой, объясняется тем, что

энергия — функция состояния, ее изменение при переходе из одного состояния в другое однозначно (не зависит от промежуточных состояний), а количество теплоты и работа — функции процесса, их значения при переходе между заданными состояниями могут быть различными.

§ 4.2. Калориметрия*

Если веществу передается какая-либо энергия (в любой форме), то изменяется его температура (за исключением агрегатных переходов и вообще изотермических процессов). Характеристиками такого изменения являются различные теплоемкости.

Пусть δW — энергия, необходимая для изменения температуры тела от T до $T + dT$. Теплоемкость тела измеряется отношением этой энергии к интервалу температуры:

$$C = \frac{\delta W}{dT}. \quad (29)$$

Теплоемкость единицы массы называется *удельной теплоемкостью* данного вещества:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\delta W}{m dT}. \quad (30)$$

Удельная теплоемкость зависит от характера процесса передачи энергии и, в общем случае, от температуры. Поэтому интервал температуры выбран вблизи определенной температуры T .

Энергия, необходимая для изменения температуры массы m данного вещества от T до $T + dT$:

$$\delta W = mc dT. \quad (31)$$

Если зависимостью теплоемкости от температуры можно пренебречь, то для конечного интервала температур

$$\Delta W = \int_{T_1}^{T_2} mc dT = mc(T_2 - T_1). \quad (32)$$

Для процесса теплообмена во всех этих формулах можно заменить сообщенную энергию количеством теплоты:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = mc, \quad (33)$$

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}, \quad (34)$$

$$\delta Q = mc dT, \quad (35)$$

откуда при том же предположении можно получить для конечного интервала температур

$$\Delta Q = mc(T_2 - T_1). \quad (36)$$

* calor (лат.) — тепло, жгт.

Выражается количество теплоты в джоулях, как и всякая другая энергетическая величина*.

Рассмотрим некоторую систему тел, в которой не происходит никаких превращений энергии, кроме теплообмена. Для такой системы

$$\delta A = 0 \text{ и } \delta Q = dU.$$

В процессе теплообмена внутренние энергии одних тел увеличиваются, других — уменьшаются, мерой этого изменения является количество теплоты, которое данное тело получило или отдало в процессе теплообмена.

Если система охватывает все тела, участвующие в теплообмене, то первое начало термодинамики, или, что то же самое, закон сохранения и превращения энергии, можно записать в виде уравнения теплового баланса.

$$\sum_{i=1}^n \Delta Q_i = 0. \quad (37)$$

Алгебраическая сумма количеств теплоты, отданных и полученных всеми телами, участвующими в теплообмене, равна нулю. Здесь $\Delta Q_i > 0$ означает получение соответствующей порции внутренней энергии телами — нагревание, $\Delta Q_i < 0$ — наоборот, остывание.

Термины нагревание и остывание часто связывают с изменением температуры. Мы будем говорить о нагревании и остывании именно в смысле получения энергии, даже в изотермических процессах.

Практически пользуются уравнением теплового баланса, применяя его к калориметру (рис. 141). Это стакан, наполненный определенной жидкостью, снабженный термометром и мешалкой. Для уменьшения потерь за счет теплопроводности между стаканом и внешним кожухом оставлен воздушный промежуток. Зная массы помещенных в калориметр веществ (включая массу стакана) и измерив температуру жидкости до и после теплообмена, можем написать уравнение теплового баланса. Пусть масса внутреннего стакана калориметра вместе с мешалкой $m_{\text{к}}$, его удельная теплоемкость $c_{\text{к}}$; масса и удельная теплоемкость жидкости в калориметре $m_{\text{ж}}$ и $c_{\text{ж}}$; масса, удельная теплоемкость и начальная температура помещаемого тела $m_{\text{т}}$, $c_{\text{т}}$ и T_1 ; температура жидкости и калориметра до процесса теплообмена T_1 , после процесса — Θ . Тогда

$$m_{\text{т}}c_{\text{т}}(\Theta - T_1) + m_{\text{ж}}c_{\text{ж}}(\Theta - T_1) + m_{\text{к}}c_{\text{к}}(\Theta - T_1) \stackrel{37}{=} 0.$$

Из полученного уравнения можно найти одну величину, если известны все остальные.

* Пока еще распространена внесистемная единица количества теплоты — калория.

Одна калория — количество теплоты, необходимое для нагревания 1 г дистиллированной воды от 19,5 до 20,5 °C.

Соотношение между калорией и джоулем выведено в § 4.3.

При всякого рода нагреваниях часто источником энергии является *топливо* — вещество, при сгорании которого выделяется химическая энергия в виде некоторого количества теплоты. Основной характеристикой топлива является его *удельная теплота сгорания* — величина, измеряемая отношением количества теплоты Q , выделяющегося при полном сгорании массы m топлива, к этой массе

$$q = Q/m. \quad (38)$$

Устройство, в котором используется энергия топлива для увеличения внутренней энергии вещества, называют *нагревателем*. Во всяком нагревателе часть энергии топлива теряется на бесполезное нагревание окружающих предметов. Поэтому вводится понятие *коэффициента полезного действия* нагревателя — отношения полезно использованного количества теплоты Q_n к затраченному количеству теплоты Q , выделившемуся в результате сгорания топлива:

$$\eta = \frac{Q_n}{Q} = \frac{Q_n}{qm}. \quad (39)$$

§ 4.3. Теплота и работа

При движении материи часто наблюдаются взаимные превращения энергии. Так, прыгающая крышка кипящего чайника демонстрирует превращение внутренней энергии пара в механическую энергию. Кстати, это прообраз паровой машины. Майер, Гельмгольц, Джоуль в середине XIX в. установили, что, сообщив системе некоторое количество теплоты (изменение энергии в процессе теплообмена), можно получить соответствующее количество работы (изменение энергии в процессе совершения работы), и наоборот. Другими словами, энергии превращаются друг в друга в эквивалентных* количествах. *Механический эквивалент теплоты* равен отношению механической работы к полученному при ее полном превращении количеству теплоты:

$$J = A/Q. \quad (40)$$

Термический эквивалент работы равен отношению количества теплоты к работе, полученной за счет этого количества теплоты:

$$B = Q/A. \quad (41)$$

Сравнивая формулы (40) и (41), видим, что эти эквиваленты — величины обратные:

$$J = 1/B. \quad (42)$$

Еще М. В. Ломоносов в 1748 г. высказал в самой общей форме принцип сохранения, частным случаем которого можно считать закон сохранения энергии. Спустя почти 100 лет, в 1842 г., закон сохранения энергии был доказан опытом Джоуля.

* *aequivalens* (лат.) — равнозначный.

В калориметр с перегородками (чтобы не было вращательного движения всей жидкости, рис. 142, а), наполненный ртутью, погружен валик с лопатками, приводимый во вращение двумя грузами m , опускающимися с высоты h (рис. 142, б). При этом совершенная работа

$$A = 2mgh.$$

Полученное калориметром и ртутью количество теплоты

$$Q = m_k c_k (T_2 - T_1) + m_p c_p (T_2 - T_1).$$

Здесь m_k и c_k — масса и удельная теплоемкость калориметра; m_p и c_p — масса и удельная теплоемкость ртути; T_1 и T_2 — начальная и конечная температуры ртути. Тогда

$$J = \frac{2mgh}{(m_k c_k + m_p c_p)(T_2 - T_1)}.$$

По уточненным данным $J = 4187,4$ Дж/ккал. Сосчитайте сами по формуле (42) величину B (в кал/Дж).

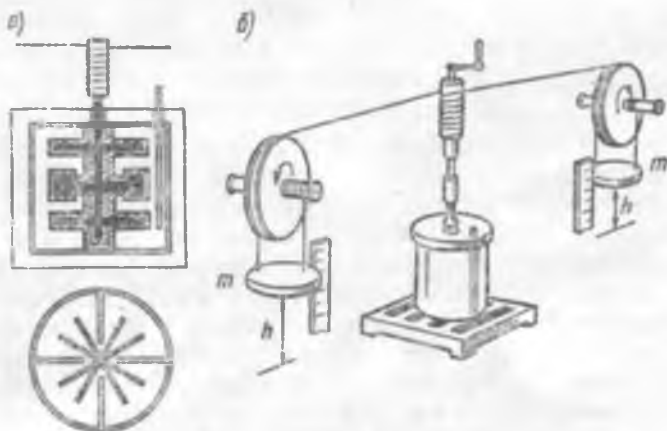


Рис. 142

В СИ принимают эквиваленты равными безразмерным единицам и выражают работу и количество теплоты в одинаковых единицах — джоулях. При этом считается, что $1 \text{ ккал} = 4187,4 \text{ Дж}$. Следовательно, $1 \text{ кал} \approx 4,19 \text{ Дж}$.

§ 4.4. Работа газа

Один из возможных способов превращения внутренней энергии в механическую состоит в том, чтобы заставить нагретый газ совершать работу.

Пусть такой газ находится в цилиндре под поршнем (рис. 143) и расширяется, совершая работу, например, против атмосферного давления. Элементарная работа расширения

$$\delta A \stackrel{511}{=} (F dh) \stackrel{641}{=} pS dh = p dV \quad (43)$$

равна произведению давления газа на изменение его объема. Конечная работа равна

$$A \stackrel{44}{=} \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (44)$$

Иначе, работа процесса, изображенного на p - V -диаграмме, равна площади фигуры, образованной графиком $p(V)$, осью абсцисс и ординатами начала и конца процесса (рис. 144).



Рис. 143

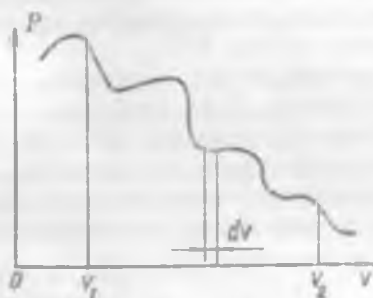


Рис. 144

В частности, если конечный процесс изобарен, давление можно вынести за скобки, и работа равна

$$A \stackrel{44}{=} p \int_{V_1}^{V_2} dV \stackrel{44}{=} p(V_2 - V_1). \quad (45)$$

Используя уравнение (20) состояния газа, преобразуем полученное выражение:

$$A \stackrel{45}{=} \frac{m}{M} RT_2 - \frac{m}{M} RT_1 = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Следовательно, чтобы газ при изобарном расширении совершил положительную работу, необходимо увеличение температуры ($T_2 > T_1$), т. е. нагревание. Этот один из возможных способов преобразования внутренней энергии в механическую не является ни единственным, ни лучшим. Как сделать такое преобразование выгодным и технически применимым, обсудим в следующем параграфе.

§ 4.5. Второе начало термодинамики

Тепловой машиной называется устройство, в котором хаотическое движение молекул превращается в движение упорядоченное; иначе, внутренняя энергия превращается в механическую. В такой машине должно быть какое-то рабочее вещество (тело), которое в рабочей части машины совершает механическую работу; должен быть нагреватель, где рабочее вещество получает определенную порцию внутренней энергии. Тепловая машина, рассчитанная на более или менее длительный срок

работы, должна работать *циклично*. Пусть рабочее вещество совершает положительную работу, расширяясь от состояния 1 до состояния 2 (рис. 145). Чтобы замкнуть цикл, есть три возможности:

1) возвратиться по тому же процессу (через те же состояния). Но работа равна площади под кривой процесса. Следовательно, работа за цикл получится равной нулю, даже без учета неизбежных потерь;

2) можно возвратиться через состояния, лежащие выше кривой прямого процесса (штрихпунктир). Тогда отрицательная работа станет больше (по абсолютному значению) положительной, и двигателем такая машина быть не может (она является холодильной машиной, ее цикл изображен на рис. 147);

3) наконец, можно возвратиться через состояния, лежащие ниже прямого процесса. При этом отрицательная работа численно равна заштрихованной площади (рис. 145) и, следовательно, меньше положительной работы прямого процесса.

В результате такого *прямого* цикла достигнуто первоначальное состояние и совершена положительная работа, равная площади цикла.

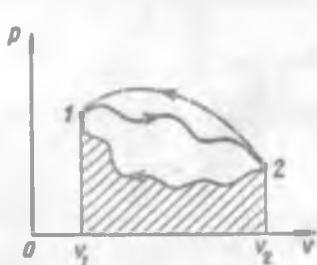


Рис. 145



Рис. 146

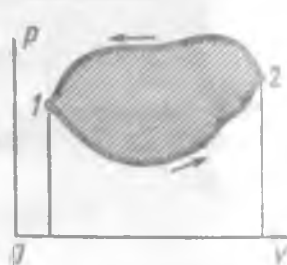


Рис. 147

Но для того чтобы пройти через состояния с теми же объемами и с меньшими давлениями, необходимо понизить температуру (сравните давления по уравнению состояния газа). Для этого какое-то количество теплоты надо отнять у рабочего тела, для чего в каждой тепловой машине необходим *холодильник*. Итак, основными частями всякой тепловой машины являются (рис. 146): нагреватель, сообщаящий рабочему телу количество теплоты Q_1 ; рабочая часть, в которой совершается механическая работа A ; холодильник, отбирающий у рабочего тела количество теплоты Q_2 . Полезно используется, т. е. превращается в механическую работу, количество теплоты $Q_1 - Q_2$, и к. п. д. тепловой машины (без учета потерь) равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (46)$$

Заставив машину работать по *обратному* циклу (рис. 147), мы получим за цикл отрицательную работу, численно равную площади цикла. При этом у холодильника будет отобрано, а нагревателю передано некоторое количество теплоты. Такую машину надо приводить в движение *извне*; двигателем, как мы отмечали, она не будет. Но у нее есть две важ-

нейшие функции. Она является *холодильной машиной*, так как охлаждает холодильник. Кроме того, она является *тепловым насосом*, так как перекачивает за счет внешней работы количество теплоты из холодильника в нагреватель, причем отдает нагревателю ⁴⁴ большее количество теплоты, чем получает из холодильника: $Q_1 - Q_2 = A$, отсюда

$$Q_1 = Q_2 + A$$

(все члены этого равенства отрицательны). Поэтому даже с учетом потерь выгодна идея термодинамического отопления: вместо обычной печи сжигать топливо в тепловой машине, ею приводить в движение тепловой насос, который будет перекачивать количество теплоты с улицы в помещение.

Рабочим телом в тепловой машине может быть любое вещество. Какие же процессы наиболее выгодны для тепловой машины?

Если в качестве рабочего тела взять идеальный газ, то его потенциальная энергия равна нулю (нет взаимодействия, зависящего от конфигурации), следовательно, внутренняя энергия равна суммарной кинетической энергии и по формуле (22 — П) пропорциональна температуре. В приложении 4 доказано, что изменение внутренней энергии идеального газа

$$dU \stackrel{24}{=} \delta Q \stackrel{15}{=} c_V m dT, \quad (47)$$

где c_V — удельная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме. Следовательно,

$$\Delta U \stackrel{47}{=} \int_{T_1}^{T_2} c_V m dT = c_V m (T_2 - T_1) = c_V m \Delta T.$$

Изменение внутренней энергии идеального газа пропорционально разности температур конечного и начального состояний: $\Delta U \sim \Delta T$. Поэтому изменение внутренней энергии при изотермическом процессе равно нулю.

Обратимся теперь к первому началу термодинамики. Видим, что один из наиболее выгодных процессов — изотермический, так как в этом процессе все подводимое к системе количество теплоты равно работе системы $\Delta Q \stackrel{28}{=} \Delta A$ ($\Delta U = 0$). Но нельзя осуществить сколько-нибудь длительный процесс, двигаясь в одну сторону по определенной изотерме! Зато можно представить себе еще более «выгодный» процесс, при котором $\Delta Q = 0$.

Процесс, при котором нет теплообмена с окружающей средой, называется *адиабатным* *. При таком процессе механическая работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии: $\Delta A \stackrel{28}{=} -\Delta U$ ($\Delta Q = 0$). Кривая такого процесса — *адиабата*. Ее уравнение называется *уравнением Пуассона* (см. приложение 5):

$$pV^\gamma \stackrel{24-П}{=} \text{const}, \quad (48)$$

где $\gamma \stackrel{21-П}{=} c_P/c_V$ — коэффициент Пуассона.

* *adiabatos* (греч.) — непреходимый.

Если изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ пропорционально разности температур $\Delta T = T_2 - T_1$, то для получения положительной работы в адиабатном процессе необходима отрицательная разность энергий и температур, $T_2 < T_1$.

Следовательно, адиабатное расширение из некоторого состояния на p - V -диаграмме изобразится кривой, лежащей ниже соответствующего изотермического расширения; иными словами, адиабата проходит через некоторую точку (состояние) на p - V -диаграмме круче, чем изотерма.

И если нужно найти самый выгодный циклический процесс, то надо два изотермических процесса замкнуть двумя адиабатными.

Итак, самый выгодный цикл работы тепловой машины состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис. 148). Его предложил французский инженер С. Карно, он же рассчитал к. п. д. идеальной тепловой машины, работающей по такому циклу:

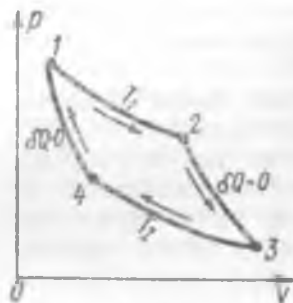


Рис. 148

$$\eta_{\text{к}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (49)$$

где T_1 и T_2 — температуры нагревателя и холодильника. Эта формула выведена в приложении 5.

Карно также доказал, что к. п. д. реальной машины меньше к. п. д. идеальной машины, работающей между теми же температурами:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где знак равенства относится только к идеальной машине. Из последнего равенства имеем $Q_1/Q_1 - Q_2/Q_1 = T_1/T_1 - T_2/T_1$, откуда следует

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{или} \quad Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Значит, даже идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, не может иметь к. п. д., равный единице, или работать без холодильника, так как это было бы возможно только при $T_2 = 0$ К, а температура 0 К (абсолютный нуль) недостижима. Это связано с различием двух форм движения: механического — упорядоченного и молекулярного — беспорядочного.

Энергия упорядоченного движения полностью преобразуется в энергию беспорядочного движения, например, при неупругом ударе о стенку. Энергия же беспорядочного движения в тепловой машине может быть преобразована в механическую энергию только частично, некоторая ее часть должна остаться хаотической и в виде количества теплоты Q_2 передается холодильнику.

Итак, к. п. д. тепловой машины принципиально не может быть равен единице, машина не может работать без холодильника. Это одна из формулировок второго начала термодинамики.

Другой, не менее важной формулировкой второго начала термодинамики является упоминавшийся нами критерий направленности процессов теплообмена: *количество теплоты не может самопроизвольно переходить от тел с меньшей к телам с большей температурой* (Клаузиус).

Самопроизвольно процессы идут в определенную сторону. Например, сжатый газ легко выходит из открытого сосуда, но практически никогда не войдет обратно (хотя, на первый взгляд, какая разница, куда молекулам хаотически двигаться — внутрь или наружу?).

Но нельзя категорически утверждать, что молекулы не могут вновь собраться в сосуде. Просто вероятность этого события ничтожно мала. Нельзя также категорически утверждать, что, двигаясь беспорядочно, в один прекрасный момент все молекулы этой книги не могут двинуться вверх (со скоростями порядка 500 м/с!). Но вероятность такого события так мала, что практически оно неосуществимо.

Итак, второе начало термодинамики предсказывает, с какой вероятностью процесс пойдет в ту или иную сторону, и этот статистический подход тем обоснованнее, чем больше частиц в термодинамической системе.

На основе второго начала термодинамики построена *термодинамическая температурная шкала*. Фиксируют одну *опорную точку* на термодинамической шкале температур и определяют любую другую температуру по циклу Карно между этими температурами (безразлично, с каким термодинамическим телом). Опорной точкой считается *тройная точка воды* — температура, при которой находятся в равновесии все три фазы воды — лед, вода, пар.

Единица температуры — кельвин (К).

Один кельвин — это $1/273,16$ часть термодинамической температуры тройной точки воды.

Другими словами, интервал от 0 К до тройной точки воды разделен на 273,16 равных частей. Значит $1\text{ К} = 1^\circ\text{С}$. Точка таяния льда при нормальном давлении на $0,01^\circ\text{С}$ ниже тройной точки воды. Следовательно, точка таяния льда при нормальном давлении 273,15 К (см. § 2.4).

§ 4.6. Некоторые тепловые машины

Какой же практический вывод надо сделать из теории, изложенной в предыдущем параграфе? Какие тепловые машины можно и нужно строить?

Ясно, что идеальный цикл Карно неосуществим по нескольким причинам: нет идеального газа; невозможны равновесные состояния и процессы; бесконечно медленно протекал бы изотермический процесс и т. д. Но форму реальных циклов полезно делать похожей на цикл Карно; для повышения к. п. д. реальных машин надо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника и по возможности понижать температуру холодильника.

Рассмотрим работу некоторых применяющихся в технике тепловых машин. *Паровая машина*. Это первая по времени изобретения промышленная тепловая машина. Рабочим телом в паровых установках является водяной пар, получающийся в паровых котлах. Принципиально паровым котлом является и обыч-

ный чайник, мала только его *производительность* — масса пара, вырабатываемого за единицу времени. Значит, надо увеличить площадь соприкосновения нагревательного элемента и воды. Для этого есть две возможности: 1) пропустить топочные газы по трубам, вокруг которых расположена нагревающаяся вода, — *дымогарный котел*; 2) пропустить воду по трубам, вокруг которых разведен огонь, — *водотрубный котел*.

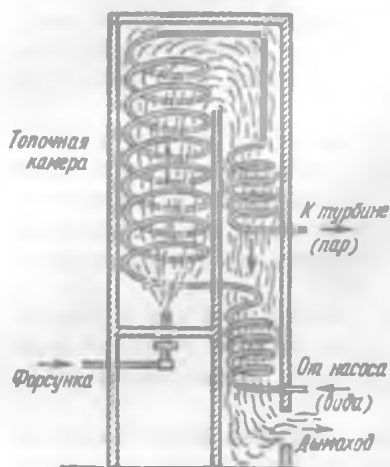


Рис. 149

Усовершенствованный котел Рамзина — *прямоточный*, в трубах вода обращается в пар, который затем перегревается (рис. 149). Перегретый пар через распределительное устройство — золотниковую коробку 1 — поступает в цилиндр 2 паровой машины (рис. 150). Под давлением пара поршень 3 со штоком 4 движется поступательно. На штоке находится кривошип 5, шарнирно соединенный с шатуном 6. Шатун заставляет вращаться массивное рабочее колесо 7, инерция последнего позволяет проходить мертвые точки, в которых скорость поршня обращается в нуль. Так, кривошипно-шатунный механизм позволяет преобразовать возвратно-поступательное движение поршня во вращательное движение рабочего колеса. Это же колесо с помощью шарнирного соединения 8 заставляет двигаться золотник 9 в золотниковой коробке, осуществляя автоматическую подачу пара. Вспомним, что с рабочим колесом соединен регулятор Уатта 10 (см. рис. 57), регулирующий массу пара, поступающего в машину.

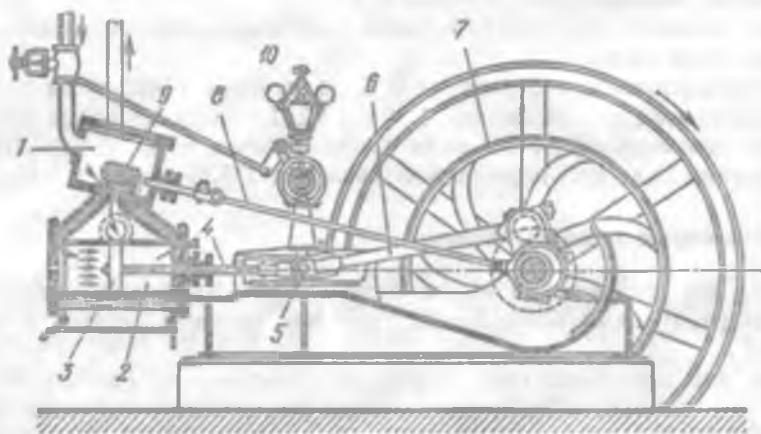


Рис. 150

Опишем и изобразим на p - V -диаграмме один цикл ее работы. Поршень — в левой мертвой точке. Пар под большим давлением начинает поступать в цилиндр (1, рис. 151). Поршень под давлением движется вправо, в точке 2 распределитель прекращает доступ пара в цилиндр, происходит отсечка пара. Давление начинает уменьшаться, поршень продолжает движение под действием пара (2 — 3). В правой мертвой точке открывается выпускное отверстие, и «мятый» пар

выбрасывается в атмосферу. Давление падает (3–4) до значения чуть больше атмосферного, и пар выталкивается (4–5) из цилиндра (в это время возможен рабочий ход с другой стороны поршня – в машине двойного действия, см. рис. 150). В точке 5 закрывается выпускной паропровод, открывается выпускное отверстие, давление пара поднимается, и цикл повторяется с точки 1. Полезная работа за цикл равна площади 1–2–3–4–5–1 (рис. 151). Для увеличения к. п. д. (и экономии воды) можно выпускать «мятый» пар не в атмосферу, а в конденсатор, где поддерживают низкую температуру. Пар конденсируется, давление понижается, и цикл замыкается по линии 4'–5'–1. Увеличение площади цикла показано на рисунке. Если пар достаточно «упруг», его можно использовать в следующем цилиндре машины многократного расширения.

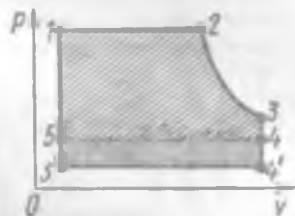


Рис. 151

Достоинства: простота, надежность, дешевизна топлива (может быть использован любой его вид), реверсивность* – возможность включения «обратного хода». **Недостатки:** тихоходность – наличие «мертвых» точек принципиально ограничивает скорость, сложность трансмиссии – необходимо преобразовывать вращательно-поступательное движение поршня во вращение колеса, низкий к. п. д. Так, у первой универсальной паровой машины Ползунова $\eta = 0,1\%$; у машины Уатта – 1% ; у современных машин – до $10-12\%$. Для сравнения у идеальной машины, работающей по циклу Карно между температурами 100 и 0°C , к. п. д. был бы

$$\eta_{\text{К}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{100 \text{ K}}{373 \text{ K}} = 26,8\%.$$

Паровая турбина.** Недостатки паровой машины, в частности ее тихоходность, заставляют искать другие способы использования энергии пара. Если в паровой машине используется потенциальная, то в паровой турбине – кинетическая энергия всей массы пара. Истекающая из форсунки струя пара ударяет в лопатки колеса турбины (рис. 152) и заставляет его вращаться.

К достоинствам паровой турбины относятся достоинства всех паровых машин (за исключением реверсивности); быстроходность, компактность, сравнительно большая мощность и удельная мощность (отношение мощности к весу двигателя). Недостатки: необходимость значительного времени для пуска и остановки (кроме свойственного всем паровым машинам разжигания котла, кипячения воды и т. п.); затрудненность включения обратного хода – только подключением «паразитной» шестерни.

Как всегда, в жизни нет ничего абсолютного – недостатки могут обратиться в достоинства, и наоборот. Так, тихоходность паровой машины позволяет на транспорте сразу соединить ее с двигателем – колесами или винтом; в аналогичной ситуации турбина требует включения громоздкого редуктора, понижающего число передаваемых оборотов и весящего в несколько раз больше самой турбины.

Газовая турбина. Она работает аналогично паровой турбине. Требуется жаропрочных сталей для изготовления лопаток рабочего колеса. Рабочим телом в ней является раскаленный газ. Соответственно повышается ее к. п. д.

Турбина реактивная. Это одна из разновидностей турбин. Интересно отметить, что эта наиболее сложная из турбин была изобретена первой около 2000 лет

* reversus (лат.) – обращенный назад.

** turbineus (лат.) – вихреобразный.

назад, когда ее негде было применить; поэтому она служила игрушкой. На рис. 153 изображен шар Герона Александрийского.

Турбины широко применяются в технике в качестве двигателей поездов, автобусов, судов, самолетов и ракет; для бурения скважин; для выработки электроэнергии на гидро-, тепловых, атомных и других электростанциях; для сжижения газов — трудно даже перечислить многообразные функции турбин. Общеизвестны такие названия, как турбобур, турбогенератор, турбоэлектроход, газотурбовоз.



Рис. 152



Рис. 153

Четырехтактный двигатель внутреннего сгорания (широко применяются и двухтактные двигатели — их работу мы не рассматриваем) состоит из одного или нескольких цилиндров. Внутри цилиндра находится поршень, соединенный кривошипно-шатунным механизмом (как у паровой машины, рис. 154, а) с коленчатым валом, на который насажен маховик. Распределительное устройство в соответствующие моменты открывает и закрывает клапаны — всасывающий 1, соединенный с карбюратором (см. рис. 111), и выхлопной 2, соединенный с атмосферой. В нужные моменты на электроды свечи С, вставленной в цилиндр, подается высокое напряжение, проскакивает искра, и воспламеняется горючая смесь. Вот почему возникло название такого двигателя.

Рассмотрим работу одного из цилиндров двигателя на p - V -диаграмме (рис. 154, б). Первый такт 1—2 — открыт всасывающий клапан, идет всасывание горючей смеси. Второй такт 2—3 — оба клапана закрыты, поршень сжимает горючую смесь (сжатие). В конце сжатия в камеру сгорания от механизма зажигания подается принудительная искра, воспламеняющая горючую смесь. Происходит взрыв: давление скачком 3—4 повышается, и начинается третий такт 4—5 — рабочий ход (клапаны по-прежнему закрыты). В мертвой точке 5 открывается выхлопной клапан, давление резко падает, и под давлением несколько больше атмосферного отработанные газы выталкиваются в атмосферу, происходит четвертый такт 6—7 — выхлоп. Цикл завершен, закрывается выхлопной, открывается всасывающий клапан, и с точки 1 начинается новый цикл. Полезная работа за цикл равна площади фигуры 2—3—4—5—6—2.

Преимущества: сравнительно большой к. п. д. (температура в камере сгорания 1200°C . Следовательно, теоретический к. п. д. $\eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx \frac{1200\text{ K} - 1500\text{ K}}{1500\text{ K}} = 80\%$), компактность, малый вес (и вес на единицу мощности).

Недостатки: дорогое топливо, сравнительная сложность, малая степень сжатия, так как при большом сжатии горючая смесь нагревается и самовозгорается (происходит «рабочий» ход назад), нет обратного хода, мощность невелика, выхлопные газы загрязняют атмосферу.

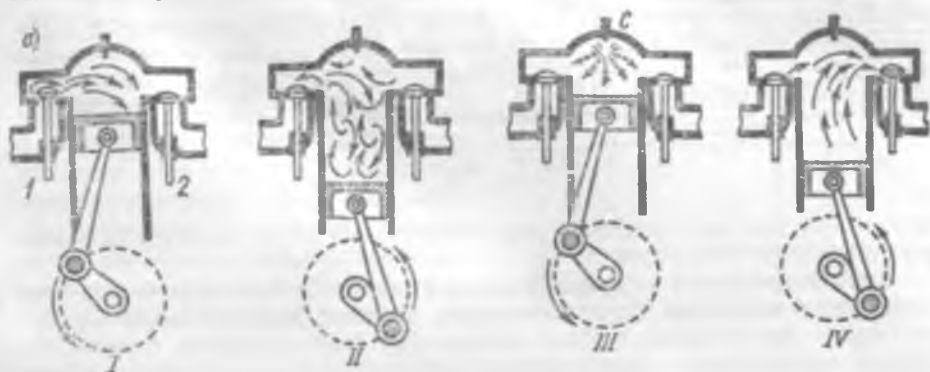


Рис. 154

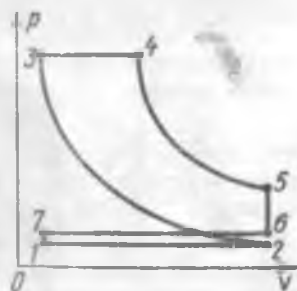
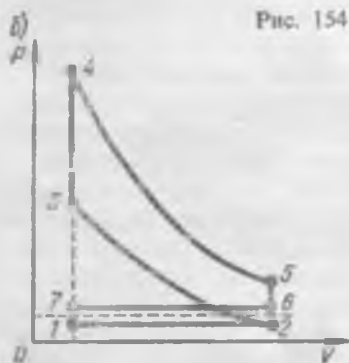


Рис. 155

Дизель — тоже четырехтактный двигатель внутреннего сгорания — лишен почти всех недостатков предыдущего двигателя. На рис. 155 изображена p - V -диаграмма его работы: 1—2 — всасывание; 2—3 — сжатие до гораздо большей, чем у двигателя внутреннего сгорания, степени, ибо всасывался и сжимался чистый воздух, который не может самовозгораться; 3—4 — медленно вбрызгивается с помощью топливного насоса и форсунки дизельное топливо — тяжелые фракции перегонки нефти. Попадая в горячую атмосферу сжатого воздуха, оно сгорает — давление поддерживается неизменным; 4 — прекращение подачи горючего; 3—4—5 — рабочий ход; 5—6 — открыт выхлопной клапан; 5—6—7 — выхлоп.

Достоинства (кроме указанных): большая возможная мощность, простота (нет свечей, искры и т. п.). Недостатки: сравнительная тихоходность, экологическая опасность.

Применяется в качестве ходового двигателя на теплоходах и дизельэлектроходах, на тепловозах, тракторах, автомобилях и т. д.

Прямоточный воздушно-реактивный двигатель — самый простой из возможных двигателей, представляет собой трубу (рис. 156), в которую взбрызгивается любое жидкое топливо и принудительно поджигается. Горячие газы вылетают с большой скоростью, сообщая (по закону сохранения импульса) реактивную тягу. Недостаток: двигатель не развивает тягу без движения относительно воздуха, в него должен попадать воздух с какой-то скоростью. Расчеты показывают, что



Рис. 156

наибольшую тягу при достаточно экономном режиме такой двигатель развивает при скорости 6—7 тыс. км/ч.

Турбокомпрессорный воздушно-реактивный двигатель. Такие двигатели давно применяются в авиации. Принудительно (от стартера) начинает вращаться вал, на котором расположены турбокомпрессор 2 и газовая турбина 4 (рис. 157). Через воздухозаборник 1 турбокомпрессором всасывается и сжимается воздух, подаваемый в камеру сгорания 3, куда вбрызгивается топливо. В камере сгорания оно поджигается, сгорает, и горячие газы, пройдя через газовую турбину 4, истекают через сопло 5, создавая реактивную тягу.



Рис. 157

Горячие газы приводят во вращение лопасти газовой турбины. Быстрее вращается вал, больше засасывается воздуха, увеличивается подача горючего, возрастает крутящий момент газовой турбины и т. д. до набора расчетных оборотов. По распределению мощности эти двигатели делят на турбореактивные и турбовинтовые. В турбореактивных меньшая часть энергии горючего заставляет вращаться газовую турбину (которая вращает только компрессор), а большая часть создает реактивную тягу. В турбовинтовых большая часть энергии горючего вращает газовую турбину, на валу остается излишек мощности, который используется для вращения воздушного винта; меньшая часть энергии горючего создает реактивную тягу. Двигатели первой группы установлены на самолетах ТУ-144, ТУ-154, ИЛ-62, ИЛ-86, ЯК-40, второй — на ИЛ-18, АН-10, АН-22.

ГЛАВА 5

ИЗМЕНЕНИЕ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

§ 5.1. Плавление. Кристаллизация

Мы изучили некоторые свойства вещества в трех агрегатных состояниях — твердом, жидком и газообразном. Теперь рассмотрим переходы между этими состояниями.

Переход вещества из твердого в жидкое состояние — *плавление*. Напомним, что твердым мы называли тело кристаллическое. Обратный переход из жидкого состояния в твердое — *кристаллизация* (отвердевание).

Поместим пробирку с нафталином в сосуд с водой и начнем подогревать, измеряя температуру нафталина. График зависимости температуры от времени нагревания, затем охлаждения изображен на рис. 158.

Сначала температура увеличивается до значения T_0 , после чего перестает расти, хотя некоторое количество теплоты Q_1 передается извне нафталину. В это время нафталин плавится, т. е. из кристаллического порошка превращается в бесцветную жидкость. При этом разрушается кристаллическая решетка, увеличивается потенциальная энергия



Рис. 158

взаиморасположения молекул. Кинетическая энергия молекул, в среднем пропорциональная температуре, при плавлении не меняется. Внутренняя энергия возрастает на *теплоту плавления* Q_1 . После того как все вещество расплавится, температура жидкости вновь станет увеличиваться.

Таким образом, плавление происходит при такой *температуре плавления*, которая соответствует минимальной кинетической энергии хаотического движения молекул жидкости.

Прекратим подачу энергии — начнется процесс остывания, при котором определенное количество теплоты будет передаваться окружающим телам и рассеиваться. Температура понизится до T_0 и не изменится в течение всего времени кристаллизации, хотя при этом определенное количество теплоты Q_2 будет рассеяно и передано окружающим телам. В процессе отвердевания образуется кристаллическая решетка, расположение частиц вещества становится упорядоченным, что связано с минимальным значением потенциальной и, следовательно, внутренней энергии. Вообще, при переходе от некристаллического (в частности, аморфного) состояния к кристаллическому внутренняя энергия уменьшается, чем объясняется устойчивость кристаллической структуры.

После того как все вещество закристаллизовалось, снова понижается температура теперь уже твердого тела. В процессе плавления энергия затрачивается на разрушение кристаллической решетки и переходит во внутреннюю. Эта энергия измеряется теплотой плавления Q_1 ; при отвердевании выделяется такая же энергия, измеряемая *теплотой отвердевания* Q_2 , причем $Q_1 = Q_2$. Мерой энергетических затрат при плавлении является *удельная теплота плавления*

$$\lambda = \frac{\delta Q}{dm} \quad (50)$$

— величина, равная отношению количества теплоты *, необходимого для изотермического превращения определенной массы твердого вещества

* Здесь, как в остальных процессах, внутренняя энергия может изменяться и в процессе совершения работы.

в жидкое состояние, к этой массе. Здесь δQ — количество теплоты, необходимое для плавления массы dm твердого тела при температуре плавления. Оно равно

$$\delta Q = \lambda dm.$$

Чтобы найти теплоту плавления или отвердевания конечной массы вещества, надо сложить все такие выражения. Если λ считать неизменной, то

$$Q = \lambda \int_{m_1}^{m_2} dm = \lambda (m_2 - m_1), \quad (51)$$

где m_1 и m_2 — массы жидкости до и после процесса. В частности, если плавится тело массой m , то перед процессом плавления масса жидкости была $m_1 = 0$, после плавления $m_2 = m$. Теплота плавления

$$Q_1 = \lambda m.$$

Перед отвердеванием вся масса вещества была жидкой, $m_1 = m$, а после кристаллизации масса жидкости $m_2 = 0$. Тогда теплота отвердевания

$$Q_2 = -\lambda m.$$

Это соответствует тому, что при плавлении количество теплоты сообщается телу ($Q_1 > 0$), а при отвердевании — отнимается у него ($Q_2 < 0$).

В § 3.5 мы говорили, что достаточно «твердыми», кроме кристаллических, бывают аморфные тела. Аморфное состояние вещества можно получить из вязкой жидкости, если быстро ее охладить, не отнимая теплоты отвердевания. Тогда может получиться переохлажденная жидкость, достаточно твердая в обыденном смысле этого слова, но с неупорядоченным расположением частиц (стекло, аморфная сера и т. п.).

При нагревании аморфных тел температура постепенно увеличивается, вещество размягчается и становится жидким (без определенной температуры плавления).

Если такие вещества надолго предоставить самим себе, то теплота отвердевания постепенно выделится, структура вещества станет упорядоченной, и вещество кристаллизуется. При этом уменьшится потенциальная энергия взаимного расположения частиц и, следовательно, внутренняя энергия тела.

§ 5.2. Изменение объема при плавлении (отвердевании)

При плавлении и отвердевании вещества наблюдается изменение его объема. Большинство веществ при плавлении расширяется, а при отвердевании сжимается. Это означает, что при кристаллизации средние расстояния между атомами уменьшаются, кристалл становится компактнее расплава того же вещества; исключение лед и чугун, которые в твердом состоянии образуют неплотно упакованную решетку, между атомами этих веществ при рентгеновском просвечивании обнаруживаются большие промежутки. Соответственно при плавлении средние расстояния между такими атомами уменьшаются, плотность жидкости больше плотности кристалла. При отвердевании лед расширяется, что позволяет ему плавать, а не опускаться на дно. Поэтому (и из-за особенности теплового расшире-

ния воды) водоемы не промерзают до дна, если они не слишком мелки. Твердый чугун тоже плавает в расплавленном чугуне (для сравнения: твердый кусок стали тонет в жидкой стали).

Эта особенность позволяет делать чугунное художественное литье. Форму для расплавленного чугуна можно покрыть мелкими узорами. Отвердевая и расширяясь, чугун заполнит мельчайшие изгибы формы, затем, остывая и сжимаясь, как все тела, чугун легко выходит из формы — происходит «усадка».

Температура плавления зависит от внешнего давления. Большинство веществ, расширяющихся при плавлении, под большим давлением плавится при более высокой температуре — давление «мешает» расширению, необходимому при плавлении; иными словами, для этих веществ температура плавления растет с увеличением внешнего давления. Лед и чугун плавятся легче под большим давлением — давление «помогает» сжатию, необходимому при плавлении, их температура плавления уменьшается при увеличении давления.

§ 5.3. Парообразование. Конденсация. Испарение

Следующий агрегатный переход — в парообразное состояние — называется *парообразованием*.

Парообразование может произойти прямо из твердого состояния — это *возгонка*, или *сублимация*. Возгоняются кристаллики йода, лед (классический пример: выстиранное белье высыхает на морозе).

Переход из жидкого в парообразное состояние возможен двумя различными процессами: *испарением* или *кипением*. Обратный переход — из парообразного состояния в жидкое — называется *конденсацией*.

Рассмотрим процесс испарения. В жидкости, как во всяком теле, есть распределение Максвелла молекул по скоростям, т. е. существуют (пусть в небольшом количестве) как очень медленные, так и очень быстрые молекулы. Для того чтобы вылететь из жидкости, молекула должна преодолеть воздействие поверхностного слоя (см. § 3.1), т. е. обладать достаточной энергией. Те из быстрых молекул, скорости которых направлены к поверхности, могут покинуть жидкость, «испариться». Испарение происходит с поверхности жидкости при любой температуре. Средняя кинетическая энергия молекул и, следовательно, температура жидкости при этом понижаются. Как видно, для перевода в пар некоторой массы жидкости без изменения температуры надо совершить работу против молекулярных сил притяжения и сил давления газа, т. е. передать жидкости *теплоту парообразования*. Характеристикой этого процесса является *удельная теплота парообразования* r — величина, измеряемая отношением энергии, необходимой для изотермического обращения в пар некоторой массы жидкости, к этой массе. Обозначим δQ — количество теплоты, необходимое для испарения массы dm данной жидкости при температуре парообразования. Тогда

$$r = \frac{\delta Q}{dm}. \quad (52)$$

Отсюда

$$\delta Q = r dm.$$

Чтобы найти теплоту парообразования или конденсации конечной массы вещества, надо сложить все такие выражения. Если r можно считать неизменной, то

$$Q \stackrel{4.4}{=} r \int_{m_1}^{m_2} dm \stackrel{4.4}{=} r(m_2 - m_1), \quad (53)$$

где m_1 и m_2 — массы пара до и после процесса. Например, если испаряется масса m жидкости, то перед процессом парообразования масса пара $m_1 = 0$; после парообразования $m_2 = m$. Теплота парообразования

$$Q_1 \stackrel{5.3}{=} rm.$$

Это количество теплоты, сообщенное телу, положительно: $Q_1 > 0$.

Если конденсируется масса m пара, то перед процессом конденсации масса пара $m_1 = m$, после полной конденсации пара нет: $m_2 = 0$. Тогда теплота конденсации

$$Q_2 \stackrel{5.3}{=} -rm.$$

Это количество теплоты, отнятой у тела, отрицательно: $Q_2 < 0$.

Обозначим среднюю «работу испарения» в расчете на одну молекулу буквой A_i , тогда энергия для испарения массы m жидкости будет равна

$$A_i N_A \frac{m}{M} \stackrel{5.3}{=} rm.$$

Здесь N_A — постоянная Авогадро; m/M — число молей; M — молярная масса жидкости (пара).

Скорость испарения зависит от нескольких причин:

1) рода жидкости. Для разных жидкостей различны поверхностные слои, работа выхода A_i и, конечно, удельная теплота парообразования r ;

2) температуры. Чем выше температура, тем сильнее сдвинуто распределение Максвелла молекул по скоростям (см. § 1.2), тем больше быстрых молекул;

3) площади поверхности. Чем она больше, тем больше молекул может вылететь из жидкости за единицу времени. Именно поэтому горячий чай иногда наливают в блюдце;

4) движения газа над поверхностью. Некоторые из испарившихся молекул имеют малую скорость и при хаотическом движении могут возвратиться в жидкость; потоком газа (воздуха) такие молекулы уносятся, увеличивая тем самым скорость испарения. Поэтому быстрее остывает горячий чай или суп, если на него подуть; поэтому прохладнее становится при ветре;

5) давления над поверхностью. Чем оно выше, тем больше вероятность возвращения в жидкость испарившихся молекул и меньше скорость испарения.

§ 5.4. Свойства паров

Представьте себе совершенно пустой (даже без воздуха) закрытый сосуд, в который налита жидкость. Она немедленно начнет испаряться, и над ней появятся молекулы ее пара (рис. 159). Появляется вероятность

возвращения молекул пара в жидкость — конденсации. Скорость конденсации пропорциональна концентрации молекул пара и сначала невелика. Жидкость испаряется, возрастают концентрация и давление пара, уменьшается скорость испарения, увеличивается скорость конденсации. Рано или поздно скорости испарения и конденсации станут равными, станут равны числа молекул, испаряющихся и конденсирующихся за единицу времени через единицу поверхности, — будет достигнуто *динамическое равновесие* между жидкостью и ее паром. Жидкость перестанет испаряться, будет достигнуто максимальное (в данных условиях) давление пара. Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называют паром, насыщающим пространство или *насыщенным паром*. Пар, не достигший насыщения, естественно, называют паром, не насыщающим пространство или *ненасыщенным*.

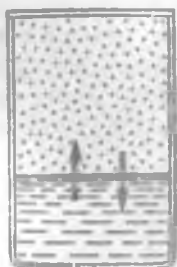


Рис. 159



Рис. 160

Давление насыщенного пара, как мы видели, — наивысшее давление данного пара при заданной температуре, концентрация такого пара при этой температуре максимальна.

Мы будем всегда рассматривать пар в открытом сосуде как *ненасыщенный* (в соответствии с тем, что любая жидкость из открытого сосуда рано или поздно испарится). Пар в закрытом сосуде будем считать *ненасыщенным*, если в нем нет следов жидкости. Если же в закрытом сосуде есть хотя бы следы жидкости, пар в сосуде *насыщенный* (иначе жидкость испарилась бы; есть жидкость — есть динамическое равновесие с ней).

Чтобы исследовать свойства *ненасыщенных паров*, сделаем с ними опыты Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, Шарля, которые привели к газовым законам (см. § 2.3). Придем к выводу: *ненасыщенные пары подчиняются всем газовым законам* (и выведенному из них уравнению состояния, разумеется) и тем точнее, чем дальше они от насыщения.

Иследуем теперь поведение *насыщенного пара*. В цилиндре (рис. 160) под поршнем находится *насыщенный пар*. Поместим цилиндр в термостат и медленно начнем поднимать поршень. Сразу нарушится динамическое равновесие; скорость испарения возрастет, скорость конденсации уменьшится, так как уменьшилась концентрация молекул пара. Жидкость начнет испаряться, концентрация пара будет возрастать и снова наступит динамическое равновесие при прежней концентрации. Таким образом, увеличение объема пара привело лишь к испарению соответствующего количества жидкости, не изменив давления. Разумеется, уменьшение объема приведет к нарушению равновесия в сторону уменьшения скорости испарения, часть пара конденсируется, а давление останется прежним. Давление насыщенного пара при неизменной температуре не зависит от объема (см. рис. 135, участок II изотермы реального газа).

Если, например, в запаянной сверху трубке В, погруженной в открытый сосуд А, над ртутью находится какая-либо жидкость и ее *насыщен-*

ный пар (рис. 161), то увеличение или уменьшение объема пара приводит к уменьшению или увеличению массы жидкости. Установившееся давление насыщенного пара и его концентрация при этом не изменяются.

Можно представить себе (в особенности если в сосуде — рис. 160 или 161 — мало жидкости), что увеличение объема приведет к испарению всей жидкости и, следовательно, к обращению насыщенного пара в ненасыщенный (давление которого при дальнейшем увеличении объема начнет уменьшаться по закону Бойля — Мариотта (см. рис. 135, область III)). Значит, можно опыт прозести в обратном направлении: взять ненасыщенный пар, уменьшать его объем (будет возрастать давление); когда давление станет равно давлению насыщенного пара, в сосуде может появиться жидкость, если, вдобавок, есть центры конденсации — какие-либо

частицы, на которых будут образовываться капельки жидкости (в противном случае давление пара будет возрастать по изотерме Ван-дер-Ваальса (см. рис. 135), пар получится пересыщенным. Из этого неустойчивого состояния пар может превратиться в устойчивую двухфазную

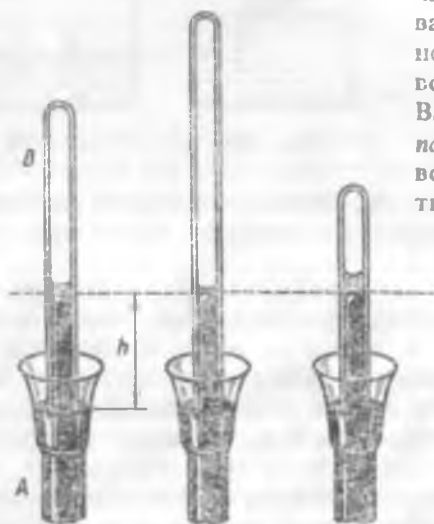


Рис. 161



Рис. 162

систему при встряхивании или при появлении первой же капельки жидкости). При дальнейшем уменьшении объема пар будет сжиматься. Мы описали первый способ обращения ненасыщенных паров в насыщенные — изотермическое сжатие.

Нагреем сосуд, в котором находятся жидкость и ее насыщенный пар (рис. 162). Если бы в сосуде находился только газ или ненасыщенный пар, то при увеличении температуры их давление росло бы линейно [см. (14)] в соответствии с законом Шарля или прямо пропорционально по формуле $p = n_0 k T$.

По этой же причине должно расти давление и в нашем сосуде. Но, кроме того, при повышении температуры нарушается подвижное равновесие жидкости и ее пара. Увеличиваются скорость испарения и концентрация молекул пара; новое динамическое равновесие будет достигнуто при большей концентрации n_0 . Поэтому давление насыщенного пара с увеличением температуры возрастает нелинейно и быстрее, чем давление ненасыщенного пара, так как растут средняя сила каждого удара

и число молекул, ударяющихся о стенки сосуда, что соответствует формуле (23).

Можно представить себе (в особенности, если жидкости мало), что при достаточном нагревании вся жидкость испарится, и пар станет ненасыщенным. Этот опыт тоже можно провести в обратном направлении: взять ненасыщенный пар и начать его охлаждать. Рано или поздно при определенной температуре его давление станет равно давлению насыщенного пара при этой температуре, пар станет насыщенным и при дальнейшем охлаждении будет сжиматься (если есть центры конденсации). Это второй способ обращения ненасыщенных паров в насыщенные — изохорное охлаждение.

Сходство свойств ненасыщенных паров и газов натолкнуло Фарадея на предположение: не являются ли газы ненасыщенными парами соответствующих жидкостей? Если это так, можно попытаться сделать их насыщенными и сконденсировать. Действительно, сжатием удалось один за другим сделать насыщенными многие газы, кроме шести, которые Фарадей назвал «постоянными». И только после введения понятия *критической температуры* (Д. И. Менделеев называл ее абсолютной температурой кипения) стало ясно, что так называемые постоянные газы находятся при температурах выше их критических температур. Значит, их надо сначала охладить до температуры ниже критической, а затем сжимать. Действительно, один за другим все газы были получены в жидком, а потом и в твердом состояниях. Для этого пришлось получать достаточно низкие температуры.

Техника получения низких температур такова: берут какой-либо газ и сжимают его до очень высокого давления. При этом газ нагревается. В сжатом состоянии его охлаждают. Затем газу дают расширяться. Он совершает работу за счет внутренней энергии и охлаждается настолько, что конденсируется. Следующую порцию сжатого газа или другой сжатый газ охлаждают полученным конденсатом, затем дают расширяться и получают новую порцию сжиженного газа и т. д.

Еще один метод получения низких температур состоит в кипении (см. § 5.5) полученного сжиженного газа под пониженным давлением. При этом теплота парообразования заимствуется из внутренней энергии жидкости, которая, таким образом, еще больше охлаждается.

В двухфазной системе — определенная масса жидкости и ее пара в закрытом сосуде — при комнатной температуре плотность жидкости больше плотности пара (рис. 163). По мере роста температуры плотность жидкости уменьшается, плотность пара растет, пока не наступит *критическое состояние* вещества, при котором исчезает различие между жидкостью и ее паром.

Критическое состояние наблюдается только при определенных параметрах, называемых *критическими*, — давлении, объеме и температуре. Изотерма, проходящая через критическое состояние вещества, тоже называется *критической*.

Во всех состояниях вещества на этой изотерме — при критической температуре — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул настолько велика, что силы молекулярного взаимодействия не могут удерживать соединившиеся молекулы. Значит, если где-то в объеме

вещества, находящегося при критической температуре, начинает образовываться капелька жидкости, то ее молекулы немедленно разлетаются.

Одно из первых определений критической температуры — температура, выше которой ни под каким давлением пар не обращается в жидкость (см. рис. 163, пунктир справа). Возможность сжижения пара при темпера-

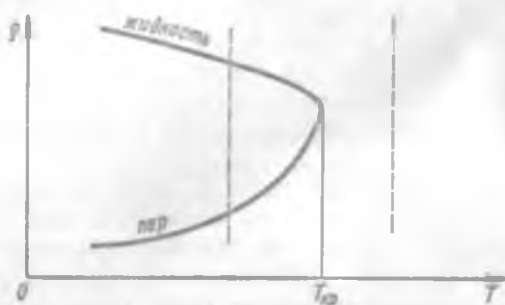


Рис. 163



Рис. 164

туре ниже критической показана на рис. 163 пунктиром слева. В критическом состоянии исчезает поверхностный слой жидкости, и не проявляются никакие поверхностные явления. Действительно, если раньше на молекулу поверхностного слоя действовала равнодействующая сил молекулярного притяжения, то теперь она равна нулю, и такая молекула ничем не отличается от «глубинной», ибо плотность пара неотличима от плотности жидкости. Если рассмотреть на просвет нашу двухфазную систему, то хорошо видны обе фазы и граница между ними — мениск (рис. 164). По мере нагревания мениск поднимается и делается более тонким и плоским. В критическом состоянии он исчезает, вся колба выглядит однородной. При охлаждении в критическом состоянии наблюдается конденсация жидкости во всех точках, в результате которой весь объем в проходящем свете чернеет — капельки жидкости рассеивают свет (опалесценция). Появившиеся капельки сливаются и стекают вниз — образуется граница жидкой и газообразной фаз.

§ 5.5. Кипение

Зная свойства паров, можно рассмотреть второй способ парообразования — кипение. В жидкости, нагреваемой в сосуде (рис. 165), растворен воздух. При определенных условиях он образует в толще жидкости или на внутренних стенках сосуда микроскопические пузырьки, внутри которых кроме воздуха находится насыщенный пар (вокруг — жидкость). Пока температура невелика, давление насыщенного пара меньше давления над поверхностью жидкости — внешнего давления, и пузырьки малы. По закону Дальтона, давление внутри пузырька равно сумме давлений пара и воздуха:

$$P \stackrel{10}{=} P_{\text{нас}} + P_{\text{возд}}$$

Извне на пузырек, по закону Паскаля, действуют внешнее, гидростатическое и лапласово давления. Давление воздуха в пузырьке больше

внешнего давления и обеспечивает равенство суммарных давлений вне и внутри пузырька:

$$P_{\text{нас}} + P_{\text{возд}} = P_{\text{внеш}} + P_{\text{ст}} + P_{\text{Л}}.$$

При нагревании жидкости растет давление насыщенного пара, соответственно немного увеличивается объем, и немедленно уменьшается дав-

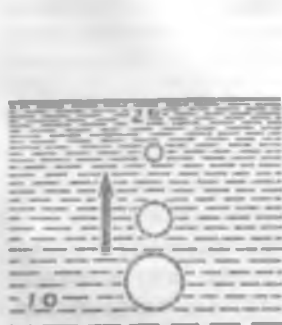


Рис. 165



Рис. 166

ление воздуха в пузырьке. Суммарное давление внутри пузырька остается равным давлению извне, и пузырек остается микроскопическим (рис. 165, 1).

Наконец, в соответствии с одним из законов диалектики накопление количества (внутренней энергии) приводит к качественному скачку. Когда давление насыщенного пара станет равно сумме давлений над поверхностью жидкости (внешнего) и гидростатического, пузырек за счет давления воздуха начнет расти. При этом через его стенки будут испаряться все новые порции жидкости, поддерживая избыточное давление изнутри. Лапласово давление также уменьшается, способствуя росту пузырька. Увеличивается архимедова сила, которая увлекает пузырек вверх. В верхних еще холодных слоях жидкости давление насыщенного пара уменьшается, и пузырек «раздавливается» внешним давлением (рис. 165, 2). Когда же весь объем жидкости достаточно прогреется, пузырьки раздуваются, всплывают и выбрасывают на поверхность большие порции пара (рис. 165, 3). Бурное испарение внутри пузырьков в глубине жидкости — это и есть *кипение*. Оно происходит при определенной *температуре кипения*, при которой давление насыщенного пара данной жидкости становится равным внешнему давлению.

Температура кипения, естественно, зависит от внешнего давления. Доведем до кипения воду в колбе, во время кипения закроем колбу пробкой, снимем с нагревателя и перевернем. Вода в колбе перестала кипеть при снятии с нагревателя. Теперь польем холодной водой дно перевернутой колбы (рис. 166). Вода в колбе начинает бурно кипеть. Охлаждение вызвало конденсацию пара в колбе, что повлекло за собой уменьшение давления над поверхностью. Следовательно, уменьшилась температура, при которой давление насыщенного пара равно внешнему, — температура кипения. И вода при 70–80 °C закипает.

Высоко в горах нельзя в открытом сосуде сварить, например, мясо — вода кипит, а температура недостаточна. Конечно, мясо можно сварить и в горах, но для этого необходимо герметично закрыть сосуд; тогда в нем давление над поверхностью повысится, соответственно увеличится и температура кипения. Аналогично повышается температура кипения воды в герметизированных кастрюлях — скороварках. Температура кипения в котлах высокого давления современных теплоэлектростанций порядка нескольких сотен градусов Цельсия.

Мы говорили, что кипение используется для получения низких температур. Над жидкостью в закрытом сосуде уменьшают давление, она кипит без внешнего источника энергии. Теплота парообразования отнимается от самой жидкости, ее температура понижается. Так, кипящая жидкость может охладиться до заморозания. Именно этим методом были получены «постоянные» газы в твердом состоянии.

§ 5.6. Водяной пар в воздухе

Воздух — смесь газов. Следовательно, атмосферное давление — сумма парциальных давлений (по закону Дальтона) всех газов, составляющих атмосферу, — азота, кислорода, углекислого газа, инертных газов и т. п.

Так как Земля на $\frac{2}{3}$ покрыта водой, то в состав атмосферы входит водяной пар, и все процессы в жизни и в технике, связанные с испарением воды, зависят от состояния водяного пара в воздухе.

Парциальное давление водяного пара, находящегося в воздухе при данной температуре, называется *абсолютной влажностью* f . Но скорость испарения воды зависит от близости водяного пара к насыщению, а не от абсолютной влажности. Эта близость характеризуется *относительной влажностью* B — обычно выраженным в процентах отношением абсолютной влажности к давлению F насыщенного водяного пара при данной температуре:

$$B = \frac{f}{F} 100\%. \quad (54)$$

Относительная влажность 100% означает, что $f = F$, пар в воздухе насыщен, испарения не происходит. Чем меньше относительная влажность, тем дальше пар от насыщения, тем интенсивнее испарение. Давление F насыщенного водяного пара при заданной температуре — величина табличная. Для определения относительной влажности надо знать f^* . Один из методов определения абсолютной влажности — по точке росы.

Точка росы — температура, при которой пар, находящийся в воздухе, становится насыщенным. Если в данной точке пространства понижать температуру, то это не скажется на давлении водяного пара в большом объеме, но при пониженной температуре он может стать насыщенным в этой точке. Мы узнаем об этом по капелькам росы, появившимся

* Состояние водяного пара в воздухе можно охарактеризовать и его плотностью, выраженной, например, в граммах на кубический метр. На этом «основании» иногда пишут, что абсолютная влажность равна D , а относительная — $(D/D_0) 100\%$. Легко подсчитать $D = m/V = p/(RT)$, откуда видно, что $D/p = 1/T$, т. е. дробь зависит от температуры. Есть только одна температура, при которой плотность D [г/м³] численно равна давлению p [мм рт. ст.]. Найдите эту температуру.

в момент насыщения. Измерим температуру t_p и по таблице найдем давление F_{t_p} насыщенного пара для этой температуры. Но ведь это давление водяного пара при данной температуре t , которое не изменилось: $f = F_{t_p}$, и задача определения абсолютной и относительной влажности решена.

Для определения точки росы применяется гигрометр * Ламбрехта (рис. 167). Он состоит из никелированной коробочки A , в которую вставлен термометр и наливается легколетучая жидкость. Над ней с помощью груши прокачивается воздух, за счет усиления испарения понижается температура. Наконец, на поверхности коробочки A конденсируется пар — выступает роса, коробочка (сначала снизу) запотевает, что хорошо видно по контрасту с неохлажденным никелированным кольцом K . Замечают температуру, при которой появилась роса. Это и есть точка росы.



Рис. 167

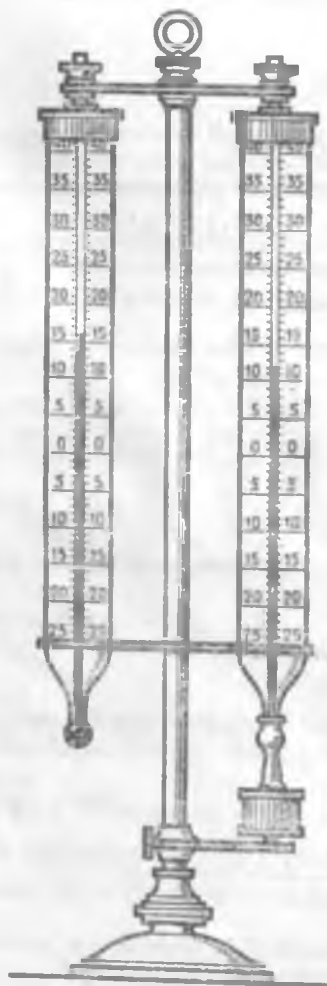


Рис. 168

Для измерения влажностей применяется также психрометр **. Он состоит из двух одинаковых термометров, на один из которых надета марля, опущенная в сосуд с водой (рис. 168). Вода испаряется и тем быстрее,

* hygros (греч.) — влажный.

** psychria (греч.) — холод.

чем меньше относительная влажность, при этом теплота парообразования отбирается у окружающих тел, в том числе у влажного термометра. Поэтому между показаниями термометров — сухого и влажного — существует *психрометрическая разность*, зависящая от влажности. Осталось каждому психрометру придать психрометрическую таблицу, где в зависимости от температуры и психрометрической разности указаны абсолютная и относительная влажности. Такие психрометры висят в музеях, театрах, на станциях метрополитена.

ЗАДАЧИ

Задача II.1. В баллоне объемом 5 л находится 5 кг кислорода при температуре 300 К. Какую массу газа надо выпустить из баллона, чтобы при температуре 350 К давление уменьшилось на $2,026 \cdot 10^7$ Па?

$$V = 5 \text{ л} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$m_1 = 5 \text{ кг};$$

$$pV \stackrel{20}{=} \frac{m}{M} RT.$$

$$T_1 = 300 \text{ К};$$

$$T_2 = 350 \text{ К};$$

$$\Delta p = 2,026 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

$$\Delta m = ?$$

Решение. Для начального и конечного состояний имеем:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} RT_1; \quad p_2 V = \frac{m_1 - \Delta m}{M} RT_2.$$

Вычтем почленно из первого уравнения второе:

$$(p_1 - p_2) V = \Delta p V = \frac{R}{M} (m_1 T_1 - m_1 T_2 + \Delta m T_2).$$

Отсюда

$$\Delta m \frac{R}{M} T_2 = \Delta p V - \frac{R}{M} (m_1 T_1 - m_1 T_2) \text{ и}$$

$$\Delta m = \frac{MV \Delta p}{RT_2} + \frac{m_1 (T_2 - T_1)}{T_2} =$$

$$= \frac{32 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 2,026 \cdot 10^7 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot 8,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 350 \text{ К}} + \frac{5 \text{ кг} \cdot 50 \text{ К}}{350 \text{ К}} = 1,83 \text{ кг}.$$

Задача II.2. Определить плотность воздуха при давлении 700 мм рт. ст. и температуре 250 К.

$$p = 700 \text{ мм рт. ст.} =$$

$$= \frac{700}{760} \cdot 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$\rho \stackrel{32.1}{=} \frac{m}{V},$$

$$pV \stackrel{20}{=} \frac{m}{M} RT.$$

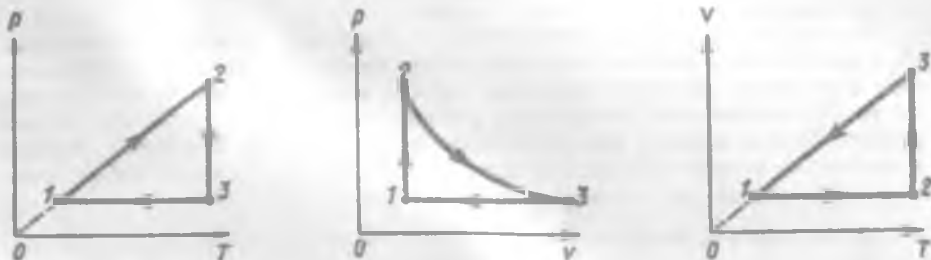
$$T = 250 \text{ К.}$$

$$\rho = ?$$

Решение: Искомая плотность

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 700 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot 760 \text{ с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot 8,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^3 \cdot 250 \text{ К}} = 1,3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Задача II.3. На p - T -диаграмме показан замкнутый процесс 1-2-3-1. Изобразить этот процесс на p - V - и V - T -диаграммах.



Решение. Процесс 1-2 изохорный, так как в нем давление прямо пропорционально температуре; 2-3 — изотермический, а 3-1 — изобарный. Следовательно, данный цикл на p - V -диаграмме и на V - T -диаграмме выглядит так, как изображено на рисунках.

Объясните, почему на V - T -диаграмме пунктир проходит через начало координат.

Задача II.4. В калориметр теплоемкостью 209,4 Дж/К, содержащий 500 г воды при температуре 293 К, опускают 100 г льда при температуре 253 К. Определить установившуюся температуру.

$$\begin{aligned} c\theta &= 209,4 \text{ Дж/К}; \\ m_1 &= 500 \text{ г} = 0,5 \text{ кг}; \\ T_1 &= 293 \text{ К}; \\ m_2 &= 100 \text{ г} = 0,1 \text{ кг}; \\ T_2 &= 253 \text{ К}. \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \Delta Q_i &\stackrel{17}{=} 0; \\ \Delta Q &\stackrel{36}{=} c\theta(T_2 - T_1); \\ Q &\stackrel{31}{=} \lambda m. \end{aligned}$$

$\Theta = ?$

Решение. Количество теплоты отдают калориметр и вода в нем, получают лед при нагревании и плавлении и вода, образовавшаяся из льда. Уравнение теплового баланса:

$$c\theta(\Theta - T_1) + c_1 m_1 (\Theta - T_1) + c_2 m_2 (T_0 - T_2) + \lambda m_2 + c_1 m_2 (\Theta - T_0) = 0.$$

Решаем его относительно установившейся температуры:

$$\Theta (c_1 m_1 + c\theta + c_1 m_2) = c\theta T_1 + c_1 m_1 T_1 - c_2 m_2 (T_0 - T_2) - \lambda m_2 + c_1 m_2 T_0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{(c\theta + c_1 m_1) T_1 + m_2 [c_1 T_0 - c_2 (T_0 - T_2) - \lambda]}{c\theta + c_1 (m_1 + m_2)} = \\ &= \left(209,4 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} + 4187,4 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,5 \text{ кг} \right) 293 \text{ К} + \dots \\ &\rightarrow + 0,1 \text{ кг} \left(4187,4 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 273 \text{ К} - 2093,7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 20 \text{ К} - 334\,992 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right) \\ &\quad \frac{209,4 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} + 4187,4 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,6 \text{ кг}}{} = 276 \text{ К}. \end{aligned}$$

Задача II.5. 200 г азота нагревают на 100 К изобарно и изохорно. Какая энергия требуется для нагревания в том и другом случаях?

$$m = 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг}; \quad pV \stackrel{20}{=} mRT/M;$$

$$\Delta T = 100 \text{ К.} \quad \Delta w \stackrel{32}{=} mc(T_2 - T_1);$$

$$\Delta w_V = ? \quad \Delta w_p = ? \quad \Delta Q \stackrel{28}{=} \Delta U + \Delta A; \quad A \stackrel{45}{=} p(V_2 - V_1).$$

Решение. Индекс у Δw показывает, какой параметр процесса не изменяется. При постоянном объеме вся переданная газу энергия переходит во внутреннюю. При постоянном давлении внутренняя энергия изменяется так же (по условию то же ΔT) и, кроме того, совершается работа. Следовательно, изобарный процесс требует больше энергии, чем соответствующий изохорный. Выражение, стоящее в скобках во втором буквенном ответе $c_V + R/M = c_p$, представляет собой удельную теплоемкость при постоянном давлении [см. (23-П)]. Итак,

$$\Delta w_V = mc_V \Delta T = 0,2 \text{ кг} \cdot 742 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} \cdot 100 \text{ К} = 14,8 \text{ кДж.}$$

$$\Delta w_p = mc_V \Delta T + p(V_2 - V_1) = mc_V \Delta T + \frac{m}{M} RT_2 - \frac{m}{M} RT_1 =$$

$$= mc_V \Delta T + \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) = m \Delta T \left(c_V + \frac{R}{M} \right) =$$

$$= 0,2 \text{ кг} \cdot 100 \text{ К} \left(742 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} + \frac{8,3 \text{ Дж} \cdot 10^3 \text{ моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot 28 \text{ кг}} \right) = 20,8 \text{ кДж.}$$

Задача II.6. В калориметр теплоемкостью 2090 Дж/К, содержащий 0,5 кг воды при 313 К, вливают 20 кг расплавленного свинца при температуре плавления 600 К. Определить массу испарившейся воды, считая, что вода нагревается до кипения, а затем часть ее обращается в пар при температуре кипения.

$$cm = 2,09 \text{ кДж/К}; \quad Q_1 \stackrel{51}{=} -\lambda m;$$

$$m_1 = 0,5 \text{ кг}; \quad \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \stackrel{37}{=} 0;$$

$$T_1 = 313 \text{ К};$$

$$m_2 = 20 \text{ кг}; \quad Q \stackrel{53}{=} rm; \quad \Delta Q \stackrel{54}{=} cm(T_2 - T_1).$$

$$T_2 = 600 \text{ К.}$$

$$m_3 = ?$$

Решение. Уравнение теплового баланса:

$$-\lambda m_2 + c_2 m_2 (T_0 - T_2) + cm(T_0 - T_1) + c_1 m_1 (T_0 - T_1) + rm_3 = 0.$$

Следовательно,

$$m_3 = \frac{[\lambda + c_2(T_2 - T_0)] m_2 - (cm + c_1 m_1)(T_0 - T_1)}{r}$$

$$= \frac{\left(25,12 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}} + 0,126 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 227 \text{ К} \right) 20 \text{ кг} - \left(2,09 \frac{\text{кДж}}{\text{К}} + 4,187 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,5 \text{ кг} \right) 60 \text{ К}}{2257 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}} = 0,365 \text{ кг.}$$

Задача II.7. Два куска льда массами по 200 г при температуре 273 К в вакууме трутся друг о друга с помощью двигателя, развивающего мощность 10 Вт. Определить, через какое время они растают.

$$m_1 = m_2 = m = 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг}; \quad N \stackrel{63-1}{=} A/t;$$

$$T = 273 \text{ К}; \quad Q \stackrel{21}{=} \lambda m.$$

$$N = 10 \text{ Вт.}$$

$$t = ?$$

Решение. При трении механическая энергия целиком превращается во внутреннюю:

$$Nt = 2m\lambda.$$

Отсюда

$$t = \frac{2m\lambda}{N} = \frac{2 \cdot 0,2 \text{ кг} \cdot 335 \, 000 \text{ Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot 10 \text{ Дж}} = 3,72 \text{ ч.}$$

Задача 11.8. Какую массу должны иметь железные вагонные тормоза, чтобы при полной остановке вагона, идущего со скоростью 36 км/ч, они нагревались не более чем на 100 К? Масса вагона 10 т.

$$m = 10 \text{ т} = 10^4 \text{ кг}; \quad W_{\text{т}} \stackrel{55-1}{=} mv^2/2;$$

$$v = 36 \text{ км/ч} = 10 \text{ м/с}; \quad \Delta E \stackrel{60-1}{=} \Delta A_1;$$

$$\Delta T = 100 \text{ К.} \quad \Delta W \stackrel{32}{=} mc(T_2 - T_1).$$

$$m_{\text{т}} = ?$$

Решение. Вся механическая энергия вагона при торможении переходит во внутреннюю:

$$m_{\text{т}} c_{\text{ж}} \Delta T = mv^2/2.$$

Отсюда

$$m_{\text{т}} = \frac{mv^2}{2c_{\text{ж}} \Delta T} = \frac{10^4 \text{ кг} \cdot 100 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{К}}{\text{с}^2 \cdot 2 \cdot 460 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 100 \text{ К}} = 10,9 \text{ кг.}$$

Задача 11.9. Латунный стержень длиной 1,5 м жестко закреплен между двумя упорами. Температура стержня 273 К. С какой силой он будет действовать на упоры, если ему сообщить нагреванием $4,19 \cdot 10^5$ Дж энергии?

$$l_0 = 1,5 \text{ м}; \quad \rho \stackrel{32-1}{=} m/V; \quad \alpha \stackrel{3}{=} (l_{\text{т}} - l_0)/(l_0 \Delta T);$$

$$\Delta Q = 4,19 \cdot 10^5 \text{ Дж.} \quad \Delta Q \stackrel{16}{=} cm(T_2 - T_1).$$

$$F = ?$$

Решение. Закон Гука для деформации растяжения (сжатия) имеет вид

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S},$$

где $\Delta l/l_0$ — относительное удлинение; E — модуль Юнга; F — сила, действующая на поперечное сечение образца площадью S . Следовательно,

$$F = ES \Delta l/l_0.$$

Относительное удлинение (при возможном расширении) равно $\Delta l/l_0 = \alpha \Delta T$. Разность температур $\Delta T = \Delta Q/cm$, масса $m = \rho V = \rho S l_0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} F &= ES \alpha \Delta T = ES \alpha \frac{\Delta Q}{cm} = ES \alpha \frac{\Delta Q}{\rho S l_0} = E \alpha \frac{\Delta Q}{\rho l_0} = \\ &= \frac{8,83 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot 19 \cdot 10^{-6} \cdot 4,19 \cdot 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot 384 \text{ Дж} \cdot 8,5 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot 1,5 \text{ м}} = 1,44 \cdot 10^5 \text{ Н.} \end{aligned}$$

РАЗДЕЛ III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 1.1. Электрическое поле

Поместим стеклянную палочку над мелко изорванными бумажками. По закону всемирного тяготения палочка притягивает бумажки, тем не менее, они не шелохнулись, очевидно, потому что Земля их притягивает сильнее. Таким образом, в пределах точности данного опыта гравитационное поле палочки не обнаруживается. Потрем палочку, например, шелком и повторим опыт. Бумажки теперь бурно реагируют, притягиваясь к палочке (рис. 169); некоторые даже подскакивают к ней.

Объяснение этих опытов мы пока отложим, но уже сейчас ясно, что палочка стала источником еще какого-то поля, помимо гравитационного, которое проявилось действием больших сил. Впервые такое явление наблюдалось на палочке из янтаря, поэтому силы были названы *электрическими**, поле таких сил — *электрическим полем*. Тело, участвующее в электрическом взаимодействии, называют *электрически заряженным телом* или *электрическим зарядом***. Процесс, в результате которого тело заряжается, называется *электризацией*. Мы ознакомились с простейшей электризацией трением. Так, можно наэлектризовать все вещества, в том числе и проводники (проводник должен быть изолирован). Экспериментально были обнаружены

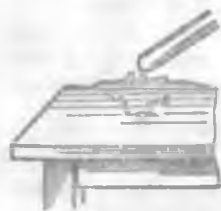


Рис. 169

два рода электрических зарядов. Взаимодействуют они по-разному, соединяясь — нейтрализуются. Поэтому зарядам приписали противоположные знаки — «стеклянное» электричество было названо *положительным*, «смоляное» — *отрицательным*.

При взаимодействии одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются. На этом свойстве электрических зарядов основаны простейшие электронизмерительные приборы — электроскоп*** (рис. 170) и электрометр (рис. 171). Листочки электроскопа, заряжаясь одноименно, расходятся на определенный угол, пропорциональный заряду на электроскопе. Аналогично отклоняется стрелка электрометра.

Проведем следующий опыт. Песок, высыпаясь из воронки, электризуется трением о наклонную металлическую пластину, соединенную с

* elektron (греч.) — смола, янтарь.

** Заряд — одно из фундаментальных свойств элементарных частиц, поэтому определить этот термин через более простые не удастся.

*** skopeō (греч.) — смотрю.

электрометром, и собирается на горизонтальной площадке, насаженной на другой электрометр (рис. 172).

Получив достаточные отклонения обоих электрометров, можно исследовать знаки зарядов на них. Но можно просто соединить их друг с другом — заряды нейтрализуются. Значит, они были равны по абсолютному значению (в пределах погрешности эксперимента) и противоположны по знаку. Следовательно, при электризации трением электризуются оба тела равными по абсолютному значению и противоположными по знаку зарядами.

Электрический заряд — одна из фундаментальных характеристик материи. И как не уничтожается и не создается вновь в различных процессах материя, так не создается и не исчезает электрический заряд. Отсюда следует подтвержденный экспериментально закон сохранения электрических зарядов:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \text{const.} \quad (1)$$



Рис. 170



Рис. 171

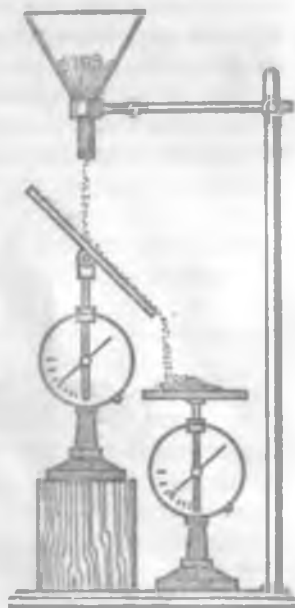


Рис. 172

Алгебраическая сумма зарядов изолированной системы постоянна.*

Электрические заряды порождают электрическое поле — материальную среду, посредством которой осуществляется их взаимодействие.

Говоря о полевых силах (см. разд. I, § 2.4), мы отметили общие свойства полей, присущие и электрическому полю. В дальнейшем будут введены различные характеристики электрического поля.

Но с самого начала должно быть понятно, что источниками электрических полей являются электрические заряды.

Всякий конечный заряд равен целому числу элементарных зарядов: $Q = \pm ne$. Наименьший элементарный заряд равен абсолютной величине заряда электрона $e = 1,60219 \cdot 10^{-19}$ Кл.

* Изолированная система включает все взаимодействующие тела.

На основании электронной теории строения вещества можно представить, что в процессе электризации трением некоторое количество электронов переходит с одного тела на другое, при этом электризуются оба тела.

Электрическое поле данных зарядов по-разному проявляется в различных системах отсчета. Мы начнем изучение электрического поля с наиболее простого случая, когда заряды, создающие поле, покоятся в выбранной системе отсчета. Поле таких неподвижных зарядов называется *электростатическим*.

§ 1.2. Закон Кулона

Назовем *точечными зарядами* тела, размеры которых пренебрежимо малы в условиях данной задачи. Взаимодействие точечных электрических зарядов на опыте изучал Кулон. Крутильные весы Кулона изображены на рис. 173.

Два достаточно малых шарика заряжены одноименно, вследствие чего отталкиваются, и горизонтальный стержень поворачивается. Соответствующим поворотом головки его приводят в первоначальное положение.

По углу закручивания нити определяется сила взаимодействия зарядов.

Закон Кулона: силы взаимодействия двух точечных электрических зарядов пропорциональны произведению этих зарядов, обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними, зависят от среды и направлены по линии центров (рис. 174).

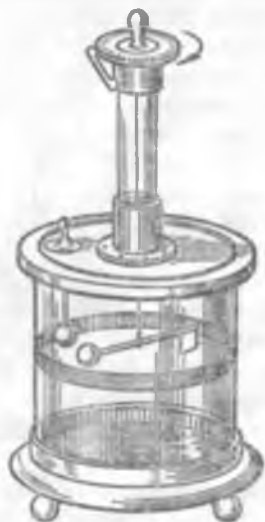


Рис. 173

$$F_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{r_{12}}{r}, \quad (2)$$

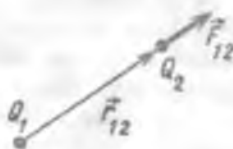


Рис. 174

где F_{12} — сила действия первого заряда на второй; r_{12} — вектор, соединяющий заряды, направленный по линии центров от первого ко второму заряду; Q_1, Q_2 — взаимодействующие заряды; r — модуль вектора r_{12} ; r_{12}/r — единичный вектор, направленный вдоль вектора r_{12} ; ϵ — *диэлектрическая проницаемость* — число, которое показывает, во сколько раз сила взаимодействия каких-либо зарядов в данной среде меньше, чем в вакууме; k — экспериментальный коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. В СИ принято $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, и закон Кулона имеет вид

$$F_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r_{12}}{r}. \quad (3)$$

Модуль этой силы

$$F = \frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} \quad (4)$$

Величина $\epsilon_0 \stackrel{\text{III}}{=} 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)$ выведена в приложении 1. Не нужно считать этот постоянный множитель какой-либо физической характеристикой. Это просто коэффициент пропорциональности, хотя и размерный.

Закон Кулона справедлив, вообще говоря, при взаимодействии зарядов в вакууме. В форме (2) – (4) он может применяться только для описания взаимодействия точечных зарядов в однородной бесконечной среде.

Если взаимодействуют одноименные заряды, то их произведение положительно, направление силы совпадает с направлением вектора, соединяющего заряды. Положительная сила – это сила отталкивания. Если взаимодействуют разноименные заряды, то их произведение отрицательно, сила взаимодействия и вектор, соединяющий заряды, противоположно направлены. Отрицательная сила – это сила притяжения.

Кроме силы F_{12} есть еще сила F_{21} , действующая со стороны второго заряда на первый. Ее тоже можно записать аналогично выражениям (2) – (4), но вектор расстояния r_{21} надо будет направить к заряду, на который действует определяемая сила.

Единица заряда в СИ кулон (Кл) – устанавливается на основании определения силы тока. В § 3.4 дано определение основной единицы – ампера [А]. По формуле (33) $Q = It$.

Следовательно, один кулон – количество электричества, проходящее через поперечное сечение участка цепи за 1 с при силе тока 1 А:

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}.$$

По закону Кулона можно определить только силы взаимодействия точечных зарядов. Но любые два протяженных заряда можно разбить на заряженные материальные точки и все их силы взаимодействия сложить. Так можно решить задачу о взаимодействии любых заряженных тел. Правда, в общем виде такая задача приводит к очень большому количеству слагаемых и часто непродолимым математическим затруднениям.

§ 1.3. Напряженность

Поместим в какую-либо точку поля, созданного зарядом Q_0 , пробный* заряд q (рис. 175). На него будет действовать сила F , которую можно измерить (или вычислить по закону Кулона). Может ли эта сила рассматриваться как характеристика поля в данной точке? Не может, потому что она зависит не только от заряда, создающего поле, положения точки и среды, но и от знака и значения пробного заряда. Но из закона Кулона мы знаем, что эта сила пропорциональна пробному

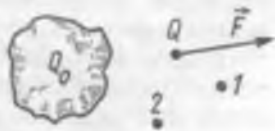


Рис. 175

* Этот произвольный по абсолютной величине и знаку заряд должен быть точечным и достаточно малым, чтобы не очень искажать описываемое поле.

заряду. Поэтому разделим ее на Q . Величина, измеряемая отношением силы, действующей на пробный заряд, помещенный в данную точку поля, к этому заряду, называется *напряженностью электрического поля в этой точке*:

$$E = \frac{F}{Q} \quad (5)$$

Увеличив пробный заряд Q , мы во столько же раз увеличиваем силу F . Поэтому напряженность не зависит от величины Q . От знака пробного заряда напряженность тоже не зависит, ибо, изменив знак Q , мы изменяем и знак F , следовательно, знак дроби не меняется. Итак, напряженность поля не зависит ни от значения, ни от знака пробного заряда. Напряженность электрического поля является силовой характеристикой поля. Зная напряженность, можно рассчитать (не измеряя) силу, действующую на помещенный в данную точку заряд:

$$F = QE$$

Если поле создается точечным зарядом Q_0 (рис. 176), то напряженность легко вычислить, пользуясь законом Кулона:



Рис. 176

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{Q_0 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2 Q}$$

Таким образом, напряженность поля точечного заряда Q_0 на расстоянии r от него

$$E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (6)$$

Знак напряженности, т. е. ее направление, определяется знаком заряда, создающего поле. Если заряд, создающий поле, положителен, то направление напряженности в любой точке поля совпадает с радиусом-вектором этой точки, т. е. напряженность направлена от заряда, создающего поле.

Если поле создано отрицательным зарядом, то напряженность поля направлена навстречу радиусу-вектору, т. е. к заряду, создающему поле. Радиус-вектор r определяемой точки всегда направлен от заряда, создающего поле.

В точке $r = 0$ напряженность поля не определяется — это особая точка поля. Физически это означает, что ни один заряд в точке $r = 0$ не является точечным (соответственно строить вектор E поля точечного заряда можно из любой точки, кроме $r = 0$).

Если поле создано совокупностью зарядов, может быть, протяженных, то их можно разбить на точечные и применить принцип суперпозиции полей. Напряженность результирующего поля будет векторной суммой напряженностей составляющих полей в той же точке:

$$E = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i r_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3}$$

Чтобы изобразить поле, надо в достаточном числе точек построить векторы E в определенном масштабе. Еще нагляднее изображаются поля с помощью линий вектора напряженности. *Линия напряженности* — кривая, в каждой точке которой касательная совпадает по направлению с вектором напряженности в этой точке. По касательной действует на заряд, помещенный в данную точку, электрическая сила. Поэтому такие линии часто называют *силовыми*. Через каждую точку поля проходит одна силовая линия, и если изобразить все такие линии некоторого участка поля на рисунке, то они сольются, и никакой наглядности не получится. Условились изображать столько линий на единичной площадке, перпендикулярной этим линиям, сколько единиц содержит модуль напряженности в данной точке. По рисунку тогда сразу видно, что поле сильнее в тех точках, где гуще проведены линии напряженности. Линиям напряженности приписывают направление, совпадающее с направлением вектора напряженности. Поэтому говорят, что они начинаются и заканчиваются на зарядах или в бесконечности, а направлены от плюса к минусу. Причем надо иметь в виду, что линии вектора напряженности могут подходить сколь угодно близко к точечному заряду, создающему поле, но не могут его касаться (рис. 177).

В приложении 6 показано, как нужно изображать однородные и неоднородные поля, введено понятие *потока* линий напряженности электрического

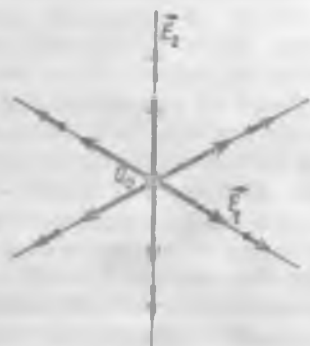


Рис. 177

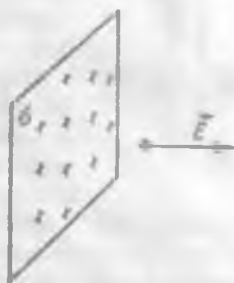


Рис. 178

поля в однородной среде и доказана *теорема Гаусса — Остроградского* (для этого частного случая):

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (7)$$

Там же рассмотрены некоторые применения теоремы Гаусса — Остроградского для расчета напряженности в простейших полях. Например, поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью (рис. 178). Величина, измеряемая отношением заряда некоторой поверхности σ площади, занимаемой этим зарядом (если по всей этой площади заряд распределен равномерно), называется *поверхностной плотностью зарядов*:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}. \quad (8)$$

Здесь dQ — заряд достаточно малой части поверхности площадью dS .

Этот заряд равен $dQ = \sigma dS$. Заряд конечной части поверхности может быть найден интегрированием

$$Q = \int_S \sigma dS.$$

В случае равномерно распределенного заряда $Q = \sigma \int_S dS = \sigma S$ и

$$\sigma = \frac{Q}{S},$$

где Q — заряд части поверхности площадью S . Напряженность рассматриваемого поля по модулю равна

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0\epsilon}, \quad (9)$$

причем одинаковые векторы E направлены перпендикулярно плоскости, т. е. поле однородно.

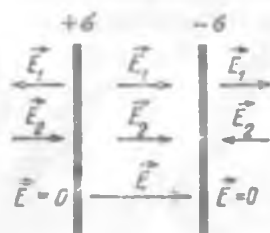


Рис. 179

Напряженность поля двух равномерно заряженных разноименных бесконечных плоскостей (рис. 179) найдем по принципу суперпозиции полей. Векторы E_1 и E_2 представляют собой напряженности от первой (σ) и второй ($-\sigma$) плоскостей. Слева от положительной плоскости в каждой точке векторы напряженности равны по модулю и противоположны по направлению, следовательно, их векторная сумма — нуль. Аналогично, равна нулю напряженность результирующего поля справа от отрицательной плоскости.

В каждой точке между плоскостями оба вектора E_1 и E_2 направлены одинаково, их векторная сумма — напряженность результирующего поля — направлена от положительной к отрицательной плоскости и по модулю равна

$$E = 2 \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0\epsilon}. \quad (10)$$

Поле такой системы плоскостей тоже однородно.

В реальных условиях этот расчет справедлив, только если расстояние от данной точки до плоскостей много меньше расстояний до их краев, т. е. для достаточно близких и протяженных пластин. Вблизи границ таких пластин поле перестает быть однородным — наблюдается краевой эффект.

§ 1.4. Работа электростатического поля

Рассмотрим поле какого-либо заряда Q_0 (например, изображенное на рис. 175). При внесении в какую-нибудь точку l этого поля пробного заряда Q поле совершает работу. Если, для определенности, $Q_0 > 0$ и $Q > 0$, то электростатическое отталкивание должно преодолеваться внешними силами.

Эта работа не зависит от формы пути, так как обратное предположение привело бы к нарушению закона сохранения энергии. В самом деле, если бы существовали два пути заряда Q из бесконечности в данную точку, на которых работы удовлетворяли бы неравенству $A' > A''$ (рис. 180, а), то можно было бы перевести заряд Q из бесконечности в точку 1 по первому пути (работа поля A') и обратно — по второму (работа поля $-A''$). В результате была бы достигнута первоначальная конфигурация, т. е. произошел бы процесс, единственным результатом которого был бы выигрыш в работе $A' - A''$. Это противоречит первому началу термодинамики. Следовательно, $A' = A''$, электростатические силы и, значит, электростатические поля — консервативны.

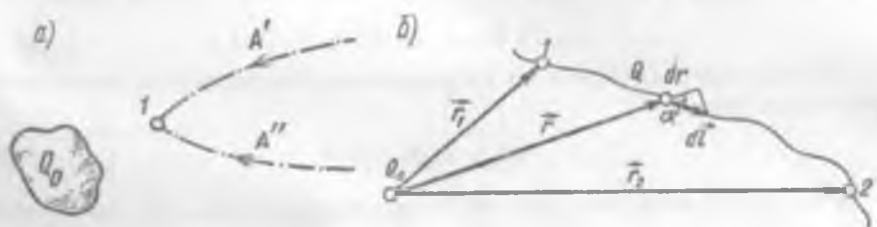


Рис. 180

Совершенная электрическим полем работа равна приращению потенциальной энергии системы наших зарядов, взятому с обратным знаком [см. разд. I, § 3.2, (58)].

Примем за нуль потенциальную энергию системы двух бесконечно удаленных зарядов. Тогда работа поля по перемещению заряда Q из бесконечности в данную точку 1

$$A_{\infty 1} = -(W_1 - W_{\infty}) = -W_1.$$

Работа электрического поля по перемещению заряда Q из бесконечности в какую-нибудь точку 2, естественно, равна $A_{\infty 2} = -W_2$ — потенциальной энергии (взятой с обратным знаком) системы зарядов Q_0 и Q , когда последний расположен в точке 2. Из всевозможных путей перемещения заряда в точку 2 можно выбрать такой, который проходит через точку 1. Тогда

$$A_{\infty 2} = A_{\infty 1} + A_{12},$$

где A_{12} — работа электрического поля по переносу заряда Q из точки 1 в точку 2. Следовательно,

$$A_{12} = A_{\infty 2} - A_{\infty 1} = -W_2 + W_1 = W_1 - W_2.$$

Таким образом, работа электрического поля по переносу пробного заряда из точки 1 в точку 2 равна разности потенциальных энергий системы зарядов — создающего поле и пробного — в этих двух положениях.

Величина, измеряемая отношением потенциальной энергии системы зарядов к заряду, помещенному в данную точку поля, называется *потенциалом ϕ электростатического поля в данной точке*:

$$\phi = W/Q.$$

Например, $\varphi_1 = W_1/Q = -A_{\infty 1}/Q = A_{1\infty}/Q$. Значит, потенциал в данной точке поля равен работе, которую поле может совершить, перемещая положительный единичный заряд из этой точки в бесконечность.

Величина

$$\varphi_1 - \varphi_2 = W_1/Q - W_2/Q = A_{12}/Q \quad (11)$$

называется *разностью потенциалов двух точек поля*. Она измеряется отношением работы, которую поле может совершить при перемещении пробного заряда из одной точки в другую, к этому заряду.

Единица разности потенциалов (потенциала) в СИ — вольт (В).

Один вольт — это разность потенциалов таких двух точек поля, при переносе заряда 1 Кл между которыми совершается работа 1 Дж:

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/1 Кл.}$$

Работа электрического поля по перемещению заряда Q из первой точки во вторую равна

$$A_{12} \stackrel{11}{=} Q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (12)$$

В частности, если поле создано точечным зарядом Q_0 , то такая работа поля

$$A_{12} \stackrel{51-1}{=} \int_1^2 (\mathbf{F} d\mathbf{l}) \stackrel{6}{=} \int_1^2 (QE d\mathbf{l}) \stackrel{6}{=} \int_1^2 \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} (r d\mathbf{l}) \stackrel{4-м}{=} \int_1^2 \frac{QQ_0 r \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dl.$$

Из рис. 180, $b \cos \alpha = dr/dl$, где α — угол между направлениями силы и перемещения. Значит,

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr \stackrel{4-м}{=} \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \stackrel{37-м}{=} \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} \stackrel{34-м}{=} \\ &\stackrel{34-м}{=} \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = Q \left(\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} \right) \stackrel{12}{=} Q(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Ясно, что можно положить $\varphi_1 = Q_0/(4\pi\epsilon_0\epsilon r_1) + C$ и $\varphi_2 = Q_0/(4\pi\epsilon_0\epsilon r_2) + C$, где C — произвольная постоянная, с точностью до которой измеряется потенциал в точке поля. Приняв потенциал бесконечно удаленной точки ($r \rightarrow \infty$) за нуль, получим $C = 0$.

Таким образом, потенциал поля точечного заряда Q_0 на расстоянии r от него равен (с точностью до постоянной C)

$$\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (13)$$

Потенциал результирующего поля системы зарядов в данной точке по принципу суперпозиции полей равен алгебраической сумме потенциалов составляющих полей в той же точке:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (14)$$

В любом поле консервативных сил можно ввести понятие потенциала (например, можно сосчитать потенциал гравитационного поля), такое поле называется *потенциальным*. В частности, потенциальным является электростатическое поле. Это поле консервативных сил, или поле, в котором работа сил по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$A_0 \stackrel{11}{=} Q(\varphi - \varphi) \equiv 0.$$

Это равенство позволяет доказать незамкнутость линий напряженности. Допустим, что в электростатическом поле есть хотя бы одна замкнутая линия напряженности (рис. 181). Выберем ее в качестве замкнутого контура для совершения работы. Элементарная работа

$$dA \stackrel{11d}{=} F dl.$$

Сила

$$F \stackrel{11}{=} QE.$$

Следовательно,

$$dA = Q(E dl).$$

Работа по замкнутому контуру

$$A_0 = \oint (QE dl) \stackrel{11d}{=} \oint QE dl \cos \alpha \equiv 0.$$

Это сумма выражений вида $QE dl \cos \alpha$. Но ни напряженность поля, ни элемент контура не равны нулю, а угол α во всех точках либо острый



Рис. 181

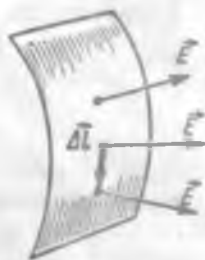


Рис. 182

(при обходе по часовой стрелке $\cos \alpha > 0$, тогда весь интеграл положителен), либо тупой (при обходе против часовой стрелки $\cos \alpha < 0$, и весь интеграл отрицателен). Следовательно, интеграл не может быть равен нулю, и допущенное неверно. Значит, замкнутых линий вектора напряженности в электростатическом поле нет.

Мы ввели два способа описания электростатического поля. Каждой точке поля соответствуют вектор напряженности и определенное значение потенциала. Среди множества точек поля выделяют точки, потенциалы которых одинаковы. Множество точек равного потенциала называется *эквипотенциальной* * *поверхностью*. На рис. 182 изображен фрагмент экви-

* *aequus* (лат.) — равный.

потенциальной поверхности. Вычислим работу перемещения заряда Q по такой поверхности:

$$dA \stackrel{11}{=} (F dl) \stackrel{12}{=} QE dl \cos \alpha \stackrel{13}{=} Q d\varphi = 0.$$

Но ни Q , ни E , ни dl не равны нулю. Следовательно, $\cos \alpha = 0$, $\alpha = \pm \pi/2$, т.е. линии и векторы напряженности перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Эквипотенциальные поверхности легче рассчитать или найти экспериментально, чем линии напряженности.

