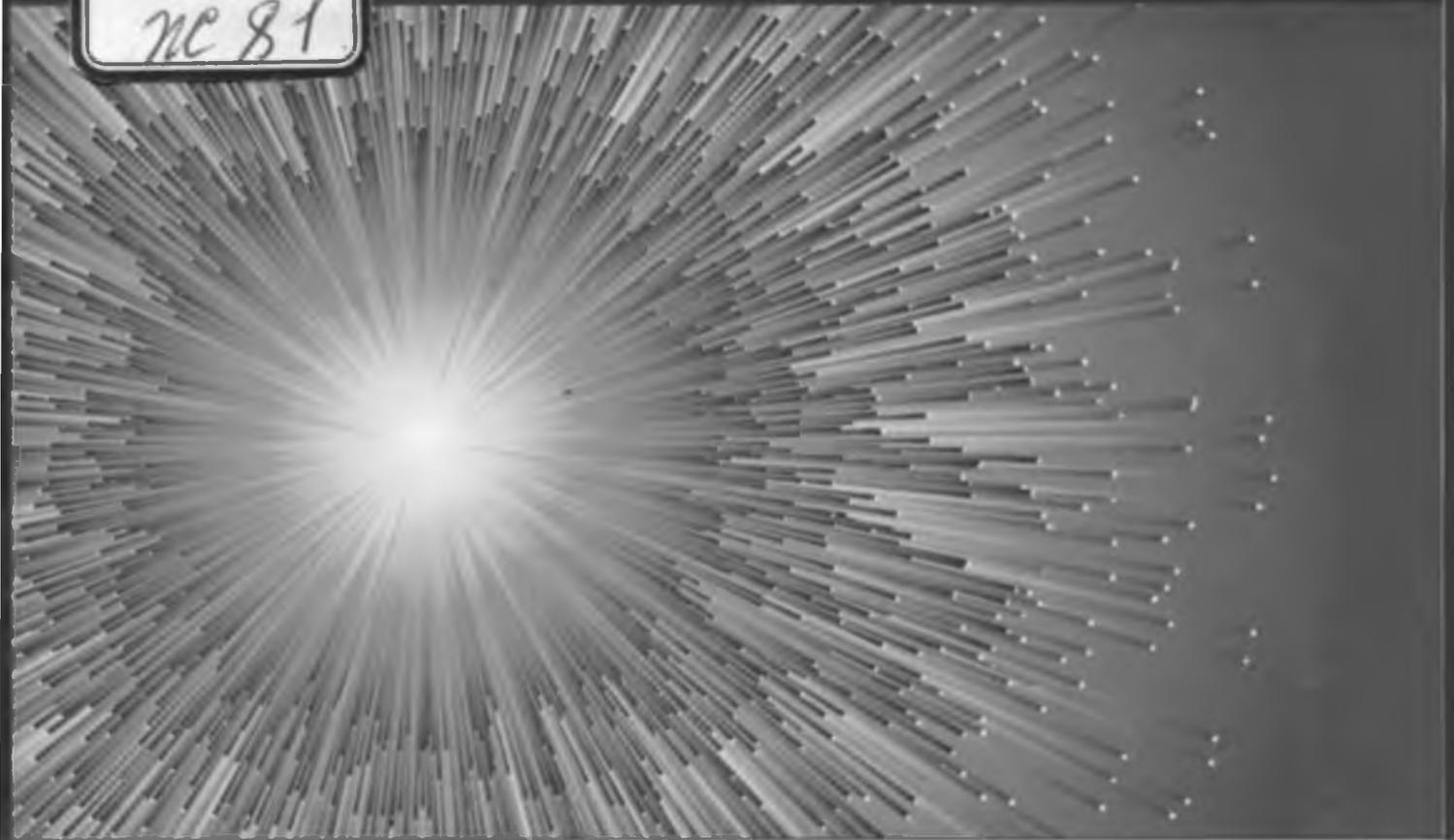


53.
№ 81



Мустахим Жумаев

**Квантовый
релятивистский
идеальный газ и
реликтовое излучение**



LAMBERT
Academic Publishing



Мустахим Жумаев

**Квантовый релятивистский
идеальный газ и реликтовое
излучение**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог, с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Bahnhofstraße 28, 66111 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

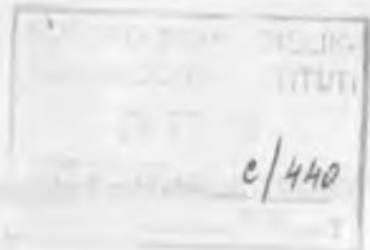
Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

ISBN: 978-3-659-86900-6

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2016 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2016



ОГЛАВЛЕНИЕ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.....	4
НЕОРДИНАРНЫЙ ВЗГЛЯД.....	6
ПРЕДИСЛОВИЕ.....	8

ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ КВАНТОВ МАГНИТНОГО ПОТОКА

1.1. Релятивистская стохастическая динамика магнитных вихрей.....	21
1.2. Уравнение для функции распределения импульсов флаксонов ..	26
1.3. Асимметричная функция распределения скорости флаксонов ..	30
1.4. Численное моделирование релятивистской стохастической динамики флаксонов.....	34
1.5. Теория релятивистского броуновского движения квантов магнитного потока.....	38
1.6. Функция распределения дискретного спектрального параметра броуновских флаксонов.....	52
1.7. Теория релятивистского идеального газа флаксонов.....	62
Комментарии и литературные указания.....	68
Задачи к главе 1.....	70

ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ НЕКВАНТОВОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА МАКСВЕЛЛИ – БОЛЬЦМАНА

2.1. Одномерное релятивистское броуновское движение частиц.....	75
2.2. Релятивистское флуктуационно-диссипативное соотношение для одномерного броуновского движения.....	79

2.3. Одномерный релятивистский идеальный газ.....	83
2.4. Характерные частоты излучения атомов одномерного релятивистского идеального газа.....	86
Теория некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана	
2.5. Функция распределение скорости частиц релятивистского идеального газа.....	93
2.6. Характерные скорости частиц релятивистского идеального газа (РИГ).....	101
2.7. Связь между давлением и плотности средней энергии релятивистского идеального газа.....	112
Комментарии и литературные указания.....	119
Задачи к главе 2.....	122

ГЛАВА 3. РЕЛЯТИВИСТСКИ – ИНВАРИАНТНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРВИЧНОГО КОСМИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

3.1. Статистическое равновесие теплового излучения с идеальным газом.....	126
3.2. Релятивистская инвариантность распределения Планка.....	133
Релятивистски – инвариантная статистическая теория первичного космического излучения	
3.3. Минимальная наблюдаемая максимальная спектральная интенсивность первичного космического излучения.....	1
3.4. Флуктуация наблюдаемой температуры реликтового излучения.....	151

3.5. Анизотропия наблюдаемой температуры первичного космического фонового излучения.....	161
3.6. Вселенная как совокупность квантовых релятивистских идеальных газов.....	178
3.7. Конформно – инвариантная термализационная теория реликтового излучения.....	197
Комментарии и литературные указания.....	201
Задачи к главе 3.....	204
ПОСЛЕСЛОВИЕ.....	206
Работы на основе которых написана монография.....	209
ЛИТЕРАТУРА.....	211
ПРИЛОЖЕНИЕ. Анизотропия первого и второго порядка наблюдаемой температуры первичного космического излучения.....	228

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В последнее десятилетие в связи с экспериментами на Большом адронном коллайдере и объяснением анизотропии температуры реликтового излучения (РИ) опять резко возрос интерес к исследованиям статистических свойств газов релятивистских частиц. Поэтому тема данной монографии и рассмотренные в ней проблемы являются актуальными. Монография состоит из трех логически связанных глав, где основным связующим звеном является релятивистская функция распределения скорости (для квази и обычных частиц).

В первой главе основное внимание уделено анализу нетривиального броуновского движения релятивистских квантов магнитного потока – флаксонов в термализованной джозефсоновской линии передачи (ДЛП). Основным результатом данной главы является вывод, что в недиссипативной ДЛП возможен распад флаксонов на фотоны электромагнитного излучения под действием токовых флуктуаций.

Во второй главе рассмотрена проблема противоречия между теорией относительности и нерелятивистской кинетической теорией газов. На основе функции распределения скоростей частиц неквантового релятивистского идеального газа (РИГ) Максвелла – Больцмана найдены характерные скорости их частиц (средняя и среднеквадратичная скорость). Предельным переходом показано, что если энергия покоя или масса частиц газа стремится к нулю образуется газ “тепловых” фотонов, модули скоростей которых равна скорости света и их направления совершенно равновероятно во всех направлениях. Проще говоря функция распределения их скоростей описывается дельта функцией и их угловое распределение изотропное.

Третья глава монографии представляет особый интерес. В этой главе получена функция, описывающая наблюдаемую температуру реликтового излучения (РИ) в разных направлениях, т.е. анизотропию температуры РИ

первого и второго порядка, которые согласуются с последними наблюдательными экспериментальными данными полученные с помощью космических спутников в течении сорока лет. Найдена равновесная температура Вселенной и минимальная наблюдаемая температура РИ. Далее на основе представленной автором теории квантового РИГ (без спецификации статистики их частиц) дано единое описание их статистических свойств, а также получено их общее уравнение состояния. Из них в пределе малого отношения тепловой энергии к энергии покоя частиц газа вытекают результаты нерелятивистской кинетической теории Максвелла. Показано, что в отличие от нерелятивистских газов давление РИГ является нелинейной функцией кинетической энергии частиц и она не может превышать одну треть плотности средней энергии всех частиц газа. В обратном пределе т.е. когда энергия покоя частиц квантового РИГ стремится к нулю найденные выражения переходят к известным результатам безмассовых бозонных и фермионных газов, которые, как известно, справедливы только в этом "особом" случае, т.е. при $m=0$. А также получен вывод о том, что температура первичного космического излучения неизменная и Вселенная стационарна. Последний результат представляет фундаментальный общенаучный характер и отражает релятивистски – инвариантную статистическую природу реликтового излучения.

Отмечу также что, принятый автором классический – подробный стиль изложения позволяет рекомендовать эту монографию в качестве учебника для студентов университетов, специализирующихся в областях теоретической физики, астрофизики элементарных частиц, физики конденсированных сред и космологии.

Р.М.Ибадов,

д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической физики и квантовой электроники СамГУ

НЕОРДИНАРНЫЙ ВЗГЛЯД

Это монография посвящена своеобразному обобщению результатов в областях релятивистской статистической физики, теории флуктуаций в нелинейных системах, физики реликтового излучения. Они определяют цель и место данной книги.

В первой главе получено релятивистское флуктуационно-диссипативное соотношение для квантов магнитного потока – флаксонов, которое связывает их среднюю квадрата скорости, абсолютную температуру системы и интенсивность токовых флуктуаций в джозефсоновской линии передачи. Замечательно что, из него в пределе очень малых флуктуаций следует знаменитое соотношение Эйнштейна, которое справедливо по своей физической сути только в нерелятивистском броуновском движении. Во второй главе показано, что в отличии от нерелятивистской теории идеального газа средняя, среднеквадратичная и определяемая ими дисперсии скоростей частиц ограничена при любом отношении энергии покоя их частиц к тепловой энергии. Кроме того установлено нелинейная зависимость давления РИГ от средней кинетической энергии их частиц. В третьей главе на основе релятивистской инвариантности распределения Планка для равновесного теплового излучения объяснено физический механизм анизотропии температуры первичного космического излучения. В частности найдено направление наблюдения вблизи которого наблюдается минимальная температура РИ, которые ранее не были известны специалистам занимающихся исследованием свойств этого таинственного до сих пор природой излучения.

Прочтение монографии показывает высокий профессиональный уровень её автора, а также оригинальность применимых методов и негнривальность полученных результатов. Для этого, несомненно, нужно

иметь тонкое чувство и умственную проницательность для нахождения «белых пятен» и их нового физического объяснения. Считаю, что это монография найдет свое достойное место в мировой физической литературе посвященных тематике рассмотренных в ней проблем.

М.З.Шарипов,

*кандидат физико-математических наук,
заведующий кафедрой физики БухИТИ*

ПРЕДИСЛОВИЕ

*Узгача тақлиддан мен қилгум ҳазар¹,
Иш қилгум то ақлим етгани қадар.
Ҳеч кимга ҳасад ва хусуматим йўқ,
Менга Ҳақнинг тенгсиз инъоми етар.*

*Всегда иду я своим путем,
Делаю только то, что постигну умом.
Нет зависти и вражды в душе моей,
Удовольствуюсь Божьим - бесценным даром.*

В первой главе исследовано неординарное релятивистское броуновское движение флаксонов во высоко-температурно сверхпроводниковых джозефсоновских линиях передачи под действием случайного тока и диссипации различной физической природы.

Вторая глава посвящена решению проблемы противоречия между специальной теорией относительности и нерелятивистской молекулярно-кинетической теорией.

В третьей главе предложено новое физическое объяснение свойств реликтового излучения. В частности, впервые определена равновесная температура Вселенной и минимальная наблюдаемая температура реликтового излучения, которые представляют фундаментальный общенаучный характер.

Краткое содержание монографии

Первая глава посвящена исследованию релятивистского броуновского движения квантов магнитного потока - флаксонов - частицеподобных релятивистских квазичастиц. Решение этой проблемы представляет важный научный, практический и также концептуальный интерес.

¹ Здесь и далее стихи автора - Мустакима Рафи.

В разделе 1.1 исследована релятивистская стохастическая динамика флаксонов в джозефсоновской линии передачи под действием постоянного и случайного стороннего тока, а также различных типов диссипации. Предполагая внешние возмущения малыми найдено уравнение описывающее изменения скорости флаксона на основе метода энергетического анализа.

В разделе 1.2 уравнение для скорости флаксонов преобразовалось в уравнение для импульсов флаксонов на основе релятивистской связи между этими величинами. Затем с помощью этого стохастического уравнения для импульсов получено уравнение для функции распределения импульсов флаксонов и найдено его стационарное решение.

В разделе 1.3 на основе преобразования функции распределения импульсов к скоростям найдена асимметричная функция распределения скорости флаксонов. Эта функция распределения скорости флаксонов не является гауссовой и приводит к нетривиальной вольт – амперной характеристике джозефсоновского перехода с шумовым током.

В разделе 1.4 представлены результаты численного моделирования релятивистской стохастической динамики квантов магнитного потока, которые подтвердили правильность теоретических расчетов в адиабатическом приближении, а также показали распад флаксонов и излучения непрерывных мод при сильных флуктуациях тока.

В разделе 1.5 анализируются свойства релятивистской функции распределения скорости флаксонов, которая устанавливается под действием чисто случайного тока и диссипации, вследствие туннелирования нормальных электронов. Показано что существует область параметров диссипации и интенсивностей флуктуаций тока при которых релятивистская функция распределения скорости флаксонов становится двухгорбовой. Такое невероятное поведение релятивистской функции распределения скорости – неочевидно, поскольку импульс является

однозначной, монотонной функцией скорости. Следовательно, эту особенность функции распределения заранее предвидеть было невозможно.

Затем на основе этой необычной функции распределения вычислена средняя квадрата скорости флаксонов - которая является нелинейной функцией интенсивности токовых флуктуаций. Дальнейший анализ показал, что в пределе слабых флуктуаций тока выражение для среднего квадрата скорости переходит в знаменитое соотношение Эйнштейна для нерелятивистского броуновского движения. Следовательно, найденную нами выражения для среднеквадратичной скорости можно рассматривать релятивистским обобщением соотношения Эйнштейна для броуновского движения частице- подобной релятивистской квазичастицы - квантов магнитного потока.

В разделе 1.6 представлена функция распределения спектральных параметров термализованных флаксонов. Эта функция описывает распределение спектрального параметра дискретного спектра при неограниченном увеличении числа флаксонов т.е. в непрерывном пределе. С помощью найденной функции распределения определена наиболее вероятное значение спектрального параметра термализованных флаксонов. Показано, что полученные здесь результаты представляют интерес также при переходном и черенковском излучении флаксонов в слоистых джозефсоновских переходах.

В разделе 1.7 найдено плотность энергии и уравнение состояния релятивистского идеального газа флаксонов на основе усреднения их выражений по релятивистской функции распределения скоростей флаксонов. Показано, что найденные выражения справедливы как в нерелятивистском, так и в ультра - релятивистском пределе. Следовательно, в этом случае проявляется ещё одна нетривиальная аналогия между релятивистским идеальным газом флаксонов и квантовым идеальным газом релятивистских частиц.

Вторая глава посвящена исследованию одномерного релятивистского броуновского движения и свойств некантового релятивистского идеального газа, частицы которого подчиняются статистике Максвелла – Больцмана.

В разделе 2.1 рассмотрено одномерное релятивистское броуновское движение частиц. По аналогии с результатами полученными в разделах 1.1 – 1.3 предыдущей главы сделано релятивистское обобщение теории Эйнштейна для броуновского движения.

В разделе 2.2 получено релятивистское флуктуационно-диссипативное соотношение для одномерного броуновского движения.

В разделе 2.3 анализируются свойства функции распределения скорости частиц одномерного релятивистского идеального газа. Показано, что существует условие при выполнении которого релятивистская функция распределения скорости частиц становится двугорбовой, как в случае релятивистского идеального газа флаксонов. Следовательно, появления этих особенностей имеет одинаковую физическую природу, которую мы назовем флуктуационной или термализационной неустойчивостью.

В разделе 2.4 найдена средняя частота излучения атомов совершающих одномерное тепловое движение. Полученный результат сопоставлен с результатом полурелятивистского подхода Эйнштейна, который для частоты излучения использовал формулу Доплера с учетом малых релятивистских поправок, а функцию распределения излучающих атомов считал максвелловским. Показано, что средний сдвиг частоты отличен от нуля и он имеет важное значение несмотря на свою малость.

В разделах 2.5 – 2.7 представлена теория некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана.

В разделе 2.5 получена трехмерная функция распределения скорости частиц релятивистского идеального газа с помощью преобразования функции распределения Больцмана – для импульсов частиц

релятивистского идеального газа к их скоростям. Показано, что свойства функции распределения скорости частиц релятивистского идеального газа определяется единственным параметром, который равен отношению энергии покоя частиц идеального газа к тепловой энергии. В частности, при очень больших значениях этого параметра найденная нами функция распределения скорости частиц релятивистского идеального газа переходит в знаменитое распределение Максвелла, сыгравший фундаментальный роль для построения нерелятивистской кинетической теории идеального газа.

В разделе 2.6 найдена средняя и среднеквадратичная скорость частиц релятивистского идеального газа. Показано, что действительно эти характерные скорости частиц не превышают предельную скорость в природе – скорость света. Кроме того, учитывая недостижимость абсолютного нуля температуры, сделано заключение, что только безмассовые частицы при любой температуре имеют единственную характерную скорость, равную скорости света. Безусловно, эти выводы имеют важное концептуальное значение, так как доказывают справедливость постулатов специальной теории относительности и в релятивистской статистической физики.

В разделе 2.7 приведен оригинальный вывод уравнения состояния релятивистского идеального газа на основе статистического усреднения по функции распределения скоростей частиц. Здесь получена важная связь между давлением и плотностью средней энергии идеального газа релятивистских частиц. Показано, что давление релятивистского идеального газа не может превышать одну треть его плотности средней энергии. Ранее это доказалось только для фотонного газа и равновесного теплового излучения.

Третья глава монографии посвящена проблеме первичного космического излучения, которая, как известно, является одной из важнейших фундаментальных проблем космологии, астрофизики

элементарных частиц и всей науки в целом. В этой главе представлены две независимые теории этого излучения: 1) релятивистски-инвариантная статистическая теория первичного космического излучения предложенная нами; 2) теория «космологическое рождение векторных бозонов и реликтовое излучение», которую мы по аналогии с предыдущей будем называть – конформно-инвариантной термализационной теорией реликтового излучения. Эти теории в отличие от тепловых теорий Вселенной (теорий Большого Взрыва) объясняют свойства этого излучения без связи с расширением Вселенной.

В разделе 3.1 дан эйнштейновский вывод спектральной плотности равновесного излучения, где им было учтено тепловое движение излучающих частиц. Согласно результатам работы Эйнштейна частотное распределение энергии излучения теплового возбуждения частиц подчиняется формуле Планка. Это так и должно быть, поскольку согласно доказательству Кирхгофа, спектральная плотность равновесного излучения является универсальной функцией частоты и температуры, не зависящая от свойства вещества. Кроме того, Эйнштейн доказал, что для установления статистического (или теплового) равновесия между газом и тепловым излучением должно существовать динамическое равновесие излучающих частиц и фотонов излучения. Только при выполнении этих двух условий: скорости излучающих частиц идеального газа подчиняются – распределению Максвелла, а частотное распределение энергии их излучения подчиняется – формуле Планка. В конце раздела указано, что эти два заключения сохраняют свои силы и при релятивистском обобщении теории Эйнштейна равновесного излучения. Правда, с одним отличием, теперь импульсы излучающих частиц идеального газа подчиняются – релятивистскому распределению Больцмана. Следовательно, скорости излучающих частиц подчиняются – релятивистскому распределению

скорости найденная нами во второй главе, которое как раз было получено на его основе.