По этим поверхностям строят ортогональные* им линии вектора напряженности.

§ 1.5. Связь напряженности и разности потенциалов

Выберем две достаточно близкие эквипотенциальные поверхности (так что напряженности E всех точек между ними могут считаться одинаковыми, рис. 183).

Потенциалы этих поверхностей обозначим φ и $\varphi + d\varphi$, причем для определенности примем, что поле создано положительным зарядом, расположенным слева от поверхностей, или отрицательным — справа (возможно, конечно, создание такого поля несколькими зарядами). Величина $d\varphi$ представляет собой разность потенциалов конца и начала перемещения dn и называется *приращением потенциала* при этом перемещении.



Рис. 183

Работа поля при перемещении заряда Q вдоль вектора dn равна

$$dA \stackrel{11}{=} (F dn) \stackrel{12}{=} Q (E dn) \text{ или}$$

$$dA \stackrel{13}{=} Q (\varphi - \varphi - d\varphi) = -Q d\varphi.$$

Приравняв эти два выражения, получим $Q (E dn) = -Q d\varphi$, откуда

$$d\varphi = - (E dn), \quad (15)$$

где $d\varphi$ — увеличение потенциала на рассматриваемом перемещении (разумеется, оно может быть и отрицательным, как в нашем примере). Перемещение dn может быть направлено произвольно, а его модуль зависит от направления (при заданных эквипотенциальных поверхностях и, следовательно, $d\varphi$) и будет наименьшим в направлении нормали к эквипотенциальным поверхностям или при $dn \parallel E$. В этом направлении изменение потенциала на единицу длины наибольшее, обычно говорят о направлении *наиболее быстрого изменения потенциала*.

Из формулы (15) легко получить выражение

$$E = - \frac{d\varphi}{dn} \text{ (если } dn \parallel E \text{).}$$

* orthogōnios (греч.) — прямоугольный.

Следовательно, вектор напряженности по модулю равен разности потенциалов на единице длины в направлении наибоыстрейшего изменения потенциала. Направление вектора напряженности противоположно направлению наибоыстрейшего возрастания потенциала.

Единицы напряженности можно было ввести по определению (5). Но в СИ чаще определяют единицу напряженности по последней формуле: один вольт на метр (В/м) — это напряженность такого однородного поля, в котором разность потенциалов двух точек, лежащих на расстоянии 1 м вдоль одной силовой линии, равна 1 В.

Зная напряженность, можно определить разность потенциалов (и наоборот).

Для бесконечно близких точек $d\varphi \stackrel{15}{=} - (E dn)$. Следовательно, разность потенциалов произвольных точек в любом поле равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = - \int_1^2 (E dn).$$

Имеем, например, две параллельные бесконечные плоскости, равномерно заряженные с поверхностной плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$ (перпендикулярные плоскости рис. 184). Мы знаем, что напряженность такого поля выражается формулой (10). Выберем направление dn совпадающим с направлением вектора напряженности. Разность потенциалов точек 1 и 2 равна

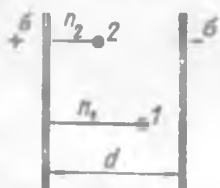


Рис. 184

$$\varphi_2 - \varphi_1 \stackrel{10}{=} - \int_{n_1}^{n_2} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} dn \stackrel{44-M}{=} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \int_{n_1}^{n_2} dn \stackrel{37-M}{=} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} (n_2 - n_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} (n_1 - n_2),$$

где n_1, n_2 — расстояния от положительной пластины до точек 1, 2.

Положив $n_2 = 0$, получим разность потенциалов положительной пластины и произвольной точки поля. Легко видеть, что точки равных потенциалов образуют плоскости, параллельные пластинам. Если положить $n_1 = d$, то можно найти разность потенциалов пластин (или любых точек, лежащих на разных пластинах):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d. \quad (16)$$

В данном случае однородного поля эту формулу можно было получить проще. Работа по переносу заряда Q с положительной пластины на отрицательную

$$A \stackrel{31-1}{=} Fd \stackrel{3}{=} QEd \stackrel{12}{=} Q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Следовательно,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = Ed \stackrel{10}{=} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d.$$

Разность потенциалов в неоднородном поле, например, заряженного шара (см. приложение 6, рис. 471):

$$\begin{aligned}\varphi_2 - \varphi_1 &= - \int_{r_1}^{r_2} (E \, dr) \stackrel{4.4.11}{=} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_0 \, dr}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \stackrel{3.7.11}{=} \\ &= - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1}\end{aligned}$$

— в соответствии с формулой (13). Конечно, справедливо и обратное — зная потенциал, можно найти напряженность. Например, в случае точечного заряда или заряженного шара:

$$\begin{aligned}E \stackrel{1.3}{=} - \frac{d\varphi}{dr} \stackrel{1.3}{=} - \frac{d}{dr} \left(\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \right) \stackrel{9.11}{=} - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \stackrel{3.6.11}{=} \\ = - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(-\frac{1}{r^2} \right) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2},\end{aligned}$$

что соответствует формуле (6) (тот же результат получился бы при прибавлении к потенциалу произвольной постоянной).

Обычно для описания поля находят напряженность в определенных его точках по закону Кулона или по теореме Гаусса, затем по напряженности находят разность потенциалов. Как мы убедились, возможно сначала нахождение потенциала, а затем — напряженности поля.

Зная разность потенциалов, можно рассчитать работу электрического поля при перемещении заданного заряда. По известной напряженности легко найти силу, действующую на заряд, помещенный в данную точку поля.

Обратите внимание на сходство описания электростатического и гравитационного полей. Там тоже можно было ввести напряженность и потенциал, считать работу через разность потенциалов. Зависимости сил, напряженностей и потенциалов от расстояния аналогичны. Но есть и различия. Какие?

§ 1.6. Распределение зарядов на проводнике

Заряды в веществе бывают свободными и связанными. *Свободные заряды* могут без затраты энергии двигаться по объему тела, участвуют в хаотическом движении и под действием электрических сил преимущественно движутся вдоль электрического поля. *Связанные заряды* принадлежат данной молекуле и без больших затрат энергии не могут ее покинуть. В зависимости от концентрации свободных зарядов различают три типа веществ — проводники, диэлектрики и полупроводники.

Вещество с большой концентрацией свободных зарядов — *проводник*; с малой концентрацией свободных зарядов — *диэлектрик*; с промежуточной — *полупроводник*. Конечно, критерии «с большой» и «с малой» относительны и условны; нет резкой границы, отделяющей одну группу веществ от другой.

Одноименные свободные заряды заряженного проводника, отталкиваясь друг от друга, расходятся на возможно большие расстояния. Следовательно, они располагаются на поверхности проводника. Зарядим полый металлический стакан (рис. 185). Коснувшись пробным шариком его внутренней поверхности, перенесем пробный шарик к незаряженному электрометру; убеждаемся, что он не заряжен. Теперь коснемся пробным шариком внешней поверхности заряженного стакана. Соединив пробный шарик с электрометром, убеждаемся, что пробный шарик зарядился. Значит, заряды располагаются на внешней поверхности заряженного тела.



Рис. 185

Поверхностная плотность зарядов зависит от формы проводника и, вообще говоря, различна в разных его точках. Это можно наблюдать с помощью листочков бумаги, прикрепленных к металлической сетке. Листочки сильно отклоняются на выпуклых частях сетки и почти не отклоняются на вогнутых. Следовательно, поверхностная плотность зарядов максимальна на выпуклостях заряженного проводника и практически равна нулю на вогнутостях. Измерения потенциала и поверхностной плотности заряда на проводнике сложной формы показывают, что потенциал всех точек одинаков, а поверхностная плотность зарядов разная.

Для измерения потенциала соединяют проволокой пробный шарик с электрометром (показания которого пропорциональны разности потенциалов стержня и корпуса; рис. 186, а) и водят пробным шариком вдоль измеряемой поверхности.

Поверхностную плотность заряда измеряют, касаясь пробным шариком разных точек исследуемого тела. Каждый раз отрывают пробный шарик от тела и касаются им электрометра; затем снимают заряды с шарика и электрометра. В этих условиях каждое показание электрометра пропорционально заряду пробного шарика, который в свою очередь пропорционален поверхностной плотности заряда именно в точке касания (рис. 186, б).

Оказывается, что на внутреннем конусе поверхностная плотность зарядов наименьшая, на острисе — наибольшая (напомним, что потенциал всех точек один и тот же).

Это можно объяснить теоретически.

Если на проводнике найдутся любые две точки с разными потенциалами, то в соответствии с формулой (15) появится напряженность поля, отличная

от нуля, на свободные заряды проводника подействует сила $F = QE$, и они начнут двигаться. Следовательно, поверхность проводника эквипотенциальна (в условиях электростатичности).

Это справедливо и для точек внутри проводника. Напряженность поля внутри заряженного проводника равна нулю, как доказано в приложении 6. А если $E = 0$, то разность потенциалов произвольных близких

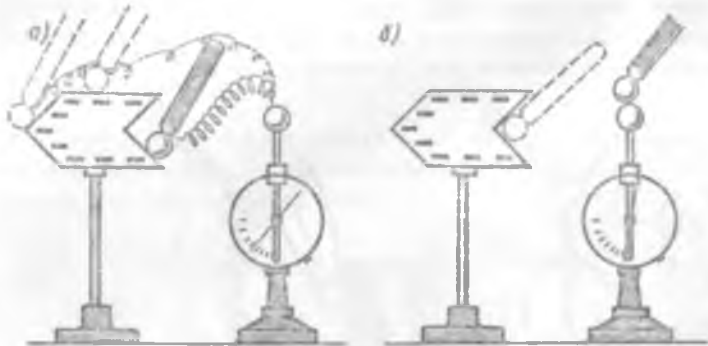


Рис. 186



Рис. 187

точек $d\varphi = - (E dn) = 0$, и $\varphi = \text{const}$ — потенциал одинаков у всех точек внутри проводника (не равен нулю, а именно одинаков).

Например, шарообразный проводник радиусом R имеет заряд Q , равномерно распределенный по поверхности. Потенциал в его центре по принципу суперпозиции равен $\varphi = \int_0 \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}$. Следовательно, у

всех точек проводника потенциал такой же. Поверхностная плотность зарядов на шаре

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\varphi\epsilon_0\epsilon}{R}.$$

Следовательно, для тела с переменным радиусом чем меньше радиус кривизны, тем больше поверхностная плотность зарядов. Наибольшего значения она достигает на острие (наблюдается даже стекание заряда — колесо Франклина, рис. 187).

§ 1.7. Электростатическая индукция

Приблизим заряженное тело к электromетру, не касаясь его, так, чтобы не было электризации соприкосновением (рис. 188) — стрелка отклонится от стержня. Уберем заряженное тело — стрелка возвращается в первоначальное нулевое положение. Повторим опыт с двумя электromетрами, соединенными металлической перемычкой (рис. 189). Отклоняются стрелки обоих электromетров. Уберем заряд — оба электromетра не заряжены. Еще раз приблизим заряженное тело и в его присутствии уберем перемычку. Оба электromетра оказываются заряженными. Исследование пока-

зывает, что ближний к заряду электрометр заряжен отрицательно (разноименно), дальний — положительно (одноименно). Соединив теперь электрометры, убедимся, что заряды нейтрализовались, т. е. были равны по величине. Итак, во всех этих опытах заряды перераспределялись, попав в электрическое поле. Явление перераспределения свободных зарядов на проводнике, помещенном в электрическое поле, называется *электризацией через влияние* или *электростатической индукцией*.



Рис. 188

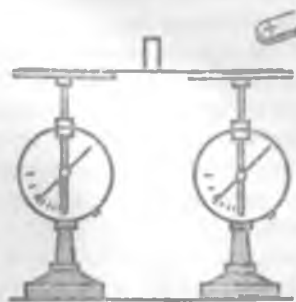


Рис. 189

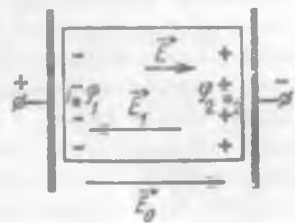


Рис. 190

Поместим незаряженный проводник в электростатическое поле, напряженность которого E_0 (рис. 190). Свободные заряды под действием электрических сил начинают двигаться: положительные — по направлению напряженности, отрицательные — в противоположную сторону. Появляется наведенное поле, характеризующееся напряженностью E_1 . Результирующая напряженность $E = E_0 + E_1$ уменьшается. Но пока есть эта напряженность, на заряды действует сила $F = QE$, и они продолжают перераспределяться, увеличивается напряженность наведенного поля E_1 , и уменьшается результирующее поле. Процесс перераспределения зарядов прекратится, когда наведенное поле уравнивает наводящее, т. е. напряженность результирующего поля станет равной нулю: $E = E_0 + E_1 = 0$.

В соответствии с формулой (15) потенциалы любых точек проводника одинаковы. Например, одинаковы потенциалы точек 1 и 2 (рис. 190), хотя они расположены в зонах положительного и отрицательного индукционных зарядов. Вспомним, что по принципу суперпозиции потенциал в каждой точке представляет собой алгебраическую сумму потенциалов составляющих полей в этой точке. Так, в точке 1 потенциал поля пластин $\varphi'_1 > 0$, потенциал поля индукционных зарядов $\varphi''_1 < 0$, потенциал результирующего поля $\varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi''_1$. В точке 2 потенциал поля пластин $\varphi'_2 < 0$, потенциал поля индукционных зарядов $\varphi''_2 > 0$, потенциал результирующего поля $\varphi_2 = \varphi'_2 + \varphi''_2$. Теперь ясно, что может быть осуществлено равенство $\varphi_1 = \varphi_2$.

Конечно, это равенство уже неоднократно доказывалось. Но часто на вопрос об этих потенциалах отвечают: они одинаковы по величине и противоположны по знаку. В таком случае была бы отлична от нуля разность потенциалов, и продолжалось перераспределение зарядов. Можно представить, что на рис. 190 внезапно убрали пластины (вместе с их полем и его потенциалами в данных точках φ'_1 и φ'_2). Оставшиеся потенциалы

наведенных зарядов ϕ_1' и ϕ_2' различны, что приведет к движению свободных зарядов и соответственно выравниванию этих потенциалов.

Итак, внутри проводника, помещенного в электрическое поле, напряженность результирующего поля равна нулю. Это используется, например, для электростатической защиты при работе под высоким напряжением. Экспериментатор находится в металлической клетке, на сетке которой наводятся индуцированные заряды.

Какие бы сильные поля ни были снаружи, напряженность результирующего поля внутри клетки равна нулю.

Индукционные заряды, как мы видели, можно разделить. На этом явлении основано применение *электрофора** (рис. 191). Электризуют трением пластмассовый диск *A*. Кладут на него металлический диск *B*. Он электризуется через влияние. Если его теперь снять (за изолирующую ручку), то диск разрядится. Но если предварительно его коснуться пальцем (заземлить), затем убрать палец, а потом диск поднять, то он оказывается заряженным положительно. Далее можно разрядить диск, затем повторить опыт, диск окажется снова заряженным. За счет чего получается энергия электрического поля заряда диска (диск касается назлектризованной подставки практически в трех точках и не разряжает ее)? Оказывается, соответствующая энергия затрачивается в процессе отрыва наведенных зарядов от наводящих. На этом же принципе работает электрофорная машина.

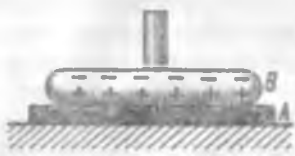


Рис. 191



Рис. 192

§ 1.8. Поляризация диэлектрика

В диэлектрике почти нет свободных зарядов.

Большинство диэлектриков состоит из полярных молекул — электрических диполей. *Электрическим диполем*** называется система двух одинаковых по величине разноименных зарядов, находящихся на некотором расстоянии (рис. 192). Вектор $\vec{l}$, направленный от отрицательного заряда к положительному, называется *плечом* диполя. Если в электрическом поле модуль $\vec{l}$ не изменяется, диполь называется *жестким*. В электрическом поле на такой диполь действует пара сил, стремящаяся повернуть его по направлению напряженности (рис. 193). В диэлектрике вне поля диполи ориентированы хаотично, в электрическом поле появляется преимущественная ориентация вдоль поля (рис. 194).

В неполярных молекулах под действием электрического поля смещаются электронные оболочки навстречу напряженности. Такие молекулы

* phoros (греч.) — несущий. Электрофор — прибор для получения статического электричества.

** di (греч.) — дважды, polos — полюс.

в электрическом поле становятся диполями, причем положительные их полюса обращены в сторону навещающего поля.

Внутри однородного диэлектрика приблизительно одинаково количество положительных и отрицательных зарядов диполей в любом не слишком малом объеме. Поэтому суммарный заряд такого объема равен нулю. К одной поверхности диэлектрика обращено больше отрицательных, к другой — больше положительных полюсов молекул. Следовательно, возникает наведенное поле, и на поверхностях диэлектрика наводятся связанные заряды. Процесс появления ориентированных диполей в электрическом поле называется *поляризацией диэлектрика*.

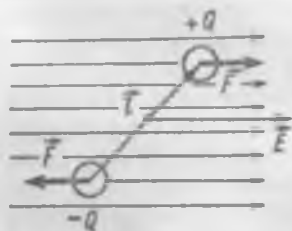


Рис. 193

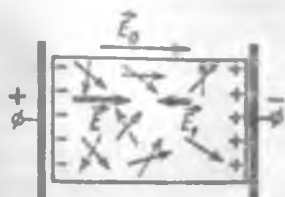


Рис. 194

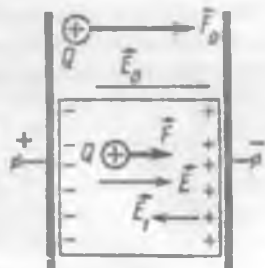


Рис. 195

Итак, поляризация приводит к появлению связанных поляризационных зарядов на поверхностях однородного диэлектрика.

Поле пластин (рис. 194) характеризуется напряженностью E_0 , поле поляризационных зарядов — напряженностью E_1 . Результирующая напряженность (по принципу суперпозиции) $E = E_0 + E_1$. До сих пор внешне все происходит так же, как при внесении проводника в электрическое поле. Но поляризационные заряды связаны, их нельзя разделить. Если разрезать диэлектрик в электрическом поле, то обе части получают поляризационные заряды обоих знаков. Напряженность результирующего поля $E \neq 0$. Если бы поле пластин скомпенсировалось полем поляризационных зарядов, то диполи начали бы разориентироваться (или исчезать у неполярных молекул), и напряженность поляризационного поля уменьшилась. Следовательно, напряженность результирующего поля в диэлектрике меньше напряженности поля в вакууме из-за поляризации диэлектрика.

В § 1.2 мы ввели характеристику диэлектрика — диэлектрическую проницаемость как величину, показывающую, во сколько раз сила взаимодействия каких-то зарядов в данной среде меньше, чем в вакууме:

$$\epsilon = \frac{F_0}{F} = \frac{QE_0}{QE} = \frac{E_0}{E_0 - E_1} > 1.$$

Здесь F_0 — модуль силы, с которой действует поле на заряд Q в вакууме, F — то же в данном диэлектрике (рис. 195). Чем сильнее поляризуется диэлектрик (в одном и том же поле E_0), тем больше E_1 , меньше знаменатель в выражении ϵ и больше сама диэлектрическая проницаемость.

Теперь мы можем ответить на вопрос: почему сила взаимодействия зарядов в диэлектрике уменьшается? Это происходит из-за поляризации

диэлектрика, и чем сильнее поляризуется диэлектрик, тем слабее силы взаимодействия.

Известно, что поваренная соль NaCl — диэлектрик, дистиллированная вода — тоже. А раствор соли в воде — сильный электролит *, т. е. проводник. Почему? Для ответа на этот вопрос рассмотрим одну молекулу поваренной соли (или любую другую систему двух взаимодействующих зарядов). Ионы ** Na^+ и Cl^- притягиваются друг к другу кулоновскими силами.

Поместим молекулу в диэлектрик, молекулы которого оказываются в электрическом поле положительного и отрицательного ионов. Диэлектрик поляризуется (рис. 196), т. е. наводятся поляризационные заряды Q' и Q'' , непосредственно примыкающие к основным зарядам $+Q$ и $-Q$. Противоположные заряды ближайших молекул компенсируются следующими молекулами, их действие практически не сказывается. Теперь кроме притяжения



Рис. 196

основных зарядов будет наблюдаться отталкивание основных и поляризационных зарядов и притяжение поляризационных зарядов друг к другу. Но последнее взаимодействие мало, так как наведенные заряды меньше наводящих. Поэтому превалирующей остается сила притяжения основных зарядов, но она уменьшается в ϵ раз.

У воды $\epsilon = 81$. Значит, в 81 раз слабее притягиваются ионы, и простого столкновения становится достаточно для *электролитической диссоциации* *** — распада молекул на ионы при растворении. Количество свободных зарядов — ионов — резко возрастает. Раствор становится проводником.

Теперь можно объяснить и опыты, с которых мы начали изучение электричества. Попадая в электрическое поле, бумажки поляризуются, и ближайший разноименный заряд притягивается сильнее, чем дальний одноименный отталкивается. То же происходит и с проводником вследствие электростатической индукции. Зарядившись при соприкосновении одноименно, бумажки или металлическая фольга отскакивают от заряженного тела.

§ 1.9. Емкость

Рассмотрим уединенный проводник. Если бы его можно было зарядить до предела, то емкостью мы назвали бы максимальный заряд, умещающийся на нем. Но проводник можно заряжать практически неограниченно. Назовем *емкостью* данного проводника величину, измеряемую отношением заряда, сообщенного проводнику, к изменению потенциала, вызванному этим зарядом:

$$C = \frac{dQ}{d\phi}, \quad (17)$$

* lytos (греч.) — растворенный, распавшийся.

** ion (греч.) — идущий. Название связано с прохождением тока через электролит (см. § 2.10).

*** dissociatio (лат.) — разъединение.

Тогда заряд, сообщенный проводнику, $dQ = C d\varphi$. Конечный заряд $Q = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} C d\varphi = C(\varphi_2 - \varphi_1)$ изменяет потенциал данного проводника от φ_1 до φ_2 . Следовательно, емкость проводника равна

$$C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad (18)$$

Наконец, если заряд Q изменил потенциал данного проводника от 0 до φ , то

$$C \stackrel{!!}{=} Q/\varphi. \quad (19)$$

В СИ электроемкость выражают в фарадах (Ф).

Один фарад — это электроемкость проводника, потенциал которого изменяется на 1 В зарядом 1 Кл:

$$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/1 В}.$$

Емкость уединенного проводника не зависит от его массы (из середины проводника можно вырезать любое количество вещества — на емкости это не отразится, так как заряды распределяются по поверхности) и от материала проводника (двигаться в разных проводниках одной формы заряды будут по-разному, а распределяться — одинаково). Емкость такого проводника зависит от его формы и размеров.

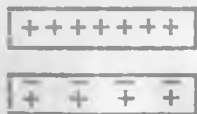


Рис. 197

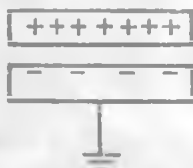


Рис. 198

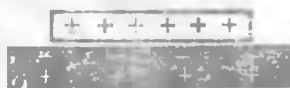


Рис. 199

Поместим вблизи заряженного проводника другой незаряженный проводник (рис. 197). Вследствие электризации через влияние на последнем проводнике наводятся заряды, что уменьшает потенциал заряженного проводника (по принципу суперпозиции потенциал создается всеми действующими зарядами). Так как заряд проводника не изменился, то в соответствии с формулой (19) увеличивается его емкость. Еще сильнее будет это увеличение, если незаряженный проводник заземлить (рис. 198).

Итак, емкость уединенного проводника увеличивается в соседстве с другими незаряженными проводниками, в особенности с заземленными.

Поместим вблизи заряженного проводника диэлектрик (рис. 199). Вследствие поляризации на нем наведутся заряды, что приведет к уменьшению потенциала проводника (снова по принципу суперпозиции потенциал создается всеми действующими зарядами).

В соответствии с формулой (19) емкость проводника увеличивается, так как заряд на нем не изменится. Следовательно, емкость уединенного

проводника увеличивается и в соседстве с диэлектриком. Например, емкость сферического проводника в диэлектрике

$$C \stackrel{19}{=} \frac{Q}{\varphi} \stackrel{13}{=} \frac{Q \cdot 4\pi\epsilon_0\epsilon r}{Q} = 4\pi\epsilon_0\epsilon r. \quad (20)$$

Мы видим, что электроемкость не зависит от заряда или потенциала проводника, а определяется только его размерами, формой и диэлектрическими свойствами (поляризуемостью) среды.

Особенно большой емкостью должна обладать система двух проводников, разделенных диэлектриком. Такая система называется *конденсатором**. В зависимости от формы проводников различают конденсаторы плоские, сферические, цилиндрические и т. п.

Простейшим является плоский конденсатор (рис. 200), поле которого можно считать однородным, если линейные размеры пластин гораздо больше расстояния между ними. Емкость такого плоского конденсатора

$$C \stackrel{18}{=} \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1} \stackrel{16}{=} \frac{Q\epsilon_0\epsilon}{\sigma d} \stackrel{8}{=} \frac{Q\epsilon_0\epsilon S}{Qd} = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}. \quad (21)$$

Здесь Q и S — заряд и площадь одной пластины; ϵ и d — диэлектрическая проницаемость и толщина диэлектрика; φ_1 , φ_2 — потенциалы пластин.

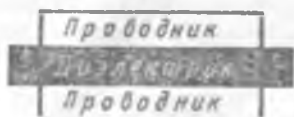


Рис. 200

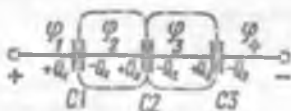


Рис. 201

Еще раз убеждаемся в том, что емкость не зависит ни от заряда, ни от потенциала; она пропорциональна площади пластины конденсатора, диэлектрической проницаемости (степени поляризуемости диэлектрика) и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами d (сильнее электростатическая индукция при меньшей толщине диэлектрика).

Несколько соединенных конденсаторов образуют *батарею*. Различают последовательное и параллельное соединения конденсаторов в батарее.

Последовательным называется соединение, при котором одна пластина каждого конденсатора соединяется с одной пластиной следующего или предыдущего.

Источник постоянного напряжения соединяется с левой пластиной первого и с правой — последнего конденсатора батареи. Сумма зарядов внутренних пластин (обведены пунктиром, рис. 201) остается равной нулю (через диэлектрик заряды практически не проходят), следовательно,

$-Q_1 + Q_2 \stackrel{!}{=} 0$, $-Q_2 + Q_3 \stackrel{!}{=} 0$ и т. д. Значит, по абсолютному значению одинаковы заряды на всех конденсаторах и на батарее последовательно соединенных конденсаторов. Потенциалы соединенных пластин соседних

* condensare (лат.) — сгущать.

конденсаторов одинаковы (по крайней мере, при отсутствии тока в цепи). Разности потенциалов на конденсаторах и на батарее:

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_2, \Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3, \Delta\varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_4, \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_4.$$

Простые преобразования дают

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_4 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_4 = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3.$$

Таких слагаемых будет столько, сколько конденсаторов последовательно соединено в батарею. Итак, разность потенциалов на батарее равна сумме разностей потенциалов на конденсаторах:

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i.$$

Из определения емкости $\Delta\varphi \stackrel{18}{=} Q/C$. Подставим эти выражения в полученную формулу:

$$\frac{Q}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{Q}{C_i},$$

где C — емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов, Q — заряд на батарее и, как сказано выше, на каждом конденсаторе. Его можно вынести за знак суммы и сократить. Получаем

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (22)$$

Величина, обратная емкости батареи последовательно соединенных конденсаторов, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов этой батареи.

Параллельным называется соединение, при котором все конденсаторы включены между двумя определенными точками (A и B , рис. 202). Разности потенциалов на пластинах таких конденсаторов одинаковы и равны разности потенциалов на батарее. Заряды на одноименных пластинах конденсаторов складываются и образуют заряд на одной суммарной «пластине» батареи:

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Из определения емкости $Q \stackrel{18}{=} C \Delta\varphi$. Подставляем это выражение в полученную формулу:

$$C \Delta\varphi = \sum_{i=1}^n C_i \Delta\varphi.$$

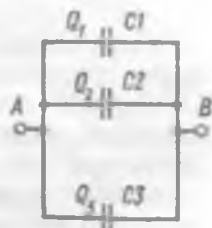


Рис. 202

Одинаковые разности потенциалов можно вынести за знак суммы и сократить:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (23)$$

ство, создающее и поддерживающее разность потенциалов, является *генератором** электрического тока. Кроме создания определенного электрического поля надо иметь в достаточном количестве свободные заряды; обычно это осуществляется соединением проводников в электрическую цепь (рис. 205, левый провод изображен объемным).

В состав электрической цепи обязательно входят: *источник тока* (генератор), *потребитель тока*, *соединительные провода*; часто применяются *приборы управления* и *измерительные приборы*.

Генератор создает и поддерживает разность потенциалов на всех участках цепи; иначе, он порождает электрическое поле, характеризующееся вектором $\vec{E}$ в каждой точке цепи, в том числе и внутри проводников, что невозможно было в электростатике. Свободные заряды под действием электрических сил движутся направленно по *внешней* (относительно источника) части цепи. Но внутри генератора (*внутренняя* часть



Рис. 204

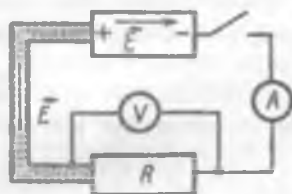


Рис. 205

цепи) свободные заряды, замыкая цепь, должны двигаться против электрических сил (рис. 205), что возможно только при наличии других неэлектростатических *сторонних сил*.

Под действием сторонних сил свободные заряды движутся по цепи, при этом генератор совершает определенную работу, значит, он должен обладать достаточным запасом энергии.

В различных источниках тока (гальванические элементы, индукционные генераторы и др.) сторонние силы имеют разную природу.

В проводнике помимо свободных зарядов имеются незаряженные частицы и связанные заряды. Все они участвуют в хаотическом движении, равновероятном во всех направлениях. При наложении электрического поля под действием электрических сил появляется преимущественное направление упорядоченного движения свободных зарядов. За *направление тока* принято направление движения положительных свободных зарядов, т. е. направление от плюса к минусу во внешней части цепи (независимо от природы свободных зарядов, участвующих в токе).

Под действием электрического поля в вакууме свободные заряды двигались бы ускоренно, в веществе они движутся в среднем равномерно, так как часть энергии упорядоченного движения отдают частицам вещества при всякого рода взаимодействиях.

Таким образом, проводник оказывает сопротивление упорядоченному движению свободных зарядов, часть энергии этого движения передается проводнику и переходит в его внутреннюю энергию.

* generator (лат.) — производитель.

Величина, характеризующая свойство проводника уменьшать скорость упорядоченного движения свободных зарядов, называется *электрическим сопротивлением* R данного проводника (активное сопротивление).

Если в простейшей модели рассматривать сопротивление проводника как результат соударений направленно движущихся свободных зарядов с частицами вещества, то оно должно быть прямо пропорционально длине l проводника, так как на большей длине будет больше соударений. Конечно, «соударения» не являются механическими, взаимодействуют свободные и связанные заряды своими полями. Благодаря прохождению свободных зарядов искажается даже идеальная кристаллическая решетка проводника. Именно на искажениях кристаллической структуры рассеивается энергия упорядоченного движения зарядов. Количество искажений и их величина уменьшаются при увеличении площади S поперечного сечения проводника*, поэтому сопротивление проводника должно быть обратно пропорционально этой площади. Приходим к выводу, хорошо согласующемуся с экспериментом:

$$R \sim l/S.$$

Введем коэффициент пропорциональности и запишем последнюю зависимость в виде равенства

$$R = \rho l/S. \quad (27)$$

Коэффициент пропорциональности численно равен сопротивлению проводника единичной длины и единичного поперечного сечения и называется *удельным сопротивлением* материала проводника.

Взаимодействие частиц проводника с упорядоченно движущимися зарядами зависит и от хаотического движения этих частиц, т. е. от температуры проводника. Для описания этой зависимости обозначим ρ_0 и ρ_T — удельное сопротивление данного проводника соответственно при температурах $T_0 = 273$ К и T . Изменение удельного сопротивления при изменении температуры на $\Delta T = T - T_0$ равно $\rho_T - \rho_0$, а относительное изменение удельного сопротивления при таком нагревании $(\rho_T - \rho_0)/\rho_0$. Отношение относительного изменения удельного сопротивления к соответствующей разности температур назовем *температурным коэффициентом сопротивления*:

$$\alpha = (\rho_T - \rho_0)/(\rho_0 \Delta T). \quad (28)$$

Удельное сопротивление, таким образом, при постоянном температурном коэффициенте сопротивления линейно зависит от температуры:

$$\rho_T = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T).$$

Зависимость сопротивления от температуры можно выразить в виде

$$R_T = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T) l/S = R_0 (1 + \alpha \Delta T), \quad (29)$$

* Пусть для простоты столько же свободных зарядов за единицу времени протекает через большее сечение. Суммарное кулоновское искажение решетки станет меньше. Более строго нужно рассматривать рассеяние электронов на тепловых колебаниях, разнообразных дефектах решетки и границах проводника.

Емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей этих конденсаторов.

При смешанном соединении конденсаторов можно рассматривать параллельное соединение последовательно соединенных групп этих конденсаторов, так что ничего нового такое соединение не содержит.

§ 1.10. Энергия электростатического поля

При зарядке плоского конденсатора производится такая же работа, как при раздвигании его пластин от соприкосновения до расстояния, равного d . Действительно, если две пластины такого конденсатора имеют заряды Q и $-Q$, то, сдвинутые вместе, они во всех окружающих точках создают поле с напряженностью и потенциалом, равными нулю. При раздвигании пластин плоского конденсатора, как мы видели, поле сосредоточено между ними, если пластины достаточно велики.

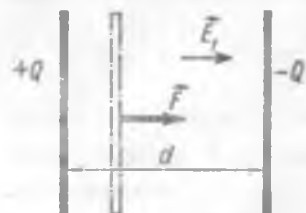


Рис. 203

Примем за неподвижную одну из пластин конденсатора, например отрицательную (рис. 203). Работа электрического поля при перемещении одной положительной пластины в однородном поле другой пластины

$$A = \int_1^2 (F dl) = -F \int_0^d dl = -Fd = -QE_1 d,$$

где E_1 — модуль напряженности поля одной отрицательной пластины. Следовательно, работа при раздвигании пластин

$$A = -Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon} d = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S} d = -\frac{Q^2}{2C}.$$

Потенциальная энергия поля конденсатора равна работе электрического поля с обратным знаком:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q \Delta \phi}{2} = \frac{C \Delta \phi^2}{2}. \quad (24)$$

Часто эти выражения приводят к противоположным выводам: энергия прямо пропорциональна или обратно пропорциональна емкости.

Чтобы судить о характере любой зависимости, надо рассмотреть все величины, входящие в соответствующую формулу. Все выражения (24) одинаковы, но удобнее применять то из них, в котором встречаются постоянные в данной задаче величины. Так, если по условию задачи неизменен заряд, то энергия обратно пропорциональна емкости, и установить это можно по любому из равенств (24). Но яснее всего это из первого выражения. Если неизменна разность потенциалов, то энергия прямо пропорциональна емкости, и проще всего это установить по последнему из равенств (24).

Введем понятие *объемной плотности энергии поля в данной точке* — величины, измеряемой отношением энергии в некотором объеме поля.

к этому объему (если по объему энергия распределена равномерно):

$$w = \frac{dW}{dV}. \quad (25)$$

Энергия бесконечно малого объема поля $dV \stackrel{24}{=} w dV$ и энергия конечного объема

$$W = \int_V w dV.$$

Во всех точках однородного поля объемные плотности энергии одинаковы и

$$W \stackrel{24+25}{=} w \int_V dV = wV.$$

Для однородного поля, следовательно,

$$w = W/V.$$

В плоском конденсаторе как раз такое поле, значит,

$$w \stackrel{24}{=} \frac{C \Delta \varphi^2}{2V} \stackrel{21, 16, 10}{=} \frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2 d^2}{2d S d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}. \quad (26)$$

Объемная плотность энергии в данной точке любого поля тоже равна этому выражению. В самом деле, можно представить себе однородное поле с диэлектрической проницаемостью ϵ и напряженностью E , в каждой точке которого будет такая объемная плотность энергии.

В неоднородном поле эта объемная плотность энергии меняется от точки к точке и не может быть вынесена из-под интеграла. Соответственно, энергия конечного объема такого поля

$$W \stackrel{25}{=} \int_V w dV \stackrel{24}{=} \int_V \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} dV.$$

ГЛАВА 2

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

§ 2.1. Электрическая цепь

Если две точки электрического поля, имеющие разные потенциалы, соединить проводником (рис. 204, для определенности $\varphi_1 > \varphi_2$), то свободные заряды проводника под действием электрических сил начнут направленное движение. Положительные свободные заряды будут двигаться в направлении силовых линий, отрицательные — наоборот. Любое такое движение приведет к уменьшению большего и к увеличению меньшего потенциала, т. е. к уменьшению разности потенциалов.

Назовем *электрическим током* упорядоченное движение зарядов.

Из опыта следует, что для осуществления длительного электрического тока необходимо создать и поддерживать разность потенциалов. Устрой-

где $R_0 = \rho_0 l / S$ — сопротивление данного проводника при температуре T_0 (мы пренебрегли малой зависимостью отношения l/S от температуры).

Величина, обратная сопротивлению, называется *проводимостью*:

$$G = 1/R. \quad (30)$$

Величина, обратная удельному сопротивлению, называется *удельной проводимостью*:

$$\sigma = 1/\rho. \quad (31)$$

Введем ряд других величин, характеризующих цепь электрического тока.

Пусть за какое-то малое время от момента t до момента $t + \Delta t$ через произвольное поперечное сечение проводника прошел заряд ΔQ . Разделим заряд на время его прохождения и устремим полученную дробь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Мы получим величину, измеряемую отношением заряда, протекающего через поперечное сечение проводника за некоторое время, к этому промежутку времени (если заряд протекал равномерно), — *силу тока* в проводнике в момент времени t :

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}. \quad (32)$$

Сила тока равна первой производной заряда по времени. Заряд, прошедший за время dt через поперечное сечение проводника, $dQ \stackrel{32}{=} I dt$. За конечное время t через данное сечение проходит заряд

$$Q \stackrel{32-M}{=} \int_0^t I dt.$$

Назовем *постоянным ток*, сила которого не изменяется со временем.

Для такого тока $Q \stackrel{44-M}{=} I \int_0^t dt \stackrel{37-M}{=} It$, откуда

$$I = Q/t. \quad (33)$$

Естественно, что за любые равные промежутки времени t через поперечное сечение проводника при постоянном токе проходят одинаковые количества электричества.

По закону сохранения зарядов через любые сечения последовательной цепи проходят за одинаковые промежутки времени равные заряды. В противном случае заряды где-то накапливались бы или исчезали, чего не наблюдается. Поэтому сила тока во всех сечениях последовательной цепи одна и та же (это справедливо для постоянного и сравнительно медленно меняющихся токов).

Выберем достаточно малый участок ΔS площади поперечного сечения проводника в окрестностях какой-либо точки, через который проходит ток силой ΔI . Разделим ΔI на ΔS и устремим полученную дробь к пределу, «стягивая» ΔS к выбранной точке. Получим величину, измеряемую отношением силы тока, протекающего через некоторый элемент

поперечного сечения проводника, k — площади элемента, — *плотность тока* в этой точке:

$$j = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS} \quad (34)$$

Плотность тока равна первой производной силы тока по площади поперечного сечения проводника. Она может быть различной в разных точках этого сечения. Через бесконечно малый элемент сечения течет ток силой $dI = j dS$, а через все сечение — силой $I = \int j dS$. В частном случае

плотность тока во всех точках сечения одинакова, т. е. ток равномерно распределен по сечению. Тогда $I = \int_S j dS = jS$ и плотность такого тока

$$j = I/S.$$

Точка цепи, в которой пересекается больше двух проводников, называется *узлом*. По закону сохранения зарядов алгебраическая сумма зарядов, протекающих через узел за какое-то время, равна нулю (положительные заряды, движущиеся к узлу, считаются со знаком плюс, движущиеся от узла — со знаком минус, отрицательные — наоборот). Разделив все эти заряды на время dt их прохождения через узел, получим первое правило Кирхгофа: *алгебраическая сумма сил токов, протекающих через узел, равна нулю*:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (35)$$

Как было установлено, на каждом участке цепи происходит превращение энергии упорядоченного движения зарядов (тока) в какую-то другую энергию (в простейшем случае — внутреннюю). Следовательно, на каждом участке цепи совершается работа электрическими и сторонними силами.

Величина, измеряемая отношением работы электрических и сторонних сил при перемещении по данному участку цепи пробного заряда к этому заряду, называется *напряжением на участке цепи*:

$$U = (A + A_{\text{ст}})/Q = A/Q + A_{\text{ст}}/Q.$$

Здесь A и $A_{\text{ст}}$ — работы соответственно электрических и сторонних сил при перемещении заряда Q по выбранному участку цепи.

Величину, измеряемую отношением работы сторонних сил при перемещении пробного заряда по данному участку цепи к заряду, назовем *электродвижущей силой* (э.д.с.) на участке:

$$\mathcal{E} = A_{\text{ст}}/Q. \quad (36)$$

Это неудачное название (конечно, это не сила, как, впрочем, и сила тока) достаточно широко распространено.

Преобразуем формулу напряжения:

$$U = \frac{12,36}{\dots} \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}, \quad (37)$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов начала и конца участка цепи; $\mathcal{E}$ — алгебраическая сумма э.д.с. источников, находящихся на этом участке. Из этого выражения должно быть ясно различие понятий «разность потенциалов» и «напряжение на участке цепи».

В частном случае для участка цепи, не содержащего источников, напряжение равно разности потенциалов (вот почему эти понятия часто считают тождественными).

Падение напряжения на участке цепи измеряется энергией, которую единица заряда отдает данному участку цепи. По закону сохранения энергии падение напряжения равно напряжению на том же участке.

Сложим теперь падения напряжения на всех участках какого-либо замкнутого контура произвольной электрической цепи. Тогда сумма разностей потенциалов будет равна нулю ($\varphi - \varphi = 0$; вспомните формулу работы по замкнутому контуру в электростатическом поле) и

$$\sum_{i=1}^n U_i \stackrel{37}{=} \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i, \quad (38)$$

где n — число участков замкнутого контура; k — число источников тока в этом же контуре.

Мы получили второе правило Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна алгебраической сумме э. д. с., включенных в этот контур.

В частности, если есть простейшая цепь с одним источником тока (рис. 205), то э.д.с. источника измеряется работой сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда по всей замкнутой последовательной цепи. Еще раз напомним, что работа электростатических сил при таком перемещении равна нулю.

Качественно это должно быть ясно из рис. 205: электрические силы совершают положительную работу на внешнем участке цепи и отрицательную — на внутреннем. Из формулы (38) следует, что э.д.с. источника тока равна сумме падений напряжения на всех участках последовательной цепи (включая внутренний). Другими словами, вся энергия, переданная зарядами участкам цепи, отобрана у источника тока в процессе совершения работы сторонними силами. Таким образом, второе правило Кирхгофа представляет собой закон сохранения энергии, записанный для электрической цепи.

Э.д.с. генератора является его важнейшей энергетической характеристикой. Она равна той энергии, которую генератор может передать единичному заряду при его движении по замкнутой цепи.

§ 2.2. Закон Ома

Исследуем на опыте зависимость силы тока от напряжения, приложенного к данному участку цепи (рис. 206, а). Напряжение снимается с потенциометра Π и измеряется вольтметром V . Изменяя приложенное к резистору с постоянным сопротивлением R напряжение и измеряя силу тока амперметром A , приходим к выводу, что сила тока прямо пропорциональна приложенному напряжению.

Приложим теперь постоянное напряжение U , измеренное вольтметром, к резистору с переменным сопротивлением R (рис. 206, б; движок потенциометра P зафиксирован в положении K). Измерения показывают, что сила тока обратно пропорциональна сопротивлению участка. Таким образом, экспериментально устанавливаем закон Ома для участка цепи: сила тока в цепи прямо пропорциональна напряжению на участке и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (39)$$

Из определений напряжения и э.д.с. видно, что выражаются они в единицах потенциала. Единица силы тока в СИ 1 А является основной и определена в § 3.4.

Единица сопротивления — ом (Ом) — устанавливается по закону Ома.

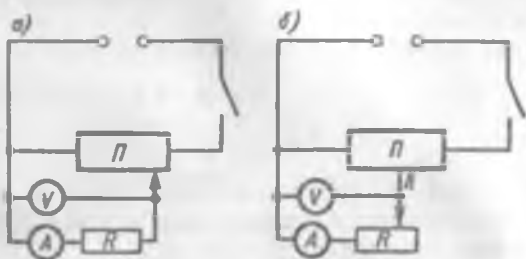


Рис. 206

Один ом — сопротивление такого проводника, по которому течет ток силой 1 А при неизменном напряжении на его концах 1 В:

$$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/1 А}.$$

Удельное сопротивление

$$\rho = RS/l.$$

Его единица ом-метр (Ом·м).

Один ом-метр — удельное электрическое сопротивление, при котором цилиндрический прямолинейный проводник площадью поперечного сечения 1 м^2 и длиной 1 м имеет сопротивление 1 Ом.

Единица электрической проводимости — сименс (См).

Один сименс — проводимость проводника сопротивлением 1 Ом:

$$1 \text{ См} = 1/1 \text{ Ом}.$$

Единица удельной электрической проводимости — сименс на метр (См/м).

Один сименс на метр — удельная электрическая проводимость, при которой цилиндрический прямолинейный проводник площадью поперечного сечения 1 м^2 и длиной 1 м имеет электрическую проводимость 1 См.

Закон Ома для участка цепи, включающего источники тока, может быть записан в виде

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E})/R$$

(напомним, что φ_1 и φ_2 — потенциалы начала и конца данного участка, сопротивление которого R , а $\mathcal{E}$ — алгебраическая сумма э.д.с. источников, включенных в этот участок).

На основании этого закона можно написать для любого участка цепи

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

причем сила тока в последовательных участках одна и та же. Напишем аналогичные выражения для всех участков замкнутой цепи и сложим их почленно:

$$\sum_{i=1}^n IR_i = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i + \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i.$$

Но сумма разностей потенциалов замкнутой цепи равна нулю, сумма сопротивлений всех участков замкнутой цепи — это ее *суммарное сопротивление*, которое обычно записывают в виде двух слагаемых: R — внешнее (по отношению к источникам) сопротивление и r — внутреннее сопротивление источников тока.

Из полученного соотношения следует:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i}{R + r} \quad (40)$$

— закон Ома для всей цепи: сила тока в последовательной цепи прямо пропорциональна э.д.с. источников и обратно пропорциональна суммарному сопротивлению цепи.

Выражение

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i \stackrel{40}{=} IR + Ir$$

представляет собой частный случай второго правила Кирхгофа (38), где $IR \stackrel{39}{=} U$ — падение напряжения на внешней части цепи; Ir — падение напряжения на внутренней части цепи.

Если цепь разомкнута, то напряжение равно нулю (ни электрические, ни сторонние силы работы не совершают), а э.д.с. источника тока

$$\mathcal{E} \stackrel{37}{=} \varphi_2 - \varphi_1.$$

Таким образом, э.д.с. равна разности потенциалов на полюсах разомкнутого источника тока. Она больше внешнего падения напряжения (равного разности потенциалов на полюсах замкнутого источника) на величину внутреннего падения напряжения Ir .

Итак, э.д.с. генератора измеряется работой, которую генератор может совершить, перемещая единичный положительный заряд по всей замкнутой цепи; равна сумме напряжений на всех участках последовательной цепи; равна, наконец, разности потенциалов на полюсах разомкнутого генератора.

§ 2.3. Соединение проводников

Различают последовательное и параллельное соединения. *Последовательным* называется такое соединение, при котором каждый проводник соединяется только с одним предыдущим и одним последующим проводником.

Как мы доказали, при последовательном соединении (рис. 207) сила тока, протекающего по всем проводникам, одна и та же:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I.$$

Иногда это неверно трактуют как постоянство силы тока. Силу тока можно изменить, например, изменяя приложенное напряжение. Но она изме-

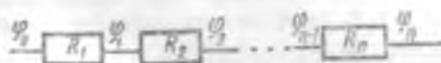


Рис. 207

няется одинаково во всех последовательно соединенных проводниках. Напряжения на каждом сопротивлении [см. (39)]:

$$U_1 = IR_1, U_2 = IR_2, \dots, U_n = IR_n.$$

Напряжение на всем участке

$$U = \varphi_0 - \varphi_n = \varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \dots + \varphi_{n-1} - \varphi_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n.$$

Напряжение на последовательно соединенном участке равно сумме напряжений на его частях:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i. \quad (41)$$

Подставим в формулу (41) выражения всех напряжений: $IR = \sum_{i=1}^n IR_i = I \sum_{i=1}^n R_i$. Сократив силу тока, получим

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (42)$$

Сопротивление последовательно соединенного участка равно сумме сопротивлений его частей.

Рассмотрим напряжения на любых двух последовательно соединенных сопротивлениях. Из равенства сил токов следует $U_1/R_1 = U_2/R_2$, откуда $U_1/U_2 = R_1/R_2$.

Напряжения на последовательно соединенных участках прямо пропорциональны сопротивлениям этих участков. Например, электрическая лампа и подводящий шнур соединены последовательно, значит, по ним проходит один ток и равные количества электричества за одинаковые промежутки времени. Но лампа раскаляется и является источником света, а шнур — нет. Почему? Потому что у них разные сопротивления и, следовательно, напряжения. Сопротивление волоска лампы велико, напряжение, измеряемое работой, совершенной на участке при прохождении единичного заряда, тоже значительно больше напряжения на шнуре. При прохождении электрического тока энергия превращается во внутреннюю, волосок раскаляется и испускает свет.

Параллельным называется такое соединение проводников, при котором одни их концы образуют узел А, другие — узел В (рис. 208).

При параллельном соединении различают *ветви* (отдельные проводники между узлами), *разветвление* (часть цепи между двумя узлами), *неразветвленную часть* цепи, лежащую вне разветвления.

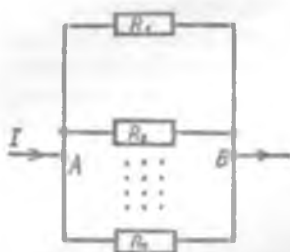


Рис. 208

Сопротивлением разветвления называют сопротивление такого линейного проводника, которым можно заменить разветвление без изменения силы тока в неразветвленной части цепи и напряжения между узлами. Действительно, для участка AB

$$I \stackrel{39}{=} U/R,$$

где R — сопротивление разветвления. Если удалить разветвление, а между точками A и B подобрать указанным способом неразветвленный проводник, то его сопротивление будет удовлетво-

рять той же формуле и, следовательно, будет равно сопротивлению разветвления. При таком соединении

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = U,$$

т. е. напряжения на всех ветвях и на разветвлении одинаковы, так как все они — разности потенциалов точек A и B .

По первому правилу Кирхгофа для узла A , например, ток I в неразветвленной части цепи положителен, токи I_i в ветвях отрицательны:

$$I - \sum_{i=1}^n I_i = 0.$$

Отсюда

$$I = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (43)$$

Сила тока в неразветвленной части цепи равна сумме сил токов в ветвях.

В соответствии с законом Ома $U/R \stackrel{43}{=} \sum_{i=1}^n U/R_i = U \sum_{i=1}^n 1/R_i$, откуда

$$1/R = \sum_{i=1}^n 1/R_i. \quad (44)$$

Иначе

$$G \stackrel{30}{=} \sum_{i=1}^n G_i. \quad (45)$$

Проводимость разветвления равна сумме проводимостей ветвей.

Из равенства напряжений следует, что для любых i -й и k -й ветвей

$$I_i R_i \stackrel{39}{=} I_k R_k \text{ или } I_i/I_k = R_k/R_i.$$

Силы токов в ветвях обратно пропорциональны сопротивлениям этих ветвей (или прямо пропорциональны проводимостям ветвей).

По формуле (44) включение параллельно любому проводнику другого проводника (большого или меньшего сопротивления — безразлично) приводит к уменьшению сопротивления разветвления.

Следовательно, сопротивление разветвления меньше сопротивления любой ветви: $R < R_i$. На этом свойстве разветвления основано устройство лампового реостата. Он представляет собой систему параллельно соеди-

ненных ламп, включение каждой из которых соответственно уменьшает сопротивление реостата.

В качестве одного из примеров соединения проводников рассмотрим методы расширения шкалы измерительного прибора.

Имеем амперметр, рассчитанный на 10 А. Сила измеряемого тока порядка 1 кА. Можно ли измерить силу этого тока данным прибором?

Можно, если включить по схеме (рис. 209) параллельно амперметру некоторое сопротивление — шунт. Тогда

$$I = I_A + I_{\text{ш}} = I_A + U/R_{\text{ш}} = I_A + I_A R_A/R_{\text{ш}} = I_A (1 + n),$$

где $n = R_A/R_{\text{ш}}$. В нашем примере должно быть $n = 99$ или порядка 100, т. е. сопротивление шунта примерно в 100 раз меньше сопротивления амперметра (конечно, для вычисления I надо знать n достаточно точно).

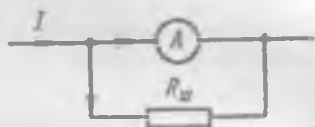


Рис. 209

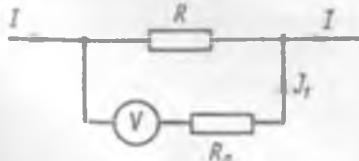


Рис. 210

Аналогична задача по измерению напряжения: надо измерить напряжение U порядка 10 кВ, имея вольтметр со шкалой на 10 В. Включим его по схеме (рис. 210) с последовательно соединенным дополнительным сопротивлением R_d .

Измеряемое напряжение

$$U = U_B + U_d = U_B + I_d R_d = U_B + U_B R_d/R_B = U_B (1 + m),$$

где $m = R_d/R_B$. В нашем случае должно быть $m \approx 1000$, или дополнительное сопротивление в 1000 раз больше сопротивления вольтметра (разумеется, для вычисления U надо знать m достаточно точно).

§ 2.4. Соединение источников тока

Составляя электрические цепи, используют различные источники тока. Если нет источника тока с нужной э.д.с. или внутренним сопротивлением, тогда приходится, комбинируя имеющиеся источники, соединять их в батареи.

Различают последовательное, параллельное и смешанное соединения источников тока.

Последовательное соединение источников тока — такое, при котором каждый полюс промежуточного источника соединяется с одним полюсом соответственно предыдущего или последующего источников (рис. 211).

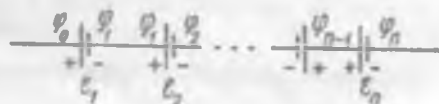


Рис. 211

Э. д. с. такой батареи (тока нет!)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_B &= \varphi_0 - \varphi_n = \varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1} - \varphi_n = \\ &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i. \end{aligned}$$

В зависимости от полярности соединения того или другого источника его э. д. с. войдет в эту сумму с тем или другим знаком, иначе говоря, э. д. с. батареи последовательно соединенных источников равна алгебраической сумме э. д. с. составляющих источников. Если такую батарею замкнуть на потребитель электрической энергии, то по цепи пойдет ток силой

$$I \stackrel{40}{=} \mathcal{E}_6 / (R + r_6), \quad (46)$$

где R — внешнее сопротивление; r_6 — сопротивление батареи. Оно равно

$r_6 \stackrel{42}{=} \sum_{i=1}^n r_i$ (сумма арифметическая!). Значит,

$$I_{\text{полс}} \stackrel{46}{=} \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i / \left(R + \sum_{i=1}^n r_i \right),$$

где r_i — внутреннее сопротивление i -го источника. В частности, если соединить разноименными полюсами последовательно n одинаковых источников, то э. д. с. такой батареи

$$\mathcal{E}_6 = n \mathcal{E}_1,$$

а внутреннее сопротивление

$$r_6 = n r_1.$$

Следовательно, сила тока от такой батареи

$$I_{\text{полс}} \stackrel{46}{=} \frac{n \mathcal{E}_1}{R + n r_1}. \quad (47)$$

Параллельное соединение источников тока — такое, при котором одни полюса (не обязательно одноименные!) соединяются в один узел, другие — в другой. При таком соединении внутри даже отключенной батареи текут токи и разность потенциалов на ее полюсах — э. д. с. батареи — рассчитывается одним из электротехнических методов, основанных на правилах Кирхгофа. Мы ограничимся частным случаем, когда одинаковые источники соединены одноименными полюсами (рис. 212). При таком соединении в отсутствие нагрузки токов нет, и э. д. с. батареи равна э. д. с. каждого источника — это разность потенциалов на клеммах батареи.

Проводимость батареи равна сумме проводимостей источников:

$$\frac{1}{r_6} \stackrel{44}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} = \frac{m}{r_1},$$

Отсюда внутреннее сопротивление батареи

$$r_6 = r_1 / m.$$

Сила тока в неразветвленной части цепи, в частности через внешнее сопротивление R , равна

$$I_{\text{нар}} \stackrel{48}{=} \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1 / m}. \quad (48)$$

Сравните формулы (47) и (48). Какое включение дает ток большей силы?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим два предельных случая.

1. Внешнее сопротивление гораздо больше внутреннего: $R \gg r_i$. Тогда, пренебрегая малым внутренним сопротивлением батареи, получим:

а) при последовательном соединении

$$I_{\text{посл}} \stackrel{47}{=} n \mathcal{E}_i / R = n I_1;$$

б) при параллельном соединении

$$I_{\text{пар}} \stackrel{48}{=} \mathcal{E}_i / R = I_1,$$

где I_1 — сила тока от одного источника.

В данном случае сила тока в n раз больше при последовательном соединении источников.

2. Внешнее сопротивление гораздо меньше внутреннего: $R \ll r_i$. Пренебрегая теперь малым внешним сопротивлением, получим:

а) при последовательном соединении

$$I_{\text{посл}} \stackrel{47}{=} \frac{n \mathcal{E}_i}{n r_i} = I_1;$$

б) при параллельном соединении

$$I_{\text{пар}} \stackrel{48}{=} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i / m} = m I_1.$$

В данном случае сила тока в m раз больше при параллельном соединении источников.

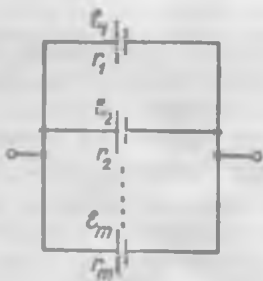


Рис. 212

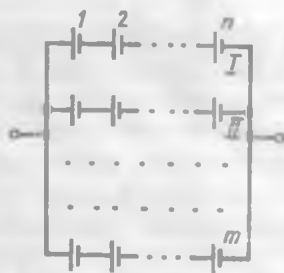


Рис. 213

Рассмотрим смешанное соединение одинаковых источников (э. д. с. $\mathcal{E}$, внутреннее сопротивление r), соединенных последовательно в группы (по n штук), которые включены параллельно (m групп, рис. 213).

Э. д. с. такой батареи $\mathcal{E}_6 = n \mathcal{E}$. Внутреннее сопротивление $r_6 \stackrel{47,48}{=} nr/m$. Сила тока через нагрузку R

$$I_{\text{см}} \stackrel{46}{=} \frac{n \mathcal{E}}{R + nr/m}. \quad (49)$$

При каком соединении одинаковых элементов получится наибольшая сила тока? Задано $mn = N$ элементов. Сила тока от батареи

$$I_{\text{см}} \stackrel{49}{=} \frac{n \mathcal{E}}{R + nr/m} = \frac{n \mathcal{E}}{R + nrn/N} = \frac{n \mathcal{E}}{R + n^2 r/N}.$$

Исследуем функцию $I_{\text{см}}(n)$ по формуле (8-М):

$$\frac{dI_{\text{см}}}{dn} \stackrel{13-М}{=} \frac{\mathcal{E}(R + n^2 r/N) - n \mathcal{E} \cdot 2nr/N}{(R + n^2 r/N)^2} \stackrel{8-М}{=} 0.$$

Знаменатель не бесконечен, значит, $\mathcal{E}(R + n^2 r/N) - 2n^2 r \mathcal{E}/N = 0$, откуда $R + n^2 r/N = 2n^2 r/N$; $n^2 r/N = R$ и $n^2 = RN/r$.

Получаем, что наибольшая сила тока при

$$n^2 = Rnm/r \text{ или } R = nr/m = r_6.$$

Таким образом, наибольшая сила тока при таком соединении наблюдается, когда сопротивления батареи и нагрузки приблизительно равны: $nr/m \approx R$. Заметим, что это не относится к коэффициенту полезного действия:

$$\eta \stackrel{62-1}{=} \frac{A_1}{A} \stackrel{51}{=} \frac{I^2 R t}{I^2 (R + nr/m) t} = \frac{1}{1 + nr/(mR)} = \frac{1}{1 + nrn/(NR)}.$$

Следовательно, наибольший к.п.д. будет при наименьшем значении выражения $n^2 r/(NR)$, где r , N и R заданы. Кроме случая $n = 0$ (и, значит, $N = 0$, элементов нет, тока — тоже) наименьшее значение это выражение имеет при $n = 1$, т.е. при соединении всех N источников параллельно. При этом сопротивление батареи минимально. Итак, выгоднее параллельное соединение источников, при котором наибольший коэффициент полезного действия, но не самая большая из возможных сила тока.

§ 2.5. Работа и мощность тока

Всякая электрическая цепь собирается для совершения определенной работы. Как было выяснено в § 1.4, электрическое поле обладает энергией и, перенося пробный заряд, может совершить работу.

При прохождении электрического тока по цепи на каждом активном участке поле совершает работу (переносит заряд dQ) $dA \stackrel{12}{=} dQ(\varphi_1 - \varphi_2) \stackrel{31}{=} = Idt(\varphi_1 - \varphi_2) \stackrel{37}{=} IU dt$. Здесь I , U — мгновенные значения силы тока и напряжения на участке, неизменные за достаточно малый промежуток времени dt . Используя закон Ома для участка цепи, можно получить еще два выражения этой работы:

$$dA = IU dt \stackrel{38}{=} I^2 R dt \stackrel{39}{=} \frac{U^2}{R} dt. \quad (50)$$

Работа за конечное время t находится интегрированием:

$$A \stackrel{32-М}{=} \int_1^2 dA \stackrel{50}{=} \int_1^2 IU dt = \int_1^2 I^2 R dt = \int_1^2 \frac{U^2}{R} dt.$$

Если приложенное к участку напряжение и сопротивление участка не изменяются, то работа

$$A \stackrel{41-М}{=} \int_1^2 dA = IU t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (51)$$

Эти формулы иногда приводят к путанице: работа прямо пропорциональна сопротивлению проводника или обратно пропорциональна этому

сопротивлению. На самом деле эти выражения **одинковы**. Напомним: если величина является функцией нескольких переменных, то можно говорить о ее зависимости от одного аргумента, только при неизменности остальных. При постоянстве силы тока работа прямо пропорциональна сопротивлению; при неизменности напряжения — обратно пропорциональна сопротивлению, и установить это можно по любой из трех формул работы, если принять во внимание изменение остальных величин. Особенно просто это установить по формулам, содержащим только неизменные величины и одну изменяющуюся. Так, укоротив перегоревшую спираль электроплитки, мы уменьшаем ее сопротивление и увеличиваем работу тока за какое-то время, если плитка включена в сеть с неизменным напряжением. Установить это можно по любому из выражений (51), проще всего — по последнему. Плитка станет быстрее и до большей температуры нагреваться, большее количество теплоты будет отдавать и быстрее... перегорит.

Величиной, характеризующей интенсивность совершения работы, является мощность. *Мощность*, развиваемая на данном участке цепи, равна отношению работы к промежутку времени, в течение которого эта работа совершается (если она совершалась равномерно):

$$P \stackrel{63-1}{=} \frac{dA}{dt} \stackrel{50}{=} IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (52)$$

§ 2.6. Закон Джоуля — Ленца

Если по активному проводнику течет постоянный ток, то работа на участке цепи есть процесс преобразования энергии генератора во внутреннюю энергию проводника. Мерой изменения внутренней энергии является количество теплоты, а при стационарном состоянии проводника энергия, подводимая от генератора к данному участку цепи, равна внутренней энергии, отданной в процессе теплообмена окружающим телам. Поэтому $A = \Delta Q$ или

$$\Delta Q \stackrel{51}{=} I^2 R t. \quad (53)$$

Количество теплоты, выделяющееся на проводнике при прохождении электрического тока, прямо пропорционально сопротивлению проводника, квадрату силы тока и времени его прохождения. — закон Джоуля — Ленца.

Разумеется, можно было использовать и два других выражения работы:

$$\Delta Q \stackrel{51}{=} I^2 R t \stackrel{51}{=} I U t = \frac{U^2}{R} t.$$

Закон Джоуля — Ленца устанавливает количественные соотношения при превращении энергии. Таким образом, это проявление закона сохранения и превращения энергии в цепи электрического тока.

§ 2.7. Ток в металлах

По своему строению *проводники первого рода* — металлы — представляют собой ионную кристаллическую решетку, в которой хаотически движутся свободные электроны.

За счет внутренней энергии решетки совершается ионизация, в среднем каждый атом одновалентного металла отдает один электрон (отрыв второго электрона от иона требует гораздо большей энергии), поэтому

концентрации свободных электронов и атомов одного порядка. Такой же порядок имеют концентрации электронов в металлах других валентностей. Опыты показывают, что при прохождении электрического тока через металл атомы не перемещаются.

Электрический ток пропусклся по цепи, в которой были три цилиндра — два медных и один алюминиевый (рис. 214). Через места соединения цилиндров прошло свыше 3 МКл электричества. Если бы носителями тока являлись атомы, то некоторое число атомов меди проникло бы в алюминиевый цилиндр, а атомов алюминия — в какой-нибудь из медных. На опыте таких атомов обнаружено не было. Отрицательный результат опыта доказывает, что свободными зарядами в металле являются не ионы.

Опыты Мандельштама — Папалекси и Толмена — Стюарта должны были ответить на вопрос: какие частицы в металле являются свободными



Рис. 214

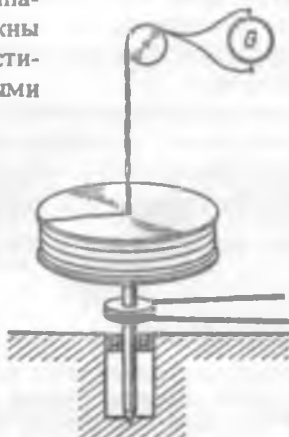


Рис. 215

зарядами. Бралась катушка металлического провода, концы которой соединялись с гальванометром (рис. 215). Катушка приводилась в быстрое вращение, затем резко тормозилась; свободные заряды продолжали по инерции двигаться, а направленное движение таких зарядов — электрический ток. По измерению количества электричества, переносимого этим током, определялось отношение свободного заряда к его массе — *удельный заряд*; направление тока показало знак свободного заряда. Свободными зарядами в металле оказались электроны.

Электроны металла участвуют в хаотическом движении, равновероятном во всех направлениях. При наложении внешнего поля, испытывая действие его сил, электроны начинают дрейфовать в сторону, противоположную напряженности поля. Кроме хаотического они теперь совершают направленное движение, представляющее собой электрический ток. Средняя скорость этого направленного движения мала, она порядка нескольких миллиметров в секунду, скорость распространения электрического поля порядка скорости света (электрон, участвующий в постоянном токе, пройдет провод длиной в несколько метров за несколько минут, сигнал же от одного конца такого провода до другого идет примерно десять наносекунд). От одного столкновения до другого элек-

троны в электрическом поле движутся ускоренно, поэтому мы говорим о средней скорости направленного движения. Проводимость металлов называют *электронной*.

§ 2.8. Работа выхода

Свободные электроны в металле иногда можно представить в виде электронного газа, частицы которого распределены по скоростям. Некоторые электроны вылетают из металла, но так как в целом кусок металла был нейтрален, то каждый вылетающий электрон оставляет «свой» положительный заряд нескомпенсированным. Металл заряжается положительно, а около него образуется *электронное облако*. Теперь для вылета электрона из металла должна быть совершена, в соответствии с формулой (12), отрицательная работа поля, т. е. над полем нужно совершить работу, сообщить электрону дополнительную энергию. *Работа выхода* — это работа, необходимая для вылета одного электрона из металла. Она совершается против сил отталкивания электронного облака и притяжения положительно заряженного металла за счет внутренней энергии решетки или сообщенной извне энергии.

Концентрация электронного облака зависит от количества «быстрых» электронов, обладающих энергией, достаточной для совершения работы выхода. Количество таких электронов зависит от температуры. При комнатных температурах «быстрых» электронов мало, концентрация электронного облака также мала. Но при достаточно высокой температуре ($\approx 1500 - 2000$ K) количество вылетающих электронов резко увеличивается, за счет этой *термоэлектронной эмиссии** возрастает концентрация электронного облака, и становится возможным использование термоэлектронного тока в вакууме (см. 2.13).

Потенциальная энергия электронов вне металла выше их энергии в металле (рис. 216, за нуль принята энергия электронов в вакууме). Говорят, что электрон в металле находится в потенциальной яме. По современным представлениям, электроны в металле имеют дискретный ряд близких значений энергии.

В большинстве явлений, связанных с током в металлах, важными являются наиболее «энергичные» электроны, имеющие «верхние» уровни энергии. На рис. 216 изображен самый верхний из уровней энергии электронов. «Глубинные» электроны практического значения в таких явлениях не имеют, поэтому остальные уровни только намечены, и яма изображена без дна.

Между металлом и вакуумом образуется разность потенциалов, называемая *контактным потенциалом* данного металла:

$$\varphi_k = A_{\text{вых}}/e,$$

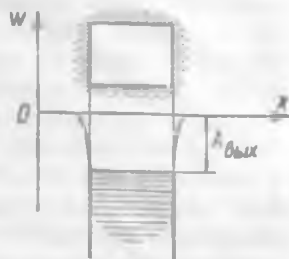


Рис. 216

* emissio (лат.) — выпуск.

где e — величина заряда электрона. Контактный потенциал связан с работой выхода и зависит от рода вещества.

§ 2.9. Контакт металл — металл

В разных металлах концентрации электронов немного различаются, поэтому если они приведены в соприкосновение, начинается процесс диффузии электронов из незаряженного металла с большей концентрацией в другой незаряженный металл. При этом первый металл заряжается положительно, второй — отрицательно, и контактная разность потенциалов станет постоянной, когда наступит подвижное равновесие — ток электронов, протекающих через контакт вследствие наличия разности потенциалов, станет равен текущему навстречу диффузионному току.

Контактная разность потенциалов, так же как контактные потенциалы этих металлов, зависит от работ выхода и температуры. Сумма контактных разностей потенциалов замкнутой цепи из разнородных металлов равна нулю, если только все контакты находятся при одинаковой температуре: $\phi_1 - \phi_2 + \phi_2 - \phi_1 = 0$ (для двух металлов; для многих — аналогично). Но контактные разности потенциалов зависят от температуры. Будем поддерживать разные контакты при различных температурах T_1 и T_2 . Тогда $\phi_1 - \phi_2 + \phi'_2 - \phi'_1 = \mathcal{E} \neq 0$ (рис. 217). Сумма контактных разностей



Рис. 217

потенциалов называется *термоэлектродвижущей силой*, она пропорциональна разности температур спаев:

$$\mathcal{E} = \alpha(T_2 - T_1).$$

Два разнородных металла, спаянных друг с другом, образуют *термопару*. Термо-э. д. с. термопары — величина порядка десятых долей вольта при разности температур около 100 К. Термопара представляет собой тепловую машину, в которой подводимая внутренняя энергия превращается в электрическую. К.п.д. такой машины чрезвычайно низок из-за большой теплопроводности металла (приходится тратить большую энергию на поддержание разности температур). Металлические термопары в основном применяют в термоэлектрических термометрах для измерения температуры в труднодоступных местах. Для этого в разрыв цепи термопары включается чувствительный гальванометр, который градуируют в кельвинах. Лучше работает термопара из разнородных полупроводников (термо-э.д.с. выше, теплопроводность меньше). Такие термопары с к.п.д. порядка 10% используют как генераторы электроэнергии.

§ 2.10. Ток в жидкостях

Некоторые жидкости являются *проводниками второго рода* — электролитами. Обычно это растворы какого-то вещества в диэлектрике. Напомним, что полярные молекулы при растворении распадаются на ионы —

происходит электролитическая диссоциация (см. § 1.8). Если степень диссоциации (процент распавшихся молекул) высока, раствор представляет собой сильный электролит. Поместим в электролитическую ванну два электрода (одинаковых и практически нерастворимых, рис. 218), присоединенных к источнику тока. Электрод, соединенный с положительным полюсом источника, называется *анодом*, с отрицательным полюсом — *катодом**. Под действием электрического поля положительные ионы начнут дрейфовать к катоду, отрицательные — к аноду. Следовательно, на хаотичное движение будет наложено упорядоченное — потечет ток. Движущиеся к катоду ионы (положительные) называются *катионами*, к аноду (отрицательные) — *анионами*. Дойдя до электродов, анионы отдадут лишние электроны (которые по цепи источником перегоняются к катоду), катионы приобретают недостающие им электроны. И катионы, и анионы становятся нейтральными атомами или группами атомов. Промежуток между электродами оказывается проводящим, так как с катода электроны ушли (на катионы), к аноду — пришли (с анионов). Свободными зарядами в электролитах являются ионы, ток в жидкости представляет собой их направленное движение. Проводимость электролита — *ионная*. Температурный коэффициент сопротивления жидкостей отрицателен — при повышении температуры в среднем быстрее движутся ионы, сопротивление уменьшается.

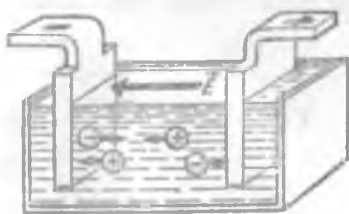


Рис. 218

Кроме того, с ростом температуры обычно увеличивается степень диссоциации и, следовательно, концентрация ионов. При заданной температуре электролит подчиняется закону Ома, т. е. сопротивление его постоянно (не зависит от напряжения). Лучшим доказательством правильности представлений об ионной проводимости электролитов является электролиз.

Электролиз — это выделение свободных веществ на электродах при прохождении через раствор (расплав) электрического тока.

Пусть, например, в электролитической ванне (см. рис. 218) находится сильный электролит — раствор серной кислоты в воде. Молекулы серной кислоты при растворении почти полностью диссоциировали:



При прохождении электрического тока через раствор на катоде выделяется атомарный водород, на аноде — молекулы SO_4 . Это результаты электролиза. Далее начинаются *вторичные реакции* при электролизе: атомарный водород соединяется в молекулы: $2\text{H} \rightarrow \text{H}_2 \uparrow$. Неустойчивые молекулы SO_4 распадаются: $\text{SO}_4 \rightarrow \text{SO}_3 + \text{O}$. Атомы кислорода соединяются в молекулы: $2\text{O} \rightarrow \text{O}_2 \uparrow$. Молекулы SO_3 взаимодействуют с водой, образовавшиеся молекулы серной кислоты диссоциируют:



* *anodos* (греч.) — путь вверх, *kathodos* (греч.) — сходжение, спуск. Названия введены Фарадеем; должно быть, он располагал электроды один под другим.

В результате вторичных реакций восстанавливается концентрация ионов в растворе, выделяются на электродах газы водород и кислород в пропорциях, в которых эти элементы входят в состав воды. Фактически происходит процесс разложения воды на водород и кислород.

Законы Фарадея для электролиза были установлены экспериментально:

1. Масса вещества, выделившегося на электроде, прямо пропорциональна силе тока, прошедшего через электролит, и времени его прохождения: $m \sim Q$ или

$$m = kQ \stackrel{33}{=} kIt. \quad (54)$$

Коэффициент пропорциональности k равен отношению массы вещества, выделившегося на электроде, к заряду, прошедшему при этом через раствор, и называется электрохимическим эквивалентом данного вещества.

2. Электрохимические эквиваленты веществ пропорциональны их химическим эквивалентам*: $k \sim x$.

Отношение этих эквивалентов одинаково для всех веществ:

$$\frac{k}{x} = \frac{1}{F}. \quad (55)$$

Оба закона Фарадея для электролиза можно объединить:

$$m \stackrel{54,55}{=} \frac{x}{F} It = \frac{1}{F} \frac{A}{n} It. \quad (56)$$

Пропустим через раствор количество электричества $Q = F$. Тогда на электроде выделится масса вещества $m = x$ (численно равная химическому эквиваленту).

Таким образом, постоянная Фарадея F численно равна заряду, который надо пропустить через электролит, чтобы на электродах выделить массу вещества, равную его химическому эквиваленту: $F = 96484,56$ Кл/моль. У одновалентных веществ химический эквивалент равен одному молю, т. е. содержит число атомов N_A . Значит, измерив постоянную Фарадея, мы узнаем, какое количество электричества прошло через раствор, выделив на электроде N_A одновалентных атомов. Следовательно, каждый атом получил или отдал при электролизе количество электричества

$$\frac{F}{N_A} = e = \frac{9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Мы уже говорили, что это абсолютное значение заряда электрона. Если выделяющееся в процессе электролиза вещество двухвалентно (или, вообще, имеет валентность n), то его химический эквивалент равен половине моля (A/n) и имеет число атомов $N_A/2$ (вообще, N_A/n). Значит, каждый атом получил или отдал заряд $2F/N_A = 2e$ (или $nF/N_A = ne$), т. е. кратное e количество электричества. Мы приходим к представлению об ионе как о частице, у которой по той или другой причине есть избыток или недостаток электронов. Избавившись от лишних или получив

* Химический эквивалент равен $x = A/n$, где A — молярная (атомная) масса данного вещества; n — его валентность. Выражается химический эквивалент в килограммах на моль.

недостающие электроны на электродах, ион становится нейтральной группой атомов. Этот процесс мы и назвали электролизом.

§ 2.11. Некоторые источники тока

Зная механизм электрического тока в жидкости, можно понять работу химических источников тока.

Рассмотрим работу гальванического элемента Вольта* (рис. 219).

В электролитической ванне находится сильный электролит — водный раствор серной кислоты определенной концентрации. В такую электролитическую ванну помещают нейтральную цинковую пластинку. Она начинает растворяться, а при растворении заряжается отрицательно относительно раствора, так как в раствор переходят ионы Zn^{++} (каждый ион цинка оставляет два «своих» электрона некомпенсированными). Стремление цинка растворяться характеризуется его упру-

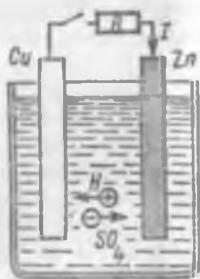


Рис. 219

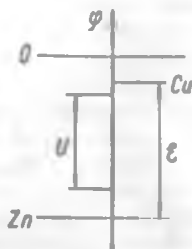


Рис. 220

гостью растворения, которая измеряется количеством ионов, уходящих в раствор с единицы поверхности за единицу времени, и практически не меняется при работе элемента.

Под действием возникшего электрического поля начинается обратный процесс осаждения ионов цинка на пластинке, скорость которого зависит от разности потенциалов раствора и цинка и постепенно возрастает. При достижении совершенно определенной разности потенциалов раствора и цинка (рис. 220; за нуль принят потенциал раствора) скорости обоих процессов станут равными, наступит динамическое равновесие, пластинка перестанет растворяться, а разность потенциалов — расти. Говорят: упругость растворения уравновешена разностью потенциалов.

Эту разность потенциалов трудно использовать. Нужно поместить в ту же электролитическую ванну второй электрод. Но если он тоже будет цинковым, с ним произойдет тот же процесс, возникнет такая же разность потенциалов раствора и электрода. Разности потенциалов между электродами не будет. Значит, второй электрод надо взять не цинковым, его упругость растворения должна быть далека от упругости растворения цинка. Вольта выбрал второй электрод из меди. Медная пластинка, помещенная в раствор серной кислоты, тоже начинает растворяться и заряжается отрицательно относительно раствора.

* Химические источники тока были названы гальваническими элементами по имени итальянского врача Гальвани, заметившего действие электрического тока на лягушачью лапку. Попытки назвать эти элементы по имени первооткрывателя вольт-аическими успеха не имели.

Возникшая разность потенциалов тоже препятствует растворению, и наступает динамическое равновесие, пластинка перестает растворяться; ее упругость растворов уравнивается разностью потенциалов.

Но упругость растворения меди мала, она быстро уравнивается получающейся разностью потенциалов, и пластинка почти не растворяется. Иначе, равновесие достигается при малом отрицательном потенциале меди (рис. 220). Следовательно, за счет работы химических сил получена разность потенциалов медного и цинкового электродов, т. е. полюсов разомкнутого источника, другими словами, э. д. с. источника $\mathcal{E}$.

Мы показали, как создается разность потенциалов. Рассмотрим, как она поддерживается. Замкнем электроды на какой-либо потребитель тока. По внешней части цепи пойдет ток от медного к цинковому электроду (от плюса к минусу). Пусть вас не смущает, что положительный медный электрод отрицательно заряжен. Медный электрод отрицателен относительно раствора, но положителен относительно цинка). При этом электроны по внешней цепи уходят от цинка к меди. Потенциал цинка повышается, динамическое равновесие нарушается, разность потенциалов раствора и цинка уменьшается и не уравнивает теперь упругость растворения цинка. Цинковая пластинка снова начинает растворяться, каждый вновь уходящий в раствор ион оставляет лишними на пластинке два электрона. Пришедшие электроны понижают потенциал меди, динамическое равновесие нарушается, разность потенциалов раствора и меди увеличивается.

В § 2.10 мы рассмотрели электролиз серной кислоты в электролитической ванне (см. рис. 218), к электродам которой подведено напряжение от внешнего источника. Ток через раствор протекал от положительного электрода к отрицательному, т. е. справа налево, и, естественно, положительные ионы двигались в ту же сторону, получали недостающие им электроны на левом электроде и становились нейтральными. Аналогично, отрицательные ионы двигались направо и отдавали свои лишние электроны правому электроду.

При работе гальванического элемента через электролитическую ванну тоже справа налево идет ток. Значит, происходит процесс электролиза серной кислоты, в результате которого на левом (медном) электроде положительные ионы H^+ получают недостающие электроны, а на правом (цинковом) электроде отрицательные ионы отдают свои лишние электроны. Следовательно, электроны, отданные кислотным остатком, участвуют в токе, а избыточные электроны с медной пластины уходят на положительные ионы водорода.

Итак, положительные ионы водорода притягиваются к положительному (1) полюсу элемента, получают на нем недостающий электрон и превращаются в атомарный водород. Потенциал медной пластинки поэтому перестает уменьшаться. Потенциал цинковой пластины перестает увеличиваться благодаря растворению цинка. Между электродами сохраняется, т. е. поддерживается, определенная разность потенциалов U (рис. 220), которая, конечно, меньше э. д. с.

В результате вторичных реакций при электролизе на цинковой пластине выделяется атомарный кислород, на медной — атомарный водород. Затем эти атомы могут соединяться по два в молекулы соответствующих газов.

Но атомарные водород и кислород могут не только соединяться в молекулы; они могут и «растворяться», т. е. уходить в раствор в виде положительных (H^+) и отрицательных (OH^-) ионов. При таком процессе каждый уходящий в раствор ион водорода оставляет «свой» электрон на положительном электроде источника; соответственно каждый «растворяющийся» атом кислорода забирает два электрона с отрицательного электрода источника. Образуется новый элемент с газовыми электродами — положительным (кислород) и отрицательным (водород). Его э. д. с. (обычно ее называют противо-э. д. с.) уменьшает э. д. с. источника, происходит поляризация гальванического элемента — уменьшение его э. д. с. вследствие появления газового элемента.

Для уменьшения поляризации можно время от времени вынимать электроды (достаточно один медный) и счищать газовый столб. Это механическая *деполяризация*.

Удобнее добавить в раствор какое-либо соединение, богатое кислородом и не взаимодействующее с раствором и электродами источника (например, Mn_2O_7) — *деполяризатор*. В момент «рождения» водород очень активен химически и, соединяясь с кислородом деполяризатора, связывается в воду и не образует газового электрода. Такие гальванические элементы называют *неполяризующимися*.

Аккумуляторы предназначены для накопления электроэнергии.

Чтобы стать источниками тока, они должны быть предварительно заряжены. Рассмотрим работу свинцового или кислотного аккумулятора. В электролитическую ванну с раствором серной кислоты погружены два одинаковых свинцовых электрода (точнее, покрытых окисью свинца, рис. 221). Каждый из них растворяется (и заряжается отрицательно, см. работу элемента Вольта) до тех пор, пока его упругость растворения не будет уравновешена разностью потенциалов между ним

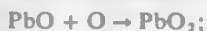


Рис. 221



Рис. 222

и раствором. При этом оба электрода имеют одинаковые потенциалы. Присоединим к ним внешний источник тока и пустим через аккумулятор *ток зарядки*, который вызовет электролиз серной кислоты. В результате электролиза (и его вторичных реакций) на положительном электроде выделится кислород, а на отрицательном — водород. Кислород вызовет *окисление*:



водород — *восстановление*:



Итак, в результате зарядки электролиты стали разными, их упругости растворения и, следовательно, разности потенциалов с раствором различны; появилась разность потенциалов электродов.

Аккумулятор стал источником тока. Отключим заряжавший источник и вместо него включим нагрузку (рис. 222). Пойдет *ток разрядки* в обратном направлении, при этом полярность аккумулятора не изменится.

При разрядке химические реакции на электродах идут в обратную сторону. Доводить их до конца не рекомендуется, после того как э.д.с. упадет до 1,9 В, следует аккумулятор подзарядить.

Емкостью аккумулятора называется количество электричества, которое от него можно получить:

$$Q = It.$$

Ее выражают в ампер-часах. Например, от аккумулятора емкостью 60 А·ч можно получить ток силой 3 А в течение 20 ч или 0,5 А в течение 120 ч и т. д.

§ 2.12. Ток в газах

Газ при обычных условиях — изолятор, так как в нем нет достаточного количества свободных зарядов. Для ионизации газа — отрыва одного электрона от нейтральной молекулы — нужна определенная энергия ионизации W_i . Большинство свободных зарядов в газе образуется из нейтральных молекул, которые присоединили или потеряли по одному электроду; свободными являются и неприсоединившиеся электроны. Следовательно, свободные заряды в газе в основном имеют заряд электрона. Для образования больших свободных зарядов — $2e$, $3e$ и т. д. — необходима гораздо большая энергия. При затрате энергии ионизации образуются сразу два иона — положительный и отрицательный.

В газе всегда присутствует некоторое (обычно небольшое) количество свободных зарядов, образованных за счет внутренней энергии или внешнего воздействия, например космического излучения. Но для получения заметного тока их недостаточно. Любая причина массовой ионизации в межэлектродном объеме — пламя, различные облучения, повышение температуры и т. п. — называется *внешним ионизатором*. Действие внешнего ионизатора или достаточно сильное электрическое поле приводят к появлению заметного тока — *газового разряда*. В первом случае проводимость газа называется *несамостоятельной*, во втором — *самостоятельной*.

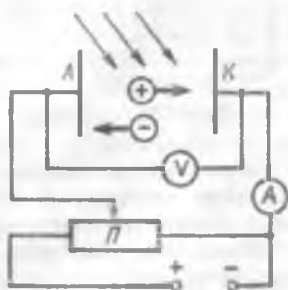


Рис. 223

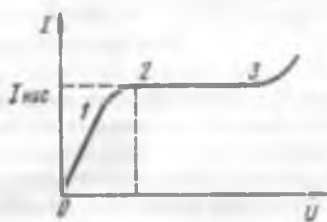


Рис. 224

На положительные и отрицательные заряды в электрическом поле действуют электрические силы, и свободные заряды (вне поля двигавшиеся хаотично) дрейфуют параллельно линиям напряженности — анионы к аноду, катионы к катоду. На электродах ионы превращаются в нейтральные молекулы, отдавая или принимая электроны, тем самым замыкая цепь (аналогия с электролитом). Таким образом, проводимость газа — *ионная* (в число ионов газа мы включили и свободные электроны). Несамостоятельная проводимость наблюдается только при работе внешнего ионизатора (рис. 223).

Экспериментально исследуем зависимость силы тока от напряжения, приложенного к электродам, получим вольт-амперную характеристику газового разряда (рис. 224).

Внешний ионизатор создает определенное количество пар ионов за единицу времени. Некоторое количество этих пар, встречаясь, *рекомбинирует* — превращается в нейтральные молекулы. При небольших напря-

жениях часть оставшихся ионов достигает электродов и участвует в токе.

По мере увеличения приложенного напряжения все большая часть ионов достигает электродов, и сила тока почти линейно растет (часть кривой 01). Начиная с определенного напряжения все имеющиеся ионы участвуют в токе (точка 2), дальнейшее увеличение напряжения не увеличивает числа свободных зарядов, участвующих в токе, — сила тока остается неизменной (участок 2—3). Это ток насыщения, при котором все созданные ионизатором пары ионов (кроме рекомбинирующих) достигают электродов. Естественно, его сила зависит от мощности источника ионов — внешнего ионизатора. Увеличив количество пар ионов, создаваемых ионизатором за единицу времени, мы получим больший ток насыщения. При увеличении напряжения (участок 2—3) не происходит качественных изменений газового разряда. Но в более сильном поле, двигаясь ускоренно, свободные заряды получают большую энергию. Обозначим среднюю длину свободного пробега свободных электронов l_- , положительных ионов — l_+ .

На рис. 225 (кружками обозначены молекулы) видно, что длина свободного пробега электронов больше длины свободного пробега положительных ионов хотя бы на диаметр молекулы (по сравнению с ним «диаметр» электрона исчезающе мал); длина свободного пробега отрицательных тяжелых ионов того же порядка, что и у положительных. Конечно, такое представление молекул, электронов и их столкновений недопустимо упрощено, зато наглядно. Оно доказывает, что энергия электрона перед очередным столкновением больше, чем энергия положительного иона.

Поэтому рассмотрим движение электронов. В упорядоченном движении они ускоряются от нулевой до какой-то максимальной скорости v . Работа электрических сил сообщает им энергию:

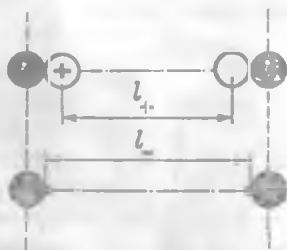


Рис. 225

$$A = F l_- = e E l_- = m v^2 / 2.$$

По мере увеличения межэлектродного напряжения растет напряженность поля и возрастает энергия электрона перед очередным столкновением (часть кривой 2—3, см. рис. 224). В соответствии с одним из законов диалектики постепенное накопление небольших количественных изменений (в нашем случае, кинетической энергии электрона) приводит к качественному скачку.

При достаточно большом напряжении электрическое поле удовлетворяет условию

$$e E l_- = m v^2 / 2 = W_i.$$

Тогда возникает ионизация ударом — выбивание электрона из нейтральной молекулы при ее столкновении с достаточно «энергичным» электроном. Новые электроны тоже приводят к ударной ионизации. Число ионов лавинообразно нарастает — возникает односторонняя электронная лавина. Условие ее существования $e E l_- \geq W_i > e E l_+$. Напряженность таких

полей в воздухе порядка десятков тысяч вольт на сантиметр. При достижении указанных напряженностей сила тока резко возрастает (часть кривой за точкой 3), наступает пробой газового промежутка, наблюдается самостоятельная проводимость газа, т. е. проводимость без внешнего ионизатора. В межэлектродном промежутке, как мы уже отмечали, всегда есть небольшое число «затравочных» электронов. При достаточной напряженности каждый из них может привести к появлению электронной лавины — искрового разряда.

Свечение газового промежутка наблюдается из-за возбужденных атомов (молекул), получивших при столкновениях с ионом энергию, недостаточную для ионизации. Эта энергия возбуждения «высвечивается», когда атом (молекула) возвращается в невозбужденное состояние.

Искровой разряд всем известен. Это и искра зажигания в двигателях внутреннего сгорания, и молния в атмосфере. При еще большей напряженности может возникнуть *двухсторонняя ионная лавина*. Условие ее возникновения $eE_- > eE_+ \geq W_i$. Тогда лавину вызывают ударной ионизацией не только электроны, но и ионы, разогнавшиеся до необходимой скорости. Двухсторонняя лавина в атмосфере требует напряженностей порядка сотен тысяч вольт на сантиметр. Но можно получить двухстороннюю лавину и при гораздо меньших напряженностях, если увеличить длину свободного пробега ионов. Это достигается разрежением газа. Так, в газосветных трубках при пониженном давлении наблюдается *тлеющий разряд*.



Рис. 226

В зависимости от состава газа его ионы, рекомбинируя, испускают те или другие лучи, чаще ультрафиолетовые (при рекомбинации выделяется больше энергии, чем при возвращении из возбужденного состояния в невозбужденное). Такой разряд находит применение в рекламных трубках, обычно наполненных аргоном или неоном. Трубки дневного света наполняют парами ртути и смесью различных газов. Такие газосветные лампы имеют гораздо больший к. п. д., и они значительно экономичнее ламп накаливания. Вот почему они широко применяются для освещения улиц, производственных помещений и жилья.

Разновидность тлеющего разряда наблюдается в неоновых лампах (рис. 226).

При уменьшении давления свечение газа сначала заполняет всю трубку, затем разбивается на *страты** и, наконец, исчезает. Теперь обнаруживается свечение стекла напротив катода — наблюдаются *катодные лучи*, испускаемые катодом перпендикулярно его поверхности. Катодные лучи можно отклонить электрическим и магнитным полями. По их отклонению определяют массу и заряд частиц, составляющих эти лучи. Так узнали, что катодные лучи представляют собой поток быстрых электронов. Электроны вылетают из холодного катода под действием сильного электрического поля. Эта *холодная эмиссия* электронов объясняется в квантовой механике. Некоторое количество электронов освобождается за счет *ато-*

* stratum (лат.) — слой.

ричной эмиссии — выбивания электронов из катода положительными ионами, прошедшими большую разность потенциалов.

§ 2.13. Ток в вакууме

Электронный пучок можно получить за счет термоэлектронной эмиссии в электронных лампах. Двухэлектродная электронная лампа (вакуумный диод, рис. 227) состоит из подогревного катода (обычно цепь накала, изображенную на рисунке, не показывают) и анода, который заряжен положительно относительно катода. Если не включена цепь накала, то гальванометр не показывает никакого тока. Стоит включить ток накала, катод начинает испускать электроны, некоторые из них достигают анода даже при отсутствии анодной батареи. Под воздействием

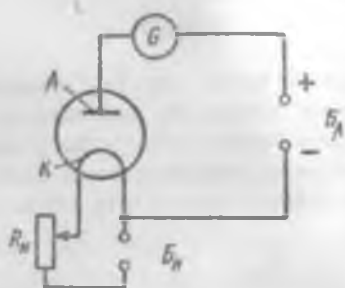


Рис. 227

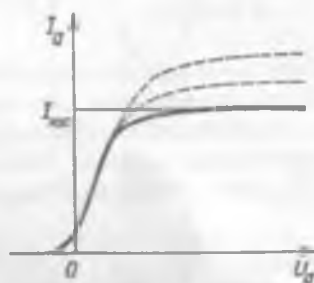


Рис. 228

электрического поля между электродами электронное облако катода «отсасывается» к аноду, гальванометр показывает анодный ток. При увеличении анодного напряжения анодный ток растет (рис. 228), концентрация электронного облака уменьшается и при определенном анодном напряжении становится равной нулю — все вылетающие из катода электроны участвуют в анодном токе. При дальнейшем росте анодного напряжения ток не меняется, это ток насыщения, сила которого не зависит от анодного напряжения.

Для увеличения силы тока насыщения надо повысить температуру катода, чего можно достигнуть увеличением силы тока накала (рис. 228; пунктирные кривые).

Можно приложить к лампе отрицательное напряжение, т. е. поменять полярность анодной батареи. При достаточном напряжении практически ни один электрон не достигнет анода — лампа будет «заперта». Таким образом, диод обладает односторонней проводимостью, что позволяет использовать его в качестве выпрямителя переменного тока. На рис. 229 изображен двухполупериодный выпрямитель на двух диодах. Полупериода работает одна лампа, полупериода — другая. Ток, идущий через сопротивление и снимаемый с клемм, называется пульсирующим. На рис. 230 изображены в зависимости от времени графики токов поступающего (переменного) и выпрямленного. В дальнейшем пульсирующий ток можно

сладить (различными фильтрами) — сделать достаточно постоянным и по силе.

Если в лампу поместить третий электрод, например редкую спираль вокруг линейного катода при цилиндрическом аноде, получится *трех-*

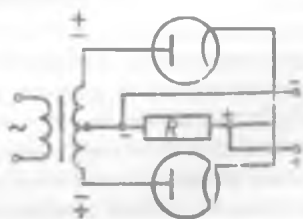


Рис. 229

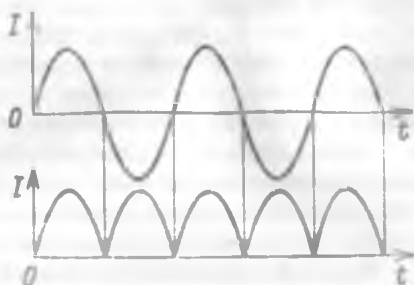


Рис. 230

электродная электронная лампа (вакуумный триод, рис. 231). Вольт-амперная характеристика этой лампы имеет такой же вид, как у диода. Зафиксируем теперь какое-то анодное напряжение и будем менять потенциал сетки относительно катода. Такая *сеточная характеристика* изображена на рис. 232. При сеточном напряжении, равном нулю, есть определенный

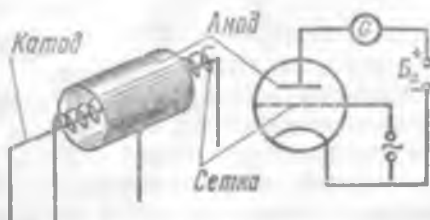


Рис. 231

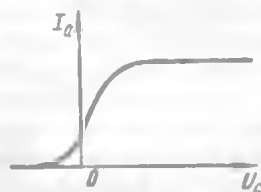


Рис. 232

анодный ток (как в диоде). Положительное сеточное напряжение увеличивает силу анодного тока, так как сетка помогает «отсасывать» электронное облако. Отрицательное сеточное напряжение задерживает электроны, и сила анодного тока уменьшается.

Сетка расположена к катоду ближе, чем анод. От катода к аноду электроны движутся ускоренно.

Положительный потенциал на сетке ускоряет электроны между катодом и сеткой, где они движутся медленно и потому сравнительно долго, и тормозит их в промежутке между сеткой и анодом, где скорость уже достаточно велика и время движения мало. Отрицательный потенциал на сетке тормозит медленные электроны между катодом и сеткой и ускоряет их между сеткой и анодом, где скорость и так велика.

Следовательно, малый положительный потенциал на сетке резко увеличивает силу анодного тока, а малый отрицательный сеточный потенциал резко уменьшает ее. Вот почему такая сетка называется *управляющей*. Как видно из сеточной характеристики, некоторое сеточное напряжение приводит к насыщению, определенное отрицательное напряжение —

к запуску лампы. Изменяя анодное напряжение, мы получим семейство сеточных характеристик (рис. 233, $U_{a1} > U_{a2} > U_{a3}$), у которых один и тот же ток насыщения (ток накала, и, следовательно, температура катода неизменны).

Из описания действия триода вытекает основное его применение — в качестве усилителя колебаний напряжения, поданного на сетку. Для примера подадим на сетку напряжение в форме синусоиды (рис. 234). Сила анодного тока станет изменяться, как показано на том же рисунке (если не достигается насыщение). На постоянном сопротивлении, включенном

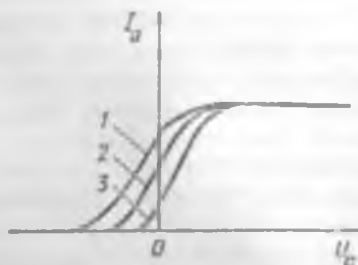


Рис. 233

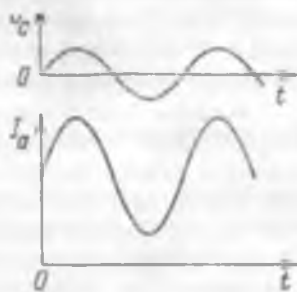


Рис. 234

в анодную цепь, будет напряжение, из которого можно выделить постоянную и переменную составляющие. Амплитуда переменной составляющей гораздо больше амплитуды сеточного напряжения. Итак, триод — усилитель колебаний. Конечно, он сохраняет свойства диода, т. е. служит и выпрямителем.

Добавляя дополнительные электроды различного назначения, получают многоэлектродные лампы, которые мы здесь не рассматриваем.

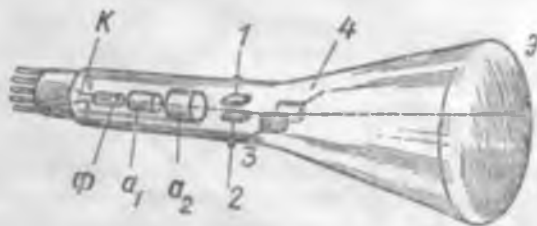


Рис. 235

Электронно-лучевая трубка (рис. 235) — стеклянный вакуированный баллон с узким электронным лучом. Луч формируется в электронной пушке, состоящей из подогревного катода K , фокусирующего электрода Φ — цилиндра под небольшим отрицательным (относительно катода) напряжением, двух анодов a_1, a_2 — цилиндров, на которые подано высокое положительное напряжение ($U_1 \approx 300 - 500$ В; $U_2 \approx 1500 - 2000$ В относительно катода).

Узкий электронный луч (прошедший через аноды) проходит между двумя парами пластин — вертикально отклоняющими 1—2 и горизонтально отклоняющими 3—4. Если на них подано какое-либо напряжение, то за

счет электрических сил электронный луч отклоняется на соответствующий угол и попадает в определенную точку экрана Э, внутренняя поверхность которого покрыта составом, светящимся под ударами электронов.

Применяется электронно-лучевая трубка, например, при изучении быстро протекающих процессов. Напряжение, соответствующее исследуемому процессу, подается на вертикально отклоняющие пластины, в то время как на горизонтально отклоняющие пластины подается опорное напряжение, закон изменения которого в зависимости от времени известен. В результате получается зависимость исследуемого напряжения от времени, наблюдаемая в *катодных осциллографах*. Такие же трубки применяются в радиолокации для определения расстояний. Наконец, в телевидении — черно-белом и цветном. Во всех случаях большое значение имеет практическая безынерционность электронного пучка.

§ 2.14. Ток в полупроводниках

Полупроводники — вещества, занимающие по проводимости промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Хорошие диэлектрики имеют удельную проводимость $\sigma \sim 10^{-8} - 10^{-18}$ См/м; хорошие проводники — $\sigma \sim 10^6 - 10^8$ См/м. Полупроводники имеют промежуточные значения проводимости; проводимость полупроводника зависит от условий, в которых он находится (температуры, освещенности), от технологии изготовления данного образца, в частности от наличия и концентрации примесей.

Типичными полупроводниками являются элементы четвертой группы таблицы Менделеева кремний и германий. Рассмотрим некоторые их свойства.

Четырехвалентные атомы чистого полупроводника связаны друг с другом ковалентными связями, при которых два валентных электрона



Рис. 236

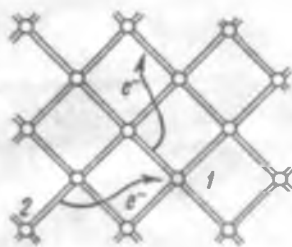


Рис. 237

близких атомов обобществляются, становятся «собственностью» двух атомов и связывают их. Кристаллическая решетка германия или кремния (рис. 236) типа алмазной. В этой решетке ячейки представляют собой правильные тетраэдры, в вершинах которых расположены атомы. Пятый атом находится в середине тетраэдра и связан со своими ближайшими соседями. Плоская проекция такой решетки схематически изображена на рис. 237. Каждая черточка обозначает один из электронов ковалентной связи, кружки — атомы полупроводника.

При 0 К все связи заполнены и свободных зарядов практически нет, полупроводник является диэлектриком. С повышением температуры появляется некоторое количество атомов, энергия которых достаточна для разрыва ковалентной связи. Эта энергия называется *энергией генерации*. Такой атом может передать энергию одному из электронов, тогда разорвется одна ковалентная связь. В результате образуется *свободный электрон* и *дырка 1*.

В полупроводнике идет и процесс, обратный генерации, в результате которого встречаются и *рекомбинируют* свободный электрон и дырка, и выделяется (переходит во внутреннюю) энергия генерации. Конечно, на место одного электрона может попасть другой, при этом ничего не изменится. Значит, при определенной температуре устанавливается динамическое равновесие процессов генерации и рекомбинации, которому соответствует определенная концентрация свободных зарядов.

Свободный электрон может двигаться по всей толще образца, участвуя в хаотическом движении. Дырка — это не просто положительный заряд. В полупроводнике происходят процессы замещения свободного (вакантного) места связанным электроном другого атома, не требующие затраты энергии. За счет энергии решетки разрывается одна ковалентная связь атома 2 (на что затрачивается энергия генерации), освободившийся электрон рекомбинирует с дыркой 1, в результате чего выделяется такая же энергия, возвращаемая решетке. Результатом этого процесса, прошедшего без затраты энергии, является исчезновение дырки 1 и появление дырки 2, т. е. переход дырки из положения 1 в положение 2. Значит, дырка является свободным зарядом, ибо только он может переходить с места на место без затраты энергии. Следовательно, в процессе генерации образуются два свободных заряда — электрон и дырка. Дырки тоже участвуют в хаотическом движении, так как описанный переход связанного электрона к дырке с разных направлений равновероятен. При наложении внешнего поля свободные электроны получают преимущественное направление движения и дрейфуют против поля, связанные электроны тоже преимущественно переходят на дырки против поля, что соответствует преимущественному дрейфу дырок вдоль поля. Возникает электрический ток, свободными зарядами которого являются электроны и дырки.

Таков механизм *собственной проводимости* полупроводника; ее можно назвать *электронно-дырочной*; концентрации свободных электронов и дырок в собственном полупроводнике *одинаковы*. При увеличении температуры увеличивается количество атомов решетки, энергия которых больше или равна энергии генерации. Соответственно сдвигается подвижное равновесие процессов генерации и рекомбинации в сторону увеличения числа генераций. Увеличивается концентрация свободных электронов и дырок, что ведет к уменьшению сопротивления и увеличению проводимости данного образца.

Полупроводниковые *термосопротивления* (термисторы) используются для очень точных измерений температуры или интенсивности излучения. Увеличивается проводимость полупроводника и при его освещении, так как теперь энергию генерации можно получить за счет лучистой энергии (разд. V, § 6.5). Полупроводниковое *фотосопротивление* изменяется при

изменении освещенности, что позволяет применять его, например, в процессах автоматического управления.

Представим себе кристаллическую решетку чистого полупроводника, в которую внедрено небольшое количество атомов примеси пятой группы таблицы Менделеева, например фосфора (рис. 238, а). Атомы примеси соединяются четырьмя своими валентными электронами с четырьмя атомами решетки, образуя ковалентные связи. Пятый электрон примеси остается связанным только со своим ядром, т. е. связан с решеткой слабее других электронов. Чтобы оторвать пятый электрон примеси и сделать его свободным, требуется энергия, гораздо меньшая энергии

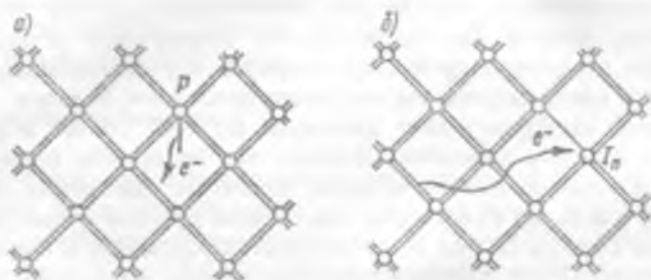


Рис. 238

генерации. Такой небольшой энергией при комнатной температуре обладает достаточное количество атомов решетки, поэтому практически все пятые электроны примеси станут свободными. В таком полупроводнике кроме электронов и дырок собственной проводимости появляется дополнительное число свободных электронов, концентрация которых определяется концентрацией примеси. При концентрации примерно 1 атом примеси на 10^6 атомов чистого полупроводника (концентрация которого $n \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$) появляется дополнительно 10^{16} свободных электронов в 1 см^3 (для сравнения концентрация собственных электронов и дырок $\sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$). Атомы примеси становятся положительными связанными ионами (не дырками! Для их перемещения надо затратить энергию, не намного меньшую энергии активации). Примесь такого рода называется *донорной**. Примесная проводимость полученного полупроводника называется *электронной*, а электроны в нем — *основными свободными зарядами*. Полупроводник, основными свободными зарядами которого являются электроны, называют полупроводником *n-типа***.

Внедрим в кристаллическую решетку чистого полупроводника небольшое количество атомов третьей группы таблицы Менделеева (например, индия; рис. 238, б). Тремя своими валентными электронами он вступит в ковалентные связи с соседями. Четвертая связь останется незаполненной. До устойчивого слоя из восьми электронов не хватает одного, который атом индия может принять с небольшой затратой энергии (гораздо меньшей энергии активации). Такой энергией при комнатной

* donare (лат.) — дарить.

** negativus (лат.) — отрицательный.

температуре обладает достаточно атомов, поэтому практически каждый атом примеси примет один электрон, на старом месте которого образуется дырка. Сам атом примеси при этом становится отрицательным связанным ионом. Количество дополнительных дырок в единице объема снова определяется концентрацией примеси, т. е. на несколько порядков выше концентрации собственных свободных зарядов. Такая примесь называется *акцепторной**, примесная проводимость полупроводника — *дырочной*; дырки — *основными свободными зарядами*. Полупроводник, основными свободными зарядами которого являются дырки, называют полупроводником *p*-типа**. Неосновными свободными зарядами в нем являются электроны.

§ 2.15. Контакт полупроводник — полупроводник

Контакт двух полупроводников разного типа (*n-p-переход*) обладает рядом интересных свойств. Два незаряженных полупроводника приведены в соприкосновение. Начинается диффузия электронов и дырок через контакт. Электроны переходят преимущественно в *p*-полупроводник, дырки — в *n*-полупроводник. Дырочный полупроводник заряжается отрицательно, электронный — положительно. Возникает контактное поле напряженностью E_x , препятствующее дальнейшей диффузии электронов и дырок. Устанавливается подвижное равновесие, при котором суммарный ток через контакт равен нулю. При этом различными становятся потенциалы полупроводников (рис. 239).

Энергия свободного заряда связана с потенциалом известной формулой $W = e\phi$. Поэтому дырки в положительном *n*-полупроводнике имеют положительную, а в отрицательном *p*-полупроводнике — отрицательную энергию. Энергия электронов, наоборот, положительна в отрицательно заряженном *p*-полупроводнике и отрицательна в *n*-полупроводнике.

Теперь, чтобы перейти через контакт, электроны *n*-полупроводника должны иметь энергию, значение которой больше разности энергий $W_{n2} - W_{n1}$ (рис. 239). Аналогичную энергию для перехода через контакт должны иметь дырки *p*-полупроводника.

Иначе говоря, контакт представляет собой *потенциальный барьер* для основных свободных зарядов — электронов *n*-полупроводника и дырок *p*-полупроводника. Основных свободных зарядов,

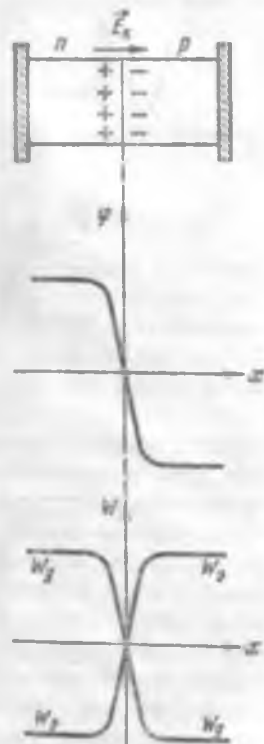


Рис. 239

* acceptor (лат.) — принимающий.
 ** positivus (лат.) — положительный.

имеющих достаточную энергию, сравнительно мало, и их число зависит от высоты потенциального барьера: чем он выше, тем меньше таких зарядов.

Неосновные свободные заряды (электроны из p - и дырки из n -полупроводника) «скатываются» с потенциального барьера, число таких зарядов, переходящих через контакт, не зависит от высоты потенциального барьера и определяется их концентрацией (которая сравнительно невелика, заряды — неосновные!).

Ток основных зарядов через контакт направим справа налево, его плотность j_0 . Ток неосновных зарядов направлен слева направо и его плотность j_n .

Плотность результирующего тока $j = j_0 - j_n = 0$ в случае стационарности.

Допустим, что это не так. Если $j_0 > j_n$, то через контакт пойдет результирующий ток справа налево, что приведет к повышению потенциала

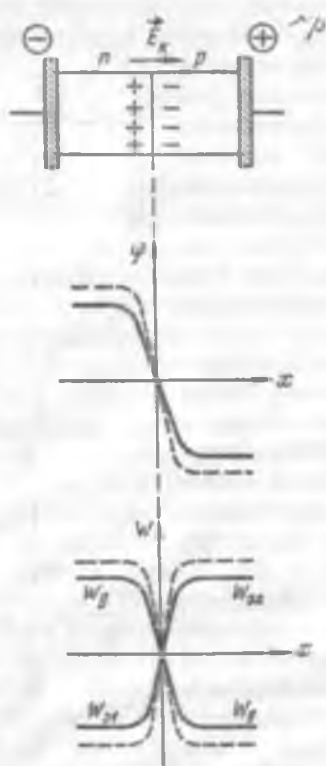


Рис. 240

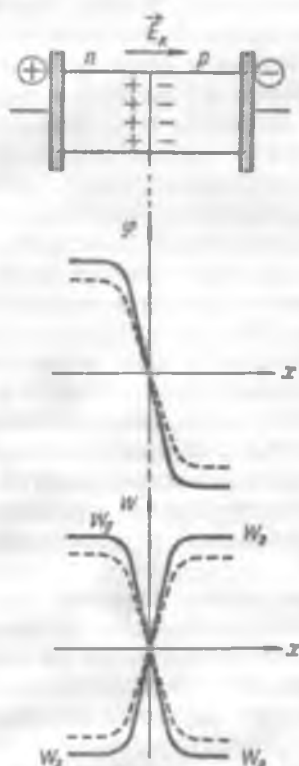


Рис. 241

в n -области и понижению — в p -области, т. е. к увеличению потенциального барьера и соответствующему уменьшению плотности тока j_0 . Если $j_0 < j_n$, то результирующий ток пойдет в обратном направлении, что приведет к уменьшению потенциального барьера и увеличению j_0 . Таким образом, условие $j = 0$ поддерживается автоматически.

Включим внешнее электрическое поле, направленное, как показано на рис. 240. Потенциал n -полупроводника станет ниже, p -полупроводника — выше, соответственно изменятся энергии свободных зарядов и уменьшится высота потенциального барьера. Плотность тока (через контакт) неосновных свободных зарядов от этого не изменится, плотность же тока основных зарядов резко увеличится, так как теперь через контакт могут пройти такие основные заряды, энергия которых больше нового потенциального барьера. Результирующая плотность тока будет отличной от нуля, через контакт пойдет ток, направленный справа налево. Плотность результирующего тока достаточно велика и зависит от приложенного напряжения. Этот ток называют *прямым*, а его направление — *проходным*.

Приложим теперь к n - p -переходу противоположную разность потенциалов (рис. 241). Потенциалы теперь увеличатся по абсолютной величине, соответственно увеличится и высота потенциального барьера. Это не сказывается на плотности тока неосновных зарядов, плотность же тока основных свободных зарядов резко уменьшится, так как гораздо меньше таких зарядов имеет энергию, достаточную для преодоления нового потенциального барьера. Через контакт пойдет результирующий ток слева направо. Если к контакту приложено напряжение больше 1 В, то ток основных свободных зарядов практически полностью прекращается и $j = -j_n$. Через контакт идет малый ток неосновных свободных зарядов, плотность которого определяется их концентрацией. Этот ток называют *обратным*, а его направление — *запорным*.

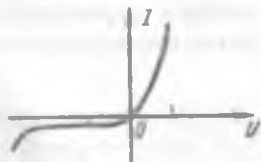


Рис. 242

Мы пришли к представлению о вентильном (одностороннем) действии n - p -перехода. Его вольт-амперная характеристика изображена на рис. 242. Положительные направления осей соответствуют прямому току. Отношение прямого и обратного токов может быть порядка нескольких сотен. Контакт двух полупроводников разного типа представляет собой *полупроводниковый выпрямитель*.

Мы получили n - p -переход в результате механического контакта полупроводников разного типа. На самом деле при механическом контакте n - p -переход не создается, и никаких выпрямляющих свойств не обнаруживается. Технологически n - p -переход получают, добавляя в чистый полупроводник в процессе кристаллизации с разных сторон донорную и акцепторную примеси. Форма n - p -перехода может быть не такой, какой мы ее представляли, но сам n - p -переход будет существовать. Такой полупроводниковый или кристаллический выпрямитель зачастую обладает лучшими характеристиками, чем вакуумный. Во всяком случае он может так же успешно применяться, как двухэлектродная электронная лампа. Комбинируя два n - p -перехода, можно получить кристаллический усилитель колебаний — транзистор. Несколько n - p -переходов позволяют получить кристаллический аналог многоэлектродной лампы. К достоинствам полупроводниковых приборов относятся надежность, малогабаритность, экономичность и т. п. Несколько лет назад казалось, что век ламповой электроники миновал, и наступила эра полупроводниковых приборов, которые продолжают совершенствоваться. Но в связи с микроминиатюризацией

ламп выяснилось, что ламповую электронику рано сдавать в архив. В соревновании полупроводниковой и ламповой электроники развиваются и совершенствуются оба типа устройств.

ГЛАВА 3

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

§ 3.1. Закон Био – Савара – Лапласа

Мы уже говорили о единой природе полей, создаваемых электрическими зарядами. Поле неподвижных зарядов – электростатическое. Поле движущихся зарядов – электродинамическое. Но единство таких полей стало понятно далеко не сразу. Исторически первыми были открыты магнитные взаимодействия *постоянных магнитов**. Свыше двух тысяч лет назад было открыто свойство подвешенной магнитной стрелки ориентироваться приблизительно по земному меридиану. Конец стрелки, обращенный к северу, был назван *северным магнитным полюсом*, к югу – *южным магнитным полюсом*; было открыто взаимодействие полюсов – разноименные притягиваются, одноименные отталкиваются. Подвешенная

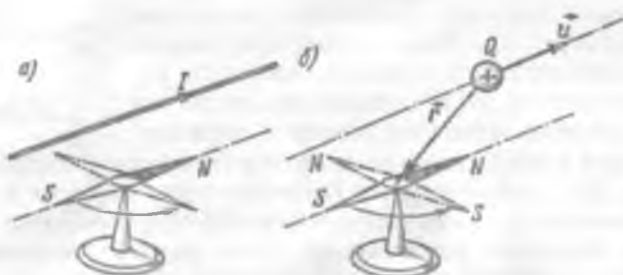


Рис. 243

свободно магнитная стрелка позволяет обнаружить магнитное поле и ориентировочно сравнивать поля по направлению и силе воздействия. Поэтому используем такую стрелку в качестве измерительного прибора – *магнитометра*.

В 1820 г. датский физик Эрстед экспериментально с помощью магнитометра обнаружил, что проходящий по проводу ток создает магнитное поле (рис. 243, а). Можно предположить, что оно создается движущимися электрическими зарядами. Простейшее неизменное во времени магнитное поле создается равномерно и прямолинейно движущимися зарядами. С экспериментального изучения такого поля мы и начнем изучение магнетизма.

Пусть точечный заряд Q движется со скоростью u над магнитометром. Стрелка отклоняется, как показано пунктиром (рис. 243, б; для опре-

* *magnētis* (греч.) – магнитный, от Магнэзии, древнего города в Малой Азии.

деленности $Q > 0$), и стремится повернуться осью $S - N$ вдоль векторного произведения $u \times r$ [см. (5-М)]. Из опыта следует, что воздействие на стрелку пропорционально заряду Q , его скорости u и зависит от свойств среды и от расстояния между линией движения заряда и магнитометром.

На основании опыта введем характеристику магнитного поля — вектор магнитной индукции в данной точке;

$$B = k \frac{\mu Q u \times r}{r^3}, \quad (57)$$

где r — радиус-вектор указанной точки, проведенный к ней от заряда; μ — магнитная проницаемость среды — число, которое показывает, во сколько раз магнитная индукция в данной среде больше, чем в вакууме.

Если магнитное поле создано протяженным зарядом, то его можно разбить на достаточно малые точечные части, от каждой из них вычислить по формуле (57) элемент вектора магнитной индукции в заданной точке. Затем все элементы вектора магнитной индукции в данной точке по принципу суперпозиции полей складываются геометрически:

$$B = \sum_{i=1}^n \Delta B_i.$$

Точнее, вектор магнитной индукции равен пределу этого выражения, когда каждый элемент стремится к нулю, а их число — к бесконечности:

$$B = \lim_{\substack{\Delta B_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta B_i \stackrel{5-М}{=} \int_B d B.$$

Как мы уже упоминали, опыты Эрстеда обнаружили, что при прохождении тока по проводнику стрелка магнитометра, расположенная над или под ним, отклоняется и стремится занять положение, перпендикулярное проводнику. Направление отклонения меняется при изменении направления тока или расположения стрелки относительно проводника. Аналогичные опыты показывают, что магнитное поле создается направленным движением любых зарядов — ионов электролита и газа, электронов и дырок полупроводника, связанных зарядов (при движении заряженного диэлектрика).

Вектор магнитной индукции, характеризующий поле, созданное током, должен быть пропорционален силе тока, длине провода, магнитной проницаемости среды (характеризующей ее магнитные свойства), зависеть от формы тока и расстояния до рассматриваемой точки. Зависимость от расстояния для кругового и прямого токов на опыте исследовали Био и Савар. Они пришли к выводу, что вектор магнитной индукции в данной точке обратно пропорционален ее расстоянию до тока. Зависимость от формы можно учесть, если, по предложению Лапласа, рассматривать не вектор магнитной индукции, а его элемент (рис. 244), характеризующий поле элемента тока. Элементом тока Idl называется вектор, равный по модулю произведению силы тока на элемент длины проводника и направленный вдоль тока (в сторону движения положи-

тельных зарядов или в сторону вектора напряженности электрического поля: $I dl \uparrow \uparrow E$). Вспомним, что $I = dQ/dt$, а $u = dl/dt$. Тогда

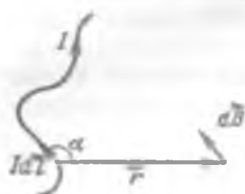


Рис. 244

$$dB \stackrel{57}{=} k \frac{\mu I dl \frac{dl}{dr} \times r}{r^3} = k \frac{\mu I dl \times r}{r^3} \quad (58)$$

— закон Био — Савара — Лапласа для вектора магнитной индукции. (При сложении элементов dB зависимость вектора магнитной индукции от расстояния будет соответствовать экспериментальной.) Коэффициент пропорциональности, зависящий, как всегда, от выбора единиц, в СИ принят равным $k = \mu_0/4\pi$. Коэффициенту пропорциональности μ_0 не нужно приписывать какой-то физический смысл. Следовательно,

$$dB \stackrel{58}{=} \frac{\mu_0 \mu I dl \times r}{4\pi r^3} \quad (59)$$

Модуль элемента вектора магнитной индукции

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad (60)$$

Для расчета вектора магнитной индукции выражения (59), (60) надо интегрировать, а интеграл не всегда берется. Существуют среды (ферромагнетики, см. § 3.7), в которых μ является функцией поля и притом не выражается аналитически. Вот почему целесообразно ввести новую функцию, характеризующую поле и не зависящую от свойств среды, — напряженность H магнитного поля в данной точке. Введем эту величину в виде

$$dH = \frac{dB}{\mu_0 \mu} \quad (61)$$

откуда

$$dB = \mu_0 \mu dH \quad (62)$$

Получим закон Био — Савара — Лапласа для напряженности магнитного поля

$$dH \stackrel{59}{=} \frac{I dl \times r}{4\pi r^3} \quad (63)$$

или

$$dH = \frac{I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad (64)$$

По принципу суперпозиции полей вектор напряженности в данной точке равен геометрической сумме элементов напряженности в этой точке:

$$H = \sum_{i=1}^n \Delta H_i$$

Точнее,

$$\mathbf{H} = \lim_{\Delta H_i \rightarrow 0, \sum_{i=1}^n \Delta H_i \rightarrow H} \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{H}_i \equiv \int_H d\mathbf{H}. \quad (65)$$

Пусть, например, магнитное поле создано током, текущим по бесконечно длинному прямолинейному достаточно тонкому проводнику. Как легко видеть по формуле (63), направление напряженности такого поля определяется правилом правого винта (рис. 245): если поступательно

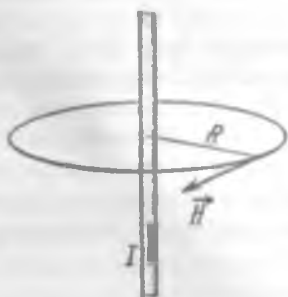


Рис. 245

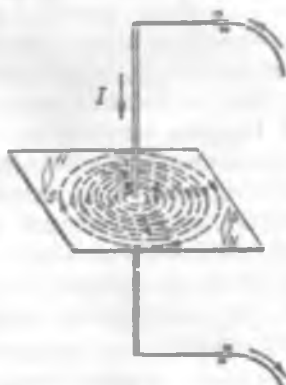


Рис. 246

двигать винт по направлению тока, то вращение его головки будет совпадать во всех точках с направлением вектора $\mathbf{H}$. Модуль вектора напряженности

$$H \equiv \frac{I}{2\pi R}, \quad (66)$$

где R — кратчайшее расстояние от провода с током I до рассматриваемой точки.

Зная вектор напряженности, можно вычислить и вектор магнитной индукции в данной точке:

$$\mathbf{B} \equiv \mu_0 \mathbf{H}. \quad (67)$$

Расчет показывает, что индукция и напряженность действительно обратно пропорциональны расстоянию. Опыт с железными опилками и со стрелками (рис. 246) подтверждает вывод о форме и направлении магнитного поля прямого тока.

Подчеркнем, что физический смысл имеет именно вектор магнитной индукции. Вектор $\mathbf{H}$ — расчетная величина.

Легко вычислить напряженность магнитного поля в центре кругового тока: все элементы $d\mathbf{H}$ в этой точке перпендикулярны плоскости тока и направлены в сторону поступательного движения правого винта, головка которого поворачивается по току.

Модуль напряженности

$$H = \int_H dH \stackrel{64}{=} \oint \frac{I dl}{4\pi r^2} \stackrel{44, 61}{=} \frac{I}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{I \cdot 2\pi r}{4\pi r^2} = \frac{I}{2r}. \quad (68)$$

Единицу вектора магнитной индукции введем позже. Единицей напряженности является ампер на метр [А/м].

Один ампер на метр — напряженность на расстоянии 1 м от бесконечного прямолинейного тонкого проводника с током 2π А. По формуле (66) должно быть ясно, что напряженность равна единице, когда справа стоит единица [можно сказать: $I = 1\text{ А}$, $R = 1/(2\pi)\text{ м}$ и т. п.; можно воспользоваться совсем другой формулой, например для кругового тока (68)].

Для наглядности изображения магнитного поля вводят линии вектора магнитной индукции — линии, в каждой точке которых касательная совпадает с вектором магнитной индукции. Так же как в электростатике, через единичную площадку, перпендикулярную вектору магнитной индукции, проводят столько линий, сколько единиц содержит этот вектор в данной точке. Именно такие линии изображены на рис. 246 и последующих. Линиям приписывают направление, совпадающее с направлением вектора магнитной индукции (это направление указывает северный магнитный полюс стрелки, расположенной в данной точке). В опыте, изображенном на рис. 246, доказываемая непрерывность линий вектора магнитной индукции. Они нигде не начинаются и не заканчиваются, т. е. замкнуты. Напомним, что аналогичные линии в электростатике начинались и заканчивались на зарядах.

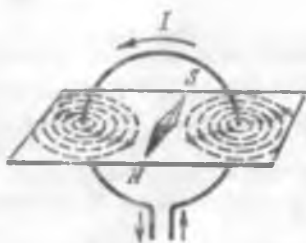


Рис. 247



Рис. 248

Так называемых «магнитных зарядов» на опыте не обнаружено. Этому факту соответствует непрерывность линий вектора магнитной индукции. Из опытов Эрстеда следует, что источниками магнитного поля являются движущиеся электрические заряды.

На рис. 247 изображено поле кольцевого тока, которое тоже можно исследовать с помощью железных опилок и стрелок. Сравнивая это поле с магнитным полем полосового магнита (рис. 248), видим, что оно напоминает поле очень тонкого постоянного магнита. В плоскость витка магнитные линии входят с одной стороны (южный магнитный полюс) и выходят с другой (северный магнитный полюс). Определить направление линий можно, пользуясь правилом винта, как мы это делали при расчете H в центре витка. Но интереснее мнемоническое* правило, основанное на начертании букв S и N (рис. 249; со стороны читателя такой полюс, буква которого изогнута «по току»; проверьте самостоятельно).

* mnēmōnikon (греч.) — приемы для запоминания.

Аналогично исследуется поле *соленоида* — катушки с током (рис. 250). Оно похоже на поле полосового постоянного магнита, его полюса можно определить по тому же мнемоническому правилу: со стороны читателя южный магнитный полюс, если ток течет по часовой стрелке, и наоборот (см. рис. 249). В каждой точке поле соленоида представляет собой супер-



Рис. 249



Рис. 250

позицию полей отдельных витков. Несколько линий таких полей изображено на рис. 250. Легко видеть, что внутри и вне соленоида в каждой точке индукция результирующего поля соседних витков близка к арифметической сумме, а между витками — к арифметической разности индукций от отдельных витков.

Напряженность поля внутри прямого соленоида выведена в приложении 8.

§ 3.2. Сила Лоренца

Как всегда, полевые силы проявляются взаимодействием соответствующих полей. Электростатические силы — результат взаимодействия электростатических полей двух зарядов. «Магнитные» — результат взаимодействия магнитных полей. Но мы уже выяснили, что магнитное поле создается движущимися зарядами, значит, подействовать оно может только на движущиеся заряды.

На опыте установлено, что сила, действующая на движущийся в магнитном поле заряд, перпендикулярна магнитной индукции и скорости движения, пропорциональна модулям векторов скорости и индукции и синусу угла между этими векторами. Эта *сила Лоренца* (рис. 251, $Q > 0$) записывается в виде

$$\mathbf{F}_\text{л} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (69)$$

(заметим, что если заряд отрицателен, то сила Лоренца направлена навстречу векторному произведению $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$). Мы уже встречались с действием этой силы — именно она отклоняет катодные лучи в магнитном поле.

Сила Лоренца перпендикулярна скорости, следовательно, работы она не совершает и может изменить только направление движения заряда.

Измерив силу Лоренца, можно определить вектор магнитной индукции. Для этого подберем экспериментально направление движения заряда так, чтобы сила Лоренца была наибольшей. Тогда

$$F_L = QvB$$

(наибольшая сила Лоренца при заданных Q и v в точке с определенным значением B будет при $\sin \alpha = 1$ или $\alpha = 90^\circ$; для положительного заряда Q эти векторы изображены на рис. 252). Зная направления F_L и v (и знак Q), легко определить направление вектора B (по правилу правого винта). Модуль этого вектора в данном случае

$$B = F_L / (Qv).$$

Таким образом, вектор магнитной индукции в данной точке поля равен отношению наибольшей силы Лоренца, действующей на заданный

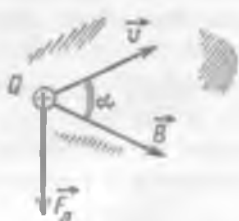


Рис. 251

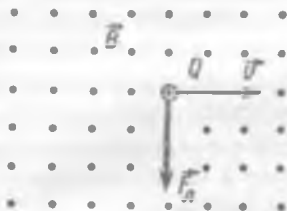


Рис. 252

заряд, пролетающий через эту точку с определенной скоростью, к произведению заряда на его скорость. Направлен вектор индукции так, что при повороте правого винта от вектора Qv к вектору B по наименьшему углу поступательное движение винта совпадает с направлением силы Лоренца. (Разберитесь внимательно по рис. 242 случаи $Q > 0$ и $Q < 0$). Не надо думать на основании этого определения, что вектор магнитной индукции каким-либо образом зависит от заряда, движущегося в поле, или его скорости. Наоборот, сила Лоренца зависит от вектора магнитной индукции, заряда и его скорости. Вектор магнитной индукции однозначно зависит от токов (зарядов), создающих поле, как было выяснено в законе Био — Савара — Лапласа.

Но проявляется магнитное поле действием сил на движущиеся в нем заряды. Поэтому говорят, что вектор магнитной индукции — силовая характеристика поля.

Мы привели один из возможных экспериментальных способов определения этого вектора в данной точке магнитного поля.

§ 3.3. Сила Ампера

В магнитном поле на каждый заряд, движущийся в проводнике с током, действует сила Лоренца. Рассмотрим элемент такого тока Idl (рис. 253). Свободные заряды, участвующие в токе I , движутся со средней скоростью и направленного движения.

Силу тока можно связать со свободным зарядом q и объемом данного элемента:

$$I \stackrel{32}{=} \frac{dQ}{dt} = \frac{qnS dl}{dt} \stackrel{14}{=} qnSu,$$

где n — концентрация свободных зарядов. Весь заряд dQ движется в магнитном поле вдоль проводника со средней скоростью u направленного движения. Значит, на него действует сила Лоренца $dQ\mathbf{u} \times \mathbf{B} = qnS d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, которая является суммой сил Лоренца, действующих на каждый свободный заряд.

Вспомним, что вектор $d\mathbf{l}$ по определению, направлен вдоль тока, т. е. совпадает с направлением движения положительных зарядов. Значит, $q d\mathbf{l} \uparrow \uparrow \mathbf{u}$ для положительных ($d\mathbf{l} \uparrow \uparrow \mathbf{u}$, $q > 0$) и отрицательных ($d\mathbf{l} \uparrow \downarrow \mathbf{u}$, $q < 0$, $q d\mathbf{l} \uparrow \uparrow \mathbf{u}$) свободных зарядов. Поэтому в последнем уравнении ничего не изменится, если вместо u и $q d\mathbf{l}$ написать u и $q d\mathbf{l}$:

$$dQ \mathbf{u} \times \mathbf{B} = nSuq d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

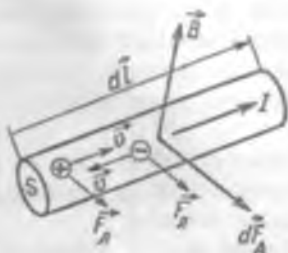


Рис. 253

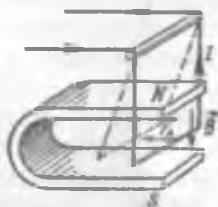


Рис. 254

Сила, действующая на весь проводник с током в магнитном поле, — это равнодействующая всех таких сил Лоренца. Она называется *силой Ампера*:

$$\mathbf{F}_A = \int d\mathbf{F}_A = \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (70)$$

В частности, на прямолинейный ток в однородном магнитном поле действует сила Ампера, которую легко вычислить. В формуле (70) все векторы $\mathbf{B}$ одинаковы и их можно вынести за знак интеграла, все синусы и сила тока — тоже; сумма всех отрезков проводника представляет собой его длину. Модуль силы Ампера в этом случае

$$F_A^{70} = IB \sin \alpha.$$

Вектор $\mathbf{F}_A$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$, и его направление определяется по правилу правого винта. В еще более частном случае прямолинейный проводник перпендикулярен вектору магнитной индукции однородного поля (рис. 254). Сила Ампера тогда равна

$$F_A^{70} = IB; \quad (71)$$

ее направление легко определяется по правилу левой руки: если

вектор $\mathbf{B}$ направлен в ладонь, а четыре пальца расположены по току, то отогнутый большой палец покажет направление силы Ампера.

Теперь можно дать еще одно экспериментальное определение вектора магнитной индукции. Возьмем какой-то отрезок l проводника с током I , поместим в данную точку магнитного поля (поле должно быть достаточно однородно для этого или отрезок проводника достаточно мал) и будем измерять силу Ампера, изменяя ориентацию проводника. Найдем такое положение отрезка, при котором сила Ампера наибольшая. Тогда

$$B \stackrel{71}{=} F_A / (Il).$$

Магнитная индукция равна отношению силы Ампера, действующей в однородном поле на перпендикулярный полю отрезок проводника с током, к длине этого отрезка и силе тока в нем. Направление вектора магнитной индукции легко определить по правилу левой руки (зная расположение и направление тока и направление силы Ампера).

Излишне добавлять, что это один из возможных методов определения вектора магнитной индукции. Сам вектор зависит, конечно, от токов (зарядов), создающих поле, а не от формы, расположения и силы тока, помещенного в это поле.

Единицу магнитной индукции можно было ввести из закона Био — Савара — Лапласа или из выражения для силы Лоренца. Но удобнее ее ввести на основании определения силы Ампера.

Единицей вектора магнитной индукции в СИ является тесла (Тл).

Один тесла — магнитная индукция однородного поля, в котором на каждый метр длины прямого тока силой 1 А, расположенного перпендикулярно вектору $\mathbf{B}$, действует сила 1 Н:

$$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н} / (1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}).$$

§ 3.4. Взаимодействие параллельных токов

Как мы уже говорили, магнитное поле действует на помещенный в него проводник силой Ампера. В частности, такая сила будет действовать на проводник с током со стороны магнитного поля другого тока, параллельного первому (рис. 255). Найдем, например, силу F_1 , действующую на первый проводник со стороны магнитного поля второго.

Направление этой силы легко определить по правилу левой руки. Обозначим $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{H}_2$ — векторы индукции и напряженности магнитного поля второго тока на расстоянии R от него (в точках, где расположен первый ток). Искомая сила

$$F_1 \stackrel{71}{=} I_1 l B_2 \stackrel{67}{=} I_1 l \mu_0 \mu H_2 \stackrel{68}{=} I_1 l \mu_0 \mu I_2 / (2\pi R). \quad (72)$$

Аналогично

$$F_2 \stackrel{71}{=} I_2 l B_1 \stackrel{67}{=} I_2 l \mu_0 \mu H_1 \stackrel{65}{=} I_2 l \mu_0 \mu I_1 / (2\pi R).$$

В соответствии с третьим законом Ньютона силы F_1 и F_2 равны по модулю и противоположны по направлению. В случае антипарал-

лельных токов изменятся направления сил взаимодействия, проводники будут отталкиваться друг от друга.

Итак, при взаимодействии параллельных токов возникают силы Ампера, равные по модулю

$$F = \mu_0 \mu I_1 I_2 l / (2\pi R). \quad (73)$$

Эти силы пропорциональны произведению сил токов, магнитной проницаемости среды, длине проводников и обратно пропорциональны расстоянию между ними. Основная единица силы тока в СИ введена на основании формулы (73):

Один ампер [А] — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Величина $\mu_0 \stackrel{\text{2-11}}{=} 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А² выведена в приложении 1.

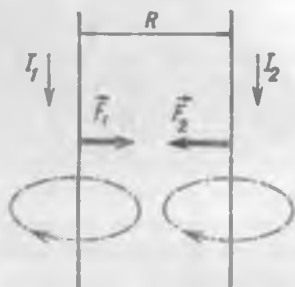


Рис. 255

Мы ввели определение силы Лоренца на основании опыта, а силу Ампера вывели как сумму сил Лоренца, действующих на все заряды, участвующие в токе. Исторически все было наоборот. Ампер открыл и измерил силы взаимодействия токов, а выражение силы Лоренца было получено теоретически.

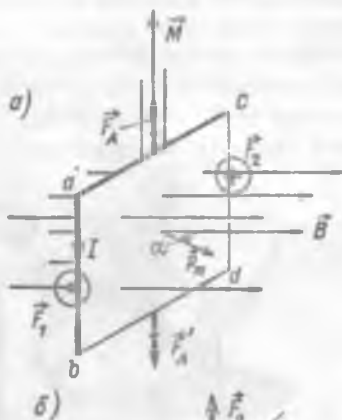


Рис. 256

§ 3.5. Рамка с током в магнитном поле

Одно из интереснейших применений находит действие магнитного поля на проводник с током в виде прямоугольной рамки (рис. 256, а и вид сверху б). По определению (70), на стороны *bd* и *ac* рамки действуют равные и противоположно направленные силы Ампера, которые уравновесят друг друга, если рамка достаточно жесткая.

На стороны *ab* и *cd* рамки действуют антипараллельные равные

силы F_1 и F_2 . Если нет достаточных других воздействий, эта пара сил будет поворачивать рамку. Момент пары сил направлен вверх и равен

$$M = \frac{1}{2} |ca| F_1 \sin \alpha + \frac{1}{2} |ac| F_2 \sin \alpha,$$

где α — угол между направлениями $\vec{ac}$ и F_2 (или $\vec{ca}$ и F_1). Этот угол равен изображенному на рисунке углу α между нормалью к плоскости рамки и вектором B (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Имеем

$$M = |ac| \cdot I \cdot |cd| \cdot B \sin \alpha = ISB \sin \alpha,$$

где $S = |ac| \cdot |cd|$ — площадь рамки.

Охарактеризуем произвольный плоский* ток, текущий по проводнику (или даже вне его, рис. 257), магнитным моментом

$$p_m = ISn_0, \quad (74)$$

где I — сила тока; S — площадь, охватываемая контуром тока; n_0 — единичный вектор нормали к площади, охватываемой контуром, связанный с током правилом правого винта (направлен в сторону поступательного движения винта, головка которого поворачивается «по току»).

Магнитным моментом называется вектор, по модулю равный произведению силы тока на площадь, охватываемую его контуром, и направленный нормально плоскости контура по правилу правого винта.



Рис. 257

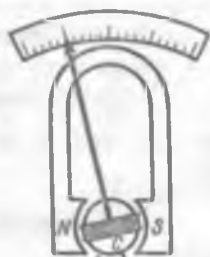


Рис. 258



Рис. 259

Подставим в формулу момента пары сил, действующих на рамку, выражение ее магнитного момента $p_m = IS$:

$$M = p_m B \sin \alpha.$$

По определению векторного произведения это модуль вектора $p_m \times B$, направленного вертикально вверх, т. е. вдоль момента пары сил. Таким образом, на рамку в магнитном поле действует момент пары сил

$$M = p_m \times B. \quad (75)$$

Аналогичный момент сил будет действовать в магнитном поле на любой ток.

* Плоским назовем ток, текущий по контуру, расположенному в одной плоскости.

В положениях равновесия рамки магнитный момент направлен параллельно вектору магнитной индукции. Легко установить, что когда магнитный момент направлен вдоль линий поля ($\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$), наблюдается устойчивое равновесие; когда магнитный момент направлен навстречу вектору магнитной индукции ($\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$) — равновесие неустойчиво. Чем больше угол между векторами магнитного момента и индукции (до 90°), тем больше момент пары сил Ампера, возвращающий рамку к положению устойчивого равновесия.

Момент пары сил, действующий на рамку, пропорционален магнитному моменту, который в свою очередь пропорционален силе тока, текущего по рамке. Этим пользуются при устройстве измерительных приборов магнитоэлектрической системы (рис. 258). По катушке C (состоящей из ряда рамок) пропускают измеряемый ток. Пружинки служат подводными проводами и держат катушку в равновесии, когда плоскости рамок параллельны магнитному полю. Измеряемый ток создает магнитный момент, которому пропорционален угол поворота подвижной системы прибора, связанной со стрелкой. Такие приборы достаточно чувствительны и точны.

Представим себе, что при прохождении рамки через положение устойчивого равновесия (рис. 259) направление тока изменилось на обратное. Тогда изменится и направление магнитного момента.

Пройдя по инерции положение неустойчивого (теперь) равновесия, рамка сделает еще пол-оборота. Если периодически изменять направление тока, то рамка придет во вращательное движение. Устройство, с по-

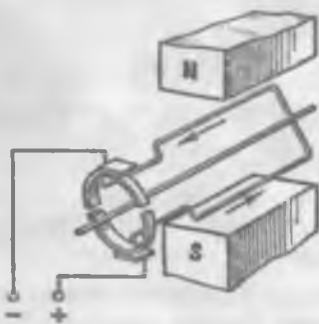


Рис. 260

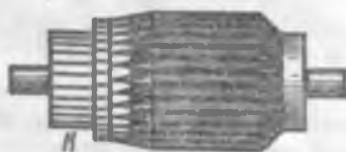
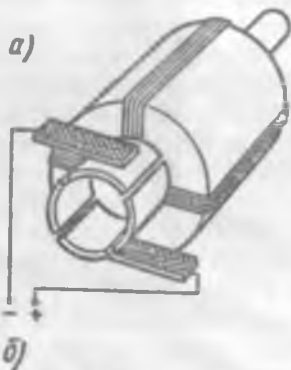


Рис. 261

мощью которого можно подавать ток в рамку и дважды за оборот автоматически изменять его направление, называется полупериодным коллектором* (рис. 260, проследите ток в каждой части рамки через полпериода).

* collector (лат.) — собирающий.

Наибольший момент сил действует на рамку, плоскость которой параллельна вектору $\mathbf{B}$. Следовательно, если расположить две рамки перпендикулярно друг другу и вывести их концы на четвертькольцевой коллектор (рис. 261, а), то крутящий момент резко возрастет и увеличится плавность хода подвижной части устройства.

Мы описали принцип действия электродвигателя постоянного тока. В промышленных двигателях магнитное поле создается обмоткой электромагнита; в железном роторе делают пазы, в которые укладывают много витков одной секции (вместо рамки, рис. 261, б); различные секции уложены под углом друг к другу, и их концы выведены на противоположные пластины коллектора K , к которому прижимаются щетки, соединенные с источником тока. По каждой секции ток идет только тогда, когда ее пластины касаются щеток, т. е. когда плоскость этой секции параллельна вектору магнитной индукции. Естественно, что при этом секции поочередно создают самый большой крутящий момент.

§ 3.6. Магнитный поток

В § 3.1 мы ввели понятие линий вектора магнитной индукции и условились проводить не все эти линии, а совершенно определенное их число. При этом условии густота линий на рисунке наглядно показывает, где поле сильнее, а где слабее.

Магнитное поле может быть однородным и неоднородным. В неоднородном поле проводят через элементарную площадку dS_0 , перпендикулярную вектору $\mathbf{B}$, число линий индукции, равное $d\Phi = B dS_0$. Тогда через единицу такой поверхности пройдет $d\Phi/dS_0 = B$ линий, т. е. столько, сколько единиц содержит вектор индукции в данной точке.

Изобразим произвольно ориентированную элементарную площадку dS , проекция которой на плоскость, перпендикулярную линиям вектора магнитной индукции, равна dS_0 ($\cos \alpha = dS_0/dS$, рис. 262). Тогда через эту площадку dS пройдет столько же линий вектора магнитной индукции $d\Phi$, сколько их проведено через площадку dS_0 (из рисунка ясно, что это те же самые линии).

Конечную поверхность S всегда можно разбить на достаточно малые части (число которых соответственно велико), так что через каждую такую часть пройдет

$$d\Phi = B dS_0 = B dS \cos \alpha \quad (76)$$

линий вектора магнитной индукции.

Магнитным потоком сквозь поверхность S назовем число линий вектора магнитной индукции, пронизывающих данную поверхность (если они проведены по сформулированному выше правилу):

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S B dS \cos \alpha \stackrel{76}{=} \int_S (B dS). \quad (77)$$

Понятие линий вектора вспомогательное, а их число — величина условная. Поэтому будем считать выражение (77) определением магнитного потока через данную поверхность S . Мы воспользовались данным в приложении 6 определением вектора dS . Обратите внимание на сходство понятий магнитного потока и потока линий вектора $\mathbf{E}$.

В однородном поле поток сквозь плоскую поверхность S

$$\Phi = B \cos \alpha \int_S dS = BS \cos \alpha. \quad (78)$$

В СИ магнитный поток выражают в веберах (Вб).

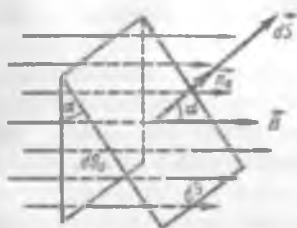


Рис. 262



Рис. 263

Один вебер — магнитный поток, который в однородном поле индукции 1 Тл пронизывает перпендикулярную полю поверхность площадью 1 м²:

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2.$$

Полным магнитным потоком Φ_0 назовем магнитный поток сквозь замкнутую поверхность (рис. 263).

В приложении 6 установлено, что полный поток линий вектора E — алгебраическая величина, вектор dS совпадает по направлению с внешней нормалью, и тогда входящие линии считаются со знаком минус, выходящие — со знаком плюс. То же самое нужно сказать о полном потоке линий магнитной индукции. На примерах прямого и кругового токов мы убедились, что они не имеют ни начала, ни конца, т. е. непрерывны. Поля, созданные другими токами, имеют другую конфигурацию, но их линии магнитной индукции тоже замкнуты вокруг своих токов, т. е. непрерывны.

Всякая непрерывная линия пересекает замкнутую поверхность четное число раз, входя в поверхность и выходя из нее. Следовательно, полный поток через такую поверхность равен нулю. Это условие непрерывности линий магнитной индукции:

$$\Phi_0 = \oint_S (B dS) = 0.$$

Как уже отмечалось, в магнитном поле нет магнитных зарядов, аналогичных электрическим, на которых начинались бы или заканчивались линии магнитной индукции. Единственными источниками магнитного поля являются токи*.

* Магнитное поле может создаваться и переменным электрическим полем — током смещения, см. разд. IV, § 2.8. Пока нам встречались только поля, созданные движущимися зарядами.

§ 3.7. Магнетизм

До сих пор мы говорили о магнитных полях, созданных токами. Магнитное поле, например, внутри соленоида пропорционально силе тока, текущего по виткам, и числу этих витков [см. (32-П)]. Произведение силы тока на число витков называется *числом ампер-витков*. Вектор магнитной индукции однородного поля внутри соленоида пропорционален числу его ампер-витков.

Но, оказывается, можно увеличить магнитную индукцию, не изменяя числа ампер-витков, для этого достаточно вставить внутрь соленоида сердечник из подходящего материала. Ампер объяснил это явление, выдвинув гипотезу молекулярных токов. По гипотезе Ампера, внутри молекул есть молекулярные круговые токи, имеющие магнитные моменты $\vec{p}_m$. Следовательно, молекулы представляют собой элементарные магниты.

Все вещества (кроме вакуума) называются *магнетиками*. Кусок магнетика, не побывавший в магнитном поле, не намагничен, так как магнитные моменты его молекул ориентированы беспорядочно (рис. 264). Попадая в магнитное поле индукции $\vec{B}_0$, круговые молекулярные токи испытывают воздействие внешнего поля аналогично рамкам с током и стремятся ориентироваться вдоль линий поля своими магнитными моментами (см. § 3.5). Наблюдается преимущественная ориентация магнитных моментов вдоль поля, создается наведенное магнитное поле, характеризующееся вектором $\vec{B}_1$.

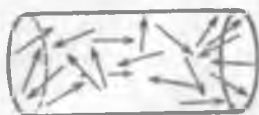


Рис. 264

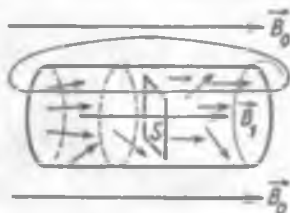


Рис. 265

Представим себе это наведенное поле как созданное одними молекулярными токами, текущими в вакууме (конечно, молекулярные токи не могут течь в вакууме, но они создают именно такое поле). По принципу суперпозиции полей вектор индукции результирующего поля

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{H}_1 = \mu_0 (\vec{H} + \vec{H}_1).$$

Но $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Теперь мы можем понять роль формально введенного множителя μ . В одном и том же поле два разных вещества намагничиваются по-разному в зависимости от напряженности наведенного поля, т. е. от степени ориентированности магнитных моментов молекул. У вещества, которое сильнее намагничивается, больше $\vec{H}_1$ и соответственно магнитная проницаемость μ .

Векторы $\vec{H}$ и $\vec{B}_0$ характеризуют поле тока (наводящее поле); векторы $\vec{H}_1$ и $\vec{B}_1$ — поле магнетика (наведенное); вектор $\vec{B}$ — результирующее (суммарное) поле.

В наши дни гипотеза Ампера может считаться доказанной — мы знаем, что электроны движутся по орбитам вокруг ядер (орбитальный момент импульса) и имеют собственный (спиновый) момент импульса. Оба движения связаны с появлением соответствующих магнитных моментов, и векторная сумма всех таких моментов внутри молекулы представляет собой магнитный момент μ_m молекулы.

Но электроны есть во всяких молекулах, почему же на практике магнитные свойства обнаруживает лишь узкий круг веществ? По своим магнитным свойствам все вещества делятся на пара-, диа- и ферромагнитные.

*Парамагнитными** называют вещества, магнитный момент молекул которых отличен от нуля. Вне магнитного поля они не намагничены (рис. 264). Попадая в магнитное поле, они намагничиваются, так как магнитные моменты молекул получают преимущественную ориентацию вдоль линий поля (рис. 265). Наведенное поле характеризуется вектором магнитной индукции $B_1 \uparrow \uparrow B_0$. Результирующий вектор индукции $B > B_0$. Магнитный поток сквозь некоторую площадку S в вакууме

$$\Phi_0 = B_0 S = \mu_0 H S;$$

в веществе магнитный поток сквозь ту же площадку

$$\Phi = B S = \mu_0 \mu H S;$$

отношение этих потоков

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\mu_0 \mu H S}{\mu_0 H S} = \mu.$$

Это отношение можно использовать в качестве определения *магнитной проницаемости* μ — числа, которое показывает, во сколько раз магнитный поток через некоторую площадку в веществе больше, чем в вакууме. Разумеется, это не противоречит определению, данному в § 3.1.

Поток в парамагнетике больше, чем в вакууме, и $\mu > 1$. Заметим, что магнитная проницаемость чуть-чуть больше единицы ($\mu \approx 1$) и постоянна. Графическая зависимость $B(\mu H)$ изображена на рис. 266 прямой 1, лежащей выше биссектрисы координатного угла. Тангенс угла наклона этой прямой по формуле (67) равен μ . К парамагнетикам относятся многие диэлектрики; некоторые газы, в частности воздух; алюминий, вольфрам, платина.

*Диамагнитными*** называются вещества, магнитный момент молекул которых (в отсутствие магнитного поля) равен нулю.

Это возможно, если магнитные моменты отдельных электронов молекулы компенсируют друг друга, т. е. их геометрическая сумма равна нулю (рис. 267, представьте себе эту картину объемной). Естественно, вне магнитного поля каждая молекула — не магнит, и весь образец

* пара (греч.) — возле, вдоль.

** dia (греч.) — врозь, поперек.

диамагнетика не намагничен. Внешнее магнитное поле не действует на всю молекулу, но действует на отдельные электроны молекулы, магнитные моменты которых отличны от нуля.

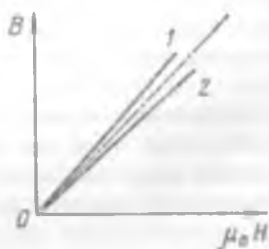


Рис. 266



Рис. 267

Представим себе какой-то электрон молекулы в произвольный момент времени. Его скорость составляет некоторый угол с направлением вектора $\mathbf{B}$ (рис. 268). Разложим ее на составляющие параллельную $v_{\parallel}$ и перпендикулярную $v_{\perp}$ линии вектора $\mathbf{B}$. Благодаря нормальной составляющей скорости на электрон в магнитном поле начнет действовать дополнительная сила Лоренца

$$\mathbf{F}_L = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Она вызовет дополнительное (кроме других движений, в которых участвовал электрон и вне магнитного поля) движение по окружности, направленное по часовой стрелке, если смотреть вдоль линий магнитной индукции. Но такое дополнительное движение представляет собой дополнительный круговой ток, перпендикулярный плоскости рис. 268 и направленный против часовой стрелки (если смотреть вдоль линий магнитной индукции — заряд электрона $Q = -e < 0$). Дополнительный ток имеет наведенный магнитный момент, направленный (по правилу правого винта) навстречу вектору $\mathbf{B}$. Читателю необходимо убедиться, что при любом положении электрона и любом направлении его скорости (кроме $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$) возникает дополнительное движение и дополнительный магнитный момент, направленный навстречу вектору $\mathbf{B}$.

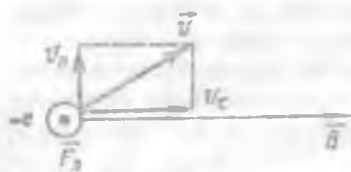


Рис. 268

Значит, надо к магнитному моменту каждого электрона на рис. 267 прибавить этот наведенный момент, направленный навстречу индукции поля. Сумма прежних моментов осталась равной нулю, а векторная сумма наведенных магнитных моментов отлична от нуля и направлена навстречу индукции наводящего поля. Следовательно, молекулы диамагнетика в магнитном поле становятся магнитами, у них наводится

магнитный момент, противоположный линиям наводящего поля (рис. 269). Наведенное магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $B_1 \uparrow B_0$ (рис. 270). Вектор магнитной индукции результирующего поля

$$B = B_0 + B_1 < B_0.$$

Магнитный поток сквозь площадку S выражается так же, как и в случае парамагнетика, но теперь

$$\Phi < \Phi_0 \text{ и } \Phi/\Phi_0 = \mu < 1.$$

Правда, магнитная проницаемость немного меньше единицы ($\mu \approx 1$) и постоянна. Зависимость $B(\mu_0 H)$ для диамагнетиков изображена на рис. 266 прямой 2, лежащей ниже пунктирной биссектрисы координатного угла.

К диамагнетикам относятся инертные газы, водород, вода, стекло, серебро, золото, медь, висмут. Если диамагнетик вынести из магнитного

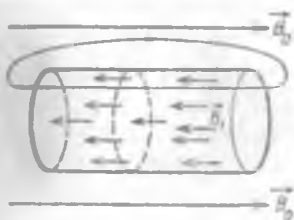


Рис. 269



Рис. 270

поля, то исчезнет дополнительная сила Лоренца, прекратится вызванное ею движение электронов, не будет дополнительных магнитных моментов, и магнитные моменты молекул опять станут равны нулю.

Диамагнитный эффект существует и у парамагнетиков, но там он мало заметен, так как изменяет уже существующий магнитный момент молекулы. У диамагнитных молекул он является причиной появления магнитного момента, поэтому сказывается сильнее.

Итак, пара- и диамагнетики в магнитном поле намагничиваются по-разному. Поэтому их поведение в магнитном поле должно быть различным.

Вырежем легкие стрелки из парамагнетика (алюминий) и диамагнетика (медь) и подвесим их в магнитном поле. Парамагнетик намагничивается (рис. 271), разноименные полюса притягиваются и стрелка колеблется

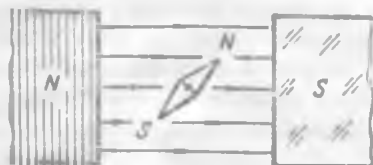


Рис. 271

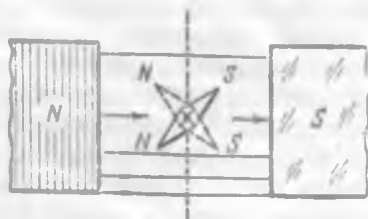


Рис. 272

около положения равновесия, параллельного линиям магнитной индукции. Диамагнетик намагничивается, как показано на рис. 272, одноименные полюса отталкиваются, стрелка по инерции проходит положение, обозначенное пунктиром, и перемагничивается. Снова одноименные полюса отталкиваются и т. д. Стрелка колеблется около положения равновесия, перпендикулярного линиям магнитной индукции. Это различие действительно наблюдается на опыте в достаточно сильных полях. С ним связано название пара- и диамагнитных веществ.

В обыденной жизни мы сталкиваемся с магнитными свойствами только ферромагнитных веществ. В результате магнитного взаимодействия соседних частиц в ферромагнетиках вне магнитного поля образуются микроскопические области, содержащие еще статистически много атомов, — домены, в которых магнитные моменты атомов ориентированы одинаково (рис. 273, а). Но в целом кристалл не намагничен, так как магнитные моменты разных доменов ориентированы хаотично (рис. 273, б).

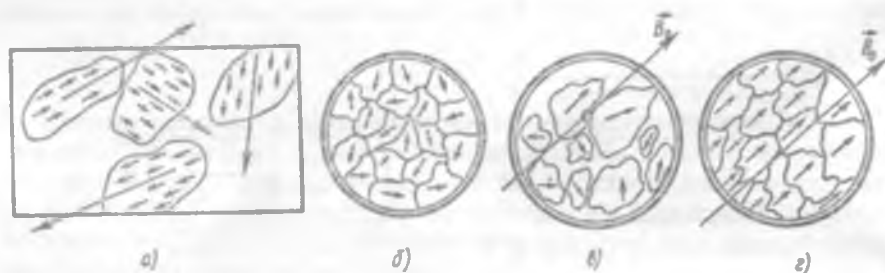


Рис. 273

При внесении такого кристалла в магнитное поле за счет перемагничивания пограничных атомов увеличиваются домены, магнитные моменты которых ориентированы приблизительно по линиям поля, и уменьшаются домены, магнитные моменты которых ориентированы почти против линий поля. В достаточно сильных полях поворачиваются магнитные моменты доменов. В результате этих процессов образец оказывается намагниченным вдоль внешнего поля (рис. 273, в): $B_1 \uparrow \uparrow B$; $\Phi > \Phi_0$ (качественно, как у парамагнетиков). Но все эти процессы гораздо сильнее, ибо ориентируются суммарные магнитные моменты доменов:

$$\Phi \gg \Phi_0 \text{ и } \mu = \frac{\Phi}{\Phi_0} \gg 1;$$

именно поэтому намагничивание ферромагнетиков заметно даже в слабых полях. Кроме того, μ , оказывается, зависит нелинейно от напряженности магнитного поля и от «предыстории» образца (от того, в каких магнитных полях образец побывал ранее). К ферромагнитным веществам относятся железо, никель, кобальт, некоторые сплавы.

Но ферромагнетизм — не свойство данных элементов. Атомы паробразного железа диамагнитны или слабо парамагнитны. Сплавы ферромагнитных веществ могут быть практически немагнитными. Таков сплав 75% Fe и 25% Ni. Наоборот, сплавы практически немагнит-

ных веществ могут быть ферромагнитны. Например, сплав Гойслера: 60% Cu, 25% Mn, 15% Al. Ферромагнетизм — свойство кристаллической решетки, т. е. свойство большого коллектива атомов в твердом состоянии вещества. У каждого ферромагнетика есть определенная температура — точка Кюри, при которой разрушаются домены, и ферромагнетик становится парамагнетиком. Больше того, можно подозревать, что известные нам парамагнетики — это ферромагнетики при температурах выше их точки Кюри. Подтверждением такой точки зрения является обнаружение ферромагнетизма при температурах ниже 10 К у гадолиния, считавшегося ранее парамагнетиком.

Для выяснения характера зависимости $B(\mu_0 H)$ возьмем образец ферромагнетика, не побывавший ранее в каких бы то ни было магнитных полях (практически это можно осуществить, размагнитив образец сильным нагреванием), и поместим его внутрь соленоида, по которому можно пропускать определенный ток. Напряженность магнитного поля соленоида равна $H \equiv I n / l$, магнитную индукцию можно измерить, например, по силе Ампера. Сначала вектор индукции растет в зависимости от $\mu_0 H$ нелинейно, затем наступает насыщение, когда все магнитные моменты доменов ориентированы вдоль линий поля (рис. 273, 2); при дальнейшем увеличении $\mu_0 H$ вектор магнитной индукции возрастает линейно.

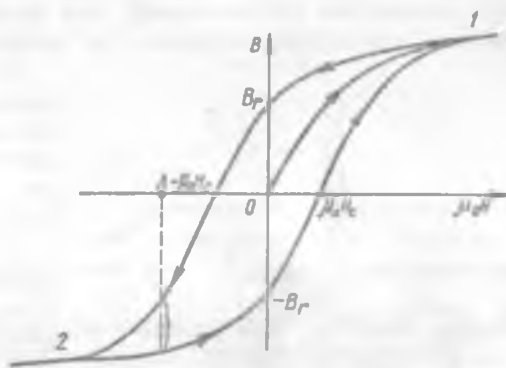


Рис. 274

Экспериментальная кривая с насыщением в точке 1 изображена на рис. 274. При уменьшении напряженности магнитного поля вектор B уменьшается линейно по той же прямой до точки 1, затем по кривой $1 - B_r$ с запаздыванием (относительно кривой $0 - 1$). Это объясняется тем, что в процессе намагничивания внешнее поле заставляло магнитные моменты доменов поворачиваться, а теперь они разориентируются благодаря ослаблению внешнего воздействия не сразу и хаотично. Когда тока нет, наблюдается остаточное намагничивание B_r , что позволяет изготовлять постоянные магниты. Образец можно размагнитить, включив поле соленоида в обратном направлении (изменив направление тока). При определенной напряженности ($-H_c$ — коэрцитивная* сила) вектор магнитной индукции равен нулю. Дальнейшее увеличение модуля напряженности заставит этот вектор нелинейно изменяться по кривой до насыщения 2, затем линейно. При уменьшении напряженности кривая пройдет через точку 2, остаточное намагничивание $-B_r$, коэрцитивную силу H_c до точки 1 и т. д. Мы описали полный цикл гистерезиса**.

* coercitio (лат.) — удерживание.

** hysteresis (греч.) — запаздывание.

При заданной напряженности магнитного поля (точка A , рис. 274) вектор магнитной индукции может иметь любое значение из отмеченных фигурной скобкой в зависимости от того, в каких магнитных полях образец был ранее. Поэтому μ для ферромагнетиков определяется неоднозначно и приблизительно по независимо измеренным значениям B и H (хотя в этом случае ее ценность сомнительна).

Естественные, природные магниты большей частью представляют собой куски магнитного железняка. Из сталей с большим остаточным намагничиванием изготавливают искусственные постоянные магниты разной формы. У магнита различают *полюса* (см. рис. 248) — места, где сильнее всего проявляются магнитные свойства, или части магнита, где наибольшее число линий вектора индукции входит или выходит из магнита в воздух. *Нейтральная линия* — линия магнита, где не обнаруживается его притяжение (отталкивание), или часть магнита, где ни одна линия вектора магнитной индукции не входит и не выходит из магнита.

В магнитном поле (например, в присутствии постоянного магнита) ненамагниченный ферромагнитный образец намагничивается. Это явление получило название *магнитной индукции*. На нем основано устройство электромагнита (рис. 275). Его сердечник сделан из железа с малым остаточным намагничиванием; при выключении тока через обмотку он практически размагничивается.

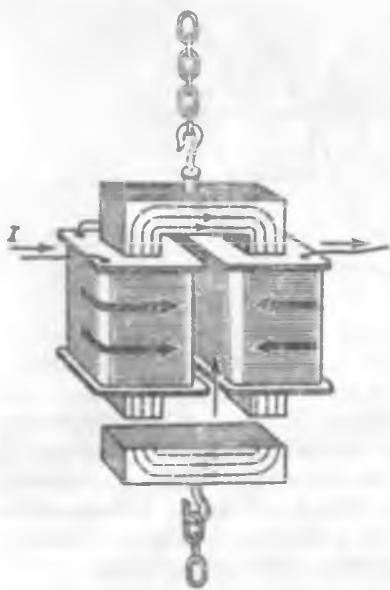


Рис. 275

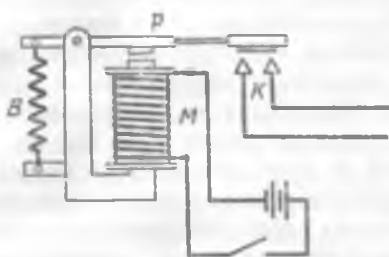


Рис. 276

На этом же явлении основано устройство электромагнитного реле (рис. 276), которое срабатывает при включении или выключении рабочего тока (ток через катушку M намагничивает сердечник, пластина P притягивается к сердечнику и замыкает контакты K какой-то другой цепи. После выключения тока через катушку пружина B размыкает контакты K).

На магнитном взаимодействии сердечника и катушки основано устройство электроизмерительных приборов электромагнитной системы (рис. 277). Такие приборы пригодны для измерений и на постоянном, и на переменном токе, надежны, дешевы. Правда, их точность невелика.

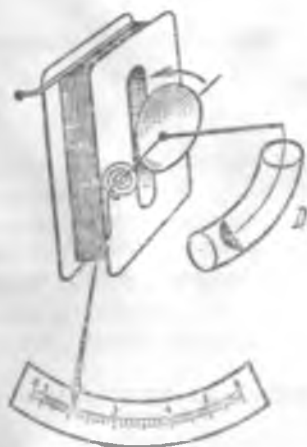


Рис. 277

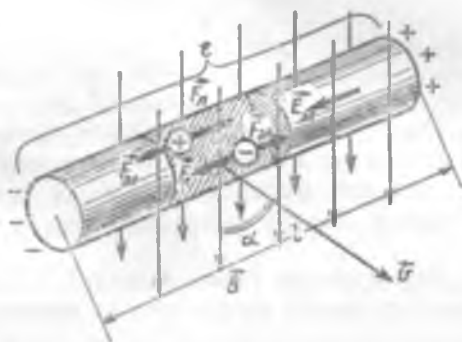


Рис. 278

§ 3.8. Электромагнитная индукция

Опыты Эрстеда доказали, что вокруг проводника с током возникает магнитное поле. Фарадей ставит обратную задачу: нельзя ли с помощью магнитного поля получить электрический ток? В 1831 г. он экспериментально решил эту задачу.

Пусть прямой проводник, равномерно движется в однородном магнитном поле. Положительные и отрицательные заряды проводника вместе с ним движутся со скоростью v относительно магнитного поля. На них действует сила Лоренца $F_L = qv \times B$, направленная вдоль проводника (рис. 278).

Свободные заряды под действием сил Лоренца сдвигаются и накапливаются на концах проводника. Тем самым наводится разность потенциалов на концах проводника и электрическое поле внутри него. Это поле действует на заряды электрическими силами $F_{эл} = QE_{эл}$. Пока электрические силы малы, заряды продолжают перераспределяться, напряженность поля увеличивается. При определенной разности потенциалов на концах проводника электрические силы уравниваются силами Лоренца, и перераспределение зарядов прекращается. Силы Лоренца,двигающие заряды вопреки действию электрических сил, имеют не электростатическую природу и являются сторонними.

Наведение э. д. с. на концах проводника, движущегося в магнитном поле, было названо *электромагнитной индукцией*. Сама э. д. с. называется *э. д. с. индукции*. Условие постоянства э. д. с. индукции при равномерном движении проводника в однородном магнитном поле

$$F_L + F_{эл} = 0.$$

Проводник, движущийся в магнитном поле, представляет собой источник тока. Его э. д. с. равна

$$\mathcal{E} = A_{эл}/Q.$$

Работа сторонних сил Лоренца на элементе длины и всем проводнике равна

$$dA_{\text{cr}} \stackrel{\text{§14}}{=} F_A dl \stackrel{\text{§10}}{=} Q ([\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l}),$$

$$A_{\text{cr}} = \int_l dA \stackrel{\text{§14}}{=} \int_l QvB \sin \alpha dl = QvBl \sin \alpha.$$

Итак, на концах линейного проводника, равномерно движущегося в однородном магнитном поле, перпендикулярном проводнику, наводится э. д. с. индукции

$$\mathcal{E} = vBl \sin \alpha.$$

Эту формулу вывел Фарадей. Обычно ее пишут со знаком минус, смысл которого станет ясен из правила Ленца:

$$\mathcal{E} = -vBl \sin \alpha. \quad (79)$$

Если проводник замкнуть системой других проводников (образовать электрическую цепь), то по ней пойдет индукционный ток, направление которого от плюса к минусу во внешней цепи можно установить по рис. 278. При таком соединении несколько снижается разность потенциалов на проводнике (по сравнению с $\mathcal{E}$), уменьшается электрическая

сила, и свободные заряды внутри источника переносятся от одного полюса к другому вопреки действию электрического поля избытком сил Лоренца над электростатическими силами.

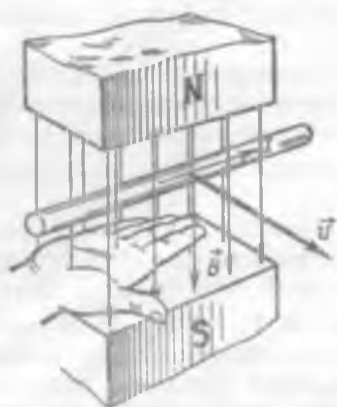


Рис. 279

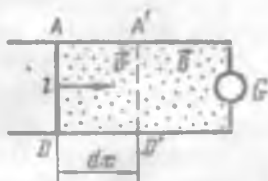


Рис. 280

Направление индукционного тока легко определить по правилу правой руки (рис. 279): если расположить правую руку так, чтобы линии вектора магнитной индукции входили в ладонь, а отогнутый большой палец совпадал с перпендикулярной линией поля проекцией скорости движения, то остальные четыре пальца укажут направление индукционного тока в источнике (проводнике, движущемся в магнитном поле).

Рассмотрим замкнутый контур, плоскость которого перпендикулярна линиям однородного магнитного поля; одна часть контура сделана подвижной и равномерно движется со скоростью v (рис. 280). Э. д. с. индукции, возникающая в таком контуре, появляется в подвижной части

контура I и равна

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{dB}{dt} \int dS = - \frac{dB}{dt} B \int dS = - \frac{dB}{dt} \Phi$$

Здесь dS — изменение площади, ограниченной контуром ADG , за достаточно малый промежуток времени dt ; $d\Phi$ — изменение магнитного потока сквозь произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур, за то же время (через всевозможные поверхности, опирающиеся на один контур, проходит один и тот же магнитный поток). Мы получили результат, который справедлив не только в данном случае, но может быть обобщен на широкий круг электромагнитных явлений:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (80)$$

Закон электромагнитной индукции (в формулировке Максвелла): *э. д. с. индукции, возникающая в контуре, прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока через любую поверхность, опирающуюся на данный контур.*

Э. д. с. индукции возникает при всяком изменении магнитного потока через любой, даже неподвижный контур. Если контур замкнут, по нему пойдет индукционный ток. Но всякий ток, в том числе и индукционный, порождает магнитное поле, которое будет взаимодействовать с наводящим.

Соберем цепь постоянного тока с источником, э. д. с. которого $\mathcal{E}_1$, и подвижной частью I . Поместим эту цепь в магнитное поле (рис. 281). Когда по цепи пойдет ток, то на все части контура будут действовать силы Ампера. Эти силы начнут двигать подвижную часть контура и совершать определенную работу, разумеется, за счет источника тока.

Работа источника за какое-то время равна работе силы Ампера и потерям на нагревание проводов:

$$\mathcal{E}_1 I dt = I B dx + I^2 R dt.$$

Разделим это уравнение почленно на $I dt$:

$$\mathcal{E}_1 = B(dx/dt) + IR,$$

где $I dx = dS$ — площадь, «перечеркнутая» подвижным проводом за время dt ; $B dS$ — изменение за это время магнитного потока сквозь поверхность, опирающуюся на контур. Найдём силу тока:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - d\Phi/dt}{R}$$

Но, по закону Ома для всей цепи, сила тока равна сумме электродвижущих сил, деленной на полное сопротивление. Кроме э. д. с. источника, в нашей схеме действует э. д. с. индукции, следовательно,

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}}{R}.$$

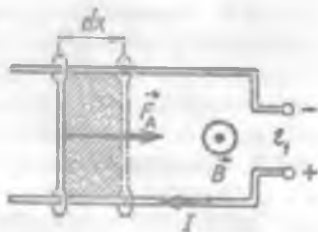


Рис. 281

Сравнивая два последних выражения, приходим к выводу:

$$\mathcal{E} = -d\Phi/dt,$$

что соответствует формуле (80).

Итак, э. д. с. индукции возникает при любом изменении магнитного потока сквозь поверхность, опирающуюся на данный контур. Но если при движении проводника в магнитном поле появляются сторонние силы Лоренца, то при изменении магнитного потока через поверхность, опирающуюся на неподвижный (в данной системе отсчета) контур, такие силы появиться не могут. В этом случае заряды проводника начинают двигаться под действием *электродинамического поля*, появляющегося в результате изменения магнитного потока. Линии электродинамического поля замкнуты, это поле — вихревое, подобно магнитному (см. разд. IV, § 2.8). Работа сил такого поля по замкнутому контуру, отнесенная к единичному заряду, отлична от нуля и равна э. д. с. индукции.

Собственно, явление электромагнитной индукции состоит в возникновении электродинамического поля при изменении магнитного поля. Оно привело Максвелла к идее о равноправности электрического и магнитного полей и к уравнениям Максвелла, описывающим электромагнитное поле во всех его проявлениях. С этой точки зрения опыт Фарадея — это частное проявление сил Лоренца, случайно приводящее к общему закону электромагнитной индукции (80). Разумеется, это не умаляет заслуги Фарадея, впервые получившего электрический ток с помощью магнитного поля.

§ 3.9. Правило Ленца

Пусть замкнутый проводник движется в магнитном поле со скоростью v (на рис. 282 показана его движущаяся часть). В нем возникают э. д. с. индукции и индукционный ток, направление которого можно было бы определить по правилу правой руки. Но возможны всего два направления индукционного тока — к читателю или от него.

Исследуем оба случая. Если индукционный ток направлен к читателю (стрелка 1), то он выталкивается силой Ампера F_1 по направлению скорости, что легко установить по правилу левой руки. Теперь не надо проводник заставлять двигаться, он будет сам двигаться в указанном направлении (даже ускоренно) и вырабатывать электроэнергию. Это было бы слишком хорошо, чтобы быть правдой. Был бы нарушен основной закон природы — закон сохранения энергии. Но где была допущена ошибка в наших рассуждениях? Очевидно, когда мы произвольно допустили, что индукционный ток направлен к читателю.

Пусть ток направлен от читателя (по стрелке 2). Тогда на проводник будет действовать сила Ампера F_2 , что легко установить по правилу левой руки. Чтобы проводник двигался равномерно, т. е. чтобы поддерживалась постоянная э. д. с. индукции, и, следовательно, индукционный ток был постоянным, надо совершать внешней силой работу против

силы Ампера F_2 , в процессе этой работы энергия (какой-либо формы) внешних тел будет превращаться в электроэнергию. Таким образом, доказано, что индукционный ток течет в направлении стрелки 2. Конечно, этот же результат можно было в рассматриваемом случае получить с помощью формального правила правой руки, но мы получили нечто большее. Мы установили, что индукционный ток, возникающий в проводнике, имеет такое направление, что своим магнитным действием препятствует наводящему его движению. В этом суть правила Ленца.

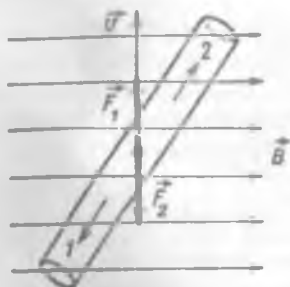


Рис. 282

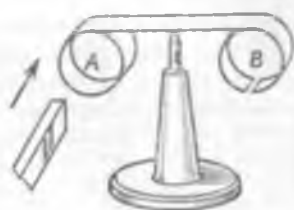


Рис. 283

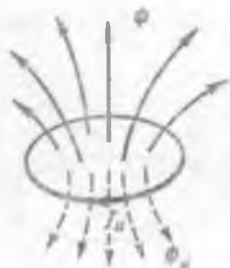


Рис. 284

Такое действие тока можно продемонстрировать на приборе Ленца (рис. 283). Лента из алюминия с двумя кольцами — сплошным А и разрезанным В — уравновешена на острие. Магнит вставляем в разрезанное кольцо (не касаясь стенок), затем вынимаем — прибор не движется. Пробуем вставить магнит внутрь сплошного кольца — оно отодвигается от магнита. Надеваем его на магнит и пробуем вынуть магнит из кольца. Теперь оно не снимается. С аналогичным свойством препятствовать всякому воздействию мы встречались еще в механике (там оно было названо инертностью). Похоже, что это свойство всякой материи, и правило Ленца говорит об инертности электромагнитного поля.

Пусть сквозь поверхность, опирающуюся на какой-то замкнутый проволочный контур (рис. 284), проходит изменяющийся магнитный поток (например, возрастающий). Тогда в контуре возникает э. д. с. индукции и индукционный ток такого направления, что его магнитное поле будет препятствовать изменению наводящего магнитного потока. Мешать возрастанию потока Φ может только магнитный поток $\Phi_{\text{и}}$, направленный навстречу. А такой поток может быть создан только током $I_{\text{и}}$, направленным по часовой стрелке. Мы установили, пользуясь правилом Ленца, направление индукционного тока в проводнике при указанном изменении наводящего магнитного поля.

Можно сказать, что индукционный ток в контуре связан с наводящим его изменением магнитного потока правилом левого винта (винт с левой резьбой, противоположной резьбе правого винта): когда левый винт поступательно движется по направлению изменения наводящего магнитного потока, вращение его головки совпадает с направлением индукционного тока. Если показанный на рис. 284 магнитный

поток будет уменьшаться, то индукционный ток пойдет в обратном направлении, так как его магнитный поток должен препятствовать уменьшению наводящего магнитного потока.

Правило Ленца можно сформулировать так: *магнитное поле индукционного тока в каждый момент времени направлено навстречу изменению наводящего магнитного поля*. Припишем э. д. с. направление, связанное с индукционным током правилом правого винта (рис. 285). Тогда можно сказать, что э. д. с. индукции и изменение наводящего магнитного потока $d\Phi$ в каждый момент времени имеют разные



Рис. 285



Рис. 286



Рис. 287

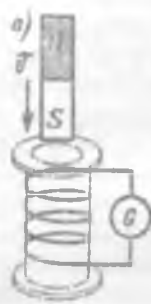


Рис. 288

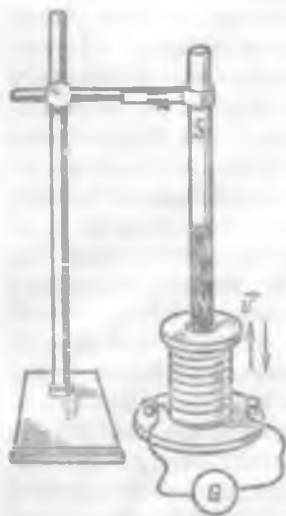


Рис. 289

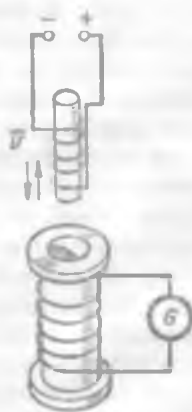


Рис. 290

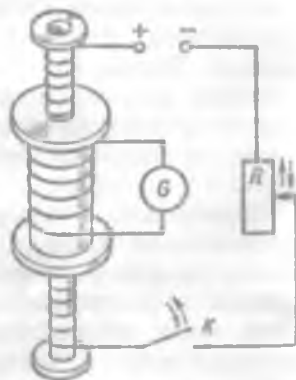


Рис. 291

знаки. Таким образом, знаки минус во всех формулировках закона электромагнитной индукции связаны с правилом Ленца, т. е. имеют очень важный физический смысл.

Правило Ленца представляет собой закон сохранения энергии в электромагнитных процессах. Теперь вы легко можете самостоятельно объяснить ряд опытов по электромагнитной индукции (см. рис. 286 – 291). Определите направления индукционного тока в этих опытах.

§ 3.10. Самоиндукция

Если по какому-либо проволочному контуру течет постоянный ток I (рис. 292), то поверхность, опирающаяся на этот контур, пронизывается постоянным собственным магнитным потоком Φ . Этот магнитный поток пропорционален силе тока (всякое магнитное поле, создаваемое током, характеризуется вектором $\mathbf{B}$, пропорциональным силе тока) и зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств среды: $\Phi \sim I$, иначе

$$\Phi = LI, \quad (81)$$

где L — индуктивность контура — множитель, учитывающий форму и размеры контура и магнитные свойства среды.

Индуктивность контура равна отношению собственного магнитного потока, созданного некоторым током, протекающим по контуру, к силе этого тока:

$$L^{\text{св}} = \Phi / I.$$

Если собственный магнитный поток сквозь поверхность, опирающуюся на контур тока, начинает изменяться, то в этом контуре наводится по закону электромагнитной индукции э. д. с. индукции, называемая в данном случае э. д. с. *самоиндукции*. Это явление называется *самоиндукцией*. Мы не будем рассматривать контуры, в которых изменяется индуктивность. Если же индуктивность постоянна, собственный магнитный поток может измениться только при изменении силы тока в контуре. Э. д. с. самоиндукции в этом случае равна



Рис. 292

$$\mathcal{E}_s^{\text{св}} = - \frac{d\Phi^{\text{св}}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (82)$$

Особенностью самоиндукции является то, что в контуре при возникновении э. д. с. самоиндукции всегда возникает и ток самоиндукции (контур замкнут). Знак минус, в соответствии с правилом Ленца, означает, что наведенный ток препятствует наводящему изменению силы тока (не току, а его изменению). Индуктивность прямого соленоида выведена в приложении 9. Из формулы (33-П) видно, что индуктивность действительно зависит от формы и размеров контура и от магнитных свойств среды.

В СИ индуктивность выражается в генри (Гн).

Один генри — индуктивность такого контура, в котором наводится э. д. с. самоиндукции 1 В при изменении силы тока в нем со скоростью 1 А/с:

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ В} \cdot \text{с} / 1 \text{ А}.$$

Токи самоиндукции при замыкании и размыкании цепи — экстратоки* замыкания и размыкания — можно исследовать экспериментально. Через

* extra (лат.) — приставка, означающая сверх.

некоторое время после включения реостатом R (рис. 293) добьемся одинакового накала обеих ламп, затем выключим схему. Теперь после замыкания ключа на глаз заметно, что первая лампа начинает гореть позже и слабее, чем вторая. Через некоторое время после включения они снова будут светиться одинаково. Мы наблюдали экстраток замыкания. Действительно, в первое время после включения ток быстро увеличивается. Но в первой ветви индуктивность по правилу Ленца препятствует этому возрастанию экстратокотом замыкания.

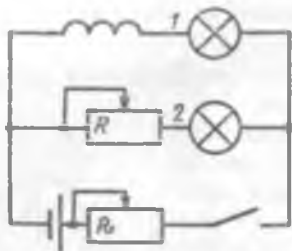


Рис. 293

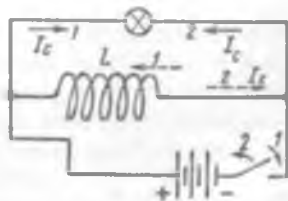


Рис. 294

Соберем схему, изображенную на рис. 294. После ее включения лампочка вспыхивает за счет экстратокотам замыкания 1, часть которого складывается в лампочке с токотм от источника.

При размыкании ключа лампа вспыхивает гораздо ярче, по ней в это время идет экстратокот размыкания 2. Если вместо лампочки включить измерительный прибор, то можно увидеть, что при размыкании по нему идет ток обратного направления. Экстратокоты размыкания наблюдаются в виде дуги при размыкании проводов, находящихся под напряжением (искры между проводом и трамвайной дугой и т. п.).

Чем больше индуктивность, тем больше э. д. с. самоиндукции и ток размыкания. Вот почему нельзя выключать подачу электроэнергии в крупном цехе общим рубильником, если работает много станков. Надо сначала выключить станки, иначе экстратокот размыкания может убит выключателя.

В линиях электропередачи, нагруженных большой индуктивностью, для экстренного выключения предусмотрены специальные автоматические выключатели, размещенные в отдельных зданиях без людей и снабженные искрогасительными устройствами.

Экстратокоты размыкания текут после отключения источника, энергия этих токов черпается из магнитного поля, которое при этом исчезает. Следовательно, у магнитного поля есть энергия, которая, очевидно, при замыкании была отобрана у источника тока. Мерой этой энергии является, например, работа экстратокотам размыкания:

$$W_m = \int_{t_{\text{выкл}}}^{t_{\text{вкл}}} I \mathcal{E}_c dt = - \int_1^0 IL \frac{dI}{dt} dt \stackrel{34-M}{=} L \int_0^I I dI \stackrel{37-M}{=} \frac{LI^2}{2}. \quad (83)$$

Это энергия магнитного поля тока силой I , протекающего по проводнику с постоянной (не зависящей, в частности, от силы тока) индуктивностью L . Таким образом, эта формула справедлива только

для токов в парамагнитных или диамагнитных средах. В приложении 9 выведена формула (34-П) плотности энергии магнитного поля в таких средах. Энергия магнитного поля в ферромагнетиках рассчитывается иначе.

§ 3.11. Токи Фуко

Другое проявление электромагнитной индукции — токи Фуко. Эти вихревые токи наблюдаются в толще металла, помещенного в изменяющееся магнитное поле.

Маятник (рис. 295) может длительное время без заметного затухания колебаться между полюсами невключенного электромагнита. Стоит включить электромагнит, немедленно наблюдается электромагнитное торможение. Оно объясняется тем, что возникающие в толще маятника вихревые токи своим магнитным полем по правилу Ленца препятствуют относительному движению маятника. Заменяем сплошную пластинку маятника такой же по форме пластинкой с разрезами. Торможение резко уменьшается. Очевидно, теперь возникают только местные вихревые токи

между разрезами, их магнитный момент, а следовательно, и тормозящая сила гораздо меньше. Поэтому везде, где токи Фуко вредны, набирают сердечники (трансформаторов или электрических машин) из пластин, изолированных друг от друга.

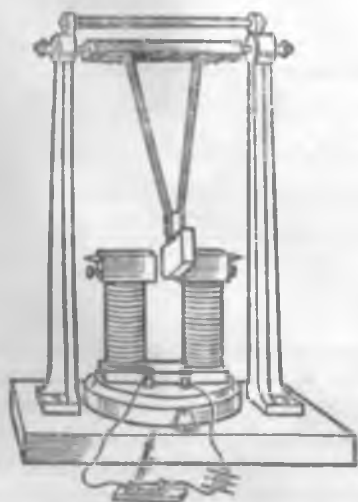


Рис. 295



Рис. 296

Любопытное применение находят токи Фуко при устройстве демпферов*. Известно, что чем точнее измерение, тем дольше оно продолжается, в частности, потому, что долго колеблется подвижная часть прибора. Ее можно «успокоить», увеличив силы трения (см. демпфер D на рис. 277), но одновременно снижается точность измерений, ибо, грубо говоря, стрелка «не дойдет» до измеряемого значения. Но можно устроить металлический демпфер, связанный с подвижной частью прибора и движущийся в сильно неоднородном магнитном поле (рис. 296). При большой

* dampfer (нем.) — глушитель.

скорости в нем возникают большие токи Фуко, которые сильно тормозят подвижную систему прибора. Но по мере приближения к измеряемой величине медленнее движется подвижная система, меньшие становятся вихревые токи и уменьшается торможение. Около измеряемого значения скорость падает до нуля, и торможение исчезает, не уменьшая точности прибора, но резко сократив время колебаний его подвижной части.

Токи Фуко применяются в индукционных печах для получения качественных сплавов и для экономичного и быстрого приготовления пищи.

§ 3.12. Принцип работы генератора

На законе электромагнитной индукции основано устройство индукционных генераторов электрического тока. Рамка из проводника внешними силами равномерно вращается в магнитном поле (рис. 297). В проводах *ab* и *cd* наводится э. д. с. индукции, которую легко подсчитать:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 2vl_1 B \sin \alpha \stackrel{2\pi l}{=} 2\omega (l_2/2) l_1 B \sin \alpha \stackrel{2\pi l}{=} \mathcal{E}_m \sin \omega t, \quad (84)$$

где ω — угловая скорость вращения рамки, а $\mathcal{E}_m = l_1 l_2 B \omega$ — амплитуда э. д. с., возникающей в рамке.

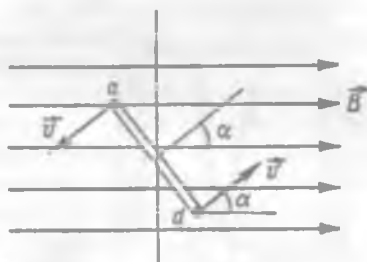
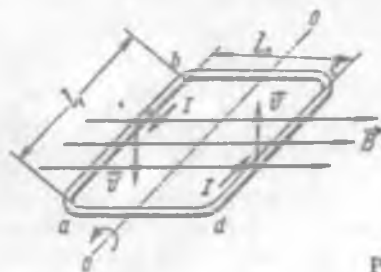


Рис. 297

Таким образом, в рамке, равномерно вращающейся в магнитном поле, наводится синусоидальная э. д. с. индукции, и, следовательно, синусоидальный переменный ток. Чтобы его использовать, рамку разрезают, выводят ее концы на два изолированных кольца; к кольцам прижимают щетки, к которым присоединяют контакты внешней цепи (рис. 298). Мы описали принцип действия генератора переменного тока.

Для получения постоянного тока необходимо заменить кольцевой коллектор разрезным полукольцевым (рис. 299). Ток в рамке остается прежним, дважды за период его направление изменяется, но благодаря коллектору столько же раз меняются полукольца у каждой щетки, и по внешней цепи ток идет в одну сторону — это постоянный по направлению пульсирующий ток (рис. 300). Заметив, что наибольшее значение индукционного тока наблюдается при прохождении рамкой положения, параллельного линиям внешнего поля, можем усовершенствовать нашу конструкцию. Сделаем две рамки во взаимно перпендикулярных плоскостях, а их концы выведем на противоположные пластины четвертькольцевого коллектора (рис. 301). Пульсации тока уменьшатся, через нуль значение силы тока проходить уже не будет (рис. 302). Далее, можно сделать многосекционную систему, рамки которой расположены под малыми уг-

лами друг к другу, а концы выведены на диаметрально противоположные пластины коллектора (как на рис. 261, б). Таков принцип действия генератора постоянного тока.

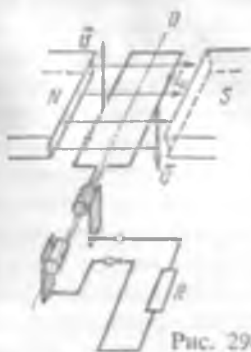


Рис. 298

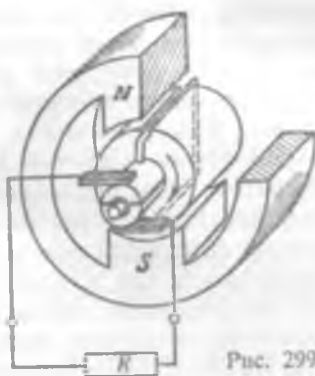


Рис. 299

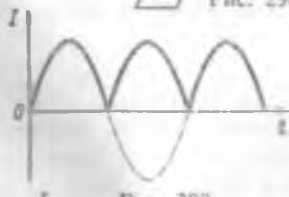


Рис. 300

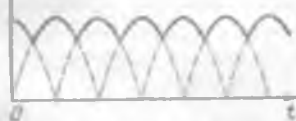


Рис. 302

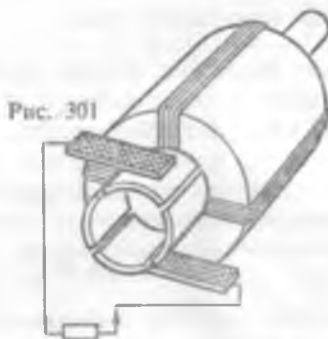


Рис. 301

Основными частями всякого индукционного генератора являются:

1) индуктор, создающий магнитное поле, которое в свою очередь индуцирует э. д. с. и ток;

2) якорь — обмотка, в которой индуцируется э. д. с.;

3) коллектор с щетками — устройство, посредством которого снимается с вращающихся частей или подается к ним ток (индукционный или питания электромагнитов, см. устройство генераторов, § 4.1).

Кроме того, различают статор — неподвижную часть и ротор — подвижную, вращающуюся часть генератора. Принципиально якорь (так же как индуктор) может быть статором или ротором.

ГЛАВА 4

ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

§ 4.1. Генератор тока

В § 3.12 мы выяснили, что при вращении рамки в магнитном поле в ней индуцируется переменная э. д. с. Для устройства генератора переменного тока вместо рамки делают обмотку на железном сердечнике.

Конструктивно нельзя снять ток большой мощности с вращающегося якоря. Поэтому якорь и индуктор меняют местами. Делают неподвижной обмотку, а электромагнит — подвижным. Ток к индуктору подается с помощью коллектора, устройство которого мы описывали, или от дополнительного генератора постоянного тока.

Обмотку статора, в которой индуцируется ток большой мощности, неподвижными шинами соединяют с линией, по которой передают электроэнергию. Для технических целей применяется переменный ток синусоидальной формы частотой 50 Гц. При двух полюсах индуктора в таком генераторе надо поддерживать 50 об/с. Проще увеличить число пар полюсов индуктора и соответственно уменьшить число оборотов. Такой генератор называется генератором однофазного переменного тока. Мы уже рассказывали, как устроен генератор постоянного тока, в обмотках которого индуцируется переменная э. д. с., выпрямляемая затем с помощью коллектора. Мощность таких генераторов сравнительно невелика, так как ее приходится снимать с помощью коллектора и щеток.

§ 4.2. Цепь переменного тока

В цепи переменного тока различают *мгновенные* и *действующие* (эффективные) значения величин. Действующим значением силы переменного тока называют силу такого постоянного тока, который за одинаковое время на одном активном проводнике выделяет такое же количество теплоты, как определяемый переменный ток.

Сила переменного тока

$$I = \mathcal{E}/R = \mathcal{E}_m/R \sin \omega t = I_m \sin \omega t.$$

Количество теплоты, выделяемое этим током за период T на сопротивлении R , равно

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \int_0^{T} I^2 R dt = \int_0^{T} I_m^2 R \sin^2 \omega t dt = I_m^2 R \int_0^{T} \sin^2 \omega t dt = \\ &= I_m^2 R \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^{T} = I_m^2 R \left[\frac{t+T}{2} - \frac{t}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega(t+T) + \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t \right] = I_m^2 R \frac{T}{2} \end{aligned}$$

(тригонометрические функции через период одинаковы).