В разделе 3.2 приведено паулиевское доказательство релятивистской инвариантности распределения Планка для частот равновесного теплового излучения. Этим свойством обладает и спектральная плотность энергии первичного космического излучения, так как, она является равновесным тепловым излучением по своей физической природе. Как показал Паули в своей работе, благодаря этой инвариантности получаются важные зависимости между излучаемой и наблюдаемой спектральной плотности энергии, а также между излучаемой и наблюдаемой частотой излучения.

В разделах 3.3 – 3.6 представлена предложенная нами новая релятивистски-инвариантная статистическая теория первичного космического излучения. Согласно этой теории ранняя Вселенная представляет собой находящийся в состоянии статистического равновесия идеальный газ элементарных частиц, подчиняющихся статистикам Максвелла – Больцмана, Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна. Следовательно, для определения макроскопических характеристик этой своеобразной статистической системы – плотности средней энергии и плотности чисел частиц, надо знать их равновесную температуру.

Согласно этой теории для определения температуры при котором произошло первичное космическое излучение необходимо определить функцию распределения наблюдаемых частот этого излучения и его наблюдаемую спектральную интенсивность.

В разделе 3.3 эта программа выполнена считая, что первичное космическое излучение формируют частицы одномерного релятивистского идеального газа. Затем мы пришли к заключению, что существует такое отношение массы к температуре при котором максимальное значение функции распределения наблюдаемых частот излучения (соответствующая

наиболее вероятной наблюдаемой частоте) имеет свое возможное наименьшее значение. Согласно нашим результатам эта равновесная температура примерно в два раза больше чем наблюдаемая температура реликтового излучения, которая согласно последним наблюдательным данным равна 2.728 кельвинам. Мы здесь определяли также энергию покоя частицы формировавшую первичную космическую излучению.

В разделе 3.4 приведены характерные средние наблюдаемой температуры первичного космического излучения посредством усреднения по трехмерной функции распределения скоростей излучающих их частиц. Показано, что средняя наблюдаемая температура реликтового излучения не превышает его равновесную температуру, среднеквадратичная же наблюдаемая температура этого излучения при любом соотношении массы частицы к температуре в точности равно температуре при котором произошло рождения Вселенной.

В разделе 3.5 найдено угловая зависимость температуры реликтового излучения от направления его наблюдения, т.е. так называемая анизотропия реликтового излучения. С помощью угловой функции наблюдаемой температуры первичного космического излучения впервые определена анизотропия его температуры во всех направлениях наблюдения. В рамках предложенной теории она имеет естественную природу и обусловлена тепловым движением излучающих его частиц. Показано, что при критическом отношении массы к температуре существует направление наблюдения при котором наблюдается минимальная температура реликтового излучения.

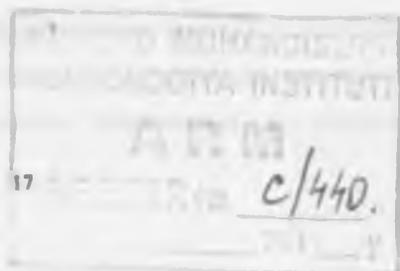
В разделе 3.6 найдены: выражения плотности чисел частиц, плотности средней энергии и давления, а также уравнения состояния квантовых релятивистских идеальных газов подчиняющихся статистикам Максвелла - Больцмана, Ферми - Дирака и Бозе - Эйнштейна при произвольном отношении массы к температуре. Как показывают наши результаты,

наибольшую вклад в суммарную плотность чисел частиц и плотность средней энергии вносят ультра – релятивистские, безмассовые частицы. Вклад же нерелятивистских частиц, которым соответствует очень малое отношение тепловой энергии к энергии покоя пренебрежимо мало, т.е. эти частицы существенно не влияют на процессы эволюции происходящих во Вселенной. Следовательно, барионная асимметрия материи во Вселенной имеет статистическую природу. Отметим, что найденные нами выражения для указанных величин в предельных случаях в точности переходят к известным результатам, справедливые только в этих случаях т.е. в нерелятивистском и ультра - релятивистском приближениях. На основе релятивистски-инвариантной статистической теории первичного космического излучения впервые определена: равновесная температура Вселенной 6,09 (336) К и минимальная наблюдаемая температура реликтового излучения 2,4727 К. Особо следует отметить, что подходы примененные в разделах 3.3, 3.5 и 3.6 приводят к одинаковому критическому значению отношения массы излучающей частицы к равновесной температуры Вселенной, которое равно $1,865 \frac{K}{c^2}$ (здесь K – постоянная Больцмана, c – скорость света).

В разделе 3.7 представлены результаты другой, – конформно-инвариантной термализационной теории реликтового излучения предложенная В.Н.Первушиным и его научной группой. Согласно этой теории введение конформных переменных приводят к конформной инвариантности полевых уравнений получаемых из стандартной космологической модели общей теории относительности. Выбор конформных переменных дает возможность переписать наблюдательные данные в относительных единицах, где происходит масштабирование всех масс и энергий дилатонным фактором порядка 10^{-17} . В результате отождествления конформных переменных с наблюдаемыми величинами дает следующую картину эволюции Вселенной: происходит эволюция масс

элементарных частиц при постоянной температуре реликтового излучения. Согласно этой теории, после космологического рождения векторных бозонов из вакуума и их распада на фотоны устанавливается статистически равновесная система бозонного и фотонного газа. При этом температуру векторных бозонов «наследуют» термализованные фотоны. Такой подход позволяет определить температуру фотонов т.е. температуру реликтового излучения, которая является инвариантом в рамках этой теории.

Следовательно, релятивистски-инвариантную статистическую теорию первичного космического излучения и конформно-инвариантную термализационную теорию реликтового излучения – вместе можно называть инвариантно-равновесной теорией, несмотря на различие используемых подходов и различного толкования полученных результатов приводят, по сути, к одинаковому выводу: Вселенная - стационарна, температура реликтового излучения – неизменна. Список работ, результаты которых включены в монографию приведен в её конце [A1-A11]. Все остальные результаты представляются впервые.



ГЛАВА I. ТЕОРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ КВАНТОВ МАГНИТНОГО ПОТОКА

*Истина не лежит на больших дорогах,
по которым ходят все.*

Леонардо да Винчи.

Дунё билмоқ – яшашдан мурод

*Якка тўлқин эрур солитон,
Ўзлигини сақлар муқобил
Хоҳи ишон, хоҳи майли, тон.
Кўл тилсимлар то ҳануз ботил.*

*Дунё нима? Борлиқ, мавжудот
Ҳаракат не? Олам иқболи.
Дунё билмоқ – яшашдан мурод,
Риъзатда инсон иқболи.*

*Манбаи не жаҳон равнақин,
Не бошқарар келажак томон?
Қурашдир бу – йўқ ўзга қоҳин,
Инсонга мос қурмоқ-чун замон.*

*Якка тўлқин эрур солитон,
Ўзлигини сақлар муқобил
Поймоя этса ҳақ ишни ёлгон,
Керак эмас ҳеч ўзга қотил.*

•••

The sense of this life consists in world study.

*Soliton is a solitary wave,
What does preserve it self immutable.
One can believe, one can reject,
That many mysteries have not been yet investigated*

*What is the world? Every thing that exists.
And motion is its happiness
The sense of this life consists in world study.
In striving is of sense our life.*

*What things cause the worlds?
What things define their future?
It is struggle, but not the will of the providence,
The expected century of Mankind will come.*

*Soliton is a solitary wave.
What does preserve itself immutable.
If justice is suppressed by evil,
The world will not need another executioner.*

Несомненно, явление броуновское движение занимает особое место в статистической физике, в теории флуктуаций, в теории фазовых переходов индуцированные шумом, а также в нелинейных теориях колебания и волн [1-12]. Конечно, началом серьезного изучения броуновских явлений послужило работа Эйнштейна по броуновскому движению, в котором он получил свое знаменитое соотношение — связывающее интенсивность случайных воздействий, коэффициент диссипации и абсолютную

температуру среды [2,7]. Это соотношение впоследствии сформулировалась как флуктуационной – диссипативной теоремой. Эта теорема действительно сыграла важную роль при исследовании флуктуаций в линейных системах [1,7,8].

Переход изучения броуновских явлений в нелинейных системах, в частности, в нелинейных автоколебательных и автоволновых системах породило теорию нелинейного броуновского движения [7] (см. также цитированную в этом обзоре обширную литературу). Первые же исследования в этой области показали, что в нелинейных броуновских движениях соотношению Эйнштейна следуют несколько модифицировать, даже при относительно малых нелинейностях [3,4,7,9].

На возможную важную роль нелинейных возбудений – солитонов в статистической физике было обращено внимание в работах [13-16]. Нетривиальность стохастического поведения нелинейных волновых систем обусловлено возникновением коллективизированных явлений броуновского движения. Эта глава посвящена исследованию некоторых свойств этого явления в джозефсоновских системах. Наш выбор этого объекта исследований связан: во первых, с тем, что джозефсоновские линии передачи являются примером существенно нелинейных коммуникационных систем, работающих на основе уникального солитонного механизма передачи информации [17-24]. Во вторых, с тем, что согласно результатам ряда теоретических и экспериментальных исследований высоко – температурные сверхпроводниковые структуры представляют собой сеть связанных слоистых джозефсоновских переходов [25-30]. Следовательно, получаемые здесь результаты могут представлять интерес, как для определения спектральных форм микроволнового излучения, связанного с движущимися флаксоном, так и для понимания механизма высокотемпературной сверхпроводимости.

В этой главе представлены результаты по релятивистской стохастической динамике флаксонов, а также теория релятивистского броуновского движения квантов магнитного потока и теория релятивистского идеального газа броуновских флаксонов.

1.1. Релятивистская стохастическая динамика магнитных вихрей

В этом разделе исследована релятивистская стохастическая динамика флаксонов в джозефсоновской линии передачи под действием постоянного и случайного стороннего тока, а также различных типов диссипации. Интерес к этой проблеме связан с тем, что джозефсоновская линия передачи представляет собой уникальный пример системы, где квантовые эффекты проявляются на макроскопическом уровне. Это обусловлено малостью величины кванта магнитного потока $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ (h – постоянная планка, e – заряд электрона), благодаря которой приложенное к джозефсоновскому переходу постоянное напряжение V порядка нескольких микровольт индуцирует в нем переменный ток с частотой f порядка нескольких мегагерц, согласно джозефсоновскому соотношению

$$f = \frac{V}{\Phi_0}. \quad (1.1.1)$$

Кроме того, движение флаксонов в джозефсоновских линиях передачи сопровождается сверхвысокочастотным излучением, имеющее важное применение в сверхпроводниковых устройствах.

Но в реальных условиях придется считаться с наличием в джозефсоновских линиях передач диссипаций различной физической природы, а также влиянием стороннего тока и флуктуационного тока (как нормального, так и сверхпроводящего). Ясно, что наибольшую сложность при исследованиях создают именно влияние последних факторов,

поскольку, строго говоря, полной ясности о статистической природе токовых флуктуаций в сверхпроводниках в настоящее время, пока не имеется. Изучению этой важной проблемы посвящены работы [27-29, 31-33] (см. также цитированные в них литературу). Было показано, что наиболее сильное влияние токовых флуктуаций происходит при температурах, близких к критической температуре перехода в сверхпроводящее состояние. Отмечено также сложная физическая природа шумовых токов с конечным временем корреляции. Мы ниже воспользуемся с одним выводом этих работ, согласно которому при высокочастотных изменениях детерминированного сверхпроводящего тока шумовые токи можно рассматривать гауссовским случайным процессом, дельта-коррелированными во времени статистическими характеристиками.

Следует отметить, что исследуемая в этом разделе стохастическая динамика флаксонов тесно примыкает к проблеме поведения флаксонов, помещённых в термостат. Этот вопрос был исследован различными авторами [34-36]. В частности, было показано, что средняя кинетическая энергия флаксона и фонона соответственно равна $\frac{1}{2}kT$ и kT (здесь k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура рассматриваемой системы). Отметим, что среди исследований посвященных динамике флаксонов в джозефсоновских линиях передач под действием случайного тока и диссипации, особое значение имеет расчет спектральных характеристик электромагнитного излучения, связанного движущимся флаксоном [34,35,36]. Мы их более подробно обсудим ниже.

Теперь перейдем к непосредственному анализу распространения квантов магнитного потока-флаксонов, на основе следующего, широко применяемого возмущенного уравнения Синуса-Гордона (см. вывод в [23,37]):

$$\varphi_{xx} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = j, \quad (1.1.2)$$

$$\vartheta = -\alpha\varphi + \beta\varphi_{\text{н}} - \gamma. \quad (1.1.3)$$

Отметим, что все величины в этих выражениях безразмерные: координата x вдоль контакта нормирована на джозефсоновскую глубину проникновения λ_J , время t на обратную джозефсоновскую плазменную частоту ω_J , магнитный поток Φ на квант магнитного потока Φ_0 . ϑ описывает внешнее возмущение действующее на флаксон при наличии диссипации и стороннего тока: α и β – коэффициенты диссипации обусловленные туннелированием нормальных (т.е. несверхпроводящих) электронов поперек контакта и движением нормальных электронов вдоль линии. γ – сторонний ток I нормированный на максимальный т.е. критический ток Джозефсона I_c .

Тут надо отметить, что критический ток Джозефсона I_c , которым определяется туннельный сверхпроводящий ток через изолирующий барьер, зависит от свойств используемых сверхпроводниковых материалов, геометрии линии и от температуры. Порядок указанных выше величин тоже, в конечном счете, определено именно этим характерным параметром джозефсоновской линии передачи. Например, в экспериментальной работе [38] критический ток Джозефсона I_c был порядка 1,44 мА. При использованной авторами геометрии контакта $\lambda_J = 72 \mu\text{м}$ и $\omega_J = 1.27 \text{GHz}$, $\alpha = 0.0091$ и $\beta = 0.045$, величина γ менялось в пределах от -0,95 до 0,99.

Далее исследуем динамику квантов магнитного потока – флаксонов под действием возмущения (1.1.3), полагая их малым (но их отношения могут быть произвольными). В этом случае для анализа изменения скорости флаксона, а также характеристики излучения, генерируемого флаксонами можно использовать различные схемы теории возмущений для солитонов [39-44]. Здесь мы используем метод энергетического анализа



предложенного в работе [44], который представляется нам наиболее простым и целесообразным в рассматриваемом случае. Согласно основному результату этого метода динамика флаксона определяется из следующего соотношения

$$\frac{dH}{dt} = \int \dot{\varphi} \varphi, dx, \quad (1.1.4)$$

где H -гамильтониан рассматриваемой системы, определяемый выражением

$$H = \int \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \varphi'^2 + 1 - \cos \varphi \right) dx. \quad (1.1.5)$$

Теперь подставляя вместо $\varphi(x, t)$ квазистационарное решение уравнения (1.1.2)

$$\varphi_s(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp \left[\frac{x - \int u(t') dt'}{\sqrt{1-u^2}} \right] \quad (1.1.6)$$

и учитывая явный вид возмущения (1.1.3), получаем следующее уравнение описывающее релятивистскую стохастическую динамику флаксонов

$$\frac{du}{dt} = -2u(1-u^2) - \frac{\beta}{3}u + \frac{\pi}{4}\gamma(t)(1-u^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (1.1.7)$$

где u - скорость флаксона $\frac{v_s}{c}$ нормированный на скорость электромагнитной волны в данной системе, которая определяется следующим образом

$$c = \lambda_s \omega_s \quad (1.1.8)$$

Следовательно, безразмерная скорость флаксона равна:

$$u = \frac{v_s}{c} \quad (1.1.9)$$

и меняется в пределах от -1 до +1.

Как видно из уравнения (1.1.7) возмущение, связанное со сторонним током $\gamma(t)$ не убывает на бесконечности. Для этого необходимо сделать перенормировку в уравнении (1.1.2), чтобы это требование выполнялось.

Физически это означает, что влияние шума на флаксона происходит через индуцированные колебания однородного состояния $\varphi(t)$. Этот вопрос был подробно исследован в работах [34,35], как для переменного во времени, так и для случайного стороннего тока и были найдены спектральные плотности флуктуаций скорости флаксона.

Кроме того, в рамках адиабатической теории возмущений, которую мы применяем не учитывается обратное влияние излучения линейных волн испускаемого флаксоном на изменения его параметров. Как показали результаты работ [45,46] при достаточно малых возмущениях влиянием радиационной составляющей на динамику флаксонов можно пренебрегать. Однако, как будет показано далее, используемый нами подход даст хорошее согласие с результатами численных расчетов для малых интенсивностей случайного тока.

Далее полагаем, что сторонний ток состоит из постоянной и случайной компоненты

$$\gamma(t) = \gamma_0 + f(t) \quad (1.1.9)$$

Случайная функция $f(t)$ предполагается дельта - коррелированным во времени гауссовым шумом со следующими статистическими характеристиками

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta(t-t') \quad (1.1.10)$$

где угловые скобки означают усреднения по всевозможным реализациям случайной функции $f(t)$, σ^2 выражает безразмерную интенсивность токовых флуктуаций. Таким образом, релятивистская стохастическая динамика флаксонов в джозефсоновской линии передачи под действием постоянного и случайного стороннего тока, а также различных типов диссипации описывается следующим уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\alpha\varphi(1-\varphi^2) - \frac{1}{3}\beta\varphi + \frac{\pi}{4}[\gamma_0 + f(t)](1-\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.10)$$

Следовательно, нашей ближайшей задачей будет определения функции распределения импульсов и скорости флаксонов на основе этого уравнения. Этому посвящен следующий раздел.

1.2. Уравнение для функции распределения импульсов флаксонов

Прежде чем переходить к выводу уравнения для функции распределения импульсов флаксонов необходимо отметить, что стохастические дифференциальные уравнения вида (1.1.10) играют важную роль в теории броуновского движения, в теории стохастических дифференциальных уравнений, в теории флуктуаций, в теории флуктуационных фазовых переходов. Имеется обширная литература по поводу таких уравнений и их применения [3-11, 47-54]. В частности, в книге [3] дается подробное объяснение возникновения случайных процессов, изложены методы теории случайных функций, а также нелинейное преобразования шума. В обзоре [7] (и в цитированных в них литературах) основное внимание уделено явлению нелинейного броуновского движения и стохастическим методам их описания, а также кинетическим флуктуациям при броуновском движении. Мы здесь и в дальнейшем для конкретности, в основном, будем ссылаться книгам [3] и [9].

Согласно определению Климонтовича уравнение (1.1.10) описывает нелинейное броуновское движение. Но мы придерживаемся другую точку зрения и назовем его релятивистским броуновским движением частице – подобных волн – флаксонов, поскольку их скорости и импульсы, как известно, связаны следующим релятивистским соотношением

$$P = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1, \quad (1.2.1)$$

Следовательно, благодаря нелинейной связи между импульсом и скоростью частицы происходит нелинейное преобразование их функции распределения (короче говоря, нелинейное преобразования статистики), даже если импульс или скорость частицы подчиняется линейному уравнению Ланжевена типа (1.1.10). Мы это продемонстрируем в следующих разделах.

Теперь вернемся к уравнению (1.1.10) и заметим, что случайная сила $f(t)$ входит в него мультипликативно. Однако преобразование

$$u = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}}, \quad (1.2.2)$$

позволяет его свести к уравнению с аддитивным шумом следующего вида:

$$\frac{dP}{dt} = -\alpha P + \frac{1}{3} \beta P(1+P^2) + \frac{\pi}{4} \chi(t). \quad (1.2.3)$$

Если же $\beta = 0$ мы получаем линейное стохастическое дифференциальное уравнение относительно импульса P . Таким образом, в этом случае преобразование (1.2.2) преобразует нелинейное стохастическое уравнения для скорости в линейное стохастическое уравнение относительно импульса P . Ясно, что такие случаи встречаются крайне редко, по этой же причине они и ценны.

Для вывода уравнения описывающее функцию распределения импульсов $F(P, t)$ воспользуемся тем, что уравнение (1.2.3) полученное нами является частным случаем следующего более общего стохастического дифференциального уравнения первого порядка [3]:

$$\frac{dP}{dt} = a(P) + b(P)\xi(t), \quad (1.2.4)$$

где $a(P)$ и $b(P)$ произвольные детерминированные функции P . Если случайный коэффициент $\xi(t)$ в этом уравнении удовлетворяет тем же условиям, что и случайная составляющая тока $f(t)$ т.е.