Количество теплоты, выделяемое соответствующим постоянным током, $Q = I_{\phi}^2 RT$. Приравнявая эти количества теплоты, получаем $I_{\phi}^2 RT = I_m^2 RT/2$, откуда

$$I_{\phi} = I_m/\sqrt{2}.$$

Аналогично выводится, что

$$U_{\phi} = U_m/\sqrt{2}.$$

Включим в цепь переменного тока конденсатор (рис. 303, напомним, что для постоянного тока конденсатор представляет собой разрыв в цепи).

Процесс прохождения переменного тока через конденсатор — это по существу непрерывная зарядка и разрядка конденсатора. Закоротим пластины конденсатора проволокой — сила тока в цепи увеличивается. Следовательно, конденсатор в цепи переменного тока обладает конечным сопротивлением. Измерив U и I , можем найти сопротивление конденсатора переменному току.

Опыт даст, что помимо активного сопротивления утечки конденсатор имеет емкостное сопротивление

$$x_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (85)$$

Включим в цепь переменного тока индуктивность [рис. 304; в цепи постоянного тока индуктивность представляет собой малое активное

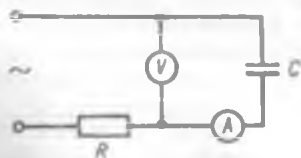


Рис. 303

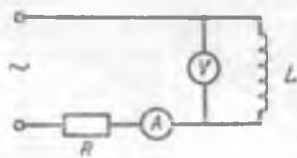


Рис. 304

сопротивление, которое можно рассчитать по формуле (27)]. Аналогичный опыт по закорачиванию катушки приводит к мысли, что в цепи переменного тока катушка обладает индуктивным сопротивлением:

$$x_L = \omega L. \quad (86)$$

Действительно, чем больше индуктивность катушки и частота тока, тем больше э. д. с. и ток самоиндукции, которые направлены по правилу Ленца навстречу наводящим изменениям тока. Значит, индуктивность уменьшает действующее значение э. д. с., приложенной на входе, т. е. действует подобно сопротивлению.

В общем случае в цепи переменного тока рассчитывают полное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}, \quad (87)$$

в котором R — активное; $x_L - x_C$ — реактивное сопротивления (см. разд. IV, § 1.7). При рассмотрении переменных токов большое значение имеют фазовые соотношения (см. разд. IV), в частности, при индуктивном сопротивлении сила тока отстает по фазе от напряжения, при емкостном — наоборот, опережает напряжение. Если цепь имеет активный характер, нет реактивных сопротивлений или они компенсируют друг друга ($x_L = x_C$) — сила тока и напряжение совпадают по фазе. Именно в этом случае сопротивление цепи минимально, и по ней проходит наибольший ток.

Для переменного тока справедлив закон Ома в форме $I = U/Z$ (для мгновенных значений) или $I_m = U_m/Z$ (для амплитуд).

§ 4.3. Трехфазный ток

Большое промышленное значение имеет *трехфазный ток* — совокупность трех однофазных токов, сдвинутых по фазе на 120° . Представьте себе три однофазных генератора с одинаковыми роторами-индукторами и обмотками статоров, сдвинутыми по направлению вращения ротора на 120° одна относительно другой. В такой системе можно ограничиться одним индуктором и одним статором, в который надо уложить три изолированных друг от друга обмотки. Получаются три совмещенных генератора.

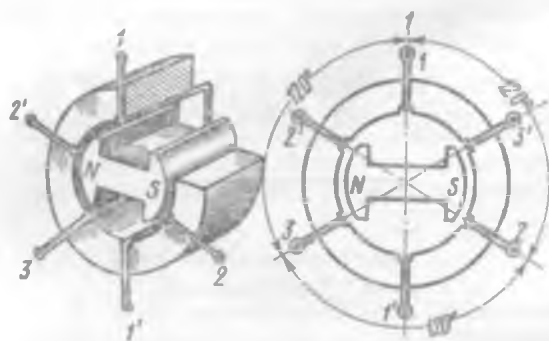


Рис. 305

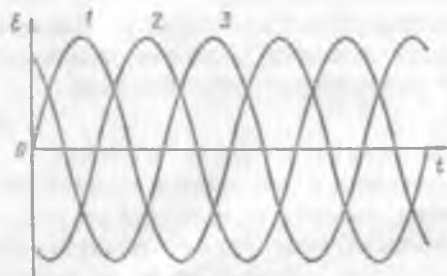


Рис. 306

На рис. 305 изображены концы трех независимых обмоток статора ($1-1'$, $2-2'$, $3-3'$), расположенных под углами 120° друг к другу. Один индуктор — электромагнит с постоянным током — вращается равномерно. В каждой обмотке возникает синусоидальная э. д. с. индукция со сдвигом по фазе относительно остальных на 120° (рис. 306). От каждой секции к потребителю надо тянуть два провода, но если нагрузки трех совмещенных генераторов находятся в одном месте, у трех самостоятельных линий можно один провод сделать общим. Тогда достаточно четырех проводов вместо шести — заметная экономия при тысячекилометровых подводящих линиях.

Соединим все обмотки статора и все нагрузки *звездой* (рис. 307, а). При таком соединении провода 1, 2, 3 называют *линейными*, 0 — *нулевым*. Напряжение между линейными

проводами называется *линейным*, между линейным и нулевым проводами — *фазовым*.

При симметричной нагрузке (одинаковой во всех фазах) ток в нулевом проводе $I_0 = 0$; убедитесь в этом сами, если

$$I_1 = I_m \sin \omega t, \quad I_2 = I_m \sin (\omega t + 120^\circ),$$

$$I_3 = I_m \sin (\omega t + 240^\circ), \quad I_0 = I_1 + I_2 + I_3.$$

Тогда и нулевой провод можно «экономить» и вместо шести протянуть только три линейных провода от источника к потребителю. Расчет показывает, что линейное напряжение больше фазового в $\sqrt{3}$ раз:

$$U_\Delta = U_\phi \sqrt{3}.$$

Если нужно использовать включение в одну фазу, то делают искусственную нулевую точку. Для этого между линейными проводами включают звездой одинаковые сопротивления. Их общая точка будет нулевой. Нагрузку включают между этой точкой и каким-нибудь линейным проводом. В наших домах и на производстве обычно используют напряжения 127, 220 и 380 В.

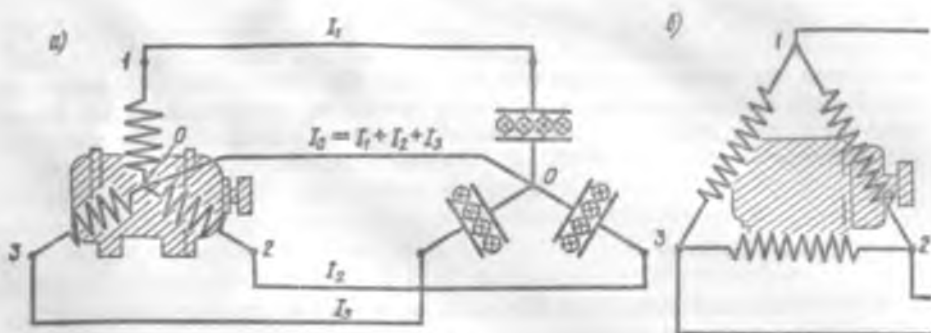


Рис. 307

Помимо звезды при симметричной нагрузке используют *соединение треугольником* (рис. 307, б). Но экономией не исчерпываются преимущества трехфазного тока. С его помощью удастся получить вращающееся магнитное поле.

§ 4.4. Асинхронный двигатель

На рис. 308 изображен статор *трехфазного асинхронного двигателя*. Вторые концы катушек статора закорочены.

Напряженности магнитных полей трех обмоток, по каждой из которых идет одна фаза *трехфазного* тока, меняются в соответствии с изменениями сил токов в обмотках (см. рис. 306). При этом вектор *Н* результирующего поля остается

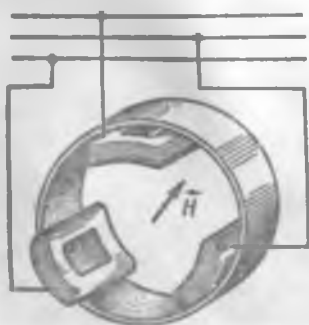


Рис. 308

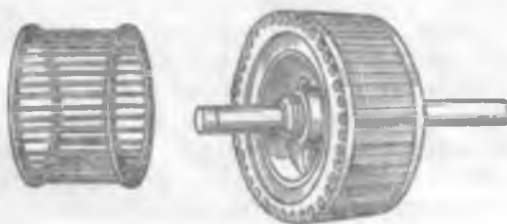


Рис. 309

неизменным по модулю и равномерно поворачивается с угловой скоростью ω (см. приложение 10). Мы получили вращающееся магнитное поле без какого-либо механического движения в приемнике электроэнергии.

Поместим в это поле *краткозамкнутый ротор* (рис. 309). В первый момент будет индуцироваться большая э.д.с., и так как ротор *краткозамкнутый*, разовьются большие токи и значительный крутящий момент. Ротор начнет вращаться вслед за полем. Допустим, он догнал поле и вращается с его скоростью, тогда нет движения относительно поля, а поэтому нет электромагнитной индукции и сил Ампера. Вследствие действия момента сил трения ротор начинает отставать от магнитного поля. Тогда возникает индукционный ток, по правилу Ленца стремящийся уменьшить относительную скорость движения ротора в маг-

нитном поле. При постоянстве нагрузки ротор вращается практически равномерно, немного медленнее магнитного поля. Возникающий при этом момент сил Ампера достаточен для преодоления всех сопротивлений. При увеличении нагрузки ротор еще больше отстает от магнитного поля, увеличивается индукционный ток и момент сил Ампера. Именно из-за отставания ротора от магнитного поля двигатель называется асинхронным*.

§ 4.5. Трансформатор

Преобразование тока, при котором меняется его сила практически без изменения мощности, называется *трансформацией*.

Прибор для трансформации переменного тока — *трансформатор* (рис. 310, изобретен в 1876 г. П. Н. Яблочковым, усовершенствован в 1882 г. И. Ф. Усагиным) представляет собой сердечник из трансформаторной стали (легко перемангничивающейся — с минимальными потерями), собранный из изолированных пластин (для уменьшения токов Фуко). Первичная цепь состоит из генератора переменного тока, соединительных проводов и первичной катушки с числом витков n_1 . Активное

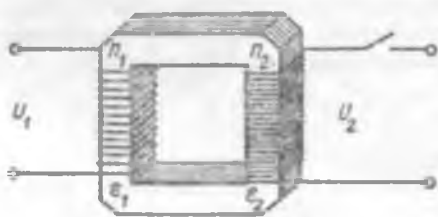


Рис. 310

сопротивление катушки мало. Генератор поддерживает на катушке напряжение U_1 . По второму правилу Кирхгофа,

$$U_1 + \mathcal{E}_1 \stackrel{38}{=} I_0 R_1,$$

где $\mathcal{E}_1$ — э. д. с. самоиндукции первичной катушки; R_1 — ее активное сопротивление. Э. д. с. самоиндукции $\mathcal{E}_1$ складывается из э. д. с. $\mathcal{E}$ самоиндукции отдельных витков так, что $\mathcal{E}_1 = n_1 \mathcal{E}$.

Если бы в первичную цепь включили генератор постоянного тока, то через некоторое небольшое время э. д. с. самоиндукции исчезла бы, индуктивного сопротивления не стало, и сила тока возросла до недопустимого значения $I_0 = U_1/R_1$ — трансформатор сгорел бы. При работе генератора переменного тока э. д. с. самоиндукции по правилу Ленца все время мешает генератору, ток *холостого хода* I_0 мал (трансформатор включен без нагрузки) и приблизительно $U_1 \approx |\mathcal{E}_1| = n_1 \mathcal{E}$ (опущенный нами знак минус относится к правилу Ленца).

Тот же переменный магнитный поток, который создает э. д. с. самоиндукции $\mathcal{E}$ в каждом витке первичной катушки, пронизывает витки вторичной катушки. Поэтому в каждом витке вторичной катушки возникает такая же э. д. с. индукции $\mathcal{E}$; следовательно, на всей вторичной катушке наводится э. д. с. индукции $\mathcal{E}_2 = n_2 \mathcal{E} = U_2$ (разумеется, все эти величины, относящиеся к переменному току, являются эффективными значениями). При отсутствии нагрузки нет расхода энергии во вторичной цепи, в первичной цепи есть пренебрежимо малые потери электроэнергии на нагре-

* syn (греч.) — вместе, chronos — время, а — частица отрицания.

ванне проводов и сердечника за счет джоулева тепла и тепла гистерезиса (энергия, превращающаяся во внутреннюю при перемагничивании). Отношение напряжений равно

$$U_2/U_1 = \mathcal{E} n_2 / \mathcal{E} n_1 = n_2/n_1 = k.$$

Отношение чисел витков вторичной и первичной обмоток трансформатора называется *коэффициентом трансформации*. Этот коэффициент равен отношению напряжений на вторичной и первичной катушках при разомкнутой вторичной цепи. Если $k > 1$, то $U_2 > U_1$, и трансформатор называют *повышающим*; если $k < 1$, то $U_2 < U_1$ — *понижающим*.

Включим во вторичную цепь какую-либо нагрузку. По вторичной цепи начинает течь ток I_2 нагрузки (переменный, такой же частоты), возникает э. д. с. самоиндукции во вторичной катушке, немного снижается напряжение на ее концах. По правилу Ленца уменьшается эффективное значение магнитного потока. Но этот магнитный поток пронизывает обе катушки. Уменьшение магнитного потока в первичной катушке приводит к уменьшению э. д. с. самоиндукции $\mathcal{E}_1$, что (при постоянстве U_1) вызывает увеличение силы тока в первичной цепи.

Увеличение силы тока в первичной цепи приводит к увеличению магнитного потока, э. д. с. индукции и силы тока во вторичной цепи. Но увеличение силы тока во вторичной цепи сопровождается увеличением тока самоиндукции и, следовательно, уменьшением магнитного потока (который только что возрастал). Уменьшение магнитного потока в первичной катушке приводит к уменьшению э. д. с. самоиндукции, новому увеличению силы тока в первичной цепи и магнитного потока и т. д. В конце концов при постоянной нагрузке устанавливаются определенные магнитный поток, э. д. с. индукции во вторичной цепи, сила тока I_1 нагрузки в первичной цепи.

Мощность $I_1 U_1$, отбираемая от генератора, больше мощности холостого хода $I_0 U_1$ на мощность во вторичной цепи (и мощность потерь). В соответствии с законом сохранения энергии, за вычетом потерь, энергия генератора передается магнитным полем из первичной цепи во вторичную. Так как напряжение U_1 поддерживается генератором, а U_2 не намного уменьшилось (на несколько процентов при расчетной нагрузке), то отношение напряжений практически сохраняет свое значение. Пренебрегая потерями мощности, можем написать, что

$$I_1 U_1 = I_2 U_2.$$

Иначе

$$I_2/I_1 = U_1/U_2 = 1/k.$$

При увеличении нагрузки сверх расчетной генератор не обеспечивает постоянства напряжения на первичной катушке, снижается напряжение во вторичной цепи.

Коэффициент полезного действия современных трансформаторов большой мощности

$$\eta = I_2 U_2 / (I_1 U_1)$$

доходит до 99 % (здесь без учета потерь получилось бы 100 %).

§ 4.6. Передача электроэнергии

При промышленном использовании тока возникает вопрос: что выгоднее? Передавать выработанную в одном месте электроэнергию на большие расстояния или строить маленькие электростанции около каждого потребителя? Однозначного ответа этот вопрос, по всей вероятности, не имеет. В настоящее время выгоднее строить крупные электростанции. Но тогда появляется проблема передачи энергии на большие расстояния. Ведь при этом возникают большие потери, прежде всего на джоулево тепло $\Delta Q = I^2 R t$. Как их уменьшить? Передавать энергию в течение меньшего времени. Тогда уменьшается не только величина потерь, но и целесообразность постройки станций. Уменьшить сопротивление проводов. Но расстояние задано. Остается вместо медных взять серебряные провода и как можно большего сечения. Должно быть понятно, что этот дорогой путь не ведет к заметному уменьшению потерь. Можно уменьшить силу тока, тем более, что в законе Джоуля — Ленца она стоит в квадрате. Но уменьшить ее надо без уменьшения мощности. Так проблема передачи электроэнергии связана с трансформацией тока.

Часто задают вопрос: что дает повышение напряжения при соответствующем понижении силы тока? Ведь их произведение равно произведению квадрата силы тока и сопротивления! Действительно, выражения $I^2 R t$ и $I U t$ одинаковы, если относятся к одному объекту. Потери энергии в подводящих проводах можно подсчитать и по второму выражению, надо только ясно представить себе, что в этом выражении U — напряжение на подводящих проводах, а не передаваемое напряжение. Так, в схеме на рис. 311

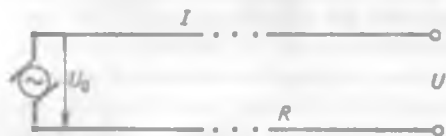


Рис. 311

$$U_0 \stackrel{41}{=} U + IZ,$$

где U_0 — напряжение генератора; U — напряжение на выходе линии; Z — полное сопротивление линии. Если активное сопротивление гораздо больше реактивного, то полное сопротивление по формуле (87) практически равно активному сопротивлению R . Тогда падение напряжения в линии $U_0 - U = IR$. При уменьшении силы тока это падение напряжения уменьшается. Потери в линии можно рассчитать по любой из формул:

$$\Delta Q = I^2 R t = I(U_0 - U)t \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим передачу электроэнергии по определенным проводам сопротивлением 10 Ом в двух случаях: при напряжении генератора 10 и 100 кВ. Мощность генератора одинакова и равна 1 МВт. Силы токов:

$$I_1 \stackrel{52}{=} P/U_1; \quad I_2 \stackrel{53}{=} P/U_2.$$

Потери на джоулево тепло в проводах:

$$\Delta Q_1 \stackrel{54}{=} I_1^2 R t = P^2 R t / U_1^2; \quad \Delta Q_2 \stackrel{55}{=} I_2^2 R t = P^2 R t / U_2^2;$$

их отношение

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \frac{U_2^2}{U_1^2} = \frac{100\,000^2 \text{ В}^2}{10\,000^2 \text{ В}^2} = 100.$$

Потери в процентах

$$\frac{I_1^2 R t}{P t} = \frac{P^2 R}{U_1^2 P} = \frac{P R}{U_1^2} = \frac{1\,000\,000 \text{ А} \cdot \text{В} \cdot 10 \text{ Ом}}{(10\,000 \text{ В})^2} = \frac{1}{10} = 10\%;$$

$$\frac{I_2^2 R_l}{P_t} = \frac{P^2 R}{U_1^2 P} = \frac{PR}{U_1^2} = \frac{1\,000\,000 \text{ А} \cdot \text{В} \cdot 10 \text{ Ом}}{(100\,000 \text{ В})^2} = \frac{1}{1000} = 0,1 \%$$

При недостаточном напряжении потери за единицу времени в проводах могут превысить мощность генератора и до потребителя энергия вообще не дойдет.

В настоящее время надежно трансформируются только переменные токи, поэтому они широко применяются в промышленности. Потери при передаче постоянного тока были бы меньше (примерно в полтора раза — мы не учитывали потерь на перемагничивание и мощности на реактивном сопротивлении, которую нельзя использовать). Но пока нет способов трансформации постоянного тока. Делаются попытки промышленной передачи постоянного тока высокого напряжения на большие расстояния, но трансформируется переменный ток, который затем при высоком напряжении выпрямляется с помощью полупроводниковых приборов. После передачи постоянный ток преобразуется в переменный, а затем снова трансформируется. Трудности преобразований тока в такой линии не позволяют пока распространить этот экономный метод передачи электроэнергии.

В современных линиях электропередачи используются напряжения до 800 и 1000 кВ, проектируются ЛЭП (линии электропередачи) на 1500 кВ. Естественно, что в них применяется несколько каскадов повышения и понижения напряжения. Генераторы вырабатывают электроэнергию при напряжении 6—20 кВ. Его повышают в несколько приемов (~35, 110, 500 кВ) и направляют ток в линию электропередачи. На другом конце линии напряжение понижается примерно такими же ступенями.

Сеть электростанций данного района обычно объединяется в одну систему, с тем чтобы можно было оперативно перебрасывать мощности в нужную точку. Все такие системы европейской части СССР объединены в Единую энергетическую систему европейской части страны. Осуществляется объединение всех систем в Единую энергетическую систему СССР. В условиях крупного промышленного производства, в особенности при социалистическом способе производства, такое объединение позволяет использовать дополнительные мощности, равные мощностям нескольких крупных электростанций. Дело в том, что электроэнергия в течение суток потребляется неравномерно. Максимум потребления приходится на вечерние часы, минимум — на ночные. В единой системе мощности, вырабатываемые станциями, расположенными в полосе минимального потребления (уже наступила ночь), перебрасываются в области максимального потребления (вечер); при такой возможности маневра количество резервных агрегатов может быть снижено до минимума. В энергетическую систему связываются электростанции разных типов — атомные, гидроэлектрические, тепловые, приливные и т. д. Гидроэлектростанции неравномерно вырабатывают электроэнергию в течение года, эта неравномерность покрывается работой станций другого типа. Тепловые станции вырабатывают не только электроэнергию — в большинстве это теплоэлектроцентрали, они снабжают окружающие районы горячей водой для отопления и бытовых нужд.

Все эти комплексные мероприятия способствуют более полному использованию энергии, т. е. повышают к. п. д. сети.

Около 20 лет электросистемы ряда социалистических стран объединены в энергетическое кольцо «Мир». Естественно, это увеличивает возможности маневрирования энергией, которое осуществляется центральным диспетчерским управлением.

Таким образом, в рамках социалистической кооперации начала формироваться Международная энергетическая система, в которую со временем войдут все крупные электростанции Земли.

ЗАДАЧИ

Задача III.1. Найти силу электрического притяжения электрона к ядру атома водорода, если электрон находится на первой боровской орбите радиусом $5,3 \cdot 10^{-9}$ см.

$$r = 5,3 \cdot 10^{-9} \text{ см} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

$$F = ?$$



$$F = \frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}$$

Решение. Кулоновская сила является искомой, она равна

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} = \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \text{ Кл}^2 \cdot 36\pi \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{4\pi \cdot \text{Кл}^2 \cdot 5,3^2 \cdot 10^{-22} \text{ м}^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ Н.}$$

Задача III.2. Поле создается металлическим шаром, радиус которого 10 см, а заряд 10^{-4} Кл. Нужно приблизить к нему другой стальной шарик радиусом 2 мм, заряженный до потенциала 300 В, на расстояние 20 см от поверхности первого шара. С какой скоростью для этого надо бросить издалека второй шар по линии центров?

$$a = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м;}$$

$$Q_0 = 10^{-4} \text{ Кл;}$$

$$r = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м;}$$

$$\varphi = 300 \text{ В;}$$

$$b + r = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м.}$$

$$v = ?$$



$$\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r};$$

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3;$$

$$C = \frac{Q}{\varphi}; C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon r;$$

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Решение. Потенциал поля заряда Q_0 в точках, бесконечно далеких от него, равен нулю. Второму шару необходимо сообщить кинетическую энергию, численно равную работе отталкивания электрического поля на пути от бесконечности к заданной точке:

$$\frac{mv^2}{2} = |Q(\varphi_1 - \varphi_2)|,$$

где $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 \epsilon (a + b + r)}$, а $Q = 4\pi\epsilon_0 \epsilon r \varphi$.

Работа получилась отрицательной именно потому, что это работа отталкивания, торможения. Таким образом,

$$v^2 = \frac{2Q\varphi_2}{m} = \frac{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \epsilon r \varphi Q_0 \cdot 3}{4\pi\epsilon_0 \epsilon (a + b + r) \rho \cdot 4\pi r^3}.$$

Отсюда

$$v = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3Q_0\varphi}{2\pi\rho(a+b+r)}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} \text{ м}} \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-4} \text{ Кл} \cdot 300 \text{ В} \cdot \text{м}^3}{2\pi \cdot 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot 0,3 \text{ м}}} = 1,24 \text{ м/с}$$

Задача III.3. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин 30 см^2 получил заряд 10^{-9} Кл. Определить ускорение электрона, пролетающего через

такой конденсатор. Как изменится напряженность поля, если заполнить конденсатор парафином?

$$S = 30 \text{ см}^2 = 30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$Q = 10^{-9} \text{ Кл.}$$

$$a = ? \quad E_1/E_2 = ?$$



$$\sum_{i=1}^n F_i = ma;$$

$$C \stackrel{18}{=} \frac{Q}{U}; \quad E \stackrel{5}{=} \frac{F}{Q};$$

$$U \stackrel{16}{=} Ed; \quad E \stackrel{10}{=} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon};$$

$$\sigma \stackrel{8}{=} \frac{Q}{S}; \quad C \stackrel{21}{=} \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

Решение. Ускорение электрона не зависит от его скорости и равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE_1}{m} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0 \epsilon_1 m} = \frac{Qe}{S \epsilon_0 \epsilon_1 m} =$$

$$= \frac{10^{-9} \text{ Кл} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 36\pi \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{Кл}^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}} = 6,63 \cdot 10^{15} \text{ м/с}^2.$$

Отношение напряженностей

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{U_1 d}{d U_2} = \frac{Q C_2}{C_1 Q} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 S d}{d \epsilon_0 \epsilon_1 S} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 7.$$

Задача III.4. Батарея из двух последовательно соединенных конденсаторов (емкостью 2 и 4 мкФ) заряжена до напряжения 1200 В. Отключив конденсаторы от источника и друг от друга, их соединяют параллельно. Какие заряды и напряжения были и установятся на конденсаторах? Чему равна работа разряда?

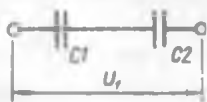
$$C_1 = 2 \text{ мкФ} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф};$$

$$C_2 = 4 \text{ мкФ} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф};$$

$$U_1 = 1200 \text{ В.}$$

$$Q_1 = ? \quad Q_2 = ? \quad U_1 = ? \quad U_2 = ?$$

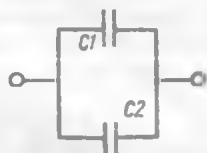
$$Q_1 = ? \quad Q_2 = ? \quad A = ? \quad U_2 = ?$$



$$\sum_{i=1}^n Q_i = \text{const};$$

$$C \stackrel{18}{=} \frac{Q}{U};$$

$$W \stackrel{24}{=} \frac{CU^2}{2}.$$



Решение: Емкость батареи при последовательном соединении

$$C \stackrel{22}{=} C_1 C_2 / (C_1 + C_2).$$

Заряд на каждом конденсаторе и на всей батарее

$$Q_1 = Q_2 = Q = C U_1 = C_1 C_2 U_1 / (C_1 + C_2) = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}}{6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} 1200 \text{ В} =$$

$$= 16 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Напряжение на каждом конденсаторе

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{C_2 U_1}{C_1 + C_2} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 1200 \text{ В}}{6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} = 800 \text{ В};$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 1200 \text{ В}}{6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} = 400 \text{ В}.$$

При параллельном соединении емкость батареи $C'' = C_1 + C_2$. Заряд на батарее $Q_2 = Q_1' + Q_2' = Q_1 = 2Q_1$ (по закону сохранения зарядов).
Напряжение на батарее

$$U_2 = \frac{Q_2}{C''} = \frac{2C_1C_2U_1}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 1200 \text{ В}}{(6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф})^2} = 533 \text{ В}.$$

Заряды на каждом конденсаторе:

$$Q_1' = C_1 U_2 = \frac{2C_1^2 C_2 U_1}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 1200 \text{ В}}{6^2 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}^2} = 10,7 \cdot 10^{-4} \text{ Кл},$$

$$Q_2' = C_2 U_2 = \frac{2C_1 C_2^2 U_1}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 4^2 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}^2 \cdot 1200 \text{ В}}{6^2 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}^2} = 21,3 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

Работа разряда $A = -(W_2 - W_1)$ [разность энергий батарей конденсаторов, взятая с обратным знаком]. Эти энергии

$$W_1 = \frac{C U_1^2}{2} = \frac{C_1 C_2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)},$$

$$W_2 = \frac{C'' U_2^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2) 4 C_1^2 C_2^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^4} = \frac{4 C_1^2 C_2^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^3}.$$

Тогда

$$A = - \left[\frac{4 C_1^2 C_2^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^3} - \frac{C_1 C_2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)} \right] = \frac{C_1 C_2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)} \left[- \frac{4 C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} + 1 \right] =$$

$$= \frac{C_1 C_2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^3} (C_2 - C_1)^2 = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 1200^2 \text{ В}^2 \cdot 2^2 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}^2}{2 \cdot 6^3 \cdot 10^{-18} \cdot \text{Ф}^3} =$$

$$= 10,7 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

Задача III.5. Плоский воздушный конденсатор с пластинами площадью 200 см^2 и расстоянием между ними 3 мм заряжен до напряжения 1200 В и отключен от источника тока. Расстояние между пластинами увеличивают в два раза. Какое напряжение будет на конденсаторе? Чему равна произведенная работа? С какой силой взаимодействовали пластины?

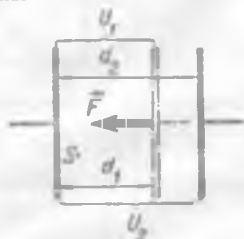
$$U_1 = 1200 \text{ В};$$

$$d_1 = 3 \text{ мм} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_2 = 2d_1;$$

$$S = 200 \text{ см}^2 = 200 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$U_2 = ? \quad A = ? \quad F = ?$$



$$C \stackrel{10}{=} Q/U; \quad E \stackrel{5}{=} F/Q;$$

$$E_1 \stackrel{8}{=} \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}; \quad E \stackrel{10}{=} \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon};$$

$$A = W_2 - W_1; \quad \sigma \stackrel{8}{=} Q/S;$$

$$W \stackrel{24}{=} CU^2/2; \quad E \stackrel{16}{=} U/d;$$

$$C \stackrel{21}{=} \epsilon_0\epsilon S/d.$$

Решение. При раздвигании пластин заряды на них не изменяются:

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_2} = \frac{\epsilon_0\epsilon S U_1 d_2}{d_1 \epsilon_0\epsilon S} = \frac{d_2 U_1}{d_1} = \frac{2d_1}{d_1} U_1 = 2U_1 = 2 \cdot 1200 \text{ В} = 2400 \text{ В}.$$

$$A = \frac{C_2 U_2^2}{2} - \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{\epsilon_0\epsilon S 4 U_1^2}{2d_1 \cdot 2} - \frac{\epsilon_0\epsilon S U_1^2}{d_1 \cdot 2} =$$

$$= \frac{\epsilon_0\epsilon S U_1^2}{2d_1} = \frac{8,84 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot 200 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 1200^2 \cdot \text{В}^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 4,25 \cdot 10^{-5} \text{ Дж};$$

$$F = QE_1 = Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{\epsilon_0\epsilon^2 E^2 S}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{\epsilon_0\epsilon U_1^2 S}{2d_1^2} =$$

$$= \frac{8,84 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot 1200^2 \text{ В}^2 \cdot 200 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2} = 1,42 \cdot 10^{-2} \text{ Н}.$$

Напомним, что E_1 — напряженность поля одной пластины в точках, где расположена другая; E — напряженность поля двух пластин в промежутке между ними (все для поля бесконечного конденсатора). Это решение задачи не является кратчайшим. Проще найти силу по уже известной работе раздвигания:

$$A \stackrel{31.4}{=} F(d_2 - d_1); \quad F = A/(d_2 - d_1) = \frac{\epsilon_0\epsilon S U_1^2}{2d_1 d_1}.$$

Задача III.6. Плоский воздушный конденсатор с пластинами площадью 250 см^2 и расстоянием между ними $0,2 \text{ см}$ подключен к сети с постоянным напряжением 120 В . Пластины раздвигают до расстояния 2 см , не отключая от сети. Найти изменение напряженности и энергии электрического поля конденсатора.

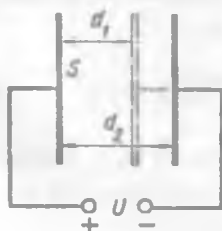
$$S = 250 \text{ см}^2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$d_1 = 0,2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$U = 120 \text{ В};$$

$$d_2 = 2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$\Delta E - ? \quad \Delta W - ?$$



$$E \stackrel{16}{=} U/d;$$

$$W \stackrel{24}{=} \frac{CU^2}{2};$$

$$C \stackrel{21}{=} \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}.$$

Решение. Напряженности поля плоского конденсатора $E_1 = U/d_1$; $E_2 = U/d_2$, а изменение напряженности

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{U}{d_2} - \frac{U}{d_1} = U \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} = - \frac{120 \text{ В} \cdot 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = -54 \cdot 10^3 \text{ В/м},$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{C_2 U^2}{2} - \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{U^2}{2} \left(\frac{\epsilon_0\epsilon S}{d_2} - \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d_1} \right) = - \frac{\epsilon_0\epsilon S U^2}{2d_1 d_2} (d_2 - d_1) =$$

$$= \frac{-8,84 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 \cdot 120^2 \text{ В}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \cdot 18 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -7,16 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

При совершении положительной работы внешних сил (пластины притягиваются друг к другу, силы преодолевают это притяжение) энергия системы должна увеличиваться, а энергия конденсатора уменьшается! Но в данном примере система представляет собой не один конденсатор, он постоянно соединен с сетью. Если бы конденсатор был отключен от сети, то при раздвигании пластин оставался бы неизменным заряд на пластинах, увеличивалось напряжение и возрастала бы энергия конденсатора за счет внешней энергии, подводимой в процессе совершения работы. Теперь же увеличению напряжения препятствует сеть, уменьшается заряд на пластинах (часть заряда переходит к сети), уменьшаются напряженность поля и энергия конденсатора. Вся подводимая в процессе совершения работы энергия и разность энергий конденсатора переходит к источнику тока — сети, которая в этом опыте представляет собой потребитель электроэнергии.

Задача III.7. Тело заряжено до потенциала 50 В . При соединении его с незаряженным металлическим шаром радиусом 7 см получается потенциал 42 В . Определить емкость тела.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 50 \text{ В;} \\ \varphi_2 &= 42 \text{ В;} \\ r &= 7 \text{ см} = 0,07 \text{ м.} \\ C - ?\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}C &\stackrel{19}{=} \frac{Q}{\varphi}; \\ \sum_{i=1}^n Q_i &\stackrel{1}{=} \text{const}; \\ C &\stackrel{20}{=} 4\pi\epsilon_0\epsilon r.\end{aligned}$$

Решение. По закону сохранения зарядов

$$\begin{aligned}Q_1 + Q_2 &= Q; \\ C\varphi_2 + 4\pi\epsilon_0\epsilon r\varphi_2 &= C\varphi_1; \\ C(\varphi_1 - \varphi_2) &= 4\pi\epsilon_0\epsilon r\varphi_2; \\ C &= \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi \cdot \text{Кл}^2 \cdot 0,07 \text{ м} \cdot 42 \text{ В}}{36\pi \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot 8 \text{ В}} = 40,5 \text{ пФ}.\end{aligned}$$

Задача III.8. Ртутный шарик, потенциал которого 1200 В, разбивается на тысячу одинаковых капель. Определить потенциал каждой капли.

$$\begin{aligned}\varphi &= 1200 \text{ В;} \quad \varphi \stackrel{13}{=} Q/(4\pi\epsilon_0\epsilon r); \\ n &= 1000. \\ \varphi_1 - ? \quad \sum_{i=1}^n Q_i &\stackrel{1}{=} \text{const}.\end{aligned}$$

Решение. Потенциал каждой из n шаровых капель

$$\varphi_1 = Q_1/(4\pi\epsilon_0\epsilon r); \quad Q = nQ_1.$$

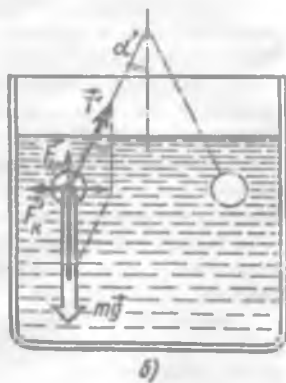
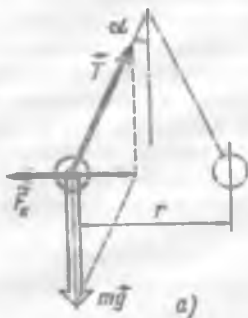
Суммарные объемы ртути равны $\frac{4}{3}\pi R^3 = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, отсюда $r = R/\sqrt[3]{n}$. Тогда

$$\varphi_1 = \frac{Q\sqrt[3]{n}}{n \cdot 4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \varphi n^{-2/3} = 1200 \text{ В} \cdot 1000^{-2/3} = 12 \text{ В}.$$

Задача III.9. Два одинаковых шарика на нитях равной длины подвешены в одной точке. Когда их заряжают одноименными зарядами, нити расходятся на какой-то угол. Какой должна быть плотность материала шариков, чтобы этот угол не изменился при погружении системы в бензол?

Это одна из задач, в которых нет явных данных. Правда есть скрытые данные (которые можно не записывать):

$$\begin{aligned}V_1 &= V_2 = V; \\ m_1 &= m_2 = m; \\ r_1 &= r_2 = r; \\ Q_1 &= Q_1', \quad Q_2 = Q_2'; \\ \alpha &= \alpha'; \\ \rho - ?\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n F_i &\stackrel{50.1}{=} 0; \quad \rho \stackrel{33.1}{=} m/V; \\ F_{\text{Арх}} &\stackrel{48.1}{=} \rho g V; \quad F \stackrel{4}{=} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.\end{aligned}$$

Решение. Из рисунков

$\operatorname{tg} \alpha = F_{\text{д}}/(mg)$; $\operatorname{tg} \alpha' = F_{\text{д}}/(mg - F_{\text{лрх}})$, следовательно,

$$\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2 \rho V g} = \frac{Q'_1 Q'_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon' r'^2 (\rho V g - \rho' V g)}.$$

После сокращений имеем: $\epsilon \rho = \epsilon' (\rho - \rho')$, откуда $\rho (\epsilon' - \epsilon) = \rho' \epsilon'$

и

$$\rho = \frac{\rho' \epsilon'}{\epsilon' - \epsilon} = \frac{0,879 \text{ г} \cdot 2,3}{\text{см}^3 \cdot 1,3} = 1,56 \text{ г/см}^3.$$

Задача III.10. Два металлических шара радиусами 3 и 12 см имеют соответственно заряды $5 \cdot 10^{-8}$ и $12 \cdot 10^{-8}$ Кл. Их соединяют тонкой проволокой. В какую сторону начнут двигаться заряды? Какие заряды установятся на каждом шаре после достижения равновесия? Чему равен установившийся потенциал?

$R_1 = 3 \text{ см} = 0,03 \text{ м};$

$R_2 = 12 \text{ см} = 0,12 \text{ м};$

$Q_1 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл};$

$Q_2 = 12 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$

$Q'_1 = ? \quad Q'_2 = ? \quad \varphi = ?$



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Q_i &= \text{const}; \\ C^{20} &= 4\pi\epsilon_0 \epsilon R; \\ C^{19} &= Q/\varphi; \\ \varphi^{13} &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R}. \end{aligned}$$

Решение. Определим направление движения зарядов, которое зависит от соотношения потенциалов шаров:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_1}; \quad \varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_2};$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{Q_1 \cdot 4\pi\epsilon_0 \epsilon R_2}{Q_2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \epsilon R_1} = \frac{Q_1 R_2}{Q_2 R_1} = \frac{5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} \cdot 0,12 \text{ м}}{12 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} \cdot 0,03 \text{ м}} > 1.$$

Следовательно, положительные заряды начнут переходить с первого шара на второй; этот переход прекратится, когда потенциалы шаров станут одинаковыми:

$$\varphi'_1 = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_1}; \quad \varphi'_2 = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_2} = \varphi.$$

Имеем два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} Q'_1/R_1 = Q'_2/R_2, \\ Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение: $\frac{Q'_1}{Q'_2} = \frac{R_1}{R_2}$; $\frac{Q'_1 + Q'_2}{Q'_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$; $\frac{Q_1 + Q_2}{Q'_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$; откуда

$$Q'_2 = \frac{(Q_1 + Q_2) R_2}{R_1 + R_2} = \frac{17 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} \cdot 0,12 \text{ м}}{0,15 \text{ м}} = 13,6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

Аналогично, $\frac{Q'_1}{Q'_1 + Q'_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, откуда

$$Q'_1 = \frac{(Q_1 + Q_2) R_1}{R_1 + R_2} = \frac{17 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} \cdot 0,03 \text{ м}}{0,15 \text{ м}} = 3,4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

Новые потенциалы каждого шара:

$$\Phi'_1 = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} = \frac{(Q_1 + Q_2) R_1}{(R_1 + R_2) 4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon (R_1 + R_2)};$$

$$\Phi'_2 = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2} = \frac{(Q_1 + Q_2) R_2}{(R_1 + R_2) 4\pi\epsilon_0\epsilon R_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon (R_1 + R_2)}.$$

Видим, что действительно потенциалы одинаковы. Установившийся потенциал

$$\Phi = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon (R_1 + R_2)} = \frac{17 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} \cdot 36\pi \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{4\pi \text{ Кл}^2 \cdot 0,15 \text{ м}} = 1,02 \cdot 10^4 \text{ В}.$$

Емкость такой системы

$$C = \frac{Q'_1 + Q'_2}{\Phi} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{Q_1 + Q_2} \cdot 4\pi\epsilon_0\epsilon (R_1 + R_2) = C_1 + C_2$$

равна сумме емкостей тел.

Задача III.11. В плоский воздушный конденсатор параллельно пластинам со скоростью 10^6 м/с влетает электрон. На какое расстояние сместится электрон перпендикулярно пластинам на выходе из конденсатора, если напряженность поля между пластинами 1,2 В/м, а длина конденсатора 20 см?

$$v_0 = 10^6 \text{ м/с};$$

$$l = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м};$$

$$E = 1,2 \text{ В/м}.$$

$$\Delta h = ?$$



$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{39.1}{=} ma;$$

$$l \stackrel{13.1}{=} v_0 t + at^2/2;$$

$$l \stackrel{2.1}{=} vt; E \stackrel{5}{=} F/Q.$$

Решение. Сила, действующая на электрон в данном поле, равна

$$F = eE = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1,2 \text{ В/м} = 1,92 \cdot 10^{-19} \text{ Н}.$$

Для сравнения сила тяжести в поле Земли

$$mg = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 8,9 \cdot 10^{-30} \text{ Н} \ll F.$$

Поэтому даже в сравнительно слабых электрических полях можно не учитывать силу тяжести.

Движение перпендикулярно пластинам происходит под действием постоянной силы, т. е. равноускоренно. Следовательно,

$$\Delta h = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{2m} = \frac{eFl^2}{2mv_0^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1,2 \text{ В} \cdot 0,2^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 10^{12} \text{ м}^2} = 4,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Задача III.12. Последовательно или параллельно выгоднее соединить пять аккумуляторов с одинаковыми э.д.с., чтобы на питаемом сопротивлении 4 Ом выделялась большая мощность? Решить задачу для случаев, когда внутреннее сопротивление каждого аккумулятора: 1) 0,5 Ом; 2) 5 Ом.

$$\begin{aligned}
 R &= 4 \text{ Ом}; & P &= I^2 R; \\
 r_1 &= 0,5 \text{ Ом}; & I_1 &= n \mathcal{E}_1 / (R + nr); \\
 r_2 &= 5 \text{ Ом}; & I_2 &= \frac{\mathcal{E}_1}{R + r/m}; \\
 n &= 5. & & \\
 P_1/P_2 &= ?
 \end{aligned}$$

Решение. Найдем отношение мощностей

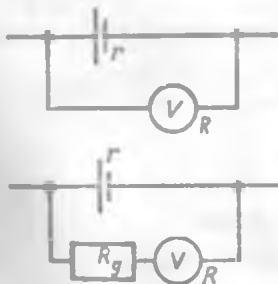
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1^2 R}{I_2^2 R} = \left[\frac{n \mathcal{E}_1 (R + r/n)}{(R + nr) \mathcal{E}_1} \right]^2 = \left(\frac{nR + r}{R + nr} \right)^2.$$

$$1. \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{5 \cdot 4 \text{ Ом} + 0,5 \text{ Ом}}{4 \text{ Ом} + 5 \cdot 0,5 \text{ Ом}} \right)^2 = 9,95 - \text{выгоднее последовательное соединение.}$$

$$2. \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{5 \cdot 4 \text{ Ом} + 5 \text{ Ом}}{4 \text{ Ом} + 5 \cdot 5 \text{ Ом}} \right)^2 = 0,744 - \text{выгоднее параллельное соединение.}$$

Задача III.13. Вольтметр, подключенный к аккумулятору с внутренним сопротивлением 1 Ом, показывает 1,2 В. Если последовательно с ним включено сопротивление 20 Ом, вольтметр показывает 1 В. Определить сопротивление вольтметра.

$$\begin{aligned}
 r &= 1 \text{ Ом}; \\
 U_1 &= 1,2 \text{ В}; \\
 R_0 &= 20 \text{ Ом}; \\
 U_2 &= 1 \text{ В.} \\
 R &= ?
 \end{aligned}$$

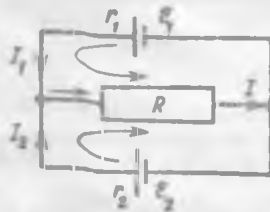


$$\begin{aligned}
 I &= \frac{U}{R}; \\
 I &= \frac{\mathcal{E}}{R + r}.
 \end{aligned}$$

Решение. По закону Ома для всей цепи $\mathcal{E} = I_1 (R + r) = I_2 (R + r + R_0)$. Следовательно, $U_1/R(R + r) = U_2/R(R + r + R_0)$. Отсюда $R(U_1 - U_2) = U_2(r + R_0) - U_1 r$ и $R = \frac{U_2 R_0 + r(U_2 - U_1)}{U_1 - U_2} = \frac{U_2}{U_1 - U_2} R_0 - r = \frac{1 \text{ В}}{0,2 \text{ В}} \cdot 20 \text{ Ом} - 1 \text{ Ом} = 99 \text{ Ом}$.

Задача III.14. Два источника тока с э. д. с. 1,2 и 1,5 В и внутренними сопротивлениями 0,3 и 0,5 Ом параллельно питают активное сопротивление 2 Ом. Определить силу тока, текущего по сопротивлению.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_1 &= 1,2 \text{ В}; \\
 \mathcal{E}_2 &= 1,5 \text{ В}; \\
 r_1 &= 0,3 \text{ Ом}; \\
 r_2 &= 0,5 \text{ Ом}; \\
 R &= 2 \text{ Ом}. \\
 I &= ?
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n I_i &\stackrel{35}{=} 0; \\
 \sum_{i=1}^n I_i R_i &\stackrel{38}{=} \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i.
 \end{aligned}$$

Решение. Пусть через первый источник течет ток силой I_1 , а через второй I_2 . Тогда $I = I_1 + I_2$. Для первого и второго контуров:

$$I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1, \quad I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2.$$

Разделим почленно первое уравнение на r_1 , второе на r_2 и сложим получившиеся выражения: $I_1 + I_2 + I(R/r_1 + R/r_2) = \mathcal{E}_1/r_1 + \mathcal{E}_2/r_2$. Иначе,

$$I \left(1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} \right) = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2},$$

откуда

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} = \frac{1,2 \text{ В} \cdot 0,5 \text{ Ом} + 1,5 \text{ В} \cdot 0,3 \text{ Ом}}{0,3 \text{ Ом} \cdot 0,5 \text{ Ом} + 2 \text{ Ом} \cdot 0,8 \text{ Ом}} = 0,6 \text{ А}.$$

Задача III.15. Мощность каждой из пяти одинаковых плиток равна 1 кВт при определенном напряжении. Какова мощность каждой из них и всех вместе, если они включены последовательно в сеть с этим напряжением?

$$\begin{array}{l} P_1 = 1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}; \\ n = 5. \\ \hline P = ? \quad P' = ? \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \boxed{R} \text{---} \boxed{R} \text{---} \\ | \\ \text{---} \boxed{R} \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{l} R \stackrel{22}{=} \sum_{i=1}^n R_i; \\ P \stackrel{32}{=} \frac{U^2}{R}; \\ U \stackrel{41}{=} \sum_{i=1}^n U_i. \end{array}$$

Решение. Пусть P — мощность всех плиток, а P' — каждой из них:

$$\begin{aligned} P &= \frac{U^2}{nR} = \frac{U^2 P_1}{nU^2} = \frac{P_1}{n} = \frac{10^3 \text{ Вт}}{5} = 200 \text{ Вт}, \\ P' &= \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 P_1}{n^2 U^2} = \frac{P_1}{n^2} = \frac{10^3 \text{ Вт}}{25} = 40 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Последний ответ можно получить короче:

$$P' = P/n = P_1/n^2.$$

Задача III.16. Линия электропередачи длиной 35 км находится под напряжением 140 кВ и рассчитана на передачу мощности 7 МВт. Потери в линии не должны превышать 5% переданной энергии. Определить площадь сечения медных проводов для такой линии.

$$\begin{array}{l} l/2 = 35 \text{ км} = 35 \cdot 10^3 \text{ м}; \\ U = 140 \text{ кВ} = 14 \cdot 10^4 \text{ В}; \\ P = 7 \text{ МВт} = 7 \cdot 10^6 \text{ Вт}; \\ \Delta P/P \leq 5\% \\ \hline S = ? \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ЛЭП} \\ \text{---} I \text{---} \\ U \quad \quad \quad P \\ \text{---} l/2 \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{l} R \stackrel{22}{=} \rho \frac{l}{S}; \\ P \stackrel{32}{=} I^2 R \stackrel{42}{=} IU. \end{array}$$

Решение. Рассчитывая линию передачи, учтем, что переданная мощность должна быть равна P , тогда мощность на входе линии должна быть выше на ΔP — потери мощности в самой линии: $P + \Delta P = IU$, где $\Delta P = I^2 R$. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{\rho l}{R} = \frac{\rho l I^2}{\Delta P} = \frac{\rho l}{\Delta P} \left(\frac{P + \Delta P}{U} \right)^2 = \frac{\rho l (P + 0,05P)^2}{0,05PU} = \frac{\rho l P 1,05^2}{0,05U^2} = \\ &= \frac{0,017 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2 \cdot 70 \cdot 10^3 \text{ м} \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot \text{А} \cdot \text{В} \cdot 1,05^2}{\text{м} \cdot 0,05 \cdot 14^2 \cdot 10^8 \text{ В}^2} = 9,4 \text{ мм}^2. \end{aligned}$$

Задача III.17. Какое число атомов кислорода и водорода выделилось на электродах при прохождении через подкисленную воду заряда 16 Кл?

$$\frac{Q = 16 \text{ Кл.}}{N_H - ? \quad N_O - ?} \quad \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \frac{1}{e} = \text{const.}$$

Решение. Количество электричества, прошедшее через раствор, связано с числом атомов вещества, выделяющегося на электродах:

$$Q = eN_H; \quad Q = 2eN_O.$$

Следовательно,

$$N_H = \frac{Q}{e} = \frac{16 \text{ Кл}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}} = 10^{20};$$

$$N_O = \frac{Q}{2e} = \frac{16 \text{ Кл}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}} = 0,5 \cdot 10^{20}.$$

Задача III.18. На сколько равных частей нужно разрезать проволоку сопротивлением 400 Ом, чтобы при параллельном соединении этих частей получить сопротивление 4 Ом?

$$\frac{R = 400 \text{ Ом};}{R_1 = 4 \text{ Ом.}} \quad R \stackrel{42}{=} \sum_{i=1}^n R_i;$$

$$\frac{1}{R} \stackrel{44}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

Решение. Пусть сопротивление каждой части r . Тогда

$$R = nr; \quad 1/R_1 = n/r.$$

Решая совместно эти уравнения, находим $R = nrR_1$, откуда

$$n = \sqrt{\frac{R}{R_1}} = \sqrt{\frac{400 \text{ Ом}}{4 \text{ Ом}}} = 10.$$

Задача III.19. Самолет с размахом крыльев 25 м летит горизонтально со скоростью 1080 км/ч в магнитном поле Земли, вертикальная составляющая напряженности которого 2,8 А/м. Найти разность потенциалов на концах крыльев.

$$l = 25 \text{ м}; \quad |\mathcal{E}| \stackrel{79}{=} vB \sin \alpha;$$

$$v = 1080 \text{ км/ч} = 1080 \cdot \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}}; \quad B \stackrel{87}{=} \mu_0 H.$$

$$H = 2,8 \text{ А/м.}$$

$$\mathcal{E} - ?$$

Решение. Э. д. с. индукции

$$\mathcal{E} = v\mu_0 H l = \frac{1080 \cdot 10 \text{ м} \cdot 25 \text{ м} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot 2,8 \text{ А}}{36 \text{ с} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ В.}$$

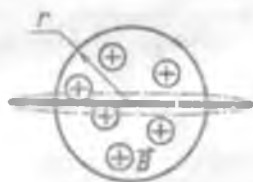
Задача III.20. Медное кольцо радиусом 20 см и сопротивлением 20 Ом, расположенное в магнитном поле перпендикулярно вектору индукции 0,04 Тл, вытягивают в сложенную вдвое прямую. Какой при этом индукционный заряд проходит по материалу кольца?

$$r = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м};$$

$$R = 20 \text{ Ом};$$

$$B = 0,04 \text{ Тл.}$$

$$\Delta Q = ?$$



$$I = \frac{32}{R} \frac{d\Phi}{dt}; \quad \mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt};$$

$$I = \frac{40}{R} \mathcal{E};$$

$$\Phi = BS.$$

Решение. Заряд, проходящий через любое сечение проводника:

$$\Delta Q = \int I dt = \int \frac{\mathcal{E}}{R} dt = - \int \frac{d\Phi}{dt R} dt = - \frac{\Phi}{R} = \frac{B\pi r^2}{R} =$$

$$= \frac{0,04 \text{ Тл} \cdot \pi \cdot 0,2^2 \text{ м}^2}{20 \text{ Ом}} = \frac{0,04 \cdot 0,2^2 \pi \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}}{20 \text{ А} \cdot \text{м} \cdot \text{В}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

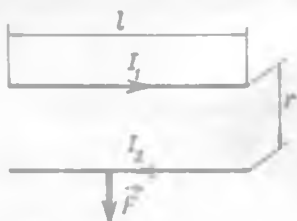
Задача III.21. По двум параллельным шинам длиной 60 см, находящимся на расстоянии 5 см, идут токи силой по 200 А. Определить силу взаимодействия шин.

$$I_1 = I_2 = I = 200 \text{ А};$$

$$l = 60 \text{ см} = 0,6 \text{ м};$$

$$r = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м.}$$

$$F = ?$$



$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}$$

Решение. Сила взаимодействия параллельных проводов с токами

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot 200^2 \cdot \text{А}^2 \cdot 0,6 \text{ м}}{\text{м} \cdot 2\pi \cdot 0,05 \text{ м}} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 200^2 \cdot 0,6 \text{ В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^2}{0,05 \text{ А} \cdot \text{м}} =$$

$$= 9,6 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

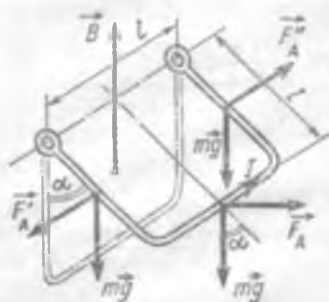
Задача III.22. Медный провод, площадь сечения которого 2 мм², согнут в виде трех сторон квадрата и подвешен за концы к горизонтальной оси в вертикальном магнитном поле. Когда по проводу пропускают ток силой 10 А, он отклоняется от вертикали на угол 15°. Определить магнитную индукцию.

$$S = 2 \text{ мм}^2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$I = 10 \text{ А};$$

$$\alpha = 15^\circ.$$

$$B = ?$$



$$F_A = IBl;$$

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0;$$

$$\rho = \frac{32 \cdot l}{m/V}.$$

Решение. Силы Ампера F_A и F_B , действующие на боковые стороны рамки, уравновешиваются. Рамка висит неподвижно, потому что уравновешиваются моменты действующих на нее сил.

Обозначим m и l , соответственно массу и длину одной стороны рамки. Условие равновесия:

$$2mg \cdot \frac{1}{2} l \sin \alpha + mgl \sin \alpha - F_A l \cos \alpha = 0.$$

Отсюда

$$F_A = 2mg \sin \alpha / \cos \alpha = 2mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B &= \frac{F_A}{l} = \frac{2mg \operatorname{tg} \alpha}{l} = \frac{2\rho Vg \operatorname{tg} \alpha}{l} = \frac{2\rho Sg \operatorname{tg} \alpha}{l} = \\ &= \frac{2 \cdot 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot 9,81 \cdot \text{м} \cdot \operatorname{tg} 15^\circ}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2 \cdot 10 \text{ А}} = 9,4 \text{ мТл}. \end{aligned}$$

РАЗДЕЛ IV

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ГЛАВА I

КОЛЕБАНИЯ

Колебания очень широко распространены в природе и технике. *Колебательным* называется процесс, в котором какая-либо его характеристика последовательно отклоняется то в одну, то в другую сторону от своего определенного значения. Колеблются температура воздуха, ствол и ветви дерева, вода в морях и океанах, автомобиль на рессорах, ток в грозовом разряде, магнитное поле Земли и т. д.

Колебания бывают *периодическими* и *непериодическими*. Непериодические колебания можно разложить на периодические составляющие, поэтому мы здесь в основном будем изучать периодические колебания. Они описываются периодической функцией

$$f(t) \stackrel{16-1}{=} f(t + nT), \quad (1)$$

где наименьшее время повторения T — *период функции*; n — произвольное целое число.

Описать колебательный процесс — это значит выбрать характерный параметр процесса, зависящий от времени, и составить *уравнение колебаний*, которому он подчиняется. Затем надо найти решение этого уравнения, т. е. *закон колебаний* — зависимость выбранного параметра от времени.

Из всевозможных периодических колебаний мы рассмотрим колебания *гармонические**, происходящие по закону синуса или косинуса. Математика дает способ разложения негармонических колебаний на конечное или бесконечное число гармонических составляющих. Поэтому в конечном итоге всякие колебания сводятся к гармоническим.

Гармоническая система обычно имеет одно положение, в котором может пребывать сколь угодно долго, будучи предоставлена самой себе. Это *положение равновесия*. Система, выведенная из положения равновесия и предоставленная самой себе, совершает *собственные колебания*. Колебания, совершаемые под внешним воздействием, называются *вынужденными*. Если энергия системы не изменяется, ее колебания — *незатухающие*. Колебания с уменьшающейся энергией — *затухающие*.

Различают *механические* и *электрические* колебания. Несмотря на существенные различия механических и электрических систем, как мы увидим, в их колебаниях есть много общего. Именно поэтому однотипные колебания изучаются параллельно.

* harmonikos (греч.) — созвучный, соразмерный, стройный.

Из всевозможных колебаний рассмотрим подробно наиболее простые *собственные незатухающие гармонические колебания систем с сосредоточенными параметрами*. Каждый такой параметр сосредоточен в одном элементе системы: вся масса — в одной точке, вся упругость — в одной пружине, вся емкость — в одном конденсаторе и т. д.

Отклонение механической системы от положения равновесия называется *смещением*, эта величина зависит от времени и удобна для описания механических колебаний. Как будет видно в дальнейшем, аналогичную роль в электрических колебаниях играет заряд.

Наибольшее смещение называют *амплитудой* колебаний.

Периодические колебания совершаются циклично, начиная с некоторого времени все положения последовательно повторяются. Движение системы в течение одного цикла называется *полным колебанием*. Время одного полного колебания естественно назвать *периодом колебаний*. Пусть за время t система совершила N полных колебаний. Тогда период колебаний

$$T = t/N. \quad (2)$$

Число полных колебаний, совершенных за единицу времени, называется *частотой колебаний*:

$$f = N/t. \quad (3)$$

Из сопоставления формул (2) и (3) видим, что период и частота — величины обратные:

$$T = 1/f. \quad (4)$$

В СИ частота выражается в герцах (Гц).

Один герц — частота колебательного процесса, при которой за 1 с происходит один цикл этого процесса:

$$1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

§ 1.1. Пружинный маятник

В качестве простейшей колебательной системы рассмотрим горизонтальный *пружинный маятник*.

Шарик массой m может без сопротивления скользить по горизонтальному стержню (рис. 312). Сила тяжести P уравновешивается реакцией стержня и может не учитываться. К шарiku и к стенке прикреплен пружина жесткостью k и пренебрежимо малой массой. Таким образом, можно считать всю массу системы сосредоточенной в шарике, всю упругость — в пружине. Растяжение пружины равно нулю, когда шарик находится в положении O . Смещение x шарика в любой момент времени равно деформации пружины. Амплитуда колебаний A .

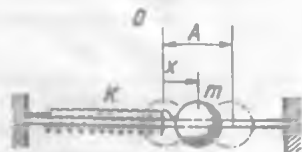


Рис. 312

Маятник совершает колебания около положения O , двигаясь поступательно. Для описания такого движения известно основное уравнение

динамики поступательного движения:

$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{\text{III}}{=} ma.$$

Сила, действующая на шарик, — это сила упругости пружины, подчиняющаяся закону Гюка:

$$F \stackrel{\text{III}}{=} -kx.$$

Следовательно, в проекциях на направление движения:

$$-kx = ma.$$

Мы получили, что ускорение маятника

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

т. е. пропорционально смещению и направлено к положению равновесия. Это одно из определений гармонических колебаний.

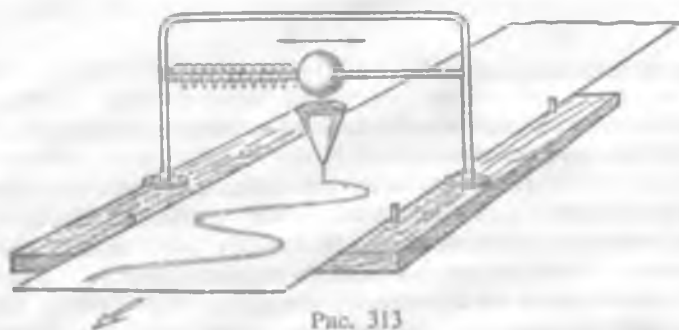
Вспомним, что $\ddot{x} \stackrel{\text{VI}}{=} \frac{dv}{dt} \stackrel{\text{I-I}}{=} \frac{d^2x}{dt^2} = x''$. Тогда

$$-kx = mx'' \text{ или } mx'' + kx = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний пружинного маятника обычно записывают в виде

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5)$$

Оно представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами без первой производной и без правой части. Нам нужно решить это уравнение, т. е. найти в явном виде зависимость $x(t)$, удовлетворяющую выражению (5).



Если жестко прикрепить к шарiku воронку с песком, а под маятником перпендикулярно стержню во время колебаний равномерно протянуть длинный лист бумаги, то песок, высыпаясь из воронки, образует развертку колебаний — зависимость смещения от времени (рис. 313). Эта кривая — синусоида или косинусоида; положение равновесия соответствует точкам $x = 0$ (см. рис. 312). На основании этого опыта предполагаем, что зависимость $x(t)$ гармонична.

Время в этой зависимости должно стоять в аргументе косинуса (или синуса). Придется умножить время на некоторый множитель ω_0 , чтобы произведение имело смысл угла. Но в момент времени $t = 0$ смещение может быть произвольным (в пределах от $+A$ до $-A$). Значит, аргумент косинуса необходимо дополнить некоторым слагаемым, не зависящим от времени: $\omega_0 t + \varphi_0$. В какой-то момент времени косинус достигнет своего наибольшего значения — единицы. В этот момент смещение должно быть наибольшим. Поэтому перед косинусом надо написать постоянный множитель, равный амплитуде колебаний. Тогда решение уравнения (5) должно иметь вид

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (6)$$

Его первая производная имеет смысл скорости:

$$v \stackrel{1.1}{=} \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (7)$$

[в соответствии с формулами (9), (19), (29), (10) математического введения]. Вторая производная смещения, как уже отмечено, — это ускорение

$$a \stackrel{x}{=} \frac{dv}{dt} \stackrel{2.1}{=} -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8)$$

Подставим выражения (6) и (8) в уравнение (5). Если выражение (6) — его решение, то оно обратит это уравнение в тождество:

$$-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{k}{m} A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \stackrel{5}{=} 0.$$

Ни амплитуда колебаний, ни $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ не равны нулю тождественно (т. е. в любые моменты времени). Поэтому на них можно почленно разделить полученное тождество:

$$-\omega_0^2 + k/m = 0.$$

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на коэффициент при t в (6). Теперь видно, что выражение (6) действительно обращает уравнение (5) в тождество при условии

$$\omega_0^2 = k/m. \quad (9)$$

Мы получили закон колебаний пружинного маятника в форме косинусоиды (6). Этот закон должен подчиняться условию периодичности:

$$x(t) \stackrel{1}{=} x(t + nT_0),$$

где T_0 — период незатухающих колебаний пружинного маятника. Это условие принимает вид

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A \cos[\omega_0(t + nT_0) + \varphi_0].$$

Равенство косинусов означает, что аргументы отличаются на 2π , так как косинус — периодическая функция с периодом 2π . Поэтому

$$\omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi = \omega_0(t + nT_0) + \varphi_0.$$

откуда после очевидных преобразований получаем

$$\omega_0 = 2\pi/T_0. \quad (10)$$

Если взять 2π единиц времени и разделить на время одного полного колебания T_0 , то получится число колебаний за выбранное время. Следовательно, круговая или циклическая частота ω_0 равна числу полных колебаний, которые система может совершить за 2π единиц времени.

Величина ω_0 связана с параметрами системы условием (9). Теперь появляется возможность вычислить частоту собственных колебаний или их период.

Период колебаний пружинного маятника

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (11)$$

Конечно, эту формулу можно проверить экспериментально.

§ 1.2. Физический маятник

Физическим маятником называется любое тело, имеющее горизонтальную ось вращения, проходящую не через центр тяжести. Мы рассмотрим движение маятника, имеющего закрепленную ось подвеса O (рис. 314). Такой маятник совершает вращательное движение, поэтому уравнение колебаний получим из основного уравнения динамики вращательного движения:

$$\sum_{i=1}^n M_i = J\varepsilon.$$

На маятник действует сила тяжести P , момент которой равен $mgl \sin \alpha$ и направлен к читателю. Моменты остальных сил (реакции) равны нулю. Ограничимся углами, для которых $\sin \alpha \approx \alpha$ (в радианах! Отличие синуса от его аргумента для углов до 9° не превышает 0,5%). Припишем углу α направление по правилу правого винта, т. е. навстречу моменту силы. Это справедливо для любого отклонения маятника (убедитесь в этом сами). Считаем направление углового ускорения положительным. Тогда угол α будет отрицательным, а так как они направлены по одной прямой, можем переписать уравнение движения в скалярной форме для проекций на ось:

$$-mgl\alpha = J\varepsilon.$$

Угловое ускорение равно

$$\varepsilon \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha'',$$

где ω — модуль угловой скорости.

Следовательно, уравнение гармонических колебаний физического маятника принимает вид $-mgl\alpha = J\alpha''$ или

$$\alpha'' + mgl/J \cdot \alpha = 0. \quad (12)$$

Оно аналогично уравнению (5). Его решение подобно уравнению (6):

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (13)$$



Рис. 314

Первая производная углового смещения — угловая скорость маятника

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' \stackrel{19,29-M}{=} -\alpha_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Вторая производная, как уже отмечено, — угловое ускорение

$$\varepsilon = \alpha'' \stackrel{20-M}{=} -\alpha_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Подставляя в уравнение колебаний α и α'' , получаем тождество

$$-\alpha_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + mgl/J \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \stackrel{12}{=} 0.$$

Ни α_m , ни $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ не равны нулю тождественно. Тогда $-\omega_0^2 + mgl/J \stackrel{27-M}{=} 0$. Это справедливо, если

$$\omega_0^2 = mgl/J. \quad (14)$$

Следовательно, при условии (14) выражение (13) является законом гармонических колебаний физического маятника. Величины α — угловое смещение, α_m — амплитуда колебаний, ω_0 — круговая частота имеют тот же смысл и аналогичны соответствующим характеристикам пружинного маятника. В частности, период незатухающих колебаний физического маятника равен

$$T_0 \stackrel{10}{=} 2\pi/\omega_0 \stackrel{14}{=} 2\pi \sqrt{J/(mgl)}. \quad (15)$$

Обратите внимание на то, что гармоническими колебания маятника будут только при малых углах отклонения, для которых справедливо (27-М).

Частным случаем физического маятника является маятник математический — материальная точка, подвешенная на нерастяжимой нити (рис. 315). Часто при рассмотрении колебаний такого маятника проецируют силу тяжести P на направления касательной к траектории и нити. Затем нередко утверждают, что F_1 сообщает маятнику тангенциальное ускорение, а F_2 уравновешивается реакцией нити Q . Последнее вообще неверно во всех точках, кроме крайних (сила $Q - F_2$ должна сообщить нормальное ускорение, т. е. равна mv^2/l , а не нулю!).

Но и само разложение (правильное по существу и поучительное, как мы видели) оказывается излишним, если применить основное уравнение динамики вращательного движения. Все уравнения окажутся такими же (убедитесь в этом сами), как для физического маятника, только $J \stackrel{21-1}{=} ml^2$ (момент инерции материальной точки относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рис. 315).

Уравнение колебаний математического маятника примет вид

$$\alpha'' + \frac{mgl}{ml^2} \alpha \stackrel{12}{=} 0 \quad \text{или} \quad \alpha'' + \frac{g}{l} \alpha = 0,$$

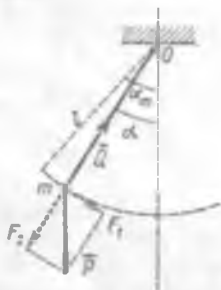


Рис. 315

закон колебаний такого маятника имеет форму (13), где $\omega_0^2 = \frac{mg}{l} = \frac{g}{l}$.

Период гармонических колебаний математического маятника

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Эта формула подтверждает все четыре экспериментальных закона гармонических колебаний математического маятника:

1. Период колебаний не зависит от масс. Это типичное свойство полей сил тяготения, где большая сила сообщает большей массе такое же ускорение, как меньшая сила меньшей массе ($F \sim m$, $a \sim F/m$, поэтому ускорение от массы не зависит).

2. Период колебаний не зависит от амплитуды. Это свойство маятника (не только математического) называется *изохронностью** и позволяет построить целый ряд современных часов (маятниковые, пружинные, камертонные и т. д.).

3. Период колебаний прямо пропорционален корню квадратному из длины маятника. Вспомните, как регулируют ход обыкновенных маятниковых часов (настенных и напольных).

4. Период колебаний обратно пропорционален корню квадратному из ускорения свободного падения. Последний закон позволяет точно измерить ускорение свободного падения в каждой точке Земли и экспериментально установить его зависимость от высоты. По таким же измерениям удастся определить местные искажения гравитационного поля, зачастую связанные с наличием полезных ископаемых.

§ 1.3. Колебательный контур

Рассмотрим идеальный (без сопротивления) колебательный контур с сосредоточенными параметрами — контур Томсона (рис. 316). Присоединив к схеме источник постоянного напряжения (ключ в положении 1,



Рис. 316

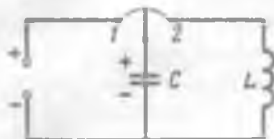


Рис. 317

рис. 317), зарядим конденсатор, затем перебросим ключ в положение 2, тем самым отсоединив источник и замкнув контур (рис. 318, а). Конденсатор начнет разряжаться через индуктивность, причем ток разрядки будет нарастать. На рис. 319 изображен график зависимости силы тока в контуре от времени. Конденсатор разряжается не мгновенно, потому что катушка обладает индуктивным сопротивлением, другими словами, при нарастании силы тока растет индукция магнитного поля, вызывающая э. д. с. и ток самоиндукции в контуре, направленные по правилу Ленца навстречу увеличению силы тока разрядки (0—1, рис. 319 и 318, б; стрелками, перпендикулярными линиям индукции, показано направление «разворачивания» магнитного поля). Это нарастание силы тока (и магнит-

* isos (греч.) — равный, chronos — время.

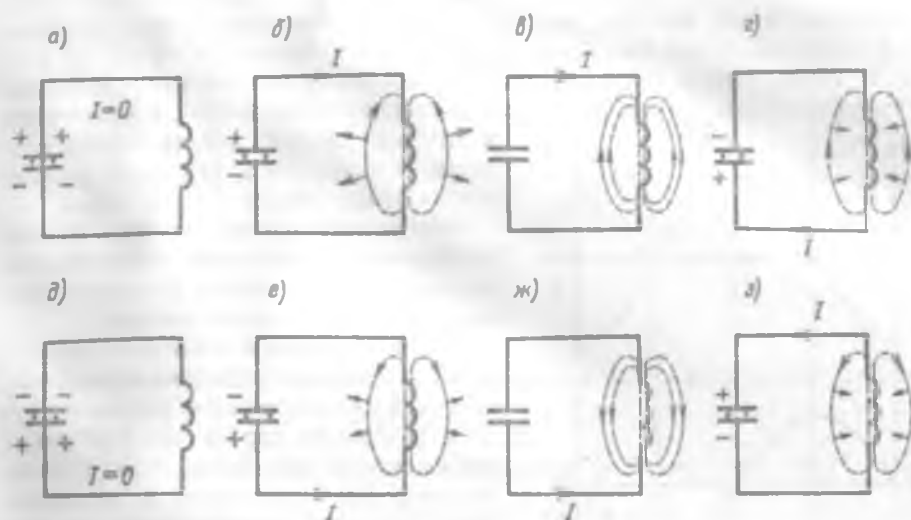


Рис. 318

ного поля) по мере уменьшения заряда на конденсаторе идет все медленнее и становится равным нулю, когда конденсатор разрядится (см. рис. 318, в). Э. д. с. самоиндукции, мешающая току разрядки, уменьшается и достигает нуля в точке 1 (рис. 319), где сила тока максимальна. Магнитное поле начинает исчезать (см. рис. 318, г), уменьшается сила тока, но не мгновенно, так как при этом тоже возникают э. д. с. и ток самоиндукции в контуре, направленные по правилу Ленца навстречу уменьшению силы тока разрядки, т. е. в направлении тока разрядки (1—2, рис. 319). Катушка является источником тока и «гонит» электроны с одной незаряженной пластины на другую, перезаряжая конденсатор. Сила тока уменьшается, а скорость его уменьшения увеличивается, э. д. с. самоиндукции возрастает и достигает максимума при исчезновении тока (2, рис. 319).

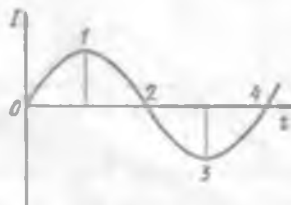


Рис. 319

При этом конденсатор оказывается перезаряженным, нет тока (см. рис. 318, д) и есть цепь разрядки. Конденсатор начинает разряжаться, э. д. с. самоиндукции препятствует току разрядки, сила которого возрастает все медленнее (2—3, рис. 319). При этом магнитное поле разворачивается (см. рис. 318, е). Сравните направления магнитных линий с направлениями аналогичных линий на рис. 318, б). Э. д. с. самоиндукции уменьшается до нуля в точке 3 (рис. 319), где заряд конденсатора тоже равен нулю (см. рис. 318, ж). Сила тока начинает уменьшаться, возникает э. д. с. самоиндукции, препятствующая уменьшению силы тока, следовательно, поддерживающая ток в прежнем направлении. Катушка является источником тока, который перегоняет электроны с одной незаряженной пластины на другую, снова перезаряжая конденсатор (см. рис. 318, з). Сила тока

уменьшается все быстрее, растут заряды на пластинах конденсатора и э. д. с. самоиндукции (все быстрее уменьшается магнитное поле).

В точке 4 (рис. 319) сила тока равна нулю, конденсатор вторично перезаряжен (как на рис. 318, а), э. д. с. самоиндукции достигла максимума

и начинает препятствовать новой разрядке конденсатора. Процесс повторяется, как от точки 1 (рис. 319).

Мы качественно описали один период электрических колебаний — процесса изменения электрического и магнитного полей в колебательном контуре.

Рассматриваемые колебания происходят в цепи с сосредоточенными емкостью и индуктивностью и заключаются в изменении заряда на электродах конденсатора или силы тока в цепи. На рис. 320 изображены в зависимости от времени графики заряда на конденсаторе, скорости изменения силы тока, э. д. с. самоиндукции катушки и силы тока в контуре (эта зависимость изображена для сравнения, она уже была дана на рис. 319).

Пусть направление тока (см. рис. 318, б) положительно. Если бы вместо конденсатора при указанном токе было активное сопротивление, то падение напряжения на нем IR было бы положительным. При этом знаки потенциалов были бы противоположны знакам зарядов на конденсаторе. Поэтому заряд на конденсаторе (см. рис. 318, б) отрицателен. Иначе, этот заряд появился на конденсаторе в результате протекания по цепи отрицательного тока.

Для количественного описания электрических колебаний нужно применить к колебательному контуру второе правило Кирхгофа:

$$\sum_{i=1}^n U_i \stackrel{\text{III}}{=} \sum_{j=1}^k \mathcal{E}_j.$$

Падение напряжения в произвольный момент времени равно напряжению на конденсаторе:

$$U \stackrel{\text{III}}{=} Q/C.$$

Единственная э. д. с. в контуре — это э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_c \stackrel{\text{II-III}}{=} -L \frac{dI}{dt}.$$

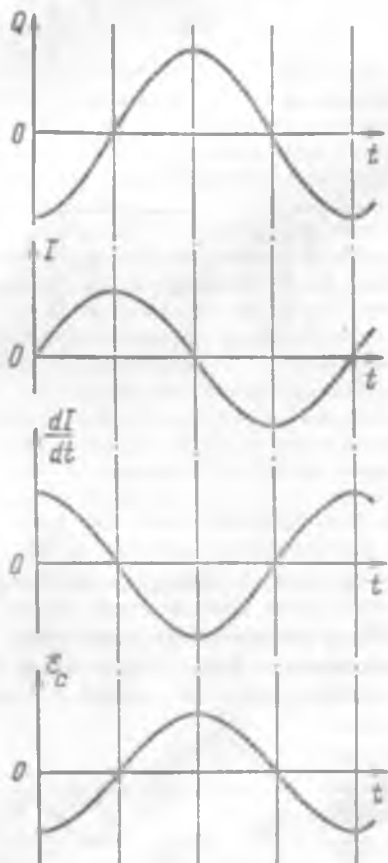


Рис. 320

Следовательно,

$$\frac{Q}{C} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Вспомним, что $I \stackrel{22.111}{=} \frac{dQ}{dt} = Q'$. Тогда $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} = Q''$, и уравнение гармонических колебаний заряда в колебательном контуре (электрических колебаний) принимает вид $Q/C = -LQ''$ или

$$Q'' + \frac{1}{LC}Q = 0. \quad (16)$$

Оно похоже на уравнение (5). Его решение аналогично уравнению (6):

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (17)$$

Первая производная заряда — мгновенное значение силы тока

$$I = Q' \stackrel{22.111}{=} -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (18)$$

Вторая производная заряда

$$Q'' \stackrel{22.111}{=} -Q_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Подставляя в уравнение колебаний выражения Q и Q'' , получаем

$$-Q_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{LC} Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \stackrel{18}{=} 0.$$

Снова ни Q_m , ни $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ не равны нулю тождественно. Тогда, если

$$\omega_0^2 = 1/(LC), \quad (19)$$

выражение (17) обращает уравнение (16) в тождество, т. е. является законом гармонических колебаний заряда в томсоновском колебательном контуре.

Все величины и закономерности, установленные для гармонических колебаний в механике, сохраняют свой смысл и в электрических колебаниях. В частности, период таких колебаний не зависит от амплитуды заряда и равен

$$T_0 \stackrel{18}{=} 2\pi/\omega_0 \stackrel{19}{=} 2\pi\sqrt{LC} \quad (20)$$

— формула Томсона.

Вообще, можно провести аналогию между соответствующими механическими и электрическими характеристиками разобранных нами систем: масса — момент инерции — индуктивность; жесткость — произведение mg — величина, обратная емкости; смещение — угловое смещение — заряд; скорость — угловая скорость — сила тока; ускорение — угловое ускорение — скорость изменения силы тока.

Мы видим, что независимо от природы данного колебательного процесса и характера колеблющейся величины колебания совершаются одинаково, по одним и тем же законам, если системы подчиняются одинаковым закономерностям (несущественно, какая именно величина колеб-

лется, важно, как она колеблется, какие колебания совершает). Так, на рис. 320 совершенно аналогично выглядели бы зависимости $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ для пружинного маятника и т. д.

Для совершения гармонических колебаний в любой системе должны действовать упругие или квазиупругие силы (моменты, напряжения и т. п.), пропорциональные смещению и направленные к положению равновесия. Под воздействием квазиупругой причины система возвращается к положению равновесия. Для того чтобы его пройти, система должна обладать инертностью (массой, моментом инерции, индуктивностью). В системе не должно быть каких-либо потерь. Такая система, выведенная из положения равновесия, будет совершать незатухающие гармонические колебания, закон которых имеет форму (6), а уравнение — форму

$$x'' + \omega_0^2 x \stackrel{5.9}{=} 0.$$

Величина x'' в рассмотренных примерах имела смысл ускорения (dl/dt — тоже «ускорение», т. е. скорость изменения силы тока, которая в свою очередь является скоростью изменения заряда).

§ 1.4. Описание гармонических колебаний

Сформулируем закономерности, справедливые для всяких гармонических колебаний. Для этого построим график зависимости смещения от времени, приняв пока $\varphi_0 = 0$ (рис. 321). Здесь время t измерено в долях

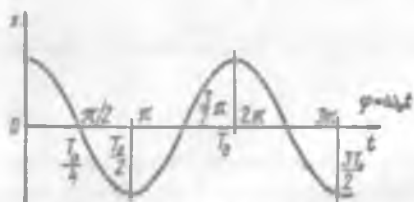


Рис. 321

периода T_0 (обозначения ниже оси абсцисс). Умножив все значения t на постоянную величину ω_0 , мы тем самым изменяем только масштаб графика. Независимой переменной теперь будет угол $\omega_0 t$ (это аргумент тригонометрической функции; значения соответствующих углов приведены выше оси абсцисс).

На рис. 322 изображена зависимость $x(t)$ в общем случае. Там же над осью времен отложен угол, являющийся аргументом косинуса в законе колебаний (6). Этот угол

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \quad (21)$$

называется *фазой колебаний*.

Один из самых наглядных математических способов изображения гармонически изменяющихся величин состоит в построении *векторной диаграммы*.

Имеем гармоническую величину $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Проведем две взаимно перпендикулярные оси. От их точки пересечения в каком-то масштабе отложим под углом $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ к горизонтальной оси амплитуду колебаний величины x в виде вектора A (потому диаграмма называется векторной, рис. 323). Его проекция на горизонтальную ось представляет собой мгновенное значение величины x в момент времени t , так как $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = x/A$.

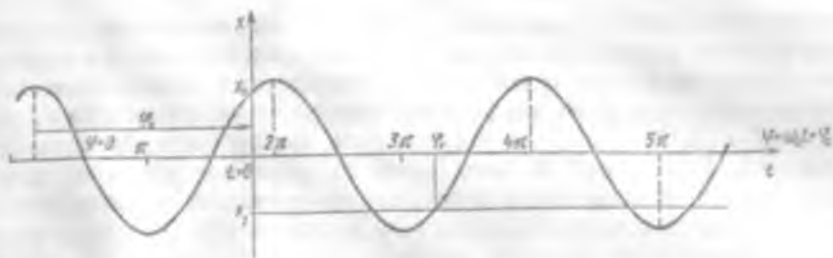


Рис. 322

Представим теперь, что вектор A равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 против часовой стрелки вокруг оси O , перпендикулярной плоскости рис. 323. Тогда угол φ , который вектор амплитуды составляет с положительным направлением горизонтальной оси, будет линейно расти со временем. Проекция амплитуды на горизонтальную ось наглядно изобразит мгновенные значения данной величины.

Первая производная этой величины

$$\begin{aligned} x' &\stackrel{\text{I}^{\text{м}}}{=} -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2). \end{aligned}$$

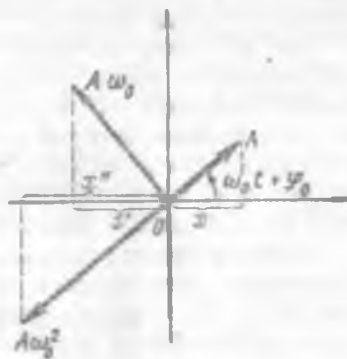


Рис. 323

Отложим амплитуду этой производной в виде вектора в тот же момент времени под углом $\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2$ (фаза величины x') к положительному направлению горизонтальной оси, т. е. под прямым углом к направлению вектора A . Легко доказать, что проекция этого вектора на горизонталь равна мгновенному значению первой производной данной величины в момент времени t . Вторая производная заданной величины

$$x'' \stackrel{\text{II}^{\text{м}}}{=} -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi).$$

Отложим амплитуду этой производной в виде вектора в момент времени t под углом $\omega_0 t + \varphi_0 + \pi$ (фаза величины x'') к положительному направлению горизонтальной оси или в сторону, противоположную вектору A . Проекция этого вектора на горизонталь равна мгновенному значению второй производной заданной величины в момент времени t .

Все отложенные амплитуды вращаются против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 . При этом изменяются мгновенные значения величин, амплитуды которых изображены на векторной диаграмме. Если все эти величины колеблются с одной частотой, то углы между равномерно вращающимися векторами остаются постоянными.

Таким образом, на векторной диаграмме наглядно изображаются гармонически изменяющиеся величины и фазовые соотношения между ними. Например, легко видеть, что когда смещение и ускорение равны нулю,

скорость имеет амплитудное значение (положение равновесия), а когда скорость равна нулю, смещение и ускорение максимальны по модулю. Видно также, что ускорение всегда по знаку противоположно смещению.

Кроме того, векторная диаграмма — единственный способ увидеть фазу колебаний. Для того чтобы выяснить смысл фазы, зададим два вопроса: что такое часы? В каких единицах измеряют время по современным часам? *Часами* является всякий периодический процесс (именно эта черта присуща всем часам, известным человечеству). По современным часовым циферблатам (название устарело, на некоторых из них нет ни одной цифры, даже черточек осталось мало) мы измеряем время в угловых единицах (поворот минутной стрелки на угол 90° означает, что прошло 15 мин, поворот часовой стрелки на угол 90° соответствует промежутку времени 3 ч и т. д. Конечно, все это не относится к электронным часам с цифровой индикацией).

В частности, векторная диаграмма (рис. 323) тоже может служить «часами», в которых «стрелкой» является вектор амплитуды, а угол его поворота — мера времени.

Так как одна из форм существования материи — время — не имеет ни начала, ни конца, нельзя указать точку на оси времен, с которой время «началось». Но в теории и на практике нас интересуют промежутки времени, которые не зависят от начала его отсчета, следовательно, это начало можно выбрать произвольно. Если закон колебаний косинусоидален, угол поворота нашей «стрелки» — амплитуды — равен нулю в одном из наибольших отклонений.

Поэтому примем за *начало колебаний* некоторое прохождение системой положения амплитудного отклонения. Это момент времени $\varphi = 0$ на рис. 322 и 323. Понятие «начала колебаний» не связано с возникновением процесса колебаний, который мог начаться раньше или позже и не обязательно из указанного положения. Более того, теоретическая косинусоида не имеет ни начала, ни конца.

Разумеется, за начало колебаний можно было принять любое другое прохождение наибольшего отклонения. Только смещения вблизи этого отклонения должны считаться положительными (косинус острого угла положителен).

Итак, *фаза колебаний* — это угловая мера времени, прошедшего с начала колебаний. В каком-либо процессе фаза равномерно увеличивается так же, как «обычное» время.

Понятие фазы несет в себе больше сведений о колебаниях, чем, например, смещение. Если задано смещение x_1 (см. рис. 322), то известно, где находится тело, но неизвестно, в какую сторону оно движется. Задав же фазу φ_1 , мы задали и смещение x_1 и направление движения — к положению равновесия. Фаза от заданного момента будет увеличиваться, следовательно, смещение — уменьшаться. Знание фазы позволяет по формулам (7) и (8) вычислить мгновенные значения скорости и ускорения или аналогичных им величин. Вообще, значение этого понятия во всей теории колебаний и волн трудно переоценить.

Момент времени $t = 0$ в общем случае не является началом колебаний, он представляет собой *начало отсчета времени*, зависящее от экспериментатора (например, момент включения секундомера). В этот момент все

характеристики называются начальными. Так, фаза в момент времени $t = 0$ — начальная фаза (φ_0 , см. рис. 322); смещение x_0 и скорость v_0 в этот момент времени — начальные условия. Зная начальные условия, можно найти амплитуду и начальную фазу колебаний. Действительно,

$$v_0 = -A\omega_0 \sin \varphi_0; v_0/\omega_0 = -A \sin \varphi_0; x_0 = A \cos \varphi_0.$$

Возведем два последних уравнения в квадрат и сложим почленно: $x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2 = A^2$, откуда $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$. Разделив почленно второе уравнение на третье: $v_0/(\omega_0 x_0) = -\operatorname{tg} \varphi_0$, получим $\varphi_0 = \operatorname{arctg} [-v_0/(\omega_0 x_0)]$.

Итак, в закон гармонических колебаний входят величины: смещение, амплитуда, фаза; в последнюю входят круговая частота, начальная фаза и время. Эти величины имеют фундаментальное значение во всей теории колебательных и волновых процессов. Круговая частота системы ω_0 определяется ее динамическими параметрами, т. е. конструкцией. Амплитуда и начальная фаза могут быть вычислены по начальным условиям.

Важнейшей характеристикой гармонических колебаний является их фаза, по которой можно узнать смещение и направление его изменения, а также мгновенные значения скорости (угловой скорости, силы тока) и ускорения (углового ускорения, скорости изменения силы тока — в наших примерах).

Метод описания колебаний всевозможных систем состоит в написании и решении основного уравнения соответствующего движения — для механических колебаний или второго правила Кирхгофа — для колебаний электрических.

§ 1.5. Энергия незатухающих гармонических колебаний

Пружинный маятник, совершающий гармонические колебания, имеет кинетическую и потенциальную энергии, сумма которых является полной энергией маятника.

Кинетическая энергия

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2}mv_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = T_m \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия

$$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = W_m \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Здесь $T_m = \frac{1}{2}mv_m^2$ — максимальная кинетическая, $W_m = \frac{1}{2}kA^2$ — максимальная потенциальная энергия пружинного маятника. Приходим к выводу, что энергии пропорциональны квадрату соответствующих амплитуд — скорости или смещения.

Полная энергия пружинного маятника

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2}kA^2 = W_m = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 = T_m = \text{const.} \end{aligned}$$

Мы доказали, что полная энергия гармонически колеблющейся системы постоянна и равна максимальной кинетической (в положении равновесия) или максимальной потенциальной (в крайних точках) энергии.

На рис. 324 изображены зависимости кинетической и потенциальной энергий от времени; для сравнения там же изображен график зависимости скорости от времени, аналогичный уже изученному нами графику $I(t)$ (см. рис. 319, значения начальных фаз на этих рисунках различны).

Если в один момент времени сложить ординаты двух последних графиков, получится амплитудное значение той или другой энергии. С течением времени потенциальная энергия переходит в кинетическую и обратно.

Совершенно аналогично изменяются потенциальная и кинетическая энергии в гармонических колебаниях других маятников и энергии электрического и магнитного полей в колебательном контуре. Например, энергия магнитного поля катушки

$$W_m \stackrel{83-III}{=} \frac{1}{2} LI^2, \quad (22)$$

энергия электростатического поля конденсатора

$$W \stackrel{34-III}{=} Q^2/(2C).$$

Полная энергия колебательного контура в произвольный момент времени равна

$$\begin{aligned} E = W_m + W &= LI^2/2 + Q^2/(2C) \stackrel{17-IV}{=} LQ_m^2\omega_0^2/2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ Q^2/(2C) \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \stackrel{19}{=} Q_m^2\omega_0^2/(2\omega_0^2 C) \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ Q^2/(2C) \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = Q_m^2/(2C) \stackrel{19}{=} LQ_m^2\omega_0^2/2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ Q_m^2 L\omega_0^2/2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = Q_m^2 L\omega_0^2/2 \stackrel{18}{=} LI_m^2/2 \stackrel{22}{=} (W_m)_m = \text{const.} \end{aligned}$$

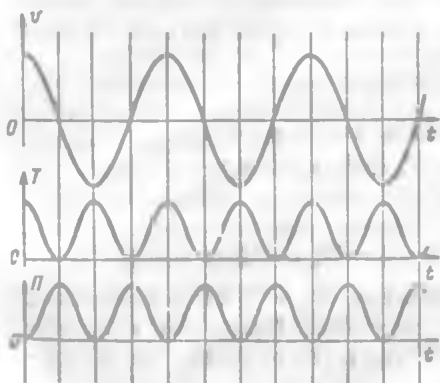


Рис. 324

Результат совершенно аналогичен полученному для пружинного маятника. Энергии магнитного и электрического полей изменяются аналогично кинетической и потенциальной энергиям (рис. 324), взаимно превращаясь в равных количествах друг в друга, так что их сумма остается неизменной и равной максимуму любой из них. Энергия электрического поля конденсатора (см. рис. 318, а) переходит в энергию магнитного поля катушки (см. рис. 318, в), еще через четверть периода энергия магнитного поля переходит в энергию электрического поля перезаряженного конденсатора

(см. рис. 318, в) и т. д. Так дважды за период энергия преобразуется из электрической в магнитную и обратно в равных количествах, если рассматривается контур без потерь.

В реальных условиях любой колебательной системы неизбежны потери, поэтому для получения практически незатухающих колебаний тем или

другим способом надо пополнять запасы расходуемой энергии. Сами по себе собственные колебания системы происходят с уменьшающейся амплитудой — это *затухающие колебания*. Как мы видели, энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Расходуется энергия — соответственно уменьшается амплитуда.

§ 1.6. Сложение колебаний

Пусть на систему воздействует несколько колебательных процессов. По принципу суперпозиции (см. разд. I, § 1.6) в каждый момент времени результирующее смещение будет векторной суммой составляющих. В случае сложения колебаний скалярных величин или направленных по одной прямой векторов результирующее смещение — алгебраическая сумма составляющих. Если складываются гармонические колебания произвольных частот (рис. 325), то сложение сводится к суммированию ординат в каждый момент времени (чем больше точек, тем точнее). Складывать колебания равных частот удобнее с помощью векторной диаграммы.

Рассмотрим скалярное сложение гармонических колебаний одинаковых частот:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Здесь x_1, x_2 — смещения в момент времени t ; A_1, A_2 — амплитуды; ω — круговая частота складываемых колебаний; φ_1, φ_2 — их начальные фазы.

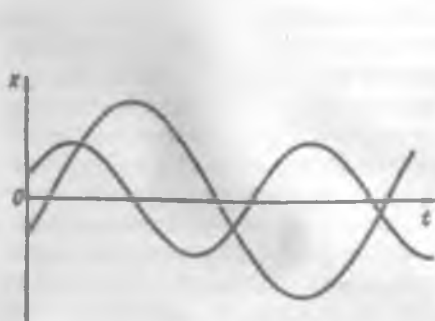


Рис. 325

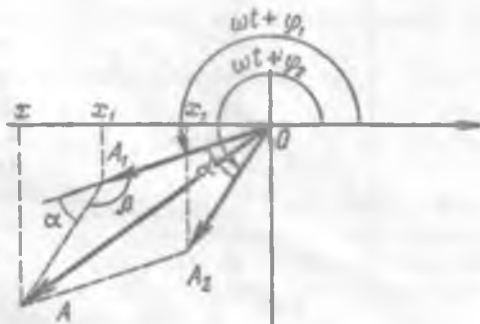


Рис. 326

Отложим амплитуды этих колебаний в момент времени t на векторной диаграмме (рис. 326). Сумма мгновенных значений x_1 и x_2 равна сумме проекций векторов A_1 и A_2 . Векторно сложим амплитуды, получим вектор A , проекция которого x , по известной математической теореме, равна сумме проекций x_1 и x_2 (теорема гласит: проекция суммы векторов на любое направление равна сумме проекций этих векторов на выбранное направление). Вспомним теперь, что все векторы (A_1, A_2 и, следовательно, A) равномерно вращаются против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Углы между ними не изменяются, т. е. весь параллелограмм амплитуд вращается как одно целое. Проекция равномерно вращающегося вектора неизменной длины A — гармонически изменяющаяся функция $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. Она является суммой двух гармонически изменяющихся

величин x_1 и x_2 . Неизвестные A и φ найдем тоже из векторной диаграммы, применив уже упоминавшуюся теорему о проекциях и теорему косинусов. В наших обозначениях

$$A^2 \stackrel{\text{т.к.}}{=} A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \beta.$$

Но $\cos \beta = -\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \alpha = -\cos(\omega t + \varphi_2 - \omega t - \varphi_1) = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$. Отсюда

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (23)$$

и

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Если векторная диаграмма изображена на рис. 327 в момент времени $t = 0$, то угол, образуемый вектором A с горизонтальной осью, равен начальной фазе результирующего процесса. Из треугольника OMA

$$\operatorname{tg} \varphi = |AM|/|OM|.$$

По теореме о проекциях, $|AM| = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2$, $|OM| = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$. Значит,

$$\operatorname{tg} \varphi = (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)/(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2), \quad (24)$$

откуда φ равно арктангенсу правой части равенства (24).

Итак, результат скалярного сложения двух гармонических колебаний одинаковых частот — гармоническое колебание той же частоты, амплитуда и начальная фаза которого определяются выражениями (23) и (24). Этот результат, естественно, можно обобщить на случай аналогичного сложения нескольких гармонических колебаний одинаковых частот. В результате тоже получится гармоническое колебание той же частоты, амплитуда

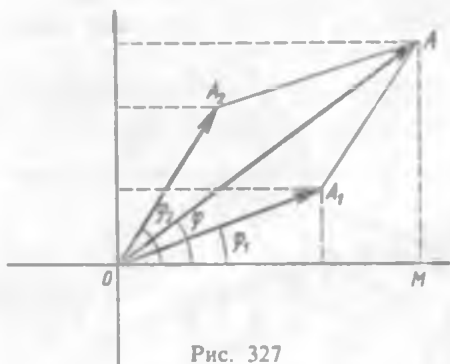


Рис. 327

которого $A = \sum_{i=1}^n A_i$. Начальная фаза результирующего процесса

$$\varphi \stackrel{24}{=} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sum_{i=1}^n A_i \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n A_i \cos \varphi_i} \right).$$

§ 1.7. Вынужденные колебания

Мы уже говорили (см. § 1.5), что сами по себе собственные колебания реальной системы затухают. Одним из самых важных способов поддержания незатухающих колебаний в реальных условиях является навязывание системе колебаний, которые она сама не совершала бы. Для этого систему подвергают внешнему воздействию, заставляя ее совершать

вынужденные колебания. Они совершаются по закону изменения и с частотой вынуждающего воздействия. Из всех вынужденных колебаний мы рассмотрим только те, которые вызываются гармоническими воздействиями. Через некоторое время после включения внешнего воздействия, когда затухнут собственные колебания системы, она будет совершать колебания по закону вынуждающего воздействия. В качестве примеров таких колебаний разберем колебания пружинного маятника и колебательного контура в реальных условиях. На пружинный маятник (рис. 328) действуют: сила тяжести P , сила упругости пружины $F_{\text{упр}} = -kx$, архимедова сила $F_{\text{Арх}}$, сила сопротивления движению $F_{\text{с}} = -rv$, наконец, вынуждающая сила, изменяющаяся по заданному гармоническому закону $F = F_m \cos(\omega t + \alpha)$. Как мы уже сказали, закон вынужденных колебаний можно написать еще до уравнения этих колебаний:

$$x = A \cos(\omega t + \beta), \quad (25)$$

где ω — круговая частота вынуждающей силы. Но в этом законе неизвестны амплитуда A и начальная фаза β . Поэтому придется составить уравнение движения. Пока на пружине не было шарика (сама пружина невесома), ее длина соответствовала отметке 0 (на этой отметке висел бы невесомый шарик).

При неподвижном шарике пружина растянулась на $x_{\text{ст}}$ (статическое). Шарик находится в равновесии, если $P - kx_{\text{ст}} - F_{\text{Арх}} = 0$. Уровень $x_{\text{ст}}$ есть положение равновесия данного маятника, от него удобно отсчитывать смещение.

Включим внешнюю гармоническую силу (на рис. 328 она схематически показана тягой, работающей от равномерно вращающегося эксцентрика). Через некоторое время маятник будет совершать незатухающие вынужденные колебания. Из основного уравнения динамики поступательного движения найдем уравнение движения маятника:

$$\text{Иначе} \quad P - k(x_{\text{ст}} + x) - F_{\text{Арх}} - rv + F = ma.$$

$$P - kx_{\text{ст}} - F_{\text{Арх}} - kx - rx' + F = mx''.$$

Первые три слагаемых взаимно уничтожаются, следовательно,

или

$$mx'' + rx' + kx = F$$

$$x'' + r/m x' + k/m x = F/m \cos(\omega t + \alpha).$$

Мы получили уравнение вынужденных колебаний пружинного маятника. Обозначим: $r/m = 2\delta$, $k/m = \omega_0^2$. Тогда уравнение вынужденных гармонических колебаний пружинного маятника примет вид

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = F/m \cos(\omega t + \alpha). \quad (26)$$

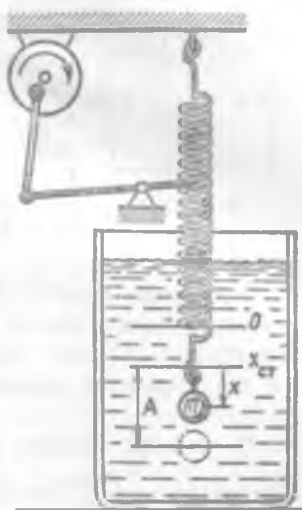


Рис. 328

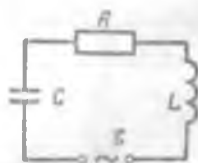


Рис. 329

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Оставим его на время и рассмотрим электрическую аналогию вынужденных колебаний — колебания в контуре (рис. 329), в который включена гармонически изменяющаяся э. д. с. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \alpha)$. По прошествии достаточного времени и здесь будут вынужденные колебания, закон которых

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \beta). \quad (27)$$

Уравнение колебаний получим из второго правила Кирхгофа:

$$\sum_{i=1}^n U_i \stackrel{18-III}{=} \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i.$$

В нашем контуре $U_C \stackrel{18-III}{=} Q/C$; $U_R \stackrel{39-III}{=} IR$; $\mathcal{E}_c \stackrel{42-III}{=} -L \frac{dI}{dt}$; $I \stackrel{32-III}{=} \frac{dQ}{dt}$. Следовательно, $Q/C + IR = -L dI/dt + \mathcal{E}$. Иначе,

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E}$$

или

$$Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{1}{LC}Q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos(\omega t + \alpha).$$

Введя аналогичные обозначения

$$R/L = 2\delta \quad (28)$$

и

$$\frac{1}{LC} \stackrel{19}{=} \omega_0^2$$

получим

$$Q'' + 2\delta Q' + \omega_0^2 Q = \mathcal{E}_m/L \cos(\omega t + \alpha) \quad (29)$$

— уравнение вынужденных колебаний в колебательном контуре, подобное (26). Еще раз убеждаемся: однотипные колебания совершаются одинаково, несмотря на различие систем. Уравнения (26) и (29) описывают подобные процессы с разными объектами и аналогично решаются. Поэтому достаточно рассмотреть одно из этих уравнений, например последнее.

Если $Q \stackrel{27}{=} Q_m \cos(\omega t + \beta)$ — заряд на конденсаторе, то сила тока в контуре

$$I \stackrel{32-III}{=} Q' \stackrel{18}{=} -Q_m \omega \sin(\omega t + \beta),$$

а ее изменение за единицу времени

$$Q'' = -Q_m \omega^2 \cos(\omega t + \beta) \text{ [см. § 1.3].}$$

Наибольшая сила тока связана с амплитудой заряда простым соотношением

$$I_m = Q_m \omega \quad (30)$$

(наибольшее значение синуса — единица).

Преобразуем найденные выражения силы тока и скорости его изменения, пользуясь формулами приведения:

$$I = Q' = -Q_m \omega \sin(\omega t + \beta) = Q_m \omega \cos(\omega t + \beta + \pi/2);$$

$$Q'' = -Q_m \omega^2 \cos(\omega t + \beta) = Q_m \omega^2 \cos(\omega t + \beta + \pi).$$

Подставим полученные выражения в уравнение колебаний:

$$Q_m \omega^2 \cos(\omega t + \beta + \pi) + 2\delta Q_m \omega \cos(\omega t + \beta + \pi/2) + \omega_0^2 Q_m \cos(\omega t + \beta) \stackrel{29}{=} \mathcal{E}_m/L \cos(\omega t + \alpha).$$

Это тождество представляет собой сумму гармонических колебаний одинаковых частот. Изобразим слагаемые левой части тождества на векторной диаграмме (рис. 330). Мы не знаем, конечно, величин Q_m и β , но они имеют определенные значения.

Некоторый угол обозначим β , прибавим к нему известное значение ωt и получим в данный момент времени t фазу заряда. Определенный отрезок обозначим Q_m , умножим его на известные величины ω_0^2 , $2\delta\omega$, ω^2 — получим векторы амплитуд слагаемых левой части уравнения. Отложим под углом $\omega t + \beta$ к горизонтальной оси вектор амплитуды третьего слагаемого $Q_m \omega_0^2$. Под углом 90° к этому направлению построим вектор амплитуды второго слагаемого $2\delta Q_m \omega$. Под углом $\omega t + \beta + \pi$ к горизонтальному направлению изобразим вектор амплитуды первого слагаемого $Q_m \omega^2$.

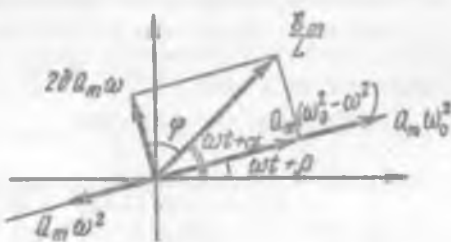


Рис. 330

Теперь на векторной диаграмме изображены амплитуды всех слагаемых левой части уравнения колебаний. Но сумма трех гармонических колебаний одинаковых частот (см. § 1.6) есть гармоническое колебание той же частоты, амплитуда которого равна векторной сумме амплитуд слагаемых.

Сложим первую и третью амплитуды. Получится вектор, направленный вдоль той же прямой и равный их разности $Q_m(\omega_0^2 - \omega^2)$. Сложим его векторно с оставшейся амплитудой, т.е. построим параллелограмм на этих векторах. Его диагональ представляет собой векторную сумму всех амплитуд левой части рассматриваемого тождества. Ее проекция на горизонтальную ось — мгновенное значение всей левой части тождества. Оно должно быть в любой момент времени равно мгновенному значению правой части, т.е. проекции амплитуд левой и правой частей равенства должны быть равны тождественно. Это возможно только при совпадении амплитуд левой и правой частей тождества.

Вектор амплитуды правой части равен $\mathcal{E}_m/L$. Угол его наклона к горизонтальной оси в момент времени t равен фазе вынуждающего воздействия $\omega t + \alpha$. Обозначим φ — угол между амплитудами $2\delta Q_m \omega$ и $\mathcal{E}_m/L$. Этот угол очень важен в электротехнике переменных токов. Угол на векторной диаграмме — это сдвиг фаз соответствующих колебаний. Амплитуда $2\delta Q_m \omega = 2\delta I_m$, т.е. с точностью до постоянного множителя, совпа-

дает с амплитудой силы тока, а $\mathcal{E}_m/L$ с точностью до постоянного множителя совпадает с амплитудой приложенного к контуру напряжения. Угол φ представляет собой сдвиг по фазе между силой тока и напряжением. Из векторной диаграммы проще всего найти Q_m и φ . По теореме Пифагора $(\mathcal{E}_m/L)^2 = Q_m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 Q_m^2 \omega^2$, откуда амплитуда заряда на конденсаторе

$$Q_m = \mathcal{E}_m / (L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}). \quad (31)$$

По определению,

$$\operatorname{tg} \varphi = Q_m (\omega_0^2 - \omega^2) / (2\delta Q_m \omega) = (\omega_0^2 - \omega^2) / (2\delta \omega). \quad (32)$$

Из рис. 330 $\varphi + \omega + \alpha - (\omega + \beta) = \pi/2$. Отсюда $\beta = \varphi + \alpha - \pi/2$. Теперь все величины, входящие в закон вынужденных колебаний (27), известны. Амплитуда силы тока в контуре

$$I_m \stackrel{30}{=} Q_m \omega \stackrel{31}{=} \mathcal{E}_m \omega / (L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}). \quad (33)$$

Преобразуем эту формулу:

$$\begin{aligned} I_m &\stackrel{33}{=} \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2) L / \omega]^2 + 4\delta^2 L^2}} \stackrel{28}{=} \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \omega_0^2 L / \omega)^2}} = \\ &\stackrel{19}{=} \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + [\omega L - L / (LC\omega)]^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1 / (\omega C)]^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}. \end{aligned} \quad (34)$$

Видно, что выражения

$$\omega L \stackrel{86-III}{=} x_L \text{ и } 1 / (\omega C) \stackrel{85-III}{=} x_C$$

являются сопротивлениями — индуктивным и емкостным (см. разд. III, § 4.2). Получает обоснование и формула полного сопротивления:

$$Z \stackrel{87-III}{=} \sqrt{R^2 + [\omega L - 1 / (\omega C)]^2} = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}. \quad (35)$$

Амплитуды заряда и силы тока, сдвиг фаз силы тока и напряжения и полное сопротивление цепи зависят от частоты внешнего воздействия, точнее, от соотношения вынужденной и собственной частот [см. (31)–(35)].

В приложении II частично исследована зависимость $Q_m(\omega)$ и обоснована качественная кривая, изображенная на рис. 331. Обратите внимание на то, что наибольшее значение амплитуда заряда принимает не при собственной частоте, а при частоте несколько меньшей:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega_0.$$

Так же можно было исследовать формулу (33), но из преобразованного ее вида (34) следует, что изменение амплитуды силы тока соответствует изменению полного сопротивления. Поэтому сначала исследуем зависимость полного сопротивления от частоты внешнего воздействия. Активное сопротивление от частоты не зависит. Квадрат реактивного сопротивления $[\omega L - 1 / (\omega C)]^2$ при частоте, равной нулю, бесконечно велик за счет второго слагаемого (напомним: конденсатор — разрыв в цепи постоянного тока).

При увеличении частоты квадрат реактивного сопротивления уменьшается до нуля, когда $\omega L = 1/(\omega C)$. Это произойдет при частоте $\omega = \sqrt{1/LC} \stackrel{19}{=} \omega_0$, т. е. при совпадении собственной и вынужденной частот. Естественно, что при этом полное сопротивление примет наименьшее значение $Z \stackrel{23}{=} R$. При дальнейшем увеличении частоты емкостное сопротивление будет уменьшаться до нуля, а индуктивное — возрастать до бесконечности (напомним: при увеличении частоты растет скорость изменения силы тока и, значит, э. д. с. самоиндукции. Ток самоиндукции по правилу Ленца препятствует наводящему его изменению).

Теперь видно, что при бесконечно большом полном сопротивлении амплитуда силы тока равна нулю ($\omega = 0$; $\omega \rightarrow \infty$). Наибольшего своего значения эта амплитуда достигает при собственной частоте, когда полное сопротивление минимально: $I_m \stackrel{34}{=} \mathcal{E}_m/R$. Зависимости $I_m(\omega)$ и $Z(\omega)$ тоже изображены на рис. 331.

При собственной частоте ω_0 цепь имеет активный характер, угол $\varphi \stackrel{31}{=} 0$, сила тока совпадает по фазе с напряжением. При меньших частотах $\frac{1}{\omega C} > \omega L$, цепь имеет емкостной характер, угол $\varphi > 0$ (см. рис. 330), сила тока опережает напряжение по фазе; при больших, чем ω_0 , частотах $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, цепь имеет индуктивный характер, угол $\varphi < 0$, сила тока отстает по фазе от напряжения.

Итак, вынужденные колебания имеют ряд особенностей:

- 1) внешнее воздействие навязывает системе свою частоту и закон колебаний;
- 2) амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде внешнего воздействия;
- 3) амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающего воздействия, точнее, от соотношения вынужденной и собственной частот;
- 4) наибольшие амплитуды вынужденных колебаний наблюдаются при частотах, близких к собственной частоте системы.

Резкое увеличение амплитуды колебаний при сближении собственной и вынужденной частот называется *резонансом*. В связи с этим первые две кривые на рис. 331 обычно называют *резонансными*. Наибольшие значения на них изображены при частотах, близких к собственной. Для тока $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$, для заряда $\omega_{\text{рез}} = \omega_1 < \omega_0$.

На рис. 332, а изображены графики напряжения и силы тока в контуре при произвольном соотношении фаз, а также мощности $P \stackrel{32-33}{=} I \mathcal{E}$ в зависимости от времени. Видно, что мощность бывает отрицательной, что соответствует возвращению энергии от контура к генератору. На рис. 332, б изображены те же графики при резонансе.

Если при произвольном соотношении фаз силы тока и напряжения часть мощности генератора не используется потребителем, потому что реактивная энергия «перекачивается» от потребителя к источнику и обратно, то при резонансе вся энергия генератора идет на «раскачку» системы, создаются наилучшие условия для отбора мощности у генератора, возрастает энергия системы и, как следствие, амплитуда колебаний.

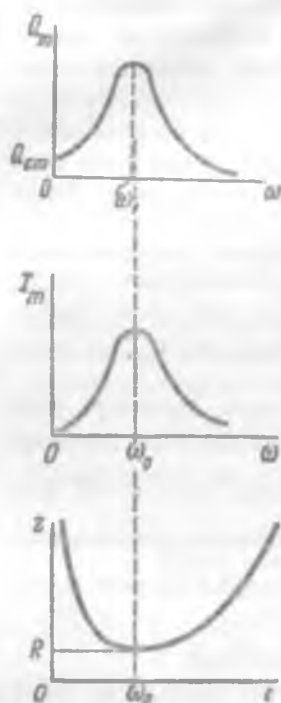


Рис. 331

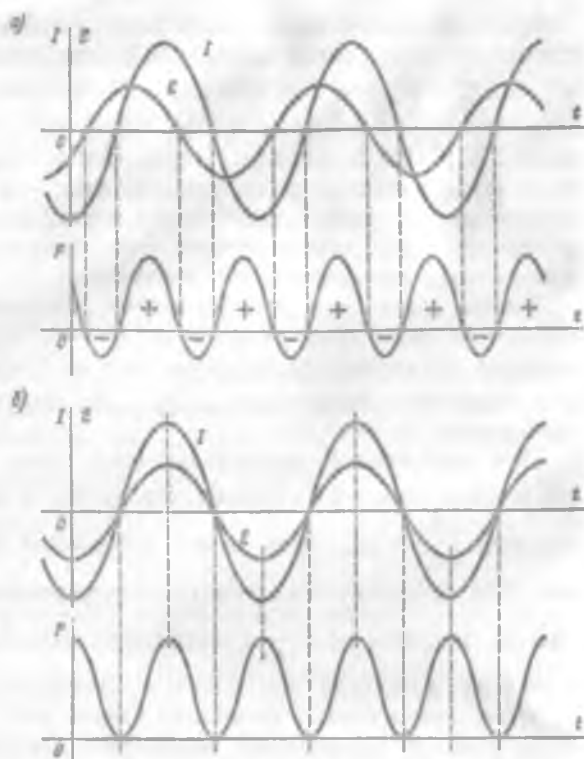


Рис. 332

Именно в связи с отбором мощности у источника косинус угла φ получил название *коэффициента мощности*.

В цепях переменного тока повысить коэффициент мощности (т. е. уменьшить фазовый угол между силой тока и напряжением) — все равно, что построить новые электростанции. Поэтому громадное народнохозяйственное значение имеет *координация сетей*, с тем чтобы большие индуктивности компенсировались соответствующими емкостями. Так, на заводах или в шахтах, где имеется большое количество двигателей с большой индуктивностью, специально ставят конденсаторы необходимой емкости. Самый большой коэффициент мощности имеет цепь с активным характером, когда $x_L = x_C$. При этом $\cos \varphi = 1$.

Конечно, резонанс — не только электрическое явление. Можно продемонстрировать механический резонанс на двух близко подвешенных чугунных шарах. Когда между ними продувается воздух, то давление в промежутке становится меньше, и избыток атмосферного давления толкает шары друг к другу. Если теперь воздух продувать только при движении шаров навстречу друг другу, то они будут раскачиваться все сильнее и начнут сталкиваться. Сила может быть малой, но она действует в темпе собственных колебаний. Система получает «в такт» небольшие порции энергии, которые, складываясь, накапливаются, амплитуда резко возрастает.

С явлениями резонанса приходится считаться при движении любых машин; вибрации, возникающие при работе двигателя, могут стать опасными, если они будут в резонансе с какими-либо из собственных колебаний конструкции.

Настраивая радиоприемник на определенную радиостанцию, вы изменяете собственную частоту контура, приближая ее к вынуждающей частоте данной станции, т. е. настраиваетесь в резонанс с ней.

§ 1.8. Автоколебания

Автоколебательной является реальная система, где происходят незатухающие колебания, частота и амплитуда которых определяются ее конструкцией. В состав автоколебательной системы входят: источник энергии (достаточно энергосмкий, чтобы убыль энергии за несколько колебаний была гораздо меньше полного запаса его энергии); собственно колебательная часть; клапан, открывающий и закрывающий доступ энергии от источника к собственно колебательной части в такт с ее колебаниями, управляемый автоматически (отсюда название колебаний) самой колебательной частью.

В качестве примера автоколебательной системы рассмотрим сифон (рис. 333). Жидкость через трубу *A* равномерно поступает в сосуд, ее уровень равномерно повышается от h_1 до h_2 , труба *B* остается запертой воздушной «пробкой». При достижении определенного уровня h_2 гидростатическое давление продавливает «пробку» через трубу *B*, и жидкость выливается до уровня h_1 , при котором воздух попадает в трубу и

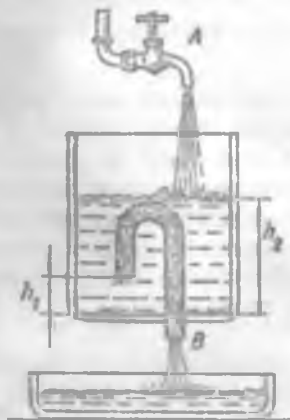


Рис. 333

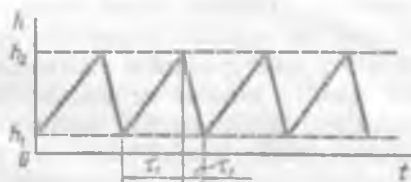


Рис. 334

прекращает выливание жидкости. Ее уровень снова начинает подниматься и т. д. Колебания уровня жидкости в зависимости от времени изображены на рис. 334. Здесь t_1 — время накопления (энергии), t_2 — время сброса. Их сумма представляет собой период таких колебаний. Эти колебания, по форме резко отличающиеся от синусоидальных, называются *релаксационными**.

* *relaxatio* (лат.) — расслабление.

Другой тип автоколебаний — близкие к синусоидальным *томеоновские автоколебания*. Такие колебания совершаются, например, в часах-ходиках. Их принцип действия: поднятая гири, привязанная к цепочке, перекинутой через зубчатое колесо, является источником энергии. Собственно колебательная часть представляет собой маятник, который сам по себе совершал бы затухающие колебания собственной частоты*. Но маятник связан с клапаном, которым в данном случае является анкерный механизм (рис. 335). Скоба АВ качается вместе с маятником, с которым жестко связана. При каждом качании палетка А пропускает один зуб шестерни, а палетка В задерживает очередной зуб. При этом часть энергии гири передается анкерной скобе и, следовательно, маятнику. Гиря медленно опускается, а маятник качается без затухания (вспомним, что его период колебаний не зависит от амплитуды). Система зубчатых колес передает вращение стрелкам часового механизма.

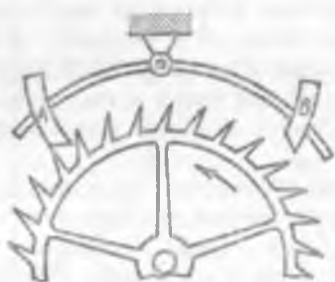


Рис. 335

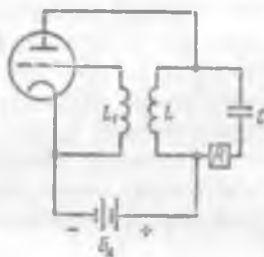


Рис. 336

Аналогично работает часовой механизм будильника или наручных часов, только в качестве источника энергии в них вместо поднятой гири используют свернутую пружину, и маятник в этих часах не физический, а *крутильный* [баланси́р — колесо на оси, связанное с особой спиральной пружинкой, которая создаст упругий возвращающий момент при любом его повороте. Период таких колебаний, зависящий от коэффициента возвращающего момента и момента инерции балансира, можно вычислить, составив и решив уравнение соответствующих колебаний (см. § 1.2). Этот период тоже не зависит от амплитуды].

Примером электрических автоколебаний является работа *лампового генератора незатухающих колебаний* — основной части радиопередатчика. Схема такого генератора изображена на рис. 336. В колебательном контуре в момент включения возникают собственные слабые почти гармонические колебания, которые сами по себе очень быстро затухли бы. Но контур соединен с источником постоянного напряжения, и если ток в цепи контура будет включаться и выключаться вовремя (или увеличиваться и уменьшаться в такт с собственными колебаниями контура), то энергия источника будет компенсировать потери в контуре. Это осуществляется

* Частотой затухающих колебаний можно назвать величину, измеряемую числом прохождений (в определенную сторону) положения равновесия, совершенных за единицу времени.

автоматически с помощью обратной связи контура с источником питания. Слабые колебания магнитного поля катушки L наводят на катушке L_1 небольшую переменную (в такт с колебаниями поля и, следовательно, тока в контуре) э. д. с. индукции, которая подается на сетку электронной лампы. Анодный ток начинает слабо пульсировать в такт с колебаниями в контуре, амплитуда этих колебаний увеличивается (если катушки соединены согласованно). Усиливается магнитное поле, больше становится амплитуда его колебаний, возрастает эффективное значение э. д. с. индукции на катушке обратной связи L_1 , больше становятся колебания анодного тока, усиливающие колебания в контуре, и т. д. Амплитуда этих колебаний растет до тех пор, пока потери за период не станут равны энергии, поступающей за этот период из источника в контур. Далее будут продолжаться незатухающие автоколебания (с постоянной амплитудой). В генераторе легко различить источник энергии — анодную батарею, собственно колебательную часть — колебательный контур, клапан — лампу с катушкой обратной связи в сеточной цепи.

Можно было бы поменять местами контур и катушку обратной связи, поместив контур в цепь сетки, а катушку обратной связи — в анодную цепь. Тогда контур непосредственно управлял бы анодным током, а катушка L_1 своим магнитным полем поддерживала бы незатухающие колебания, сообщая дополнительную энергию контуру. Увеличивая обратную связь (сближая катушки), можно увеличить амплитуду автоколебаний в контуре.

Должно быть понятно, что сказанным не исчерпывается отдел физики, называемый теорией колебаний.

ГЛАВА 2

ВОЛНЫ

§ 2.1. Движение связанных систем

Предположим, у нас есть два одинаковых маятника, упруго связанных друг с другом (рис. 337). Без связи такие маятники колебались бы по известным нам законам. Наличие связи приводит к передаче энергии от одного маятника к другому. Выведем из положения равновесия маятник 1 и предоставим систему самой себе. Первый маятник, начав собственные колебания, посредством связи действует вынуждающей силой на второй, приводя его в вынужденные колебания (в резонансном режиме — собственные частоты маятников одинаковы). Амплитуда колебаний маятника 2 будет расти до максимальной, маятника 1 — уменьшаться до нуля (первый все время опережает второй по фазе, образно говоря, ведет его за собой; второй в свою очередь тормозит первый до его остановки).

В этот момент маятники меняются ролями: второй становится раскачивающим, действует вынуждающей силой на первый, который совершает вынужденные колебания и в свою очередь получает энергию от второго и т. д. Если пренебречь затуханием, энергия в равных количествах будет переходить от первого маятника ко второму и обратно. Легко заметить, что чем сильнее связь (более упруга пружина, связывающая маятники)

и меньше масса маятников, тем быстрее идет процесс перекачки энергии от одного маятника к другому.

При достаточно малой массе и сильной связи процесс передачи энергии будет закончен за время, которое гораздо меньше периода колебаний. Тогда процесса колебаний не будет, а некоторое движение одного маятника будет без изменения формы передано другому (маятники будут совершать лишь малую часть полного колебания).

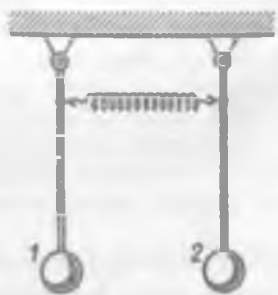


Рис. 337

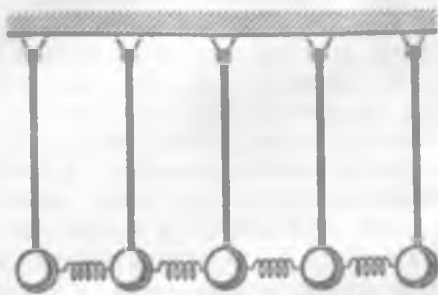


Рис. 338

Ничего принципиально не изменится в нашем рассмотрении, если вместо двух маятников система будет состоять из большего числа маятников, упруго связанных друг с другом (рис. 338). Возмущение любой формы будет без изменения передано всем последующим точкам до конца цепочки, затем вернется обратно и т.д. Мы здесь имеем два вида движения: уже изученное нами колебательное движение одной точки и распространение возмущения вдоль цепочки таких точек. Скорость распространения возмущения тем больше, чем сильнее упругая связь точек и чем меньше их масса.

§ 2.2. Упругие волны

Пусть имеется совокупность колеблющихся точек — вибраторов, связанных упругими связями (рис. 339).

При достаточно малой массе и сильной связи вибраторов, как мы сказали, вся энергия передается от какой-либо точки к соседней за время,



Рис. 339

гораздо меньшее, чем период их собственных колебаний. Тогда собственных колебаний не будет, потому что не успеет одна точка совершить заметную часть своего колебания, как вся ее энергия в той же форме переходит к другой точке и первая останавливается. Вся цепь связанных вибраторов с некоторым запаздыванием повторяет движение первого. Возмущение, без искажения формы, с конечной скоростью распространяющееся вдоль цепочки упруго связанных вибраторов, называется *упругой волной*.

Устремим массу каждого шарика к нулю, а их число — к бесконечности. Получится непрерывная упругая среда. В такой среде колебания (или одиночное возмущение), начавшиеся в одной точке, не остаются локализованными в этой точке, а благодаря упругим связям распространяются во всех направлениях в виде упругих волн. Среду, в которой распространяются волны, называют *волновым полем*.

Рассмотрим более подробно передачу одного возмущения (пусть точки могут двигаться только перпендикулярно прямой 1–5, рис. 340). Выведем из положения равновесия точку 1 (рис. 340, а) и предоставим систему самой себе. Упругие силы в положении а тормозят точку 1 и ускоряют (выводя из положения равновесия) точку 2. Точка 1 под действием этих сил останавливается и начинает ускоренно двигаться к положению равновесия. Точка 2 повторяет ее движение с запаздыванием, она разгоняется, пока есть составляющая сил упругости, направленная от положения равновесия; затем силы упругости начинают тормозить и точку 1, движущуюся к положению равновесия, и точку 2, движущуюся от своего положения равновесия; в то же время ускоренно от положения равновесия начинает двигаться точка 3 (рис. 340, б). Точка 1 теперь движется к положению равновесия замедленно, точка 2 останавливается и начинает ускоренно двигаться к положению равновесия.

Когда точка 1 приходит в положение равновесия, ее скорость равна нулю (рис. 340, в). Точка 2, двигавшаяся к положению равновесия ускоренно, движется с меньшим ускорением, затем замедленно; точка 3 начинает тормозиться, затем останавливается и будет ускоренно возвращаться; точка 4 начинает ускоренное движение от положения равновесия. В следующем положении (рис. 340, г) точка 2 тоже (вслед за точкой 1) остановилась; точка 3 замедляет свое движение к положению равновесия; точка 4 тормозится перед началом возвращения к положению равновесия; точка 5 ускоренно выводится из своего положения равновесия и т. д.

Различают волны *поперечные* (смещение перпендикулярно направлению распространения волны) и *продольные* (смещение параллельно направлению распространения волны). Такие волны бывают в изотропных средах. Обычно встречаются комбинации поперечных и продольных волн. Виды упругих волн соот-

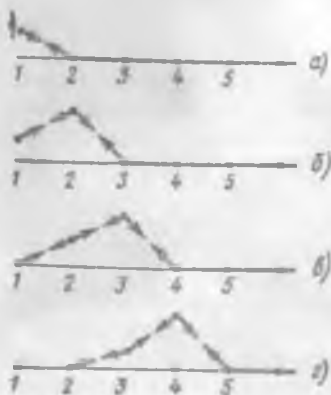


Рис. 340



Рис. 341

ветствуют видам деформации, поперечные волны связаны с деформацией сдвига, продольные — с деформацией сжатия (растяжения).

Определим скорость распространения упругой волны, например сжатия в однородной среде. Относительная деформация $\epsilon = \Delta l / l$ распространяется со скоростью v .

Плотность недеформированной среды $\rho \equiv \Delta m / (\Delta S l)$, где ΔS — площадь поперечного сечения образца, не изменяющаяся при распространении продольной волны. Сжатие соответствует увеличению плотности, так что плотность в месте сжатия (рис. 341) равна

$$\rho + \Delta\rho = \Delta m / [\Delta S (l - \Delta l)].$$

Умножим числитель и знаменатель этой дроби на одну и ту же величину $(l + \Delta l)$. В полученном выражении можно пренебречь квадратом малой величины Δl по сравнению с квадратом большой величины l :

$$\begin{aligned} \rho + \Delta\rho &= \frac{\Delta m (l + \Delta l)}{\Delta S (l - \Delta l) (l + \Delta l)} = \frac{\Delta m (l + \Delta l)}{\Delta S (l^2 - \Delta l^2)} = \\ &= \frac{\Delta m (l + \Delta l)}{\Delta S l^2} = \frac{\Delta m l}{\Delta S l^2} + \frac{\Delta m \Delta l}{\Delta S l^2} = \rho + \rho \frac{\Delta l}{l}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta\rho = \rho \epsilon.$$

Распространение возмущения представляет собой движение области сжатия со скоростью v вдоль образца. За промежуток времени dt через сечение пройдет участок сжатия длиной $dx = v dt$. Масса этого участка $dm = \Delta S dx \Delta\rho = \Delta S v dt \rho \epsilon$. Она движется со скоростью v и имеет импульс $dm v = \Delta S v^2 dt \rho \epsilon$. Это изменение импульса массы Δm (так как до прохождения импульса эта масса покоилась) волнового поля, по второму закону Ньютона, равно произведению действующей на нее силы упругости и времени ее действия. Заменяя силу упругости по закону Гука (см. разд. I, § 2.4), получаем

$$F dt = \sigma \Delta S dt = E \epsilon \Delta S dt.$$

Следовательно, $E \epsilon \Delta S dt \stackrel{2.4-1}{=} \Delta S v^2 dt \rho \epsilon$. Отсюда

$$v^2 = E/\rho,$$

и скорость распространения продольной упругой волны равна

$$v = \sqrt{E/\rho} \quad (36)$$

Так же можно вывести скорость распространения любой упругой волны, только модуль в выражении (36) будет соответствовать виду деформации. Мы убеждаемся в том, что действительно скорость распространения волны увеличивается при возрастании упругих связей (модуль упругости E) и уменьшении масс (плотность ρ) связанных вибраторов.

Аналогично распространяется в упругой среде произвольная комбинация возмущений, создаваемых задающим генератором.

Мы ограничимся случаем гармонического источника волн — генератора, последовательность возмущений от которого представляет собой косинусоиду. Назовем *фронтом волны* поверхность, отделяющую еще невозбужденную часть среды от уже возбужденной. *Волновой поверхностью* называют множество точек, имеющих одинаковые фазы колебаний. Для изотропной среды фронт является одной из волновых поверхностей.

По форме этой поверхности (фронта) различают волны плоские, сферические и т. п.

Луч — линия, нормальная ко всем фронтам, в направлении которой переносится энергия (следовательно, возможны лучи криволинейные).

§ 2.3. Плоская волна

Имеем плоскую монохроматическую (одна частота вибратора) гармоническую волну в однородной безграничной непоглощающей среде. Такую волну можно рассматривать как одномерную (рис. 342, все точки с одной координатой r движутся одинаково). Пусть генератор, находящийся в точке $r = 0$, совершает гармонические колебания по закону

$$x_0 = A \cos(\omega t + \alpha_0).$$



Рис. 342

Здесь x_0 — смещение в точке $r = 0$ в момент времени t (а не смещение в момент времени $t = 0$!); A — амплитуда колебаний, которую будем считать одинаковой во всех точках, пренебрегая поглощением среды; ω — круговая частота колебаний генератора, равная частоте вынужденных колебаний всех точек волнового поля. Положим начальную фазу колебаний генератора α_0 равной нулю (соответственно выбрав начало отсчета времени). Все точки волнового поля совершают одинаковые движения, как было выяснено, с некоторым запаздыванием. В момент времени t фаза генератора ωt . В произвольную точку волнового поля с координатой r эта фаза придет через некоторое время запаздывания τ — время движения возмущения от генератора до рассматриваемой точки. По уравнению равномерного движения $\tau = r/v$. С таким же успехом можно сказать, что в момент времени t , когда у генератора фаза ωt , фаза колебаний в точке с координатой r на $\omega \tau$ меньше. Следовательно, смещение в точке с координатой r в тот же момент времени t

$$x = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos(\omega t - \omega r/v).$$

Расстояние, пройденное волной за период колебаний генератора, называют *длиной волны*:

$$\lambda = vT. \quad (37)$$

Коэффициент при координате точки r

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} = k \quad (38)$$

называется *волновым числом*.

Длина волны — некоторое расстояние. Если 2π единиц длины разделить на λ , то получится число таких отрезков, уложившихся на выбранной длине. Следовательно, *волновое число* равно числу длин волн, укладывающихся на 2π единицах длины. Обратите внимание на сходство (и различие) циклической частоты

$$\omega = 2\pi/T, \quad (39)$$

характеризующей повторяемость процесса во времени, и волнового числа k , характеризующего повторяемость процесса в пространстве.

Мы получили смещение точки с координатой r в момент времени t в виде

$$x = A \cos(\omega t - kr). \quad (40)$$

Это уравнение плоской бегущей монохроматической волны в однородной непоглощающей среде. В наипростейшем случае волнового движения смещение зависит от времени и координаты, т. е. является функцией двух переменных. В некоторой точке r происходят обыкновенные гармонические колебания по закону

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

включающему в качестве начальной фазы $\varphi_0 = -kr$ (на которую и будет в любой момент времени отличаться фаза колебаний в этой точке от фазы колебаний генератора). Рассматривая совокупность колеблющихся точек в определенный момент времени, мы получим распределение фаз в волновом поле, причем чем дальше от генератора, тем фаза колебаний меньше.

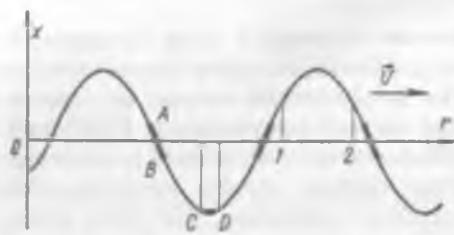


Рис. 343

Итак, в плоской монохроматической волне фазы непрерывно изменяются (возрастая в каждой точке; кривая на рис. 343 равномерно движется вдоль r) во времени и распределены в пространстве (в один момент времени, уменьшаясь при удалении от источника).

Разность фаз двух произвольных точек с координатами r_1 и r_2 в один момент времени

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega t - kr_1 - \omega t + kr_2 = k(r_2 - r_1) = k\Delta r. \quad (41)$$

Смещения точек 1 и 2 на рис. 343 одинаковы, но в следующий момент времени смещение точки 1 уменьшится, а точки 2 увеличится. Найдем расстояния между такими точками, смещения которых одинаковы в любой момент времени: $x_1 \equiv x_2$. Для них

$$A \cos(\omega t - kr_1) \equiv A \cos(\omega t - kr_2).$$

Но равенство косинусов означает, что аргументы отличаются на 2π : $\omega t - kr_1 = \omega t - kr_2 + 2\pi$. Отсюда

$$k(r_2 - r_1) = 2\pi.$$

Расстояние между такими точками

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2\pi/k = 2\pi\lambda/(2\pi) = n\lambda.$$

Следовательно, точки, смещения которых всегда одинаковы, отстоят друг от друга на целое число длин волн; про такие точки часто говорят, что они колеблются «в фазе».

Ближайшими такими точками будут точки, для которых $n = 1$, $\Delta r = \lambda$, $\Delta\varphi = k\Delta r = (2\pi/\lambda)\lambda = 2\pi$. Таким образом, длина волны равна расстоянию между точками, колеблющимися с разностью фаз 2π или, что то же самое, — ближайшему расстоянию между точками, колеблющимися «в фазе».

Выражение «в фазе» часто понимают в смысле «без разности фаз» или «с одинаковыми фазами», что неправильно. На самом деле это выражение означает разность фаз 2π . Путаница, возможно, возникает из-за того, что смещения таких точек одинаковы; но надо ясно себе представлять — не только тригонометрически, но и физически, — что равенство смещений не означает равенства фаз.

В волновом поле различают две скорости — *колебательную скорость* каждой его точки и *скорость волны* — скорость распространения колебаний от точки к точке. Колебательная скорость в данной точке ($r = \text{const}$):

$$u \stackrel{\text{II}}{=} dx/dt = x' = -A\omega \sin(\omega t - kr). \quad (42)$$

Скорость волны (в частности, упругой) мы определили по формуле (36). Должно быть совершенно ясно различие этих скоростей.

Чтобы наглядно представить себе распространение гармонической плоской волны, изобразим простейшее волновое поле — резиновый шнур — в 14 мгновенных фотографиях через промежутки времени в $1/12$ периода (рис. 344).

Положим начальную фазу α_0 вибратора равной $-\pi/2$.

В нулевой позиции фаза колебаний генератора a равна $\omega t + \alpha_0 - kr = -\pi/2$, его смещение $x_a^{(0)} \stackrel{\text{40}}{=} A \cos(\omega t - \pi/2 - kr) = 0$, все остальные точки тоже находятся в положениях равновесия.

$$\begin{aligned} \text{В первой позиции фаза генератора } \omega t + \alpha_0 &= \omega \frac{T}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{12} - \\ &= -\frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{6}, \text{ его смещение } x_a^{(1)} \stackrel{\text{40}}{=} A \cos\left(-\frac{2\pi}{6}\right) = A \cos \frac{2\pi}{6}. \end{aligned}$$

Часть шнура до точки b упругими силами выведена из положения равновесия и приведена в движение.

Скорость волны

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r \cdot 12}{T} \stackrel{\text{37}}{=} \frac{\lambda}{T}.$$

Расстояние, на которое распространилась волна:

$$ab \stackrel{\text{I-I}}{=} v \frac{T}{12} \stackrel{\text{37}}{=} \frac{\lambda}{12}.$$

Смещение точки b

$$\begin{aligned} x_b^{(1)} \stackrel{\text{40}}{=} A \cos\left(-\frac{2\pi}{6} - k \frac{\lambda}{12}\right) &\stackrel{\text{38}}{=} A \cos\left(-\frac{2\pi}{6} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{12}\right) = A \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 0 = x_a^{(0)}. \end{aligned}$$

Во второй позиции фаза колебаний генератора

$$\omega \frac{2T}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T} \frac{2T}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}.$$

Его смещение

$$x_a^{(2)} \stackrel{\text{40}}{=} A \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = A \cos \frac{\pi}{6}.$$

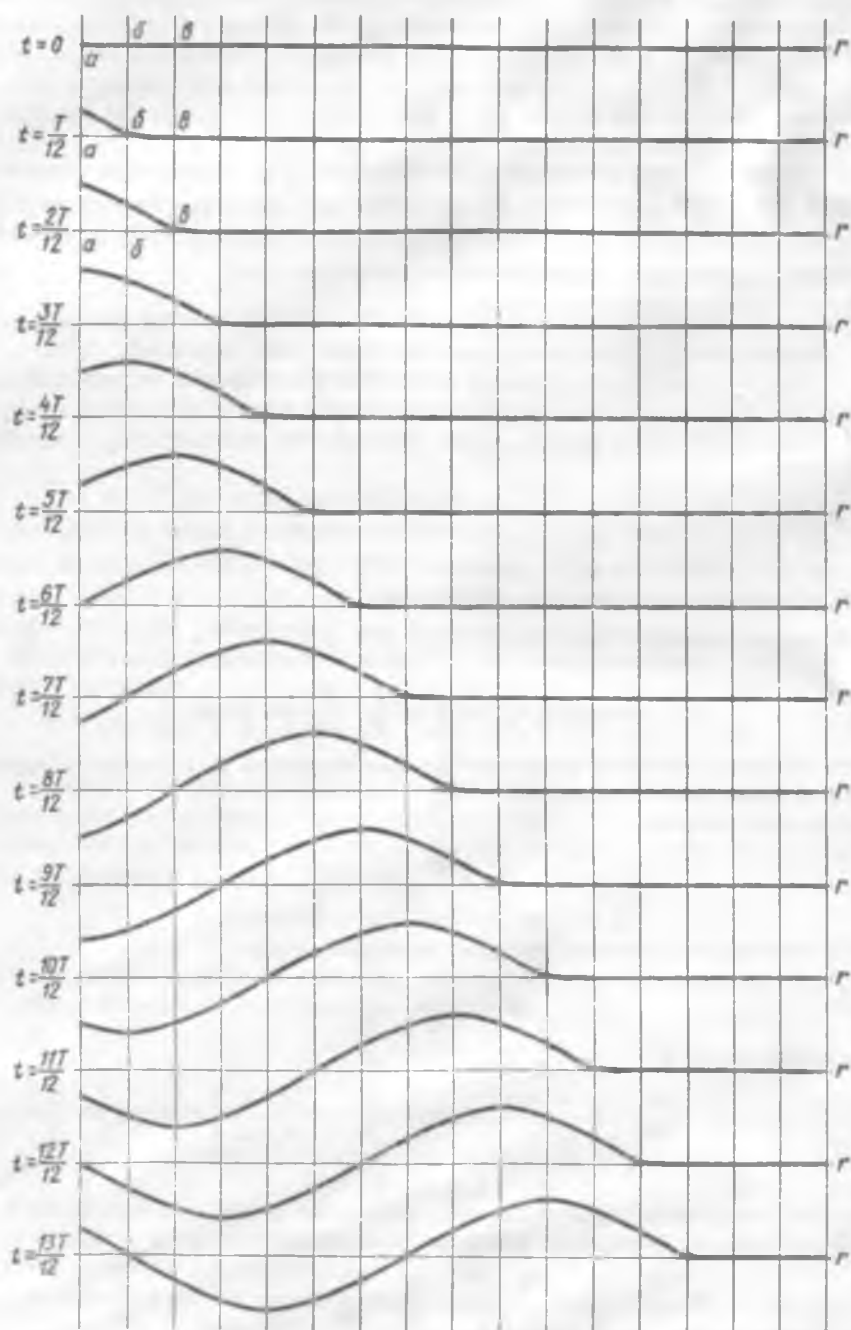


Рис. 344

Смещение точки b $x_b^{(2)40} = A \cos \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{12} \right) = A \cos \left(-\frac{2\pi}{6} \right) = x_a^{(1)}$. И еще часть шнура до точки b вовлечена в волновой процесс, причем точка b отстоит от точки a на таком же расстоянии $ab = \lambda/12$, а от генератора на расстоянии $av = 2\lambda/12$. Ее смещение

$$x_a^{(2)40} = A \cos \left(\frac{2\pi}{T} \frac{2T}{12} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2\lambda}{12} \right) = 0 = x_b^{(1)} = x_a^{(0)}$$

и фаза колебаний равна $\pi/2$.

В третьей позиции $x_a^{(3)40} = A \cos \left(\frac{2\pi}{T} \frac{3T}{12} - \frac{\pi}{2} \right) = A$ (наибольшее смещение — амплитуда); $x_b^{(3)40} = A \cos \left(\frac{2\pi}{T} \frac{3T}{12} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{12} \right) = A \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = x_a^{(2)}$; $x_a^{(3)40} = A \cos \left(\frac{2\pi}{T} \frac{3T}{12} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2\lambda}{12} \right) = A \cos \left(-\frac{2\pi}{6} \right) = x_b^{(2)} = x_a^{(1)}$.

Аналогичные расчеты для других положений шнура вы можете сделать сами. В предпоследней позиции возникла целая волна за время одного полного колебания точки a : процесс прошел расстояние λ , следовательно, $v = \lambda/T$ — в соответствии с формулой (37). В последней позиции фаза колебаний генератора $10\pi/6$ (а не $-2\pi/6$), начала рождаться новая волна, а уже сформировавшаяся удаляется от источника, вовлекая в колебательное движение новые точки волнового поля.

Что же распространяется вдоль волнового поля со скоростью v ?

Если рассмотреть рис. 344, то станет ясно, что точки волнового поля остаются на своих местах, от одной точки к другой переходит каждая фаза колебаний. Это ясно и из уравнения (40): если в некоторый момент времени определенная фаза $\varphi = \omega t + \alpha_0 - kr$ есть у точки с координатой r_1 , то через некоторое время, когда первое слагаемое увеличится, та же фаза будет у точки с координатой $r_2 > r_1$. Поэтому скорость распространения волнового процесса $v = \lambda/T$ называется *фазовой скоростью*.

Скорость распространения волны зависит от свойств среды [см. (36)], а период определяется работой генератора и не зависит от свойств среды. Следовательно, при переходе из одной среды в другую изменяется длина волны.

Если в какой-то момент времени генератор выключить, появится задний фронт — поверхность, отделяющая еще возбужденную среду от уже невозбужденной; прилегающая к источнику часть среды перестанет колебаться; это «успокоившееся» волновое поле начнет расширяться. А область колеблющегося («волнующегося») волнового поля будет удаляться от источника.

§ 2.4. Эффект Доплера

Мы рассматривали упругие волны, распространяющиеся от неподвижного (относительно среды) источника к неподвижному наблюдателю (приемнику). Частота этих волн равнялась частоте вибратора.

Волны каких частот будет принимать наблюдатель, если он или источник начнут двигаться относительно волнового поля?

Австрийский физик и астроном Доплер теоретически обосновал в 1842 г. продольный эффект, возникающий благодаря наличию составляющих скоростей вдоль линии наблюдения (соединяющей источник и наблюдателя). Мы здесь ограничимся именно этим эффектом.

Пусть пока наблюдатель H неподвижен (относительно среды), источник движется вдоль линии наблюдения с постоянной скоростью u по направлению к наблюдателю. В какой-то момент времени $t = 0$ некоторая сферическая волна начала распространяться со скоростью c от источника, проходящего точку A (рис. 345, а).

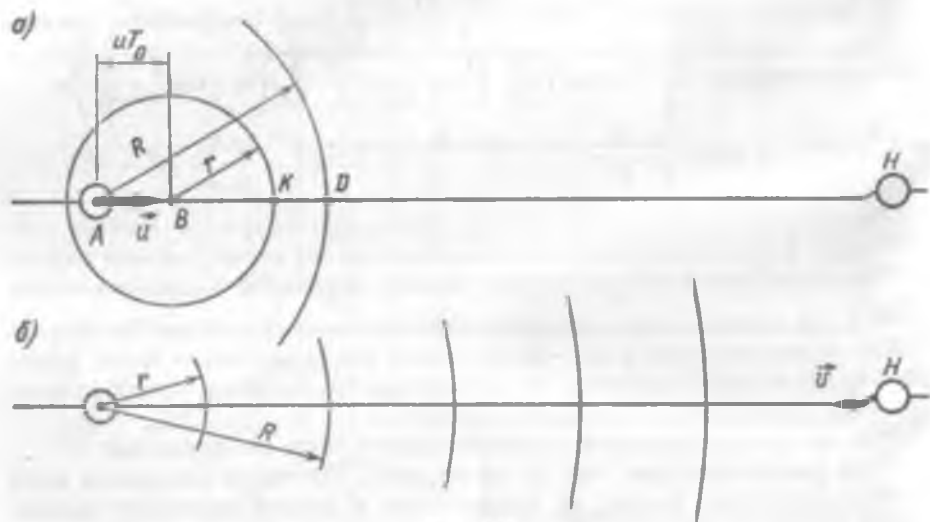


Рис. 345

Через период T_0 колебаний источник окажется в точке B , откуда начнет распространяться сферическая волна в фазе с первой. К моменту времени $t = 2T_0$ первая волна распространится на расстояние $R = 2cT_0$ от точки A , а вторая — на расстояние $r = cT_0$ от точки B . Источник за период своих колебаний прошел путь $|AB| = uT_0$. В дальнейшем указанные фронты будут распространяться от точек A и B все дальше, но расстояние между ними по линии наблюдения KD не изменится. Именно это расстояние между точками, колеблющимися в фазе, принимается наблюдателем в качестве длины дошедшей до него волны. Оно равно

$$\lambda = |KD| = R - uT_0 - r = 2cT_0 - uT_0 - cT_0 = (c - u)T_0.$$

Следовательно, частота воспринимаемых колебаний

$$f \stackrel{4.37}{=} c/\lambda = c/[(c - u)T_0].$$

Но период колебаний источника связан с его собственной частотой $f_0 = 1/T_0$, поэтому

$$f = c/(c - u)f_0.$$

Частота воспринимаемых колебаний оказывается больше частоты источника, если источник движется к наблюдателю. Если источник удаляется от наблюдателя, то частота воспринимаемых колебаний уменьшается:

$$f = c/(c + u)f_0.$$

Эту формулу можно рассматривать как частный случай первой, если считать положительной скорость источника, приближающегося к наблюдателю, и отрицательной — удаляющегося.

Пусть теперь источник неподвижен (относительно среды), а наблюдатель движется вдоль линии наблюдения к источнику со скоростью v (рис. 345, б). Тогда скорость наблюдателя относительно волны равна $c + v$. С этой скоростью он встретит за время t некоторое число N длин волн источника. По определению скорости равномерного движения

$$c + v \stackrel{\text{б-1}}{=} N\lambda_0/t.$$

Воспринимаемая наблюдателем частота

$$f \stackrel{\text{б}}{=} N/t = (c + v)/\lambda_0.$$

Собственная длина волны

$$\lambda_0 \stackrel{\text{37.4}}{=} c/f_0.$$

Следовательно, воспринимаемая частота равна

$$f = (c + v)/c f_0.$$

Она больше собственной частоты источника, если наблюдатель приближается к неподвижному источнику. Аналогично, при удалении приемника от источника воспринимаемая частота уменьшается:

$$f = (c - v)/c f_0.$$

И здесь вторую формулу можно рассматривать как частный случай первой, считая скорость приближения наблюдателя к источнику положительной, а удаления — отрицательной.

Итак, продольный эффект Доплера состоит в изменении воспринимаемой частоты при движении источника механических волн и приемника относительно среды.

При движении источника и приемника:

$$f = (c + v)/(c - u) f_0,$$

где f — частота, воспринимаемая приемником; f_0 — собственная частота источника; c — скорость волны в данной среде; v и u — проекции скоростей наблюдателя и источника на линию наблюдения, причем положительные направления этих проекций обращены друг к другу.

§ 2.5. Энергия упругой волны

Упругая волна несет с собой энергию, что видно хотя бы из того, что на «раскачку» ранее неподвижных вибраторов волнового поля необходима определенная энергия, пропорциональная квадрату амплитуды колебаний. Поставщиком этой энергии является, очевидно, генератор колебаний, раскачивающий все частицы волнового поля.

В упругой волне различают потенциальную и кинетическую энергии. Кинетическая энергия максимальна у тех участков волнового поля, где наибольшей является колебательная скорость (участки, близкие к положению равновесия; см. рис. 343). Потенциальная энергия максимальна у тех же участков, ибо они сильнее всех остальных деформированы. Надо вспомнить, что в волне нет взаимного превращения энергий, и потенциальная и кинетическая энергии без изменения формы передаются соседним точкам.

Упругая волна — это совокупность двух волн — волны колебательных скоростей и волны деформаций (участков), каждая из которых характеризуется своей энергией — соответственно кинетической и потенциальной.

На рис. 343 изображены одинаковые участки в чисто поперечной волне. Участок AB сильнее всего деформирован, его потенциальная энергия наибольшая; участок CD почти таков, как в положении равновесия, его потенциальная энергия упругой деформации почти нуль. Таким образом, потенциальная и кинетическая энергии каждого участка изменяются от нуля до максимального значения в одинаковых фазах. Можно доказать (мы этого здесь делать не будем), что мгновенные значения этих энергий для каждого участка одинаковы, т. е. полная энергия каждого участка в данный момент времени равна удвоенной потенциальной или удвоенной кинетической энергии этого участка. Кинетическую энергию малого участка $d\tau$ мы легко найдем ($\rho \frac{dV}{dt} = dm/dV$, u — колебательная скорость):

$$dT = \frac{dm u^2}{2} = \frac{\rho dV u^2}{2}.$$

Полная энергия этого участка

$$dE = 2 dT = \rho dV u^2.$$

Плотность энергии (в данной точке) измеряется отношением энергии к объему волнового поля, на который приходится эта энергия

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho u^2.$$

Величина, измеряемая отношением энергии, перенесенной через некоторую поверхность, ко времени, в течение которого она была перенесена, называется *потоком энергии* через данную поверхность (если перенос энергии можно считать равномерным):

$$\Phi = \frac{dE}{dt}.$$

Плотностью потока энергии в волновом поле называют величину, равную отношению потока энергии к площади поверхности, расположенной перпендикулярно направлению распространения волн (если поток распределен равномерно по поверхности):

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} = \frac{dE}{\Delta S dt}.$$

За время dt вся энергия dE элементарного объема $dV = \Delta S v dt$ (рис. 346) пройдет через поперечное сечение ΔS . Следовательно, плотность потока энергии

$$U = \frac{dE}{\Delta S dt} = \frac{w dV}{\Delta S dt} = \frac{w \Delta S v dt}{\Delta S dt} = wv.$$

Плотность потока энергии связана с квадратом колебательной скорости:

$$U = \rho u^2 v = \rho v u^2.$$

Коэффициент пропорциональности $z = \rho v$ — величина, характеризующая упругие свойства среды, — называется *удельным волновым сопротивлением* (он аналогичен сопротивлению в формуле $P \stackrel{\text{§2-III}}{=} RI^2$). Чтобы одинаково «раскачать» частицы среды с большим волновым сопротивлением, нужна большая энергия.

Плотность потока энергии в данной точке волнового поля изменяется

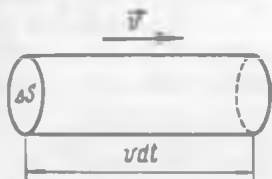


Рис. 346

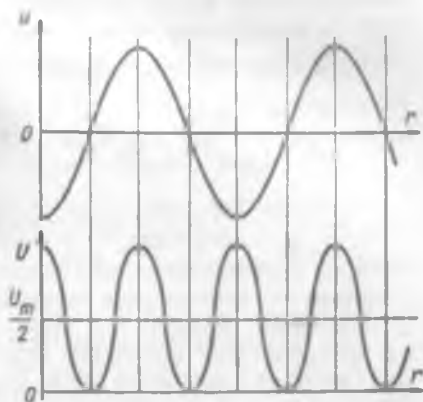


Рис. 347

с течением времени так же, как меняется плотность энергии в этой точке:

$$U = wv = \rho v u^2 \stackrel{42}{=} \rho v A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kr). \quad (43)$$

Зависимость $U(r)$ в некоторый момент времени изображена на рис. 347. Для сравнения там же показана в этот момент зависимость $u(r)$. Теперь надо представить себе, что эти графики равномерно со скоростью v движутся вдоль оси r . Так осуществляется перенос энергии в бегущей волне.

§ 2.6. Стоячие волны

До сих пор мы изучали бесконечное волновое поле, в котором бегущая волна не возвращалась. Физически это означает такую протяженность волнового поля, при которой затухание (вследствие потерь энергии, которые неизбежны; мы ими до сих пор пренебрегали) приводит к исчезновению волны до границы волнового поля.

Рассмотрим теперь однородную полубесконечную среду, граница которой столь близка к источнику волн, что можно по-прежнему пренебречь затуханием (рис. 348). На границе двух сред волна частично переходит в другую среду — *преломляется*, частично возвращается от границы в первую среду — *отражается*.



Рис. 348

В каждой точке волнового поля будут складываться колебания, принадлежащие двум идущим в разных направлениях волнам — бегущей и отраженной. Смещения точки r в момент времени t в этих волнах (без учета возможной потери полуволны при отражении)

$$x_1 \stackrel{40}{=} A \cos(\omega t - kr);$$

$$x_2 \stackrel{40}{=} A \cos[\omega t - k(l + l - r)] = A \cos[\omega t - k(2l - r)]$$

(отраженная волна прошла до границы расстояние l и от границы до точки наблюдения $l - r$). Результирующее смещение точки r в момент времени t (для чистых поперечных или продольных волн)

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t - kr) + A \cos[\omega t - k(2l - r)].$$

Его можно найти, воспользовавшись тригонометрическим сложением косинусов:

$$\begin{aligned} x &= 2A \cos \frac{\omega t - kr + \omega t - k(2l - r)}{2} \cos \frac{\omega t - kr - \omega t + k(2l - r)}{2} = \\ &= 2A \cos \frac{k(2l - r - r)}{2} \cos \frac{2\omega t - k(2l - r + r)}{2} = \\ &= 2A \cos k(l - r) \cos(\omega t - kl). \end{aligned} \quad (44)$$

Мы получили уравнение *стоячей волны* в полубесконечной среде.

Такое же уравнение было бы и в случае изменения фазы на π при отражении, только аргументы тригонометрических функций отличались бы на $\pi/2$.

Это уравнение гармонических колебаний, подобное уравнению (6), где слагаемое $-kl$ имеет смысл начальной фазы, а независящий от времени коэффициент $a(r) = 2A \cos k(l - r)$ — амплитуда колебаний в точке r . Как видно, амплитуды точек в стоячей волне зависят от координат (в бегущей волне все амплитуды одинаковы).

Колебания многих точек волнового поля усиливаются, появляются точки, амплитуда колебаний которых удваивается: $a(r_n) = 2A$. Эти точки называются *пучностями* стоячей волны. Есть в такой волне точки, в которых

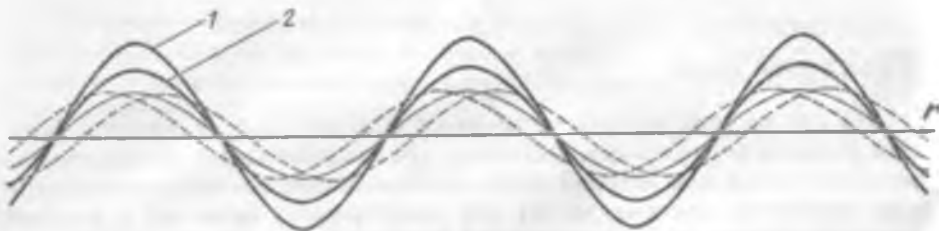


Рис. 349

результирующее смещение всегда равно нулю, — *узлы* стоячей волны: $a(r_n) = 0$. Нет видимого перемещения фазы вдоль r , с чем связано название таких волн.

Нет и переноса энергии вдоль волнового поля, так как обе волны несут навстречу друг другу в среднем одинаковые энергии.

Представим себе механизм образования стоячей волны. Одинаковые по форме волны распространяются в противоположных направлениях. Значит, бывают такие моменты, когда они совпадают всеми своими точками (рис. 349; тонкая сплошная кривая). Результирующее смещение в каждой точке в этот момент времени получим простым удвоением ординат (кривая 1). Через некоторое небольшое (относительно периода колебаний одной точки) время Δt бегущая волна переместится на $v\Delta t$ вправо, а отра-

женная — на такое же расстояние влево (пунктирные кривые). Результирующее смещение в каждой точке получим сложением ординат на этих кривых. Оно изобразится кривой 2. Видим, что смещения узлов действительно остались нулями, смещения всех остальных точек уменьшились. При дальнейшем расхождении прямой и отраженной волн все смещения уменьшаются до нуля (когда бегущая и отраженная волны будут расположены, как показано на рис. 350). Затем результирующие смещения поменяют знак и будут увеличиваться до амплитудных значений.



Рис. 350

На рис. 351 показано несколько последовательных положений графика результирующего смещения в зависимости от координаты (в поперечных колебаниях, например, резинового шнура эти графики совпадают с положениями самого шнура). Если бы мы дополнили эту картину до симметричной, то снова могло стать непонятным, как именно движутся

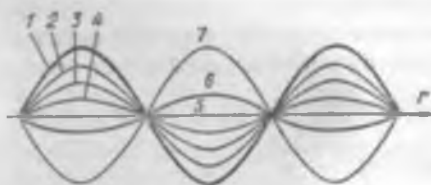


Рис. 351

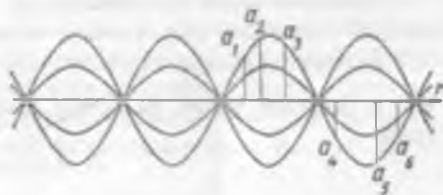


Рис. 352

различные точки в стоячей волне (несмотря на цифры, которыми снабжены графики). Зато в симметричной картине (рис. 352) очень хорошо видно распределение амплитуд $a(r)$.

Все точки, лежащие между двумя соседними узлами, колеблются с одинаковыми фазами, но все точки, лежащие по разные стороны от одного узла, колеблются в противофазах (см. рис. 349, 351). Это, на первый взгляд, не отражено в формуле (44), поэтому часто можно слышать совершенно неверное утверждение, что все точки стоячей волны имеют одинаковые фазы ($\omega t - kl$). Дело в том, что $\cos k(l - r)$ при переходе через нуль меняет знак, так что амплитуды $a(r)$ точек, лежащих по разные стороны узла, имеют разные знаки (например, если a_1, a_2, a_3 положительны, то a_4, a_5, a_6 отрицательны; см. рис. 352). Знак, приписанный амплитуде, на самом деле относится к фазе колебаний.

При каждом переходе через узел можно было бы прибавлять к аргументу $\cos(\omega t - kl)$ величину π , оставляя амплитуду положительной.

В полубесконечной среде стоячая волна образуется всегда. Принципиально другой, более сложный процесс идет в случае ограниченной с двух сторон среды (рис. 353). При этом отраженная от одной границы волна идет к другой границе, отражается, возвращается, опять отражается и т. д. Кроме того, идущая от генератора в другую сторону волна отражается, возвращается, отражается и т. д.

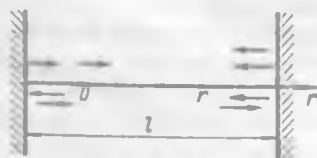


Рис. 353

Смещения во всех этих волнах складываются в каждой точке волнового поля. Теперь уже нельзя пренебречь затуханием, так как бесконечное количество волн конечной амплитуды даст бесконечную энергию, что невозможно.

Поэтому надо было бы в каждой точке складывать бесконечно много смещений, постепенно уменьшающихся до нуля.

В ограниченном волновом поле стоячая волна произвольной длины не образуется, так как при многократном отражении большинство волн быстро затухает.

В частном случае усиления волн образуется стоячая волна, если на границах волнового поля создаются узлы или пучности. При этом длина волны должна удовлетворять условию

$$l = n\lambda/4 \quad (45)$$

(при n четном — с обеих сторон узлы или пучности, при n нечетном — с одной стороны узел, с другой — пучность).

Уравнение такой стоячей волны можно получить в результате суперпозиции бегущей и отраженной незатухающих волн. На рис. 353 в точке $r = 0$ находится генератор, точка с координатой r отстает по фазе от точки $r = 0$ в бегущей волне на время запаздывания $\tau = r/v$; ее уравнение колебаний

$$x_1 = A \cos(\omega t - kr).$$

Эта точка r в отраженной волне опережает по фазе точку $r = 0$ на такое же время τ .

Для образования стоячей волны в ограниченной среде нужно, как мы говорили, чтобы бегущая и отраженная волны усиливали друг друга, в частности, в точке $r = 0$, где расположен источник. Другими словами, источник должен поддерживать установившиеся волны, т. е. работать «в фазе» с отраженной волной. Тогда в момент времени t фаза источника в отраженной волне должна быть $\omega t + 2\pi$, и произвольное число слагаемых 2π под знаком косинуса можно опустить. Фаза колебаний точки r в отраженной волне на kr больше фазы источника, и уравнение отраженной волны принимает вид

$$x_2 = A \cos(\omega t + kr).$$

Тогда результирующее смещение

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A \cos(\omega t - kr) + A \cos(\omega t + kr) = \\ &= 2A \cos \frac{\omega t - kr + \omega t + kr}{2} \cos \frac{\omega t - kr - \omega t - kr}{2} = \\ &= 2A \cos kr \cos \omega t. \end{aligned} \quad (46)$$

Мы получили уравнение стоячей волны. Напомним, что оно описывает только стоячую волну, когда она уже получена. Складывая всего две волны без затухания, мы тем самым учли многократное отражение затухающих волн.

Координаты узлов удовлетворяют условиям:

$$\cos kr_y = 0; \quad kr_y = (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad r_y = \frac{(2m + 1) \pi \lambda}{2 \cdot 2\pi} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Координаты пучностей:

$$\cos kr_n = \pm 1; \quad kr_n = m\pi = 2m\pi/2; \quad r_n = \frac{2m\pi \lambda}{2 \cdot 2\pi} = 2m\lambda/4.$$

В частности, $r = 0$ — координата пучности, значит, генератор расположен в одной из пучностей.

§ 2.7. Акустика*

Колебания среды, воспринимаемые органом слуха, называются звуком. Звуки делятся на музыкальные тона — монохроматические волны и шумы — хаотическую смесь тонов.

Звук в воздухе (так же как в любом газе или в жидкости) — продольные волны, так как у этих сред есть только объемная упругость.

Человеческое ухо воспринимает колебания в диапазоне от 20 Гц до 20 кГц (границы условия, для разных людей или даже для одного человека в разных условиях они различны) — это и есть собственно звуки. Колебания среды с частотами меньше 20 Гц называют инфразвуком**, колебания в диапазоне 20 — 10⁵ кГц — ультразвуком***, в диапазоне — 10⁵ — 10⁷ кГц — гиперзвуком****.

Все волновые характеристики, включая колебательную скорость, длину волны, частоту, скорость волны, плотность потока энергии, применимы в звуковых волнах.

Музыкальный тон описывается тремя субъективными (зависящими от слушателя) характеристиками, каждая из которых, в свою очередь, зависит от физических величин, имеющих объективный смысл.

Высота тона зависит от частоты колебаний генератора. Чем больше частота, тем выше кажется звук.

Громкость звука зависит от его силы. Силой звука называют среднее значение плотности потока звуковой энергии: $I = \langle U \rangle$. Она численно равна средней звуковой энергии, проходящей за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения звука.

Среднее значение плотности потока энергии получим, сложив всю энергию, прошедшую через единицу поперечного сечения волнового поля за время от произвольного момента t до момента $t + T$, т. е. за период колебаний, и разделив ее на этот период. За промежуток времени dt сквозь единицу площади поперечного сечения проходит энергия $U dt$, за период —

энергия $\int_t^{t+T} U dt$, значит, в среднем за единицу времени проходит энергия

* akustikos (греч.) — слуховой.

** infra (лат.) — под.

*** ultra (лат.) — более.

**** hyper (греч.) — сверх.

$\frac{1}{T} \int_0^T U dt$. Поэтому сила звука в монохроматической волне может быть вычислена по формуле

$$I = \langle U \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U dt = \frac{1}{T} \int_0^T \rho v A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kr) dt =$$

$$\frac{44,46 \cdot 10^{-6}}{T} \frac{\rho v A^2 \omega^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin 2(\omega t - kr) \right] \Big|_0^T =$$

$$\frac{34,4}{T} \frac{\rho v A^2 \omega^2}{T} \frac{T}{2} = \frac{U_m}{2}.$$

Следовательно, площади горбов, лежащих выше пунктира $U_m/2$ (см. рис. 347), равны площадям впадин, лежащих ниже этого пунктира, так что если их совместить, получится постоянное значение $U_m/2$.

При прочих равных условиях сила звука зависит от амплитуды колебаний источника. Одной силы звука воспринимаются по-разному на различных частотах, так как ухо обладает определенной *избирательностью* — некоторой зависимостью степени восприятия от частоты.

Наконец, многие источники звука (в том числе подавляющее большинство музыкальных инструментов) имеют *резонансные ящики*, в которых звуки усиливаются и отфильтровываются. При возбуждении колебаний возникают волны всевозможных частот. Дойдя до границ соответствующего волнового поля, они многократно отражаются. При этом большинство волн очень быстро затухает и потому не воспринимается. Те же звуки, которые образуют стоячие волны, слышны долго. Условие стоячих волн (в общем виде) $\lambda = 4l/n$. В зависимости от условий отражения (закрепленные или свободные концы волнового поля) остаются тона с четным или нечетным n . Все такие тона называются *собственными тонами* данного звучащего тела. Среди них один с наименьшей частотой имеет наибольшую амплитуду и потому звучит громче остальных.

Собственный тон с наибольшей длиной волны называется *основным*. Остальные собственные тона (кроме основного) называются *высшими гармоническими* или *обертонами**. Все собственные тона (кратных частот) звучат слитно, слышен один тон (основной), «окрашенный» обертонами. В зависимости от устройства резонансного ящика, условий возбуждения, материала, из которого изготовлен инструмент, погоды и т. п. обертоны одинаковых основных тонов могут звучать по-разному. Звуковая окраска основного тона называется его *тембром***.

Тембр, как мы установили, зависит от звучания обертонов. Мы узнаём знакомые голоса или инструменты именно по тембру.

Инфразвуки приобрели в последнее время практическое значение. Они хорошо распространяются в воде. Так, слушая «голос моря», удается

* ober (нем.) — старший.

** timbre (франц.) — звуковая окраска.

предсказать появление волны цунами. Ихтиологи пришли к выводу, что инфразвуки слышат рыбы, медузы, так они узнают о приближении шторма. По принципу «уха медузы» построены приемники инфразвука.

Ультразвук находит широкое применение в технике для ультразвуковой дефектоскопии*, перемещения химических реактивов (и тем самым ускорения реакций), ультразвуковой локации (эхолот — прибор для определения глубины моря). Ультразвуковые колебания воспринимают собаки, на них «разговаривают» дельфины. Ультразвуковой локатор есть у летучей мыши, с его помощью она в темноте находит насекомых, за которыми охотится. Был проделан такой опыт: в большом темном помещении натягивались с малыми интервалами проволоочные струны, соединенные с индикатором (указателем; например, с колокольчиком). В помещении летали летучие мыши и ни разу не задели за струны. Любопытно, что объекты охоты, например моль, снабжены ультразвуковыми приемниками, позволяющими им «слышать», что на них охотятся.

§ 2.8. Электромагнитные волны

Из закона электромагнитной индукции (см. разд. III, § 3.8) следует, что если изменяется магнитный поток сквозь какую-либо поверхность, опирающуюся на металлический контур, в последнем возникает э. д. с. индукции и, как следствие, индукционный ток.

Максвелл предположил, что роль проводника в этом явлении состоит только в поставке свободных зарядов. Другими словами, проводник с током позволяет убедиться, что возникло электрическое поле, а само поле возникает при изменении магнитного потока и в отсутствие проводника. В каждой точке произвольно выбранного контура возникает электрическое поле, характеризующееся вектором электрической напряженности E , если изменяется магнитный поток через мысленную поверхность, опирающуюся на этот контур (рис. 354). Это электрическое поле называется *электродинамическим* в отличие от изученного нами электростатического поля, создаваемого неподвижными зарядами. Линии вектора напряженности такого поля замкнуты, их направление связано с изменением наводящего магнитного поля правилом левого винта (см. разд. III, § 3.9, рис. 284). Следовательно, электродинамическое поле не потенциальное, а вихревое, подобно магнитному.

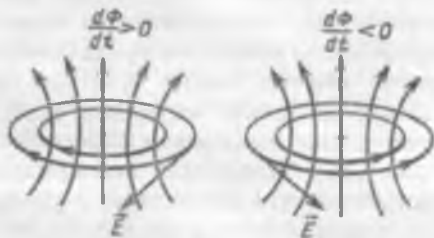


Рис. 354

Это навело Максвелла на мысль о возможной равноправности полей: при изменении магнитного поля возникает электрическое, значит, при изменении электрического должно возникать магнитное поле. Если это так, то при неравномерном изменении магнитного поля возникает

* defectus (лат.) — изъян, σκοπεῖν (греч.) — смотрю. С помощью дефектоскопа обнаруживают скрытые внутренние раковины в металлических отливках и другие дефекты кристаллических тел.

изменяющееся электрическое, которое, в свою очередь, изменяясь неравномерно, приведет к возникновению изменяющегося магнитного поля и т. д.

Так как магнитное поле создается электрическим током, любое появление магнитного поля есть следствие существования определенного тока (например, в магнетиках, см. разд. III, § 3.7). Следовательно, переменное электрическое поле — причина появления магнитного поля — это электрический ток. Такой ток смещения течет в конденсаторе, в диэлектрике, попавшем в переменное поле, даже в вакууме.

Обобщением экспериментальных данных (опыты Эрстеда, сила Ампера, закон Био — Савара, закон электромагнитной индукции) является предположение о взаимной перпендикулярности электрического и магнитного

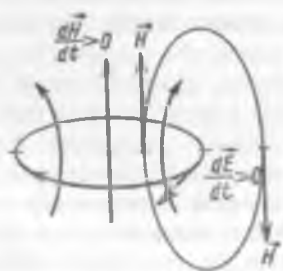


Рис. 355

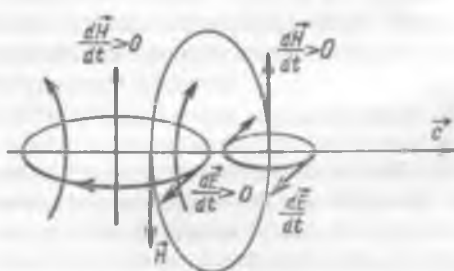


Рис. 356

полей. Мы знаем, что направление электрической напряженности связано с изменением наводящего магнитного поля правилом левого винта. Предположим, что при изменении электрического поля возникает перпендикулярное ему магнитное поле, направленное по тому же правилу (рис. 355).

Тогда наведенное магнитное поле поддерживает изменение исходного магнитного поля, система полей «сама себя создает», источник изменяющегося поля становится ненужным. Наше предположение привело к нарушению одного из фундаментальных законов природы — закона сохранения энергии. Значит, если при изменении электрического поля действительно возникает магнитное поле, то его линии должны быть связаны с наводящим изменением электрического поля правилом правого винта (рис. 356). Теперь для поддержания системы полей необходима работа источника, что согласуется с законом сохранения и превращения энергии.

Электрическое и магнитное поля сцеплены друг с другом. При изменении магнитного поля наводится электродинамическое по правилу левого винта. При изменении электрического поля наводится магнитное по правилу правого винта. Наведенное магнитное поле ослабляет изменение магнитного поля в предыдущих точках и направлено параллельно этому изменению в последующих точках. То же самое надо сказать об электрическом поле. Совокупность изменяющихся электрического и магнитного полей представляет собой *электромагнитное поле*.

Стянем все линии соответствующих векторов в точки. В пределе изменения таких полей будут в каждой точке пространства. По своей природе электромагнитное поле не остается локализованным в месте зарождения,

а в виде поперечных электромагнитных волн распространяется по всевозможным направлениям в пространстве. Распространение электромагнитной волны связано с наведением электромагнитного поля в последующих точках и уничтожением его в предыдущих (пройденных) точках пространства. Снова, как и в случае упругих волн, электромагнитная волна без изменения формы распространяется в пространстве. Векторы электрической и магнитной напряженности образуют с вектором скорости с распространения волны правовинтовую систему (рис. 357).

Из всевозможных электромагнитных волн мы рассмотрим незатухающие гармонические плоские волны. Генератор таких волн работает по гармоническому закону, в каждой точке волнового поля создаются гармо-



Рис. 357

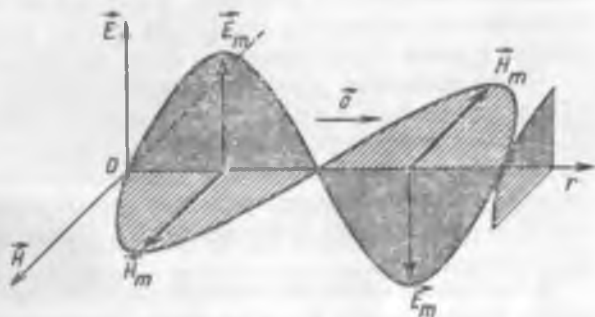


Рис. 358

нические колебания векторов E и H , фазы которых с течением времени переходят к последующим точкам. Мгновенное изображение электромагнитной волны дано на рис. 358. С течением времени вся эта картинка движется вправо со скоростью c . Чем больше частота колебаний генератора, тем быстрее изменяются электрическое и магнитное поля и тем больше мощность излучения.

Электромагнитная теория Максвелла была экспериментально подтверждена Герцем. Он сконструировал передатчик, представляющий собой два стержня с шариками, между которыми оставлен определенный зазор — диполь Герца (рис. 359). К шарикам прикладывается достаточное напряжение, при котором между ними проскакивает искра.



Рис. 359

По современным исследованиям на вращающемся зеркале искра — высокочастотный разряд переменного тока, следовательно, в промежутке между шариками возникает быстропеременное электрическое поле. По Максвеллу, оно создает электромагнитное поле, интенсивность излучения которого будет наибольшей в направлении, перпендикулярном вектору E . Приемник электромагнитных волн Герц сделал аналогичным, только расстояние между шариками было уменьшено. Диполь Герца представляет собой колебательный контур с распределенными параметрами.

Герц исследовал свойства электромагнитных волн — прямолинейность распространения, отражение, преломление и доказал их существование и предсказанные Максвеллом свойства. В теории электромагнитных волн Максвелла скорость распространения процесса в вакууме оказалась равной скорости света. Отсюда Максвелл сделал вывод, что свет — это электромагнитные волны.

В опытах Герца электромагнитные волны отражались и преломлялись в согласии с оптическими законами, еще раз подтверждая теорию Максвелла. Закончив свои исследования, Герц написал, что не видит возможности практического применения электромагнитных излучений.

В 1895 г. А. С. Попов построил свой грозоотметчик — приемник сигналов, посылаемых молнией. Через год он сконструировал передатчик и осуществил радиосвязь (на 250 м). В знак признания заслуг Герца текст первой в мире радиограммы состоял из двух слов: «Генрих Герц».

Через некоторое время, участвуя в работах по спасению броненосца «Генерал-адмирал Апраксин», севшего на камни около острова Гогланд, А. С. Попов передал радиограмму, в которой сообщал о льдине с рыбаками, унесенными в море. Так впервые радио спасло человеческие жизни. Тогда же, заметив перерыв в радиосвязи при прохождении металлического корабля между передатчиком и приемником, А. С. Попов практически открыл принцип радиолокации.

В настоящее время радиоволны находят широкое применение для радиосвязи, радиовещания и телевидения; радиолокации, включая локацию планет солнечной системы; телемеханики, включая управление автоматическими станциями в космосе; исследования дальних космических объектов — радиозвезд и радиогалактик.

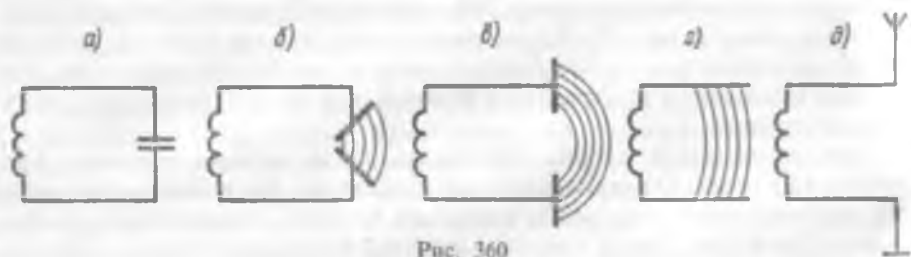


Рис. 360

Почти монополюсным источником гармонических электромагнитных волн является колебательный контур (см. § 1.3). Излучение *закрытого* колебательного контура мало, так как распространяются волны практически только за счет краевого эффекта в конденсаторе и потока рассеяния в катушке. Пластины конденсатора — проводник — экранируют волны, т. е. не дают им распространяться, примерно так же действуют витки катушки, экранируя излучение от ее внутренних частей.

Для увеличения мощности излучения, другими словами, «потерь» энергии, ради которых строится генератор незатухающих колебаний, надо сделать *открытый* колебательный контур. В таком контуре должна быть увеличена часть, непосредственно излучающая электромагнитные волны. На рис. 360, а — д показаны последовательные стадии «открывания» закрытого контура. Последняя стадия представляет собой открытый контур.

Можно сделать открытый колебательный контур из закрытого, присоединив к нему антенну и заземление (рис. 361). В антенне возникает переменное электрическое поле, изменяющееся в такт с электрическими колебаниями в контуре генератора незатухающих колебаний (см. рис. 336). От антенны электромагнитные волны распространяются в пространстве. В случае невозможности заземления (например, на самолетах, в автомобилях и т. д.) используют *противовес* — кусок провода, обычно соединяемый с массой автомобиля или самолета.

Диполь Герца тоже является открытым колебательным контуром.

Для осуществления радиотелеграфной или радиотелефонной связи необходимо передавать звуковую частоту. Но мощность радиоизлучения гораздо больше на высоких частотах. Поэтому используют высокую несущую частоту, которую модулируют* звуковой частотой. Процесс наложения колебаний одной частоты на колебания другой называется *модуляцией*. Различают модуляции нескольких видов: амплитудную, частотную, фазовую.

Рассмотрим процесс простейшей *амплитудной модуляции*, состоящий в изменении амплитуды несущей волны по закону низкой частоты сигнала. С одной из сеток генераторной лампы индуктивно связана микрофонная

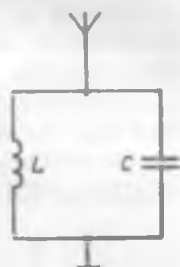


Рис. 361

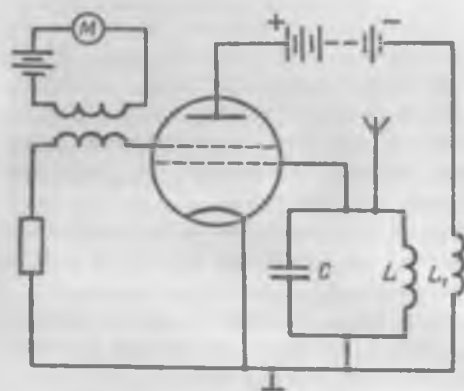


Рис. 362

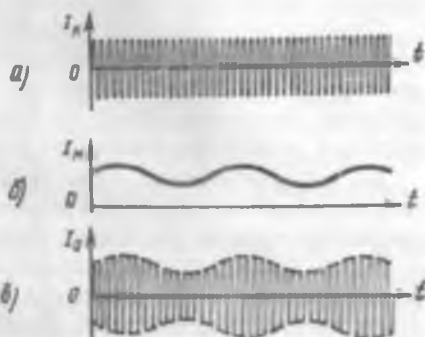


Рис. 363

цепь (рис. 362, для разнообразия контур включен в цепь сетки). Микрофон представляет собой переменное сопротивление, зависящее от давления на его мембрану. Когда перед микрофоном нет источника звука, его сопротивление постоянно. Чем сильнее звук, тем меньше сопротивление микрофона. Пока в цепи микрофона идет слабый постоянный ток, генератор создает незатухающие колебания несущей частоты (рис. 363, а). Соответствующие волны излучаются в пространство. Когда перед микрофоном воспроизводятся какие-нибудь звуки, его сопротивление изменяется со зву-

* *modulatio* (лат.) — мера, (физ.) изменение.

ковой частотой, аналогично изменяется сила тока в цепи микрофона (рис. 363, б). Благодаря индуктивной связи микрофонной цепи с сеточной на сетку подается переменное напряжение звуковой частоты, которое с этой частотой увеличивает или уменьшает силу анодного тока. Амплитуда колебаний несущей частоты начинает изменяться со звуковой частотой — получаются *модулированные колебания* (рис. 363, в), которые излучаются в пространство.

Основной частью радиоприемника (рис. 364) тоже является открытый колебательный контур. В нем возникают вынужденные колебания от всевозможных источников, действующих на антенну. Один из элементов контура делается переменным, чтобы можно было настроиться в резонанс

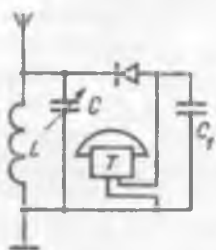


Рис. 364

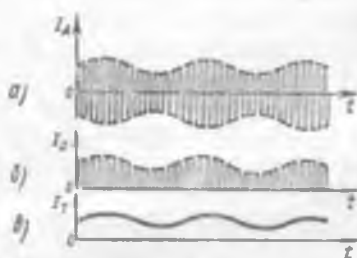


Рис. 365

с какой-либо передающей станцией. В контуре возникают сравнительно большие модулированные колебания, вызванные этой станцией (рис. 365, а).

Прибор, позволяющий услышать звуковые колебания тока, — телефон представляет собой электромагнит, который притягивает легкую ферромагнитную мембрану. Если ток звуковой частоты пропускается через обмотку электромагнита, то его притяжение изменяется со звуковой частотой, мембрана совершает колебания, т. е. «звучит».

Но модулированные колебания несущей (высокой) частоты пропускать по электромагниту телефона бесполезно, так как мембрана просто не успеет прореагировать на колебания такой частоты.

Надо предварительно провести операцию, обратную модуляции, — *детектирование**. На схеме (см. рис. 364) в качестве детектора использован кристаллический диод. Такой радиоприемник называется *детекторным*. В результате указанной операции получают *детектированные колебания* (рис. 365, б), представляющие собой суперпозицию колебаний высокой и низкой частот. Мембрана телефона реагирует на звуковую частоту, с которой изменяется ток в телефоне (рис. 365, в). Большое индуктивное сопротивление телефона для токов высокой частоты приведет к блокированию (или шунтированию, см. разд. III, § 2.3) телефона по высокой частоте конденсатором C_1 , который так и называется *блокировочным* (см. рис. 364). Его емкость подбирается так, чтобы емкостное сопротивление для низкой частоты было гораздо больше индуктивного сопротивления телефона. Тогда в параллельном участке телефон — блокировочный конденсатор ток высокой частоты пройдет в основном через конденсатор.

* detector (лат.) — раскрывающий, обнаруживающий.

а низкой — через телефон. Мембрана телефона будет колебаться аналогично мембране микрофона (см. рис. 362), мы услышим такой же звук, как перед микрофоном. Детекторный приемник очень прост, надежен, не требует источников питания. Это отсутствие источников питания является и недостатком приемника. Он принимает сигналы только от близких или очень мощных радиостанций.

Если мы хотим принять слабый сигнал, то его нужно предварительно усилить. Вспомним устройство и назначение трехэлектродной электронной лампы (см. разд. III, § 2.13) и построим ламповый приемник (рис. 366). Снова основная часть приемника — открытый колебательный контур, настроенный в резонанс с определенной радиопередающей станцией.

Колебания напряжения на конденсаторе подаются на сетку электронной лампы и вызывают усиленные колебания анодного тока в такт с колебаниями, излучаемыми антенной передатчика. Триод в этой схеме имеет функции усилителя колебаний и детектора. Разделенные, как в предыдущем случае, колебания проходят через телефон (звуковая частота) и блокировочный конденсатор (несущая частота). Дополнительное устройство в цепи сетки —

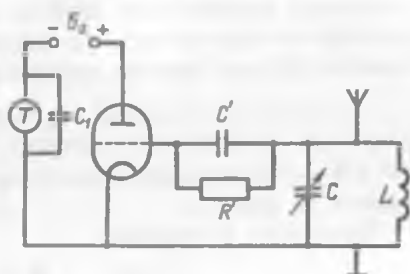


Рис. 366

сетки — *гридлик* (параллельно соединенные конденсатор C' и большое активное сопротивление R) — служит для пропускания малого постоянного сеточного тока. При работе лампы во время положительного полупериода на сетку попадает некоторое небольшое количество электронов. Накапливаясь за время работы приемника, эти электроны заперли бы лампу. Их надо отводить на катод, для чего нужна цепь сетки, имеющая достаточно большое сопротивление (иначе сеточный ток будет велик, что нежелательно). Но большое сопротивление ослабит сигнал, нуждающийся в усилении.

Поэтому надо разделить цепи сигнала и сеточного тока. Это легко сделать, потому что сеточный ток почти постоянен, а сигнал — переменное напряжение высокой частоты. Гридлик пропускает сигнал через конденсатор, а сеточный ток — через сопротивление.

Мы схематически построили однокаскадный ламповый приемник. Если усиление одного каскада недостаточно, то можно вместо телефона включить промежуток сетка — катод трехэлектродной лампы следующего каскада и т. д. В анодную цепь последнего каскада такого многолампового приемника включают телефон или динамик.

Многокаскадные усилители применяются во всех радиотехнических схемах, где надо использовать очень слабый сигнал (например, в радиолокации). Но число ступеней усиления нельзя увеличивать неограниченно, так как вместе с полезным сигналом усиливаются и сопутствующие ему шумы, неизбежно появляющиеся в любой схеме из-за хаотического движения свободных зарядов. Их мощность растет вместе с числом каскадов усиления. Принимая специальные меры борьбы с шумами, удастся довести число каскадов усиления до нескольких тысяч. Примером приема

чрезвычайно слабых сигналов является радиосвязь с автоматическими станциями «Венера», «Марс» или прием отраженного сигнала при радиолокации Венеры. В качестве одной из мер по борьбе с шумами назовем понижение температуры приемного колебательного контура жидким гелием.

Все шире в современной радиотехнике используются импульсные режимы работы — когда излучение не продолжается непрерывно, а производится в течение небольших промежутков времени с более или менее длительными перерывами. Это, конечно, не гармоническое излучение, но у него есть ряд своих достоинств.

Так, имея импульсный передатчик сравнительно небольшой мощности, можно получить во много раз большую мощность в импульсе. Пусть, например, киловаттный передатчик ($P = 1$ кВт) работает в импульсном режиме: продолжительность импульса $\Delta t = 5$ мкс, интервал между импульсами $\tau = 495$ мкс. Энергия, затрачиваемая на излучение за некоторое время t :

$$W \stackrel{\text{или}}{=} Pt = \Delta WN,$$

где ΔW — энергия одного импульса; $N = t/(\Delta t + \tau)$ — число импульсов, излученных за время t .

Мощность в импульсе

$$P_1 = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W}{N \Delta t} = \frac{W(\Delta t + \tau)}{t \Delta t} = P \frac{\Delta t + \tau}{\Delta t}.$$

Следовательно, в данном примере мощность в импульсе

$$P_1 = 1 \text{ кВт} \frac{(5 + 495) \text{ мкс}}{5 \text{ мкс}} = 100 \text{ кВт}.$$

Технически это осуществляется так: в течение промежутка τ между импульсами энергия запасается, например в конденсаторах, за время Δt импульса вся запасенная энергия излучается.

Принцип действия радиолокационной установки (рис. 367; структурная схема): направленная антенна (часто параболическая) излучает короткими импульсами радиоволны, в промежутках между импульсами антенна соединяется с приемником. Одновременно с посылкой импульса подается кратковременный сигнал на вертикально отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки дальности и



Рис. 367

равномерно нарастающее — «пилообразное» — напряжение на горизонтально отклоняющие пластины этой трубки. За промежуток времени τ между импульсами луч под воздействием пилообразного напряжения равномерно проходит весь экран. Если импульс наталкивается на препятствие (например, самолет), то от него идет отраженный сигнал, принимается антенной, многократно усиливается и подается на вертикально отклоняющие пластины той же трубки. Получается вертикальный «всплеск» на определенном расстоянии от нулевого. Зная скорость движения электронного луча в трубке и импульсы

в пространстве, легко сосчитать, какое расстояние до цели и обратно прошел луч, и, разделив его на два, получить *наклонную дальность* — расстояние «по лучу» от антенны до цели. Зная ориентировку антенны (угол с определенным направлением на горизонтальной плоскости — *азимут*, угол с горизонтальной плоскостью — *высоту*), находят три координаты, описывающие положение цели. Изменение этих координат с течением времени позволяет определить скорость и траекторию цели.

С помощью современных радиолокационных установок можно видеть в темноте, в тумане, в облаках и т. п. Становится возможным слепое вождение самолетов, кораблей, даже автомобилей. Трудно перечислить все применения радиоволн, которые уже осуществлены или возможны в ближайшем будущем.

ЗАДАЧИ

Задача IV. 1. Маятник на поверхности Земли колеблется с периодом 2 с. На сколько изменится период колебаний маятника при подъеме на высоту 320 км над поверхностью Земли?

$$\begin{aligned} T_0 &= 2 \text{ с}; & T &= 2\pi \sqrt{l/g}; \\ h &= 320 \text{ км} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ м}; & F &= Gm_1m_2/r^2. \\ R_1 &= 6400 \text{ км} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}. \end{aligned}$$

$\Delta T = ?$

Решение. Приближенно можно считать, что $mg = Gmm_2/r^2$. Тогда

$$g = G \frac{m_2}{r^2}, \quad \frac{T}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{g_0}{l}} = \sqrt{\frac{Gm_2(R_1 + h)^2}{R_1^2 Gm_2}} = \frac{R_1 + h}{R_1};$$

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{R_1 + h - R_1}{R_1}.$$

$$\text{Получаем } \Delta T = T_0 \frac{h}{R_1} = 2 \text{ с} \cdot \frac{3,2 \cdot 10^5 \text{ м}}{6,4 \cdot 10^6 \text{ м}} = 0,1 \text{ с}.$$

Задача IV. 2. Математический маятник длиной 2 м совершает незатухающие колебания с амплитудой 4° . Определить линейное ускорение маятника через 0,1 с после начала колебаний.

$$\begin{aligned} l &= 2 \text{ м}; & \sum_{i=1}^n M_i &= J\varepsilon; \quad v^{2l-1} = \omega R; \\ t &= 0,1 \text{ с}; & a^{5l} \frac{dv}{dt} &= \frac{d(\omega R)}{dt} \frac{22-1}{22} \varepsilon R; \\ \alpha_m &= 4^\circ = 4 \cdot 2\pi/360 \text{ рад}. & \alpha^{13} &= \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \\ a - ? & & \omega_0^{14} &= mgl/J \frac{48-1}{48} = mgl/(ml^2) = g/l. \end{aligned}$$

Решение. Уравнение движения маятника

$$-mgl\alpha = ml^2\varepsilon.$$

Ускорение $a = \varepsilon l = -gx = -gx_m \cos \omega_0 t = -gx_m \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t =$

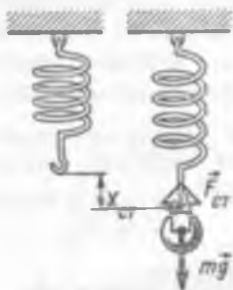
$$= -9,81 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 4 \cdot \frac{2\pi}{360} \cos \left(\sqrt{\frac{9,81 \text{ м}}{\text{с}^2 \cdot 2 \text{ м}}} \cdot 0,1 \text{ с} \right) = -0,668 \text{ м/с}^2$$

Напомним, что началом колебаний при косинусоидальном законе называется определенное прохождение системой амплитудного отклонения. Отсюда $\varphi_0 = 0$.

Что означает минус в полученном ответе?

Задача IV. 3. Шарик неподвижно висит на пружине, когда она растянута на 4 см. Определить период колебаний такого вертикального пружинного маятника.

$x_{\text{ст}} = 4 \text{ см} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$
 $T_0 = ?$



$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{39.1}{=} m\ddot{x};$
 $F_{\text{упр}} \stackrel{28.1}{=} kx;$
 $T_0 \stackrel{11}{=} 2\pi \sqrt{m/k}.$

Решение. Условие равновесия маятника $-kx_{\text{ст}} + mg = 0$, откуда $k = mg/x_{\text{ст}}$. Тогда

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mx_{\text{ст}}}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{x_{\text{ст}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{с}^2}{9,81 \text{ м}}} = 0,402 \text{ с.}$$

Задача IV.4. Колебательный контур лампового генератора состоит из катушки индуктивностью $4 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$ и конденсатора емкостью $0,04 \text{ мкФ}$. Активное сопротивление контура пренебрежимо мало. Определить длину волны, излучаемой генератором.

$L = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Гн};$ $\lambda \stackrel{37}{=} vT_0;$
 $C = 0,04 \text{ мкФ} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Ф.}$ $T_0 \stackrel{20}{=} 2\pi \sqrt{LC}.$

$\lambda = ?$

Решение. Из двух приведенных формул сразу получаем

$$\lambda = v \cdot 2\pi \sqrt{LC} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 2\pi \sqrt{4 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot 4 \cdot 10^{-8} \text{ Ф}} = 754 \text{ м.}$$

Задача IV.5. Найти разность фаз двух точек волнового поля в стали, отстоящих друг от друга на 20 см, если частота генератора колебаний $2 \cdot 10^2 \text{ Гц}$.