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \quad (1.2.5)$$

то в дельта - коррелированном во времени приближении уравнение для функции распределения $F = F(P, t)$ запишется следующим образом [3]

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial P}(k_1 F) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial P^2}(k_2 F), \quad (1.2.6)$$

где $k_1(P)$ и $k_2(P)$ так называемые коэффициенты интенсивностей выражаются через функции $a(P)$, $b(P)$ и D согласно следующим выражениям

$$k_1(P) = a(P) + \frac{D}{2} \cdot \frac{\partial b^2}{\partial P}, \quad k_2(P) = 2Db^2. \quad (1.2.7)$$

Далее подставляя выражения для коэффициентов интенсивностей $k_1(P)$ и $k_2(P)$ в (1.2.6) и раскрывая частные производные по P и их упрощения, получаем следующее искомое уравнение для функции распределения $F = F(P, t)$ [3.9] (см. также работу А9, где оно получено методом вариационных производных).

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial P}(aF) + D \cdot \frac{\partial}{\partial P} \left[b \cdot \frac{\partial}{\partial P}(bF) \right]. \quad (1.2.8)$$

Уравнение (1.2.8) важно тем, что оно в ряде случаев позволяет определить временную зависимость функций распределения, которая ценна для анализа переходных процессов в различных физических системах с флуктуирующими параметрами.

Мы в дальнейшем для конкретности ограничимся нахождением стационарного т.е. установившегося решения уравнения (1.2.8), которое существует только в том случае, если коэффициенты интенсивностей k_1 и k_2 не зависят от времени. Для стационарного решения $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ и согласно (1.2.8) получим обыкновенную дифференциальную уравнению относительно $F(P)$

$$\frac{d}{dP} \left\{ Db(P) \frac{d}{dP} [b(P) F(P)] - a(P) F(P) \right\} = 0. \quad (1.2.9)$$

Для выполнения последнего условия, выражение стоящее внутри фигурной скобки должно быть постоянным. Полагая, что функция распределения $F(P)$ стремится к нулю в бесконечных пределах, получим, что это постоянная равна нулю. Тогда из предыдущего выражения получаем следующее уравнение

$$Db \frac{d}{dP} (bF) = aF. \quad (1.2.10)$$

Отсюда легко находим стационарную функцию распределения $F(P)$ в следующем общем виде

$$F(P) = \frac{A}{|b(P)|} \exp \left[\frac{1}{D} \int \frac{a(P)}{b^2(P)} dP \right], \quad (1.2.11)$$

где постоянная A определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(P) dP = 1. \quad (1.2.12)$$

Теперь вернемся к уравнению (1.2.3) и учитывая, что в рассматриваемом случае

$$a(P) = -\alpha P + \frac{1}{3} \beta P(1 + P^2) + \frac{\pi}{4} \gamma_0, \quad b(P) = 1, \quad \xi(t) = \frac{\pi}{4} f(t) \quad (1.2.13)$$

и воспользовавшись выражением (1.2.11) находим функцию распределения импульсов флаксонсов под действием постоянного и случайного тока, а также различных типов диссипации [A1-A4].

$$F(P) = A \exp \left\{ \frac{1}{D} \left[\frac{\pi \gamma_0}{4} P - \frac{\alpha}{2} P^2 - \frac{\beta}{12} (2P^2 + P^4) \right] \right\}, \quad (1.2.14)$$

где $D = \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot \sigma^2$ - пернормированная интенсивность токовых флуктуаций,

а постоянная A определяется условием нормировки (1.2.12). Отметим что, в работах [A1-A3] этот результат был приведен без доказательства.

В следующих разделах главы на основе этого главного результата для функции $F(P)$ будут найдены и анализированы функции

распределения скорости флаксонов совершающих релятивистское броуновское движение в физически различных интересных случаях.

1.3. Асимметричная функция распределения скорости флаксонов

Начинаем нахождения и исследования функции распределения скорости флаксонов с наиболее простого случая, когда коэффициент диссипации β равен нулю, т.е. когда можно пренебречь квазичастичным током нормальных (т.е. несверхпроводящих) электронов в сверхпроводящих слоях джозефсоновских переходах. В этом случае из (2.2.14) получаем следующую функцию распределения импульсов флаксонов ($-\infty \leq P \leq \infty$):

$$F(P) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp[-a(P-b)^2], \quad (1.3.1)$$

где параметры a и b определяются следующими выражениями

$$a = \frac{\alpha}{2D}, \quad b = \frac{\pi}{4} \frac{\gamma_0}{\alpha}. \quad (1.3.2)$$

Теперь с помощью найденной функции распределения импульсов флаксонов $F(P)$ определим функцию распределения скоростей флаксонов $\phi(u)$ на основе формулы преобразования функции распределения (см. напр.[3]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(P) dP = \int_{-\infty}^{\infty} F(P(u)) \left| \frac{dP(u)}{du} \right| du = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) du. \quad (1.3.4)$$

Следовательно, функция распределения скоростей флаксонов определяется следующим выражением

$$\phi(u) = F(P(u)) \left| \frac{dP(u)}{du} \right|. \quad (1.3.5)$$

Далее учитывая релятивистскую зависимость (1.2.1) между импульсом и скорости флаксона, а также что

$$\frac{dP(u)}{du} = (1-u^2)^{-3/2}, \quad (1.3.6)$$

получаем функцию распределения скорости флаксонов под действием постоянного и случайного тока, а также диссипации, обусловленного тунелированием нормальных электронов поперек джозефсоновского контакта [A3]:

$$\phi(u) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{(1-u^2)^{3/2}} \exp \left[-a \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} - b \right)^2 \right]. \quad (1.3.7)$$

Как следует из последнего выражения, $\phi(-u) \neq \phi(u)$ и мы имеем асимметричную функцию распределения скорости флаксонов совершающих броуновское движение. Ясно, что эта асимметрия обусловлена действием на флаксонов постоянного составляющего тока γ_0 .

Теперь вернемся снова к функции распределения (1.3.1) и замечаем, что наиболее вероятный импульс флаксона и среднее значение импульса флаксона не зависят от интенсивности токовых флуктуаций т.е.

$$\langle P \rangle = P_{av} = b \quad (1.3.8)$$

В то же время, наиболее вероятная скорость и средняя скорость флаксонов различаются между собой вследствие нелинейной зависимости скорости от импульса определяемая формулой (1.2.2), т.е.

$$\langle u \rangle \neq u_{av} \neq b \quad (1.3.9)$$

Этот факт является весьма существенным, и как мы покажем ниже, приводит к нетривиальной вольт-амперной характеристике джозефсоновского перехода с шумовым током.

Прежде чем определить среднюю скорость флаксона, получим одно важное соотношение, позволяющее приближенно находить любую статистическую характеристику флаксона выражаемая функцией $f(P)$, зависящей от их импульсов (например, средняя и средне-квадратичная скорость флаксонов), т.е.

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) F(p) dp. \quad (1.3.10)$$

Для вычисления этого среднего замечаем, что при очень малых интенсивностях шумового тока распределение (1.3.1) имеет резкий максимум при $P_n = b$. Следовательно, существенный вклад в интеграл (1.3.10) дают значения функции $f(P)$ вблизи этой точки. Далее полагая, что функция $f(P)$ является ограниченной и непрерывной, развернем её в ряд и получаем:

$$f \cong f(b) + f'(b)(P-b) + \frac{1}{2} f''(b) (P-b)^2 + \dots \quad (1.3.11)$$

Учитывая явный вид функции распределения импульсов флаксонов (1.3.1) получаем следующую асимптотическую формулу для средних значений функции $f(P)$:

$$\langle f \rangle \cong f(b) + \frac{1}{2} f''(b) \cdot \frac{1}{2a} + \dots \quad (1.3.12)$$

Теперь с помощью этой формулы легко найти среднюю скорость флаксона:

$$\langle u \rangle = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \left[1 - \frac{3}{4a \cdot (1+b^2)^2} \right]. \quad (1.3.13)$$

Далее мы будем анализировать вольт - амперную характеристику джозефсоновского перехода с шумовым током используя выше найденное значение средней скорости флаксона, поскольку ненулевое напряжение переносится только движущимся флаксоном, т.е. пропорционально его скорости. Следовательно, нормированное напряжение или нормированная скорость флаксона в джозефсоновском переходе с постоянным током без шума определяется установившимся скоростью флаксона $u_s = u_0 = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$.

Аналогичным образом, среднее нормированное напряжение определяется средней скоростью флаксона (1.3.13).

Таким образом, разность напряжений в джозефсоновском переходе без шума и со случайным током будет пропорциональной разности средней и детерминированной скорости флаксона в этих случаях. Учитывая (1.3.13) получим следующую выражению определяющий эту разность скоростей

$$\Delta u = u_d - \langle u \rangle = \frac{3}{4\alpha} \frac{h}{(1+b^2)^{3/2}} \quad (1.3.14)$$

Отсюда следует, что разность Δu меняется немонотонным образом при возрастании b т.е. при увеличении постоянного нормированного тока γ_0 и имеет максимум при $b = \frac{1}{2}$ или когда $\gamma_0 = \frac{2\alpha}{\pi}$, положение которого не зависит от интенсивности флуктуаций тока. Согласно (1.3.14) это максимальная разность определяется следующим соотношением

$$\Delta u_m = \frac{12\sqrt{5}}{125\alpha} \approx \frac{24\sqrt{5}}{125\alpha} \cdot \frac{D}{\alpha} \quad (1.3.15)$$

Подчеркиваем, что это особенность вольт - амперной характеристики джозефсоновского перехода с шумовым током, при малых интенсивностях его флуктуаций, не является очевидным. Действительно, как следует из (1.3.1) средний импульс и импульс в детерминированной системе равны $\langle P \rangle = P_d \approx h$. Однако, вследствие нелинейной зависимости скорости от импульса, функция распределения скорости будет негауссовой (1.3.7), что и приведет к изменению вольт - амперной характеристики джозефсоновского перехода. Для проверки полученных результатов нами проводилось численное моделирование релятивистского броуновского движения флаксонов, ему будет посвящен следующий раздел.

1.4. Численное моделирование релятивистской стохастической динамики флаксонов

Прежде чем переходить к изложению результатов численного моделирования броуновского движения флаксонов имеет смысла говорить несколько слов о моделировании в молекулярной динамике, в кинетической теории газов, в теории диффузии и флуктуации. Этой теме посвящена огромная литература и мы ограничимся здесь упоминанием нескольких работ, которые, по нашему мнению, близки к обсуждаемой здесь проблеме. В частности, в книге [55] приведены некоторые методы моделирования динамического поведения систем многих частиц, установления равновесного состояния и теории диффузии. Работы же [56,57] посвящены численному моделированию равновесных свойств в одномерном и двумерном идеальном газе. Работа [58] для нас представляет особый интерес, поскольку в ней, в частности, было моделировано динамика частиц в нелинейной кристаллической решетке, когда их начальные скорости подчинялись следующему одномерному распределению

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad (1.4.1)$$

где $u = \frac{u_x}{u_T}$ — скорость атомов нормированная на их эффективную тепловую

скорость $u_T = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ (k - постоянная Больцмана, m - масса атомов решетки, T -

абсолютная температура). Авторы этой работы получали важный результат о том, что энергия термализуется только в первоначально термализованной цепочке при ненулевой температуре. Следовательно, результаты проведенного здесь нами численного моделирования представляет самостоятельный интерес, как для теории стохастических нелинейных волновых уравнений, так и для теории релятивистского броуновского движения.

Численное моделирование релятивистской стохастической динамики флаксонов базировалась на стохастические уравнения (1.1.2), (1.1.3) и (1.2.3). Случайный ток моделировался белым шумом, который получился стандартным методом преобразования равномерно распределенного шума (см. напр. [59,60]). Для моделирования уравнения (1.12)–(1.13) применялось трехслойная и пятиточечная численная схема с шагами $\Delta x = 0,05$ и $\Delta t = 0,02$ соответственно по координате и по времени. Для интегрирования стохастического уравнения (1.2.3) воспользовались методом Рунге-Кутты седьмого порядка. Моделирование проведено при следующих значениях параметров задачи: $\beta = 0$; $\alpha = 0,05$; $\sigma = 0,05$; $0,1$ и редуцированный ток γ_0 меняется в пределах от нуля до $0,5$.

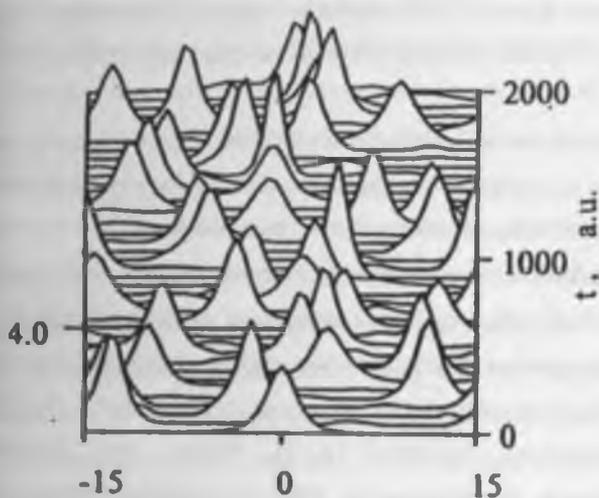


Рис. 1. Эволюция флаксонового поля $\varphi_1(x, t)$ под действием шума

$$\sigma \quad (\sigma^2 = 0,01; \gamma_0 = 0,0318)$$

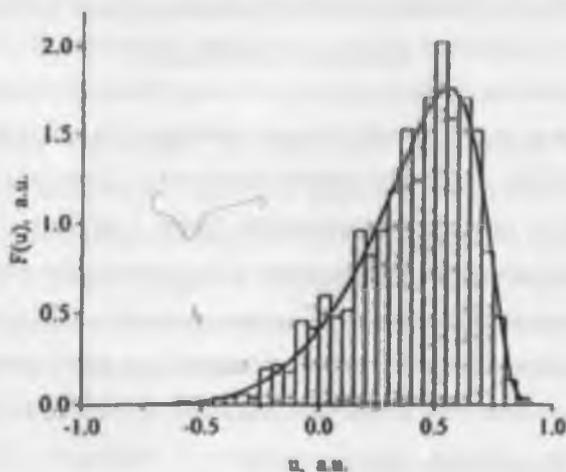


Рис. 2. Асимметричная функция распределения скорости (параметры те же, что и на рис. 1). Кривая – теория, гистограмма-численный расчёт.

На рис.1 показана эволюция флаксона под действием шумового тока. Видно, что амплитуда излученных линейных воли очень мала по сравнению с амплитудой флаксона. Важно также, что в каждый момент в системе существует один флаксон. Следовательно, примененный нами метод адиабатического приближения корректно в выбранной области параметров.

На рис.2 представлены функции распределения скорости флаксонов полученные на основе моделирования стохастического уравнения (1.2.3) и найденная аналитическим способом (1.3.7). Видно, что функция распределения скорости построенная по 1000 реализациям имеет ярко выраженный асимметричный характер.

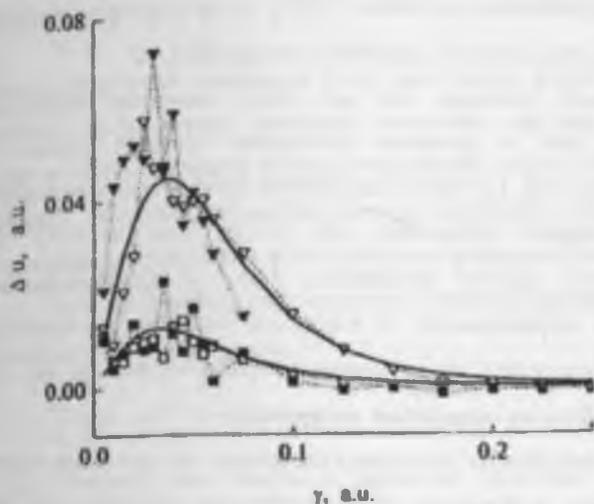


Рис. 3. Зависимость разности напряжений от значений постоянного тока. Сплошные линии-теория, тёмные значки-численный расчёт по (1.1.1), светлые – численный расчёт по (1.2.3). σ : \square –0,1; \blacktriangledown –0,05.

На рис.3 показана зависимость разности напряжения от постоянного тока γ_0 . При численном моделировании уравнения (1.2.3) мы определяли мгновенную скорость флуксуона, которая усреднялась по 1000 реализациям. При интегрировании уравнения (1.1.2) – (1.1.3) мы определяли среднюю скорость за временной интервал $T=1000$, которая затем была усреднена по 20 реализациям шума. Заметим, что в каждой реализации наблюдалось заметные флуктуации разности напряжения. Из этого факта следует, что для экспериментального наблюдения этих флуктуаций требуется достаточно большое время.

Видно достаточно хорошее согласие между теоретическими предсказаниями и результатами численных расчетов. Из рисунка видно, что

положения максимума функции $\Delta\psi(\gamma_0)$ приблизительно одинаковое и не зависит от интенсивности шумовой компоненты тока.

Следует отметить, что при малых значениях постоянного тока заметную роль в динамике флаксонов начинает играть случайная компонента тока. Согласно результатам численного моделирования при больших шумах (например, при $\sigma > 0,1$ для $\alpha = 0,05$) в системе возбуждаются другие нелинейные моды и адиабатический подход становится неприменимым. В численном эксперименте появление новых мод регистрировалось, как по изменению профиля флаксона $\psi(x,t)$, так и по резкому изменению напряжения на переходе.

Таким образом, мы можем заключать, что при малых возмущениях действующих на флаксоны их стохастическая релятивистская динамика с хорошей точностью описывается адиабатическим приближением. В этой области параметров имеется хорошее согласие между теоретическими расчетами и результатами численного моделирования.

Конечно же здесь интригующим вопросом является поведения флаксонов в отсутствие постоянной компоненты тока, когда его динамика полностью определяется случайным током [61-67]. Мы далее убедимся, что здесь нас действительно ожидает ряд непредсказуемых результатов.

1.5. Теория релятивистского броуновского движения квантов магнитного потока

Нашей целью в этом разделе является нахождение функции распределения скорости флаксонов в полностью релятивистском случае при произвольном уровне токовых флуктуаций, когда постоянная составляющая стороннего тока равна нулю.

Согласно (1.3.1) в этом случае функция распределения импульсов флаксонов имеет следующий вид

$$F(p) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-ap^2) \quad (-\infty < p < \infty). \quad (1.5.1)$$

В целях облегчения понимания ниже получаемых результатов для релятивистского броуновского движения флаксонов, вначале приведем анализ свойств этого движения в нерелятивистском случае (или, то же самое, в рамках линейной теории броуновского движения). Поскольку в этом случае нормированные импульсы и скорости флаксонов равны между собой, т.е. $p = u$, то функция распределения скорости подчиняется тому же распределению что и импульс т.е.

$$f(u) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-au^2) \quad (-\infty < u < \infty). \quad (1.5.2)$$

Отсюда следует, что наиболее вероятная скорость флаксонов (напомним что u — нормированная x -овая составляющая скорости флаксона) не зависит от параметра a т.е. от отношения коэффициента диссипации к интенсивности токовых флуктуаций D и всегда равна нулю.

Характерные средние модуля скорости флаксонов находятся по формулам нахождения средних значений, соответственно следующими выражениями:

$$\langle |u| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |u| f(u) du, \quad \langle |u|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u) du. \quad (1.5.3)$$

Учитывая функцию распределения флаксонов, которая согласно (1.5.2) является максвелловской и первую формулу в (1.5.3) находим среднюю модуля скорости флаксона

$$\langle |u| \rangle = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^{\infty} u \exp(-au^2) du. \quad (1.5.4)$$

Вводя в последнем интеграле новую переменную $x = au^2$ ($dx = 2a u du$), получаем

$$\langle |u| \rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-x} dx = \frac{1}{\sqrt{a\pi}}. \quad (1.5.5)$$

Для нахождения среднего квадрата модуля скорости флаксона учтем, что согласно условию нормировки функции распределение скорости $f(u)$:

$$\int_0^{\infty} \exp(-au^2) du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (1.5.6)$$

Тогда учитывая вторую формулу в (1.5.3) и (1.5.6), и используя свойства интеграла зависящего от параметра находим:

$$\langle |u|^2 \rangle = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^{\infty} u^2 \exp(-au^2) du = -2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{d}{da} \int_0^{\infty} \exp(-au^2) du = \frac{1}{2a}. \quad (1.5.7)$$

Теперь определим среднеквадратичную флуктуацию модуля скорости флаксонов, которая, как известно, находится следующей формулой:

$$\overline{D|u|^2} = \langle |u|^2 \rangle - \langle |u| \rangle^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{1}{\pi a} = \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{D}{a}. \quad (1.5.8)$$

Таким образом, средняя квадрата модуля скорости и среднеквадратичная флуктуация модуля скорости зависят линейным образом от интенсивности шумового тока:

$$\langle |u|^2 \rangle = \frac{D}{a}, \quad \overline{D|u|^2} = \langle |u|^2 \rangle - \langle |u| \rangle^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{D}{a}. \quad (1.5.9)$$

Теперь перейдем к исследованию свойств релятивистского броуновского движения флаксонов, когда их динамика полностью определяется действием случайного тока. В этом случае согласно (1.3.7) релятивистская функция распределение скорости флаксонов имеет следующий вид [A1-A3, A5-A8]

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-au^2(1-u^2)^{-1}\right]. \quad (1.5.10)$$

Используя последнее выражения, определим наиболее вероятную скорость флаксонов, которому соответствует максимум функции распределения их скорости. Вычисляя производную и приравняв ее нулю, получаем уравнение

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot u(1-u^2)^{-\frac{3}{2}} \left(3 - \frac{2a}{1-u^2}\right) \exp\left[-a \frac{u^2}{1-u^2}\right] = 0. \quad (1.5.11)$$

Отсюда следует, что производная функции распределения обращается в ноль при следующих значениях скорости

$$u = 0, \quad u = \pm 1. \quad (1.5.12)$$

Последнее следует из того, что при $a \neq 0$, $\varphi(u)$ стремится к нулю при $u \rightarrow \pm 1$ т.е. при $a \neq 0$ флаксоны никогда не могут иметь предельные скорости $u = \pm 1$.

Кроме этих значений скорости, производная функции распределения скорости обращается в ноль еще при выполнении следующего условия

$$3 - \frac{2a}{1-u^2} = 0. \quad (1.5.13)$$

Отсюда следует, что последнее уравнение имеет следующие решения

$$u = \pm \sqrt{1 - \frac{2a}{3}}. \quad (1.5.14)$$

Таким образом, на основе этого анализа свойства релятивистской функции распределения скорости флаксонов мы придем к следующим важным выводам:

1. Если параметр a удовлетворяет условию $a \geq \frac{3}{2}$, то функция распределения скорости $\varphi(u)$ имеет единственную экстремальную точку $u = 0$ соответствующая ее максимуму, т.е. в этом случае наиболее вероятная скорость флаксонов равна нулю (рис.4).
2. Если же $0 < a < \frac{3}{2}$, то функция распределения скорости имеет три экстремальные точки $u = \pm \sqrt{1 - \frac{2a}{3}}$, $u = 0$. Следовательно, в этом случае нулевая скорость становится наименее вероятной (в этой точке $\varphi(u)$ имеет свой минимум) и появляется наиболее вероятная скорость отличная от нуля! Обратно говоря при указанных значениях параметра a функция распределения скорости флаксонов становится двухгорбовой.

$$\operatorname{erfc} z = 1 - \frac{\exp(-z^2)}{\sqrt{\pi z}} \left(1 - \frac{1}{2z^2}\right) \quad (z \gg 1). \quad (1.5.21)$$

получаем следующие выражения для характерных средних скоростей флаксонов в указанных предельных случаях:

$$\langle |v| \rangle \approx 1 - 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}, \quad \langle |v|^2 \rangle \approx 1 - 2a \quad (a \ll 1), \quad (1.5.22)$$

$$\langle |v| \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{a\pi}}, \quad \langle |v|^2 \rangle \approx \frac{1}{2a} \quad (a \gg 1). \quad (1.5.23)$$

Сравнивая выражения (1.4.5), (1.4.7) и (1.4.23) мы приходим к выводу, что при $a \gg 1$ т.е. в случае малых интенсивностей случайного тока $D \ll a$ релятивистские средние модуля и квадрата модуля скорости флаксонов переходят в их нерелятивистские выражения. Подобно этому релятивистская функция распределения скорости флаксонов $\varphi(u)$ трансформируется к функции распределения скорости флаксонов в нерелятивистском броуновском движении $f(u)$ т.е. к максвелловскому распределению скоростей флаксонов.

В случае же $a \ll 1$ т.е. при малых диссипациях $a \ll D$ средняя модуля и квадрата модуля скорости флаксонов приближаются к предельной скорости $u = 1$ т.е. к скорости электромагнитных волн в рассматриваемой системе (т.е. к скорости Свихарта c).

На рис.5 представлены графики зависимости среднего модуля скорости флаксонов от флуктуаций тока полученные аналитическим путем и численным моделированием. Где прямая линия соответствует результату нерелятивистской или линейной теории броуновского движения флаксонов. Кривая на этом рисунке показывает результат релятивистской теории броуновского движения флаксонов. Как видно из этого рисунка имеется прекрасное соответствие между теоретическими зависимостями и результатами численного моделирования в случае релятивистского броуновского движения флаксонов.

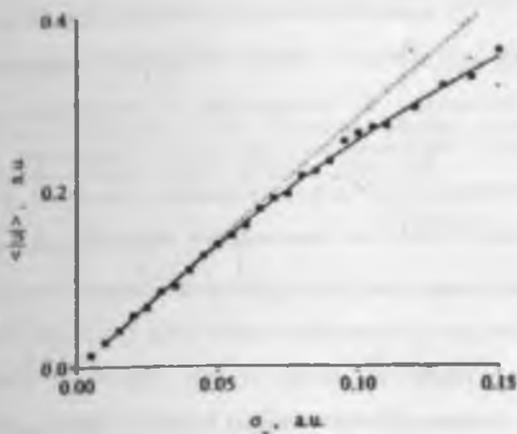


Рис. 5. Зависимость среднее-арифметической скорости флаксона от относительных флуктуаций тока σ ■ - численный расчёт по (1.2.3); сплошная кривая - формула (1.5.17); пунктир - нерелятивистская теория, найденная по $\Phi_{cr}(u)$

Как известно из выше приведенных рассуждений, до сих пор относительная интенсивность токовых флуктуаций D считалась заданной. Правильность такого подхода была обоснована в книге [7] и была продемонстрирована в ряде примеров нелинейного броуновского движения [7,9]. Если токовые флуктуации обусловлены тепловыми флуктуациями (или точнее говоря, тепловыми движениями атомов сверхпроводника), то при малых относительных интенсивностях этих шумовых токов справедливо, как было показано выше, нерелятивистская или линейная теория броуновского движения флаксонов, поскольку в этом случае скорости флаксонов подчиняются максвелловскому распределению для одномерных систем.

$$f_u(u) = \sqrt{\frac{mc^2}{2\kappa T \pi}} \exp\left(-\frac{mc^2}{2\kappa T} u^2\right), \quad u = \frac{v}{c} \quad (1.5.24)$$

Здесь $mc^2 = E_0$ - энергия покоя частицы, κT - тепловая энергия, k - постоянная Больцмана, T - температура в равновесном состоянии, c - скорость света. Следовательно, сравнивая выражения распределения скорости флаксонов (1.5.2) для броуновского движения и распределение скорости частиц (1.5.24) для одномерного теплового движения получаем соотношения (с учетом того, что $\langle |u|^2 \rangle = \frac{1}{2a}$)¹:

$$2a = \frac{\alpha}{D} = \frac{E_0}{\kappa T} \quad (1.5.25)$$

Далее учитывая, что энергия покоя флаксона определяется выражением (см. например [69]):

$$E_0 = \frac{I_c \Phi_0}{2\pi}, \quad (1.5.26)$$

находим следующую связь между относительной интенсивностью токовых флуктуаций D и коэффициентом диссипации α

$$D = 2\pi \frac{\alpha T}{I_c \Phi_0} \quad (1.5.27)$$

Здесь I_c - максимальный критический ток Джозефсона, Φ_0 - квант магнитного потока. Заметим, что выражение (1.5.27) (с учетом того, что в работах [34-36] интенсивность шумовых токов обозначена как $2D$) согласуется с выражениями в указанных работах, которые справедливы только для малых интенсивностях токовых флуктуаций, т.е. когда $D \ll \alpha$. Следовательно, в этом пределе средняя квадрата скорости определяется выражением

$$\langle u^2 \rangle \approx \langle |u|^2 \rangle = \frac{1}{2a} = \frac{D}{\alpha} \ll 1 \quad (\alpha \gg 1). \quad (1.5.28)$$

¹ Это соотношение можно получать также на основе равенств термодинамического и статистического среднего.

Теперь сравнивая последнее выражение с условием появления ненулевых наиболее вероятных скоростей флаксонов

$$2\alpha < 3, \quad \frac{D}{\alpha} > \frac{1}{3}, \quad (1.5.29)$$

мы приходим к заключению, что обычная оценка сильных токовых флуктуаций определяемая условием [3,4,27,28,34-36]

$$\frac{D}{\alpha} = 1, \quad (1.5.30)$$

носит только качественный характер. Более того, как видно из сравнения условий (1.5.29) и (1.5.30), аномальное поведение флаксонов наступит еще до выполнения условия преобладания шумовых токов (1.5.30). Следовательно, только точная релятивистская теория броуновского движения флаксонов позволяет описать указанную особенность в динамике флаксонов.

Наиболее нетривиальным результатом релятивистской теории броуновского движения флаксонов является их сверхподвижность в недиссипативной джозефсоновской линии передачи т.е. при $\alpha=0$ — их движения с предельной скоростью в рассматриваемой системы (аналог ультрарелятивистского движения флаксонов под действием постоянного тока и диссипации с установившейся скоростью $u_s = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = 1$, где $b = \frac{\pi\gamma_0}{4\alpha}$

и $\alpha \rightarrow 0$). Следовательно, в этом пределе релятивистскую функцию распределения скорости флаксонов можно представить в виде суммы двух дельта - функций т.е.

$$\Phi(u) = \delta(u^2 - 1) = \frac{1}{2} [\delta(u+1) + \delta(u-1)]. \quad (1.5.31)$$

Это с физической точки зрения означает, что релятивистские броуновские флаксоны т.е. кванты магнитного потока трансформируются в электромагнитные волны т.е. в фотоны распространяющихся в противоположных направлениях со скоростями $u = \pm 1$. В рассматриваемой

системе это вполне естественно, поскольку трансляционные моды распространяющихся с предельными скоростями $u = \pm 1$ принадлежат к множеству точных решений уравнения синуса-Гордона [70].

Это заключение проясняет еще одну важную черту стохастической неустойчивости и стохастического распада солитонов синуса-Гордона (см. также [71-74]).

Теперь подробнее обсудим условия флуктуационной неустойчивости флаксонов, которая имеет место при выполнении неравенство:

$$2\alpha = \frac{I_c \Phi_0}{2\pi T} < 3, \quad I_c < I_{\mu}, \quad (1.5.32)$$

где I_c – максимальный критический ток Джозефсона, I_{μ} – флуктуационный критический ток соответствующее температуре T :

$$I_{\mu} = \frac{6\pi T}{\Phi_0} = AT. \quad (1.5.33)$$

Фигурирующая здесь постоянная A определяется следующими фундаментальными константами: постоянной Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}$ и квантом магнитного потока $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.06875 \cdot 10^{-15} Вб$. Следовательно, это постоянная составляет величину порядка

$$A = 0.126 \frac{\mu A}{K}. \quad (1.5.34)$$

Таким образом, согласно выражениям (1.5.33) – (1.5.34) при гелиевой температуре $T = 4.2 K$ и азотовой температуре $T = 77 K$ флуктуационный критический ток I_{μ} равен соответственно 0,53 мкА и 10 мкА. Отсюда видно, что в низко – токовых сверхпроводников с максимальным критическим током порядка одного мкА [75] реализуются условия флуктуационной неустойчивости флаксонов. В случае же высоко токовых сверхпроводников с максимальным критическим током порядка 100 мкА [27] флаксоны являются флуктуационно устойчивыми.

Таким образом, чтобы флаксоны были флуктуационно устойчивыми должно выполняться условия обратное (1.5.30) т.е. максимальный критический ток Джозефсона I_c должен быть больше чем критический флуктуационный ток I_k (заметим, что это значение 3 раза больше чем, которое следует из качественных оценок). Теперь учтем, что критический ток Джозефсона тоже является функцией температуры T [75]

$$I_c(T)R_N(T) = \frac{\pi\Delta(T)}{2e} \text{th} \frac{\Delta(T)}{2kT}, \quad (1.5.35)$$

где $R_N(T)$ - нормальное сопротивление сверхпроводящего слоя в джозефсоновском переходе, $\Delta(T)$ - энергетическая щель сверхпроводящего материала, которой определяется критическая температура T_c перехода в сверхпроводящее состояние.

Отсюда видно, что если $kT \ll \frac{\Delta(T)}{2}$, то максимальный критический ток определяется максимальным джозефсоновским напряжением:

$$I_c(T)R_N(T) = V_c, \quad V_c = \frac{\pi\Delta(T)}{2e} \quad (T \ll T_c). \quad (1.5.36)$$

Следовательно, при произвольной температуре выражение (1.5.35) можно записать в следующем удобном виде

$$I_c(T)R_N(T) = V_c \text{th} \frac{V_c}{V_f}, \quad (1.5.37)$$

где V_f - шумовое или флуктуационное напряжение определяемое соотношением

$$V_f = \frac{kT}{\pi e} = 27,5 \frac{\text{мкВ}}{\text{К}} T. \quad (1.5.38)$$

Согласно (1.5.38) при температуре $T = 7.4\text{К}$ флуктуационное напряжение V_f будет порядка 0,2 мВ. Следовательно, в таких случаях для устойчивости флаксонов должны выполняться условия $I_c > I_k$ и $V_c > V_f$. Однако на практике получение джозефсоновских переходов с высокими

значениями максимального напряжения и соответственно тока трудно реализуемо и является серьезнейшей технологической проблемой [76]. Отметим, что в работе [77] относительно недавно удалось получить джозефсоновские переходы из металлооксидных сверхпроводников с высокими критическими параметрами: плотность максимального критического тока $J_c = (2-5) \cdot 10^5 \frac{A}{cm^2}$ ($I_c \approx 25mA$) и характерное напряжение $V_c = (0,6-0,9)mB$ при температуре $T = 77K$, которое соответствует высоко – температурным сверхпроводникам. Особо подчеркиваем, что эти значения критических параметров тока и напряжения соответственно на два и на одного порядка выше чем обычных, т.е. низко – температурных сверхпроводников. Но, к сожалению, при температурах близких к критической температуре перехода в сверхпроводящее состояние критический ток Джозефсона существенно уменьшается и поэтому при увеличении температуры возрастает роль токовых флуктуаций (как внутренних, так и сторонних) [19,21,27,28,76,75] (особо рекомендуем смотреть литературу по обсуждаемой проблеме приведенные в сборнике [76]). Таким образом, по-видимому, отмеченная выше флуктуационная неустойчивость флаксонов является одной из серьезных проблем, которую предстоит решать для создания и применения джозефсоновской линии передачи, разрабатываемых на основе высоко – температурных сверхпроводников. Однако, как известно, пока полной ясности как о механизме высоко – температурной сверхпроводимости, так и о природе токовых флуктуаций в высоко – температурных сверхпроводниках не существует (см. напр. [31,32,33,76] и приведенные в них литературу). Следовательно, в последнем случае вопрос о статистической природе токовых флуктуаций остается открытым и требует знания их физического механизма возникновения на основе микроскопических уравнений теории высоко – температурной

сверхпроводимости. Но более глубокое проникновение в эту, несомненно, сложное направление выходит за рамки темы настоящей монографии. И мы ограничимся выше приведенными соображениями по этому поводу. В конце раздела приведем выражения среднеквадратичной флуктуации частоты излучения связанное с движущимся флаксонном – считающиеся одной из важнейшей излучательной характеристикой джозефсоновской линии передачи, в которой переносчиком сигнала служит квант магнитного потока - флаксоны. Для этого используем известное соотношение для частоты f этого излучения [34-36]:

$$f = \frac{v}{2L} \quad (1.5.39)$$

Здесь v – скорость флаксона, L – длина джозефсоновской линии передачи. Теперь учитываем, что среднеквадратичная флуктуация частоты определяется выражением [ср. с (1.5.8)]

$$\overline{\Delta f} = \sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2} = \left(\frac{c}{2L}\right)^2 \overline{\Delta v},$$

где $\overline{\Delta v}$ – среднеквадратичная флуктуация скорости флаксоннов т.е.

$$\overline{\Delta v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}.$$

Следовательно, на основе релятивистских флуктуационно-диссипативных соотношений (1.4.17-1.4.18), связывающие средние скорости флаксоннов с относительной интенсивностью токовых флуктуаций D и коэффициентом диссипации α получаем следующую формулу для среднеквадратичной флуктуации нормированной частоты излучения

$$\mathcal{F} = \frac{\overline{\Delta f}}{f_c} = 1 - \sqrt{\pi \alpha} \langle |v| \rangle - \langle |v| \rangle^2, \quad (1.5.40)$$

где $f_c = \frac{c}{2L}$ – характерная частота излучения джозефсоновской линии передачи.

Отличительной чертой этой зависимости является то, что она имеет свое максимальное значение при некотором промежуточном значении параметра $a = \frac{\alpha}{2D}$, определение которого мы оставляем читателю в качестве упражнения (см. задачи к первой главе).

Таким образом, относительные среднеквадратичные флуктуации частоты излучения связанное с движущимся релятивистским флаксоном ограничены при любом уровне токовых флуктуаций и диссипации в джозефсоновских линиях передачи. В этом проявляется ещё одна уникальная сторона солитонного механизма передачи информации.

Разумеется, что при броуновском движении флаксонов случайным образом меняется не только их скорости, а также другие его параметры. Исследованию этого важного с физической точки зрения вопроса будет посвящен следующий раздел этой главы.

1.6. Функция распределения дискретного спектрального параметра броуновских флаксонов

В предыдущих разделах наше главное внимание было уделено исследованию изменения скорости флаксонов, а также связанных с ним величин обусловленные диссипацией и случайностью тока. Однако случайные начальные условия также приводит к тому, что параметры образующихся солитонов будут распределены случайным образом. Существенный прогресс в этом направлении был достигнут посредством применения метода обратной задачи рассеяния [78-82]. Применения этого метода позволял определить изменения данных рассеяния (или спектральных параметров), как дискретного, так и непрерывного спектра, обусловленные случайными вариациями начальных волновых импульсов. Существует весьма обширная литература посвященной этой теме. Но мы ограничимся приведением только работы [83] (см. также цитированные

в этой литературе), которая посвящена анализу функции распределения параметров флаксонов, образующихся из случайно модулированных импульсов магнитного типа. Используя метод преобразования случайных волновых импульсов в нелинейных диспергирующих средах предложенный в работе [82] (см. также работу [A8], где он обобщен для интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений), авторы [83] показали, что функция распределения поправок к дискретному спектру и определяемый им скорости флаксонов подчиняются негауссовому распределению. Они определяли также наиболее вероятную и среднюю поправку к этим параметрам флаксонов.

Мы здесь эту же проблему исследуем в другой постановке, когда случайное распределение дискретного спектрального параметра обусловлено токовыми флуктуациями в джозефсоновской линии передачи, т.е. иначе говоря, связанное со статистикой среды. Для этого мы используем следующую связь между дискретным спектральным параметром и нормированной x -ова компонентой скорости флаксонов, которая вытекает из метода обратной задачи рассеяния [81]:

$$K = x = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \quad (-1 < u < 1). \quad (1.6.1)$$

Отсюда следует, что дискретный спектральный параметр движущихся флаксонов можно получить преобразованием Лоренца дискретного спектрального параметра покоящихся флаксонов. Заметим, что исходное невозмущенное уравнение синуса-Гордона является релятивистски - инвариантным и поэтому его решение также можно получить Лоренц-преобразованием неподвижных флаксонов [23,70]. Добавим также, что частота излучения движущегося источника, когда он совершает одномерное движение, определяется формулой Доплера:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \quad (-1 < u < 1), \quad (1.6.2)$$

аналогичной выражению (1.6.1). Здесь ν_0 – частота излучения покоящийся источника.

Для определения функции распределения дискретного спектрального параметра x мы используем, как и раньше формулу преобразования функции распределения, которая в данном случае имеет следующий вид

$$\Phi(u)du = \Phi[u(x)]du(x) = \Phi[u(x)] \left| \frac{du}{dx} \right| dx = I(x)dx, \quad (1.6.3)$$

где $I(x)$ – функция распределения дискретного спектрального параметра.