$\Delta r = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м};$ $\Delta\varphi \stackrel{41}{=} k \Delta r; k \stackrel{38}{=} 2\pi/\lambda;$
 $f = 2 \cdot 10^2 \text{ Гц.}$ $\lambda \stackrel{37}{=} v/f; v \stackrel{36}{=} \sqrt{E/\rho}.$

$\Delta\varphi = ?$

Решение. Разность фаз рассматриваемых точек

$$\Delta\varphi = 2\pi \Delta r/\lambda = 2\pi f \Delta r \sqrt{\rho/E} = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1} \cdot 0,2 \text{ м} \sqrt{\frac{7,8 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot 19,6 \cdot 10^{10} \text{ Н}}} = 0,05 \text{ рад.}$$

РАЗДЕЛ V

ОПТИКА

ГЛАВА I

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 1.1. Экспериментальные законы

Оптика изучает излучение, распространение и взаимодействие с веществом большого диапазона электромагнитных волн — от миллиметровых радиоволн до жесткого γ -излучения. К понятию об электромагнитной природе света люди подошли только в XIX в. Первоначально в оптике изучался видимый свет, испускаемый *источниками света*, — химическими, биологическими, физическими. К физическим источникам относятся раскаленные тела и люминесцентные источники холодного света. Другие тела отражают свет и потому видимы.

В оптике используются различные *световые пучки* — сходящиеся или расходящиеся. Достаточно узкий световой пучок, слабо сходящийся или расходящийся, назовем *лучом** света.

Устройство, с помощью которого преобразуются лучи, представляет собой *оптическую систему*. Источник лучей (собственных или отраженных) — *предмет*. Лучи, идущие от предмета к системе, — *входящие*. После преобразования в системе получаются лучи *выходящие*.

Оптическая система называется *идеальной*, если каждому входящему в нее лучу соответствует один выходящий. При этом все входящие лучи, идущие от одной точки, пересекаются (или расходятся так, что пересекаются их продолжения), выходя из системы, в одной точке. Эта точка пересечения — *изображение* данной точки.

Для построения изображения точки в идеальной системе достаточно построить любые два луча, идущие от этой точки. Точка пересечения выходящих лучей, соответствующих этим двум падающим, будет искомым изображением данной точки.

Лучи, выходящие из оптической системы, могут быть сходящимися или расходящимися. В первом случае они пересекутся в точке *действительного изображения*. Во втором — точка пересечения продолжений выходящих лучей будет *мнимым изображением*.

Изображение предмета в идеальной системе представляет собой совокупность изображений его точек. Это *точечное изображение*.

Изучая окружающий мир, человечество накопило большое количество экспериментальных сведений о свете.

* Слово «луч» имеет геометрический смысл прямой, точнее полупрямой. Мы будем под лучом понимать узкий канал распространения энергии излучения, который бывает и криволинейным (см. разд. IV, § 2.2).

Отражение и прямолинейность распространения света были известны около двух тысяч лет назад. В начале XVII в. были сформулированы законы преломления (Снеллнус, затем Декарт). Все это составляет предмет геометрической оптики.

Закон обратимости световых лучей. Пусть на какую-либо идеальную оптическую систему падает луч A и выходит из нее соответствующий ему луч B . Если пустить новый падающий луч навстречу B , получим новый выходящий из системы луч, идущий навстречу A .

Закон прямолинейности распространения света. В однородной среде свет распространяется прямолинейно. Мы воспринимаем источник света или предмет, от которого упал отраженный свет, на продолжении лучей, попавших в глаз. Этим законом объясняется образование геометрической тени, фотографирование камерой-обскурой (безлинзовой камерой с маленьким отверстием, рис. 368).

Законы отражения. Границей двух сред назовем поверхность, разделяющую две однородные среды (I и II , рис. 369). Луч света, идущий к границе в среде I (которая является первой именно потому, что из нее на границу падает луч), называется *падающим* (a). Луч, остающийся в среде I после взаимодействия с границей в точке падения A , — *отраженный* (b).



Рис. 368

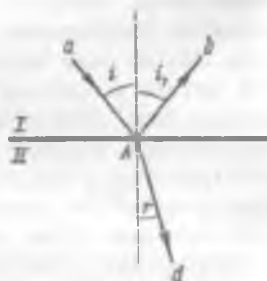


Рис. 369

Угол i между лучом падающим и перпендикуляром, восстановленным к границе двух сред в точке падения, — *угол падения*. Угол i_1 между лучом отраженным и перпендикуляром к границе двух сред в точке падения — *угол отражения*. Плоскость, в которой лежат луч падающий и перпендикуляр к границе двух сред в точке падения, — это *плоскость падения*.

1. Луч падающий, перпендикуляр к границе двух сред в точке падения и луч отраженный лежат в одной плоскости (то, что две из перечисленных прямых лежат в одной плоскости, — не закон, так как любые две пересекающиеся прямые удовлетворяют этому геометрическому положению. Физическим содержанием закона является нахождение третьей прямой в той же плоскости). Следовательно, углы падения и отражения лежат в плоскости падения.

2. Угол падения равен углу отражения (изменяя произвольно угол падения, получаем такое же изменение угла отражения):

$$i = i_1. \quad (1)$$

Различают отражения зеркальное и диффузное. Зеркальным называется отражение, при котором падающий на поверхность параллельный пучок

лучей света остается параллельным (рис. 370). Диффузным называется отражение, при котором падающий параллельный пучок рассеивается (рис. 371).



Рис. 370



Рис. 371

Соответственно различают зеркальные (достаточно гладкие) и матовые (рассеивающие) поверхности. Это относительные понятия. Одна поверхность может быть зеркальной и матовой для разных излучений. Даже для одного излучения матовая поверхность может стать зеркальной, если увеличить угол падения.

Законы преломления. На границе двух сред кроме отражения наблюдается преломление — явление, состоящее в том, что луч частично проходит во вторую среду, изменяя свое первоначальное направление. Этот луч называется преломленным (d , рис. 369). Угол r между лучом преломленным и перпендикуляром к границе двух сред в точке падения называется углом преломления. Законы преломления были опубликованы в «Диоптрике» Декарта (1637 г.):

1. Луч падающий, перпендикуляр к границе двух сред в точке падения и преломленный луч лежат в одной плоскости (аналогично первому закону отражения, смысл этого закона в том, что третья из перечисленных прямых попала в плоскость, положение которой определяют первые две. Это плоскость падения).

2. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данной пары сред (т. е. не изменяется при произвольном изменении угла падения и соответственном изменении угла преломления). Эта постоянная называется показателем преломления (n_{21}) второй среды относительно первой:

$$n_{21} = \sin i / \sin r. \quad (2)$$

Показатель преломления какой-либо среды относительно вакуума называется абсолютным показателем преломления n .

Пусть падающий на границу луч вдоль d (см. рис. 369), преломленный луч по закону обратимости пойдет в среде I вдоль направления a . Значит (если не изменять обозначений углов),

$$\sin r / \sin i = n_{12} = 1/n_{21}. \quad (3)$$

Показатели преломления первой среды относительно второй и второй среды относительно первой — обратные величины.

Если угол падения больше угла преломления, то вторая среда называется оптически более плотной, чем первая, и наоборот. Это определение относительно, если вторая среда оптически более плотна, чем

первая, то первая среда оптически менее плотна, чем вторая. При переходе в более оптически плотную среду луч отклоняется от первоначального направления к основанию перпендикуляра, синус угла падения больше синуса угла преломления, и показатель преломления больше единицы. При переходе в оптически менее плотную среду, наоборот, показатель преломления меньше единицы.

§ 1.2. Плоское зеркало

Рассмотрим два каких-либо луча, падающих от источника S в произвольные точки A и B плоского зеркала (рис. 372). Отраженные лучи, построенные в соответствии с формулой (1), расходятся, их продолжения пересекутся в точке S_1 , которая будет мнимым изображением источника S (если в ней пересекутся продолжения и всех остальных отраженных лучей!). Треугольники SAB и S_1AB имеют общую сторону AB и равные

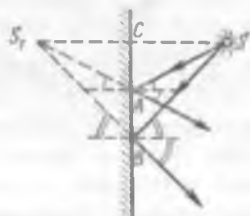


Рис. 372

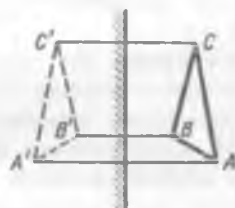


Рис. 373

пары углов A и B [отмеченные дугой углы при точке A равны по формуле (1) и как вертикальные, аналогично равны отмеченные двумя дугами углы при точке B . Но каждый угол A в наших треугольниках равен прямому плюс один из отмеченных, значит, они равны друг другу; каждый угол B равен прямому минус отмеченные, значит, они тоже равны между собой]. Такие треугольники равны, следовательно, равны их сходственные элементы, в частности высоты, перпендикулярные зеркалу.

Следовательно, для любых треугольников SAB соответствующей высотой является перпендикуляр к зеркалу, равный расстоянию SC , и любые лучи отразятся от зеркала так, что их продолжения пройдут через точку S_1 , которая и будет изображением точки S . Зеркально симметричной точкой S_1 (относительно плоскости AB) называется точка, лежащая на перпендикуляре к плоскости, опущенном из точки S на таком же расстоянии от нее: $|SC| = |S_1C|$.

Построим изображение предмета (треугольника ABC , рис. 373) в плоском зеркале. Лучи теперь можно не строить, мы знаем, что изображением каждой точки в зеркале будет зеркально симметричная точка. Изображение $A'B'C'$ мнимое (пересекаются продолжения лучей, нельзя получить изображение на экране, помещенном за зеркалом), прямое, равное, но зеркально симметричное (т. е. отражение левой стороны предмета является правой стороной изображения и т. п.). Чтобы убедиться в этом, достаточно представить движение автомобилей, едущих навстречу друг

другу по правой (для себя!) стороне дороги. Посмотрите в зеркало и убедитесь, что часы у вашего изображения на правой руке (если вы их носите на левой) и т. д. Отпечаток текста на промокательной бумаге читается с трудом — там буквы «наоборот». В зеркале изображение еще раз переворачивается и читается легко.

§ 1.3. Сферические зеркала

Из всех неплоских зеркал мы рассмотрим только *сферические*, отражающая поверхность которых представляет собой внешнюю или внутреннюю часть сферы. Имеем вогнутое зеркало (рис. 374). Середина C зеркала называется *полем*.

Любой луч, упавший на зеркало через центр сферы (угол падения равен нулю), отразившись, пойдет по тому же направлению. Существует

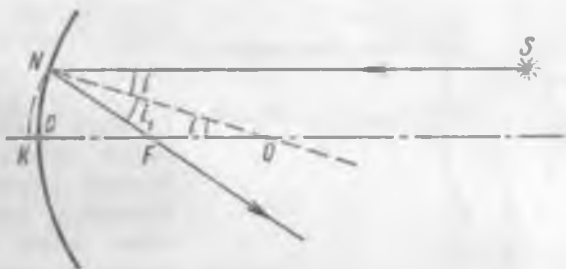


Рис. 374

только одна точка O , удовлетворяющая этому условию. Она называется *оптическим центром* зеркала. Все прямые, проходящие через оптический центр, — *оптические оси* зеркала. Одна из оптических осей проходит через полюс C зеркала, это *главная оптическая ось*. Остальные оптические оси — *побочные*.

Пусть на зеркало в точку N падает луч, параллельный главной оптической оси. NO — радиус и, следовательно, перпендикулярен к сфере. Построив угол отражения равным углу падения, получим отраженный луч NF . Углы падения i и NOF равны, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых и секущей. Следовательно, треугольник NFO — равнобедренный, и $|NF| = |FO|$.

Проведем дугу NK радиусом FN . Точка пересечения дуги с главной оптической осью не совпадает с точкой C , но близка к ней. Отрезок $|CK|$ тем меньше, чем ближе SN к главной оптической оси. Ограничимся только *параксиальными* (приосевыми) пучками, с тем чтобы можно было считать пренебрежимо малым отрезок $|CK| \ll |CF|$. Для таких пучков $|CF| = |NF| = |FO|$, и точка F для всех параксиальных лучей лежит посередине радиуса CO . Эта точка называется *главным фокусом зеркала* (разумеется, есть фокусы и на всех остальных оптических осях — побочные). Итак, главный фокус вогнутого зеркала — точка, в которой после отражения пересекутся все параксиальные лучи падающие параллельно главной оптической оси.

Аналогичные рассуждения и построения приведут нас к понятию

мнимого главного фокуса выпуклого зеркала (рис. 375). Расстояние от зеркала до главного фокуса называется *фокусным расстоянием* и обозначается F . Можно доказать, что все падающие из одной точки лучи после отражения от вогнутого зеркала проходят через одну точку — изображение (доказать это можно хотя бы построением; из-за приближенности условия параксиальности это, конечно, не совсем точка, а небольшое пятно, для выпуклого зеркала — это точка пересечения продолжений всех отраженных лучей). Для построения такой точки достаточно каких-нибудь двух лучей. Проще всего строить лучи, пользуясь только карандашом и линейкой. Мы уже умеем строить три таких луча (а нужны два, поэтому обычно другие не строят). Луч, падающий параллельно главной оптической оси, после отражения пройдет через главный фокус (или продолжение отраженного луча пройдет через главный фокус — для выпуклого зеркала). По закону обратимости, луч, падающий через главный фокус, после отражения пойдет параллельно главной оптической оси. Наконец, луч, падающий через центр сферы, отразится по тому же направлению.

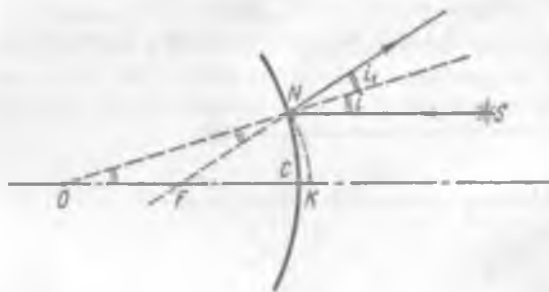


Рис. 375

При построении изображения точки в вогнутом зеркале (рис. 376) намечают точки O , F , C , затем строят любые два из трех перечисленных лучей. Через точку пересечения отраженных лучей S_1 пройдут и все остальные отраженные лучи — она является действительным изображением точки S . Построение изображения в выпуклом зеркале аналогично, выполните его самостоятельно.

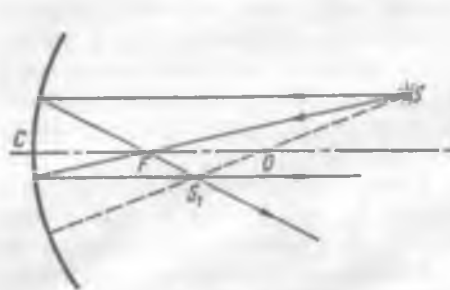


Рис. 376

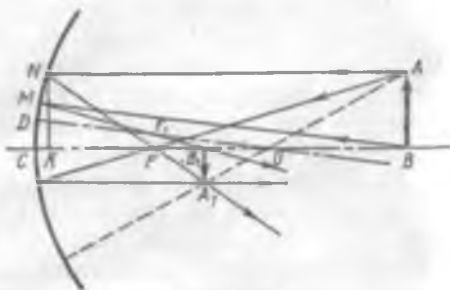


Рис. 377

Построим изображение предмета AB в вогнутом зеркале (рис. 377). Изображение A_1 находим, как на рис. 376. Построение изображения точки, расположенной на главной оптической оси, осуществляется так: проводим произвольный луч BM и параллельно ему соответствующую побочную ось OD ; на середине расстояния OD расположен побочный

фокус F_1 , через который пройдет отраженный от точки M луч. В качестве второго луча удобно выбрать луч, идущий вдоль главной оптической оси. Точка пересечения двух отраженных лучей — изображение B_1 .

Обозначим расстояние от зеркала до предмета $d = |CB|$; расстояние от зеркала до изображения $f = |CB_1|$; фокусное расстояние $F = |CF| \approx \approx |KF|$. Из подобия треугольников A_1B_1F и NKF следует равенство

$$|A_1B_1|/|AB| = (f - F)/F;$$

аналогично, из подобия треугольников A_1B_1O и ABO

$$|A_1B_1|/|AB| = (2F - f)/(d - 2F).$$

Отсюда $(f - F)/F = (2F - f)/(d - 2F)$.

Преобразуем это уравнение: $2F^2 - -Ff = fd - Fd - 2Ff + 2F^2$. Приведя подобные члены, получаем $fF + Fd = =fd$. Разделим это уравнение на произведение Ffd :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (4)$$

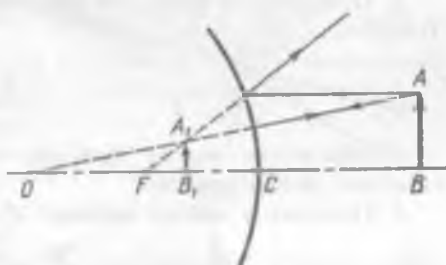


Рис. 378

Мы получили формулу зеркала.

Ее можно применять и к выпуклому зеркалу. Аналогичное построение для выпуклого зеркала (рис. 378) показывает, что если предмет расположен перед зеркалом ($d > 0$), то изображение расположено по другую сторону зеркала ($f < 0$) и фокус находится за зеркалом ($F < 0$). Если взять все величины по модулю, то формула выпуклого зеркала примет вид

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F} \quad \text{или} \quad \frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F}.$$

Это же выражение можно получить из подобия треугольников на рис. 378. Прделайте это самостоятельно.

Линейным увеличением зеркала называется отношение линейных размеров изображения и предмета:

$$k = |A_1B_1|/|AB|.$$

Это отношение из подобия треугольников NKF и FA_1B_1 (см. рис. 377):

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{f - F}{F} = \frac{f}{F} - 1 = \frac{f}{d} + 1 - 1 = \frac{f}{d}.$$

Следовательно, линейное увеличение

$$k = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{f}{d}. \quad (5)$$

Исследуем формулу вогнутого зеркала. Для этого найдем из нее расстояние от изображения до зеркала:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{d} = \frac{d - F}{dF}, f = \frac{dF}{d - F} = \frac{F}{1 - F/d}.$$

1. Пусть предмет расположен в бесконечности, т. е. от него идут только лучи, параллельные главной оптической оси. Тогда $d = \infty$,

$$f = \frac{F}{1 - 0} = F.$$

Изображение в главном фокусе, действительное, уменьшенное (точка).

2. Предмет на конечном расстоянии за центром сферы: $2F < d < \infty$. Тогда

$$0 < \frac{F}{d} < \frac{1}{2}; 1 > 1 - \frac{F}{d} > \frac{1}{2}; F < f = \frac{F}{1 - F/d} < 2F.$$

Изображение между фокусом и центром зеркала, действительное, обратное, уменьшенное.

3. Предмет в центре зеркала: $d = 2F$. Тогда

$$\frac{F}{d} = \frac{1}{2}; 1 - \frac{F}{d} = \frac{1}{2}; f = \frac{F}{1 - F/d} = 2F.$$

Изображение там же, действительное, обратное, равное.

4. Предмет между фокусом и центром зеркала: $F < d < 2F$. Значит,

$$\frac{1}{2} < \frac{F}{d} < 1; 0 < 1 - \frac{F}{d} < \frac{1}{2}; f > 2F.$$

Изображение действительное, обратное, увеличенное, расположено за центром зеркала.

5. Предмет в фокусе: $d = F$. Тогда

$$\frac{F}{d} = 1; 1 - \frac{F}{d} = 0; f = \frac{F}{1 - 1} = \infty.$$

Изображение в бесконечности (отраженные лучи параллельны).

6. Предмет между фокусом и зеркалом: $d < F$. Следовательно,

$$\frac{F}{d} > 1; 1 - \frac{F}{d} < 0; f < 0.$$

Изображение мнимое, прямое, увеличенное, расположено за зеркалом.

Постройте изображения предмета в вогнутом зеркале при этих шести условиях. Проверьте, какие изображения получаются.

Как видно из рис. 378, в выпуклом зеркале всегда изображение мнимое, прямое, уменьшенное.

Вогнутые зеркала широко применяются в технике. С их помощью концентрируют энергию Солнца в гелионагревательных установках, их используют в качестве рефлекторов (отражателей) в телескопах, прожекторах, фарах, нагревателях и т. п. Правда, чаще используют во-

гнутые зеркала несферической формы. Выпуклые зеркала находят применение в качестве зеркал заднего обзора на транспорте.

§ 1.4. Полное отражение

При переходе луча из оптически более плотной в оптически менее плотную среду угол преломления больше угла падения. Будем последовательно увеличивать угол падения (положения 1, 2, 3 падающего, отраженного и преломленного лучей изображены на рис. 379). При этом угол преломления остается больше угла падения. Наконец, при предельном угле падения $i_{\text{пр}}$ угол преломления должен был бы стать равным 90° . Но по мере увеличения угла падения уменьшается интенсивность преломленного луча и возрастает интенсивность луча отраженного.

При угле падения $i_{\text{пр}}$ преломленный луч пропадает (его интенсивность становится равной нулю), и практически вся энергия падающего луча переходит к лучу отраженному — наблюдается *полное отражение* (внутри оптически более плотной среды).

Полное отражение наблюдается, конечно, и при углах падения, больших предельного (луч 4). Предельный угол легко вычислить:

$$\sin i_{\text{пр}} / \sin r_{\text{пр}} = n_{21},$$

где $r_{\text{пр}} = 90^\circ$, а n_{21} — показатель преломления оптически менее плотной среды относительно оптической более плотной. Перейдем к показателю преломления оптически более плотной среды:

$$\sin i_{\text{пр}} = 1/n_{12},$$

если в качестве второй среды выступает воздух, то

$$\sin i_{\text{пр}} = 1/n, \quad i_{\text{пр}} = \arcsin(1/n).$$

Предельный угол равен арксинусу величины, обратной показателю преломления среды, в которой наблюдается полное отражение. Благодаря полному отражению кажутся блестящими пузырьки газа в жидкости; полное отражение используется в ряде оптических приборов, например в призматическом бинокле (см. рис. 406). Наблюдать полное отражение можно на поверхности спокойной воды, если на нее смотреть снизу. Когда ныряльщик смотрит на поверхность из-под воды под малым углом, он видит предметы, находящиеся над водой; смотря под большим углом, он увидит предметы, расположенные на дне.

§ 1.5. Преломление в плоскопараллельной пластинке

Имеем плоскопараллельную пластинку толщиной d из материала с абсолютным показателем преломления n , на которую падает из воздуха под углом i узкий луч света (рис. 380). На первой и второй гранях

$$\sin i / \sin r = n, \quad \sin i_1 / \sin r_1 = 1/n.$$

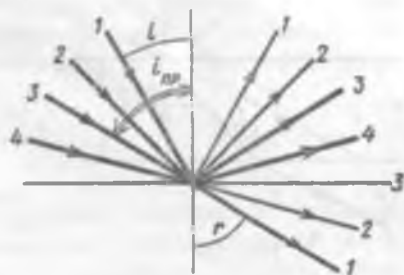


Рис. 379

Перемножим почленно эти равенства:

$$\frac{\sin i \sin i_1}{\sin r \sin r_1} = 1.$$

Но $r = i_1$ — как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей. Следовательно, $\sin i_1 = \sin r$. Тогда

$$\sin i / \sin r_1 = 1; \sin i = \sin r_1; i = r_1$$

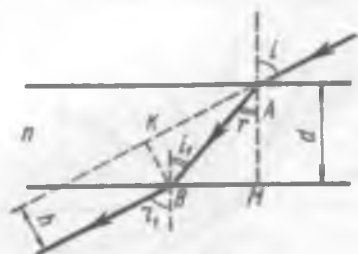


Рис. 380

(для острых углов). Значит, выходящий луч параллелен падающему, и плоскопараллельная пластинка смещает его на h .

Из $\triangle ABK$

$$\sin(i - r) = h / |AB|$$

(угол между AK и AM равен i как один из вертикальных). Из $\triangle AMB$ $\cos r = d / |AB|$, отсюда

$$h = |AB| \sin(i - r) = d \sin(i - r) / \cos r. \quad (6)$$

По известным тригонометрическим формулам

$$\frac{\sin(i - r)}{\cos r} = \frac{\sin i \cos r - \cos i \sin r}{\cos r} = \sin i \left(1 - \frac{1}{n} \frac{\cos i}{\cos r} \right),$$

$$h = d \sin i \left(1 - \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{1 - \sin^2 r}} \right) =$$

$$= d \sin i \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right).$$

При увеличении i числитель подкоренного выражения уменьшается быстрее знаменателя, так как $n > 1$, значит корень уменьшается, и выражение в скобках возрастает. Синус угла падения при этом тоже растёт, и h увеличивается.

В случае увеличения n корень уменьшается, разность в скобках и h возрастают. Наконец, при увеличении d пропорционально возрастает h .

Таким образом, чем толще пластинка, чем больше угол падения и показатель преломления, тем больше смещение h . Глядя в окно на улицу, мы почти не замечаем смещения (угол падения и толщина стекла малы), зато хорошо видим дефекты стекла, на которых резко изменяется показатель преломления (и толщина).

§ 1.6. Преломление в трехгранной призме

Из воздуха идет луч на грань трехгранной призмы (рис. 381, а). Призма сделана из материала, естественно, оптически более плотного, чем окружающая среда. Если бы не было призмы, луч через точку M пошел бы прямолинейно. Но в точке M он испытывает преломление на границе с оптически более плотной средой, поэтому идет под углом преломления меньшим, чем угол падения. На грани CB в точке N

луч снова преломляется, но на этот раз на границе с оптически менее плотной средой, так что угол преломления больше угла падения. Так, испытав два преломления, луч оба раза отклоняется в одну сторону на суммарный *угол отклонения* δ — угол между входящим и выходящим лучами. Грани призмы, на которых луч испытал преломление, называются *преломляющими гранями*, третья грань называется *основанием* призмы (вопреки стереометрии, где основания — треугольники ABC). Двугранный угол C между преломляющими гранями — *преломляющий угол*. Итак, если призма сделана из материала оптически более плотного, чем окружающая среда, то при преломлении она дважды отклоняет луч в сторону основания. Если она сделана из материала оптически менее плотного, чем окружающая среда, то наоборот. Постройте самостоятельно ход лучей в такой призме.

§ 1.7. Линзы

Вернемся к рис. 381, *а* и мысленно отрезем нижнюю и верхнюю части призмы, не подходя близко к точкам преломления M и N (рис. 381, *б*). Для данного луча ничего не изменится, только теперь усеченная призма имеет два основания — большее и меньшее (*а* не

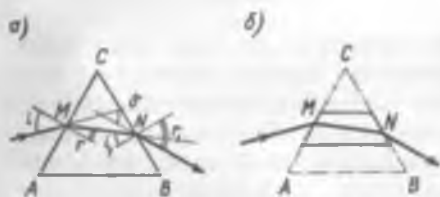


Рис. 381

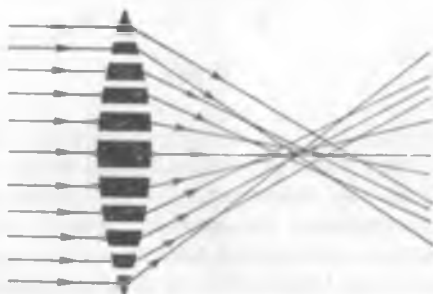


Рис. 382

верхнее и нижнее — это несущественно). Дважды преломляясь на гранях усеченной призмы, луч оба раза отклоняется в сторону большего основания (если призма сделана из материала, оптически более плотного, чем окружающая среда).

Сконструируем систему призм, как показано на рис. 382, и направим на нее параллельный пучок лучей. Не входя в подробности преломления, мы знаем его результат. Лучи, пройдя через призмы, отклоняются в сторону больших оснований, а так как такие основания расположены ближе к оси пучка, параллельные лучи соберутся в какое-то пятно около этой оси. Не надо думать, что они соберутся в точку, но сам факт сближения лучей должен быть понятен. Такая собирательная система помимо сложности изготовления и использования имеет принципиальный недостаток — много лучей проходит между призмами, не преломляясь. Можно заполнить промежутки, одновременно упростив конструкцию, если взять кусок стекла и отшлифовать его по сфери-

ческим поверхностям. Такие *сферические стекла или линзы** широко применяются в оптике. Сферическое стекло — отшлифованная стеклянная пластина, ограниченная сферическими или плоскими поверхностями. Средине такой линзы практически представляет собой плоскопараллельную пластинку. Лучи, идущие под углом, отличным от нуля, в такой пластинке смещаются на h [см. (6)]. Но это смещение будет пренебрежимо малым, если ограничиться параксиальными лучами и сделать линзу достаточно *тонкой*. Тогда любой луч (из выбранных параксиальных) пройдет через точку O (рис. 383), практически не отклоняясь. Точка, через которую лучи проходят, не отклоняясь, называется *оптическим центром* линзы (сравните с оптическим центром зеркала).

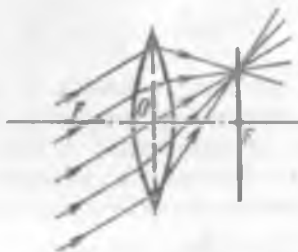


Рис. 383

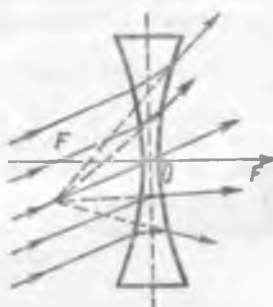


Рис. 384

Все прямые, проходящие через оптический центр, — *оптические оси*. Одна из оптических осей, проходящая и через центр сферической поверхности, называется *главной* (ограничимся случаем *центрированных* систем, в которых центры кривизны всех поверхностей лежат на одной прямой). Остальные оптические оси — *побочные*.

Параллельный пучок лучей (естественно, параллельный и одной из оптических осей, рис. 383) после преломления в данной линзе собирается приблизительно в одной точке, называемой *действительным фокусом*. Такие линзы называются *собирающими*. Как мы видели, собирающими будут выпуклые линзы (у которых середина толще краев), если они сделаны из материала, оптически более плотного, чем окружающая среда. Параллельный пучок лучей после преломления в линзе может рассеиваться (рис. 384), тогда в одной точке, называемой *мнимым фокусом*, соберутся продолжения этих лучей. Такие линзы называются *рассеивающими*. Сделанные из материала, оптически более плотного, чем окружающая среда, они вогнуты (середина тоньше краев). Если линзы сделаны из материала оптически менее плотного, чем окружающая среда (например, пустотелые линзы в воде), собирающими будут вогнутые, а рассеивающими — выпуклые. Проверьте это построением. Все фокусы, расположенные по одну сторону линзы, лежат в одной

* Linse (нем.) — чечевица. В профиль сферическое стекло напоминает чечевичное зерно. Впрочем, современный читатель чаще видит линзы, чем чечевицу.

плоскости, перпендикулярной главной оптической оси и проходящей через главный фокус. Она называется *фокальной плоскостью*.

Выпуклые линзы бывают (рис. 385): *двояковыпуклые* (а), *плосковыпуклые* (б), *вогнуто-выпуклые* (в). Схематически тонкие собирающие линзы изображены на рис. 385, г.

Вогнутые линзы бывают (рис. 386): *двояковогнутые* (а), *плосковогнутые* (б), *выпукло-вогнутые* (в). Схематическое изображение рассеивающих тонких линз приведено на рис. 386, г. Обычно путают названия линз *вогнуто-выпуклой* и *выпукло-вогнутой*. Чтобы этого избежать, надо хорошо себе представить, что линза, изображенная на рис. 385, в, *выпуклая* (середина толще краев), а изображенная на рис. 386, в — *вогнутая* (середина тоньше краев). Первое же слово в названии

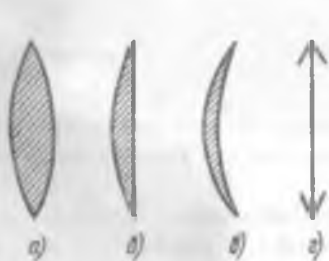


Рис. 385

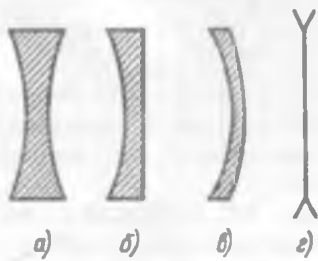


Рис. 386

обозначает одну из ограничивающих поверхностей, а не выпуклость или вогнутость линзы.

Изображением точки S в линзе будет точка пересечения всех преломленных лучей или их продолжений. В первом случае изображение действительное, во втором — мнимое. Как всегда, чтобы найти точку пересечения всех лучей, достаточно построить любые два. Мы можем это сделать, пользуясь вторым законом преломления. Для этого надо измерить угол падения произвольного луча, сосчитать по формуле (2) угол преломления, построить преломленный луч, который под каким-то углом упадет на другую грань линзы. Измерив этот угол падения, надо вычислить по формуле (2) новый угол преломления и построить выходящий луч. Как видите, работа достаточно трудоемкая, поэтому обычно ее избегают. По известным свойствам линз можно построить три луча без всяких вычислений. Луч, падающий параллельно какой-либо оптической оси, после двойного преломления пройдет через действительный фокус или его продолжение пройдет через мнимый фокус. По закону обратимости луч, падающий по направлению на соответствующий фокус, после двойного преломления выйдет параллельно определенной оптической оси. Наконец, через оптический центр линзы луч пройдет, не отклоняясь.

На рис. 387 построено изображение точки S в собирающей линзе, на рис. 388 — в рассеивающей. При таких построениях изображают главную оптическую ось и на ней показывают *фокусные расстояния F* (расстояния от главных фокусов или от фокальных плоскостей до оптического центра линзы) и *двойные фокусные расстояния* (для со-

бирающих линз). Затем ищут точку пересечения преломленных лучей (или их продолжений), используя любые два из вышеперечисленных.

Обычно вызывает затруднение построение изображения точки, расположенной на главной оптической оси. Для такого построения нужно взять любой луч, который будет параллелен какой-то побочной оптической оси (пунктир на рис. 389). После двойного преломления он пройдет через побочный фокус, который лежит в точке пересечения



Рис. 387



Рис. 388

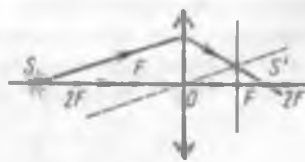


Рис. 389

этой побочной оси и фокальной плоскости. В качестве второго луча удобно использовать луч, идущий без преломления вдоль главной оптической оси.

На рис. 390 изображены две собирающие линзы. Вторая «лучше» собирает лучи, ближе их сводит, она «сильнее». Оптической силой линзы называется величина, обратная фокусному расстоянию:

$$D = \frac{1}{F} \quad (7)$$

Выражается оптическая сила линзы в диоптриях (дптр).



Рис. 390

Одна диоптрия — оптическая сила такой линзы, фокусное расстояние которой 1 м.

У собирающих линз положительная оптическая сила, у рассеивающих — отрицательная.

Построение изображения предмета в собирающей линзе сводится к построению его крайних точек. В качестве предмета выберем стрелку AB (рис. 391). Изображение точки A построено, как на рис. 387, точка B_1 может быть найдена, как на рис. 389. Введем обозначения (аналогичные введенным при рассмотрении зеркал): расстояние от предмета до линзы $|BO| = d$; расстояние от линзы до изображения $|OB_1| = f$, фокусное расстояние $|OF| = F$. Из подобия треугольников A_1B_1O и ABO (по равным острым — вертикальным — углам прямоугольные треугольники подобны) $|A_1B_1|/|AB| = f/d$. Из подобия треугольников A_1B_1F и DOF

(по тому же признаку подобия) $|A_1B_1|/|AB| = (f - F)/F$. Следовательно, но,

$$\frac{f}{d} = \frac{f - F}{F} \text{ или } fF = df - dF.$$

Разделив уравнение почленно на dFf и перенеся отрицательный член в другую сторону равенства, получим

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (8)$$

Мы вывели формулу линзы, аналогичную формуле зеркала.

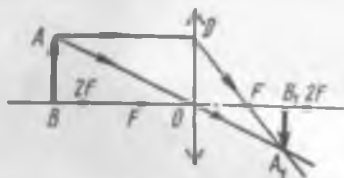


Рис. 391

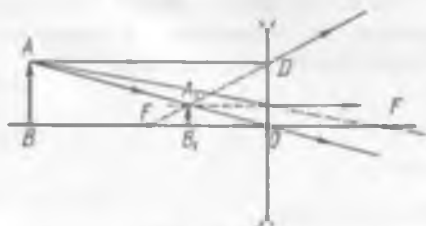


Рис. 392

В случае рассеивающей линзы (рис. 392) «работает» ближний мнимый фокус. Обратите внимание на то, что точка A_1 является точкой пересечения продолжений преломленных лучей, а не точкой пересечения преломленного луча FD и падающего луча AO .

Для доказательства рассмотрите луч, падающий из точки A по направлению на дальний фокус. После двойного преломления он выйдет из линзы параллельно главной оптической оси, так что его продолжение пройдет через точку A_1 . Изображение точки B может быть построено аналогично рис. 389. Из подобия соответствующих треугольников $|A_1B_1|/|AB| = f/d$; $|A_1B_1|/|AB| = (F - f)/F$, откуда $f/d = (F - f)/F$; $fF = dF - df$ или

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F}.$$

Эту формулу рассеивающей линзы можно получить из (8). Для этого условимся считать положительными величины d (от предмета до линзы), f (от линзы до изображения) и F (от линзы до фокуса), если они направлены в сторону падающих лучей. Тогда в формуле (8) для собирающей линзы все члены положительны, для рассеивающей — расстояние от предмета до линзы положительно, $d > 0$, а расстояния от линзы до изображения и до фокуса отрицательны ($f < 0$, $F < 0$). Если перейти к абсолютным значениям расстояний, то получим

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F} \text{ или } \frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

— в соответствии с выделенной формулой.

Линейным увеличением линзы называется число, показывающее, во сколько раз линейные размеры изображения больше линейных размеров предмета. Из подобия рассмотренных треугольников имеем

$$k = |A_1B_1|/|AB| = f/d. \quad (9)$$

Можно провести исследование формулы линзы, аналогичное исследованию формулы зеркала. Постройте шесть изображений предмета в собирающей линзе ($d = \infty$; $2F < d < \infty$; $d = 2F$; $F < d < 2F$; $d = F$; $d < F$) и определите, какие изображения получились. Постройте также одно изображение предмета в рассеивающей линзе.

Как изменится изображение предмета, если половина линзы разбилась? Изображение станет менее интенсивным, но ни его форма, ни расположение не изменятся. Аналогично изображение предмета в любом кусочке линзы или зеркала.

ГЛАВА 2

ФОТОМЕТРИЯ

§ 2.1. Основные фотометрические величины

Важнейшей фотометрической* величиной является световой поток — величина, измеряемая отношением световой энергии (оцениваемой по зрительному впечатлению) ко времени, за которое она проходит через заданную поверхность:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

Точечным источником света называется источник, излучающий равномерно по всем направлениям, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от него до освещаемой поверхности. Поместим точечный источник S в вершину телесного угла ω (рис. 393). Вследствие прямолинейности распространения света в однородной среде любой луч 1 , попавший внутрь данного телесного угла, все время будет распространяться внутри него. И наоборот, луч 2 , не попавший внутрь этого угла, в дальнейшем останется снаружи.

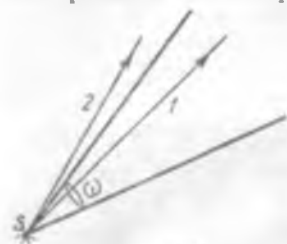


Рис. 393

Таким образом, в непоглощающей среде через любую поверхность, пересекающую данный телесный угол, проходит один и тот же световой поток.

Величина, измеряемая отношением светового потока к телесному углу, в котором по заданному направлению распространяется этот поток,

* photos (греч.) — свет.

называется *силой света источника*:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}, \quad (10)$$

где $d\Phi$ — световой поток внутри достаточно малого телесного угла $d\omega$.

Этот элементарный световой поток $d\Phi = I d\omega$, конечный поток

$$\Phi = \int I d\omega.$$

Для точечного источника света (световой поток распределен равномерно) $\Phi = I \int d\omega = I\omega$, откуда

$$I = \Phi/\omega.$$

Полный пространственный угол равен

$$\omega_0 \stackrel{2.4}{=} 4\pi R^2/R^2 = 4\pi \text{ ср.}$$

Следовательно, полный световой поток от точечного источника света

$$\Phi_0 = I\omega_0 = 4\pi I. \quad (11)$$

Полный световой поток от произвольного источника зависит от его мощности и никакими оптическими методами не может быть изменен. Сила света данного источника по определенному направлению может быть сделана достаточно большой перераспределением светового потока. Например, в прожекторах или в разного рода фарах световой поток концентрируется в заданном направлении. Еще большая концентрация светового потока осуществляется в лазерах.

По логике построения фотометрии в качестве основной единицы надо было выбрать единицу светового потока. Но исторически сложилось в качестве основного определение единицы силы света. Первоначально эта единица — 1 свеча — определялась как сила света определенной свечи (заданного веса, состава и т. п.), затем — как определенная часть силы света эталонной лампы, позднее — как определенная сила света полного излучателя (абсолютно черное тело, которое поглощает все упавшие на него лучи).

В настоящее время единицей силы света в СИ называется кандела (кд).

Одна кандела — это сила света, испускаемого с поверхности площадью $1/600\,000 \text{ м}^2$ полного излучателя в перпендикулярном направлении при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины при давлении $101\,325 \text{ Па}$.

Единицей светового потока в СИ является люмен (лм).

Один люмен — световой поток, испускаемый точечным источником силой света 1 кд внутри телесного угла 1 ср:

$$1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot 1 \text{ ср.}$$

§ 2.2. Законы освещенности

Освещенностью поверхности называется величина, равная отношению светового потока, падающего на поверхность, к площади освещаемой поверхности:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \quad (12)$$

Элементарный световой поток равен $d\Phi = E dS$. Конечный световой поток $\Phi = \int_S E dS$.

Если освещенность всех точек одинакова, то $\Phi = E \int dS = ES$ и

$$E = \Phi/S,$$

где Φ — световой поток, равномерно распределенный по поверхности S . Единица освещенности в СИ называется люксом (лк).

Один люкс — освещенность поверхности световым потоком 1 лм, равномерно распределенным по площади 1 м².

Осветим поверхность перпендикулярными к ней лучами (угол падения равен нулю). Для этого проще всего поместить точечный источник в центр сферы радиусом R (рис. 394). Освещенность этой сферы

$$E_0 \stackrel{12}{=} \frac{\Phi_0}{S_0} \stackrel{11}{=} \frac{4\pi I}{4\pi R^2} = \frac{I}{R^2} \quad (13)$$

Первый закон освещенности: освещенность поверхности нормально падающими лучами прямо пропорциональна силе света источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до освещаемой поверхности.



Рис. 394

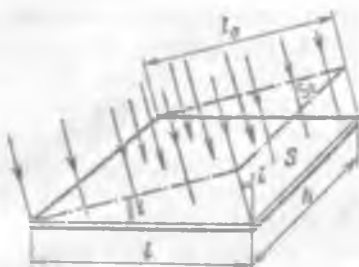


Рис. 395

Пусть равномерно распределенный параллельный пучок лучей падает наклонно на плоскость S (рис. 395). Ее освещенность $E \stackrel{12}{=} \Phi/S$. Спроецируем поверхность S на плоскость, перпендикулярную падающим лучам, получим нормальную к лучам проекцию S_0 . Ее освещенность $E_0 \stackrel{12}{=} \Phi/S_0$, где Φ — тот же световой поток. Двугранный угол между плоскостями S и S_0 измеряется плоским углом, равным углу падения i (углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Из рисунка $\cos i = l_0/l =$

$= I_0 h / (lh) = S_0 / S$. Следовательно, $E/E_0 = \Phi S_0 / (S\Phi) = \cos i$, откуда

$$E = E_0 \cos i. \quad (14)$$

Второй закон освещенности: освещенность поверхности параллельным световым потоком прямо пропорциональна косинусу угла падения.

Пусть теперь поверхность S освещается точечным источником света I (рис. 396). Выберем элемент поверхности dS достаточно малым, чтобы можно было считать лучи, падающие на него параллельными. Освещенность этого элемента поверхности равна $E \stackrel{14}{=} E_0 \cos i$ (как освещенность параллельными лучами), где E_0 — освещенность поверхности, находящейся на расстоянии r от источника и перпендикулярной лучам. Она равна $E_0 \stackrel{13}{=} I/r^2$ (как освещенность точечным источником сферы радиусом r). Освещенность элемента поверхности dS получается равной

$$E = \frac{I}{r^2} \cos i. \quad (15)$$

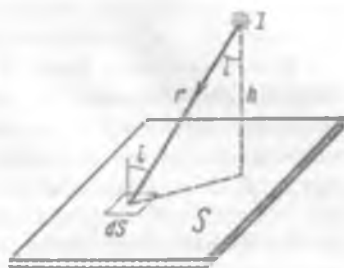


Рис. 396

Это выражение освещенности данной точки поверхности точечным источником света иногда называют *объединенным законом освещенности*. В частности, если освещается плоскость (рис. 396), то $\cos i = h/r$ и

$$E \stackrel{15}{=} \frac{I}{h^2} \cos^3 i,$$

т. е. освещенность одинакова во всех точках с равными r и резко убывает с увеличением угла i .

§ 2.3. Сравнение силы света источников

Выбрав в качестве эталона силу света определенного источника, мы сталкиваемся с задачей о сравнении различных источников по силе света. Человеческий глаз очень точно фиксирует наличие разницы в освещенности двух близких

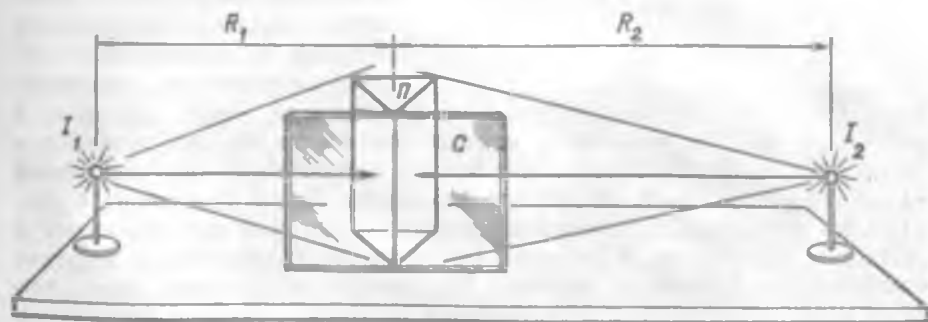


Рис. 397

поверхностей (хотя совершенно не в состоянии оценить эту разницу). На этом свойстве человеческого глаза основано устройство фотометров.

Один из них схематический изображен на рис. 397. Матовая призма P освещается с разных сторон сравнимыми источниками. Рассеянный свет освещает две половинки матового стекла C , на которое смотрит наблюдатель. Установив наличие разницы в освещенностях, он изменяет расстояния до источников, добиваясь равенства освещенностей. При этом равенстве

$$I_1/R_1^2 \cos i_1 = I_2/R_2^2 \cos i_2,$$

где углы i_1 и i_2 можно считать приблизительно одинаковыми. Следовательно,

$$I_1/I_2 = R_1^2/R_2^2.$$

Имея эталонную лампу и измерив расстояния R_1 и R_2 , мы получаем достаточно надежное значение силы света исследуемого источника.

ГЛАВА 3

ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

§ 3.1. Фотоаппарат

Разберем схему и принцип работы некоторых широко распространенных оптических приборов.

Фотоаппарат — прибор, важнейшей частью которого является собирательная система линз — объектив. При обычном любительском фотографировании предмет расположен за двойным фокусным расстоянием, поэтому изображение будет между фокусом и двойным фокусным расстоянием, действительное, уменьшенное, перевернутое (рис. 398).



Рис. 398

На место этого изображения помещается фотопленка или фотопластинка (покрытые светочувствительной эмульсией, содержащей бромистое серебро), на некоторое время открывается объектив — пленка экспонируется. На ней появляется скрытое изображение. Попадая в специальный раствор — проявитель, «засвечен-

ные» молекулы бромистого серебра распадаются, бром уносится в раствор, а серебро выделяется в виде темного налета на засвеченных частях пластинки или пленки; чем больше света попало при экспозиции на данное место пленки, тем темнее оно станет. После проявления и промывания необходимо изображение закрепить, для чего его помещают в раствор — закрепителю, в котором растворяется и уносится с негатива незасвеченное бромистое серебро. Получается изображение того, что было перед объективом, с перестановкой оттенков — светлые части стали темными и наоборот (негатив).

Для получения фотографии — позитива — необходимо через негатив осветить на некоторое время фотобумагу, покрытую таким же бромистым серебром. После ее проявления и закрепления получится негатив с негатива, т. е. позитив, в котором светлые и темные части будут соответствовать светлым и темным частям предмета.

Для получения качественного изображения большое значение имеет наводка на резкость — совмещение изображения и пленки или пластинки. Для этого у старых фотоаппаратов делалась подвижной задняя стенка, вместо светочувствительной пластинки вставлялась матовая стеклянная; двигая последнюю, на глаз устанавливали резкое изображение. Затем заменяли стеклянную пластинку светочувствительной и производили фотосъемку.

В современных фотоаппаратах для наводки на резкость используется выдвижной объектив, связанный с дальномером. При этом неизменными остаются все величины, входящие в формулу линзы, изменяется расстояние между объективом и пленкой до совпадения с f . Для увеличения глубины резкости — расстояний вдоль главной оптической оси, на которых предметы изображаются резко, — диафрагмируют объектив, т. е. уменьшают его отверстие. Но это уменьшает количество света, попадающее в аппарат, и увеличивает время необходимой экспозиции.

Освещенность изображения, для которого источником света является объектив, прямо пропорциональна площади его отверстия, которая, в свою очередь, пропорциональна квадрату диаметра d^2 . Освещенность также обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до изображения, в нашем случае почти квадрату фокусного расстояния F . Итак, освещенность пропорциональна дроби d^2/F^2 , которую называют светосилой объектива. Корень квадратный из светосилы называют относительным отверстием и обычно указывают на объективе в виде надписи: $1:F:d$. Современные фотоаппараты снабжаются целым рядом приспособлений, облегчающих труд фотографа и расширяющих его возможности (автоспуск, набор объективов с разными фокусными расстояниями, экспонометры, в том числе автоматические, автоматическая или полуавтоматическая наводка на резкость и т. д.). Широко распространена цветная фотография. В процессе освоения — фотография объемная.

§ 3.2. Глаз

Человеческий глаз с оптической точки зрения представляет собой такой же фотоаппарат (рис. 398). Такое же (действительное, уменьшенное, перевернутое) изображение создается на задней стенке глаза — на светочувствительном желтом пятне, в котором сосредоточены особые окончания зрительных нервов — колбочки и палочки. Их раздражение светом передается нервами в мозг и вызывает ощущение видения. У глаза есть объектив — хрусталик, диафрагма — зрачок, даже крышка объектива — веко. Во многих отношениях глаз совершеннее современных фотоаппаратов. Он автоматически наводится на резкость — изменением кривизны хрусталика под действием глазных мускулов, т. е. изменением

фокусного расстояния. Автоматически диафрагмируется — сужением зрачка при переходе из темного помещения в светлое. Глаз дает цветное изображение, «запоминает» зрительные образы. Вообще, биологи и медики пришли к выводу, что глаз — вынесенная на периферию часть мозга.

Зрение двумя глазами позволяет видеть предмет с разных сторон, т. е. осуществлять объемное зрение. Экспериментально доказано, что при видении одним глазом картина с 10 м кажется плоской (при базе — расстоянии между крайними точками зрачка, — равной диаметру зрачка). Глядя двумя глазами, мы видим плоской картину с 500 м (база — расстояние между оптическими центрами хрусталиков), т. е. можем на глаз определять размеры предметов, какой и насколько ближе или дальше.

Для увеличения этой способности надо увеличить базу, это осуществляется в призматическом бинокле (см. рис. 406) и в разного рода дальномерах (схема на рис. 399).

Но, как все на свете, даже такое совершенное создание природы, как глаз, не лишено недостатков. Во-первых, глаз реагирует только на видимый свет (и при этом с помощью зрения мы воспринимаем до 90 % всей информации). Во-вторых, глаз подвержен многим заболеваниям, самыми распространенными из которых являются близорукость — лучи

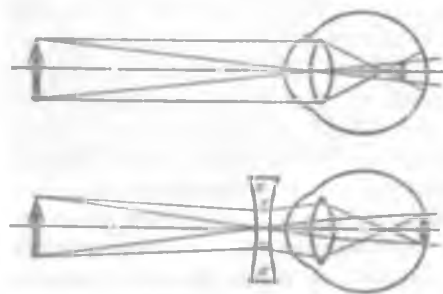


Рис. 400

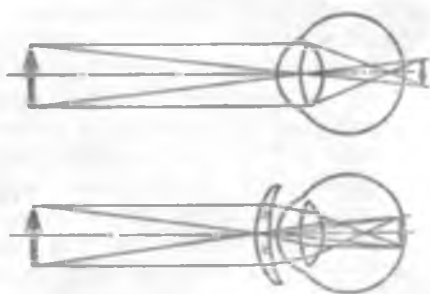


Рис. 401

сводятся ближе сетчатки (рис. 400) и дальнозоркость — резкое изображение за сетчаткой (рис. 401). В обоих случаях на сетчатке создается нерезкое изображение. Оптика позволяет помочь этим недугам. В случае близорукости надо подобрать очки с вогнутыми линзами соответствующей оптической силы. При дальнозоркости, наоборот, надо помочь глазу свести лучи на сетчатке, очки должны быть выпуклыми и тоже соответствующей оптической силы.

§ 3.3. Проекционный аппарат

Схемой проекционного аппарата тоже может служить рис. 398, только теперь предмет — диапозитив — расположен между фокусом и двойным фокусным расстоянием, а действительное, увеличенное, обратное изображение — за двойным

фокусным расстоянием на экране. Чтобы изображение было достаточно ярким, диапозитив просвечивают сильной лампой, свет от которой с помощью объектива направляется на экран.

Ничего принципиально нового не содержит и схема кинопроекторного аппарата. Человеческий глаз имеет свойство примерно одну десятую секунды видеть изображение, которого уже нет. Это позволяет наблюдать телевизионное изображение (с помощью послесвечения экрана и хода луча по четным, а затем по нечетным строчкам). Это же свойство глаза позволило еще до появления телевидения создать кино.

Киносъемочный аппарат представляет собой фотоаппарат, снимающий 24 кадра в секунду (при обычных съемках). Во время демонстрации кинофильма с такой же скоростью сменяются в проекционном аппарате неподвижные кадры. При смене кадров объектив аппарата перекрывается, и экран затемнен. Пока зрители на этом темном экране видят уже продемонстрированный кадр, в аппарате этот кадр сменяется следующим, экран освещается проекцией следующего кадра и т. д. Соседние кадры мало отличаются друг от друга, и у зрителя складывается впечатление непрерывного движения.

§ 3.4. Зрительные приборы

При всем совершенстве невооруженного глаза мы не можем рассмотреть объект, изображение которого целиком умещается на одной колбочке или палочке.

Это бывает в двух случаях: когда объект очень мал или очень далек. В обоих случаях надо увеличить угол зрения — угол между крайними лучами, проходящими от предмета через оптический центр глаза. Линейное увеличение при этом может быть несущественным: «увеличив» в несколько раз изображение планеты, мы почти ничего не выигрываем. Гораздо важнее увеличить угол зрения δ , под которым рассматривается изображение, по сравнению с углом зрения δ_1 на предмет без соответствующего оптического прибора. Поэтому во всех подобных приборах важнейшим является угловое увеличение $\omega = \delta/\delta_1$. Оно показывает, во сколько раз угол зрения изображения больше угла зрения, под которым виден предмет.

В первом случае надо вооружить глаз лупой или микроскопом, во втором — телескопом.

Лупа представляет собой собирающую линзу, расположенную так, чтобы предмет находился между линзой и ее главным фокусом.

Посмотрите, какое изображение у вас получилось в шестом задании (см. конец § 1.7).

Микроскоп (рис. 402) состоит из короткофокусного объектива и длиннофокусного окуляра. В объективе создается действительное, увеличенное, обратное изображение, которое служит предметом, расположенным между окуляром и его фокусом. В окуляре

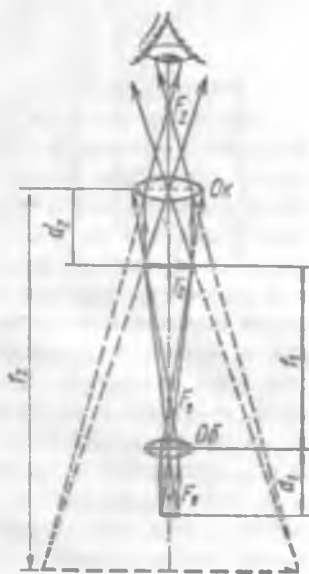


Рис. 402

наблюдается увеличенное, мнимое, прямое (обратное относительно предмета) изображение, с большим углом зрения, как в лупе.

Увеличение микроскопа равно произведению увеличений объектива и окуляра. Увеличение объектива равно

$$k_1 = \frac{f_1}{d_1} \approx \frac{l}{F_1},$$

т. е. приближенно равно отношению длины тубуса (трубки) и фокусного расстояния объектива. Увеличение окуляра

$$k_2 = \frac{f_2}{d_2} \approx \frac{L}{F_2},$$

где L — расстояние наилучшего зрения (для нормального глаза $L = 25$ см). Тогда

$$k = k_1 k_2 \approx \frac{L}{F_1 F_2}.$$

Увеличение современных оптических микроскопов доходит до двух тысяч и ограничивается только искажениями изображения.

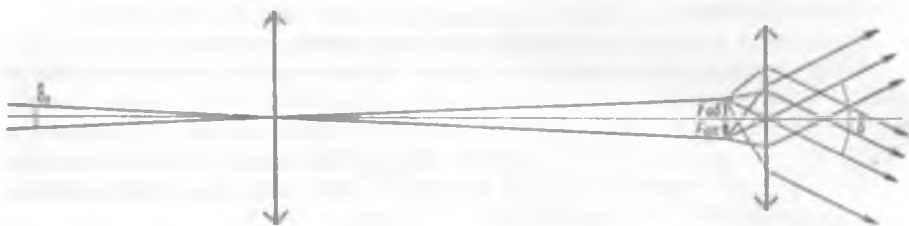


Рис. 403

*Телескоп-рефрактор** (труба Кеплера, рис. 403) — состоит из длиннофокусного объектива и короткофокусного окуляра. Задний (по ходу лучей) фокус объектива практически совпадает с передним фокусом окуляра. Изображение далекого источника — планеты Солнечной системы — получается почти в фокусе, уменьшенное, перевернутое, действительное. Оно является предметом для окуляра. От его точек, расположенных в фокальной плоскости окуляра, расходятся лучи, идущие после двойного преломления параллельно соответствующим побочным осям. Угол между побочными осями, проходящими через крайние точки этого изображения, — это угол зрения на изображение планеты в телескопе. Параллельные лучи, выходящие из окуляра, сводятся хрусталиком глаза в одну точку на сетчатке, изображение всей планеты укрупняется, что дает возможность рассмотреть больше деталей. То, что изображение перевернуто и в этом случае (как в микроскопе), не существенно, только на картах планет север располагается внизу, а юг наверху в соответствии с картиной, наблюдаемой в телескоп.

* refractus (лат.) — преломленный.

Таким образом, телескоп применяется для рассматривания удаленных (но не слишком далеких) тел.

Увеличение трубы Кеплера равно отношению тангенсов углов зрения или приближенно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра:

$$\omega = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta_1} = \frac{F_{\text{об}}}{F_{\text{ок}}}.$$

Для получения изображения в *телескопе-рефлекторе** Ньютона (рис. 404) применяется зеркало. Вогнутое зеркало большого диаметра сделать легче, чем соответствующую линзу. Ход лучей в таком телескопе виден на рисунке.

Все оптические устройства дают ряд искажений изображения. Но искажения, даваемые зеркалом и линзой, могут компенсироваться. Это было использовано Д. Д. Максудовым в его *менисковом* телескопе (рис. 405). По ходу лучей видно, что телескоп Максудова много короче такого же по диаметру телескопа-рефлектора или рефрактора.



Рис. 404

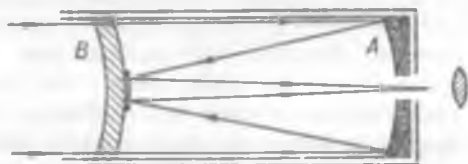


Рис. 405

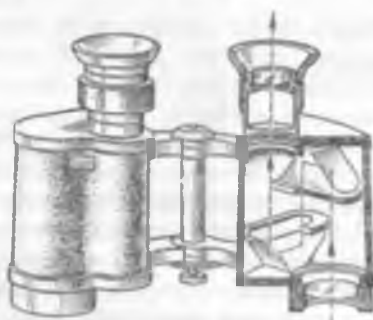


Рис. 406

Изображения звезд в телескопе остаются точечными, никаких деталей в таком изображении рассмотреть нельзя. Но от данной звезды в телескоп попадает больше света, чем в глаз. Поэтому удастся заметить звезды, недоступные невооруженному глазу. Кроме того, соединив телескоп с фотоаппаратом и длительное время направляя его на определенный участок неба, удастся «накопить» световую энергию от далекой звезды и заметить ее на фотографии, в то время как визуально она не обнаруживается.

* reflectere (лат.) — отражать.

Иногда приходится рассматривать объекты, переворачивать изображения которых по тем или другим соображениям неудобно. Тогда применяются устройства, дающие прямое изображение.

Одно из таких устройств — *призматический бинокль* («артиллерийский», рис. 406). Изображение в нем поворачивается двумя призмами полного отражения. Напомним, что он увеличивает объемность изображения и позволяет точнее измерять расстояния.

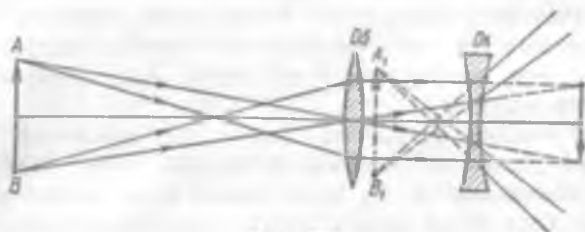


Рис. 407

Другой пример — *театральный бинокль*, состоящий из двух труб Галилея (рис. 407). Объектив трубы Галилея создаст бы действительное, уменьшенное, перевернутое изображение предмета, но на пути сходящихся лучей стоит вогнутая линза — окуляр, разводящий эти лучи и создающий минимое прямое (относительно предмета) изображение, угол зрения которого больше угла зрения на предмет. Бинокль приближает изображение к зрителю. Существует и применяется много других систем оптических приборов. Мы ограничимся приведенными выше.

ГЛАВА 4

ТЕОРИИ СВЕТА

§ 4.1. Корпускулярная теория

Первые заслуживающие внимание представления о свете относятся к XVII в. Одной из первых теорий света является *теория истечения*, или *корпускулярная теория*. По ней свет представляет собой поток механических частиц — *корпускул*, которые испускаются источником света, движутся по законам механики и механически взаимодействуют с веществом. Всякая теория должна объяснять известные закономерности и предсказывать новые. В то время были известны законы прямолинейности распространения света в однородной среде, обратимости световых пучков, отражения и преломления. Все эти законы очень наглядно и просто объяснила эта теория.

Действительно, по первому закону Ньютона, в однородной среде корпускулы должны двигаться прямолинейно и равномерно (и даже отклоняться в поле сил тяготения, что было экспериментально обнаружено только в XX в.). Очевидно, корпускулам безразлично, в какую сторону лететь.

Отражение очень убедительно объясняется законами абсолютно упругого удара о стенку (рис. 408, а). Спроецируем скорость v корпускулы

на два направления: параллельное и перпендикулярное поверхности раздела. Получим нормальную и тангенциальную составляющие скорости. При абсолютно упругом ударе корпускулы о границу тангенциальная составляющая ее скорости не меняется (нет сил, направленных по касательной к границе раздела двух сред), а нормальная изменяет знак, сохраняя модуль. Новая результирующая скорость остается прежней по модулю — это скорость света в первой среде. Из соответствующих тре-

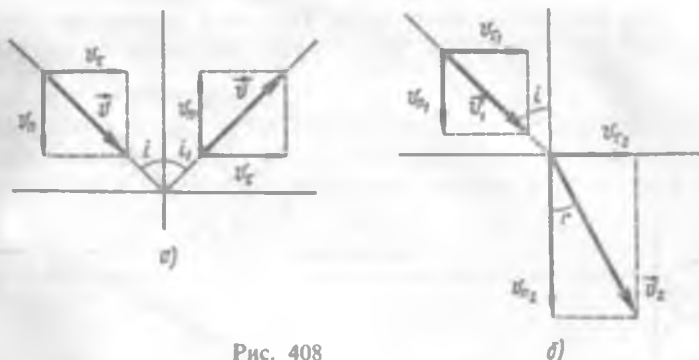


Рис. 408

угольников: $\sin i = v_y/v$; $\sin i_1 = v_y/v$. Равенство синусов острых углов приводит к равенству самих углов $i = i_1$, как в экспериментальной формуле (1). Естественно, все эти векторы лежат в плоскости падения, что установлено первым законом отражения.

Аналогично объясняется первый закон преломления. Объяснение второго закона преломления приписывается Ньютону, что дало основание считать его сторонником корпускулярной теории света. Переходя из одной среды в другую, корпускулы испытывают действие нормальной (к границе двух сред) результирующей сил гравитационного притяжения. Сравнивая таблицы показателей преломления и плотностей разных сред, можно прийти к выводу, что показатели пропорциональны плотностям.

Значит, переходя в оптически более плотную среду, корпускула в результате действия результирующей сил тяготения увеличит нормальную составляющую скорости. Тангенциальная составляющая скорости и здесь останется неизменной, ибо вдоль поверхности раздела двух сред не действуют силы. Из рис. 408, б: $\sin i = v_{x1}/v_1$; $\sin r = v_{x1}/v_2$; следовательно, $\sin i/\sin r = v_2/v_1 = n_{21}$, так как $v_{x1} = v_{x2}$.

Доказано, что отношение синусов углов падения и преломления постоянно и равно отношению скоростей света в соответствующих средах. Из нашего рассмотрения следует, что при переходе в оптически более плотную среду $v_2 > v_1$.

§ 4.2. Волновая теория

Почти одновременно с корпускулярной теорией голландский физик Гюйгенс опубликовал «Трактат о свете», в котором сформулировал основные положения волновой теории света:

1) свет представляет собой продольные волны в особой всепрони-
кающей материи, заполняющей пространство, — светоносном эфире;

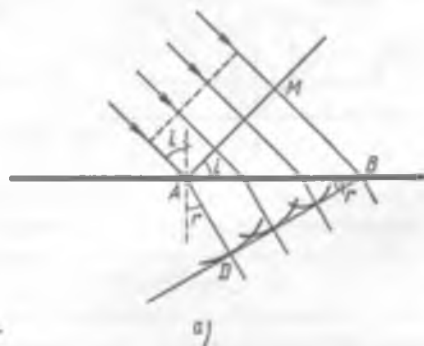
2) каждая точка эфира, до которой дошел волновой процесс (фронт
волны), является источником элементарных вторичных сферических волн;

3) в результате наложения элементарных волн образуется «новый»
фронт волны, как огибающая этих элементарных волн (огибающая по-
верхность нового фронта касается всех элементарных волн).

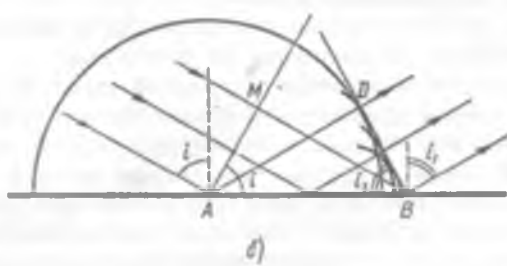
Последние два положения называются *принципом Гюйгенса* и позво-
ляют объяснить распространение света. Так, если распространяется плос-
кая волна (рис. 409), то новый фронт будет плоскостью, параллельной



Рис. 409



а)



б)

Рис. 410

старому. Лучи света, перпендикулярные фронтам, в данном случае оста-
нутся прямолинейными. То же относится к распространению света в
обратном направлении. Тем самым доказаны законы обратимости и
прямолинейности распространения света.

На границе двух сред фронт AM постепенно передвигается от точки
 A к точке B (рис. 410, а). Поэтому точки границы между A и B по-
степенно становятся источниками соответствующих сферических волн.
К моменту времени, когда фронт AM дойдет до точки B , от точки A
распространится волна с радиусом AD , от других точек — с меньшими
радиусами, от точки B — с радиусом, равным нулю. Огибающей этих
элементарных волн будет плоскость, след DB которой показывает поло-
жение фронта преломленной волны через промежуток времени Δt , необ-
ходимый для прохождения фронтом AM падающей волны расстояния
 MB . Плоский фронт AM равномерно надвигается на поверхность AB

со скоростью v_1 , его путь за это время $|MB| = v_1 \Delta t$. Так же равномерно со скоростью v_2 распространяется во второй среде фронт BD преломленной волны, значит, $|AD| = v_2 \Delta t$. В $\triangle AMB$ угол A равен углу падения, так как стороны этих углов взаимно перпендикулярны. По той же причине равны угол преломления и угол B из $\triangle ADB$. Следовательно,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{|MB| \cdot |AB|}{|AB| \cdot |AD|} = \frac{v_1 \Delta t}{v_2 \Delta t} = \frac{v_1}{v_2} \stackrel{2}{=} n_{21}. \quad (16)$$

Мы получили не только второй закон преломления, но и определение относительного показателя преломления как отношения скоростей света в первой и во второй средах.

В частности, если первой средой является вакуум (обычно в опытах по преломлению — воздух), то абсолютный показатель преломления второй среды равен отношению скоростей света в вакууме и в этой среде:

$$n \stackrel{16}{=} c/v. \quad (17)$$

Абсолютные показатели преломления двух сред равны

$$n_1 \stackrel{17}{=} c/v_1 \text{ и } n_2 \stackrel{17}{=} c/v_2;$$

значит,

$$v_1 = c/n_1, \quad v_2 = c/n_2.$$

Подставим эти выражения скоростей в определение относительного показателя преломления:

$$n_{21} \stackrel{16}{=} \frac{cn_2}{n_1 c} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Таким образом, показатель преломления второй среды относительно первой равен отношению абсолютных показателей преломления второй и первой сред.

Доказан второй закон преломления, но если вторая среда оптически более плотна, чем первая (рис. 410, а), то вывод из волновой теории ($v_1 > v_2$) противоречит соответствующему выводу теории корпускулярной. Тем самым мы получаем критерий неправомерности теории: если одно из неравенств не выполняется, то соответствующая теория неверна (это, кстати, не означает справедливости другой).

Аналогично доказывается закон отражения (рис. 410, б: о первых законах отражения и преломления говорить не приходится, так как рассматривается бесконечный пучок лучей). Пока фронт AM падающей волны надвигается на границу и проходит путь MB , от каждой точки границы начинает с запаздыванием (относительно предыдущих точек) распространяться сферическая волна, огибающая этих волн плоскость — фронт отраженной волны — распространяется с той же по модулю скоростью и занимает положение BD в тот момент, когда фронт AM падающей волны достигает точки B . Перпендикулярно фронту BD распространяются отраженные лучи. В $\triangle AMB$ угол A равен углу падения; в $\triangle ADB$ угол B равен углу отражения; $|MB| = v \Delta t$, $|AD| = v \Delta t$, так как это пути,

пройденные падающим и отраженным светом за одинаковые промежутки времени в одной и той же среде. Из $\triangle AMB$ и $\triangle ADB$ имеем

$$\sin i = \frac{|MB|}{|AB|} = \frac{r \Delta t}{|AB|},$$

$$\sin i_1 = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{r \Delta t}{|AB|} = \sin i.$$

Углы i и i_1 — острые, следовательно, $i = i_1$, что соответствует формуле (1).

Таким образом, высказаны два принципиально различных взгляда на природу света, и критерием истинности, как всегда, должен служить эксперимент. Нужно измерить скорость света в разных средах и сравнить результаты.

§ 4.3. Измерение скорости света

В 1675 г. датским астрономом Ремером была измерена скорость света в вакууме. Астрономический способ определения состоял в наблюдении затмений одного из спутников Юпитера с промежутком в половину земного года (рис. 411). Наблюдая очередное затмение выбранного спутника через полгода, Ремер обнаружил, что оно началось примерно на 1000 с позже вычисленного

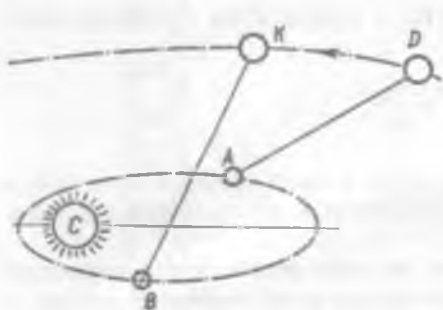


Рис. 411

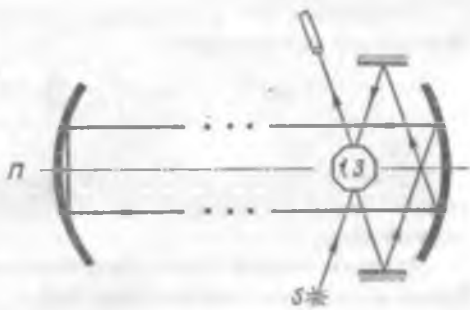


Рис. 412

времени — в астрономии совершенно невозможна ошибка! Ремер правильно объяснил причину «опоздания»: затмение началось в определенный момент, а в точке A наблюдатель его воспринял позже на какое-то время, необходимое для прохождения пути DA. В точке K соответствующее затмение тоже началось в свое время, а наблюдатель на Земле в точке B увидел его с запаздыванием, так как свету теперь пришлось пройти путь KB, больший DA на величину порядка диаметра земной орбиты ($\approx 300\,000\,000$ км). Разделив это расстояние на время запаздывания (≈ 1000 с), получаем для скорости света в вакууме примерно $\approx 300\,000$ км/с (результат Ремера был значительно занижен).

Для определения скорости света физическими методами нужно достаточно точно измерить малые промежутки времени. Впервые это удалось сделать в 1849 г. Физо.

Один из наиболее точных опытов по определению скорости света — опыт Майкельсона (1926 г.). Установка была расположена в Америке на горах Вильсон

и Сан-Антонио. Схема опыта (рис. 412): на одной горе установлены источник света S , восьмигранное вращающееся зеркало $З$, труба наблюдателя, система зеркал, на другой — параболический отражатель $П$, расстояние до которого $l = 35373,21$ м было достаточно точно измерено. Система настраивается (при неподвижном зеркале $З$) так, чтобы луч, идущий от источника S , отразился от одной грани восьмигранного зеркала, дошел до другой горы, дважды отразился от параболического отражателя, пришел обратно и, отразившись от системы неподвижных зеркал, упал на противоположную грань восьмигранного зеркала, отразившись от которой, попал бы в трубу наблюдателя. При настроенной системе наблюдатель в трубу видит источник света S . При вращении зеркала $З$ наблюдатель перестает видеть источник. Большую часть времени отраженный от восьмигранного зеркала луч не попадает на другую гору, восемь раз за период на место изображенной грани точно встает другая грань зеркала, и она отражает луч на систему неподвижных зеркал, те в свою очередь — на вращающееся, но... за время прохождения луча туда и обратно противоположная грань сдвинулась, и отраженный луч идет мимо трубы. И только при определенной скорости вращения за время прохождения лучом удвоенного расстояния между горами зеркало повернется ровно на одну восьмую оборота; точно в положении противоположной грани встанет следующая за ней. Тогда отраженный от нее свет снова попадет в трубу, наблюдатель опять увидит источник света S . Это будет при определенной измеряемой угловой скорости вращения ω . Свет прошел удвоенное расстояние $2l$ между горами за время

$$t = T/8 \stackrel{241}{=} 2\pi/(8\omega).$$

Следовательно, скорость света в воздухе (практически такая же, как в вакууме) равна

$$c = 2l \cdot 8\omega / (2\pi) = 8l\omega/\pi.$$

По результатам опыта Майкельсон определил

$$c = (299\,796 \pm 4) \text{ км/с.}$$

Физическими методами скорость света в вакууме была измерена неоднократно. По последним данным (1972 г.)

$$c = (299\,792\,456,2 \pm 1,1) \text{ м/с.}$$

Все эти результаты измерения скорости света имеют колоссальное самостоятельное значение. Но для ответа на вопрос «какая теория света несправедлива?» нужно определить скорость света в какой-либо другой среде.

Такие измерения были осуществлены в 1862 г. Фуко. Скорость света в воде оказалась меньше скорости света в вакууме. Но к тому времени этот спор уже давно был разрешен в пользу волновой теории света, так как в 1802 г. Юнг, пытаясь измерить скорость света, открыл его дифракцию, т. е. типично волновое свойство. О современном состоянии теории света см. § 6.3.

ГЛАВА 5

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

§ 5.1. Интерференция

Рассмотрим волновое поле системы двух источников колебаний. В каждой точке поля происходит сложение колебаний, дошедших до этой точки от обоих источников. Но сложение произвольных даже гармонических колебаний дает неустойчивую, изменяющуюся с течением времени кар-

тину. Только в определенном частном случае два (или несколько) волновых процесса создают устойчивую, неизменную во времени *интерференционную картину*.

Явление интерференции состоит в таком наложении двух систем волн, при котором амплитуды результирующих колебаний в одних точках велики, а в других — почти равны нулю (все это относится к любым, а не только оптическим, волновым процессам).

Интерференционная картина наблюдается при выполнении *условий когерентности**:

1. Если в объемном волновом поле происходит наложение продольных волн от точечных источников, то практически во всех точках колебания складываются под углом. При этом почти нет точек, где результирующее смещение всегда равно нулю. А точки, в которых суммарный процесс приводит к состоянию покоя, наиболее характерны для интерференционной картины. Такая картина может наблюдаться только в поле поперечных волн, если в каждой точке поля складываются колебания, направленные в д о л ь о д н о й п р я м о й. Следовательно, когерентными могут быть поперечные волны с колебаниями, одинаково направленными в каждой точке.

2. Когерентными являются волны, разность фаз которых во всех точках волнового поля не зависит от времени, для этого источники колебаний должны быть когерентными, т. е. работать с постоянной разностью фаз. Такие неподвижные источники работают на равных частотах.

3. Наиболее выразительна интерференционная картина, если амплитуды складываемых колебаний близки друг к другу (тогда в точках минимума наблюдается почти полное отсутствие колебаний).

С частным случаем интерференции мы встречались, когда разбирали стоячие волны. Наблюдать интерференцию волн можно на воде, на поверхности которой расположены два погружаемых поплавка. Картина распределения минимумов и максимумов достаточно ясна из рис. 413. Еще нагляднее она при стробоскопическом** освещении.

Итак, в каждой точке интерференционной картины происходит сложение колебаний равных частот, направленных вдоль одной прямой. Если складываются гармонические колебания, то результирующий процесс гармоничен. Амплитуда этого процесса сильно зависит от разности фаз складываемых колебаний, см. (23-IV).

Допустим, что неподвижные источники S_1 и S_2 (рис. 414) гармоничны и когерентны, т. е. работают на одной частоте и вдобавок с одинаковыми начальными фазами. Отложим на расстоянии r_2 отрезок KM , равный r_1 . Тогда вопрос об усилении или ослаблении колебаний в точке M наблюдения решается на *геометрической разности хода* $r_2 - r_1$. Если на разности хода укладывается четное число полуволн, то точка S_2 колеблется «в фазе» с точкой K (вспомните определение длины волны) Значит, и точка S_1 движется «в фазе» с K (по условию фазы S_1 и S_2 всегда одинаковы). Пройдя до точки наблюдения от S_1 и K одинако-

* coharentia (лат.) — сцепление, связь.

** strobos (греч.) — вихрь, скорое — смотрю. Стробоскопическое — прерывистое освещение с частотой, близкой к частоте волны, позволяет рассмотреть почти неподвижную интерференционную картину.

вые пути с одной скоростью, волны в точку наблюдения придут «в фазе» и усилят друг друга.

Если на разности хода уложится нечетное число полуволн, то точки S_2 и K будут колебаться в противофазах (нечетное число полуволн означает целое число волн и еще одну полуволну), точки S_1 и K тоже имеют разность фаз $(2m + 1)\pi$; далее, пройдя одинаковые пути с одной скоростью, колебания в точку наблюдения придут в противофазах и ослабят друг друга.

Наконец, если на разности хода уложится нецелое число полуволн, то фазы точек K и S_2 , а следовательно, и S_1 будут отличаться на дробное число π , и в точке наблюдения будет либо частичное усиление,

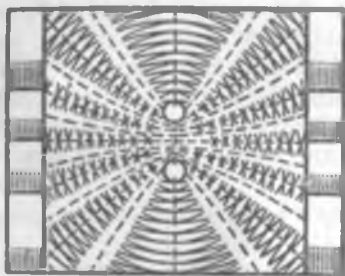


Рис. 413

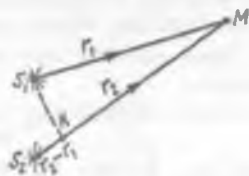


Рис. 414

либо частичное ослабление колебаний. Степень этого усиления или ослабления зависит от близости к синфазному* или противофазному сложению.

Все эти случаи можно описать математически в виде:

$$r_2 - r_1 = \begin{cases} 2m(\lambda/2) - \text{максимумы;} \\ (2m + 1)(\lambda/2) - \text{минимумы;} \\ \text{нецелому числу } (\lambda/2) - \text{частичное усиление или} \\ \text{ослабление колебаний.} \end{cases}$$

Напомним, что в точке M складываются колебания, направленные вдоль одной прямой. Определите, как она ориентирована.

Все изложенное было известно в волновой механике и пока не имеет никакого отношения к оптике. Если бы, войдя в помещение с двумя включенными лампами, вы увидели на белой стене чередование светлых и темных полос, то можно было бы говорить об интерференции света. Но практически до 60-х годов нашего века никто не наблюдал интерференцию света от разных источников. Это можно объяснить так: либо свет — не волны, либо — волны, но продольные (по Гюйгенсу), либо источники света некогерентны. Мы остановимся на последнем предположении.

Возьмем в качестве источника света раскаленное тело (хотя бы электролампу накаливания); его возбужденные атомы испускают излучение

* syn (греч.) — вместе.

различных частот и амплитуд. При наложении колебаний от различных частей источника (или от разных некогерентных источников) не получается устойчивой, т. е. интерференционной картины. Так же не удастся получить интерференционную картину при наложении излучений, испущенных разновременно одной частью источника.

Свет испускается атомом во время перехода от более возбужденного к менее возбужденному состоянию. Время τ такого перехода порядка 10^{-9} с. В течение этого времени излучается почти монохроматическая* волна с определенными частотой и амплитудой. При наложении колебаний разных частот с произвольно меняющимся соотношением фаз устойчивая картина невозможна. Значит, для получения интерференционной картины надо наложить друг на друга с небольшой разностью фаз части излучения одного и того же атома. За время монохроматического излучения одного атома свет распространяется на длину когерентности $\Delta L = c\tau \approx 0,3$ м. Это расстояние вдоль волны, на котором ее можно считать когерентной самой себе. Для того чтобы складывались достаточно большие части монохроматических излучений каждого атома, разность хода оптических волн должна быть много меньше длины когерентности.

Это оптическое условие когерентности можно записать в виде

$$r_2 - r_1 \ll \Delta L$$

Французский инженер Френель осуществил классический опыт и получил интерференцию света.

Опыт с зеркалами Френеля изображен на рис. 415. Свет источника S отражается от двух зеркал, плоскости которых образуют двугранный угол, немного меньший 180° . Изображения одного и того же источника S когерентны, поэтому на экране складываются волны от двух когерентных источников S_1 и S_2 . Так как плоскости зеркал почти совпадают, разность хода этих волн удовлетворяет оптическому условию когерентности.

На тех частях экрана, куда попадает свет от двух источников S_1 и S_2 , наблюдаются светлые и темные полосы. Светлые полосы могли образовать и два потока корпускул; но не может быть двух потоков частиц, один из которых уничтожает другой. В местах минимума «свет гасится светом», а это типично волновое явление.

Френель дополнил принцип Гюйгенса рядом интерференционных положений: каждую точку фронта, по принципу Гюйгенса — Френеля, нужно рассматривать как точечный источник элементарных сферических волн, но они когерентны и в точках наблюдения создают интерференционную картину. Вот почему от точечного источника, например, мы не видим целого ряда расширяющихся сфер, как следовало из принципа Гюйгенса. Френель дал ряд методов расчета интерференционных картин, на которых мы здесь останавливаться не будем. Добавим только, что в последние годы получены источники почти монохроматического света — лазеры. Свет от разных лазеров одной конструкции достаточно когерентен, чтобы дать интерференционную картину. Такая картина была экспериментально получена.

* monos (греч.) — один, chroma — цвет.

Рассмотрим интерференцию в тонких пленках (рис. 416). Монохроматический световой луч в точке A раздваивается: луч 1 отражается, луч 2 преломляется, отражается от нижней грани в точке B , преломляется на верхней грани в точке D и выходит в первую среду параллельно лучу 1 (это легко доказать, пользуясь законами отражения и преломления).

В точке B (как, впрочем, и во всех других точках D , E и т. п.) кроме отражения происходит преломление, луч 3 выходит из пластинки



Рис. 415

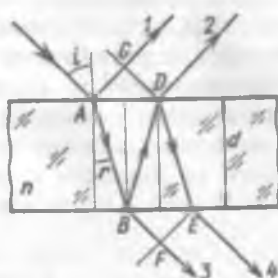


Рис. 416

параллельно падающему (см. § 1.5). В точке D происходит частичное отражение, и луч 4, преломляясь, выходит параллельно лучу 3 (результаты остальных отражений и преломлений не рассматриваем). Выходящие когерентные лучи 1 и 2, если их собрать в одну точку, например, линзой, интерферируют в *отраженном свете*; аналогичную картину в *проходящем свете* можно получить, собрав лучи 3 и 4 (и, разумеется, все им подобные). Геометрическая разность хода лучей 1 и 2 равна $r_2 - r_1 = |AB| + |BD| - |AG|$, так как далее от точек G и D до встречи эти лучи пройдут одинаковые пути. Аналогично геометрическая разность хода лучей 3 и 4 $r_4 - r_3 = |BD| + |DE| - |BF|$, причем она равна геометрической разности хода лучей 1 и 2. Это легко доказать, рассмотрев попарно равные треугольники ABD , BDE , ADG и BEF . Но рассматривать геометрическую разность хода таких пар лучей бесполезно, так как они распространяются в различных средах с разными скоростями. Нужно вычислить разность фаз складываемых колебаний, приняв их начальные фазы в точках A или B за нуль. Преобразуем уравнение плоской волны:

$$x \stackrel{40-IV}{=} A \cos(\omega t - kr) \stackrel{38-IV}{=} A \cos[\omega t - 2\pi r T/(\lambda T)] \stackrel{37, 39-IV}{=} A \cos(\omega t - \omega r/v) = \\ = A \cos \omega(t - r/v).$$

Разность фаз колебаний в точках F и E

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \omega(t - r_3/v_3) - \omega(t - r_4/v_4) = \omega(r_4/v_4 - r_3/v_3) \stackrel{17}{=} \omega(r_4 n/c - r_3/c) = \omega/c(r_4 n - r_3) \stackrel{38-IV}{=} 2\pi/(Tc)(r_4 n - r_3) \stackrel{37-IV}{=} 2\pi/\lambda(r_4 n - r_3),$$

где $v_3 = c$, $v_4 = v$ — скорости света соответственно в вакууме и в пленке; λ — длина волны используемого света в вакууме (практически в воздухе); $n \stackrel{17}{=} c/v$ — абсолютный показатель преломления пленки. В зависимости от λ , n , r_3 , r_4 вычисленная разность фаз может принимать раз-

ные значения, а вместе с ней будет изменяться амплитуда результирующего процесса в точке наблюдения. Если

$$\varphi_3 - \varphi_4 = 2m\pi,$$

то колебания синфазны, в точку наблюдения они придут «в фазе» и усилят друг друга, амплитуда результирующего процесса будет наибольшей [см. (23-IV)]. Если

$$\varphi_3 - \varphi_4 = (2m - 1)\pi,$$

то происходит противофазное сложение колебаний, они ослабляют друг друга; амплитуда результирующего процесса в точке наблюдения минимальна. Наконец, возможно много промежуточных значений, когда $\varphi_3 - \varphi_4$ не равно целому числу π . Тогда $\cos(\varphi_3 - \varphi_4)$ и, следовательно, амплитуда результирующих колебаний принимают промежуточные значения, наблюдается частичное усиление или ослабление одних колебаний другими в зависимости от близости к тому или другому из указанных условий.

Величина $\delta = r_4 n - r_3$ называется *оптической разностью хода*. Она равна

$$\delta = (\varphi_3 - \varphi_4)\lambda/(2\pi).$$

Если вместо разности фаз подставить в это выражение сформулированные выше условия максимумов и минимумов, то эти условия примут вид

$$\delta = \begin{cases} 2m\lambda/2 - \text{максимумы;} \\ (2m - 1)\lambda/2 - \text{минимумы;} \\ \text{нецелому числу } (\lambda/2) - \text{частичное усиление} \\ \text{или ослабление колебаний.} \end{cases}$$

Таким образом, δ действительно играет роль разности хода, только с учетом различия сред. Если на оптической разности хода разделенных лучей укладывается четное число полуволн, то наблюдается максимум; нечетное — минимум; нецелое — частичное усиление или ослабление колебаний.

Эти условия описывают интерференцию в проходящем свете, наблюдаемую на достаточно тонкой пленке в воздухе. Для отраженного света условия поменяются местами, так как к разности хода прибавится полуволна при отражении от оптически более плотной среды (в точке А). Описывать механизм этого явления мы здесь не будем.

Если бы пленка была идеально однородной и плоскопараллельной, а лучи — идеально параллельными, то в монохроматическом свете мы увидели бы равномерно освещенную или затемненную пленку. Но в действительности существуют неоднородности, на которых меняется показатель преломления, изменяется толщина пленки, да и лучи не совсем параллельны. Поэтому даже в монохроматическом свете мы увидим причудливые очертания минимумов и максимумов, зависящие от всех этих причин.

Интерференцию в тонких пленках используют в технике. Например, если создать в высокой степени однородную пленку, осветить ее достаточно параллельными монохроматическими лучами, то можно очень точно

измерить толщину пленки в различных точках по распределению минимумов и максимумов. Интерференционные методы измерения длины — одни из самых точных.

Освещая тонкую реальную пленку белыми лучами, можно ожидать, что распределение минимумов и максимумов будет для каждого цвета свое, близкие цвета будут соседями, и вся картина радужно окрасится. Именно интерференция в тонких пленках лучше всего знакома читателю по масляным или нефтяным пятнам на лужах или стекле.

Частный случай такой интерференции — кольца Ньютона (рис. 417, обозначения соответствуют рис. 416). На плоскопараллельную пластинку выпуклой стороной положена плосковыпуклая линза с большим радиусом кривизны. Малый воздушный промежуток играет роль тонкой пленки, вызывая появление максимумов и минимумов в монохроматическом свете. Форма интерференционной картины кольцеобразна, так как одинаковые условия минимума или максимума наблюдаются во всех точках, равноотстоящих от оси линзы. Естественно, эти условия связаны с длиной волны, поэтому в случае освещения установки белым светом получаются радужно окрашенные кольца. Измерив диаметры соответствующих колец, можно определить длину волны света или радиус кривизны линзы.

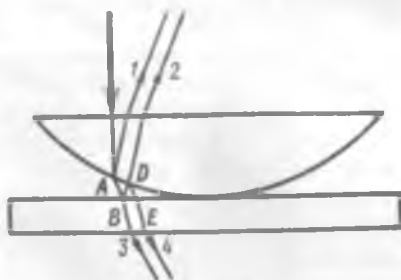


Рис. 417

§ 5.2. Дифракция

Экспериментально установленный закон прямолинейности распространения света не вызывал сомнения. Но если распространение света — это волновой процесс, то может наблюдаться *дифракция* — огибание препятствий, размеры которых сравнимы с длиной волны (само это явление давно известно, изучено в волновой механике и не имеет пока отношения к оптике). Можно показать, что отклонение лучей от прямолинейности — дифракция — становится заметным при выполнении условия:

$$\frac{d^2}{4R} \approx \lambda,$$

где d — размер препятствия; R — расстояние от препятствия до точки наблюдения. Обратите внимание на то, что дифракция может наблюдаться и на больших препятствиях — только на значительном расстоянии от них.

Образует волну на поверхности воды (рис. 418) и направим ее на достаточно большое препятствие. В соответствии с принципом Гюйгенса за препятствием будет «тень» волнового процесса, т. е. свободная от волн поверхность воды. Это используется при устройстве волноломов в портах. Теперь повторим опыт (рис. 419), поставив на пути волн препятствие, размеры которого сравнимы с длиной волны. Практически во всех точках за препятствием вода будет «волноваться», процесс огибает преграду —

наблюдается дифракция волн. Аналогично проходят волны через отверстие — большое (по сравнению с длиной волны, рис. 420) и малое (сравнимое с длиной волны, рис. 421). Конечно, небольшое искривление фронта волн мала. В случае же малых препятствий или отверстий большая часть волнового процесса направляется в область геометрической тени.



Рис. 418

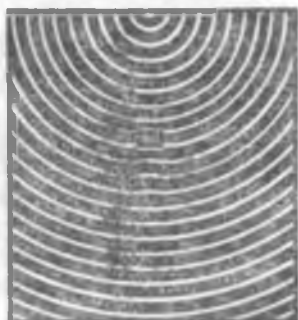


Рис. 419



Рис. 420



Рис. 421

Как мы уже говорили, первым опытом, в котором проявилась волновая природа света, был опыт Юнга. Картина, получающаяся в результате дифракции света, по принципу Гюйгенса — Фрнеля, есть интерференционная картина дифрагированных волн. Наблюдается дифракция света, если размеры препятствия достаточно малы. Так, картины, аналогичные изображенным на рис. 419 и 421, можно наблюдать на узких экранах (проволоках) и щелях (отверстиях). Поэтому, например, невозможно вырезать бесконечно тонкий луч света. Как только размеры диафрагмы становятся сравнимы с длиной волны, сказываются волновые свойства света, наблюдается дифракция, и размеры картины за диафрагмой резко возрастают.

Одним из важнейших дифракционных устройств является дифракционная решетка. Простейшая одномерная дифракционная решетка (рис. 422) представляет собой правильно чередующиеся прозрачные и непрозрачные полосы, поперечные размеры которых малы, а продольные могут счи-

таться бесконечными: ширина каждой щели a , ширина непрозрачной части b . Величина $a + b = d$ называется *постоянной решетки* или ее *периодом* (период здесь характеризует повторяемость в пространстве, а не во времени). Изготавливается решетка, например, так: берут прозрачный кусок стекла и с помощью делительной машины наносят непрозрачные штрихи (травлением или царапанием) шириной b на расстоянии a друг от друга. Так наносят от нескольких десятков до нескольких тысяч штрихов на сантиметр.

Направим на решетку монохроматический пучок лучей, фронт которых параллелен плоскости решетки. Тогда одно из положений фронта совпадает с плоскостью решетки, и все точечные источники, расположенные в щелях решетки, колеблются «в фазе». В результате дифракции после решетки лучи пойдут под всевозможными углами φ к первоначальному направлению. Эти лучи попадают на линзу, не показанную на рис. 422, главная оптическая ось которой совпадает с направлением падающего на решетку пучка. Размеры линзы гораздо больше размеров решетки.

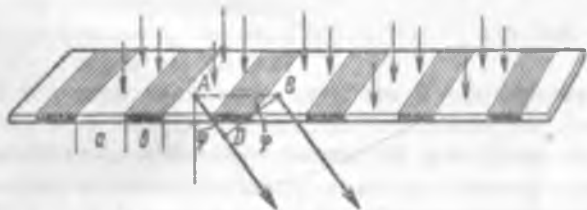


Рис. 422

Пройдя линзу, все лучи, параллельные произвольному направлению AD , собираются в фокальной плоскости линзы и образуют узкую линию, параллельную щелям решетки. На экране, расположенном в фокальной плоскости, происходит интерференция дифрагированных лучей. В зависимости от соотношения фаз приходящих в ту или иную точку лучей наблюдается усиление или ослабление света, т. е. чередование минимумов и максимумов интерференционной картины.

Мы качественно описали дифракцию в параллельных лучах. Количественное описание этого явления достаточно сложно, остановимся только на образовании главных максимумов интерференционной картины.

Рассмотрим соответствующие точки A и B соседних щелей решетки, находящиеся на одинаковых расстояниях от левых (и правых) краев своих щелей и в одной плоскости, параллельной плоскости рисунка. Расстояние между такими точками $|AB| = d$. По условию точки A и B колеблются «в фазе». От перпендикулярной лучам плоскости BD до встречи в фокальной плоскости линзы соотношение фаз изображенных лучей не изменяется. Следовательно, вопрос о соотношении фаз в точке наблюдения решается на разности хода этих лучей AD . Максимум в точке наблюдения получится, если точка D колеблется «в фазе» с точкой A , которая лежит на одном фронте с точкой B .

Условие этого максимума

$$AD = 2m(\lambda/2).$$

Угол B в $\triangle ADB$ равен углу φ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Из прямоугольного $\triangle ADB$ $\sin \varphi = |AD|/|AB|$. Следовательно, $|AD| = |AB| \sin \varphi = d \sin \varphi$, и условие максимума принимает вид

$$d \sin \varphi = m\lambda. \quad (18)$$

Но это условие синфазного сложения колебаний не только от данных точек A и B . Так же складываются колебания, распространяющиеся по направлению φ и от любых соответствующих точек соседних щелей.

Значит, все точки одной щели со всеми точками другой по выбранному направлению дают усиление колебаний. Но так же синфазно складываются колебания, распространяющиеся под выбранным углом φ от соответствующих точек всех щелей.

Таким образом, по направлениям, удовлетворяющим уравнению (18), наблюдаются самые яркие линии. Это уравнение представляет собой условие главных максимумов. Что же мы увидим на экране?

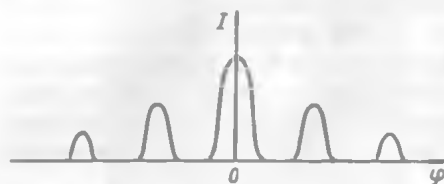


Рис. 423

По направлению $\varphi = 0$ все лучи придут «в фазе», и будет наблюдаться нулевой максимум ($m = 0$). Увеличим угол φ в любую сторону. После серии минимумов и неглавных максимумов, о которых мы не говорили, под определенным углом φ , удовлетворяющим условию $d \sin \varphi \stackrel{18}{=} \lambda$, мы обнаружим максимум первого порядка ($m = 1$) и т. д. Распределение энергий в зависимости от угла φ в первом приближении показано на рис. 423, где по вертикальной оси отложена сила света. Сама дифракционная картина (рис. 424) представляет собой систему более или менее



Рис. 424

узких линий, расположенных под углами, соответствующими условию (18). Это условие можно использовать для определения длины волны (если измерить угол φ и знать постоянную решетки). Именно этим методом получают наиболее надежные значения разных длин волн. Можно определить постоянную решетки, если известна длина волны облучения. На этом основан весь рентгеноструктурный анализ кристаллических веществ. Ведь кристалл — это более сложная, чем наша, трехмерная дифракционная решетка, постоянная которой представляет собой среднее межатомное расстояние — важнейшую характеристику кристалла.

Легко заметить, что все наши рассуждения относились к монохроматическому свету. Если же на решетку падает белый свет, картина существенно изменяется, так как свое распределение интенсивностей теперь наблюдается у каждой длины волны.