Далее учитывая, что согласно (1.6.1) нормированная x -ова скорость флаксонов

$$u = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad (1.6.4)$$

находим

$$\left| \frac{du}{dx} \right| = \frac{4x}{(1+x^2)^2}. \quad (1.6.5)$$

Подставляя (1.6.4) и (1.6.5) в выражение (1.6.3) и вспоминая, что релятивистская функция распределения скорости флаксонов имеет вид

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} (1-u^2)^{\frac{1}{2}} \exp[-au^2(1-u^2)^4], \quad (1.6.6)$$

после ряда упрощений получаем следующую функцию распределения дискретного спектрального параметра флаксонов [A4.A10]

$$I(x) = \sqrt{\frac{a \exp a}{4\pi}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \exp\left[-\frac{a}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\right]. \quad (1.6.7)$$

Напомним, что здесь $a = \frac{\alpha}{2D}$, где α – коэффициент диссипации, D – относительная интенсивность токовых флуктуаций (как внутренних, так и внешних). Таким образом, как видно из последнего выражения функция распределения дискретного спектрального параметра $I(x)$ существенно отличается от гауссового распределения, которое имеет место при максвелловском распределении скорости флаксонов. Действительно, в

последнем случае согласно (1.4.2) скорости флаксонов подчиняется распределению

$$f(u) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-au^2), \quad (1.6.8)$$

а дискретный спектральный параметр x зависит от скорости флаксонов линейным образом

$$x = 1 - u. \quad (1.6.9)$$

Тогда функция распределения $\tilde{f}(x)$ будет очевидно гауссовым т.е.

$$\tilde{f}(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp[-a(x-1)^2]. \quad (1.6.10)$$

Следовательно, в этом случае при любом значении параметра a наиболее вероятное значение и среднее значение дискретного спектрального параметра равны между собой

$$x_{\text{мб}} = \langle x \rangle = 1, \quad (1.6.11)$$

и не зависят от a . Поэтому параметр a можно определить зная только среднюю квадрата дискретного спектрального параметра

$$\langle x^2 \rangle = 1 + \langle u^2 \rangle = 1 + \frac{1}{2a}, \quad (1.6.12)$$

или зная среднюю квадрата разности $x - x_{\text{мб}}$ т.е.

$$\langle (x - x_{\text{мб}})^2 \rangle = \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2a}. \quad (1.6.13)$$

Очевидно, что в этом случае лучше иметь дело со следующим симметризованным распределением для $\Delta x = x - x_{\text{мб}}$

$$\tilde{f}(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi \langle \Delta x^2 \rangle}} \exp\left[-\frac{\Delta x^2}{2 \langle \Delta x^2 \rangle}\right]. \quad (1.6.14)$$

Теперь перейдем к исследованию свойств нового, необычного распределения (1.6.7) для дискретного спектрального параметра x , соответствующее релятивистскому броуновскому движению флаксонов.

Сначала определим наиболее вероятное значение x , которое соответствует максимуму функции распределения $f(x)$. Взяв производную и приравняв ее нулю, получаем следующее уравнение

$$x^2 = \frac{a}{4} (1 - x^2)(1 + x^2)^2, \quad (1.6.15)$$

решением которого определяется наиболее вероятное значение дискретного спектрального параметра x . Как видно из выражения (1.6.15) наиболее вероятное значение лежит в промежутке $(0,1)$.

Далее введя обозначение $x^2 = y$, получаем следующее кубическое уравнение относительно переменной y :

$$y^3 + y^2 + \left(\frac{4}{a} - 1\right)y - 1 = 0 \quad (1.6.16)$$

Анализируя дискриминант этого кубического уравнения (см. напр. [59,60]) приходим к выводу, что при любом конечном значении параметра a оно имеет единственное решение – соответствующее наиболее вероятному значению дискретного спектрального параметра флаксонов

$$x_{\text{об}} = \sqrt{\sqrt{\frac{4}{3a}(r+S)} + \sqrt{\frac{4}{3a}(r-S)} - \frac{1}{3}}, \quad (1.6.17)$$

где

$$r = \frac{2a}{9} + \frac{1}{2}, \quad S = \sqrt{\frac{3}{2a} \left[\left(a - \frac{13}{16} \right)^2 + \frac{343}{256} \right]}. \quad (1.6.18)$$

Таким образом, $x_{\text{об}}$ зависит от параметра a и монотонно возрастает при его увеличении. Или наоборот, зная наиболее вероятное значение дискретного спектрального параметра мы можем определить параметр a обращая формулу (1.6.18), или соотношения (1.6.15):

$$a = \frac{4x^2}{(1-x^2)(1+x^2)^2}. \quad (1.6.19)$$

Отсюда учитывая, что $a = \frac{\alpha}{2D}$ определим интенсивность токовых флуктуаций D , представляющая наибольшую физическую значению

$$D = \frac{\alpha(1-x^2)(1+x^2)^2}{8x^3}. \quad (1.6.20)$$

С помощью (1.6.18) или (1.6.19) получаем следующие выражения для наиболее вероятного значения дискретного спектрального параметра $x_{ин}$, соответственно при малых и больших значениях параметра a

$$x_{ин} = \sqrt{\frac{5a}{72}} \quad (a \ll 1), \quad x_{ин} = 1 - \frac{2}{a} \quad (a \gg 1). \quad (1.6.21)$$

Последний результат согласуется с результатом, полученным в работе [83] для поправок $\Delta x_{ин}$ с учетом того, что $a = \frac{\alpha}{2D}$. Следовательно, оба результата обусловлено нелинейным преобразованием отмеченных выше статистик и не следуют из гауссового приближения для функции распределения. Это и показывает нетривиальность результатов обеих работ. Разница лишь в том, что в одном случае возможные значения дискретного спектрального параметра определяется флуктуациями среды, а в другом случае – случайностью начального условия.

Теперь исследуем максимум функции распределения дискретного спектрального параметра, поскольку он дает наибольший вклад в вероятность получения этой величиной того или иного значения. Подставляя асимптотические выражения для наиболее вероятных значений дискретного спектрального параметра $x_{ин}$ (1.6.21), в функции распределения (1.6.7) получаем следующие результаты:

$$I_{max} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (a \ll 1), \quad I_{max} = \sqrt{a} \quad (a \gg 1). \quad (1.6.22)$$

Из видов этих асимптотических выражений максимумов функции распределения нетрудно понять, что существует минимальное значение

функции распределения в некотором промежуточном значении параметра a .

Иллюстрации и подтверждения представленных здесь теории последовательно приведены на рисунках 6-9. На рис. 6 представлены графики функции распределения скорости флаксонов для различных значений параметра a , показывающие флуктуационную неустойчивость флаксонов, выражающийся в появлении двугорбости в функции распределения.

Из рис. 7, где представлены графики функции распределения дискретного спектрального параметра. Видно немотонное изменение и наличие их некоторого минимума. Рисунок 8 построенный на основе аналитической формулы (1.6.17)-(1.6.18) показывает монотонный рост наиболее вероятных значений дискретного спектрального параметра от нуля до единицы. Наконец на рисунке 9 представлен график максимума функции распределения дискретного спектрального параметра построенный на основе выражений (1.6.7) и (1.6.17). Как видно отсюда, действительно существует такое критическое значение параметра a ($a_c = 0,802$ - найденный нами численно), при котором имеется минимум этой зависимости. С физической точки зрения это соответствует абсолютно минимальной реализации наиболее вероятного значения дискретного спектрального параметра броуновских флаксонов.

В конце раздела приведем явное выражение критического параметра a полагая, что токовые флуктуации обусловлены термализацией флаксонов тепловой энергией. Учитывая, что согласно (1.4.32)

$$a = \frac{I \Phi_p}{4kT}, \quad (1.6.23)$$

а также критическое значение $a_c = 0,802$ получаем следующее выражение [A7]

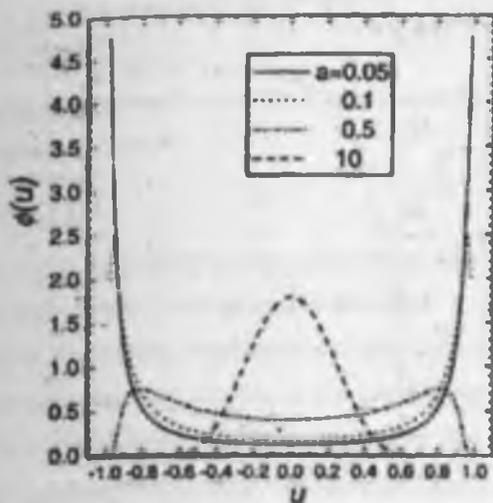


Рис. 6. Релятивистская функция распределения скорости броуновских флаксонов

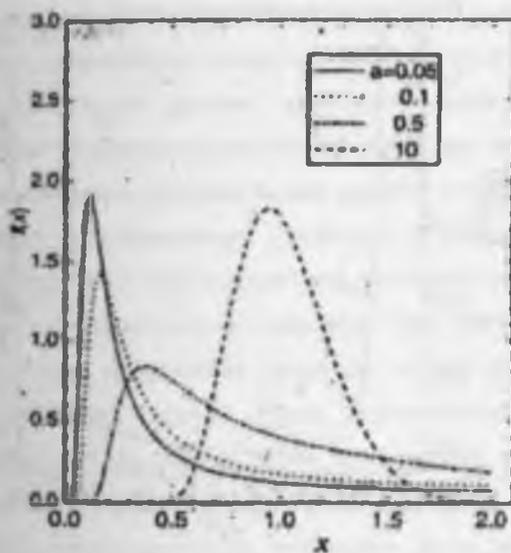


Рис. 7. Функция распределения дискретного спектрального параметра флаксонов

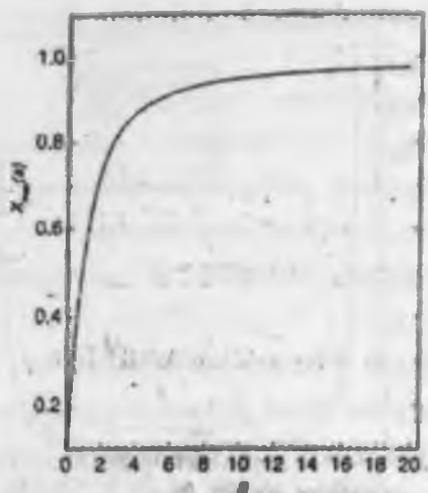


Рис. 8. Зависимость наиболее вероятного значения дискретного спектрального параметра от a

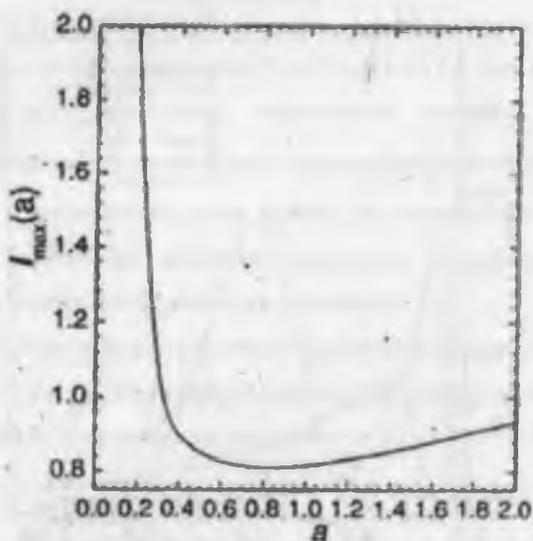


Рис. 9. Зависимость максимума функции распределения дискретного спектрального параметра флаксонов от a

$$\frac{\bar{I}_c \Phi_0}{4kT} = 0,802. \quad (1.6.24)$$

Подставляя численные значения фундаментальных констант в предыдущее выражение имеем

$$T = 14,9 \frac{K}{\text{мкА}} \bar{I}_c. \quad (1.6.25)$$

Отсюда видно критическая роль флуктуационных токов в низко-токовых сверхпроводниках, которые используются в джозефсоновских переходах, когда последние применяются для детектирования низко-энергичных электромагнитных излучений или сверх малых токов (см. более подробно в [19, 21, 22, 27, 28]). Действительно, уже при флуктуационном токе $\bar{I}_c = 5 \text{ мкА}$ соответствующая ему эффективная шумовая температура $T = 75 \text{ К}$, будет порядка температуры жидкого азота. Это существенно ухудшает излучательные (или измерительные) характеристики распределенных джозефсоновских генераторов (или детекторов). При флуктуационных напряжениях порядка джозефсоновского напряжения V_c следует учитывать также влияние квантовых шумов и флуктуации сверхпроводящих туннельных токов [85-87]. Но в этом случае волновое уравнение описывающее распространение квантов магнитного потока в распределенных джозефсоновских переходах становится интегро-дифференциальным [85], что существенно осложняет анализа влияния флуктуационных эффектов на их динамику. Это требует дальнейших исследований в этом направлении, поскольку в этом случае уравнения движения флаксонов также будут стохастическими интегро-дифференциальными уравнениями. А для таких случаев, к сожалению, не существует общих, универсальных методов решения, как в случае стохастических дифференциальных уравнений. Ясно, что в подобных ситуациях особую ценность приобретают даже приближенные методы решения этих задач, которые предстоит разработать в будущем.

Теперь перед нами стоит задача определения статистических свойств броуновских (или термализованных) флаксонов когда их число велико, т.е. когда эту систему многих квазичастиц можно рассматривать как газ солитонов (или флаксонов) [13, 88].

Этой проблеме будет посвящен следующий раздел настоящей главы.

1.7. Теория релятивистского идеального газа флаксонов

Как известно, понятие идеального газа играет ключевую роль в статистической физике и физике конденсированного состояния. Модель идеального газа оказалось плодотворной для построения теории теплоемкости твердых тел, квантовых газов, теории электропроводности металлов, сверхпроводников и для решения фундаментальных проблем системы многих частиц.

В этом разделе мы обсудим некоторые нетривиальные свойства необычного газа – газа солитонов (флаксонов), по-видимому, впервые введенный Бишопом [13]. Он обращал внимания на важность и фундаментальность нелинейных мод (солитонов, флаксонов и т.д.) наряду с линейными модами (фононами, магнонами и т.д.) и показал, что существует новый механизм перераспределения энергии между модами нелинейной системы (между газом фононов и солитонов). В частности, для плотности свободной энергии солитонов было получено следующее выражение

$$F = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\kappa T}{d} \bar{a} \exp(-\bar{a}), \quad (1.7.1)$$

где κ - постоянная Больцмана, T - температура системы, $\bar{a} = \frac{E_s}{\kappa T}$, E_s - энергия покоя солитона. Отметим, что выражение (1.7.1) справедливо при малых

$(kT \ll E_0)$. Отсюда с помощью соотношения $n_s = \frac{\delta \langle \mathcal{E} \rangle}{\delta \mu}$ (где $\beta = \frac{1}{kT}$), легко найти плотность внутренней энергии солитона u_s

$$u_s = \left[E_0 + \frac{kT}{2} \right] \langle n_s \rangle, \quad (1.7.2)$$

где

$$\langle n_s \rangle = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{a}}{d} \exp(-\bar{a}).$$

Следовательно, средняя плотность чисел солитонов равна $\langle n_s \rangle$, внутренняя энергия солитона складывается из энергии покоя E_0 и добавки $\frac{1}{2}kT$ соответствующая вследствие равномерного распределения энергии на степень свободы солитона. Из (1.7.3) видно, что при низких температурах плотность солитонов очень мало в отличие от плотности фононов.

Отметим, что среди работ посвященных статистическим задачам особое место занимают точно решаемые модели, к их числу относятся и модели одномерных идеальных газов (как классических, так и квантовых частиц) [88-92]. Свойства отмеченных выше солитонных газов в одномерных системах с различной точки зрения исследовались в работах [13, 88, 90-99] (см. также приведенные в этих работах литературу)¹.

Представляемая ниже теория релятивистского идеального газа Флаксонов будет исходить из представления, что свойства любого газа в конечном счете определяется его уравнением состояния, связывающее плотность средней энергии и давления этого газа. Мы для этого используем следующие релятивистские выражения для выше указанных величин [100], которые в одномерном случае записываются в виде:

$$\rho = nE_0 \left\langle \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right\rangle, \quad P = nE_0 \left\langle \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} \right\rangle. \quad (1.7.3)$$

¹ Работы посвящены условиям образования и устойчивости волновых формирований.

Здесь n -плотность чисел флаксонов, E_0 -энергия покоя флаксонов, u -нормированная скорость флаксонов. Угловые же скобки означают усреднения по распределению скорости флаксонов.

Следовательно, применимый нами метод нахождения уравнения состояния релятивистского флаксонного идеального газа является оригинальным и, насколько нам известно, ранее не встречается в литературе посвященной этой тематике.

Далее полагаем, что функция распределения скорости релятивистского идеального газа флаксонов подчиняется распределению найденная нами выше, т.е.

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[-au^2(1-u^2)^{-1}]. \quad (1.7.4)$$

Сперва находим плотность средней энергии релятивистского флаксонного газа. Для этого необходимо вычислить следующую среднюю

$$I_1 = \langle \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \Phi(u) du \quad (1.7.5)$$

Теперь введем как в разделе 1.5 новую переменную $u = thx$ и учтем, что

$$\Phi(u) du = \sqrt{\frac{a}{\pi}} chx \exp(-ash^2x) dx, \quad \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = chx. \quad (1.7.6)$$

Тогда согласно выражениям (1.7.6) и (1.7.5) имеем

$$I_1(a) = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^{\bar{x}} ch^2x \exp(-ash^2x) dx. \quad (1.7.7)$$

Далее воспользовавшись соотношениями

$$ch^2x - sh^2x = 1, \quad ch^2x + sh^2x = ch(2x) \quad (1.7.8)$$

получаем для $I_1(a)$ следующее интегральное выражение

$$I_1(a) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a \operatorname{схра}}{\pi}} \left\{ \int_0^{\bar{x}} \exp\left(-\frac{a}{2}cht\right) dt + \int_0^{\bar{x}} chte^{-\frac{a}{2}sh^2t} dt \right\}. \quad (1.7.9)$$

Но последние интегралы представляют собой модифицированные функции Бесселя [59, 60]

$$k_p(z) = \int_0^{\infty} e^{-uz} \operatorname{ch}(pt) dt, \quad (p = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.7.10)$$

Таким образом, плотность средней (или внутренней) энергии релятивистского идеального газа флаксонов определяется следующим соотношением [A5, A8, A10]

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{a}{2}} \exp\left(\frac{a}{2}\right) \left[k_0\left(\frac{a}{2}\right) + k_1\left(\frac{a}{2}\right) \right] n E_0. \quad (1.7.11)$$

Далее вспоминая, что $a = \frac{E_0}{2kT}$ (E_0 — энергия покоя флаксона, kT — тепловая энергия), мы приходим к выводу, что при заданной плотности чисел флаксонов плотность внутренней энергии флаксонного релятивистского идеального газа зависит от отношения энергии покоя флаксонов E_0 к тепловой энергии kT . Выражение (1.7.11) позволяет определить плотность внутренней энергии релятивистского флаксонного газа при конечных значениях отношения $\frac{kT}{E_0}$.

Теперь перейдем к нахождению давления релятивистского флаксонного идеального газа. Для этого требуется вычислить следующую среднюю

$$I_2 = \left\langle \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} \right\rangle. \quad (1.7.12)$$

Для вычисления этого среднего воспользуемся следующим тождеством

$$\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \sqrt{1-u^2}. \quad (1.7.13)$$

Следовательно

$$I_2(a) = I_1(a) - \langle \sqrt{1-u^2} \rangle. \quad (1.7.14)$$

Последняя средняя в этом выражении находится совершенно аналогично предыдущему и равна

$$\langle \sqrt{1-u^2} \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{a}{2}} \exp\left(\frac{a}{2}\right) k_0\left(\frac{a}{2}\right). \quad (1.7.15)$$

Таким образом, давление релятивистского идеального газа флаксонов определяется следующим выражением [А6-А8]

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{a}{2}} \exp\left(\frac{a}{2}\right) \left[k_1\left(\frac{a}{2}\right) - k_0\left(\frac{a}{2}\right) \right] nE_0. \quad (1.7.16)$$

Как видно из последнего выражения, в отличие от нерелятивистского идеального газа для которого справедливо уравнения состояния $P = nkT$, давление релятивистского флаксонного газа зависит также от их энергии покоя.

В заключении раздела обсудим полученные результаты в предельных случаях. При очень малых значениях параметры a , что означает $E_0 \ll kT$, модифицированные функции Бесселя имеют следующие асимптотические выражения [59]

$$k_0\left(\frac{a}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{a}\right), \quad k_1\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{a}, \quad a \ll 1. \quad (1.7.17)$$

Следовательно, когда энергия покоя флаксона E_0 очень мало по сравнению с тепловой энергией kT , плотность средней энергии и давления релятивистского флаксонного газа выражаются следующими формулами

$$\rho = nE_0 \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \left(1 + \frac{\ln 2}{2} \frac{a}{a} \right), \quad P = nE_0 \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \left(1 - \frac{\ln 2}{2} \frac{a}{a} \right). \quad (1.7.18)$$

В обратном пределе, т.е. при очень больших значениях параметра a , что означает $kT \ll E_0$ (малые температуры), модифицированные функции Бесселя $k_p(z)$ имеют следующие асимптотики

$$k_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{4p^2 - 1}{8z} + \frac{(4p^2 - 1)(4p^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \dots \right\} \quad (p = 0, 1, 2, \dots), \quad z \gg 1. \quad (1.7.19)$$

Таким образом, когда тепловая энергия kT очень мало по сравнению с энергией покоя флаксона, плотность внутренней энергии и давление флаксонного газа определяются следующими выражениями

$$\rho = nE_0 \left(1 + \frac{1}{4a} \right), \quad P = nE_0 \frac{1}{2a}. \quad (1.7.20)$$

Далее учитывая, что $2a = \frac{E_0}{kT}$ получаем следующие формулы

$$\rho = n \left(E_0 + \frac{kT}{2} \right), \quad P = nkT. \quad (1.7.21)$$

Следовательно, выражение для плотности внутренней энергии флаксона при малых температурах переходит в результат (1.7.2) полученный А.Бишопом [13]. Как следует из (1.7.21) давление флаксонного газа в этом же пределе выражается обычным образом и при заданной плотности чисел флаксонов определяется только температурой этого газа. Разумеется, последние результаты можно было бы получить с помощью выражений для плотности энергии и давления идеального газа (1.7.3) на основе усреднения по максвелловскому распределению $f(u)$ (1.4.1) справедливое в этом же нерелятивистском пределе, т.е. при $a \gg 1$ и $u \ll 1$.

Следовательно, отношение давления и плотности средней энергии релятивистского идеального газа броуновских флаксонов можно записать в следующем виде

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k_1 \left(\frac{a}{2} \right) - k_0 \left(\frac{a}{2} \right)}{k_1 \left(\frac{a}{2} \right) + k_0 \left(\frac{a}{2} \right)},$$

т.е. в отличие от нерелятивистской теории идеального газа – где оно постоянно, это отношение зависит от энергии покоя флаксонов E_0 и

тепловой энергии kT . Как мы увидим, далее в третьей главе подобным свойством обладают и квантовые релятивистские идеальные газы.

Это сравнение даст нам еще одну нетривиальную аналогию между газом частиц и газом частице – подобных волн, расширяющая наше представление о нелинейном мире физики.

Анализируя выражение для давления релятивистского идеального газа броуновских флаксонов приходим к выводу, что если два термализованные джозефсоновские переходы имеют одинаковую температуру, но разные максимальные критические токи, их давления не равны, в противоположность результатам нерелятивистской теории идеального газа.

Следовательно, этим свойством релятивистского флаксона газа можно воспользоваться для получения или измерения сверхнизких давлений, которые могут найти нетривиальные применения в прецизионной диагностике и нано физике. Например, при Бозе – Эйнштейновской конденсации при ультрахолодных температурах.

Комментарии и литературные указания

К разделу 1.1

Прекрасное изложение эффекта Джозефсона и их применения дано в книгах [19,20,21,22,28,75] (см. также приведённые в них обширную литературу).

Достаточно содержательный вывод уравнения синуса-Гордона для нелинейных волн квантов магнитного потока приведены в [23,37,44].

Схема теории возмущений примененный нами для анализа релятивистской стохастической динамики флаксонов основана на метод энергетического анализа предложенный в работе [44] (в которой

рассматривались влияния только детерминированных т.е. неслучайных возмущений).

К разделу 1.2

Уравнение для функции распределения импульсов флаконов под влиянием токовых флуктуаций (как собственных, так и внешних) и разных типов диссипации получено впервые и доказано также эквивалентность представления этого уравнения в виде (1.2.6) и (1.2.8). Отметим, что в литературе посвященной этой тематике существуют разные интерпретации (Ито, Стратоновича и Климонтовича) уравнения для функции распределения (см, напр. [3, 9-11]). Но мы воздерживаемся от вмешательства в эту полемику и считаем достаточным физическое обоснование этого уравнения приведенные в работах [3, 47].

К разделу 1.3 – 1.4

Найдено асимметричная функция распределения скорости флаконов под действием постоянного и флуктуационного тока, а также диссипации, обусловленная тунелированием нормальных (т.е. несверхпроводящих) электронов поперек контакта. На ее основе получено нетривиальная вольт – амперная характеристика джозефсоновского перехода с шумовым током. Впервые проводилось численное моделирование релятивистской стохастической динамики флаконов.

К разделу 1.5

Получено релятивистская функция распределения скорости флаконов устанавливаемые токовыми флуктуациями и диссипацией. На ее основе вычислены характерные скорости релятивистского броуновского движения флаконов и найдено условие флуктуационной неустойчивости флаконов, выражающиеся в появлении ненулевой наиболее вероятной x -ова составляющей скорости.

К разделу 1.6

Найдена функция распределения дискретного спектрального параметра броуновских флаксонов. Показано, что наиболее вероятное значение спектрального параметра зависит от отношения энергии покоя флаксонов и тепловой энергии.

К разделу 1.7

Представлена теория релятивистского идеального газа флаксонов. Получены выражения плотности внутренней (или средней) энергии и давления релятивистского флаксонного газа.

Несомненно представляют важный научный интерес обобщения полученных здесь результатов, теории релятивистского броуновского движения флаксонов и теории релятивистского флаксонного газа для случая обычных частиц (и квазичастиц) [101-133]. Повторяя высказывания Бишопа, можно сказать, что полученный нами здесь полезный урок будет служить хорошей основой для решения аналогичных проблем релятивистской статистической физики. Этому будут посвящены следующие главы монографии.

Задачи к главе I

1. Найдите установившиеся скорость квантов магнитного потока, решая уравнение (1.1.7) при $\chi(t) = \chi_0$.

2. Полагая $b(P) = 1$, с помощью (1.2.11) найдите вид функции $a(P)$, чтобы получить одномерную релятивистскую функцию распределения импульсов

$$f(P_x) = A \exp \left[- \frac{\sqrt{E_0^2 + P_x^2 c^2}}{kT} \right],$$

постоянную A определите используя условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(P_z) dP_z = 1.$$

3. Используя асимптотическую формулу для средних значений (1.3.12) определите разность средней энергии флаксонов в термализованной и детерминированной джозефсоновской линии передачи (т.е. без шумового тока). Исследуйте полученную Вами зависимость при изменении коэффициента диссипации α .

4. На основе выражений (1.5.17) и (1.5.18) постройте графики зависимостей среднего модуля и среднего-квадрата модуля скоростей броуновских флаксонов от параметра α .

5. Определите максимальное значение нормированной преднеквадратичной флуктуаций частоты электромагнитного излучения, связанного с движущимися флаксоном, используя ее выражения (1.5.40).

6. Используя функцию распределения дискретного спектрального параметра флаксонов (1.6.7) определите следующие средние:

$$\langle \chi \rangle, \langle \chi^2 \rangle, D\chi = \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2.$$

7. Определите теплоемкость релятивистского идеального газа броуновских флаксонов при постоянном объеме используя формулу

$$c_v = \frac{du}{dT},$$

где u - внутренняя энергия релятивистского газа флаксонов, которая согласно (1.7.11) выражается в следующем виде

$$u = \rho V = NE_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \sqrt{\frac{a}{2}} \left[K_0\left(\frac{a}{2}\right) + K_1\left(\frac{a}{2}\right) \right] \exp\left(\frac{a}{2}\right)$$

здесь: N - полное число флаксонов, $a = \frac{E_0}{2kT}$,

E_0 энергия покоя флаксонов, kT - тепловая энергия.

ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ НЕКВАНТОВОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА МАКСВЕЛЛА – БОЛЬЦМАНА

Наука вся держится на Вере.

Б.Хофман

Тақдир тилсими

*Соқин оқшом, кўкда юлдузлар –
Акси бўлмиш ерда намоен.
Ҳар юрак ўз Заҳросин излар,
Унда бўлмиш иқболи аён.*

*Шу тилсимиот қаъридан хабар,
Берур бизга самовий ҳолат.
Қай кунимиз рўзи муътабар,
Қачон бизни кутар фалокат.*

*Кўҳна дастгоҳ айлакур ҳамон,
Бор олам гайб сирини очиб.
Ҳақиқат шу: ҳеч ким, ҳеч қачон,
Қўтилолмас тақдирдан қочиб!*

*Чарх қўёши кезади жаҳон,
Гуноҳ, савоб – икки дунёдир.
Худо мадад берса гар, инсон –
Таодбир ила ҳар нега қодир!*

A destiny no man escapes

*Quiet night, with stars in the sky,
Their reflection is seen in the lake.
Every heart seeks its own star,
In which is hidden its fate...*

*Everyone's fate can be perceived,
From the star's path across the sky.
Which day will bring happiness?
On which will hardship arrive?*

*Timeless the gyration of the sky,
That reveals to us own fate.
It is a surety of live,
That destiny no man escapes!*

*All is known unto the sun,
Who is true end who a devil's mate.
When God favours one man's soul,
He opens to him all ways!*

Интерес к теории релятивистского идеального газа родился уже в начале двадцатого века сразу же после создания Альбертом Эйнштейном специальной теории относительности. В книге [116], которая имеет энциклопедический характер, очерчена определенная история исследований в этом направлении и подведен итог полученных результатов (с учетом внесенных дополнений, можно сказать, до 1980 года). Заслуживает особого внимания раздел книги посвященный релятивистской

термодинамике и статистике, где рассмотрены свойства равновесного теплового излучения и релятивистского идеального газа.

В дальнейшем эти исследования были продолжены в связи с проблемами релятивистской физики плазмы (как космической, так и лабораторной), релятивистской кинетической теории и, в целом, релятивистской статистической физики (как квантового, так и неквантового) [8, 101, 117-120]. В результате развития теории нелинейных волновых процессов стали актуальными изучения свойств нелинейных и неравновесных статистических систем [121-127]. В работах [128-132] показано важность релятивистских эффектов в процессах нелинейного комптоновского и томсоновского рассеяния, в релятивистской плазме, а также при распространении нелинейных волн – солитонов в многокомпонентной (в том числе – в электрон-позитронной, кварк-глюонной) релятивистской плазме. Особая роль релятивистских эффектов в субатомной физике подчеркнута в работе [133] (и цитированной в ней литературе) – где отношения $\frac{kT}{mc^2}$ может меняться от нуля до бесконечности. Здесь: kT - тепловая энергия, mc^2 - энергия покоя частицы.

Таким образом, на основе выше приведенных аргументов мы можем заключать об актуальности развития теории идеального газа релятивистских частиц.

Теперь непосредственно перейдем к представлению теории идеального газа неквантовых релятивистских частиц подчиняющихся статистике Максвелла-Больцмана [116,134]. Исходным основанием развиваемой нами ниже теории является следующие соотношения, выражающие плотность средней энергии и давления идеального газа релятивистских частиц [100]:

$$\rho = nE_0 \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\rangle, \quad (2.A)$$

$$P = \frac{nE_0}{3} \left\langle \frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\rangle. \quad (2.B)$$

Здесь n — плотность чисел частиц газа, E_0 — энергия покоя частицы газа, а скобка означает усреднения по функции распределения скорости частиц релятивистского идеального газа.

Следовательно, для определения давления и плотности средней энергии и выражающихся через эти величины уравнения состояния газа мы должны знать неизвестную в этих выражениях распределения скоростей. Решением этой проблемы занимаемся в следующих разделах.

2.1. Одномерное релятивистское броуновское движение частиц

Как уже подчеркивалось в первой главе явление броуновского движения занимает особое место в флуктуационных процессах, в динамике частиц под действием случайных сил, а также в нелинейных колебательных и волновых системах (по этим вопросам имеется ряд прекрасных книг, напр. [3-12], смотрите также приведенные в них специальную литературу).

Для описания одномерного релятивистского броуновского движения частиц будем исходить из тех же положений которые были использованы в исходной формулировке этой задачи [3-12], согласно которой уравнение движения частицы запишется в следующем виде

$$\frac{dP_x}{dt} = -\alpha v_x + f_x(t). \quad (2.1.1)$$

Входящие в это уравнение коэффициент диссипации α и случайная сила $f_x(t)$ вводятся феноменологически, оставляя их физическое происхождение открытым. Однако, следует подчеркнуть, что и диссипативная сила, и случайная сила обусловлены беспорядочным движением частиц среды в которой происходит броуновское движение [2,

101]. Этим и объясняется статистическая природа броуновского движения. Смотрите третью главу (раздел 3.1), где это утверждение доказано для броуновского движения атомов под действием фотонов теплового излучения.

Перейдем к нахождению уравнения описывающие изменения скорости релятивистской частицы, при его броуновском движении учитывая следующую известную зависимость между ее импульсом P_x и скоростью v_x ,

$$P_x = mv_x \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.2)$$

С помощью этого выражения находим производную от импульса частицы по времени

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{dP_x}{dv_x} \frac{dv_x}{dt} = m \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{dv_x}{dt}. \quad (2.1.3)$$

Следовательно, подставляя найденную производную в (2.1.1) получаем следующее стохастическое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = a(u) + b(u)\xi(t), \quad (2.1.4)$$

где

$$a(u) = -\frac{\alpha}{m} (1 - u^2)^{\frac{1}{2}} u, \quad b(u) = \frac{1}{mc} (1 - u^2)^{\frac{1}{2}}, \\ u = \frac{v_x}{c}, \quad \xi(t) = f_x(t). \quad (2.1.5)$$

Как видно из уравнения движения броуновской релятивистской частицы, оно подобно уравнению (1.1.7) для квантов магнитного потока - флаксонов.

Далее учитывая, что уравнение (2.1.4) имеет структуру общего стохастического уравнения (1.2.4), мы можем сразу найти установившиеся

функцию распределения скорости релятивистской частицы совершающая одномерное броуновское движение [смотрите (1.2.11)]

$$F(u) = \frac{A}{|b(u)|} \exp \left[\frac{1}{D} \int \frac{a(u)}{b^2(u)} du \right]. \quad (2.1.6)$$

Здесь D – интенсивность случайных сил действующих на частицу, A – постоянная определяемая из условия нормировки функции распределения скорости

$$\int_{-1}^1 F(u) du = 1. \quad (2.1.7)$$

Таким образом, подставляя в (2.1.6) явные выражения $a(u)$, $b(u)$ (2.1.5) и выполняя интегрирование, получаем функцию распределения скорости релятивистской частицы совершающее одномерное броуновское движение:

$$F(u) = A(mc) (1-u^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-b(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (2.1.8)$$

где $b = \frac{a(mc^2)}{D}$, mc^2 – энергия покоя частицы. Отсюда видно, что величину $\frac{D}{a}$ можно рассматривать как характерную флуктуационную энергию, т.е.

$$E_{\text{фл}} = \frac{D}{a}.$$

Теперь определим постоянную A используя условия нормировки (2.1.7). С учетом того, что $F(u)$ четная функция и получаем на основании выражения (2.1.7) следующее соотношение

$$2A(mc) I = 1. \quad (2.1.9)$$

Интеграл I входящее в него запишется в виде

$$I = \int_{-1}^1 du (1-u^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-b(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (2.1.10)$$

Далее перейдем к новому переменному $u = \beta x$ ($0 < x < \infty$) как это делалось в первой главе (смотрите раздел посвященный теории релятивистского идеального газа флаксонов) и учитывая

$$(1 - u^2)^{-\frac{1}{2}} = \beta x, \quad du = \frac{\beta dx}{c h^2 x}, \quad (2.1.11)$$

будем получать для вычисляемого интеграла следующее выражение

$$I = \int_0^{\infty} dx \beta x \exp[-\beta c h x]. \quad (2.1.12)$$

Теперь учитывая выражение модифицированных функций Бесселя (1.7.10), получим, что $I = A_1(b)$ и следовательно постоянная A равна

$$A = \frac{1}{2mck_1(b)}. \quad (2.1.13)$$

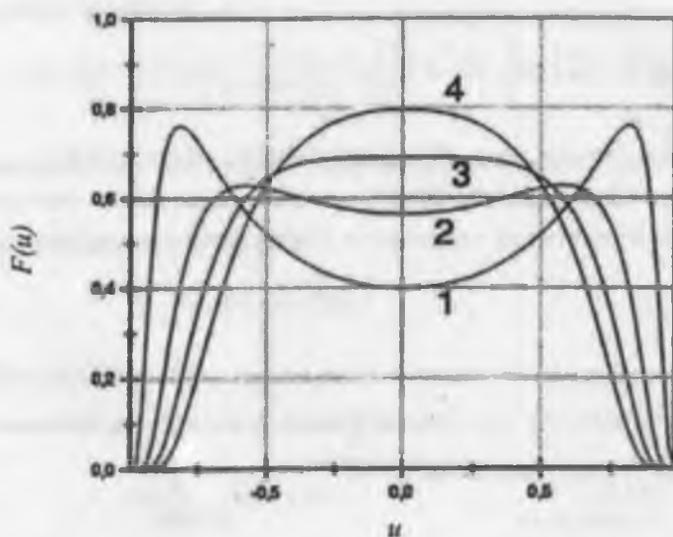


Рис. 10. Функция распределения скорости частиц для одмерного релятивистского броуновского движения ($b=2$ (4); 1,5 (3); 1 (2); 0,5 (1)).

Таким образом, подставляя выражение постоянной A в (2.1.8) получаем функцию распределения скорости одномерного релятивистского броуновского движения частиц (рис. 10) [А6-А7]:

$$F(u) = \frac{1}{2k_1(b)} (1-u^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-b(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (2.1.14)$$

Как следует из этого выражения свойства функции распределения скорости $F(u)$ и ее статистические характеристики определяется параметров b , равное отношению энергии покоя частицы $E_0 = mc^2$ к характерной флуктуационной энергии $E_{fl} = \frac{D}{\alpha}$ (напомним, что здесь D - интенсивность случайных сил действующих на частицу, α - коэффициент диссипации). Этот вопрос будет исследовано в следующем разделе.

2.2. Релятивистское флуктуационно-диссипативное соотношение для одномерного броуновского движения

В теории броуновского движения одной из важнейших величин является средняя квадрата скорости частицы. Поэтому представляет интерес нахождения этой статистической характеристики для одномерного броуновского движения релятивистской частицы. Согласно формуле вычисления средних (1.4.3), средняя квадрата скорости частицы определяется следующим выражением

$$\langle u^2 \rangle = \int_{-1}^1 u^2 F(u) du, \quad (2.2.1)$$

где $F(u)$ - функция распределения скорости релятивистского броуновского движения (2.1.14).

Для вычисления среднего квадрата скорости как в предыдущем разделе перейдем к переменному $u = \tanh x$ и учитывая четность подынтегральной функции в (2.2.1) получаем следующее интегральное выражение

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{k_1(b)} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{ch^2 x}\right) chx \exp(-bchx) dx. \quad (2.2.2)$$

Отсюда следует, что

$$\langle u^2 \rangle = 1 - \frac{k_{11}(b)}{k_1(b)}, \quad (2.2.3)$$

где $k_{11}(b)$ есть следующий интеграл

$$k_{11}(b) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{chx} \exp(-bchx). \quad (2.2.4)$$

Далее воспользуемся выражением этой функции как интеграл от модифицированной функции Бесселя нулевого порядка [59]:

$$k_{11}(b) = \int_0^{\infty} k_0(r) dr. \quad (2.2.5)$$

Значения функции $k_{11}(b)$ табулированы (смотрите, например, [59]). Это позволяет определить среднюю квадрата скорости релятивистской частицы совершающее одномерное броуновское движение при любых значениях параметра b .

Теперь же исследуем асимптотическое поведение среднего квадрата скорости в пределах очень малых и очень больших значениях параметра b . Как показано в [59], при очень малых значениях параметра b ($b \ll 1$ или $b \rightarrow 0$) - что соответствует бесмассовым или ультра-релятивистским частицам, для $k_{11}(b)$ и $k(b)$ существуют следующие асимптотические формулы

$$k_1(b) = \frac{1}{b}, \quad k_{11}(b) = \frac{\pi}{2} + \left(\gamma + \ln \frac{b}{2}\right) \left(b + \frac{1}{12} b^3\right) - \left(b + \frac{1}{36} b^3\right) + \dots \quad (2.2.6)$$

Следовательно, в этом пределе средняя квадрата скорости броуновской частицы выражается следующей простой формулой

$$\langle u^2 \rangle = 1 - \frac{\pi}{2} b = 1 - \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{D} (mc^2) \quad (2.2.7)$$

Отсюда в частности следует, что в бездиссипативной среде ($\alpha = 0$) броуновская частица движется со скоростью света как флоксоны в бездиссипативной джозефсоновской линии передачи, как это было отмечено в первой главе.