По направлению $\varphi = 0$ виден максимум для всех длин волн. Следовательно, в середине фокальной плоскости линзы существует белое изображение щели (рис. 425). Далее, по обе его стороны наблюдаются минимумы и неглавные максимумы. Затем при $m = 1$ формуле (18) удовлетворяет серия углов φ , под которыми видны максимумы разных цветов, точнее, всевозможных длин волн. Эти узкие монохроматические изображения щели перекрываются, непрерывно переходя друг в друга, и образуют спектр первого порядка. Обратите внимание на порядок цветов в этом спектре: под меньшими углами видны максимумы тех цветов, у которых меньше длина волны.

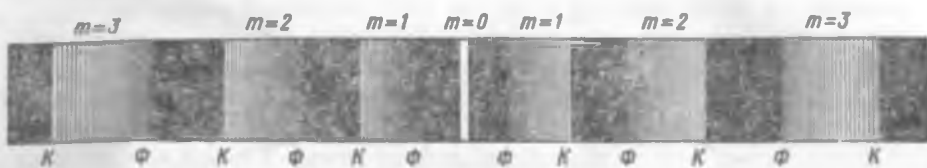


Рис. 425

В самом деле, при увеличении угла φ от нуля растет и разность хода AD (см. рис. 422). Для появления максимума какого-либо цвета нужно, чтобы на возрастающем отрезке AD уложилась бы одна длина волны. Ясно, что сначала (при меньшем φ) это случится у света, длина волны которого наименьшая, в нашем случае у фиолетового и т. д. Пройдя все максимумы первого порядка, при дальнейшем увеличении угла φ мы опять встретим серию минимумов, а потом максимумы второго порядка ($m = 2$) с тем же расположением цветов и т. д. Таким образом получен *дифракционный спектр*, который можно использовать так же, как всякий другой. Мы подробно изучим спектры в § 5.4; все, что там сказано о спектрах, можно отнести и к дифракционным спектрам.

§ 5.3. Дисперсия

Волновая теория света в момент своего рождения содержала ряд противоречий, которые почти на нет сводили ее ценность. В первый раз, как вы помните, существенно укрепил волновые представления Френель, доказавший поперечность световых волн и давший методы расчета интерференционных картин. Но свет рассматривался как механические волны. А среда, называемая светоносным эфиром, оказалась обладающей противоречивыми свойствами. Именно из противоречий свойств светоносного эфира родилась теория относительности Эйнштейна. Но еще задолго до XX в. Ньютон (в XVII в.) открыл разложение белого цвета, не имеющее аналогии в механических волнах. Поэтому для объяснения дисперсии света придется воспользоваться трудами Максвелла. Как вы помните, он обратил внимание на то, что электромагнитные волны в вакууме распространяются со скоростью света. И сделал вывод: свет — это электромагнитные волны (а не механические, как думали до него). Оказалось, что для распространения электромагнитных волн какая-либо среда не нужна. И когда пришлось отказаться от светоносного эфира

как от среды, внутренне противоречивой, волновая электромагнитная теория света Максвелла продолжала существовать.

В своем классическом опыте по разложению белого света Ньютон столкнулся с дисперсией электромагнитных волн (естественно, не подозревая о существовании последних). Опыт Ньютона (рис. 426) состоял в том, что узкий солнечный луч направлялся на трехгранную призму, дважды преломлялся в ней и при первом преломлении разлагался на разноцветные лучи. Ньютон сделал вывод: белый луч — сложный, он состоит из разноцветных лучей. Чтобы доказать это, Ньютон с помощью линзы собрал разноцветные лучи в одно место и получал белое пятно. Вырезав

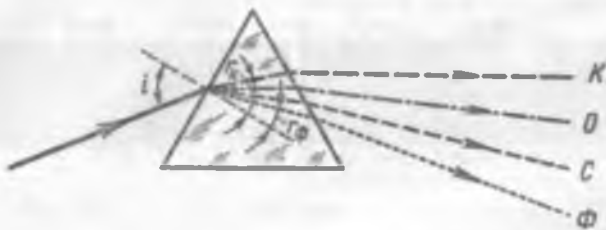


Рис. 426

узкую часть полученного спектра, он пропустил ее через трехгранную призму. Отклонение наблюдалось, разложения не было. Значит лучи, получающиеся в результате разложения, простые, они больше не разлагаются.

Для объяснения опыта Ньютона допустим, что в составе белого света присутствуют все разноцветные лучи (не семь и не свыше 500, как различает человеческий глаз, а бесконечность различных длин волн в видимом спектре от 780 до 390 нм; сколько из них прибор дает возможность различить, мы здесь обсуждать не будем). Они падают на первую преломляющую грань призмы под одинаковыми углами i , а преломляются под разными углами от r_{ϕ} до r_{κ} (углов преломления соответственно крайних видимых фиолетового и красного лучей). Далее каждый из лучей следует в призме по определенному направлению, падает на вторую преломляющую грань под некоторым углом, выходит под соответствующим углом преломления и на экране занимает свое место в спектре. Но различие в углах преломления на передней преломляющей грани при одинаковости углов падения означает различие показателей преломления разных лучей ($n = \sin i / \sin r$) и, следовательно, различие скоростей распространения в одной и той же среде ($n = \frac{c}{v}$). Зависимость скорости электромагнитной волны (и, значит, показателя преломления) от ее частоты называется *дисперсией*^{*}.

Дисперсия электромагнитных волн связана со свойствами среды. В теории Максвелла выводится формула фазовой скорости электромагнитной волны

$$v = c / \sqrt{\epsilon \mu},$$

* dispersus (лат.) — рассеянный, рассыпанный.

где c — скорость света в вакууме; ϵ и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Значит, скорость волны в данной среде зависит от поляризуемости среды. Естественно, что диполи диэлектрика, попадая в переменное электромагнитное поле волны, совершают вынужденные колебания. Амплитуда этих колебаний зависит от соотношения частот вынужденной и собственной, т. е. изменяется с вынужденной частотой излучения.

При этом изменяется поляризуемость среды и соответственно ее диэлектрическая проницаемость. Поэтому скорость распространения электромагнитной волны в диэлектрике зависит от ее частоты.

Для сравнения вспомним, что скорость упругих волн в механической среде не зависит от частоты, так как ни одна величина, входящая в выражение скорости (36-IV), не связана с частотой. Поэтому механические среды — недиспергирующие.

Разложение белого света и образование спектра есть следствие дисперсии, а не она сама. В нашем случае разложения

$$r_{\phi} < r_{\kappa}; \sin r_{\phi} < \sin r_{\kappa}; n_{\phi} > n_{\kappa}; v_{\phi} < v_{\kappa}.$$

Такие же неравенства относятся к любым двум лучам в спектре.

Дисперсия, при которой показатель преломления увеличивается с частотой, называется *нормальной*. Спектр, получающийся в результате дисперсии, называется *дисперсионным*.

В дисперсионном спектре ближе к первоначальному направлению (при нормальной дисперсии) оказывается красная часть. В дифракционном — наоборот.

§ 5.4. Спектры

Для изучения разного рода спектров применяются приборы гониометры (рис. 427).

На принципиальной схеме прибора (рис. 428) изображены только некоторые лучи спектра. От щели коллиматора A , которая расположена в фокусе F коллиматорной линзы, расходятся лучи, они выходят из коллиматорной линзы параллельным пучком и попадают на призму P (или какое-нибудь другое спектральное оптическое устройство, например дифракционную решетку). Изменив свое направление в призме (или в другом устройстве), лучи выходят так, что друг другу параллельными остаются только лучи одной частоты.

Попадая через объектив в зрительную трубу B , все параллельные лучи дают изображение щели в фокальной плоскости объектива зрительной трубы, а так как лучи разных частот параллельны

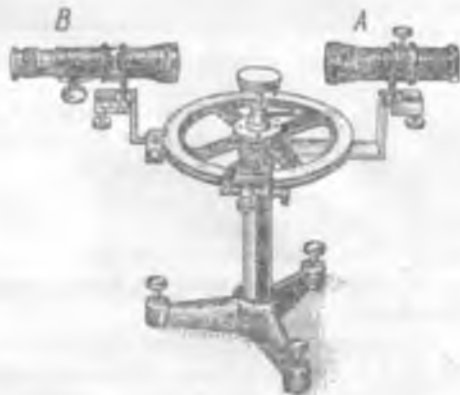


Рис. 427

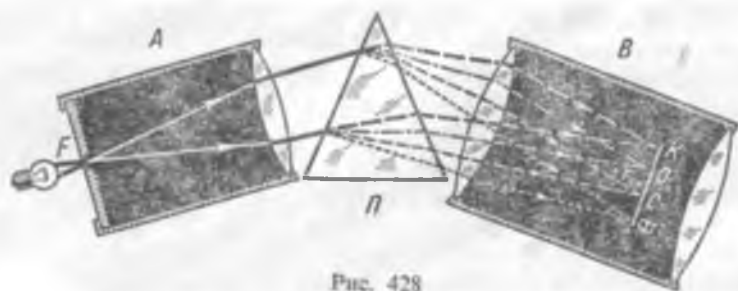


Рис. 428

разным побочным осям, каждое изображение (линия определенной частоты) будет на своем месте. Таким образом, частота данной линии определяется не по ее цвету, что субъективно и приблизительно, а по расположению в спектре, которое может быть весьма точно зафиксировано.

Далее, в зависимости от назначения прибора употребляют окуляр зрительной трубы для рассматривания мнимого увеличенного прямого изображения спектра. Прибор тогда называется *спектроскопом*. Если в фокальную плоскость объектива помещают светочувствительную пластинку или пленку и фотографируют спектр, прибор называют *спектрографом*.

Различают спектры испускания и поглощения. Спектры испускания, получающиеся от раскаленных тел, делятся на сплошные, линейчатые и полосатые.

Сплошной спектр испускают раскаленные твердые и жидкие тела, а также газы, находящиеся под достаточно большим давлением. Такой спектр можно получить, пропуская, подобно Ньютону, солнечный свет через трехгранную призму.

Соответствующую цветную картинку можно найти в школьном учебнике. За неимением красок, некоторое подобие сплошного спектра мы изобразили на рис. 429. Обратите внимание на непрерывность перехода



Рис. 429

от одной частоты к другой. Можно представить себе такой спектр, как результат перекрытия многих монохроматических изображений щели, соответственно слегка сдвинутых.

Линейчатые спектры состоят из узких, почти монохроматических линий — изображений щели. Некоторое подобие таких спектров изображено на рис. 430. Линейчатые спектры испускаются раскаленными газами, имеющими атомарную структуру и находящимися под сравнительно небольшим давлением.

Полосатый спектр дают различные молекулярные соединения. Полосы образуются вследствие взаимодействия молекул вещества.

Наибольший физический интерес представляют линейчатые спектры испускания, характерные для каждого химического элемента. Атомы раз-

ных элементов из-за своеобразия их строения испускают различные частоты. Это используется для качественного и количественного *спектрального анализа*. Он имеет существенные преимущества перед химическим анализом, так как быстр, надежен, чувствителен (несколько десятков атомов в соединении уже дают характерные линии), точен. Количество атомов данного вида в соединении определяется *микрофотометрированием* спектральных линий — измерением их яркости.

Спектры поглощения получаются при пропускании лучей сплошного спектра (от раскаленного источника) через менее нагретый газ. Тогда на фоне сплошного спектра наблюдаются узкие темные линии поглощения.



Рис. 430

Для спектров поглощения открыт закон Кирхгофа: *линии поглощения соответствуют линиям испускания*, т. е. атомы менее нагретого элемента поглощают из сплошного спектра как раз те частоты, которые они в других условиях испускают. Следовательно, по спектру поглощения тоже можно судить о химическом составе поглощающего соединения.

В 1814 г. в спектре Солнца были открыты *фраунгоферовы темные линии*. Солнце — раскаленный газовый шар (температура поверхности $\approx 6000^\circ\text{C}$), где газ находится под большим давлением, следовательно, он испускает сплошной спектр. Солнечные лучи, идущие к наблюдателю, проходят через атмосферу Солнца — его корону, температура которой всего $2000 - 3000^\circ\text{C}$. Корона поглощает из сплошного спектра определенные частоты, и мы на Земле принимаем солнечный спектр поглощения. По нему можно определить, какие элементы присутствуют в короне Солнца. Стали классифицировать *фраунгоферовы линии*, сравнивать их с линиями земных элементов и один за другим обнаружили на Солнце все земные элементы. После этой громадной по объему работы среди *фраунгоферовых линий* осталось несколько, не принадлежащих ни одному земному элементу (1868 г.).

Так был открыт солнечный элемент — гелий. И только через 26 лет (в 1894 г.) открыли гелий на Земле, где его довольно много.

Благодаря спектральному анализу мы знаем химический состав невообразимо далеких от нас звезд. Но спектры приносят сведения не только о составе звезд. По спектрам мы узнаем (используя эффект Доплера) ра-

диальную составляющую скорости звезды относительно Земли. Из астрономических наблюдений (или используя поперечный эффект Доплера) можно узнать перпендикулярную линии наблюдения составляющую и вычислить скорость движения звезды относительно Земли.

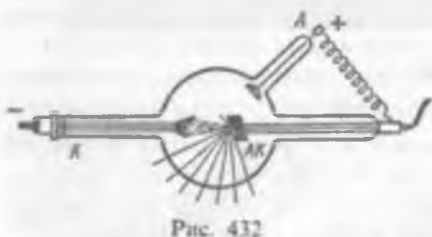
При всем богатстве красок и оттенков видимой части спектра его не исчерпывается многообразие излучений Солнца.

Поместив термометр за красной частью спектра, можно обнаружить более интенсивное нагревание, чем в видимых лучах. Разложив белый луч в спектр кварцевой призмой и сфотографировав его, мы обнаруживаем химическое действие далеко за фиолетовой частью спектра. Так были открыты инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра (рис. 431).



Рис. 431

В конце XIX в. немецкий физик Рентген открыл излучение, которое было названо его именем. *Рентгеновское излучение* возникает при резком торможении быстрых электронов на антикатоде в рентгеновской трубке (рис. 432). К трубке приложено напряжение порядка тысяч вольт. Электроны, разогнанные электрическим полем, останавливаются антикатодом, и их энергия преобразуется в энергию рентгеновского излучения. Сами электроны медленно стекают к аноду. Исследования показывают, что рентгеновские лучи — один из видов электромагнитного излучения, частота которого еще выше, чем у ультрафиолетовых лучей.



Применяется рентгеновское излучение для «просвечивания» больных (мягкое излучение сравнительно малых частот), кристаллов (уже упоминавшийся нами рентгеноструктурный анализ, отыскание дефектов решетки — дислокаций), стальных (или иных) отливок (жесткое рентгеновское излучение большой проникающей способности, смертельное для человека).

Еще большую частоту имеет гамма-излучение, являющееся продуктом ядерных реакций. Его применяют для γ -дефектоскопии (обнаружения дефектов гамма-просвечиванием).

Исключительным успехом электромагнитной теории Максвелла явилось создание шкалы электромагнитных волн (рис. 433). Эта шкала является



Рис. 433

блестящим подтверждением одного из законов диалектики — о переходе количества в качество. Вдоль шкалы слева направо непрерывно возрастает частота, а ее увеличение приводит к появлению качественно различных излучений (заметим, что границы участков намечены условно, соседние пограничные частоты практически неразличимы и могут быть получены двумя способами).

Первый участок — частоты от 0 до $3 \cdot 10^3$ Гц — низкочастотные колебания. Возбуждаются в рамке с током простым изменением сопротивления цепи; практически не излучаются и не распространяются. Второй участок — ультрадлинные, длинные, средние, короткие радиоволны. Возбуждаются в колебательном контуре, легко излучаются и распространяются в пространстве; на Земле длинные волны огибают земную поверхность, короткие распространяются зигзагообразно, поочередно отражаясь от ионосферы и от поверхности Земли. Третий участок — сантиметровый и миллиметровый диапазоны. Ультракороткие радиоволны распространяются прямолинейно, через ионосферу уходят в космос, используются для космической связи и на Земле в пределах прямой видимости, в телевидении, в радиолокации, получаются в специальных вибраторах. Четвертый участок — оптический: инфракрасное, видимое, ультрафиолетовое излучение. Излучаются верхними слоями электронных оболочек атомов, распространяются прямолинейно; имеют громадные перспективы применения для связи. Поглощаются атомами и, в виде исклучения, действуют на глаз. Пятый участок — рентгеновское излучение. Излучается глубинными слоями электронных оболочек атомов, имеет большую проникающую способность. Шестой участок — гамма-излучение. Является продуктом ядерных реакций, имеет громадную проникающую способность. Чем дальше мы продвигаемся в сторону больших частот, тем с большими основаниями от слова «волны» переходим к слову «лучи».

§ 5.5. Давление света

По теории Максвелла, всякая электромагнитная волна, падая на поверхность тела, должна производить на нее давление. Пусть такая волна под углом 0° падает на поверхность диэлектрика (рис. 434). Заряды диэлектрика начинают двигаться: положительные вдоль, отрицательные — навстречу напряженности электрического поля. На движущиеся заряды магнитное поле волны действует силами Лоренца,

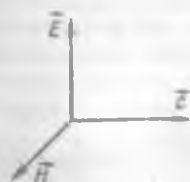


Рис. 434

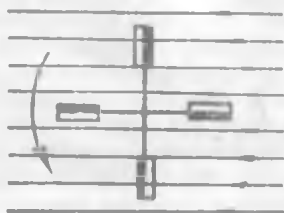
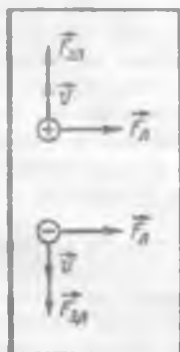


Рис. 435

направления которых совпадают с направлением распространения волны. Разделив усредненную по времени сумму сил Лоренца на площадь освещенной поверхности, получим давление электромагнитной волны на эту поверхность. Можно показать, что давление света равно объемной плотности энергии волны, поэтому давление на светлую поверхность почти вдвое больше давления на темную.

Сделаем легкую крыльчатку с лопастями, зачерненными с одной стороны и блестящими — с другой, насадим ее на острие в вакуированном сосуде и осветим (рис. 435). Под действием светового давления такая крыльчатка должна вращаться по часовой стрелке. И она вертится, причем довольно легко, только... в другую сторону. Оказывается, черная поверхность нагревается до более высокой температуры (и быстрее), чем блестящая. От нее отскакивают молекулы остатков газа в сосуде с большими скоростями и сообщают ей больший импульс. Этот *радиометрический эффект* примерно в 10^3 раз больше эффекта светового давления, которое предстояло измерить П. Н. Лебедеву.

Лебедев укрепил на бифиллярном подвесе слюдяные кружки, одна сторона которых была зачернена (рис. 436). Угол поворота подвеса фиксировался с помощью светового зайчика. Установка попеременно освещалась с двух сторон,

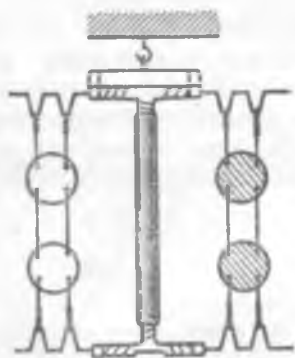


Рис. 436

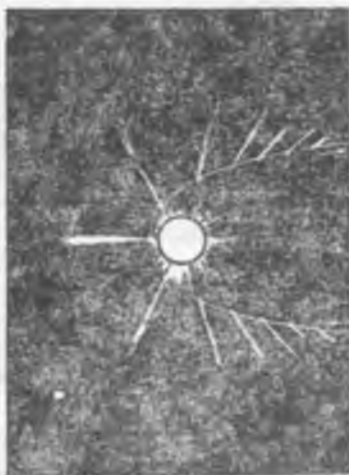


Рис. 437

что помогало поддерживать тонкие слюдяные кружки при одинаковых температурах (при освещении с одной стороны сильнее нагреваются левые кружки, с другой — правые. Так как кружки тонкие, они прогреваются равномерно до одинаковых температур). Воздух из колбы был не только откачан, но и вытеснен парами ртути при высокой температуре. Затем колбу запаяли и охладили. Малолетучая ртуть капелькой сконденсировалась на дне колбы. Все это уменьшило радиометрический эффект. При освещении подвес поворачивался давлением света, сила давления была измерена. Поместив всю установку в калориметр, Лебедев измерил и плотность падающей энергии. Результаты опыта блестяще совпали с предсказаниями теории Максвелла.

Существованием светового давления русский астроном Ф. А. Бредихин изящно объяснил образование кометных хвостов. На частицы вблизи Солнца действуют две противоположно направленные силы: сила тяготения, пропорциональная массе частицы, следовательно, ее объему и тем самым кубу линейных размеров; сила светового давления (отталкивания), пропорциональная поверхности частицы

и значит, квадрату ее линейных размеров. Для тяжелых частиц превалирует сила тяготения, но с уменьшением диаметра частиц она уменьшается быстрее силы отталкивания, и для достаточно малых частиц сила отталкивания становится больше силы притяжения. Частицы в хвосте кометы именно такие — атомы, молекулы газа, вот хвост и направлен от Солнца. Повторяем: изящное и поучительное объяснение, но... неверное. Неловно было открыто движение протонов (ядер атомов водорода), испускаемых Солнцем, — *водородный ветер*. Им сейчас и объясняют существование кометных хвостов (рис. 437).

ГЛАВА 6

КВАНТОВАЯ ОПТИКА

§ 6.1. Внешний фотоэффект

В конце XIX в. казалось, что наконец-то открыта теория, которая «все» объясняет — электромагнитная теория Максвелла. Но, подсчитывая энергию спектра абсолютно черного тела конечной температуры, Рэлей и Джинс получили... бесконечно большую энергию в ультрафиолетовой части (*ультрафиолетовая катастрофа*). Излишне добавлять, что на опыте энергия спектра конечна на всех частотах.

Мы уже говорили, что старая теория является правильной, поскольку объясняет наблюдаемые явления. В данном случае положение сложнее. Электромагнитную теорию нельзя отметить, настолько колоссальны ее успехи и технические применения. Мы здесь сталкиваемся с *границами применимости* данной теории. Приходится расширять научные представления.

Конструируя приемник электромагнитных волн (диполь Герца), Герц всячески воздействовал на шарики и промежуток между ними, чтобы облегчить прием сигнала. Среди других воздействий он пробовал осветить шарики и установил, что при освещении ультрафиолетовыми лучами отрицательно заряженного проводника прием становится устойчивее. Герц правильно объяснил наблюдаемое явление.

Сообщим отрицательный заряд электromетру, соединенному с цинковой пластинкой (рис. 438). Этот заряд сохранится достаточно долго. Осветим пластинку дуговым фонарем. Заряд сразу начнет уменьшаться. Выключим освещение — прекратится уменьшение заряда. Отодвинем фонарь от пластинки — уменьшится скорость стекания заряда. Между фонарем и пластинкой поместим прозрачный слой тонкого стекла — уменьшение заряда прекратится. Повторим опыт, зарядив электрометр положительно, — никакого изменения заряда заметить не удастся. Следовательно, *внешний фотоэффект* состоит в испускании электронов проводником при определенном облучении.

Надо полагать, что при подходящем облучении испускают электроны и нейтральные и по-

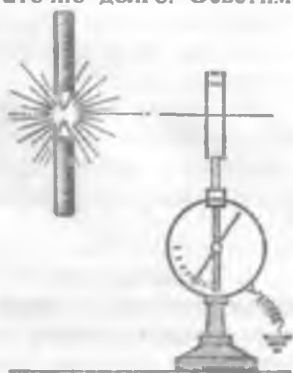


Рис. 438

ложительно заряженные проводники. При этом появляется или увеличивается положительный заряд, который притягивает электроны и возвращает их на пластинку.

Именно поэтому в пределах точности нашего опыта обнаруживается фотоэффект только на отрицательно заряженном проводнике.

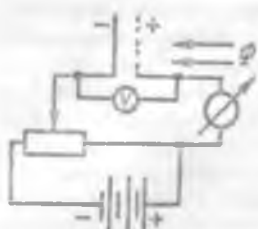


Рис. 439

Экспериментальные законы фотоэффекта. Экспериментально исследовал фотоэффект А. Г. Столетов со своими учениками; на рис. 439 изображена схема, которую можно для этого использовать. Пока не включен источник света, нет испускания фотоэлектронов, нет фототока.

Включим источник света и зафиксируем частоту облучения (с помощью определенного светофильтра). Зафиксируем также световой поток Φ и снимем вольт-амперную характеристику вакуумного промежутка анод — катод (кривая Φ , рис. 440, а). При напряжении, равном нулю, некоторое количество фотоэлектронов достигает анода и создаст небольшой фототок. При увеличении напряжения все большее число фотоэлектронов попадает на анод — сила фототока растет. Наконец, при определенном напряжении на электродах все фотоэлектроны, вылетающие из катода за единицу времени, участвуют в токе. При дальнейшем росте напряжения сила тока остается прежней — достигнут фототок насыщения. Поменяем полярность, т. е. приложим

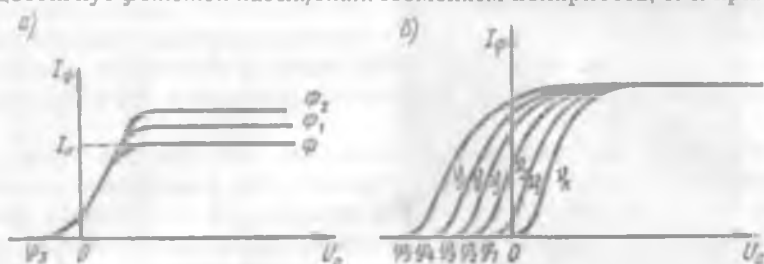


Рис. 440

к освещаемой пластине положительный, а к решетчатому электроду — отрицательный полюс источника — сила фототока уменьшится. Постепенно увеличиваем это обратное напряжение — сила фототока уменьшается и достигает нуля при обратном напряжении Φ_s , называемом запирающим потенциалом.

Что такое запирающий потенциал? Это разность потенциалов такого поля, которое не дает долететь ни одному фотоэлектрону до решетчатого электрода. Для этого поле должно совершить отрицательную работу, равную энергии наиболее быстрых фотоэлектронов:

$$mv_{\text{max}}^2/2 = e\Phi_s. \quad (19)$$

1. Увеличим световой поток до Φ_1 и вновь снимем вольт-амперную характеристику. Кривая пойдет так же, только возрастет сила фототока насыщения. Увеличим еще световой поток до Φ_2 — соответственно увеличится сила фототока насыщения. Получаем первый закон фотоэффекта: плотность фототока насыщения увеличивается при увеличении

освещенности фотокатода. Заметим, что при этом запирающий потенциал не изменяется.

2. Зафиксируем световой поток и снимем вольт-амперную характеристику межэлектродного промежутка, изменяя частоту облучения, например, изменением светофильтров (рис. 440, б). При увеличении частоты возрастает запирающий потенциал, при уменьшении — запирающий потенциал уменьшается до нуля (при критической частоте ν_k), затем фотоэффект пропадает. Итак, второй закон фотоэффекта: *запирающий потенциал и, следовательно, максимальная скорость фотоэлектронов возрастают при увеличении частоты облучения. Сила фототока насыщения при этом не изменяется.*

3. Третий закон фотоэффекта: *существует такая критическая частота ν_k (для каждого металла своя), ниже которой облучение не вызывает фотоэффекта — «красная» граница фотоэффекта («красная» — со стороны меньших частот).*

4. Четвертый закон фотоэффекта: *фотоэффект практически безынерционен. Фотоэлектроны начинают вылетать из металла через 1 нс после начала облучения.*

Для выхода фотоэлектронов из металла необходимо совершить работу выхода. Во внешнем фотоэффекте она совершается за счет энергии облучения. Попытаемся объяснить экспериментальные законы фотоэффекта с позиций электромагнитной теории Максвелла.

Электромагнитная волна заставляет электроны совершать вынужденные колебания. При неизменной амплитуде вектора электрической напряженности энергия, полученная в этом процессе электроном, пропорциональна частоте волны и времени раскачивания. Тогда энергию, равную работе выхода, электрон должен получить при любой частоте волны, но это противоречит третьему и четвертому законам фотоэффекта. При увеличении частоты электромагнитной волны большая энергия за единицу времени передается электронам, и должно возрасти число фотоэлектронов, а это противоречит второму закону.

Наконец, при уменьшении энергии волны — светового потока — уменьшается количество фотоэлектронов, но должна уменьшаться и энергия каждого фотоэлектрона, в том числе максимальная. А она не уменьшается! Объяснить все это в рамках электромагнитной теории Максвелла невозможно.

§ 6.2. Идея квантования

Для преодоления ультрафиолетовой катастрофы немецкий физик М. Планк в 1900 г. выдвинул рабочую гипотезу о квантованности* излучаемой энергии. Считая, что энергия излучается порциями, каждая из которых равна

$$\varepsilon = h\nu, \quad (20)$$

Планк вывел формулу распределения энергии по частотам в спектре абсолютно черного тела, блестяще согласующуюся с экспериментом (ε —

* quantum (нем.) — количество.

энергия, равная одной порции; ν — частота электромагнитного излучения, $h = 6,62491 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка). В дальнейшем он пытался доказать, что, излучаясь квантами, энергия распространяется и поглощается непрерывно. Сама же идея квантования явилась одной из важнейших физических идей XX в. Возникла и развивается *квантовая механика* — единственная на сегодняшний день наука, позволяющая изучать особенности микромира — мира атомов, элементарных частиц и их взаимодействий. Многие характеристики элементарных частиц квантуются, т. е. могут принимать только определенный ряд дискретных значений. Так, квантуется энергия атома, момент импульса электрона при движении по орбите в атоме и т. д. Первым человеком, который понял идею квантования, был крупнейший физик современности А. Эйнштейн. В 1905 г., одновременно с изданием специальной теории относительности, он опубликовал статью, в которой с квантовых позиций объяснил фотоэффект. В этой статье Эйнштейн последовательно провел ту точку зрения, что, излучаясь квантами, энергия световых волн распространяется и поглощается тоже квантово. Но прежде чем объяснить фотоэффект, посмотрим, что собой представляет свет с позиций современной физики.

§ 6.3. Квантовая теория света

Всякое электромагнитное излучение, в том числе свет, представляет собой поток фотонов. *Фотон* — мельчайшая «частица» электромагнитного излучения, имеющая энергию в один квант [см. (20)]. Может сложиться мнение, что мы вернулись к корпускулярным представлениям XVII в., но оно будет не совсем правильным. Наука развивается по спирали, она никогда не возвращается на прежние рубежи. Это не значит, что в старых представлениях все ложно. Корпускулы рассматривались как механические частицы. К этим представлениям возврата быть не может. Но свет не является во всех случаях и чистой волной. Вот почему фотон — «частица», имеющая и волновые свойства (частота — важнейшая волновая характеристика). Что же такое свет — частицы или волны? И то, и другое — диалектическое единство противоположностей, поток «частиц», имеющих волновые свойства и проявляющих то корпускулярную, то волновую природу в зависимости от условий, в которых они находятся.

Свет взаимодействует с веществом то как поток частиц — излучение, поглощение, фотоэффект, то как волны — интерференция, дифракция, дисперсия и т. п.

Фотон нельзя догнать — он движется со скоростью света в любой инерциальной системе отсчета (см. приложение 3); его можно остановить, но при этом он перестает существовать как фотон, его энергия переходит в другие формы.

Фотонная природа света экспериментально доказана.

Как мы уже говорили, нельзя отказаться от электромагнитной теории Максвелла. Ультрафиолетовая катастрофа и фотоэффект, которые она не смогла объяснить, показывают лишь границы ее применимости. Можно представить себе, что электромагнитная теория справедлива там, где порции энергии [см. (20)] малы, т. е. при небольших частотах (так, лестница с

очень маленькими ступеньками может считаться наклонной плоскостью). Поэтому в шкале электромагнитных волн высокочастотная часть состоит из разных «лучей», к которым легче приложить понятие — поток частиц. Но при всех диалектических противоположностях материя едина. В частности, то как частицы, то как волны проявляет себя единое излучение.

§ 6.4. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

Рассмотрим объяснение экспериментальных законов фотоэффекта, данное Эйнштейном.

Фотон, поглощаемый поверхностью катода, может сообщить свою энергию одному электрону (может и не сообщить, а передать энергию решетке. Известна характеристика фотоэффекта — *квантовый выход фотокатода*: число фотоэлектронов, приходящихся на один поглощенный фотон. Это число порядка 10^{-3} . Значит, из тысячи поглощенных фотонов в среднем лишь один вызывает фотоэффект). Энергия одного поглощенного фотона прежде всего позволяет совершить работу выхода, а оставшаяся часть ее сообщается электрону в виде максимальной кинетической энергии:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + mv_{\text{м}}^2/2. \quad (21)$$

Мы получили *уравнение Эйнштейна для фотоэффекта*, представляющее собой закон сохранения энергии в этом процессе.

Теперь становятся понятными все экспериментальные законы фотоэффекта.

Увеличивая световой поток без изменения частоты, мы увеличивали число фотонов, падающих на катод. Одновременно увеличивалось количество фотоэлектронов, а максимальная их энергия не изменялась, так как каждый электрон получал энергию не больше одного кванта.

Увеличивая частоту облучения, мы увеличивали максимальную скорость и энергию фотоэлектронов

$$mv_{\text{м}}^2/2 \stackrel{21}{=} h\nu - A_{\text{вых}}$$

и соответственно запирающий потенциал. Уменьшая частоту облучения, уменьшали максимальную скорость фотоэлектронов и запирающий потенциал (возможное при этом изменение светового потока невелико и не сказалось на фототоке насыщения). Уменьшив частоту до ν_k , мы получили запирающий потенциал равным нулю. Следовательно,

$$mv_{\text{м}}^2/2 \stackrel{19}{=} e\varphi, = 0, \quad h\nu_k \stackrel{21}{=} A_{\text{вых}},$$

и красная граница фотоэффекта

$$\nu_k = A_{\text{вых}}/h.$$

При меньших частотах ($\nu < \nu_k$) одного кванта недостаточно для совершения работы выхода, а вероятность фотоэффекта при захвате двух фотонов ничтожно мала (если ориентировочно считать вероятностью испускания фотоэлектрона квантовый выход фотокатода 10^{-3} , то вероятность испускания фотоэлектрона за счет двух фотонов равна их произведению, т. е. 10^{-6} ; на самом деле, такая вероятность еще меньше из-за требования почти

одновременности захвата двух фотонов). Так объясняется третий закон фотоэффекта.

Четвертый закон фотоэффекта говорит о времени поглощения одного фотона, которое, действительно, порядка 10^{-9} с.

Фотоэлектроны, как установлено на опыте, имеют непрерывный спектр кинетических энергий и скоростей (соответственно от 0 до $mv_m^2/2$ и от 0 до v_m). Это можно объяснить проникновением фотонов на некоторую глубину внутрь металла и освобождением там фотоэлектронов. Получивший максимальную энергию фотозлектрон при взаимодействии с другими электронами и ионами может часть своей энергии отдать до поверхности и покинуть металл со скоростью $v < v_m$.

§ 6.5. Внутренний фотоэффект

Внутренним фотоэффектом называют увеличение концентрации свободных зарядов в полупроводнике — электронов и дырок — под действием облучения.

В полупроводнике, находящемся в определенных условиях, существует динамическое равновесие между генерируемыми и рекомбинирующими свободными зарядами. При включении внешнего излучателя, испускающего фотоны с энергией выше энергии генерации, динамическое равновесие сдвигается в сторону увеличения концентрации свободных зарядов. Первое очевидное применение этого эффекта — *фотосопротивление*. У освещенного полупроводника увеличивается концентрация свободных зарядов, следовательно, уменьшается сопротивление. И чем интенсивнее освещение, тем меньше сопротивление, тем больше сила тока в цепи, включающей фотосопротивление.

Второе применение — *фотоэлемент с запирающим слоем* (рис. 441). Он состоит из металлической подложки, дырочного полупроводника, покрытого прозрачным слоем металла (обычно тонкий слой золота; распространены элементы: купроксиль — подложка медная, полупроводник — оксид меди Cu_2O ; селеновый — подложка железная, полупроводник — селен). На границе металл — полупроводник вследствие диффузии возникает контактный запирающий слой с напряженностью E_k . При появлении светового потока Φ , проникающего в полупроводник, увеличивается концентрация свободных зарядов обоих знаков — электронов и дырок. Электроны свободно диффундируют через контакт, а для дырок он действительно является запирающим слоем. В результате при освещении электроны накапливаются на подложке, а дырки — в полупроводнике. Между контактами A и K возникает разность потенциалов — фото-э. д. с., пропорциональная освещенности полупроводника. Отсюда применение такого фотоэлемента в качестве фотозкснометра — прибора для определения экспозиции при *фото*- и киносъемке. В этом случае между контактами A и K включают гальванометр, проградуированный в единицах освещенности, а экспозометр обращают полупроводником в сторону объекта съемки. Применяются такие фотоэлементы и в качестве источников тока.

§ 6.6. Эффект Комптона

При фотоэффекте электрон вещества получает энергию, достаточную для эмиссии или генерации.

Предположим теперь, что электрон вне вещества взаимодействует с фотоном и поглощает всю его энергию. Даже если до взаимодействия электрон покоился, он получит скорость v , причем по законам сохранения энергии и импульса

$$h\nu = mv^2/2, \quad (22) \quad h\nu/c = \frac{2mv}{2} = mv. \quad (23)$$

Из этих уравнений следует: $mv^2/2 = mc^2$, $v/2 = c$ или $v = 2c$, что невозможно по теории относительности (см. приложение 3).

Значит уравнения (22) и (23) не могут выполняться совместно, электрон вне вещества не может получить всю энергию фотона.

При взаимодействии фотона с электроном вне вещества может произойти только процесс рассеяния, в результате которого появится новый фотон, летящий под углом φ к направлению движения первоначального фотона (рис. 442,

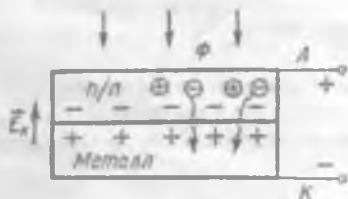


Рис. 441

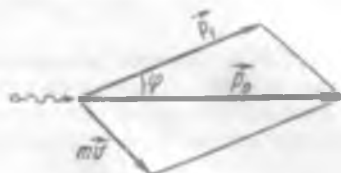


Рис. 442

модуль импульса старого фотона $p_0 = hv/c$, нового — $p_1 = hv_1/c$. По законам сохранения и теореме косинусов (3-М):

$$(mc)^2 = (hv/c)^2 + (hv_1/c)^2 - 2(h^2vv_1/c^2) \cos \varphi, \quad (24)$$

$$m_0c^2 + hv = mc^2 + hv_1. \quad (25)$$

Здесь m_0 — масса покоя электрона (практически покоящегося перед взаимодействием); m — его релятивистская масса при движении со скоростью v ; v и v_1 — частоты старого и нового фотонов. Разность энергий этих фотонов $hv - hv_1 = mc^2 - m_0c^2$, откуда

$$hv/c - hv_1/c = mc - m_0c.$$

Возведем это выражение в квадрат: $(hv/c)^2 + (hv_1/c)^2 - 2h^2vv_1/c^2 = (m - m_0)^2c^2$ и почленно вычтем из (24):

$$(mv)^2 - (m - m_0)^2c^2 = 2h^2/c^2 vv_1 (1 - \cos \varphi). \quad (26)$$

Преобразуем левую часть уравнения (26):

$$\begin{aligned} m^2v^2 - (m - m_0)^2c^2 &\stackrel{16-11}{=} \frac{m_0^2v^2}{1-\beta^2} - \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 \right)^2 c^2 = \\ &= \frac{m_0^2v^2}{(1-\beta^2)c^2} - \frac{m_0^2c^2}{1-\beta^2} (1 - \sqrt{1-\beta^2})^2 = \\ &= \frac{m_0^2c^2}{1-\beta^2} (\beta^2 - 1 + 2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2) = \\ &= 2m_0^2c^2 \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} - \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} \right) = 2m_0^2c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

Тогда

$$2m_0^2c^2 (1/\sqrt{1-\beta^2} - 1) \stackrel{20}{=} 2h^2/c^2 vv_1 (1 - \cos \varphi). \quad (27)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} hv - hv_1 &\stackrel{21}{=} mc^2 - m_0c^2 \stackrel{16-11}{=} m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2} - m_0c^2 = \\ &= m_0c^2 (1/\sqrt{1-\beta^2} - 1). \end{aligned}$$

Подставим выражение в скобках в формулу (27): $m_0 c^2 h (v - v_1) / (m_0 c^2) = h^2 / c^2 v v_1 (1 - \cos \varphi)$, откуда $(v - v_1) / (v v_1) = h / (m_0 c^2) (1 - \cos \varphi)$.

В этом выражении удобно частоты заменить длинами волн:

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v} = \frac{374 \cdot 10^9}{c} \frac{\lambda_1}{c} - \frac{\lambda}{c} = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \varphi). \quad (28)$$

Разность длин волн рассеянного и падающего излучений связана с углом рассеяния формулой

$$\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi). \quad (29)$$

В 1925 г. А. Комптон экспериментально подтвердил эту формулу.

Итак, эффект Комптона состоит в рассеянии фотонов свободными электронами, причем длина волны рассеянного излучения увеличивается по мере роста угла рассеяния в соответствии с формулой (29).

§ 6.7. Квантовые действия света

В технике широко используются фотоэлементы. Один из вакуумных фотоэлементов изображен на рис. 443. Свет попадает на вогнутый фотокатод, вылетающие из него фотоэлектроны движутся к аноду, замыкая цепь. При выключении светового луча цепь размыкается, срабатывает некоторое специальное устройство. Таким устройством может быть звонок при охране каких-либо объектов (при этом луч может быть невидимым) или захваты турникета в метро. Такие турникеты могут сохраниться и после отмены платы за проезд — они будут, например, считать пассажиров.

Многие тела становятся источниками света в процессе их облучения. Это *люминесценция* — излучение без нагревания (по определению С. И. Вавилова). Она бывает двух видов: свечение при освещении — *флуоресценция* и после освещения — *фосфоресценция* (заметим, что последнее понятие не относится к самому фосфору, который светится из-за окисления, т. е. медленного «горения»). Все такие свечения подчиняются правилу Стокса: *излучение при люминесценции имеет частоту, меньшую или равную частоте облучения*. Это правило выражает закон сохранения энергии при люминесценции: поглотив квант $h\nu_1$, атом может испустить либо такой же, либо меньший квант: $h\nu_2 \leq h\nu_1$.

Флуоресценция используется в лампах дневного света. Такая лампа представляет собой газоразрядную трубку, в которой появляется много фотонов ультрафиолетовых частот (иногда в газ специально добавляют пары ртути). Из стеклянной трубки ультрафиолетовые лучи практически не выходят. Внутренняя поверхность трубки покрыта люминофором — веществом, которое светится под воздействием в данном случае ультрафиолетового излучения. Состав люминофора подбирается так, чтобы поглотив фотоны ультрафиолетового света, в соответствии с правилом Стокса он испускал бы лучи видимого спектра, близкого к солнечному. Последнее пока удастся плохо, но экономичность таких ламп в несколько раз выше, чем ламп накаливания.

Свет производит фотохимическое действие при фотографировании (мы его описывали; скрытое изображение состоит из молекул бромистого серебра, поглотивших по одному фотону); такое же действие свет оказывает

на окончания зрительных нервов; очень важное фотохимическое действие свет производит в зеленом листе; подобные реакции синтеза органических веществ еще недоступны химикам.

Наконец, достаточно просто объясняется с квантовой точки зрения давление света. Пусть на поверхность ΔS (рис. 444) падает по нормали свет. Построим над этой поверхностью элементарный цилиндр с образующей $c dt$, где c — скорость света, иначе, скорость фотонов. За время dt на поверхность ΔS упадут все фотоны, которые в начале этого промежутка времени находились в элементарном цилиндре. Обозначим их число dN . Пусть

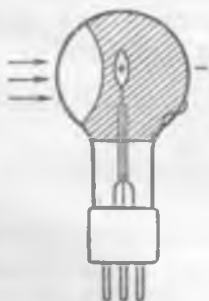


Рис. 443

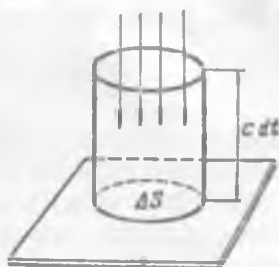


Рис. 444

поверхность ΔS — абсолютно черная, т. е. поглощает все фотоны, упавшие на нее. Тогда за время dt она получит импульс $mc dN$. По второму закону Ньютона, изменение импульса тела за единицу времени равно сумме сил, действующих на него:

$$\sum_{i=1}^n F_i \stackrel{64-1}{=} \frac{d(mv)}{dt}$$

В нашем случае

$$F = \frac{mc dN}{dt},$$

где F — сила, с которой свет действует на поверхность ΔS (сила давления). Давление света на абсолютно черную поверхность

$$p_1 \stackrel{64-1}{=} \frac{F}{\Delta S} = \frac{mc dN}{\Delta S dt},$$

т. е. численно равно импульсу, переданному единице поверхности за единицу времени (dN/dt — количество фотонов, упавших на ΔS за единицу времени). Умножим на c числитель и знаменатель правой части последнего выражения:

$$p_1 = \frac{mc^2 dN}{\Delta S c dt} = mc^2 n_0,$$

где $n_0 = dN/(\Delta S c dt)$ — концентрация фотонов падающего света вблизи поверхности.

Мы получили, что давление света равно $p_c = \frac{20}{3} \epsilon_0 = w$ — объемной плотности энергии около поверхности. Эта формула справедлива для давления на любую поверхность. Например, в случае *абсолютного зеркала* такая же формула приводит к вдвое большему давлению:

$$p, \frac{641}{\Delta S} \frac{F}{\Delta S} \frac{2mc}{\Delta S} \frac{dN}{dt} = \frac{2mc^2}{\Delta S c} \frac{dN}{dt} = 2mc^2 n_0 \frac{20\pi}{\Delta S} \epsilon n_0 = w,$$

где $n'_0 = 2n_0$ — концентрация всех фотонов около поверхности; $dN/(\Delta S c dt) = n_0$ — концентрация падающих фотонов. [Напомним, что у зеркальной поверхности изменение импульса одного фотона равно $mc - (-mc) = 2mc$.] Значит, при одинаковом облучении

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{w'}{w} = \frac{2mc^2 n_0}{mc^2 n_0} = 2.$$

Именно такую формулу, выведенную из теории Максвелла, использовал Лебедев для измерения давления света.

Итак, по современным квантовым представлениям, свет или любое излучение — поток фотонов, энергия которых $\varepsilon = h\nu$ связана с частотой электромагнитных волн. Свет представляет собой диалектическое единство противоположностей — волновых и корпускулярных свойств. Развитие теорий света очень ярко показывает развитие многих научных представлений по спирали, с некоторыми повторениями, но на качественно новой ступени. Мы как будто вернулись к корпускулярным представлениям, но как далеки свойства фотона от свойств механической корпускулы! «Частица» электромагнитного излучения, имеющая определенную частоту, движущаяся со скоростью света, следовательно, по теории относительности, не имеющая массы покоя, — вот что такое фотон. Так развивались и продолжают развиваться наши представления о свете.

ЗАДАЧИ

Задача V.1. Отражаясь от зеркала гальванометра, луч света попадает на нулевое деление шкалы, расположенной на расстоянии 5 м от него. При измерениях «зайчик» остановился на расстоянии 20 см от нулевого деления (шкала имеет радиус кривизны 5 м). На какой угол повернулось зеркало?

$$\frac{L = 5 \text{ м};}{l = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}.}$$



$$\begin{aligned}\alpha_1 &\stackrel{!}{=} \beta_1; \\ \alpha_2 &\stackrel{!}{=} \beta_2.\end{aligned}$$

Решение. Угол между падающим на зеркало лучом и лучом, отраженным на шкалу, равен $2\alpha_1$ или $2\alpha_2$. Угол между отраженными на шкалу лучами $2\alpha_2$ —

$-2\alpha_1 \approx l/L$. Следовательно,

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{l}{2L} = \frac{0,2 \text{ м}}{2 \cdot 5 \text{ м}} = 0,02 \text{ рад.}$$

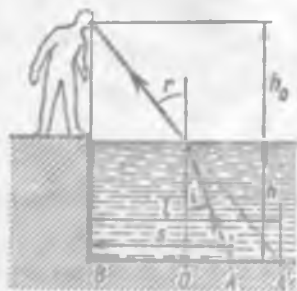
Задача V.2. На каком расстоянии от берега бассейна лежит на дне камешек, если человек, уровень глаз которого на 2 м выше уровня воды, видит его на расстоянии 60 см от берега? Глубина воды в бассейне 0,5 м.

$$h_0 = 2 \text{ м};$$

$$l = 60 \text{ см} = 0,6 \text{ м};$$

$$h = 0,5 \text{ м.}$$

$$s = ?$$



$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n}$$

Решение. Из соответствующих треугольников

$$\operatorname{tg} r = l/(h + h_0); \operatorname{tg} i = |AO|/h; \operatorname{tg} r = |BO|/h_0;$$

$$s = |BO| + |OA| = h_0 \operatorname{tg} r + h \operatorname{tg} i = h_0 l / (h + h_0) + h \operatorname{tg} i.$$

Можно найти $\operatorname{tg} i$ по синусу этого угла: $\operatorname{tg} i = \operatorname{tg} \arcsin i$. Но проще сосчитать $\sin i$, угол i и $\operatorname{tg} i$ отдельно:

$$\sin i = \frac{\sin r}{n} = \frac{l}{n \sqrt{(h + h_0)^2 + l^2}} = \frac{0,6 \text{ м}}{1,33 \sqrt{(2,5 \text{ м})^2 + (0,6 \text{ м})^2}} = 0,171;$$

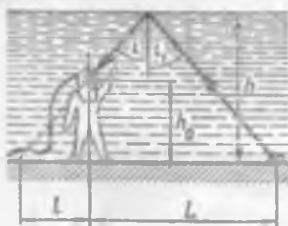
$$i = 10,1^\circ; \operatorname{tg} i = 0,1775. \text{ Следовательно, } s = 2 \text{ м} \cdot \frac{0,6 \text{ м}}{2,5 \text{ м}} + 0,5 \text{ м} \cdot 0,1775 = 0,57 \text{ м.}$$

Задача V.3. Водолаз, стоящий на дне реки, видит отражение от поверхности воды ближайшего предмета, лежащего на дне, на расстоянии 9,4 м. Определить глубину реки, если расстояние от дна до глаз водолаза 1,75 м.

$$h_0 = 1,75 \text{ м};$$

$$L = 9,4 \text{ м.}$$

$$h = ?$$



$$i \stackrel{!}{=} i_1.$$

Решение. Как видно из рисунка, $\operatorname{tg} i = (l + L)/(2h)$; $\operatorname{tg} i = l/h_0$, следовательно,

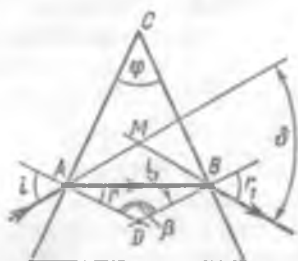
$$h = (l + L)/(2 \operatorname{tg} i) = (h_0 \operatorname{tg} i + L)/(2 \operatorname{tg} i) = h_0/2 + L/(2 \operatorname{tg} i).$$

Угол i предельный: $\sin i = 1/n = 1/1,33 = 0,752$; находим $i = 48^\circ 40'$ и $\operatorname{tg} i = 1,14$, значит,

$$h = \frac{1,75 \text{ м}}{2} + \frac{9,4 \text{ м}}{2 \cdot 1,14} = 5,0 \text{ м.}$$

Задача V.4. Луч света внутри трехгранной стеклянной призмы с преломляющим углом 60° и показателем преломления 1,7 идет параллельно основанию. Найти угол отклонения луча.

$$\begin{aligned} \varphi &= 60^\circ; \\ n &= 1,7. \\ \delta &= ? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin i / \sin r &= n_{21}; \\ n_{21} &= 1/n_{12}. \end{aligned}$$

Решение. Угол, образованный перпендикулярами к преломляющим граням, равен $\beta = 180^\circ - \varphi = 120^\circ$.

В равнобедренном треугольнике ADB углы при основании r и i_1 в сумме равны $180^\circ - \beta = 60^\circ$; каждый из них $r = i_1 = 30^\circ$. Внешний по отношению к треугольнику AMB угол δ равен сумме двух других углов этого треугольника: $\delta = i - r + r_1 - i_1$. Но $r = i_1$, следовательно, $\delta = i + r_1 - 2r$.

По определению показателя преломления $\sin i / \sin r = n$ и $\sin i_1 / \sin r_1 = 1/n$, откуда $\sin i = n \sin r$ и $\sin r_1 = n \sin i_1 = \sin i$; значит, $i = r_1$.

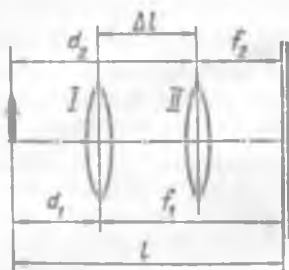
Из $\triangle ADB$

$$r = (180^\circ - 180^\circ + \varphi)/2 = \varphi/2.$$

Тогда $\sin i = n \sin (\varphi/2) = 1,7 \cdot \sin 30^\circ = 0,85$ и $i = 58^\circ$. Искомый угол $\delta = 2(i - r) = 2(58^\circ - 30^\circ) = 56^\circ$.

Задача V.5. Расстояние между предметом и экраном равно 2 м. Собирающая линза помещена так, чтобы на экране было шестикратно увеличенное резкое изображение предмета. На какое расстояние нужно передвинуть линзу (не сдвигая ни экран, ни предмет), чтобы на экране было резкое половинное изображение?

$$\begin{aligned} l &= d + f = 2\text{ м}; \\ k_1 &= 6; \\ k_2 &= 0,5. \\ \Delta l &= ? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{d} + \frac{1}{f} &= \frac{1}{F}; \\ k &= \frac{f}{d}. \end{aligned}$$

Решение. По определению линейного увеличения $k_1 = f_1/d_1$; $k_2 = f_2/d_2$. Из рисунка $k_1 d_1 = l - d_1$; $d_1(k_1 + 1) = l$ и $d_1 = l/(k_1 + 1)$.

Аналогично $d_2 = l/(k_2 + 1)$.

Искомое расстояние

$$\Delta l = d_2 - d_1 = l \left(\frac{1}{k_2 + 1} - \frac{1}{k_1 + 1} \right) = \frac{l(k_1 - k_2)}{(k_1 + 1)(k_2 + 1)} = 2\text{ м} \frac{5,5}{7 \cdot 1,5} = 1,05\text{ м}.$$

Задача V.6. Для определения фокусного расстояния рассеивающей линзы между предметом и экраном, расположенными на расстоянии 1,71 м, помещают исследуемую линзу на расстоянии 20 см от предмета; между рассеивающей линзой и экраном помещают собирающую линзу с фокусным расстоянием 0,3 м. Перемещая эту линзу, добиваются четкого изображения предмета на экране. При этом

расстояние от собирающей линзы до экрана оказывается равным 40 см. Найти фокусное расстояние рассеивающей линзы.

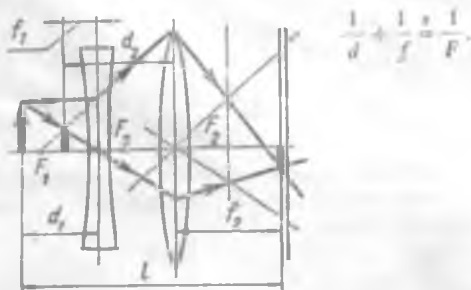
$$l = 1,71 \text{ м};$$

$$d_1 = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м};$$

$$F_2 = 0,3 \text{ м};$$

$$f_2 = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}.$$

$$F_1 = ?$$



Решение. Изображение от первой линзы является предметом для второй:

$$1/F_1 = 1/f_1 - 1/d_1; \quad 1/F_2 = 1/f_2 + 1/d_2.$$

Найдем из второй формулы $d_2 = f_2 F_2 / (f_2 - F_2)$, из рисунка $f_1 = d_2 - (l - f_2 - d_1)$ и подставим в первую формулу:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{d_1 f_1}{d_1 - f_1} = \frac{d_1 (d_2 - l + f_2 + d_1)}{d_1 - d_2 + l - f_2 - d_1} = \\ &= \frac{d_1 [f_2 F_2 / (f_2 - F_2) - l + f_2 + d_1]}{l - f_2 - f_2 F_2 / (f_2 - F_2)} = \\ &= d_1 \left(\frac{d_1}{l - f_2 - f_2 F_2 / (f_2 - F_2)} - 1 \right) = \\ &= 0,2 \text{ м} \left[\frac{0,2 \text{ м}}{1,71 \text{ м} - 0,4 \text{ м} - 0,3 \text{ м} \cdot 0,4 \text{ м} / 0,1 \text{ м}} - 1 \right] = 0,164 \text{ м}. \end{aligned}$$

Задача V.7. От источника света, представляющего собой круглое отверстие диаметром 6 см, прикрытое матовым стеклом, световой поток равномерно распределяется по экрану. На расстоянии 3 м от источника помещают собирающую линзу радиусом 15 см с фокусным расстоянием 1 м, так что на экране возникает резкое изображение источника. Во сколько раз изменится освещенность экрана?

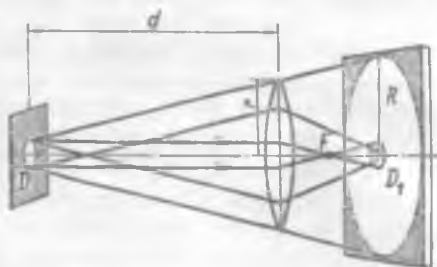
$$D = 6 \text{ см} = 0,06 \text{ м};$$

$$d = 3 \text{ м};$$

$$r = 15 \text{ см} = 0,15 \text{ м};$$

$$F = 1 \text{ м}.$$

$$E_2/E_1 = ?$$



$$1/d + 1/f = 1/F,$$

$$E = \Phi/S;$$

$$k = f/d.$$

Решение. Световой поток Φ , падающий на поверхность круга радиусом R , линза сводит в изображение источника диаметром D_1 . Освещенности $E_1 = \Phi/(\pi R^2)$; $E_2 = 4\Phi/(\pi D_1^2)$; $k = D_1/D = f/d$; отсюда $D_1 = Df/d$. По формуле линзы $f = dF/(d - F)$ значит,

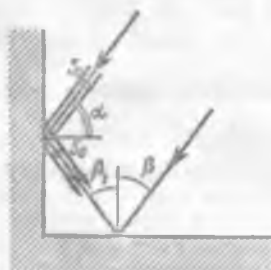
$$D_1 = DdF/[(d - F)d] = DF/(d - F).$$

Из подобия треугольников $R/r = (d + f)/d = 1 + F/(d - F) = d/(d - F)$; $R = rd/(d - F)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{E_2}{E_1} &= \frac{4\Phi\pi R^2}{\pi D_1^2 \Phi} = \frac{4r^2 d^2 (d - F)^2}{(d - F)^2 D^2 F^2} = \frac{4r^2 d^2}{D^2 F^2} = \\ &= \frac{4 \cdot 0,15^2 \text{ м}^2 \cdot 3^2 \text{ м}^2}{0,06^2 \text{ м}^2 \cdot 1^2 \text{ м}^2} = 225.\end{aligned}$$

Задача V.8. Вертикальная стена с коэффициентом отражения* 0,6 освещается солнечными лучами под углом 60° . Освещенность стены 60 лк. Найти освещенность земли вблизи стены.

$$\begin{aligned}k &= 0,6; \\ \alpha &= 60^\circ; \\ E_{\text{ст}} &= 60 \text{ лк.} \\ E &= ?\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}E &\stackrel{12}{=} \Phi/S_1 \\ E &\stackrel{14}{=} E_0 \cos i.\end{aligned}$$

Решение. Суммарная освещенность $E = E_1 + E_2$, где E_1 — освещенность лучами, отраженными от стены; E_2 — освещенность земли прямыми солнечными лучами; $E_{\text{ст}} = E_0 \cos \alpha$, где $E_0 = \Phi_0/S_0$, а S_0 — площадь некоторого нормального сечения падающего светового потока Φ_0 . Этот световой поток падает на часть стены, так что $E_{\text{ст}} = \Phi_0 S_0 / \cos \alpha$. Отраженный от стены поток, по условию, имеет такое же сечение S_0 и равен $\Phi = k\Phi_0$. На земле он создает освещенность

$$E_1 = k\Phi_0 \cos \beta_1 / S_0 = kE_0 \cos \beta_1 = kE_{\text{ст}} \cos \beta_1 / \cos \alpha.$$

Освещенность прямыми лучами

$$E_2 = E_0 \cos \beta = E_{\text{ст}} \cos \beta / \cos \alpha.$$

Следовательно, суммарная освещенность

$$\begin{aligned}E &= k \frac{E_{\text{ст}}}{\cos \alpha} \cos \beta_1 + \frac{E_{\text{ст}}}{\cos \alpha} \cos \beta = \frac{E_{\text{ст}}}{\cos \alpha} \sin \alpha (1 + k) = \\ &= E_{\text{ст}} \operatorname{tg} \alpha (1 + k) = 60 \text{ лк} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ (1 + 0,6) = 166 \text{ лк.}\end{aligned}$$

* Коэффициент отражения — число, показывающее, какая часть упавшей энергии отражается: $k = \Phi/\Phi_0$. На самом деле отраженный световой поток Φ рассеивается. Мы, сделав небольшую ошибку, будем считать рассеяние отсутствующим.

РАЗДЕЛ VI

АТОМНАЯ ФИЗИКА

ГЛАВА I

АТОМ

§ 1.1. Радиоактивность

Слово атом означает «неделимый». Именно «кирпичами мироздания» считали атомы древнегреческие атомисты, примерно так же представлял атомы Дальтон. Но в конце XIX в. рушились многие абсолютные представления, разрушилось и это. Французский физик Анри Беккерель в 1896 г. занимался люминесценцией. Он знал об открытии в 1895 г. Рентгеном X-лучей, как их тогда называли. Знал он также о свечении стекла рентгеновской трубки, имеющем люминесцентный характер (стекло светилось под ударами электронов, как в катодной трубке). Беккерелю пришла в голову мысль: не сопровождается ли всякая люминесценция рентгеновскими лучами? Для проверки своей догадки он случайно взял одну из солей урана, фосфоресцирующего желто-зеленым светом. Осветив ее солнечным светом, он завернул соль в черную бумагу и положил в темном шкафу на фотопластинку, тоже завернутую в черную бумагу. Через некоторое время, проявив пластинку, Беккерель действительно увидел изображение куска соли. Но люминесцентное излучение не могло пройти через черную бумагу, и только рентгеновские лучи могли в этих условиях засветить пластинку. Беккерель повторил опыт несколько раз и с одинаковым успехом. В конце февраля 1896 г. на заседании Французской Академии наук он сделал сообщение о рентгеновском излучении фосфоресцирующих веществ.

Но в один из пасмурных дней, когда опыты в лаборатории Беккереля не производились, была случайно проявлена пластинка, на которой лежала не облученная Солнцем урановая соль. Она, естественно, не фосфоресцировала, но отпечаток на пластинке получился!

Теперь Беккерель ставит обратную задачу. Он берет несветящуюся соль урана, не выносит ее на свет, а ставит на пластинку, завернутую в черную бумагу. Отпечаток появляется! Одну за другой Беккерель испытывает разные соли урана (в том числе годами лежащие в темноте). Пластинка неизменно засвечивается. Поместив между солью и пластинкой металлический крестик, Беккерель получил слабые контуры крестика на пластинке. Теперь ясно, что открыты новые лучи, не являющиеся рентгеновскими. Они обладают большей проникающей способностью, чем рентгеновские, хотя, как последние, не отражаются и не преломляются, а проходят насквозь через самые разнообразные вещества. Интенсивность беккерелевых (так их стали называть) лучей не изменялась при изменении температуры, освещения, давления; не менялась она и с течением времени.

Своим открытием Беккерель делится с друзьями Пьером Кюри и Марией Кюри-Склодовской. Те заинтересовываются и начинают изучать радиоак-

тивные* вещества. Они устанавливают, что свойством естественной радиоактивности обладают все соединения урана и в наибольшей степени сам уран. Беккерель же возвращается к интересующим его люминофорам. Правда, ему суждено сделать еще одно крупное открытие в атомной физике. Как-то для публичной лекции Беккерелю понадобилось радиоактивное вещество, он взял его у супругов Кюри, и пробирку положил в жилетный карман. Прочтя лекцию, он вернул владельцам радиоактивный препарат, а на следующий день обнаружил на теле под жилетным карманом покраснение кожи в форме пробирки. Беккерель рассказывает об этом Пьеру Кюри, тот ставит на себе опыт: в течение десяти часов носит привязанную к предплечью пробирку с радием. Через несколько дней у него тоже наблюдается покраснение, перешедшее затем в тяжелейшую язву, от которой он страдал в течение двух месяцев. Так впервые было открыто биологическое действие радиоактивности.

Но и после этого супруги Кюри мужественно делали свое дело. Достаточно сказать, что Мария Кюри умерла от лучевой болезни, к тому же был приговорен и Пьер Кюри.

В 1955 г. были обследованы записные книжки Марии Кюри. Они до сих пор излучают благодаря радиоактивному загрязнению, внесенному при их заполнении. На одном из листков сохранился радиоактивный отпечаток пальца Пьера Кюри. Добавим, что в настоящее время лучевая терапия успешно применяется, например, против некоторых видов рака.

Исследуя различные соединения урана, супруги Кюри обнаружили большую, чем у урана, радиоактивность. Но уже было установлено, что в соединениях урана излучают именно его атомы, поэтому сильнее всего излучал сам уран. Следовательно, в данном соединении кроме урана есть другой радиоактивный элемент, радиоактивность которого выше урановой. И началась исполинская работа, которую В. В. Маяковский использовал для сравнения: «поэзия — та же добыча радия: в грамм добыча, в год — труды». В результате четырехлетней работы были открыты два новых радиоактивных элемента, которые были названы радием Ra и полонием Po.

За исследования в области радиоактивности супруги Кюри и Беккерель получили Нобелевскую премию.

Вскоре многие физики начали исследование естественной радиоактивности. С удивлением они убедились, что никакими внешними воздействиями — изменением давления и температуры, магнитными и электрическими полями и т. п. — не удастся изменить интенсивность излучения.

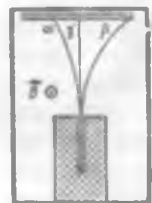


Рис. 445

Зато само излучение в магнитном поле разделилось на три части (рис. 445): α-, β- и γ-излучения. Как всегда в подобных случаях, по отклонениям в магнитном и электрическом полях определили заряд и массу частиц, составляющих лучи. Оказалось, что α-частицы — дважды ионизированные атомы гелия; β-частицы — достаточно быстрые электроны; γ-лучи — жесткое электромагнитное излучение, замыкающее шкалу электромагнитных волн.

* radio (лат.) — излучаю, activus — деятельный. Радиоактивность — свойство некоторых элементов испускать определенные лучи в результате ядерных превращений.

В 1902 г. Резерфорд и Содди предположили, что радиоактивность связана с превращениями атомов радиоактивного вещества в другие атомы. Естественно радиоактивные вещества непрерывно в течение тысячелетий излучают небольшие количества энергии, практически не изменяясь. П. Кюри и Лабрид в 1903 г. экспериментально обнаружили, что 1 г радия выделяет около 80 кал/ч. Так впервые перед человечеством открылся источник энергии, несравнимо больший, чем все прежние.

§ 1.2. Закон радиоактивного распада

В 1905 г. фон Швейдлер пришел к выводу, что число атомов, распадающихся за единицу времени, пропорционально числу имеющихся в данный момент атомов N ($-dN$ — убыль атомов за время dt , иначе, уменьшение количества атомов N за это время; dN/dt — активность радиоактивного препарата):

$$-\frac{dN}{dt} \sim N \text{ или } -\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

где коэффициент пропорциональности λ — *постоянная радиоактивного распада*. Эта величина численно равна относительному числу распадов за единицу времени:

$$\lambda = -\frac{dN}{N dt}.$$

Значит,

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt, \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt, \ln \frac{N}{N_0} \stackrel{38-M}{=} -\lambda t.$$

Следовательно, $\ln \frac{N}{N_0} = \ln e^{-\lambda t}$ и $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$,

где N_0 — количество нераспавшихся атомов в момент времени $t = 0$.

Так был открыт закон радиоактивного распада: *число нераспавшихся атомов при естественно радиоактивном распаде экспоненциально* уменьшается с течением времени:*

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Разумеется, закон выполняется до тех пор, пока количество нераспавшихся атомов можно считать статистически большим, так как распад того или иного атома наступает по вероятностным законам.

Часто характеризуют распад не постоянной λ , а временем распада половины наличных атомов — *периодом полураспада* $T_{1/2}$. По определению,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

* экспонере (лат.) — показывать. Экспоненциальная — показательная.

Отсюда

$$e^{\lambda T_{1/2}} = 2; \lambda T_{1/2} = \ln 2; T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$$

Закон радиоактивного распада можно написать иначе:

$$N = N_0 e^{-\ln 2 (t/T_{1/2})} = N_0 (e^{\ln 2})^{-t/T_{1/2}} = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}$$

Условимся обозначать ядра атомов символами соответствующих химических элементов, причем слева внизу будем указывать порядковый номер элемента в таблице Менделеева, равный заряду ядра, а слева вверху — массовое число или округленный атомный вес, равный количеству частиц (нуклонов) в ядре. Тогда, например, α -частица может быть записана в виде ${}^4_2\alpha = {}^4_2\text{He}$; электрон ${}^0_{-1}\beta = {}^0_{-1}e$ и т. д.

Бывают радиоактивные вещества с самыми различными периодами полураспада. Приведем несколько периодов полураспада долгоживущих и короткоживущих радиоактивных ядер:

$$2 \cdot 10^{14} \text{ лет } ({}^{209}_{83}\text{Bi}), 1590 \text{ лет } ({}^{226}_{88}\text{Ra}), 5 \cdot 10^9 \text{ лет } ({}^{238}_{92}\text{U}),$$

$$3,82 \text{ сут } ({}^{222}_{86}\text{Rn}), 1 \text{ ч } ({}^{212}_{83}\text{Bi}), 3 \cdot 10^{-7} \text{ с } ({}^{214}_{84}\text{Po}),$$

$$2,4 \cdot 10^{-21} \text{ с } ({}^5_2\text{He}).$$

§ 1.3. Некоторые методы регистрации излучений

Один из первых методов регистрации излучений — метод *сцинтилляций**. Наблюдения производятся в *спинтарископе*** Крукса (рис. 446). Это трубка, дно которой покрыто люминофором — веществом, светящимся под ударами α -частиц. Около дна расположена игла, на острие которой



Рис. 446



Рис. 447

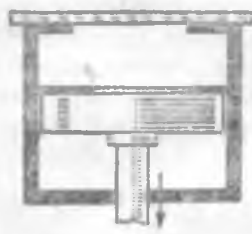


Рис. 448

нанесены ничтожные следы радиоактивного вещества (чем меньше, тем удобнее наблюдать). Сверху смотрят в спинтарископ, лучше в темном помещении. Видны отдельные искорки — вспышки, сцинтилляции, число которых можно сосчитать.

В настоящее время основным счетчиком элементарных частиц является *счетчик Гейгера — Мюллера*. Главная его часть — газоразрядный промежуток между цилиндром и нитью, к которым приложено высокое напряжение, не приводящее, однако, к самостоятельному разряду из-за отсутствия достаточного количества свободных зарядов (рис. 447). Пролет-

* scintillatio (лат.) — сверкание, искрение.

** spinther (греч.) — искра, skopeo — смотрю.

тающая частица на своем пути ионизирует газ, цепочка ионов медленно стекает к катоду и нейтрализуется, а цепочка электронов, разогнанных электрическим полем, создает одностороннюю электронную лавину — искровой разряд, который регистрируется специальным устройством.

Так регистрируется каждая частица, пролетающая через счетчик, если они следуют друг за другом не слишком часто. Счетчики иногда соединяют в группы, которые включают по различным схемам *совпадения*, что позволяет не просто сосчитать число частиц, но и определить, по какому направлению и с какой энергией прилетели зарегистрированные частицы.

Камера Вильсона (рис. 448) — один из наиболее старых и надежных приборов для регистрации частиц, создающих ионы на своем пути. В камере находится насыщенный водяной пар. В момент исследования дно резко опускают, температура скачком падает, пар становится пересыщенным, но еще не конденсируется, так как нет центров конденсации.



Рис. 449



Рис. 450

Если в такую атмосферу пересыщенного пара влетает ионизирующая частица, на пути ее следования образуется цепочка ионов, которые становятся центрами конденсации; конденсируется водяной пар, и образуется туманный след пролетевшей частицы — *трек* (рис. 449). По длине и толщине трека можно судить об энергии частицы, «вилки» (рис. 450) позволяют проследить ее судьбу. Советские физики П. Л. Капица и В. В. Скобелевич предложили накладывать на камеру магнитное поле — тогда можно судить о заряде частицы.

Пузырьковая камера работает аналогично камере Вильсона, только в ней используется перегретая жидкость. Регистрируемая частица создает на своем пути цепочку ионов, которые являются центрами парообразования. Цепочка пузырьков закипевшей жидкости образует трек частицы. Камера заполняется сжатым газом. В такой среде трек короче, чем в газе, удастся проследить частицу даже с большой энергией до ее остановки, что позволяет рассчитать ее важнейшие характеристики. Такие камеры в настоящее время используются для регистрации частиц, полученных на мощных ускорителях.

Метод толстых фотомульсий позволяет после проявления судить об энергии частицы и ее судьбе по фотоследу, оставленному в толстом фоточувствительном слое.

§ 1.4. Строение атома

Первым научным представлением о строении атома была томсоновская модель: «размазанный» положительный заряд, в котором плавают электроны. В 1911 г. английский физик Резерфорд проделал классические опыты по рассеянию α -частиц. Схема опытов показана на рис. 451.



Рис. 451

Альфа-лучи из источника *A* попадали на тонкую золотую фольгу *F*, пройдя которую, рассеивались под различными углами относительно первоначального направления. Рассеянные α -частицы, попадая на флюоресцирующий экран *Z*, вызывали появление сцинтилляций, число которых регистрировалось с помощью микроскопа *M*. Источник излучения вместе с фольгой можно было поворачивать вокруг точки *O*, изменяя углы, под которыми летели регистрируемые α -частицы.

Из опытов Резерфорда следовало, что большинство α -частиц, пролетая через атом, испытывает малые отклонения. Но некоторые частицы рассеиваются под большими углами, как будто они встретили массивную преграду. Такой преградой не могут быть электроны. На основе закона Кулона Резерфорд вывел формулу для количества частиц, рассеянных под определенными углами, которая очень точно подтверждалась экспериментом. Рассеяния на большие углы объяснялись почти центральными столкновениями с массивными центрами рассеяния, размеры которых 10^{-13} см, в то время как диаметр атома имеет порядок 10^{-8} см.

Так Резерфорд пришел к выводу, что почти вся масса атома сосредоточена в его ядре, диаметр которого $\approx 10^{-13}$ см. Представить себе эту величину большинство людей не может. Если бы капельку ртути диаметром 0,64 мм можно было увеличить до размеров земного шара (диаметр 12 800 км) и в том же масштабе увеличить ее атомы и их ядра, то диаметр атома стал бы порядка нескольких метров, а диаметр ядра достиг бы нескольких сотых миллиметра!

Вокруг положительно заряженного ядра почти по круговым орбитам движутся (иначе упали бы!) электроны. Суммарный заряд ядра $+Ze$, где Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева, e — абсолютное значение заряда электрона. Вокруг ядра вихрится Z электронов. В целом атом нейтрален. Электроны движутся вокруг ядра подобно планетам вокруг Солнца, поэтому такая модель атома была названа *планетарной*. Аналогия с солнечной системой оказалась даже более глубокой: электроны имеют собственное вращение (спин* электрона) подобно планетам; ядро в центре атома подобно Солнцу и имеет спин, существует магнитное поле электрона (подобно земному; но вот у Луны, Марса, Венеры заметных магнитных полей нет). Тем не менее эта аналогия является чисто внешней: природа сил, действующих в той и другой системах, совершенно различна, вращение электрона нельзя считать вращением твердого тела. При всей своей убедительности планетарная модель атома оказывается

* to spin (англ. — вращать (см. § 3.2).

внутренне противоречивой. По законам электродинамики, движущийся вокруг ядра электрон должен излучать электромагнитные волны. При этом энергия атома уменьшается и электрон должен упасть на ядро. А на самом деле многие атомы представляют собой устойчивые структуры, существующие десятки тысяч лет без изменения. Никаких электромагнитных излучений атома в определенном состоянии не обнаружено. Больше того, экспериментально обнаружен квантовый характер излучения и поглощения энергии атомами.

Рассмотрим опыт Франка и Герца (1914 г., рис. 452). В эвакуированный сосуд помещены пары ртути. Электроны, испускаемые катодом, разгоняются разностью потенциалов U_1 , приложенной к промежутку катод — сетка, и сталкиваются с атомами ртути. Эти столкновения принципиально могут быть двух видов: упругие, при которых энергия электронов и атомов практически не изменяется, и неупругие, при которых электроны отдают, а атомы получают определенную энергию. Пройдя сетку, электроны попадают в слабое тормозящее поле между сеткой и анодом. При постепенном увеличении напряжения U_1 соответственно увеличивается сила анодного тока. Но при напряжении $U_1 \geq 4,9$ В наблюдается резкое уменьшение силы анодного тока — электроны при неупругих столкновениях с атомами ртути передали им порцию энергии 4,9 эВ, и тормозящее напряжение U_2 их задержало на пути к аноду. Следующее резкое уменьшение силы тока гальванометр показывает при напряжении $U_1 \geq 6,7$ В, затем — при напряжении $U_1 \geq 8,3$ В и т. д.

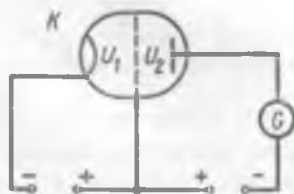


Рис. 452

Опыт, таким образом, показывает, что атомы ртути получают энергии 4,9; 6,7; 8,3 эВ и т. д., но не могут поглотить промежуточные порции энергии. Такое дискретное поглощение (с другими порциями энергии) характерно для всех видов атомов.

Существование планетарной модели атома, дискретность испускания и поглощения энергии объяснил в 1913 г. Н. Бор.

Постулаты Бора:

1. Электрон может двигаться по стационарной орбите, не излучая энергии.

2. Возможен лишь дискретный ряд орбит, по которым электрон может двигаться в стационарном состоянии. Момент импульса электрона квантуется (т. е. принимает дискретный ряд возможных значений):

$$mvr = n\hbar, \quad (2)$$

где $\hbar = h/(2\pi)$; h — постоянная Планка; m — масса электрона; v — его скорость при движении по круговой орбите радиусом r ; n — произвольное целое число.

3. Атом излучает или поглощает энергию квантово при переходе электрона с одной дозволенной орбиты на другую.

Следовательно, существуют дискретные стационарные состояния атома, в которых атом имеет определенные энергии $E_0, E_1, E_2, E_3 \dots$ и не излучает.

При переходе атома из одного стационарного состояния в другое излучается или поглощается фотон, частота и энергия которого соответствует разности энергий этих состояний (рис. 453): $E' - E'' = h\nu$. Например:

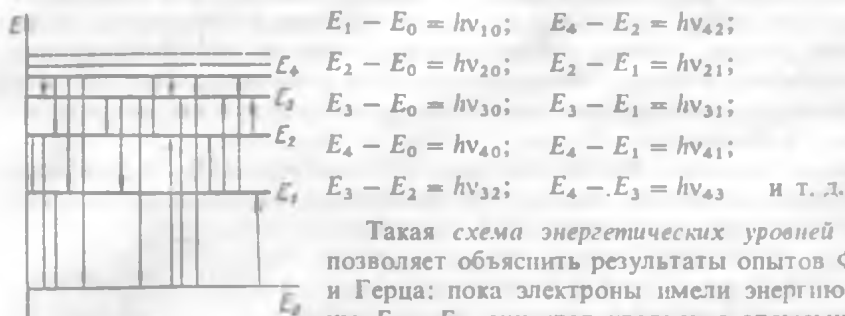


Рис. 453

Такая схема энергетических уровней атома позволяет объяснить результаты опытов Франка и Герца: пока электроны имели энергию меньше $E_1 - E_0$, они сталкивались с атомами упруго, ибо энергии из этого промежутка для атомов ртути запрещены. Получив большую энергию, электроны могут отдать энергию $E_1 - E_0$ атомам при неупругом взаимодействии и перевести эти атомы в первое возбужденное состояние. Аналогично объясняются следующие поглощения энергии. Следовательно, измерив порции поглощенной энергии, мы узнали разности соответствующих энергетических уровней атома.

Именно частоты, соответствующие переходам с верхних уровней на нижние, излучаются данным видом атомов в линейчатом спектре испускания. Такие же частоты будут наблюдаться в спектре поглощения в соответствии с законом Кирхгофа. Теперь понятно, почему атомы разных элементов имеют различные линейчатые спектры испускания и спектры поглощения: у них разные схемы энергетических уровней, различные энергетические расстояния между соседними уровнями.

Энергия электрона в водородоподобном атоме (ядро и один электрон)

$$E = T + W = \frac{mv^2}{2} - e\phi = \frac{mv^2}{2} - \frac{eZe}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Здесь потенциал $\phi = Ze/(4\pi\epsilon_0 r)$. Отрицательность потенциальной энергии связана с тем, что за нуль принята энергия системы атом — электрон для электрона, покинувшего атом, т. е. бесконечно удаленного. Ясно, что энергия для электрона, расположенного ближе бесконечности (к ядру), меньше и, значит, отрицательна.

При движении электрона в центральном поле ядра действующая на него кулоновская сила сообщает ему центростремительное ускорение:

$$\frac{eZe}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (3)$$

Отсюда

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = mv^2; \quad E = \frac{mv^2}{2} - mv^2 = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Из второго постулата $mvr = n\hbar$. С другой стороны, $mv^2 r = Ze^2/(4\pi\epsilon_0)$. Разделив эти уравнения почленно, получим

$$v = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}$$

Радиусы дозволенных электронных орбит:

$$r = \frac{n h}{m v} = \frac{4 \pi \epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m e^2 Z} = r_1 \frac{n^2}{Z},$$

где $r_1 = h^2 4 \pi \epsilon_0 / (m e^2)$ — радиус наименьшей круговой орбиты в атоме водорода — первый боровский радиус.

Энергия атома

$$E = -\frac{Z e^2}{8 \pi \epsilon_0 r} = -\frac{Z^2 e^4 m}{2 (4 \pi \epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{h Z^2 R_0}{n^2},$$

где $R_0 = e^4 m / (8 \epsilon_0^2 h^3)$ — постоянная Ридберга; n — главное квантовое число*.

Спектральный переход между любыми двумя уровнями энергии связан с испусканием (или поглощением) фотона, причем

$$E_2 - E_1 = h \nu.$$

Его частота

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} = -\frac{R_0 Z^2}{n_2^2} + \frac{R_0 Z^2}{n_1^2} = R_0 Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

На опыте, действительно, все спектральные линии водородоподобных атомов имеют частоты, согласующиеся с этой формулой.

Не надо думать, что все возможные спектральные переходы наблюдаются в виде спектральных линий: некоторые из них маловероятны и имеют настолько малую интенсивность, что незаметны.

Что изменится в нашей схеме, если будет увеличиваться число электронов атома? Возрастет число возможных энергетических состояний атома, богаче станет его спектр. Количественный расчет спектральных переходов в этом случае наталкивается на непреодоленные до сих пор математические трудности.

Оптические частоты связаны с переходами валентных, периферийных электронов.

Представим себе, что в многоэлектронный тяжелый атом каким-то образом попал электрон большой энергии, пролетающий вблизи ядра (рис. 454; на схеме показаны не возможные орбиты движения электронов, а электронные слои).



Рис. 454

Он может выбить один из электронов глубинного слоя. Ион с вакантным местом в глубинном электронном слое энергетически невыгоден и долго существовать не будет. На место выбитого электрона придет какой-то другой электрон данного атома. Такая замена может произойти так: на место ушедшего электрона приходит электрон из соседнего слоя,

* Число, принимающее ряд последовательных целых значений, с помощью которого описывают дозволенные дискретные значения энергии атома. Говорят: энергия квантуется главным квантовым числом.

на его место — электрон из соседнего с ним слоя и т. д. (переходы 1). Каждый из таких переходов сопровождается соответствующим выделением энергии в виде фотона частоты, близкой к видимым. Такие почти одновременно выделяющиеся фотоны действительно наблюдаются. Но возможен и другой вариант замещения вакантного места, когда на него переходит один из далеких периферийных электронов (рис. 454, 2). При этом энергия атома сразу весьма значительно изменяется, испускается один фотон, но гораздо большей энергии. Это *рентгеновское* излучение. Теперь должно быть понятно, зачем разгоняются до больших скоростей электроны в рентгеновской трубке (см. рис. 432), почему антикатод в ней сделан из тяжелого элемента с большим порядковым номером по таблице Менделеева.

Существование полосатых молекулярных спектров объясняется сильным взаимодействием атомов в молекуле, при котором сдвигаются энергетические уровни. Еще сильнее взаимодействие атомов в твердом теле или жидкости, поэтому в спектре испускания таких тел встречаются всевозможные частоты, он состоит из линий, непрерывно переходящих друг в друга, — это сплошной спектр.

ГЛАВА 2

ЯДРО АТОМА

§ 2.1. Превращения элементов

Независимость радиоактивности от внешних условий объясняется тем, что это ядерный процесс.

При радиоактивном распаде ядро атома одного элемента может превратиться в ядро атома другого элемента. Место данного элемента в таблице Менделеева определяется его порядковым номером Z , который равен суммарному положительному заряду ядра (в единицах заряда, равных абсолютному значению заряда электрона) и числу электронов, движущихся вокруг этого ядра. Массовое число показывает количество протонов (p) и нейтронов (n) в ядре атома данного элемента. Протон и нейтрон представляют собой две модификации одной частицы, входящей в состав ядра и потому называемой *нуклоном**. Протоны и нейтроны связаны в ядре очень большими силами, имеющими негравитационный и незлектрический характер, так как они сильнее даже электрических (у нас уже был случай сравнить гравитационные и электрические силы), но гораздо быстрее последних убывают с увеличением расстояния. Эти *ядерные силы* делают ядро чрезвычайно устойчивым.

Испуская α -, β -частицы и γ -лучи, ядра атомов преобразуются в другие ядра по закону радиоактивного смещения: испуская α -частицу, атом сдвигается на две клетки периодической таблицы Менделеева влево; испуская отрицательную β -частицу — на одну клетку вправо. Превращаясь

* nucleus (лат.) — ядро.

друг в друга, радиоактивные элементы образуют ряды. В одной клетке может оказаться несколько изотопов*. Тогда атомная масса элемента будет представлять собой среднее значение атомных масс его изотопов с учетом их концентрации.

Ядра атомов могут взаимодействовать с другими ядрами или элементарными частицами. Эти взаимодействия, приводящие к образованию новых ядер, называют ядерными реакциями. При таких реакциях выполняются различные законы сохранения:

1) закон сохранения электрического заряда: суммарный электрический заряд при ядерной реакции не изменяется;

2) закон сохранения числа нуклонов (в реакциях без античастиц): суммарное число всех нуклонов при ядерной реакции не изменяется;

3) закон сохранения энергии: полная энергия всех продуктов реакции не изменяется;

4) закон сохранения импульса: сумма импульсов всех продуктов реакции не изменяется; и др.

В 1919 г. Резерфорд осуществил реакцию искусственного превращения элементов, воздействуя α -частицами на атомы азота (рис. 455). При облучении азота α -частицами последние захватываются ядром, которое в соот-

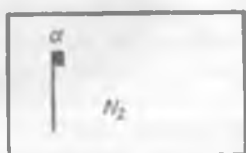


Рис. 455



Рис. 456

ветствии с законом радиоактивного смещения превращается в ядро фтора и тут же распадается на изотоп кислорода и протон:



Результаты реакции не подлежат сомнению, так как присутствие кислорода в баллоне было доказано спектроскопически, а протоны были определены по отклонению в магнитном и электрическом полях.

Другой пример такой реакции — облучение бериллия α -частицами:



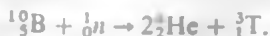
В этой реакции наряду с углеродом получают нейтроны, которые зафиксировать трудно, но если на пути лучей расположить экран, богатый протонами, например из парафина ($\text{C}_{22}\text{H}_{46}$, рис. 456), то фиксируемое излучение увеличивается. Это нейтроны выбивают из парафина протоны, которые вызывают сильное свечение.

Медленные нейтроны чаще вызывают ядерные реакции, так что иногда используются специальные замедлители нейтронов (например, парафин).

* isos (греч.) — равный, topos — место. Изотопы — атомы одного элемента, отличающиеся массовым числом.

Ядерная реакция с медленными нейтронами и бором приводит к появлению лития и гелия: ${}^{10}_5\text{B} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He}$.

Иногда тот же агент приводит к другому результату:



Здесь мы встречаемся с третьим изотопом водорода — тритием.

В результате искусственного превращения элементов могут быть получены искусственно радиоактивные вещества. Искусственную радиоактивность в 1934 г. открыли Ирен и Фредерик Жолио-Кюри, бомбардируя алюминий α -частицами:



Получился радиоактивный фосфор, который самопроизвольно распадается, превращаясь в кремний с периодом полураспада 3 мин:



Возникшая β -частица имеет массу электрона и положительный заряд, по модулю равный заряду электрона, встречается при β -распаде ядер и называется *позитроном*.

Приведем еще одну реакцию захвата нейтрона, в результате которой появляется радиоактивный изотоп серебра, распадающийся с периодом полураспада 2,3 мин на кадмий и электрон:



§ 2.2. Ядерная энергия

Закон сохранения числа нуклонов, сформулированный в предыдущем параграфе, не является законом сохранения массы в упомянутых реакциях, потому что точный подсчет суммы масс исходных и получившихся продуктов обнаруживает некий «дефект» массы — разность масс, за счет которой выделяется соответствующая энергия. Этот «дефект» массы в зависимости от характера реакции может быть положительным или отрицательным.

Так, если достаточно точно подсчитать массу атомного ядра и сумму масс нуклонов, из которых оно состоит, дефект массы будет равен

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M, \quad (4)$$

где Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева, равный числу протонов в ядре; A — массовое число, равное числу нуклонов в ядре; $A - Z$ — число нейтронов, входящих в состав ядра; m_p , m_n и M — массы покоя соответственно протона, нейтрона и ядра данного элемента.

Дефект массы соответствует энергии связи ядра, которая делает ядро устойчивым и выделяется при его разрушении.

Такие реакции экспериментально подтверждают закон взаимосвязи массы и энергии:

$$E \stackrel{\text{Э.П.}}{=} mc^2. \quad (5)$$

Энергия связи ядра $E_{\text{св}} = \Delta mc^2$.

В соответствии с законом взаимосвязи массы и энергии продукты реакции деления атомного ядра* тяжелого элемента получают достаточно большую энергию, если масса осколков меньше массы исходного ядра. Но для использования этой энергии необходимо, чтобы реакция шла автоматически, достаточно быстро и управлялась. Естественно радиоактивные вещества для этого не подходят — естественная реакция идет очень медленно. Некоторые элементы, например торий Th, уран U, распадаются с выделением большой энергии не только самопроизвольно, но и поглощая нейтроны (при одном делении энергия порядка 200 МэВ). Оказалось, что при облучении быстрыми нейтронами все элементы, расположенные в конце таблицы Менделеева, ведут себя приблизительно одинаково, а при облучении медленными нейтронами вероятность захвата и деления ядра урана резко увеличивается.

Н. Бор предположил, что это происходит из-за наличия в уране небольшой примеси (около 0,7%) изотопа урана $^{235}_{92}\text{U}$. Это предположение подтвердилось: при распаде урана-235 кроме осколков реакции освобождается от одного до трех нейтронов, которые могут вызвать следующие реакции. Если уран-235 присутствует в качестве небольшой примеси, то такие взрывы практически ни к чему не приведут, так как появившиеся нейтроны поглощаются ядрами урана-238 и реакция прекратится. Совсем иначе реакция пойдет в обогащенном уране-235.

Имеем кусок почти чистого $^{235}_{92}\text{U}$. Самопроизвольно в нем взрывается одно ядро, выделяя от одного до трех нейтронов. Если этот кусок не слишком мал (больше критической массы), то от одного до трех нейтронов поглотится ядрами «соседей», которые тоже взорвутся (не самопроизвольно и почти сразу), выделив от одного до трех нейтронов каждый. Эти нейтроны тоже поглотятся, вызовут взрывы с соответствующим выделением энергии и нейтронов и т. д. Число нейтронов и, следовательно, количество взрывов будет лавинообразно нарастать, пойдет цепная реакция, в результате которой практически весь кусок урана взорвется, выделяя невиданную ранее энергию: взяв 1 моль урана-235, т. е. 235 г вещества, в случае полного «сгорания» мы получили бы $200 \text{ МэВ} \cdot N_A = 200 \text{ МэВ} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} = 12,04 \times 10^{25} \text{ МэВ/моль} = 12,04 \cdot 10^{31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ КэВ/моль} = 12,04 \cdot 1,6 \times 10^{12} \text{ Дж/моль} = 19,3 \text{ ТДж/моль}$.

Правда, полного «сгорания» принципиально добиться нельзя, но полученная энергия все равно не идет ни в какое сравнение с обычными энергиями, ранее доступными человечеству.

Если масса будет меньше критической, опасности взрыва такой кусок урана-235 не представляет, так как два из возможных трех нейтронов покинут уран, не вызвав соответствующих взрывов. Реакция будет «тлеть», не становясь цепной.

Первое применение, к сожалению, эта реакция нашла в атомной бомбе. Такая бомба состоит из двух кусков урана-235, каждый из которых имеет массу меньше критической. Когда с помощью обычного взрывчатого вещества

* В результате реакции деления тяжелого ядра получаются два осколка — ядра элементов середины таблицы Менделеева и несколько элементарных частиц.

оба куска соединяются, получается масса больше критической, начинается цепная реакция, следует атомный взрыв. Авторы первого такого устройства рассказывали, что экспериментатор отверткой сближал две массы, дожидаясь начала цепной реакции, и затем отверткой же разводил массы, останавливая атомный взрыв.

В конце второй мировой войны, когда уже не было в этом никакой военной необходимости, американцы сбросили одну за другой атомные бомбы на японские города Хиросиму и Нагасаки. Бомбы по 20000 т тротилового эквивалента (сила взрыва такая же, что у 20000 т тротила) вызвали грандиозные разрушения и колоссальное число никому не нужных жертв среди мирного населения. Так родилось самое мощное оружие массового уничтожения. Началась по воле американских милитаристов гонка атомных вооружений. Вспомним, что Пьер Кюри говорил еще в 1903 г. при вручении ему Нобелевской премии: «Нетрудно предвидеть, что в преступных руках радий может сделаться крайне опасным, и вот возникает вопрос, действительно ли полезно для человечества знать секреты природы, действительно ли оно достаточно зрело для того, чтобы их правильно использовать, или это знание принесет ему только вред. Пример сделанного Нобелем открытия является в этом отношении характерным. Мощные взрывчатые вещества позволили людям совершить замечательные деяния, и они же явились страшным средством в руках преступников, толкавших на путь войны».

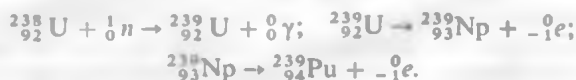
Я принадлежу к числу тех, которые, подобно Нобелю, считают, что все же новые открытия в конечном счете приносят человечеству больше пользы, чем вреда».

Ни одно открытие, сколь бы засекреченным оно ни было, не остается надолго единственным в мире — его повторяют. Так было и с атомной бомбой. Прошло несколько лет — и у нас появилась сначала атомная, затем водородная бомба. Но и после этого партия и правительство нашей страны выступали и выступают за полное запрещение и ликвидацию мировых запасов этого оружия массового уничтожения.

Ядерная энергия должна быть использована только в мирных целях. Наша Родина — страна первой в мире атомной электростанции, первого в мире атомного ледокола, носящего имя основателя нашего государства. Атомный ледокол «Арктика», преодолев льды Ледовитого океана, достиг в активном плавании Северного полюса. Строится серия транспортных кораблей с атомными двигателями.

Чтобы атомная реакция стала управляемой, в реактор погружают на регулируемую глубину кадмиевые стержни, которые очень сильно поглощают медленные нейтроны. Надо ускорить цепную реакцию — стержни приподнимают; реакция приняла угрожающий темп — стержни опускаются. Управление стержнями автоматизировано. Кроме того, в реакторе постоянно находятся вещества, уменьшающие скорость нейтронов, для увеличения вероятности их захвата ядрами. Это замедлители, например графит.

В последнее время стали строить электростанции на быстрых нейтронах, ядерным топливом в которых служит смесь урана-235 и урана-238. Быстрые нейтроны в соответствующем диапазоне скоростей поглощаются ураном-238 и превращают его в трансурановый* элемент плутоний:



* trans (лат.) — через. Трансурановый — элемент за ураном в таблице Менделеева. Такие элементы на Земле не встречались и получаются искусственно. В настоящее время известно 107 элементов, их открытие продолжается.

Получающийся в результате реакции плутоний-239 является ядерным топливом, он даст цепную реакцию, при взрыве выделяя от одного до трех нейтронов, как уран-235. Таким образом, такая тепловая атомная станция помимо электроэнергии вырабатывает атомное горючее в больших количествах, чем потребляет. Конечно, это легче и выгоднее, чем извлекать из природного урана-238 ничтожную примесь его изотопа ^{235}U .

Устройство и работу атомной станции мы описывать не будем, но отметим одно ее преимущество: небольшое по весу и объему количество «горючего» обеспечивает работу в течение целого года. Именно эта особенность атомного реактора делает его незаменимым в глубинных районах страны, далеких от гидроэнергетических и топливных ресурсов, а также на кораблях надводного и подводного флота. Существуют проекты атомных самолетов и ракет.

§ 2.3. Термоядерная энергия

Реакция атомного распада — не единственная реакция, при которой выделяется атомная энергия. Если подсчитать массу исходных и получившихся продуктов в реакции синтеза (соединения) ядер атомов гелия из ядер атомов водорода (дейтерия или трития), то обнаружится дефект массы

$$\Delta m = (4 \cdot 1,008 - 4,004) \text{ а.е.м.} = 0,028 \text{ а.е.м.}$$

Соответствующая энергия выделяется в термоядерной реакции:

$$E = \Delta mc^2 = 0,028 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2 = 2,52 \cdot 10^{12} \text{ Дж/моль} = 2,52 \cdot \text{ТДж/моль}.$$

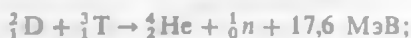
Реакция синтеза называется *термоядерной*, потому что для ее начала исходные положительно заряженные ядра надо очень сильно сблизить, одним из способов такого сближения является нагревание до очень высоких температур — порядка сотен миллионов градусов*. Дальше реакция идет сама, выделяется громадная энергия, температура поддерживается достаточно высокой. Именно такой реакцией объясняются процессы, идущие на звездах, в частности на Солнце. Проблема управляемой термоядерной реакции до сих пор не решена. Для управления необходимо научиться реакцию «зажигать» и «гасить». Для зажигания необходимо поддерживать температуру порядка 100 млн. градусов в течение примерно одной десятой секунды. Кроме того, для управляемой термоядерной реакции существенна проблема устойчивости водородной плазмы, в которой хотят осуществить такую реакцию. Ни одно вещество в качестве сосуда при такой реакции не годится, остается удерживать плазму в магнитной «бутылке», т. е. с помощью магнитного поля соответствующей конфигурации. В такой плазме экспериментально обнаруживаются неустойчивости, которые изменяют ее режим и выводят плазму за границы магнитной «бутылки». Проблема управляемой термоядерной реак-

* Разрабатывается и идея лазерного термоядерного синтеза, при котором условия, необходимые для начала реакции, создаются совместным действием нескольких мощных импульсных лазеров.