В случае очень больших значений параметра b , что соответствует нерелятивистским частицам ($\frac{D}{\alpha} \ll mc^2$), имеют места следующие асимптотические формулы для вышеприведенных функций

$$k_{II}(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-\left(1 - \frac{5}{8b} + \dots\right)}, \quad k_I(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-\left(1 + \frac{3}{8b} + \dots\right)}. \quad (2.2.8)$$

Отсюда следует, что в этом пределе

$$\frac{k_{II}(b)}{k_I(b)} = 1 - \frac{1}{b} + \frac{15}{64b^2} + \dots \quad (2.2.9)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае средняя квадрата скорости броуновской частицы выражается следующей формулой

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{b} = \frac{D}{\alpha(mc^2)} \quad (2.2.10)$$

Теперь определим выражение функции распределения скорости броуновской частицы в этом случае. Учитывая, что в нерелятивистском пределе $u^2 \ll 1$ и $k_I(b)$ имеет асимптотику (2.2.8), получаем

$$F(u) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \exp\left(-\frac{b}{2} u^2\right) = c \sqrt{\frac{m\alpha}{2\pi D}} \exp\left(-\frac{\alpha mc^2}{2D} u^2\right) \quad (2.2.11)$$

Далее вспоминая, что $u = \frac{v}{c}$, отсюда получаем следующую функцию распределения скорости броуновской частицы для нерелятивистского одномерного движения

$$F(v_r) = \sqrt{\frac{m\alpha}{2\pi D}} \exp\left(-\frac{\alpha m}{2D} v_r^2\right), \quad (2.2.12)$$

которая было впервые получено А. Эйнштейном. Как он показал в своей работе, если причиной возникновения случайных сил является тепловое

движение частиц среды, то в условиях статистического равновесия средняя квадрата скорости броуновской должно равняться ее среднему квадрата скорости при температуре среды T

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{D}{\alpha m} = \frac{kT}{m}. \quad (2.2.13)$$

Отсюда следует, что средняя квадрата скорости нерелятивистской броуновской частицы пропорционально интенсивности случайных сил действующих на частицу D и температуре среды T . Из (2.2.13) вытекает также следующее важное выражение связывающее интенсивность случайных воздействий на броуновскую частицу D , коэффициента диссипации α и температуру T :

$$\frac{D}{\alpha} = kT \quad (2.2.14)$$

где k – постоянная Больцмана. Это и есть знаменитое флуктуационно – диссипативное соотношение Эйнштейна. Следовательно, характерная флуктуационная энергия равна тепловой энергии.

Таким образом, выражение (2.2.3) можно рассматривать релятивистским флуктуационно-диссипативным соотношением для одномерного броуновского движения частицы, из которого в нерелятивистском пределе следует результат Эйнштейна (2.2.13)-(2.2.14). Разумеется, результат (2.2.7) не следует из Эйнштейновской теории броуновского движения, поскольку он этот случай не рассматривал. Впрочем, как правильно замечал автор работы [101], остается загадкой почему Эйнштейн не сделал релятивистское обобщение своей теории броуновского движения и, в частности, теории идеального газа. Как принято говорить в подобных случаях, на эти вопросы смог бы отвечать только ...Эйнштейн!

Заключая раздел подчеркиваем, что Эйнштейн свою теорию броуновского движения применял также для оригинального вывода спектральной плотности равновесного теплового излучения, о котором

подробно расскажем в третьей главе, в связи с первичным космическим излучением.

2.3. Одномерный релятивистский идеальный газ

Начиная с этого раздела мы будем сосредоточить свое внимание на изучении свойств идеального газа релятивистских частиц. Естественно, для упрощения понимания результатов этой теории мы начнем эти исследования с наиболее простого случая — для одномерного релятивистского идеального газа. Подчеркиваем, что одномерная модель идеального газа (как некантового, так и кантового) широко и плодотворно применяется в статистической физике, в молекулярной динамике, в кинетической теории [95, 89, 93, 90, 94, 91, 97, 54-57]. В последнее время пробуждается снова новый интерес к этим системам в связи с проблемой термализации в нелинейных статистических системах, в системах с конечным числом частиц (где термодинамический предел, полагающий бесконечное число частиц не выполняется), а также бозе-эйнштейновской конденсации в нелинейных одномерных системах [102,103] (смотрите также приведенные в этих работах литературу).

Наше рассмотрение свойств одномерного идеального газа релятивистских частиц основано на распределении Больцмана для импульсов частиц релятивистского идеального газа [101, 116, 104, 105], которое в этом случае имеет следующий вид:

$$f(P_x) = A \exp \left[- \frac{\sqrt{E_0^2 + P_x^2 c^2}}{kT} \right]. \quad (2.3.1)$$

Здесь $E_0 = mc^2$ — энергия покоя частицы и T — температура идеального газа, P_x — x -составляющая импульса частицы.

Сперва определим постоянную A , которая, как видно из приведенного выражения (2.3.1) зависит от энергии покоя частиц идеального газа и тепловой энергии kT . Для ее нахождения воспользуемся как всегда условием нормировки функции распределения импульсов $f(P_x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(P_x) dP_x = 1. \quad (2.3.2)$$

Применяя обычную при вычислении таких интегралов подстановку

$$P_x = mc \operatorname{sh} x, \quad (2.3.3)$$

с учетом выражений (2.3.1)-(2.3.3) получаем следующее соотношение

$$2A \operatorname{Im} c = 1. \quad (2.3.4)$$

Интеграл I входящий в эту формулу имеет вид

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{ch} x \exp(-b \operatorname{ch} x), \quad b = \frac{mc^2}{kT} \quad (2.3.5)$$

Это есть тот же самый интеграл (2.1.12), равный $k_1(b)$.

Следовательно, функцию распределения (ФР) x -составляющих импульсов частиц релятивистского идеального газа можно представить в следующем виде

$$f(P_x) = \frac{1}{2mck_1(b)} \exp \left[-\sqrt{1 + \left(\frac{P_x}{mc} \right)^2} \right] \quad (2.3.6)$$

Теперь определим вид функции распределения x -составляющих импульсов частиц одномерного релятивистского идеального газа в предельных значениях параметра b -равный отношению энергии покоя частиц газа $E_0 = mc^2$ и тепловой энергии kT (заметим, что в случае броуновского движения это было характерная энергия флуктуаций $\frac{D}{a}$).

При очень малых значениях параметра b ($b \rightarrow 0$ означает не только что $T \rightarrow \infty$, но и также $m \rightarrow 0$), учитывая асимптотику модифицированной функции Бесселя первого порядка $k_1(b) = b^{-1}$ (2.2.6) и вид $f(P_x)$ (2.3.6) в

этом пределе получаем следующее выражение функции распределения x -составляющих импульсов частиц одномерного релятивистского идеального газа

$$f(P_x) = \frac{c}{2kT} \exp\left(-\frac{c|P_x|}{kT}\right). \quad (2.3.7)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом пределе возможные значения импульсов частиц P_x определяется тепловой энергией kT . Учитывая флуктуационно-диссипативное соотношение (2.2.14), приходим также к выводу, что возможные импульсы P_x релятивистского броуновского движения определяются энергией флуктуаций $\frac{D}{\alpha}$. Ранее мы показали, как помнит читатель, аналогичное поведение ΦP импульсов (1.5.1), квантов магнитного потока – флаксонов в джозефсоновской линии передачи с флуктуационным током и диссипацией.

Далее согласно (2.3.7) замечаем, что при $T \rightarrow 0$ функция распределения $f(P_x)$ становится дельта функцией, т.е. $f(P_x) = \delta(P_x)$. Разумеется таким же будет функции распределения импульсов одномерного релятивистского броуновского движение при $D \rightarrow 0$. Таким образом, можно сказать, что условиями существования таких квазичастиц являются наличия температуры или флуктуаций. Естественно, как сейчас принято говорить, в первом случае – это тепловые или термализационные частицы. Аналогично, во втором случае – это флуктуоны или флуктуационные частицы.

Подчеркиваем, что известным примером квазичастиц обладающий подобным свойством являются фотоны равновесного излучения теплового возбуждения (по этому поводу можете смотреть любой стандартный курс по статистической физике для университетов). Мы же показали наличия таких свойств не только квантовым частицам-фотонам, но и также

неквантовым квазичастицам (например: фононы в термализованной кристаллической решетке или флаксоны в джозефсоновской линии передачи с флуктуационным током) в безмассовом пределе т.е. в результате предельного перехода $m \rightarrow 0$ от (2.3.6) к (2.3.7). Ясно, что в последнем случае под скоростью c следует понимать предельную скорость этих элементарных возбуждений – квазичастиц в рассматриваемой системе (смотрите, например [68, 104, 105]). В частности, явление сверхтекучести тоже происходит когда вязкость среды равна нулю, благодаря наличия энергии квантовых флуктуаций. В дальнейшем этот результат будет обобщен для трехмерной функции распределения импульсов частиц неквантового релятивистского идеального газа в разделах 5-7 настоящей главы.

Предоставляя читателям анализа $f(P_1)$ для случае очень больших значений параметра b (при этом следует учитывать асимптотику $t_1(b)$ (2.2.8), а также $P_1 \ll mc$), мы перейдем к применению функции распределения x -составляющих импульсов частиц релятивистского идеального газа к нахождению функции распределения их скоростей и характерных частот излучения.

2.4. Характерные частоты излучения атомов одномерного релятивистского идеального газа

Как известно, любое излучение (как спонтанное, так и тепловое) имеет статистическую природу [117,119]. Проще говоря, оно обусловлено либо квантовыми переходами с одного энергетического состояния в другое, либо тепловым возбуждением атомов или их совместным действием. Поэтому учет этих факторов является одной из сложнейших проблем теории лазерного излучения, излучения частиц (атомов или ионов) в

релятивистской плазме, лазерной спектроскопии, релятивистской высоко-
 частотной квантовой электроники [118,121]. Одной из причин расширения
 спектральных линий излучения является случайное распределение скорости
 излучающих частиц (атомов, ионов, молекул). В этом случае благодаря
 Доплер эффекту излучаемые частоты сдвигаются также случайным
 образом. В частности, если скорости излучающих частиц подчиняются
 распределению Максвелла, то наблюдаемая линия излучения будет
 гауссовой. Однако, еще в свое время Эйнштейн показал важность учета
 релятивистских поправок пропорциональные квадрату скорости
 излучающих частиц идеального газа, даже в случае, когда их скорости
 подчиняются нерелятивистскому максвелловскому распределению.

Следуя выше сказанному, мы будем обобщать эти результаты для
 излучения атомов идеального газа релятивистских частиц в случае их
 одномерного движения на основе точной формулы Доплера для частот
 [100, 101,116]

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \quad (2.4.1)$$

Здесь ν_0 – частота излучения неподвижного атома т.е. излучаемая частота,
 ν – наблюдаемая частота, $u = \frac{v_x}{c}$, v_x – проекция скорости излучающего атома
 на направление наблюдения, за которого мы выберем положительное
 направление оси x , как это всегда делается (смотрите, например [116]).

Следовательно, как видно из выражения (2.4.1) наблюдаемые
 характерные частоты излучения: средняя частота излучения, средняя
 квадрата частоты излучения и определяемая ими среднескватричная
 флуктуация (или дисперсия – как иногда говорят) частоты излучения
 определяются функцией распределения скоростей излучающих частиц
 релятивистского идеального газа. Поэтому мы должны определить эту
 распределению скоростей. Для нахождения функции распределения

скорости частиц одномерного релятивистского идеального газа будем использовать формулу преобразования функции распределения (2.3.6), как это делалось в первой главе:

$$\Phi(u) = \int [P(u) \left| \frac{dP(u)}{du} \right|]. \quad (2.4.2)$$

Здесь

$$P = \frac{P_x}{mc} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (2.4.3)$$

Далее учитывая, что согласно (2.3.6) нормированный импульс частиц P описывается распределением

$$f(p) = \frac{1}{2k_1(b)} \exp\left[-b\sqrt{1+p^2}\right], \quad (2.4.4)$$

и используя выражение (2.4.2)-(2.4.3) получаем функцию распределения нормированной скорости частиц одномерного релятивистского идеального газа в следующем виде

$$\Phi(u) = \bar{A}(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-b(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\right], \quad \bar{A} = \frac{1}{2k_1(b)}, \quad u = \frac{v_x}{c}. \quad (2.4.5)$$

Следовательно, найденная функция распределения нормированной скорости частиц одномерного релятивистского идеального газа $\Phi(u)$ совершенно аналогично функции распределения нормированной скорости $F(u)$ релятивистской частицы совершающее одномерное броуновское движение. В частности, среднеквадратичная скорость частиц газа, согласно этому соответствию, в одномерном случае определяется следующей красивой формулой [А6-А7]

$$u_{\text{кв}} = \sqrt{\langle u^2 \rangle} = \left(1 - \frac{k_1(b)}{k_2(b)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{mc^2}{kT}. \quad (2.4.6)$$

Теперь будем находить характерные наблюдаемые частоты излучения атомов идеального газа релятивистских частиц совершающие одномерное движение.

Сперва определим среднюю наблюдаемую частоту излучения воспользовавшись выражениями формул Доплера (2.4.1) и функции распределения нормированной скорости (2.4.5)

$$\langle \nu \rangle = \nu_0 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}} \Phi(u) du = \nu_0 \int_{-1}^1 \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \Phi(u) du. \quad (2.4.7)$$

Отсюда учитывая четность функции $\Phi(u)$ получаем, что

$$\langle \nu \rangle = \frac{\nu_0}{k_1(b)} \int_0^1 (1-u^2)^{-1/2} \exp\left[-b(1-u^2)^{-1/2}\right] du. \quad (2.4.8)$$

Далее используя замену переменных $u = shx$ ($0 < x < \infty$) получаем следующее выражение

$$\langle \nu \rangle = \frac{\nu_0}{k_1(b)} \int_0^{\infty} dx ch^2 x \exp(-bchx). \quad (2.4.9)$$

Входящий в последнее выражение интеграл можно вычислить следующим образом, учтя, что $ch^2 x = 1 + sh^2 x$:

$$I = \int_0^{\infty} dx \exp(-bchx) + \int_0^{\infty} dx sh^2 x \exp(-bchx) = k_0(b) + \frac{k_1(b)}{b}. \quad (2.4.10)$$

Отметим, что при этом мы воспользовались следующим интегральным выражением модифицированных функций Бесселя [59]

$$k_n(b) = \frac{b^n}{(2n-1)!} \int_0^{\infty} dx sh^{2n} x \exp(-bchx) = \frac{b^{n-1}}{(2n-3)!} \int_0^{\infty} dx sh^{2(n-1)} x chx \exp(-bchx). \quad (2.4.11)$$

Таким образом, средняя наблюдаемая частота излучения атомов одномерного релятивистского идеального газа определяется следующим выражением

$$\langle \nu \rangle = \nu_0 \left[\frac{1}{b} + \frac{k_1(b)}{k_1(b)} \right]. \quad (2.4.12)$$

Теперь находим среднюю квадрата наблюдаемой частоты излучения атомов воспользовавшись следующим выражением

$$\langle \nu^2 \rangle = \nu_0^2 \int_{-1}^1 \frac{1-2u+u^2}{1-u^2} \Phi(u) du. \quad (2.4.13)$$

Учтя подстановку $u = ihx$ получаем:

$$\frac{1+ih^2x}{1-ih^2x} = ch^2x + sh^2x = ch(2x). \quad (2.4.14)$$

Следовательно, используя интегральные выражения модифицированных функций Бесселя (2.4.11) находим для среднего квадрата наблюдаемой частоты излучения атомов одномерного релятивистского идеального газа следующее соотношение

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \frac{v_0^2}{k_1(b)} \int_0^{\infty} (ch^2x + sh^2x) chx \exp(-bchx) dx = \\ &= \frac{v_0^2}{k_1(b)} \left[\int_0^{\infty} dx chx \exp(-bchx) + 2 \int_0^{\infty} dx sh^2x chx \exp(-bchx) \right] \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

И наконец учитывая, что [59]

$$k_0(b) = k_2(b) - \frac{2}{b} k_1(b), \quad (2.4.16)$$

найденные характерные наблюдаемые частоты излучения атомов можно записать в следующем компактном виде

$$\langle v \rangle = v_0 \left[\frac{k_2(b)}{k_1(b)} - \frac{1}{b} \right], \quad \langle v^2 \rangle = v_0^2 \left[\left(1 + \frac{2}{b} \right) \frac{k_2(b)}{k_1(b)} - \frac{2}{b} \right]. \quad (2.4.17)$$

Эти выражения позволяют нам определить эти средние при любых значениях параметра b .

В заключении раздела будем обсуждать некоторые следствия вытекающие из первой формулы выражения (2.4.17) для средней наблюдаемой частоты излучения атомов рассматриваемого газа. Сразу же следует отметить нетривиальность этого результата, поскольку согласно известным нерелятивистским теориям уширения спектральных линий (смотрите например [3,7,105]) средняя наблюдаемая частота равна частоте излучения неподвижного атома. Действительно, в этом приближении согласно (2.4.1), имеем, что

$$\langle v \rangle = v_0 \langle (1-u) \rangle = v_0, \quad (2.4.18)$$

так как средняя проекция скорости частиц любого газа равна нулю.

Но полученный результат для средней наблюдаемой частоты излучения атомов, согласно (2.4.7) можно представить также и в следующем виде

$$\langle \nu \rangle = \nu_0 \left\langle \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right\rangle = \nu_0 \frac{\langle E \rangle}{E_0}, \quad (2.4.19)$$

где $\langle E \rangle$ — средняя энергия одной частицы одномерного идеального газа, E_0 — энергия покоя частиц этого газа. Используя последнее выражение, находим средний сдвиг частот излучения атомов

$$\langle \Delta \nu \rangle = \nu - \nu_0 = \nu_0 \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1 \right) \right\rangle = \nu_0 \frac{\langle E_k \rangle}{E_0}. \quad (2.4.20)$$

Здесь $\langle E_k \rangle$ — средняя кинетическая энергия одной частицы газа.

Следовательно, заключение "средняя наблюдаемая частота равна частоте излучения" равносильно полному пренебрежению тепловым движением. Важность и необходимость учета релятивистских поправок первым понял Эйнштейн. Он исходил из выражения (2.4.1) и разлагал его с точностью до u^2 (это главный порядок в рассматриваемом приближении), а функцию распределения скорости излучающих атомов газа считал максвелловским (образно говоря, использовал, так называемую полурелятивистскую теорию). Тогда из выражений (2.4.19) и (2.2.13) [смотрите также (1.5.24)] следует, что

$$\langle \nu \rangle = \nu_0 \left\langle 1 + \frac{1}{2} u^2 \right\rangle = \nu_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{kT}{mc^2} \right). \quad (2.4.21)$$

Теперь используя выражение для средней наблюдаемой частоты излучения атомов т.е. первую формулу в (2.4.17), в рассматриваемом пределе или что, то же самое — при $b \gg 1$, учитывая асимптотический вид модифицированных функций Бесселя $k_1(b)$ и $k_2(b)$ [59]

$$k_1(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b} \left(1 + \frac{3}{8b} \right), \quad k_2(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b} \left(1 - \frac{15}{8b} \right). \quad (2.4.22)$$

получаем следующий результат

$$\langle v \rangle \approx v_0 \left(1 + \frac{3}{2b} - \frac{1}{b} \right) = v_0 \left(1 + \frac{1}{2b} \right) = v_0 \left(1 + \frac{kT}{2mc^2} \right), \quad (2.4.23)$$

который согласуется в нерелятивистском пределе с результатом (2.4.21) полученный Эйнштейном для этого случая.

Подчеркиваем, что последняя зависимость еще в свое время была подтверждена в знаменитых опытах Айвса, в которых исследовалось изменения частот излучения атомов водорода в канальных лучах [116]. Подобный эффект существует также при излучении атомов в кристаллической решетке. Но в последнем случае происходит сдвиг частоты в обратную сторону, т.е.

$$\langle v \rangle \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \langle u^2 \rangle \right). \quad (2.4.24)$$

Экспериментальные исследования основанные на высокоточный метод Мессбауэра применяемые в таких случаях, подтверждают наблюдаемый сдвиг частот на величину $\frac{v_0}{2} \langle u^2 \rangle$, несмотря на ее малость. Например, если частота излучения неподвижного атома 2 Мгц и $\langle u^2 \rangle = 10^{-3}$, то сдвиг частоты будет порядка 1 кгц, вполне доступный измерению.

Любезно оставляя читателям анализа средисквадратичных флуктуаций частоты излучения атомов одномерного релятивистского идеального газа перейдем к намеченному выше представлению теории некантового релятивистского идеального газа Максвелла – Больцмана. Этому посвящены последние три раздела настоящей главы.

ТЕОРИЯ НЕКВАНТОВОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА МАКСВЕЛЛА-БОЛЬЦМАНА

2.5. Функция распределение скорости частиц релятивистского идеального газа

Ключевая роль функции распределения (например, импульсов, скоростей, энергий и т.д.) в статистической физике общепризнанно и она не нуждается в доказательстве. Вся история развития классической и квантовой статистической физики подтверждает эту истину. Естественно, эту действительно поучительную и заслуживающую особую внимания научную историю невозможно отразить в рамках одной книги. К сожалению, в настоящее время ни у кого нет необходимого для этого ни времени и ни возможности. Можно добавить также, что даже невозможно посчитать все статьи на эту тему. Поэтому мы вынуждены ограничиться приведением только некоторой библиографией работ классиков физики [134-145], внесшие фундаментальный вклад в кинетическую теорию и в статистическую физику.