ции, которая на сотни лет удовлетворит энергетические нужды человечества, находится в стадии экспериментирования.

Легче оказалась проблема неуправляемой термоядерной реакции — водородного взрыва. Водородные бомбы по своей разрушительной силе не идут ни в какое сравнение даже с атомными бомбами. Тротиловый эквивалент таких бомб измеряется миллионами (иногда сотнями миллионов) тонн.

Приведем несколько термоядерных реакций:



В этих реакциях соединяются ядра легких элементов — дейтерия, трития, лития. Будущее применение термоядерной энергии в мирных целях, по-видимому, связано с такими реакциями.

ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

§ 3.1. Волновые свойства материи

В 1924 г. французский физик де-Бройль пришел к выводу, что электрону или любой другой частице соответствует волна, которая описывает поведение этой частицы. Расчет длины волны де-Бройля дал

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{h}{mv}, \quad (6)$$

где h — постоянная Планка; m и v — соответственно масса и скорость движущейся частицы. Дэвиссон и Джермер в 1927 г. обнаружили на опыте дифракцию электронов. Затем Томсон и другие обнаружили дифракционную картину при прохождении электронов через тонкие металлические и слюдяные пленки. В дальнейшем была получена дифракционная картина при прохождении пучка атомов через кристалл. Во всех этих случаях дифракционная картина была аналогична соответствующей картине в рентгеновских лучах. По дифракционной картине можно определить длину волны, которая совпадает с (6) и полностью подтверждает теорию.

Следовательно, дуализм — диалектическое единство противоположных свойств (корпускулярных и волновых) — присущ не только свету, но всякому виду материи; попадая в различные условия, материальные объекты проявляют свои волновые или корпускулярные свойства. Так, электрон в осциллографической или телевизионной трубке можно рассматривать как частицу, тот же электрон в атоме — типичная волна; корпускулярные представления — орбита, точное расположение в пространстве и т. п. — к электрону в атоме неприменимы. Малые длины волн де-Бройля соответствуют корпускулярным свойствам частиц; большие длины волн, сравнимые с размерами препятствий, — волновым свойствам частиц.

Макс Борн предложил трактовать волны де-Бройля как волны вероятности. Квадрат амплитуды волны де-Бройля представляет собой вероятность нахождения частицы в единице объема вблизи данной точки.

Таким образом, волны де-Бройля имеют статистический смысл.

Наличие электронных волн позволяет конструировать электронно-оптические приборы типа электронного микроскопа. Электронные лучи обладают рядом преимуществ по сравнению с рентгеновскими. Они могут быть гораздо интенсивнее, что при прочих равных условиях резко сокращает время экспозиции. Длину электронных волн легко изменять — для этого достаточно варьировать ускоряющее напряжение (в электронной пушке). Наконец, электронные пучки управляются посредством комбинации электрических и магнитных линз, чего не удастся сделать с рентгеновскими лучами. Кроме того, разрешающая способность* электронных устройств, связанная с длиной электронных волн, значительно больше, чем у оптических приборов. Возможные разрешающие способности электронных приборов далеко еще не достигнуты в технике.

§ 3.2. Характеристики частиц

В разное время в физике различные частицы назывались элементарными. Так, элементарным был атом, когда считался неделимым. Элементарным было атомное ядро и остается пока электрон. Элементарными были протоны и нейтроны, из которых состоит ядро. На заре современной физики, когда рушилось представление о неделимом атоме, философы-идеалисты пришли к выводу: «Материя исчезла!» Им ответил великий диалектик и материалист В. И. Ленин: «Материя исчезает» — это значит, исчезает тот предел, до которого мы знали материю...»** И далее: «Электрон так же неисчерпаем, как атом...»*** И действительно, в физике рассматривается вопрос о строении нуклонов. Только в последние годы возникла физическая идея о строении электрона — мы ищем «кварки», из комбинации которых, по предположению, состоит электрон.

В настоящее время известно свыше двухсот различных элементарных частиц. Управляют ими законы микромира, совершенно не похожие на привычные наши макропредставления, — законы квантовой механики. Одно из наиболее общих свойств элементарных частиц — их превращения друг в друга. Только такими превращениями можно объяснить β -распад, при котором электроны или позитроны вылетают из ядра, в котором их не было! Одна из таких реакций идет по схеме



Здесь n и p , e и ${}^0_0\bar{\nu}$ — обозначения нейтрона и протона, электрона и антинейтрино.

С элементарными частицами возможны реакции превращения, соединения, распада, подчиняющиеся законам сохранения и ряду других закономерностей.

* Разрешающая способность — величина, характеризующая свойство прибора, позволяющее различать подробности изображения предмета.

** Ленин В. И. Поли. собр. соч., т. 18, с. 275.

*** Там же, с. 277.

По мере развития физики элементарных частиц открывались все новые частицы с самыми разнообразными свойствами.

Из теоретических представлений Дирака следовало, что кроме известной частицы — электрона — возможно существование античастицы — позитрона, некоторые свойства которого (в частности, заряд) должны быть противоположны свойствам электрона. Через небольшое время позитрон был экспериментально обнаружен.

Мы знаем о существовании *античастиц*, которые могут быть поставлены в соответствие почти всем известным частицам. Некоторые характеристики частиц и античастиц одинаковы, другие противоположны. Основной особенностью *пары* частица — античастица является свойство исчезать при встрече, *аннигилировать*, целиком превращаясь в другие формы материи (часто в излучение) с соблюдением законов сохранения. Наоборот, при затрате соответствующей энергии пара может возникнуть. Название любой античастицы получается из названия соответствующей частицы добавлением приставки «анти», исключение — позитрон, который является антиэлектроном. В реакциях античастицы обозначают волнистой чертой над символом. Например: $\bar{\nu}$ — нейтрино, $\bar{\nu}$ — антинейтрино.

В § 1.4 мы упоминали *спин электрона*, который первоначально связывали с вращением вокруг его собственной оси. Но оказалось невозможным представление об электроне, как о волчке (его экваториальные области должны были бы двигаться быстрее света). Поэтому современное представление о спине сводится к тому, что это фундаментальная характеристика элементарных частиц, наподобие массы или заряда, которая не может быть представлена через более простые понятия.

Со спином связан собственный момент импульса (отличающийся от орбитального), который тоже квантуется: $L = \hbar s$, где s — спиновое квантовое число. Для электрона оно может принимать значения $s = \pm 1/2$. Другие частицы могут иметь спиновое квантовое число полуцелое, целое или нулевое. У сложной частицы, например, атомного ядра, спиновое квантовое число получается сложением спиновых квантовых чисел входящих в нее частиц.

Чтобы показать методы современной классификации, перечислим некоторые элементарные частицы с указанием их важнейших свойств и характеристик.

1. *Фотоны* представляют собой «частицы» электромагнитного поля (света, γ -излучения и т. п.). Масса покоя равна нулю, спиновое квантовое число равно единице. Не заряжены. Стабильны, т. е. *время жизни* — среднее время существования, после которого частица превращается во что-то другое, — бесконечно велико. Не имеют соответствующих античастиц, иначе являются своими собственными античастицами.

2. *Лептоны**: электрон, позитрон, нейтрино (электронное и мюонное). Это относительно легкие частицы со спиновым квантовым числом $1/2$. Стабильны. Характеризуется *лептонным зарядом*. Так обычно называют лептонное квантовое число, значение которого принято для лептонов $+1$, нелептонов 0 , антилептонов -1 . Такое введение этого числа позволяет сформулировать закон сохранения лептонного заряда: *в реакциях с частицами суммарный лептонный заряд не изменяется*. Именно поэтому при β -распаде в реакции (7) появ-

* lepton (греч.) — мелкий.

яется антинейтрино. Возможна, но реже наблюдается при β -распаде другая реакция:

$${}^1_0p \rightarrow {}^1_1p + {}^0_1\beta + {}^0_0\bar{\nu}. \quad (8)$$

Здесь в соответствии с законом сохранения лептонного заряда появляются позитрон и нейтрино.

3. *Мезоны* *. Нестабильные частицы с промежуточными массами покоя (между массами покоя электрона и протона), с нулевыми спинами; π -мезоны участвуют в обменных ядерных взаимодействиях, связывая нуклоны в ядре.

4. *Барионы* **. протон, нейтрон, гипероны. Тяжелые частицы с массами покоя протона или больше (гипероны), со спиновым квантовым числом $1/2$, являются источниками поля ядерных сил. Протон стабилен, нейтрон имеет время жизни $0,93 \cdot 10^3$ с, гипероны — коротко живущие частицы ($\approx 10^{-10}$ с). Характеризуются барионным зарядом. Так называют барионное квантовое число, значение которого принято для барионов $+1$, небарионов 0 , антибарионов -1 . Такое введение барионного заряда позволяет установить закон сохранения барионного заряда: в реакциях с частицами суммарный барионный заряд не изменяется. Поэтому, например, при возникновении антипротона возникает и протон. Эта реакция при наличии частиц достаточной энергии идет по схеме

$${}^1_0p + {}^1_0p \rightarrow {}^1_0p + {}^1_0p + -1\bar{p} + {}^1_0p.$$

Итак, элементарные частицы имеют характеристики: 1) масса покоя; 2) спин; 3) электрический заряд; 4) время жизни; 5) лептонный заряд; 6) барионный заряд; кроме того, употребляются характеристики, которых мы не определяли: 7) изотопический спин; 8) четность; 9) странность и т. д.

Теперь мы можем строже разделить частицы и античастицы: их массы покоя, спины, времена жизни в вакууме равны; знаки электрического, лептонного, барионного зарядов и направления магнитных моментов противоположны.

В частности, протон и антипротон различаются не только электрическим зарядом, но и барионным зарядом и направлением магнитного момента. Нейтрон и антинейтрон, не имеющие электрического заряда, различаются барионным зарядом и направлением магнитного момента.

Все известные частицы экспериментально обнаружены и исследованы, хотя в наших условиях с античастицами работать чрезвычайно трудно, так как они живут очень короткое время, встречаются с соответствующими частицами и взрываются.

Вообще, исследование элементарных частиц требует колоссальной технической базы: приходится экспериментировать с частицами очень высоких энергий, которые получаются на современных ускорителях большой мощности.

Можно построить атом антиводорода, заставив двигаться позитрон вокруг антипротона. Легко представить себе (хотя и очень трудно их сохранить) антиатомы любых других антиэлементов, где позитроны движутся вокруг ядер, в состав которых входят антипротоны и антинейтроны. Из такого антивещества может состоять целая галактика или группа галактик — звездный остров. В этом случае не ясно, какая из галактик с большим правом называется галактикой, а какая — антигалактикой. Но бесспорен экспериментально установленный закон: если встречается частица со своей античастицей, обе превращаются в два фотона соответствующей частоты, разлетающиеся от места происшествия в разные стороны. Такие превращения были зафиксированы при встрече электрона и позитрона, позднее протона и антипротона. При таком превращении дефект массы достигает

* mesos (греч.) — средний, промежуточный.

** barys (греч.) — тяжелый.

максимума, и по закону взаимосвязи массы и энергии выделяется максимально возможная полная энергия $2mc^2$, где m — масса одной частицы. Таким образом, уже сейчас вырисовывается следующий за овладением управляемой термоядерной реакцией этап развития энергетики. Надо научиться хранить в магнитных «бутылках» (больше не в чем) достаточные запасы антивещества, и практически неограниченный запас энергии всегда будет «под руками». Вблизи тяжелого ядра иногда удастся зафиксировать рождение пары — электрона и позитрона из фотона соответствующей частоты. Таким образом, превращения частиц в поле и поля в частицы взаимны.

Разрабатывается и получает всеобщее признание теория элементарных частиц — *кварковая хромодинамика*. По этой теории все частицы предполагаются состоящими из *кварков*^{*}, которые взаимодействуют, обмениваясь глюонами^{**}, подобно π -мезонному взаимодействию нуклонов в ядре. Каждому кварку приписан заряд, равный по модулю $1/3$ или $2/3$ заряда электрона. Большинство теоретиков считает, что кварк не может быть обнаружен в свободном состоянии.

Слово хромодинамика в названии этой теории связано с тем, что некоторые свойства кварков были обозначены понятиями разных «цветов». Так, различают кварки: красный, желтый, голубой (к оптическому понятию цвета эти названия не имеют отношения). В настоящее время различают 4 кварка, каждый из которых может быть любого цвета и соответственно 12 антикварков. Из них конструируются все известные частицы и предсказываются существование и свойства частиц неизвестных.

§ 3.3. Нейтрино

Частицы нейтрино обладают гигантской проникающей способностью: одна такая частица может, ни с чем не столкнувшись, пройти сквозь слой стали толщиной в диаметр нашей галактики. Тем не менее удастся зафиксировать отдельные взаимодействия антинейтрино с атомами вещества, пользуясь тем, что вероятность такого взаимодействия, хоть и мала, но существует. Такие взаимодействия изредка наблюдаются вблизи атомных реакторов, которые излучают очень мощные нейтринные потоки.



Рис. 457

Намечается развитие нейтринной астрономии. Большие массы вещества, способного взаимодействовать с антинейтрино, помещены в баллонах под горой Андырчи в Баксанском ущелье на Кавказе так, чтобы можно было зафиксировать частицы, прошедшие через толщину Земли (рис. 457). Это делается для того, чтобы исключить случайные взаимодействия с частицами космических лучей. Потоки нейтрино несут ин-

формацию из тех мест, где они зародились. Это, как правило, внутренности звезд, в частности Солнца. Свет, достигающий поверхности Земли через 8,5 мин, испускается поверхностью нашего светила. Антинейтрино, испущенное из недр Солнца, достигает Земли менее чем за 9 мин, не взаимодействуя ни с чем по дороге. Около 10% энергии, излучаемой Солнцем, уносится антинейтрино. На поверхности Земли плотность потока антинейтрино должна быть равна 10^{11} частиц/(см²·с). Правда, пока зафиксировать

* quark (англ.) — карканье, пустяк.

** gluten (лат.) — клей.

такое излучение не удалось, но уже работает первая очередь Баксанской нейтринной обсерватории Института ядерных исследований АН СССР.

В будущем, когда мы научимся надежно фиксировать слабые потоки, нейтринная астрономия позволит получать сведения прямо из недр звезд.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За последние тридцать лет колоссальное развитие получила древняя наука астрономия. Она стала экспериментальной наукой. Люди вышли в космос и исследуют Луну и ближайшие планеты — Марс и Венеру не только с помощью лазеров и радиолокаторов, но и научными станциями. Скоро на многих планетах появятся планетоходы, проводящие исследования по командам с Земли и сообщающие на Землю их результат. Человек вышел в космос и ступил на «небесное» тело. Проехал по поверхности нашего естественного спутника советский луноход.

Появились совершенно новые разделы астрономии: радио- и рентгеноастрономия, нейтринная астрономия. Открыты новые космические объекты — радиозвезды, квазары, пульсары и т. д. Общепринятым стало представление о пульсарах как о нейтронных звездах, некоторые из них являются остатками взрывов сверхновых звезд, как знаменитый пульсар в центре Крабовидной туманности.

В настоящее время известными нам закономерностями нельзя объяснить наблюдаемые интенсивности излучения квазаров, не все понятно в процессах образования черных дыр, не обнаружено на опыте антинейтринное излучение Солнца, которое должно сопровождать термоядерную реакцию в недрах нашего светила.

Смещение спектральных линий доказывает, что галактики разбегаются, чем дальше от нас галактика, тем больше ее скорость удаления. Причин разбегания мы не знаем, но есть догадка, что когда-то все галактики начали разбегаться из одной точки. Тогда в этой точке должна была взорваться (или встретиться с античастицей?) какая-то частица, энергия которой распределилась между всеми галактиками, порожденными этим взрывом. Так наука о макрокосмосе — астрономия — смыкается с наукой о микрокосмосе — физикой элементарных частиц.

Интереснейшим является вопрос о модели нашей Вселенной: прекратится ли когда-нибудь разбегание галактик или оно будет длиться вечно? Другими словами, справедлива модель разбегающейся или пульсирующей Вселенной?

Может быть, решение этого вопроса связано с открытием массы покоя у электронного нейтрино, сделанным советскими физиками. Есть предположение, что наличие массы покоя у всех нейтрино делает среднюю плотность Вселенной достаточной для существования пульсирующей Вселенной.

Эти и подобные мировоззренческие вопросы, важные сами по себе, представляют собой основание для физической картины мира, представление о которой должно быть достаточно научным и философски обоснованным у каждого современника. Диалектико-материалистическое представление о строении Вселенной, о ее важнейших закономерностях необходимо человеку, в какой бы области деятельности он ни трудился.

Можно было бы очень долго перечислять интереснейшие проблемы, которые изучают современные естественные науки.

Нашей задачей было показать, что физика не является завершенной наукой, в которой все ясно. Наоборот, чем больше мы узнаем, тем необъятнее и увлекательнее горизонты, возникающие перед нами. Если читатель понял, какая юная и перспективная наука начала перед ним открываться, то эта книга не была бесполезной.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Система единиц

Все количественные соотношения в физике связаны с измерениями. Измерить физическую величину — значит сравнить ее с однородной величиной, принятой за единицу.

В качестве единицы какой-либо величины можно принять произвольную однородную величину. Но уже в самой простой формуле скорости равномерного движения мы столкнемся с неприятностью: единица скорости не равна частному от деления единицы пути на единицу времени, если эти единицы выбраны произвольно. Придется ставить коэффициент пропорциональности

$$v = k \frac{l}{t}.$$

Этот коэффициент должен быть численно равен скорости, при которой единичный путь пройден за единичное время. И в каждой формуле, определении или законе появятся такие коэффициенты, значение и размерность которых зависят от выбора (произвольного!) единиц.

Можно пойти по другому пути: положить в большинстве таких формул коэффициенты пропорциональности равными *безразмерной единице*. Тогда произвольно можно будет выбрать лишь ограниченное число единиц.

Единицы, устанавливаемые произвольно, называются *основными*. Для измерения некоторых величин выбраны *дополнительные* единицы — это единицы углов. Единицы, которые выводятся из основных и дополнительных с помощью законов и определений, называются *производными*.

Совокупность единиц (основных, дополнительных и производных) всех величин представляет собой *систему единиц*.

Многие единицы введены в «Курсе» вслед за определениями соответствующих величин. Такие единицы только упомянуты в данном приложении. Обозначения единиц, установленные по фамилиям крупных ученых, принято писать с заглавной буквы.

Определения и обозначения величин даны в соответствии с Государственным стандартом Союза ССР «Единицы физических величин», ГОСТ 8417—81 (Сб. СЭВ 1052,—78).

Система интернациональная (SI, СИ)*

Основные единицы

Единица длины 1 метр** [м] первоначально была задумана как одна десятимиллионная часть четверти парижского меридиана. По этому определению был сделан эталон (образец) из сплава платины с иридием, на концах которого нанесли по три штриха. Затем, когда перемерили парижский меридиан, оказалось в полном соответствии с теорией погрешностей (см. приложение 2), что в нем не 40 млн. м. Если бы изменили эталон метра, затем измерили парижский меридиан, оказалось бы, что он снова не равен $40 \cdot 10^6$ м и т. д. Единственный выход из этого положения нашла Парижская Академия наук: единицей длины 1 м было названо расстояние между осями двух средних

* Читается эс-и (а не «си»).

** *metron* (греч.) — мера. Отсюда названия метрической системы мер, многих измерительных приборов и т. д.

штрихов на эталоне длины, хранящемся в Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов при 0°C и нормальном атмосферном давлении. С эталона метра было сделано 30 копий, которые хранятся в разных странах. Как вы могли догадаться, все они содержат некоторые погрешности. Подходить к копиям нельзя (в буквальном смысле), ибо при изменении температуры они изменят длину! Поэтому с них тоже сделаны копии, с этих, в свою очередь, — другие копии и т. д. до вашей линейки. Если вспомнить, что каждое копирование вносит свою погрешность, то можно представить себе точность измерения длины такой линейкой. В наше время в связи с измерениями малых длин и времен точность определения метра перестала удовлетворять физиков. В 1960 г. на XI Генеральной конференции по мерам и весам были приняты новые определения метра и секунды и утверждена Система Интернациональная. Один метр равен $1\,650\,763,73$ длин волн излучения оранжевого цвета изотопа криптона-86 в вакууме. Это определение примерно в сто раз точнее старого и имеет еще одно громадное преимущество: новый эталон может быть воспроизведен в любой лаборатории, где есть достаточно точный спектральный аппарат; методы сравнения длин в оптике позволяют получить очень большую точность. Конечно, не надо запоминать число длин волн в определении метра. Надо представлять себе, что 1 м — это определенное число длин волн определенной спектральной линии.

Единица массы 1 килограмм [кг] первоначально была задумана как масса 1 дм^3 дистиллированной воды при 4°C (наибольшая плотность у воды именно при 4°C). Сделали образец, масса которого оказалась, как вы уже догадались, не равной массе 1 дм^3 воды при 4°C . Поэтому, не делая бесполезных попыток воспроизвести точно такую массу, назвали массой *в один килограмм* массу эталона килограмма. Это цилиндр из сплава платины с иридием, который хранится в Международном бюро мер и весов. Взвешивание, посредством которого сравниваются массы, — действие очень точное, поэтому эталон до сих пор удовлетворяет физиков.

Единица времени 1 секунда [с] первоначально определялась как $1/86\,400$ часть средних солнечных суток. При современном уровне измерений обнаружилось, что длительность средних солнечных суток изменяется от года к году. Точность определения секунды необходимо было увеличить, и в 1960 г. было принято ее определение: $1\text{ с} = 1/31\,556\,925,9747$ часть тропического года, начавшегося в полдень 31 декабря 1899 г., т. е. определенного тропического года на рубеже XIX и XX вв. В настоящее время принято спектральное определение секунды: *одна секунда — это время, равное $9\,192\,631\,770$ периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.* Конечно, и здесь не надо запоминать числовое значение. Достаточно понять, что одна секунда выражена временем заданного числа колебаний определенного спектрального перехода. Преимущество такого определения помимо повышения точности состоит в возможности воспроизведения эталона в любой достаточно оборудованной лаборатории.

Единица температуры — 1 кельвин [К] определена в разд. II, § 4.5.

Единица силы тока 1 ампер [А] — первоначально производная единица из формулы $I = \frac{Q}{t}$ определялась как сила неизменяющегося тока, при котором через поперечное сечение проводника протекает 1 Кл электричества за 1 с ; затем 1 ампер определялся как сила такого неизменяющегося тока, который из раствора серебряной соли выделяет на катоде $1,118\text{ мг}$ серебра в секунду. Современное определение ампера [А] приведено в разд. III, § 3.4.

Единица силы света 1 кандела [кд] определена в разд. V, § 2.1.

Единица количества вещества 1 моль [моль] устанавливается для каждого вещества или системы частиц. *Один моль — это количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов со-*

держится в массе 0,012 кг нуклида* углерода ^{12}C . При применении моля элементы системы — атомы, молекулы, частицы или группы частиц — должны быть определены и описаны.

Дополнительные единицы

Единицы плоского угла 1 радиан [рад] и пространственного угла 1 стерадиан [ср] определены в § 1 математического введения.

Некоторые производные единицы

Производные единицы установлены из определений и законов, приведенных в «Курсе», в которых коэффициенты пропорциональности положены равными безразмерным единицам и потому опущены.

Величина	Обозначение и определяющая формула	Единицы		
		Название	Обозначение	Определение
1	2	3	4	5
площадь	$S = l^2$	кв. метр	м^2	площадь квадрата со стороной 1 м
объем	$V = l^3$	куб. метр	м^3	объем куба с ребром 1 м
скорость	$v \stackrel{8-1}{=} l/t$	метр в секунду	м/с	см. разд. I, § 1.3.
угловая скорость	$\omega \stackrel{11-1}{=} \varphi/t$	радиан в секунду	рад/с	см. разд. I, § 1.5
ускорение	$a \stackrel{11-1}{=} \Delta v/\Delta t$	метр на секунду в квадрате	м/с ²	см. разд. I, § 1.3.
угловое ускорение	$\varepsilon \stackrel{22-1}{=} d\omega/dt$	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²	угловое ускорение, при котором угловая скорость равномерно изменяется на 1 рад/с за 1 с
частота	$f \stackrel{3-IV}{=} N/t$	герц	$\text{H} \left(\frac{1/\text{с}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}} \right)$	см. разд. IV, § 1.1
сила	$F \stackrel{39-1}{=} ma$	ньютон		см. разд. I, § 2.7.
плотность	$\rho \stackrel{33-1}{=} \Delta m/\Delta V$	килограмм на куб. метр	кг/м ³	плотность однородного вещества, в одном куб. м которого содержится 1 кг массы
импульс	$p = mv$	килограмм-метр в секунду	кг · м/с	импульс материальной точки массой 1 кг, движущейся со скоростью 1 м/с

* Нуклид — совокупность атомов с ядрами определенного состава, имеющими заданное число протонов и нейтронов.

1	2	3	4	5
момент инерции	$J \stackrel{45-1}{=} mr^2$	килограмм-метр в квадрате	кг · м ²	момент инерции материальной точки массой 1 кг, отстоящей от оси на 1 м
момент импульса	$L \stackrel{40-1}{=} rmp$	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг · м ² /с	момент импульса материальной точки массой 1 кг, движущейся со скоростью 1 м/с перпендикулярно оси на расстоянии 1 м от нее
момент силы	$M \stackrel{36-1}{=} FR$	ньютон-метр	Н · м	момент силы 1 Н относительно оси, перпендикулярной силе и отстоящей от нее на расстоянии 1 м
давление	$p \stackrel{64-1}{=} F/S$	паскаль	$\text{Па} \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right)$	см. разд. I, § 4.1
работа, энергия	$A \stackrel{51-1}{=} Fl$	джоуль	Дж(Н · м, Вт · с)	см. разд. I, § 3.1, 3.4
мощность	$N \stackrel{43-1}{=} A/I$	ватт	$\text{Вт} \left(\frac{\text{Дж}}{\text{с}} \right)$	см. разд. I, § 3.4
заряд	$Q \stackrel{33-III}{=} It$	кулон	Кл (А · с)	см. разд. III, § 1.2
напряжение, разность потенциалов	$U \stackrel{11-III}{=} A/Q$	вольт	$\text{В} \left(\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \right)$	см. разд. III, § 1.4
сопротивление	$R \stackrel{39-III}{=} U/I$	ом	$\text{Ом} \left(\frac{\text{В}}{\text{А}} \right)$	см. разд. III, § 2.2
проводимость	$G \stackrel{30-III}{=} 1/R$	сименс	$\text{См} \left(\frac{1}{\text{Ом}} \right)$	см. разд. III, § 2.2
поверхностная плотность заряда	$\sigma \stackrel{8-III}{=} Q/S$	кулон на кв. метр	Кл/м ²	поверхностная плотность электрического заряда, при которой заряд 1 Кл равномерно распределен по поверхности 1 м ²
напряженность электрического поля	$E \stackrel{15-III}{=} \Delta\varphi/\Delta l$	вольт на метр	В/м	см. разд. III, § 1.5
электроемкость	$C \stackrel{19-III}{=} Q/\varphi$	фарад	$\Phi \left(\frac{\text{Кл}}{\text{В}} \right)$	см. разд. III, § 1.9
магнитная индукция	$B \stackrel{71-III}{=} F_A/(Il)$	тесла	$\text{Тл} \left(\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} \right)$	см. разд. III, § 3.3
напряженность магнитного поля	$H \stackrel{66-III}{=} I/(2\pi R)$	ампер на метр	А/м	см. разд. III, § 3.1
магнитный поток	$\Phi \stackrel{78-PI}{=} BS$	вебер	Вб(Тл · м ²)	см. разд. III, § 3.6

1	2	3	4	5
индуктивность	$L \stackrel{81-III}{=} \Phi/I$	генри	$\text{Гн} \left(\frac{\text{Вб}}{\text{А}} \right)$	см. разд. III, § 3.10
удельная теплоемкость	$c \stackrel{29-II}{=} \frac{dw}{m dT}$	джоуль на килограмм-кельвин	$\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	удельная теплоемкость такого вещества, для нагревания 1 кг которого на 1 К необходима энергия 1 Дж
световой поток	$\Phi \stackrel{10-V}{=} I \omega$	люмен	лм (кд · ср)	см. разд. V, § 2.1
освещенность	$E \stackrel{12-V}{=} \Phi/S$	люкс	$\text{лк} \left(\frac{\text{лм}}{\text{м}^2} \right)$	см. разд. V, § 2.2

Мы привели некоторые важнейшие единицы системы интернациональной. Из этого рассмотрения должно быть ясно, что для образования любых производных единиц используются известные законы и определения; единицы образуются логично, чтобы коэффициенты пропорциональности действительно были бы безразмерными единицами; формулировка единиц измерения неоднозначна, для образования одной единицы можно использовать различные выражения. Например, единицу напряженности электрического поля можно было вывести из определения (5-III); 1 Тл — из определения силы Лоренца или механического момента, поворачивающего рамку с током в магнитном поле; 1 А/м — из напряженности любого другого поля или из самого закона Био — Савара; 1 Гн — из соотношения (82-III) и т. д.

Рекомендуется применение кратных и дольных единиц для сокращения записи.

Приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Приставки	Обозначение	Множители	Приставки	Обозначения	Множители
экса	Э	10^{18}	(деци)	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	(санتي)	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^9	микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^6	нано	н	10^{-9}
кило	к	10^3	пико	п	10^{-12}
(гекто)	г	10^2	фемто	ф	10^{-15}
(дека)	да	10	атто	а	10^{-18}

Отмеченные круглыми скобками приставки употребляются только в наименованиях, получивших широкое распространение: декалитр, сантиметр и т. п.

Не допускается применение двух и более приставок. В частности, дольные единицы килограмма образуются присоединением соответствующей приставки к корню «грамм». Приставки следует выбирать так, чтобы числовое значение величины заключалось в пределах 0,1 — 1000.

2. Обработка результатов измерений

В настоящее время наука об измерениях — самостоятельный раздел физики.

Чтобы получить результат физического эксперимента, надо продумать и выбрать методику измерений; подобрать и настроить измерительные приборы; собрать установку; произвести ряд измерений; считать (прочсть) результаты; обработать эти результаты математически; оценить результаты измерений и вычислений. Остановимся только на оценке результатов.

Допустим, измеряется какая-либо величина N_0 (рис. 458). Ее точное значение (абсолютная истина!) нам неизвестно и не может быть определено. В результате отдельных измерений получен ряд значений $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$ каждое из которых принципиально содержит некоторую погрешность. В большинстве случаев среднее арифметическое

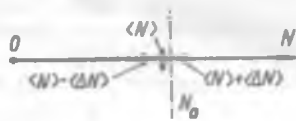


Рис. 458

$$\langle N \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i \quad (1)$$

является более точным значением измеряемой величины, чем результаты отдельных измерений. Именно это среднее значение рассматривают в качестве определяемой величины. Отклонения отдельных результатов от среднего значения называют абсолютными погрешностями:

$$\Delta N_i = N_i - \langle N \rangle. \quad (2)$$

Среднее арифметическое модулей абсолютных погрешностей называется средней абсолютной погрешностью:

$$\langle \Delta N \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta N_i|. \quad (3)$$

В результате измерений, вычислений и их оценки получают среднее значение величины, ее среднюю абсолютную погрешность и вероятность* того, что истинное значение величины содержится в интервале шириной $2 \langle \Delta N \rangle$ около $\langle N \rangle$. Эта вероятность называется надежностью. Результат измерений (с указанием надежности) записывается в виде

$$N = \langle N \rangle \pm \langle \Delta N \rangle. \quad (4)$$

Такая запись означает, что истинное значение измеряемой величины содержится с данной надежностью в интервале от $\langle N \rangle - \langle \Delta N \rangle$ до $\langle N \rangle + \langle \Delta N \rangle$.

Может возникнуть вопрос: какая же это точная наука, если ни один результат не свободен от ошибки? Но, оказывается, даже до опыта можно оценить пределы допускаемой ошибки, а изменяя методику измерений и измерительные приборы, ее можно сделать достаточно малой. Как видите, критерием точности науки является не безошибочность, а знание погрешности и возможность ее уменьшения.

Погрешности возникают по самым различным причинам. Неисправность прибора, ошибка в методике и т. д. приводят к появлению систематической погрешности, выявить и исправить которую можно, только изменив методику

* Определение вероятности дано в разд. II, § 1.2. Методы ее определения разработаны в высшей математике.

измерений. Случайные погрешности возникают из-за несовершенства органов чувств экспериментатора и других случайных, неучтенных отклонений в каких-то внешних условиях. В большинстве измерений случайные отклонения в разные стороны равновероятны, и чем отклонения больше, тем реже оно встречается. Поэтому среднее арифметическое точнее каждого измерения, а случайные погрешности можно частично скомпенсировать, увеличивая число измерений.

Для сравнения точности различных измерений вводится понятие *средней относительной погрешности* — отношения средней абсолютной погрешности к среднему значению измеряемой величины:

$$\varepsilon = \langle \Delta N \rangle / \langle N \rangle. \quad (5)$$

Так, измерив с одинаковыми абсолютными погрешностями $\langle \Delta N \rangle = 1$ см длины $\langle N' \rangle = 1$ м и $\langle N'' \rangle = 1$ км, мы сделаем измерения совершенно разных точностей: $\varepsilon_1 = 0,01$ м/1 м = 1 % и $\varepsilon_2 = 0,01$ м/1000 м = 0,001 %.

Сравнение абсолютных погрешностей измерения разнородных величин лишено всякого смысла, так как нельзя установить соотношение разнородных величин. Нельзя, например, ответить на вопрос: что больше — 2 кг или 5 м? Но измерения таких величин можно сравнить по относительным погрешностям. Пусть масса 2 кг измерена с абсолютной погрешностью $\langle \Delta N' \rangle = 1$ г, а расстояние 5 м — с погрешностью $\langle \Delta N'' \rangle = 1$ см. Тогда $\varepsilon_1 = 0,001$ кг/2 кг = 0,05 %, $\varepsilon_2 = 0,01$ м/5 м = 0,2 % и $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

Различают прямые и косвенные измерения.

Прямыми называют измерения, целью которых является определение измеряемой величины. *Косвенными* называют измерения, по результатам которых вычисляют искомую величину, связанную с измеренными заданной функциональной зависимостью.

Погрешности прямых измерений вычисляют по формулам (3) и (5). Оценить погрешность косвенных измерений удастся с помощью дифференцирования.

Пусть надо вычислить величину N , связанную с измеряемой величиной x функциональной зависимостью:

$$N = f(x), \quad (6)$$

где $f(x)$ — известная функция своего аргумента.

Величина x измерена со средней абсолютной погрешностью $\Delta x \ll x$ (иначе измерения не имеют физического смысла). Перейдя к бесконечно малым величинам, т. е. заменяя Δx дифференциалом dx , можно для нахождения погрешности воспользоваться математическим аппаратом:

$$N + dN = f(x + dx). \quad (7)$$

Отсюда

$$dN = f(x + dx) - N \text{ и } \varepsilon = \frac{dN}{N} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{f(x)} dx = \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} dx = d \ln f(x). \quad (8)$$

В самом деле, обозначим $f(x) = y$, тогда $\varepsilon = (y'/y) dx$. С другой стороны, производная сложной функции $[\ln y(x)] = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} f'(x)$, а ее дифференциал $d[\ln y(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)} dx$. Следовательно, *относительная погрешность функции равна дифференциалу натурального логарифма этой функции*. Такой же вид

имеет относительная погрешность функции многих переменных, только к слову дифференциал добавляют слово полный. Как вычисляют этот полный дифференциал, мы покажем на примере.

В полученное выражение относительной погрешности подставляют вместо дифференциалов переменных величин их абсолютные погрешности, а вместо самих величин — их средние значения.

Зная относительную погрешность, находят $\langle \Delta N \rangle = \varepsilon \langle N \rangle$ и это выражение подставляют в ответ (4). На методах определения надежности мы останавливаться не будем.

Например, надо узнать среднюю плотность цилиндра; измерения и вычисления дали результаты: диаметр $D \pm \Delta D$, длина $l \pm \Delta l$, масса $m \pm \Delta m$. Средняя плотность $\rho = m/V = m/(Sl) = 4m/(\pi D^2 l)$. Мы получили расчетную формулу, т. е. уравнение, в левой части которого стоит искомая величина, а в правой — только измеренные и табличные величины. Логарифмируем:

$$\ln \rho = \ln 4 + \ln m - \ln \pi - 2 \ln D - \ln l.$$

Находим дифференциал логарифма:

$$d \ln \rho = \frac{1424-M}{m} \frac{dm}{m} - 2 \frac{dD}{D} - \frac{dl}{l}.$$

Дифференциалы в этом выражении надо замеснить погрешностями: $dm \rightarrow \Delta m$, $dD \rightarrow \Delta D$, $dl \rightarrow \Delta l$. Погрешности постоянных приближенных величин можно считать пренебрежимо малыми, если провести округление до такого знака, при котором относительная погрешность приближения на порядок меньше относительной погрешности наименее точно измеренной величины.

В самом неблагоприятном случае все погрешности измеряемых величин отклоняют результат в одну сторону. При этом рассчитанная погрешность становится наибольшей из возможных (почти невероятный случай), зато наибольшей становится надежность результата. Наибольшая относительная погрешность

$$\varepsilon \approx d \ln \rho = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta l}{l}.$$

Отсюда

$$\Delta \rho \approx \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta l}{l} \right) (\rho).$$

Аналогично обрабатываются результаты всевозможных измерений.

Без оценки погрешности и надежности результат измерений не имеет физического смысла. Чтобы не делать лишних измерений и не ухудшать результат работы в лаборатории, необходимо для измерения величины, имеющей наибольшую погрешность, выбрать самый точный инструмент; проделать достаточно измерений, чтобы средняя абсолютная погрешность этого измерения стала меньше погрешности прибора — обычно наименьшего деления, различного на шкале этого прибора. Тогда в качестве абсолютной погрешности измеряемой величины используют погрешность прибора. Для измерения остальных величин подбирают (если возможно) приборы и число измерений так, чтобы их относительные погрешности были на порядок меньше первой.

3. Основы специальной теории относительности

Постулаты Эйнштейна. Ряд известных в конце XIX в. опытов не получил объяснения в классической механике. В 1905 г. А. Эйнштейн сформулировал новую теорию, в корне ломающую «очевидные» представления.

измерений. Случайные погрешности возникают из-за несовершенства органов чувств экспериментатора и других случайных, неучтенных отклонений в каких-то внешних условиях. В большинстве измерений случайные отклонения в разные стороны равновероятны, и чем отклонение больше, тем реже оно встречается. Поэтому среднее арифметическое точнее каждого измерения, а случайные погрешности можно частично скомпенсировать, увеличивая число измерений.

Для сравнения точности различных измерений вводится понятие *средней относительной погрешности* — отношения средней абсолютной погрешности к среднему значению измеряемой величины:

$$\epsilon = \langle \Delta N \rangle / \langle N \rangle. \quad (5)$$

Так, измерив с одинаковыми абсолютными погрешностями $\langle \Delta N \rangle = 1$ см длины $\langle N' \rangle = 1$ м и $\langle N'' \rangle = 1$ км, мы сделаем измерения совершенно разных точностей: $\epsilon_1 = 0,01$ м/1 м = 1% и $\epsilon_2 = 0,01$ м/1000 м = 0,001%.

Сравнение абсолютных погрешностей измерения разнородных величин лишено всякого смысла, так как нельзя установить соотношение разнородных величин. Нельзя, например, ответить на вопрос: что больше — 2 кг или 5 м? Но измерения таких величин можно сравнить по относительным погрешностям. Пусть масса 2 кг измерена с абсолютной погрешностью $\langle \Delta N' \rangle = 1$ г, а расстояние 5 м — с погрешностью $\langle \Delta N'' \rangle = 1$ см. Тогда $\epsilon_1 = 0,001$ кг/2 кг = 0,05%, $\epsilon_2 = 0,01$ м/5 м = 0,2% и $\epsilon_2 > \epsilon_1$.

Различают прямые и косвенные измерения.

Прямыми называют измерения, целью которых является определение измеряемой величины. *Косвенными* называют измерения, по результатам которых вычисляют искомую величину, связанную с измеренными заданной функциональной зависимостью.

Погрешности прямых измерений вычисляют по формулам (3) и (5). Оценить погрешность косвенных измерений удастся с помощью дифференцирования.

Пусть надо вычислить величину N , связанную с измеряемой величиной x функциональной зависимостью:

$$N = f(x), \quad (6)$$

где $f(x)$ — известная функция своего аргумента.

Величина x измерена со средней абсолютной погрешностью $\Delta x \ll x$ (иначе измерения не имеют физического смысла). Перейдя к бесконечно малым величинам, т. е. заменяя Δx дифференциалом dx , можно для нахождения погрешности воспользоваться математическим аппаратом:

$$N + dN \stackrel{?}{=} f(x + dx). \quad (7)$$

Отсюда

$$dN = f(x + dx) - N \text{ и } \epsilon \stackrel{?}{=} \frac{dN}{N} \stackrel{19.24 \text{ М}}{=} \frac{f(x + dx) - f(x)}{f(x) dx} dx \stackrel{14.3 \text{ М}}{=} \frac{f'(x)}{f(x)} dx \stackrel{14.3 \text{ М}}{=} d \ln f(x). \quad (8)$$

В самом деле, обозначим $f(x) = y$, тогда $\epsilon = (y'/y) dx$. С другой стороны, производная сложной функции $[\ln y(x)]' \stackrel{19.24 \text{ М}}{=} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} f'(x)$, а ее дифференциал $d[\ln y(x)] \stackrel{14.3 \text{ М}}{=} \frac{f'(x)}{f(x)} dx$. Следовательно, *относительная погрешность функции равна дифференциалу натурального логарифма этой функции*. Такой же вид

имет относительная погрешность функции многих переменных, только к слову дифференциал добавляют слово полный. Как вычисляют этот полный дифференциал, мы покажем на примере.

В полученное выражение относительной погрешности подставляют вместо дифференциалов переменных величин их абсолютные погрешности, а вместо самих величин — их средние значения.

Зная относительную погрешность, находят $\langle \Delta N \rangle \stackrel{s}{=} \varepsilon \langle N \rangle$ и это выражение подставляют в ответ (4). На методах определения надежности мы останавливаться не будем.

Например, надо узнать среднюю плотность цилиндра; измерения и вычисления дали результаты: диаметр $D \pm \Delta D$, длина $l \pm \Delta l$, масса $m \pm \Delta m$. Средняя плотность $\rho \stackrel{01}{=} m/V = m/(Sl) = 4m/(\pi D^2 l)$. Мы получили расчетную формулу, т. е. уравнение, в левой части которого стоит искомая величина, а в правой — только измеренные и табличные величины. Логарифмируем:

$$\ln \rho = \ln 4 + \ln m - \ln \pi - 2 \ln D - \ln l.$$

Находим дифференциал логарифма:

$$d \ln \rho \stackrel{1424-M}{=} \frac{dm}{m} - 2 \frac{dD}{D} - \frac{dl}{l}.$$

Дифференциалы в этом выражении надо заменить погрешностями: $dm \rightarrow \Delta m$, $dD \rightarrow \Delta D$, $dl \rightarrow \Delta l$. Погрешности постоянных приближенных величин можно считать пренебрежимо малыми, если провести округление до такого знака, при котором относительная погрешность приближения на порядок меньше относительной погрешности наименее точно измеренной величины.

В самом неблагоприятном случае все погрешности измеряемых величин отклоняют результат в одну сторону. При этом рассчитанная погрешность становится наибольшей из возможных (почти невероятный случай), зато наибольшая становится надежность результата. Наибольшая относительная погрешность

$$\varepsilon \stackrel{s}{=} d \ln \rho = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta l}{l}.$$

Отсюда

$$\Delta \rho \stackrel{s}{=} \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta l}{l} \right) \langle \rho \rangle.$$

Аналогично обрабатываются результаты всевозможных измерений.

Без оценки погрешности и надежности результат измерений не имеет физического смысла. Чтобы не делать лишних измерений и не ухудшать результат работы в лаборатории, необходимо для измерения величины, имеющей наибольшую погрешность, выбрать самый точный инструмент; проделать достаточно измерений, чтобы средняя абсолютная погрешность этого измерения стала меньше погрешности прибора — обычно наименьшего деления, различного на шкале этого прибора. Тогда в качестве абсолютной погрешности измеряемой величины используют погрешность прибора. Для измерения остальных величин подбирают (если возможно) приборы и число измерений так, чтобы их относительные погрешности были на порядок меньше первой.

3. Основы специальной теории относительности

Постулаты Эйнштейна. Ряд известных в конце XIX в. опытов не получил объяснения в классической механике. В 1905 г. А. Эйнштейн сформулировал новую теорию, в корне ломающую «очевидные» представления.

Специальная теория относительности применима к инерциальным системам отсчета и основана на двух постулатах Эйнштейна:

1. Все физические явления протекают одинаково в любых инерциальных системах отсчета.

2. Скорость света в вакууме не зависит от направления его распространения и от движения источника.

Первый постулат — принцип относительности — является распространением известного принципа Галилея на электромагнитные явления. Второй — принцип постоянства скорости света — утверждает одинаковость скорости света в вакууме во всех инерциальных системах отсчета и основан на опытах, в частности, Майкельсона — Морли.

Принятие постулатов Эйнштейна связано с тем, что скорость света не складывается со скоростью источника по преобразованиям Галилея, а это означает, что неверны сами преобразования Галилея (31-1).

Вместо них Эйнштейн использовал преобразования Лоренца, которые для систем отсчета, изображенных на рис. 43, имеют вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9)$$

$$y' = y; z' = z; \quad (10)$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (11)$$

где

$$\beta = v/c \quad (12)$$

(t' — время в подвижной системе отсчета).

Эти преобразования должны быть линейными, инвариантными и удовлетворять постулатам Эйнштейна. Из последних требований их можно вывести, как сделано в § 12.6 «Основ физики» Б. М. Яворского и А. А. Пинского (т. I, М., 1981).

Найдите самостоятельно из формул (9) и (11) x и t через координаты «штрихованной» системы отсчета и убедитесь, что преобразования инвариантны (не забудьте, что если подвижная система движется относительно неподвижной со скоростью v , то неподвижная система движется относительно подвижной со скоростью $-v$).

Заметим, что при условии $v \ll c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, которые, таким образом, представляют собой частный случай преобразований Лоренца.

Из формул (9) и (11) видно, что при движении со сверхсветовой скоростью $v > c$ знаменатели стали бы мнимыми.

Даже при движении со скоростью света $v = c$ преобразования теряют смысл. В настоящее время неизвестно, какой качественный скачок испытывает движение материи при световой скорости, когда теория относительности неприменима. А в рамках этой теории скорость света — недостижимый предел скоростей для всех тел, имеющих отличную от нуля массу покоя.

В теории относительности изменяются наши привычные представления. Например, рассмотрим процесс распространения света в двух инерциальных системах отсчета — в вагоне движущегося относительно перрона поезда и на этом перроне (рис. 459). В некоторый момент времени зажглась лампа S на столбе, находящемся посередине отрезка AB перрона.

Подвижный наблюдатель увидит стенки вагона D и K освещенными одновременно, а неподвижный — неодновременно, так как стенка D движется

к источнику S , а стенка K — от него. Таким образом, понятие одновременности оказывается относительным.

Интервалы длины и времени. При переходе от одной системы отсчета к другой могут изменяться пространственные и временные характеристики объектов. Мы хотим измерить длину тела, неподвижного в неподвижной системе отсчета (рис. 460). Для этого нужно зафиксировать координаты x_1 и x_2 начала



Рис. 459

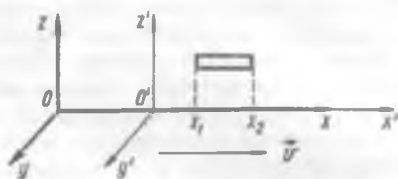


Рис. 460

и конца тела, причем безразлично когда (тело неподвижно в этой системе отсчета). Длина тела в данной системе

$$\Delta l = x_2 - x_1. \quad (13)$$

Длину того же тела в подвижной системе определим как разность координат конца и начала тела, измеренных одновременно ($t'_1 = t'_2$):

$$\Delta l' = x'_2 - x'_1 \quad (14)$$

(разность координат любых точек, измеренных не одновременно в подвижной системе отсчета больше зависит от разновременности, чем от расстояния между этими точками).

В соответствии с преобразованиями Лоренца,

$$\Delta l' = x_2 - x_1 = \frac{x_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta l}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Получите сами такой же результат, начав с формулы длины тела в подвижной системе отсчета, причем учтите, что моменты измерений координат начала и конца тела в неподвижной системе неодинаковы ($t_1 \neq t_2$) — одновременно относительно.

Таким образом, размеры тела (эталон длины, само пространство) сокращаются в направлении движения:

$$\Delta l' = \Delta l \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (15)$$

Исследуем длительность события, например падения тела, причем координата тела в неподвижной системе не изменяется ($x_1 = x_2$, рис. 461). Длительность события можно определить, засекая моменты начала и конца этого события в соответствующей системе отсчета: $\Delta t = t_2 - t_1$; $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Используя преобразования Лоренца, находим

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \\ &= \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

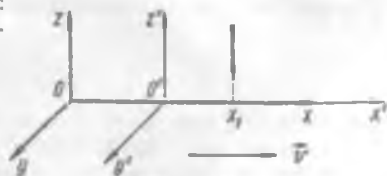


Рис. 461

Такой же результат получите сами, начав с интервала времени в неподвижной системе отсчета и помня, что координаты начала и конца данного события в подвижной системе отсчета различны ($x'_1 \neq x'_2$).

Следовательно, длительность события в движущейся системе отсчета увеличивается:

$$\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (16)$$

Именно этот эффект используют писатели-фантасты при описании межзвездных полетов: в звездолете время течет медленнее, чем на Земле.

Представим, что один из двух близнецов улетает в длительный межзвездный полет, а другой остается на Земле. Кто из них будет старше, когда они встретятся? Пока продолжается полет (для простоты, равномерный), обе системы отсчета равноправны (если забыть о некоторой неинерциальности Земли), все процессы в собственных системах отсчета протекают одинаково, а все процессы в другой системе протекают медленнее. Но так называемый «парадокс близнецов» неразрешим в рамках СТО. Чтобы близнецы встретились, одна из систем отсчета должна испытывать ускорение, т.е. стать неинерциальной. В нашем примере это, разумеется, звездолет. Общая теория относительности позволяет утверждать, что путешествующий близнец к моменту встречи будет более молодым, чем его земной брат.

Важно представить себе равноправность систем: каждый из наблюдателей «нормально» измеряет «свои» расстояния и времена, но подвижный наблюдатель видит все размеры в неподвижной системе укороченными в направлении движения и все часы в неподвижной системе — отстающими. Неподвижный наблюдатель видит все размеры в подвижной системе укороченными в направлении движения, и все часы подвижной системы — отстающими. И бессмысленным является вопрос: а как же на самом деле?

Именно на самом деле укорачиваются размеры в направлении движения и возрастает длительность событий при увеличении скорости движения системы отсчета, в которой рассматриваются объекты. Эти размеры и длительность относительны.

Закон сложения скоростей. Пусть материальная точка движется в некоторый момент времени вдоль оси x со скоростью u относительно неподвижной системы отсчета. Ее скорость в подвижной системе u' , причем $u \equiv \frac{dx}{dt}$, а

$$u' \equiv \frac{dx'}{dt'}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u' &\equiv \frac{(dx - v dt) / \sqrt{1 - \beta^2}}{(dt - v/c^2 dx) / \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{dx - v dt}{dt - v/c^2 dx} = \\ &= \frac{dx/dt - v}{1 - v/c^2 dx/dt} = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}. \end{aligned}$$

Мы получили закон сложения скоростей в виде:

$$u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}. \quad (17)$$

Легко видеть, что закон сложения скоростей по Галилею есть частный случай этого закона при $v \ll c$.

Выведите самостоятельную формулу для скорости u и убедитесь, что закон сложения скоростей инвариантен.

Рассмотрим соответствие закона сложения скоростей второму постулату Эйнштейна. Обозначим скорость света $u = c$ в неподвижной системе, относительно которой подвижная система движется с произвольной скоростью v . Скорость света в последней системе

$$u' = \frac{c - v}{1 - vc/c^2} = c \frac{c - v}{c - v} = c.$$

Пусть два звездолета движутся навстречу друг другу со скоростями $3/4 c$ и $-3/4 c$ относительно Земли. Какова их скорость сближения u ?

Примем один звездолет за неподвижную систему отсчета. Тогда Земля движется относительно него со скоростью $v = 3/4 c$, а другой звездолет — относительно Земли со скоростью $u' = 3/4 c$. Отметим, что по преобразованиям Галилея $u = u' + v = 6/4 c > c$. На самом деле

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = 0,96 c < c.$$

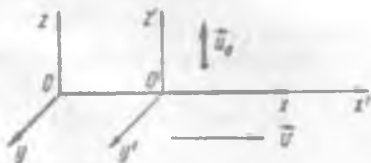


Рис. 462

По всем формулам теории относительности видно, что релятивистские эффекты становятся заметными только при движении со скоростью, по порядку величины приближающейся к скорости света.

Масса. Снова рассмотрим две инерциальные системы отсчета (рис. 462), причем подвижная движется относительно неподвижной со скоростью $v \sim c$.

Пусть материальная точка движется вдоль оси z в неподвижной системе отсчета со скоростью $u_0 = \frac{1}{c} \frac{dz}{dt} \ll c$. Тогда масса точки практически равна ее массе покоя m_0 , а импульс $p = m_0 u_0$ (т. е. направлен вдоль оси z). В подвижной системе отсчета импульс той же материальной точки имеет другое значение и направление, но его проекция на ось z' $p_z = m u_z$ равна проекции импульса p на ось z : $p_z = p$.

Действительно в процессе установления скорости v должны были действовать силы, изменяющие импульс точки по второму закону Ньютона (34-1) только в направлении этой скорости, т. е. вдоль оси x' . Следовательно, составляющие импульса, перпендикулярные осям x и x' , не изменялись: $m_0 u_0 = m u_z$, где m — масса той же материальной точки в подвижной системе отсчета — ее релятивистская масса.

Проекция скорости материальной точки на ось z'

$$u'_z = \frac{1}{c} \frac{dz'}{dt'},$$

где $dz' = dz$ — перемещение вдоль оси z' , перпендикулярной скорости движения системы, его величина не зависит от скорости v . Время движения по этому отрезку $dt' = dt / \sqrt{1 - \beta^2}$, значит, скорости u_0 и u'_z неодинаковы.

Релятивистская масса

$$m = \frac{m_0 u_0}{u'_z} = \frac{m_0 dz/dt}{dz'/dt'} = \frac{m_0 dt'}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Таким образом, масса тела в движущейся системе отсчета

$$m = m_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (18)$$

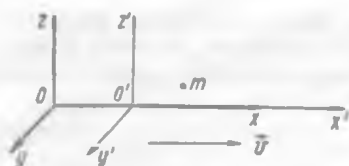


Рис. 463

которой подвижная система перемещается со скоростью v (рис. 463). В математике известно разложение

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

(для всех $|x| \leq 1$).

Применим его к формуле (18):

$$m_0 = m\sqrt{1-\beta^2} = m \left(1 - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1 \cdot 1 \beta^4}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \beta^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \beta^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \dots \right).$$

Пусть скорость подвижной системы не очень велика, чтобы можно было пренебречь членами высших степеней β по сравнению с β^2 . Тогда

$$m_0 = m - m\beta^2/2 \text{ и } m_0 c^2 = mc^2 - mv^2/2.$$

Иначе

$$mc^2 = m_0 c^2 + T, \quad (19)$$

где T — кинетическая энергия тела в подвижной системе. Из формулы (19) ясно, что выражение

$$E = mc^2 \quad (20)$$

представляет собой некоторую энергию материальной точки, движущейся со скоростью v относительно данной системы отсчета (это энергия рассматриваемой точки в подвижной системе). Ее называют *полной энергией* материальной точки. Мы получили закон взаимосвязи массы и энергии, установленный Эйнштейном в 1905 г.: *всякий объект, масса которого m , имеет соответствующую полную энергию E .*

В системе отсчета, относительно которой точка покоится, ее кинетическая энергия $T = 0$ и полная энергия $E = m_0 c^2 = E_0$ равна *энергии покоя*.

Следовательно, $E = E_0 + T$ — полная энергия материальной точки в данной системе отсчета складывается из ее энергии покоя и кинетической энергии. Мы это получили для достаточно медленно движущейся системы; но разность

$T = mc^2 - m_0 c^2$ равна кинетической энергии тела и в любой другой движущейся системе отсчета, даже если использованное разложение нельзя оборвать на определенном близком слагаемом, т. е. энергия движения не обязательно равна $mv^2/2$, как было в классической механике. Там рассматривалось только первое приближение кинетической энергии, при котором скорость $v \ll c$ и все члены приведенного разложения, содержащие β , пренебрежимо малы. Если же не пренебрегать высшими степенями разложения, то

$$m_0 c^2 = mc^2 - m \left(\frac{v^2}{2} + \frac{1 \cdot 1 v^4}{2 \cdot 4 c^2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 v^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 c^4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 v^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 c^6} + \dots \right).$$

и кинетическая энергия в общем виде будет представлена рядом:

$$T = mc^2 - m_0c^2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{1 \cdot 1 mv^4}{2 \cdot 4 c^2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 mv^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 c^4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 mv^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 c^6} + \dots$$

Естественно, эту энергию удобнее считать по формуле (19). Закон взаимосвязи массы и энергии (20) является одним из основных законов природы. Так, на основе этого закона подсчитываются энергии ядерных, в частности термоядерных, превращений. Использование колоссальных запасов термоядерной энергии и еще более грандиозных запасов энергии антивещества связано с применением этого закона (см. разд. VI, § 2.2, 2.3, 3.2).

Можно показать, что в изолированной системе тел выполняются законы сохранения, в частности релятивистского импульса и полной энергии (а значит, и релятивистской массы). Мы здесь этого делать не будем.

Из формулы $m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$ следует: $m^2(1 - \beta^2) = m_0^2$, $m^2 - m^2v^2/c^2 = m_0^2$ и $m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$, откуда

$$m^2c^2 - p^2 = m_0^2c^2 = \text{const}$$

— величина, инвариантная при изменении системы отсчета.

Следовательно, для тел, имеющих отличную от нуля массу покоя $m_0 \neq 0$, невозможно движение со скоростью света, при которой импульс тела численно равен $p = mv = mc$. Такое движение со скоростью света $v = c$ не только возможно, но и единственно возможно для тел, не имеющих массы покоя:

$m_0 = 0$. Действительно, $m^2c^2 - m^2v^2 = 0$, откуда $v = \pm c$. Такими телами являются фотоны и, может быть, некоторые виды нейтрино.

Массу (релятивистскую!) фотона можно узнать, используя закон взаимосвязи массы и энергии. Как известно, энергия фотона $\varepsilon \stackrel{20-V}{=} h\nu \stackrel{20}{=} mc^2$, откуда

$$m = h\nu/c^2.$$

Импульс фотона $p = mc = h\nu/c \stackrel{4-IV}{=} h/(cT) \stackrel{37-IV}{=} h/\lambda$, откуда длина волны

$$\lambda = h/p. \quad (21)$$

Французский физик де Бройль предположил в 1924 г., что такую же длину волны имеет любая частица, импульс которой $p = mv$. Это предположение было блестяще подтверждено опытами по дифракции электронов и привело в дальнейшем к созданию квантовой механики.

4. Внутренняя энергия идеального газа

При выводе основного уравнения кинетической теории газов (9-II) учитывалось только поступательное движение молекул, которое складывалось по трем независимым направлениям, но молекула может вращаться, ее части — колебаться, и эти независимые движения не скажутся на давлении газа. Количество независимых движений, в которых участвует тело, называется его *числом степеней свободы* i . Из-за хаотичности движений в статистической системе тел, на все степени свободы приходится одинаковая часть энергии — *принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы*. Значит, на каждую из «поступательных» степеней свободы приходится энергия $\langle w_i \rangle = \frac{1}{3} \langle w_x \rangle \stackrel{22-II}{=} \frac{1}{2} kT$, и такая же энергия соответствует любой другой степени свободы. Поэтому средняя кинетическая энергия одной молекулы идеального газа $\langle E_x \rangle = \frac{i}{2} kT$, что совпадает с $\langle w_x \rangle$ только для одноатомного газа. Модель его молекулы — материальная точка, ее внутренние размеры

исчезающе малы, а структура не рассматривается. Следовательно, колебаний в ней нет, а энергия вращения пренебрежимо мала (по 56-1). Модель молекулы двухатомного газа — система двух атомов, находящихся на определенном расстоянии, т. е. жесткая гантель. Такая молекула может участвовать в трех независимых поступательных движениях и в двух вращениях — вокруг осей, перпендикулярных ее оси симметрии. Энергия вращения вокруг этой оси тоже пренебрежимо мала, как у одноатомной молекулы (при таком вращении ее радиус — это радиус атомов). Значит, у двухатомной молекулы $i = 5$. У многоатомных достаточно «жестких» молекул, атомы которых не лежат на одной прямой, $i = 6$ (три независимых поступательных движения и три вращения вокруг взаимно перпендикулярных осей).

Внутренняя энергия идеального газа — это сумма кинетических энергий его молекул:

$$U = \langle E_k \rangle \cdot N = \frac{i}{2} k T N_A \frac{m}{M} \stackrel{21-11}{=} \frac{m}{M} \frac{i}{2} R T. \quad (22)$$

Ее изменение $dU \stackrel{22}{=} \frac{m}{M} \frac{i}{2} R dT$.

Удельная теплоемкость при постоянном объеме

$$c_V \stackrel{33-11}{=} \frac{\delta Q}{m dT} \stackrel{28-11}{=} \frac{dU}{m dT} = \frac{iR}{2M}.$$

При $p = \text{const}$ $p dV \stackrel{20-11}{=} \frac{m}{M} R dT$.

Удельная теплоемкость при постоянном давлении

$$c_p \stackrel{34-11}{=} \frac{\delta Q}{m dT} \stackrel{28-11}{=} \frac{dU + \delta A}{m dT} \stackrel{43-11}{=} \frac{dU}{m dT} + \frac{p dV}{m dT} = c_V + \frac{R}{M}.$$

Отношение этих теплоемкостей

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_V + R/M}{c_V} = 1 + \frac{R \cdot 2M}{MiR} = 1 + \frac{2}{i}. \quad (23)$$

5. Уравнение Пуассона. Цикл Карно

Для адиабатного процесса $\delta Q = 0$, $p dV \stackrel{28-11}{=} -dU \stackrel{22}{=} -\frac{m}{M} \frac{i}{2} R dT$. Разделим это уравнение почленно на (20 — II): $\frac{dV}{V} = -\frac{i}{2} \frac{dT}{T}$ и проинтегрируем:

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \stackrel{43-11}{=} -\frac{i}{2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}. \text{ В соответствии с формулой (38-М) получаем}$$

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = -\frac{i}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{-i/2}$$

— логарифмическое уравнение. Следовательно,

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/\gamma} \text{ или } \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}\right)^{1/\gamma},$$

откуда

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{2/\gamma} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} \text{ и } \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{2/\gamma+1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Значит

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} = \frac{p_1}{p_2} \text{ или } p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}.$$

— для двух произвольных состояний. Произведение давления данной массы газа на его объем в степени γ есть величина постоянная в адиабатном процессе:

$$pV^{\gamma} = \text{const} \quad (24)$$

— уравнение Пуассона.

Удельная теплоемкость при постоянном давлении

$$c_p = \frac{33-\pi}{m} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{28-\pi}{m} \frac{dU}{dT} + \frac{\delta A}{m} = \frac{47-\pi}{m} \frac{c_v dT}{dT} + \frac{\delta A}{m} = \frac{43-\pi}{m} \frac{dT}{dT} = c_v + \frac{p dV}{m dT}.$$

При температуре T_1 (см. рис. 148) идеальный газ получает количество теплоты Q_1 , при температуре T_2 — отдает количество теплоты Q_2 , причем

$$Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT_1 \frac{dV}{V} = \frac{44-M}{M} RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

$$-Q_2 = \int_{V_3}^{V_4} p dV = \int_{V_3}^{V_4} \frac{m}{M} RT_2 \frac{dV}{V} = \frac{44-M}{M} RT_2 \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Объемы, стоящие под знаками логарифма, связаны изотермами $p_1 V_1 = p_2 V_2$ и $p_3 V_3 = p_4 V_4$ и адиабатами

$p_1 V_1^{\gamma} = p_4 V_4^{\gamma}$; $p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma}$, откуда $p_1 V_1^{\gamma}/(p_2 V_2^{\gamma}) = p_4 V_4^{\gamma}/(p_3 V_3^{\gamma})$. Заменим отношения

давлений: $\frac{V_2}{V_1} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = \frac{V_3}{V_4} \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma}$. После сокращений остается: $(V_1/V_2)^{\gamma-1} =$

$= (V_4/V_3)^{\gamma-1}$ и $V_1/V_2 = V_4/V_3$. Значит, $\ln(V_4/V_3) = \ln(V_1/V_2) = -\ln(V_2/V_1)$.

Следовательно, коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta_K = \frac{(46-\pi) (m/M) RT_1 \ln(V_2/V_1) + (m/M) RT_2 \ln(V_4/V_3)}{(m/M) RT_1 \ln(V_2/V_1)} =$$

$$= 1 + \frac{T_2 \ln(V_4/V_3)}{T_1 \ln(V_2/V_1)} = 1 - \frac{T_2 \ln(V_4/V_3)}{T_1 \ln(V_1/V_2)}.$$

Таким образом,

$$\eta_k = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (25)$$

6. Теорема Гаусса — Остроградского

В разд. III, § 1.3 мы условились проводить силовые линии так, чтобы через единичную площадку, перпендикулярную линиям, было проведено столько линий, сколько единиц содержит модуль вектора напряженности в данной точке.

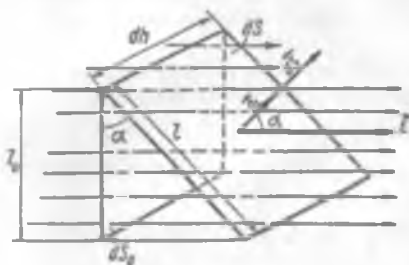


Рис. 464

Так легко провести линии напряженности в однородном поле. Но и в неоднородном поле можно сколь угодно точно считать все векторы E одинаковыми для достаточно малой окрестности рассматриваемой точки.

Проведем через бесконечно малую площадку dS_0 , перпендикулярную вектору E в данной точке (рис. 464), столько линий dN , чтобы

$$\frac{dN}{dS_0} = E$$

(dN/dS_0 — число линий, приходящихся на единичную площадку). Естественно, что $dN = E dS_0$. Рассмотрим произвольную бесконечно малую площадку dS , проекция которой на плоскость, перпендикулярную вектору E , равна dS_0 . Легко видеть, что через нее пройдут те же линии напряженности, число которых

$$dN. \text{ Из рис. 464 } \cos \alpha = \frac{l_0}{l} = \frac{l_0 dh}{l dh} = \frac{dS_0}{dS}, \text{ откуда } dS_0 = dS \cos \alpha \text{ и } dN = E dS \cos \alpha.$$

Введем определение вектора dS , численно равного площади dS и направленного по нормали к ней:

$$dS = dS n_1,$$

где n_1 — единичный вектор нормали ($n_1 = 1$). Тогда $dN \stackrel{+M}{=} (E dS)$. В зависимости от угла между векторами E и n_1 эта величина будет положительной ($\alpha < \pi/2$), отрицательной ($\alpha > \pi/2$) или нулем ($\alpha = \pi/2$). Количество линий вектора E , проходящих через произвольную конечную поверхность, назовем *поток*ом *линий вектора напряженности* (разумеется, если они проведены, как условлено):

$$N \stackrel{+M}{=} \int_S (E dS). \quad (26)$$

Теперь можно забыть о количестве линий вектора E и рассматривать интеграл (26) в качестве определения потока линий вектора E .

Поток линий через замкнутую* поверхность называют *полным потоком*:

$$N_0 = \oint_S (E dS). \quad (27)$$

* Замкнутой называется поверхность, которая разделяет пространство на две части — внутреннюю и внешнюю, не сообщающиеся между собой.

Для такой поверхности в качестве n , приняли единичный вектор внешней нормали.

Ограничимся рассмотрением однородной среды, во всех точках которой диэлектрическая проницаемость одинакова и неизменна.

Полный поток линий вектора E через сферу, окружающую точечный заряд Q_0 в ее центре (рис. 465), равен

$$N_0 = \oint_S (E dS) = \oint_S \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} (r dS) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \oint_S dS = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\epsilon_0\epsilon}.$$

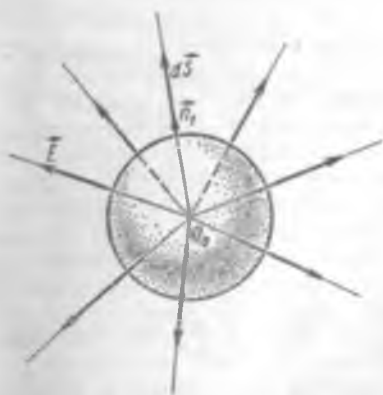


Рис. 465

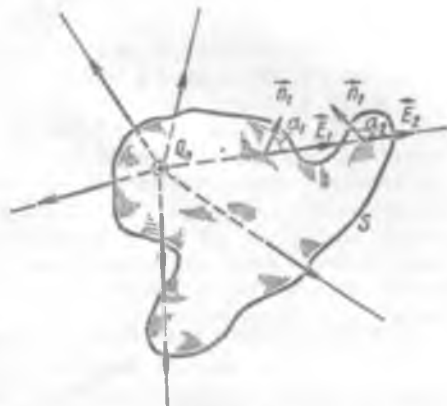


Рис. 466

Окружим точечный заряд Q_0 произвольной замкнутой поверхностью S (рис. 466). Элементарный поток $dN = (E dS)$ — величина алгебраическая, линии, выходящие из поверхности, считаются со знаком плюс ($\cos \alpha_1 > 0$ при выбранной внешней нормали), входящие — со знаком минус ($\cos \alpha_2 < 0$). Каждая из проведенных линий пересекает поверхность нечетное число раз, причем попеременно со знаками плюс и минус. Следовательно, каждая линия будет считаться один раз, и полный поток будет таким же, как на рис. 465, т. е.

$$N_0 = Q_0/(\epsilon_0\epsilon).$$

Если бы заряд Q_0 был отрицательным, то на рис. 465 или 466 изменились бы только направления силовых линий и, значит, знак потока. Формула осталась бы прежней, а полный поток стал бы отрицательным.

Пусть заряд Q_0 находится вне замкнутой поверхности (рис. 467). Среди линий вектора E можно различить не пересекающиеся с поверхностью, касающиеся ее и пересекающие данную поверхность четное число раз (последний случай охватывает и две первые возможности, так как нуль — четное число). Следовательно, каждая линия в потоке будет считаться некоторое число раз со знаком плюс и столько же раз со знаком минус. В результате, полный поток линий напряженности от заряда, не охватываемого замкнутой поверхностью, равен нулю.

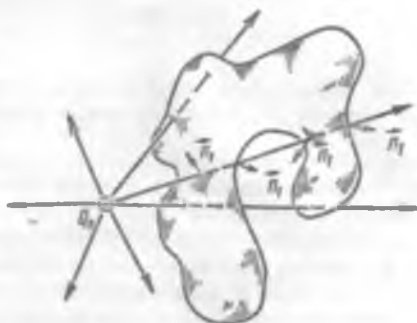


Рис. 467

Итак, мы установили, что полный поток линий напряженности не зависит от формы поверхности и равен $Q_0/(\epsilon_0 \epsilon)$, если заряд Q_0 находится внутри этой поверхности, или нулю, когда заряд вне ее. Пусть теперь имеется система из k точечных зарядов (рис. 468). Мысленно выделим замкнутую поверхность S и подсчитаем полные потоки линий вектора напряженности:

$$N_1 = \oint_S (\mathbf{E}_1 d\mathbf{S}) = \frac{Q_1}{\epsilon_0 \epsilon};$$

$$N_2 = \oint_S (\mathbf{E}_2 d\mathbf{S}) = 0;$$

.....

$$N_i = \oint_S (\mathbf{E}_i d\mathbf{S}) = \begin{cases} Q_i/(\epsilon_0 \epsilon), \\ 0; \end{cases}$$

.....

$$N_k = \oint_S (\mathbf{E}_k d\mathbf{S}) = \frac{Q_k}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Сложим почленно полученные уравнения $\sum_{i=1}^k \oint_S (\mathbf{E}_i d\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\epsilon_0 \epsilon}$, где количество зарядов внутри поверхности $n \leq k$. Имеем $\sum_{i=1}^k \oint_S (\mathbf{E}_i d\mathbf{S}) \stackrel{13.11}{=} \oint_S \sum_{i=1}^k (\mathbf{E}_i d\mathbf{S}) \stackrel{13.11}{=} \oint_S d\mathbf{S} \sum_{i=1}^k \mathbf{E}_i = \oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S})$, где $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^k \mathbf{E}_i$ — напряженность результирующего поля в точках эле-



Рис. 468



Рис. 469

мента поверхности $d\mathbf{S}$ (напомним, что этот элемент поверхности так мал, что векторы $\mathbf{E}$ во всех его точках одинаковы). Значит,

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \sum_{i=1}^n Q_i \quad (28)$$

— теорема Гаусса — Остроградского: полный поток линий вектора напряженности электрического поля в однородной среде не зависит от формы поверхности и равен деленной на $\epsilon_0 \epsilon$ алгебраической сумме зарядов, охваченных этой поверхностью.

Пусть, например, поле создано тремя точечными зарядами (рис. 469). Рассмотрим замкнутую поверхность S_1 , охватывающую первые два заряда. Тогда

$$\oint_{S_1} (E dS) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} (Q_1 + Q_2).$$

В левой части этого уравнения вектор E на выделенном элементе поверхности dS характеризует некоторое поле. Какими зарядами оно создано? Многие читатели ответят: Q_1 и Q_2 . Выберем тогда другую замкнутую поверхность S_2 . Для нее

$$\oint_{S_2} (E dS) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} (Q_1 + Q_3).$$

Спрашивается, вектор E на выделенном элементе поверхности dS (общем для двух поверхностей) тот же, что в первом случае, или другой? Но если другой, то, подбирая другую мысленную поверхность, мы изменили материю — электрическое поле, характеризующееся вектором E . Так быть не может. Значит, векторы E в первом и во втором интегралах одинаковы. Они характеризуют суммарное поле всех трех зарядов. Но тогда почему различны левые части уравнений? Потому что складываются одинаковые элементарные потоки только на общих частях поверхностей S_1 и S_2 , на других частях поверхностей элементарные потоки различны. Надо понять, что в обоих уравнениях написаны три полных потока, только потоки в первом — от заряда Q_3 , а во втором — от заряда Q_2 равны нулю (не напряженности, а полные потоки!).

Пусть поле создано одним точечным зарядом Q_0 , как на рис. 465, 466 или 467. Окружим этот заряд произвольной поверхностью и будем ее стягивать к точке, где находится этот заряд. Поток вектора E при этом не меняется и равен $Q_0/(\epsilon_0 \epsilon)$. Если же стягивать эту поверхность к любой другой точке, рано или поздно заряд окажется вне этой поверхности, и полный поток вектора E сквозь нее станет равным нулю. Это доказывает, что источник электрического поля находится именно в той точке, где расположен заряд, т. е. источником поля является заряд.

С помощью теоремы Гаусса — Остроградского можно сравнительно легко найти напряженность поля в ряде частных случаев. Для этого надо замкнутую поверхность представить такой, чтобы она проходила через точку, в которой определяется напряженность, и чтобы уравнение (28) интегрировалось. Лучше всего, если на всей поверхности или на конечном числе ее частей векторы E будут одинаковыми. Например, поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью (рис. 470). Поверхностная плотность заряда σ задана.

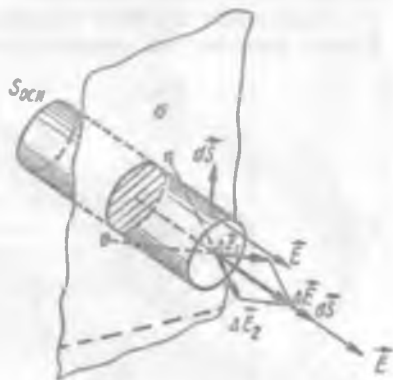


Рис. 470

Любому элементу поверхности, создающему некоторую напряженность в рассматриваемой точке, найдется симметричный элемент, создающий такую же по модулю напряженность, так что напряженность от двух элементов нормальна плоскости. Следовательно, напряженность поля в любой заданной точке направлена перпендикулярно плоскости от нее, если плоскость заряжена положительно ($\sigma > 0$), или к ней, если плоскость заряжена отрицательно ($\sigma < 0$).

Выберем в качестве замкнутой поверхности прямого цилиндра, образующие которого параллельны напряженностям. Тогда интеграл полного потока по (43-М)

разобьется на три интеграла — по боковой поверхности цилиндра и по двум его основаниям (последние интегралы одинаковы из соображений симметрии):

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \int_{S_6} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) + 2 \int_{S_{\text{осн}}} (\mathbf{E} d\mathbf{S}).$$

Интеграл по боковой поверхности равен нулю, так как подынтегральное выражение равно нулю по (4-М) во всех точках боковой поверхности. Остается

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) \stackrel{4-М}{=} 2 \int_{S_{\text{осн}}} E dS \stackrel{4-М}{=} 2E \int_{S_{\text{осн}}} dS = 2ES_{\text{осн}} \stackrel{28}{=} \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon},$$

где Q — заряд заштрихованной части плоскости, ибо только она несет заряд внутри выбранной поверхности. Так как $dQ \stackrel{8-III}{=} \sigma dS$, то $Q = \int_{S_{\text{осн}}} \sigma dS \stackrel{4-М}{=} \sigma S_{\text{осн}}$.

Следовательно, $2S_{\text{осн}}E = \sigma S_{\text{осн}}/(\epsilon_0 \epsilon)$, откуда напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости равна

$$E = \sigma/(2\epsilon_0 \epsilon). \quad (29)$$

Сохранится ли это выражение, если отрезать нижнюю часть плоскости далеко от выбранного цилиндра (рис. 470, пунктир)?

Нет, потому что поле перестанет быть однородным, интеграл можно будет написать, но взять его, как раньше, невозможно. Поэтому написанное выражение справедливо для конечной плоскости лишь приблизительно, если расстояние от данной точки до плоскости много меньше расстояния от нее до всех границ этой плоскости.

Рассмотрим еще поле заряженного проводящего шара (рис. 471). Из закона Кулона известно, что одноименные заряды отталкиваются, следовательно, заряд



Рис. 471

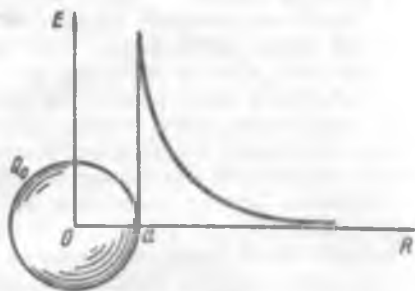


Рис. 472

Q_0 распределится по поверхности шара, причем, из соображений симметрии, равномерно. Поле такого заряда радиально симметрично, поэтому в качестве поверхности интегрирования выберем сферу радиусом R_1 с центром в точке O . Тогда

$$\oint_{S_1} (\mathbf{E}_1 d\mathbf{S}) \stackrel{4-1-11}{=} E_1 \cdot 4\pi R_1^2 \stackrel{28}{=} 0,$$

откуда напряженность поля в любой точке внутри проводника (и не только шарового!) равна нулю. Для любой точки вне проводника, снова выбрав из соображений симметрии сферу, имеем $\oint (E_2 dS) \stackrel{44-M}{=} E_2 \cdot 4\pi R_2^2 \stackrel{28}{=} Q_0/(\epsilon_0 \epsilon)$, откуда

$$E_2 = Q_0/(4\pi\epsilon_0\epsilon R_2^2).$$

Таким образом, поле заряженного шара вне его аналогично полю точечного заряда, сосредоточенного в его центре и равного заряду шара [см. (6-III)].

В частности, напряженность вблизи поверхности шара

$$E_s = Q_0/(4\pi\epsilon_0\epsilon a^2).$$

В этом случае мы видим на границе двух сред разрыв функции $E(R)$ (рис. 472): предел слева (со стороны меньших значений R) равен нулю, предел справа (со стороны больших значений R)

$$E = Q_0/(4\pi\epsilon_0\epsilon a^2) \neq 0.$$

Разумеется, применение теоремы Гаусса — Остроградского не ограничивается приведенными примерами.

7. Напряженность поля прямого тока

Направление вектора H в таком поле мы выяснили в разд. III, § 3.1. Модуль этого вектора (изображенного на рис. 245):

$$H = \int_H dH \stackrel{64-III}{=} \int_l \frac{I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

В этом выражении три переменных, поэтому интегрировать трудно. Заменим их одной переменной — углом φ (рис. 473): $\sin \alpha = \cos \varphi$; $\cos \varphi = R/r$. Значит, $r = R/\cos \varphi$; $\operatorname{tg} \varphi = l/R$, откуда $l = R \cdot \operatorname{tg} \varphi$ и $dl \stackrel{15-M}{=} R d \operatorname{tg} \varphi \stackrel{14-M}{=} R (\operatorname{tg} \varphi)' d\varphi \stackrel{30-M}{=} R d\varphi/\cos^2 \varphi$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} H &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{IR d\varphi \cos \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi \cdot 4\pi R^2} \stackrel{44-M}{=} \frac{I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \stackrel{41-M}{=} \\ &= \frac{I}{4\pi R} \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \stackrel{34-M}{=} \frac{I}{4\pi R} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{I}{2\pi R}. \quad (30) \end{aligned}$$



Рис. 473

Обратите внимание на знаки углов в пределах интегрирования: углы соответствуют началу φ_1 и концу φ_2 тока; от кратчайшего расстояния R «по току» углы положительны, «против тока» — отрицательны.

8. Теорема полного тока

Имеем бесконечно длинный прямолинейный достаточно тонкий провод с током I , перпендикулярный плоскости рис. 474. Окружим ток произвольным мысленным замкнутым контуром и подсчитаем циркуляцию вектора напряженности магнитного поля по этому контуру $\oint_l (\mathbf{H} d\mathbf{l})$. Скалярное произведение

$$\mathbf{H} d\mathbf{l} \stackrel{4-M}{=} H dl \cos \alpha = H dl \frac{dh}{dl} \stackrel{4-M}{=} H r d\varphi \quad (\text{мы использовали выражение косинуса из прямоугольного треугольника 123 и определение радианной меры угла } d\varphi \stackrel{1-M}{=} \frac{dh}{r}, \text{ где бесконечно малая хорда } dh \text{ неотличима от соответствующей дуги}).$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля будет суммой таких выражений, в каждом из которых разные r и H :

$$\oint_l (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \oint_l H r d\varphi \stackrel{10}{=} \int_0^{\varphi_2} \frac{I}{2\pi r} r d\varphi \stackrel{41-M}{=} \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = I.$$

Если контур интегрирования l неплоский, то его можно представить как совокупность элементов $d\mathbf{l}$, лежащих в плоскости рис. 474 и перпендикулярных ей. Скалярное произведение $\mathbf{H} d\mathbf{l}$ для последних элементов равно нулю по определению (4-M).

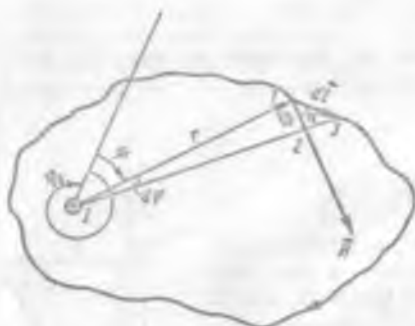


Рис. 474

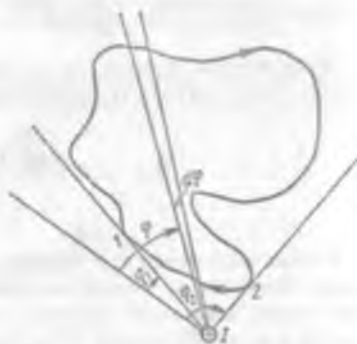


Рис. 475

Пусть теперь контур l не охватывает ток I (рис. 475). Тогда

$$\oint_l (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{I}{2\pi r} r d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{I}{2\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{I}{2\pi} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Итак, циркуляция вектора напряженности не зависит от формы мысленного контура и равна силе тока, если ток пронизывает поверхность, опирающуюся на контур интегрирования, или нулю, если ток не охватывается контуром.

Циркуляция вектора — величина алгебраическая; если изменить направление обхода контура на рис. 474 (или направление тока I), то $\cos \alpha$ станет от-

рицательным и циркуляция получится меньшей нуля. Следовательно, при подсчете циркуляции силу тока нужно считать положительной, если направление тока по правилу правого винта (см. рис. 7) соответствует обходу контура, и наоборот.

Рассмотрим совокупность k токов. Вообразим контур l (рис. 476) и подсчитаем циркуляцию от всех токов по этому контуру:

$$\oint_l (\mathbf{H}_1, d\mathbf{l}) = I_1 \quad (I_1 < 0 \text{ при выбранном направлении обхода});$$

$$\oint_l (\mathbf{H}_2, d\mathbf{l}) = 0;$$

$$\oint_l (\mathbf{H}_3, d\mathbf{l}) = I_3;$$

$$\oint_l (\mathbf{H}_i, d\mathbf{l}) = \begin{cases} I_i & (\text{может быть как положительной, так и отрицательной величиной в зависимости от направления тока}). \end{cases}$$



Рис. 476

Сложим почленно полученные выражения:

$$\sum_{i=1}^k \oint_l (\mathbf{H}_i, d\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^k I_i.$$

Справа стоит алгебраическая сумма охваченных контуром l токов, число которых $n \leq k$. Преобразуем левую часть полученного соотношения:

$$\sum_{i=1}^k \oint_l (\mathbf{H}_i, d\mathbf{l}) \stackrel{4.3.11}{=} \oint_l \sum_{i=1}^k (\mathbf{H}_i, d\mathbf{l}) \stackrel{4.3.11}{=} \oint_l \sum_{i=1}^k \mathbf{H}_i = \oint_l (\mathbf{H}, d\mathbf{l}),$$

где $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^k \mathbf{H}_i$ — по принципу суперпозиции вектор результирующей напряженности

магнитного поля от всех k токов в точках элемента $d\mathbf{l}$ мысленного контура. Мы получили теорему полного тока

$$\oint_l (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^n I_i \quad (31)$$

— циркуляция вектора напряженности магнитного поля не зависит от формы контура и равна алгебраической сумме токов, охватываемых данным контуром.

Теорема полного тока применяется для вычисления напряженности магнитного поля (по которой можно вычислить вектор магнитной индукции). Для этого нужно мысленный контур l выбрать так, чтобы он проходил через ту точку поля, в которой определяется $\mathbf{H}$, и интеграл сравнительно легко брался (лучше всего, если на всем контуре или на конечном числе его частей этот вектор будет неизменным).

Рассмотрим поле длинного прямого соленоида (рис. 477). Внутри такого соленоида достаточно далеко от его концов поле можно считать однородным. Выберем контур в виде длинного прямоугольника, чтобы достаточно далеко от соленоида можно было считать напряженность исчезающе малой. Интеграл по

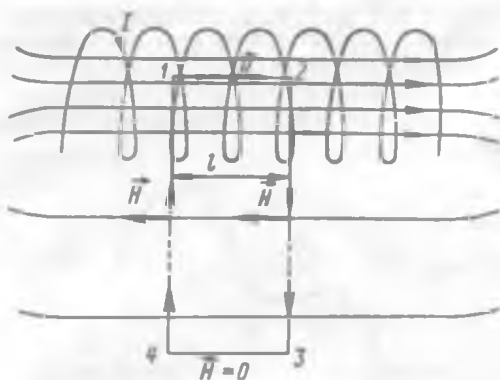


Рис. 477

замкнутому контуру распадается на четыре интеграла, три из которых равны нулю: $\oint_2 (\mathbf{H} d\mathbf{l}) \stackrel{4-M}{=} 0 =$

$$= \int_4 (\mathbf{H} d\mathbf{l}) \text{ (так как } d\mathbf{l} \perp \mathbf{H}), \int_3 (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = 0 \text{ (так как } H \approx 0). \text{ Остается}$$

$$\oint_1 (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \int_1 (\mathbf{H} d\mathbf{l}) \stackrel{4-M}{=} \int_1 H dl \stackrel{44-M}{=} H \int_1 dl \stackrel{37-M}{=} Hl \stackrel{31}{=} In,$$

где n — число витков соленоидов на длине l . Следовательно,

$$H = In/l. \quad (32)$$

Напряженность магнитного поля достаточно длинного соленоидов равна числу его ампер-витков на единице длины.

9. Плотность энергии магнитного поля тока

Имеем достаточно длинный прямой соленоид с током I . Если пренебречь потоком рассеяния (т. е. потоком магнитных линий, замыкающихся через обмотку), то можно приблизительно считать магнитное поле сосредоточенным внутри такого соленоидов и однородным. Энергия этого магнитного поля

$$W_m \stackrel{83-M}{=} LI^2/2.$$

Э. д. с. самоиндукции в таком соленоиде (без ферромагнитного сердечника), возникающая при изменении силы тока, равна $\mathcal{E}_s \stackrel{83-III}{=} -L \frac{dI}{dt}$. С другой стороны в каждом витке возникает $\mathcal{E}_i \stackrel{80-III}{=} -\frac{d\Phi}{dt}$, а в соленоиде n витков соединено последовательно. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s &= -n \frac{d\Phi}{dt} \stackrel{78-III}{=} -n \frac{d}{dt} (BS) \stackrel{67-III}{=} -nS \frac{d}{dt} (\mu_0 \mu H) \stackrel{32}{=} \\ &= -nS\mu_0 \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{In}{l} \right) = -\frac{\mu_0 \mu n^2 S}{l} \frac{dI}{dt}, \end{aligned}$$

где S — площадь поперечного сечения; l — длина соленоидов; μ — магнитная проницаемость его сердечника.

Сравнивая две формулы э. д. с. самоиндукции, получаем индуктивность прямого соленоидов:

$$L = \mu_0 \mu n^2 S/l. \quad (33)$$

Теперь можно найти плотность энергии магнитного поля (тоже в парамагнитной или диамагнитной среде):

$$w = \frac{25-III}{dV} \frac{dW_m}{dV} = \frac{W_m}{V} \stackrel{83-III}{=} \frac{LI^2}{2lS} \stackrel{33,32}{=} \frac{\mu_0 \mu n^2 S H^2 l^2}{2l^2 S n^2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (34)$$

Мы получили выражение для прямого соленоидов. Но формула (25-III) от-

носится к определенной точке поля независимо от состояния этого поля в остальных точках. Следовательно, плотность энергии в данной точке неоднородного поля не изменится, если в остальных точках поле станет таким же, как в данной, т. е. однородным. Значит, если в некоторой точке произвольного поля есть определенная магнитная проницаемость и определенная напряженность поля, то плотность энергии магнитного поля в этой точке выражается формулой (34). Энергия элемента объема магнитного поля $dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} dV$, а энергия конечного объема в произвольном поле

$$W_m = \int_V \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} dV.$$

10. Вращающееся магнитное поле

Имеем три переменных вектора H_1 , H_2 , H_3 , расположенных под углами 120° друг к другу и изменяющихся по законам:

$$H_1 = H_0 \cos \omega t, \quad H_2 = H_0 \cos(\omega t - 120^\circ), \quad H_3 = H_0 \cos(\omega t - 240^\circ)$$

(сдвиг по фазе каждого тока по отношению к другим 120° , см. рис. 306 и 308). Составляющие напряженности магнитного поля изменяются по гармоническим законам — каждая в своем направлении (рис. 478). Выберем взаимно перпендикулярные оси координат x и y так, чтобы направление x совпадало с осью первой катушки. Тогда напряженность поля первой катушки всегда будет направлена вдоль оси x , а напряженности полей второй и третьей катушек будут иметь составляющие вдоль осей x и y .



Рис. 478

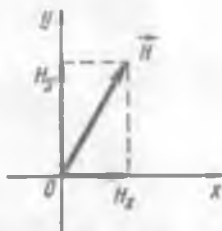


Рис. 479

В некоторый произвольный момент времени t проекции напряженности результирующего поля на оси координат равны:

$$H_x = H_1 + H_2 \cos \frac{2}{3}\pi + H_3 \cos \frac{4}{3}\pi,$$

$$H_y = H_2 \cos \frac{1}{6}\pi + H_3 \cos \frac{5}{6}\pi.$$

Используя формулы приведения, суммы и разности косинусов углов, имеем:

$$\begin{aligned} H_x &= H_0 \cos \omega t + H_0 \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \cos \frac{2}{3}\pi + H_0 \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \cos \frac{4}{3}\pi = \\ &= H_0 [\cos \omega t - \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \cos \frac{1}{3}\pi - \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \cos \frac{1}{3}\pi] = \end{aligned}$$

$$= H_0 \left(\cos \omega t - \cos \frac{1}{3}\pi \cdot 2 \cos \frac{\omega t - \frac{2}{3}\pi + \omega t - \frac{4}{3}\pi}{2} \cos \frac{\omega t - \frac{2}{3}\pi - \omega t + \frac{4}{3}\pi}{2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= H_0 \cos \omega t (1 + 2 \cos^2 \frac{1}{3} \pi) = 1,5 H_0 \cos \omega t; \\
 H_x &= H_0 \cos (\omega t - \frac{1}{3} \pi) \cos \frac{1}{6} \pi + H_0 \cos (\omega t - \frac{4}{3} \pi) \cos \frac{5}{6} \pi = H_0 \cos \frac{1}{6} \pi \times \\
 &\times 2 \sin \frac{\omega t - \frac{2}{3} \pi + \omega t - \frac{4}{3} \pi}{2} \sin \frac{\omega t - \frac{4}{3} \pi - \omega t + \frac{2}{3} \pi}{2} = \\
 &= 2 H_0 \cos^2 \frac{1}{6} \pi \sin \omega t = 1,5 H_0 \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

Сложив векторио составляющие напряженности магнитного поля, получим в момент времени t вектор напряженности результирующего поля, созданного всеми тремя катушками (рис. 479). Его модуль

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \sqrt{1,5^2 H_0^2 \cos^2 \omega t + 1,5^2 H_0^2 \sin^2 \omega t} = 1,5 H_0 \text{ не изменяется с течением времени, а составляющие вдоль осей изменяются гармонически.}$$

Следовательно, вектор напряженности результирующего магнитного поля равномерно вращается с угловой скоростью ω , оставаясь неизменным по модулю*. Получено равномерно вращающееся магнитное поле.

11. Исследование амплитуды смещения в вынужденных колебаниях

Исследуем амплитуду вынужденных колебаний заряда

$$Q_m \stackrel{31-IV}{=} \frac{\mathcal{E}_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}.$$

Она принимает наибольшие или наименьшие значения при таких частотах, для которых $dQ_m/d\omega \stackrel{8-M}{=} 0$. Производная

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_m}{d\omega} \stackrel{9,13-M}{=} \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cdot \frac{-\frac{d}{d\omega} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} = \\
 \stackrel{25,11-M}{=} - \frac{\mathcal{E}_m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^{-1/2}}{2L [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]} \left[2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 4\delta^2 \cdot 2\omega \right] = \\
 = \frac{\mathcal{E}_m \cdot 4\omega (\omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta^2)}{2L [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^{3/2}} \stackrel{8-M}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Первый корень этого уравнения $\omega = 0$; второй $\omega = \infty$. Найдем третий корень

ω_1 : $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$; $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$. При всех этих значениях ω касательная к гра-

фику $Q_m(\omega)$ горизонтальна. При $\omega = 0$ $Q_m \stackrel{31-IV}{=} \mathcal{E}_m / (L\omega_0^2) \stackrel{19-IV}{=} \mathcal{E}_m C L / L \stackrel{18-III}{=} Q_{ст}$ — статическому заряду, который был бы на конденсаторе, подключенном к источнику постоянного напряжения $\mathcal{E}_m$.

* Уравнения $H_x = H_m \cos \omega t$; $H_y = H_m \sin \omega t$ — это параметрически заданная кривая, описываемая концом вектора H . Ее уравнение получим, исключив параметр t :

$$H_x^2 = H_m^2 \cos^2 \omega t; H_y^2 = H_m^2 \sin^2 \omega t; H_x^2 + H_y^2 = H_m^2.$$

Это уравнение окружности радиусом $H_m = 1,5 H_0$.

При $\omega = \infty$ $Q_{\text{рез}} \stackrel{31-IV}{=} 0$. При $\omega = \omega_1$

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{рез}} &\stackrel{31-IV}{=} \frac{g_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \\
 &= \frac{g_m}{L\sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2\omega_0^2 - 8\delta^4}} = \frac{g_m}{L\sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\delta^4}} = \\
 &= \frac{g_m}{L \cdot 2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \stackrel{28-IV}{=} \frac{g_m}{R\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.
 \end{aligned}$$

Теперь у нас есть некоторые основания изобразить резонансную кривую $Q_{\text{рез}}(\omega)$, как на рис. 331. [Мы не полностью провели исследование. Так, не доказано, что при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ функция имеет минимум, а при $\omega = \omega_1$ — максимум. Но для этого недостаточно сведений в математическом введении.]

Аналогично самостоятельно исследуйте формулу (33-IV).]

*Надежда Николаевна Евграфова
Виктор Львович Каган*

**КУРС ФИЗИКИ
ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ
ОТДЕЛЕНИЙ ВУЗОВ**

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редакторы Г. Н. Чернышева,
В. Н. Новиков. Мл. редакторы С. А. Доровских, М. А. Бабар-
кина. Художественный редактор Л. П. Демидова. Художник
Н. Ю. Бабилова. Технические редакторы Э. М. Чижевский,
Н. В. Яшукова. Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 3943

Изд. № ФМ-776. Сдано в набор 29.05.84. Подп. в печать 29.12.84.
Формат 60 × 90/16. Бум. кн.-журн. Гарнитура таймс. Печать высокая.
Объем 30,5 усл. печ. л. 30,5 усл. кр.-отт. 32,24 уч.-изд. л. Тираж 50 000 экз.
Зак. № 1765. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул.,
д. 29/14.

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный
Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государствен-
ном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной
торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15.



1 р. 40 к.