Для определения функции распределение скорости частиц неквантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана будем использовать метод преобразования многомерной функции распределения [3, 9].

Воспользовавшись переходом от импульсов частиц к их скоростям получаем

$$\int f(P_x, P_y, P_z) dP_x dP_y dP_z = \int \varphi(v_x, v_y, v_z) D |dv_x dv_y dv_z|. \quad (2.5.1)$$

Здесь D —детерминант преобразования определяемый следующим выражением

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial v_x} & \frac{\partial P_x}{\partial v_y} & \frac{\partial P_x}{\partial v_z} \\ \frac{\partial P_y}{\partial v_x} & \frac{\partial P_y}{\partial v_y} & \frac{\partial P_y}{\partial v_z} \\ \frac{\partial P_z}{\partial v_x} & \frac{\partial P_z}{\partial v_y} & \frac{\partial P_z}{\partial v_z} \end{vmatrix}. \quad (2.5.2)$$

В приведенном выражении P_x, P_y, P_z составляющие импульсов по соответствующим осям x, y и z :

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.5.3)$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}.$$

Вычисляя частные производные входящие в детерминант преобразования D мы получаем для них следующие компактные выражения:

$$\frac{\partial P_i}{\partial v_j} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\delta_{ij} + \frac{v_i v_j}{c^2} \right] \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.5.4)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$).

Эти выражения позволяют нам записать детерминант преобразования D (2.5.2) от импульсов P_x, P_y, P_z к скорости v_x, v_y, v_z в следующем виде

$$D = m^3 \gamma^3 \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.5.5)$$

Здесь d_{ij} – матричные элементы детерминанта преобразования D определяются следующими выражениями

$$d_{11} = d_{22} = d_{33} = \gamma^2 \frac{v_x v_x}{c^2}, \quad d_{12} = d_{21} = \gamma^2 \frac{v_x v_y}{c^2}, \quad d_{13} = d_{31} = \gamma^2 \frac{v_x v_z}{c^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.5.6)$$

Диагональные же элементы детерминанта D имеют следующие виды

$$d_{11} = 1 + \gamma^2 \frac{v_x^2}{c^2}, \quad d_{22} = 1 + \gamma^2 \frac{v_y^2}{c^2}, \quad d_{33} = 1 + \gamma^2 \frac{v_z^2}{c^2}. \quad (2.5.7)$$

Далее применяя обычный способ вычисления детерминантов (смотрите, например [60]) получаем

$$D = m^3 \gamma^3 (D_1 - D_2 + D_3). \quad (2.5.8)$$

Входящие в последнее выражение величины D_1, D_2 и D_3 (так называемые алгебраические дополнители) определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} D_1 &= d_{11}(d_{22}d_{33} - d_{23}^2) = \gamma^2 \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right) \left(1 + \gamma^2 \frac{v_x^2}{c^2}\right), \\ D_2 &= d_{12}(d_{31}d_{12} - d_{31}d_{21}) = \frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_y^2, \\ D_3 &= d_{13}(d_{21}d_{13} - d_{21}d_{31}) = -\frac{\gamma^4}{c^4} v_x^2 v_z^2, \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Теперь учитывая выражение D_1, D_2 и D_3 (2.5.9) получаем, что $D_1 - D_2 + D_3 = \gamma^2$.

Таким образом, детерминант преобразования D от импульсов P_x, P_y, P_z к скоростям v_x, v_y, v_z определяется окончательно следующим выражением:

$$D = m^3 \gamma^3 = m^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.5.10)$$

Отметим, что найденный детерминант преобразования D от импульсов к скоростям сохраняет силу при произвольной функции распределения импульсов частиц релятивистского идеального газа. В частности и для квантовых релятивистских идеальных газов, частицы которых подчиняются, как известно статистикам Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна (смотрите, например [6, 7]).

Прежде чем переходить к определению функции распределения скоростей частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана, хотелось бы привести следующую преобразования элементарного объема от пространства импульсов к пространству скоростей (которая следует из (2.5.1):

$$dP_1 dP_2 dP_3 = D dv_1 dv_2 dv_3 \quad (2.5.11)$$

Отсюда в частности следует, что

$$P^3 dP = D v^3 dv \quad (2.5.12)$$

в справедливости которого легко убедиться, учитывая что

$$P = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{dP}{dv} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.5.13)$$

Теперь определим функцию распределения скорости частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана используя распределение Больцмана для импульсов частиц релятивистского идеального газа [7, 101, 116]:

$$f(\vec{p}) = f(P_1, P_2, P_3) = B \exp\left[-\frac{\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}{kT}\right]. \quad (2.5.14)$$

где $E_0 = mc^2$ — энергия покоя частиц газа, kT — тепловая энергия, B — постоянная, которая определяется как всегда условием нормировки функции распределения, будет найдена ниже.

Далее учитывая, что импульс релятивистской частицы \vec{p} связан с ее скоростью \vec{v} нелинейным образом, согласно выражению (2.5.3), а также

$$E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.5.15)$$

на основе формулы преобразования ΦP от импульсов к скоростям частиц (2.5.1) находим функцию распределения вектора скорости частиц релятивистского идеального газа

$$\varphi(v_x, v_y, v_z) = B \exp \left[-b \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad b = \frac{mc^2}{kT} \quad (2.5.16)$$

Следовательно, вероятность того что скорость лежит в интервале $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$ или что, то же самое – составляющие скорости в промежутке $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, и $(v_z, v_z + dv_z)$ определяется согласно (2.5.16) следующим образом

$$dW = \varphi(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z. \quad (2.5.17)$$

Наконец в заключении раздела находим функцию распределения модуля скоростей частиц на основе формулы преобразования функции распределения от $f(\vec{p})$ к $f(\vec{v})$ (2.5.1) и формулы (2.5.12), учитывая выражения (2.5.3) и (2.5.16)

$$\int f(\vec{p}) d\vec{p} = \int \varphi(\vec{v}) d\vec{v} = B \cdot 4\pi \int_0^\infty m^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \exp \left[-b \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] dv = \int_0^\infty F(v) dv. \quad (2.5.18)$$

Таким образом, функция распределения модулей скоростей частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла – Больцмана определяется следующим выражением [А6,А7]

$$F(v) = 4\pi m^3 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-b \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot B. \quad (2.5.19)$$

Далее вводя нормированную скорость частиц $u = \frac{v}{c}$ мы можем найти на основе (2.5.19) приведенную функцию распределения модулей нормированной скорости частиц $F(u)$

$$\int_0^\infty F(v) dv = B \cdot 4\pi (mc)^3 \int_0^\infty F(u) du. \quad (2.5.20)$$

Здесь

$$F(u) = u^2 (1-u^2)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-b(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (2.5.21)$$

Теперь найдем постоянную B используя условие нормировки функции распределения модулей скорости частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана $F(v)$

$$\int_0^{\infty} F(v) dv = B \cdot 4\pi (mc)^3 \int_0^1 F(u) du = 1. \quad (2.5.22)$$

Далее применяя ставшая для нас обычной подстановку $u = \text{th } x$ ($0 < x < \infty$) из предыдущего выражения получаем

$$B \cdot 4\pi (mc)^3 I = 1. \quad (2.5.23)$$

Входящий сюда интеграл имеет следующий вид

$$I = \int_0^{\infty} dx \text{sh}^2 x \text{ch} x \exp(-b \text{ch} x) = \int_0^1 F(u) du. \quad (2.5.24)$$

Последний интеграл согласно (2.4.11) выражается через модифицированную функции Бесселя второго порядка следующим образом

$$I = \frac{k_2(b)}{b}.$$

Следовательно, постоянная B согласно (2.5.23)-(2.5.24) определяется выражением [А6, А7]

$$B = \frac{1}{4\pi (mc)^3} \cdot \frac{b}{k_2(b)}.$$

Таким образом, приведенную функцию распределения модулей нормированных скоростей частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана можно записать в следующем компактном виде:

$$\Phi(u) = \frac{bF(u)}{k_2(b)} = \frac{b}{k_2(b)} u^2 (1-u^2)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-b(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (2.5.25)$$

Найденная нами функция распределения модулей скоростей частиц идеального газа может быть применена для вычисления сечения

столкновения частиц в релятивистском идеальном газе и сечения реакций ультрарелятивистских частиц в субатомной физике. Она может представлять интерес при исследованиях релятивистской ионизации атомов высокоэнергетическими частицами газа, а также в области релятивистской лазерной спектроскопии.

Теперь мы должны установить соответствия между найденной релятивистской функцией распределения $F(v)$ с распределением Максвелла для модулей скоростей частиц нерелятивистского идеального газа. Для этого учтем, что в нерелятивистском пределе – в котором и справедливо его распределение, энергия теплового движения kT намного меньше чем энергия покоя частиц т.е. параметр $b = \frac{mc^2}{kT} \gg 1$ и скорости частиц пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света т.е. $\frac{v}{c} \ll 1$. Далее используя асимптотику модифицированной функции Бесселя второго порядка $t_2(b)$ для этого случая [вторая формула в (2.4.22)] на основе выражения (2.5.19) получаем

$$F_M(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT} \right]. \quad (2.5.26)$$

Это и есть распределение Максвелла основа нерелятивистской кинетической теории и статистической физики. Вся развития и дальнейшие достижения в этих областях обязаны за это распределению $F_M(v)$ (2.5.26) его великому автору.

Найденная функция распределения модулей скоростей частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла – Больцмана (2.5.25) позволяет определить любую макроскопическую характеристику этого газа зависящие от скорости его частиц. В следующем разделе мы определим среднюю и среднюю квадрата скорости частиц такого газа. Но сейчас отметим, что нахождение детерминанта преобразование от

импульсов P_x, P_y и P_z к скоростям v_x, v_y и v_z имеет принципиальный характер по двум причинам:

1) Во первых, формулы релятивистского преобразования скоростей обычно записываются в декартовых координатах, v_x, v_y и v_z , которые могут быть записаны в других криволинейных координат обычным образом.

2) Специальная теория относительности не исключает возможность существования частиц с нулевой массой, скорость которых равна скорости света. Это с математической точки зрения соответствует случаю «вырождения» детерминанта преобразования D , поскольку при $m=0$ и $v=c$ он становится неопределённым (превращается в неопределённость типа ноль делённая на ноль).

Однако, как мы докажем в дальнейшем эту неопределённость детерминанта преобразования можно разрешить предельным переходом $m \rightarrow 0$ в окончательных формулах функции распределения скоростей частиц некантового релятивистского идеального газа. Этому вопросу посвящен следующий раздел этой главы.

Приведенное здесь доказательство вывода функции распределения скоростей частиц релятивистского идеального газа МБ является окончательным. Это следует из того, что релятивистская функция распределения Больцмана для импульсов является релятивистски инвариантным [100].

Действительно, учитывая, что четырехмерный импульс частиц газа равен

$$P^\mu = m \dot{x}^\mu = m \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

и четырехмерная скорость неподвижной системы координат равен ($V = 0$)

$$V^\mu = (c, 0)$$

получаем, что

$$P^\mu V_\mu = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{(mc^2)^2 + P^2 c^2}.$$

Так как скалярное произведение любых четырехмерных векторов является инвариантом, этим свойством обладает любое равновесное распределение [100].

Очевидно, полная вероятность

$$\int f(P_x, P_y, P_z) dP_x dP_y dP_z = 1,$$

не зависит от преобразования функции распределения, что и было использовано при нахождении релятивистской функции распределения скоростей $f(v_x, v_y, v_z)$ [смотрите выражения (2.5.1) и (2.5.18)].

2.6. Характерные скорости частиц релятивистского идеального газа (РИГ)

На основе найденной в предыдущем разделе функции распределения модулей скоростей частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла – Больцмана можно найти любую макроскопическую характеристику этого газа зависящих от скорости на основе формулы для вычисления средних

$$\langle G \rangle = \int_0^\infty G(v) F(v) dv. \quad (2.6.1)$$

Входящий в эту выражению величина $F(v)dv$, как известно, дает вероятность нахождения модуля скорости частицы dW в интервале скоростей $[v, v + dv]$

$$dW = F(v)dv. \quad (2.6.2)$$

Тогда используя явный вид релятивистского распределения скоростей $F(v)$ (2.5.19) и определения функции $\Phi(u)$ (2.5.25) получаем для нахождения выше указанной вероятности следующее выражение

$$dW = B \cdot 4\pi m^3 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{5}{2}} \exp\left[-b\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] dv = \Phi(u) du. \quad (2.6.3)$$

Здесь $\Phi(u)$ – приведенная функция распределения модулей нормированных скоростей частиц определенная согласно (2.5.25), формулой

$$\Phi(u) = \frac{b}{k_2(b)} F(u) = \frac{b}{k_2(b)} u^2 (1 - u^2)^{\frac{5}{2}} \exp\left[-b(1 - u^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (2.6.4)$$

Таким образом, эта функция является плотностью вероятности того, что частица имеет модуль нормированной скорости $u = \frac{v}{c}$ (напомним, что здесь v – модуль скорости частицы газа, c – скорость света).

Однако, согласно распределению Максвелла (2.5.26), которое получается из релятивистского распределения (2.5.19) в пределе $kT \ll mc^2$ и $v \ll c$, вероятность того, что модуль скорости частицы принадлежит в интервале скоростей $|v, v + dv|$, определяется выражением

$$dW = F_M(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot u^2 \exp(-u^2) du = \Phi_M(u) du. \quad (2.6.5)$$

Здесь u скорости частицы нормированная на наиболее вероятную скорость

$$v_{HM} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (\text{смотрите, например [68,101] т.е. } u = \frac{v}{v_{HM}}). \quad \text{Сравнивая}$$

релятивистскую плотность вероятности $\Phi(u)$ с максвелловской плотности вероятности $\Phi_M(u)$ мы приходим к выводу, что в отличие от последней первое распределения нельзя представить в единой универсальной форме для всех газов. Причиной этого отличия как видно из сравнения двух распределений является наличие в релятивистском распределении параметра b – равный отношению энергии покоя частиц газа к тепловой

энергии kT . В частности, как мы докажем ниже, именно это обстоятельство приводит к тому, что для релятивистского идеального газа закон равномерного распределения средней кинетической энергии по степеням свободы не имеет места. На это было обращено внимание, например, в цитированной выше книге Паули [116].

Необычность релятивистской плотности вероятности (или что, то же самое – релятивистского распределения) $\Phi(u)$ заставляет нас быть более внимательной к этой привлекательной особе (ясно, что такие встречаются крайне редко, если не сказать – совсем!). Конечно же, прежде всего нас интересуют, как и в случае Максвелловского распределения, характерные скорости релятивистского распределения, а именно: наименее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости частиц релятивистского идеального газа.

Наиболее вероятная скорость частиц соответствует максимуму релятивистской функции распределения скорости $F(v)$ или релятивистской плотности вероятности $\Phi(u)$. Она определяется условием экстремума $\frac{dF(v)}{dv} = 0$, которое согласно (2.6.2)–(2.6.3) эквивалентно условию $\frac{d\Phi(u)}{du} = 0$. Вычисляя эту производную и проведя ряд упрощений, получаем следующее уравнение

$$\left[2 + \frac{u^2}{1-u^2} \left(5 - \frac{b}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right] \Phi(u) = 0. \quad (2.6.6)$$

Далее учитывая, что при значениях параметра b отличных от нуля $\Phi(u) = 0$ при $u = 0$ и $u = 1$, приходим к выводу, что эти значения скоростей соответствуют нулям плотности вероятности релятивистского распределения $\Phi(u)$.

Кроме этих корней уравнение (2.6.6) имеет также промежуточное корни, как следует из него, определяемые решением следующего уравнения

$$bu^2 = (2 + 3u^2)\sqrt{1-u^2}. \quad (2.6.7)$$

Мы ограничимся анализом его решений только при очень больших и очень малых значениях параметра b .

Как следует из уравнения (2.6.7) при любых конечных значениях b его корни принадлежат промежутку нормированных скоростей $0 < u < 1$.

При $u \ll 1$, что соответствует нерелятивистским частицам из (2.6.7) получаем, что если $b \gg 1$ или $kT \ll mc^2$, оно имеет следующее приближенное решение

$$u_{\max} = \frac{v_{\max}}{c} = \sqrt{\frac{2}{b}} = \sqrt{\frac{2kT}{mc^2}}. \quad (2.6.8)$$

Следовательно, как и ожидалось, в этом нерелятивистском пределе мы получаем результат, вытекающий из максвелловского распределения $F_M(v)$ или $\Phi_M(u)$ — справедливое в этом случае.

Теперь находим решение уравнения (2.6.7) близкие к предельной т.е. $u = 1 - \epsilon$ ($0 < \epsilon \ll 1$). Тогда из указанного уравнения следует, что

$$u = 1 - \frac{b^2}{50}. \quad (2.6.9)$$

Это решение соответствует очень малым значениям параметра $b \ll 1$, что означает ультррелятивистский предел. Далее учитывая асимптотическое поведение модифицированной функции Бесселя второго порядка $\kappa_2(b) = \frac{2}{b^2}$, согласно (2.6.4) приходим к выводу, что максимум плотности вероятности описывается следующим выражением

$$\Phi_{\max} = \frac{2}{b^2}. \quad (2.6.10)$$

Следовательно, в отличие от распределения Максвелла $\Phi_M(u)$ (2.6.5), которое имеет максимум $u_{\max} = 1$ при любом значении b , релятивистское распределение $\Phi_{(M)}$ (2.6.4) имеет максимальное значение зависящее от параметра b . В частности, при $b \ll 1$ согласно (2.6.10) растет максимум

этого распределения, т.е. растет относительное число частиц имеющие скорости близкие к предельной $u = 1$. Однако, как известно (смотрите, например [68,101]), максимум максвелловского распределения (2.5.26) уменьшается при росте температуры, т.е. при очень больших температурах стремится к нулю. В этом и заключается главная разница между релятивистским распределением $\Phi(u)$ (2.6.4) и максвелловским распределением $\Phi_{\text{н}}(u)$ (2.6.5), а также между $F(v)$ (2.5.19) и $F_{\text{н}}(v)$ (2.5.26).

Теперь перейдем к определению средней скорости частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана. Согласно формуле вычисления средних (2.6.1) получаем, что

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = c \int_0^1 u \Phi(u) du = c \langle u \rangle. \quad (2.6.11)$$

Далее как и ранее используем подстановку $u = \text{th} x$ ($0 < x < \infty$) из последнего выражения имеем

$$u = \frac{b}{k_1(b)} \int_0^{\infty} \text{sh} x (ch^2 x - 1) e^{-bx} dx. \quad (2.6.12)$$

Вводя новую переменную, $t = ch x$ ($1 \leq t < \infty$) преобразуем последний интеграл к следующему виду

$$I = \int_1^{\infty} t^2 e^{-bt} dt - \int_1^{\infty} e^{-bt} dt. \quad (2.6.13)$$

Теперь учтем, что

$$\int_1^{\infty} e^{-bt} dt = \frac{1}{b} e^{-b}, \quad \int_1^{\infty} t^2 e^{-bt} dt = \frac{\partial^2}{\partial b^2} \int_1^{\infty} e^{-bt} dt. \quad (2.6.14)$$

Тогда с помощью выражений (2.6.12)-(2.6.14) получаем следующую формулу для средней скорости частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана (МБ)

$$\langle u \rangle = \frac{2e^{-b}}{k_1(b)} \left(\frac{1+b}{b^2} \right). \quad (2.6.15)$$

Аналогичным образом определим среднюю квадрата скорости опять используя формулу для вычисления средних (2.6.1), согласно которой

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = c^2 \int_0^{\infty} u^2 \Phi(u) du = c^2 \langle u^2 \rangle. \quad (2.6.16)$$

Для вычисления среднего квадрата нормированной скорости частиц $\langle u^2 \rangle$ используем подстановку $u = thx$ ($0 < x < \infty$) и получаем

$$\langle u^2 \rangle = \frac{b}{k_2(b)} \int_0^{\infty} \left(chx - \frac{1}{chx} \right) sh^2 x e^{-bx} dx. \quad (2.6.17)$$

Далее учитывая, что $sh^2 x = ch^2 x - 1$ выражению (2.6.17) приводим к следующему виду

$$\langle u^2 \rangle = \frac{b}{k_2(b)} \left[\int_0^{\infty} sh^2 x chx e^{-bx} dx - \int_0^{\infty} chx e^{-bx} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{-bx}}{chx} dx \right]. \quad (2.6.18)$$

И наконец воспользовавшись результатами (2.4.11), а также (2.2.4) получаем следующую формулу для среднего квадрата нормированной скорости частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана

$$\langle u^2 \rangle = 1 - \frac{k_1(b) - k_2(b)}{k_2(b)} b. \quad (2.6.19)$$

Найденные выражения среднего модуля и среднего квадрата модуля нормированной скорости частиц (2.6.15), (2.6.19) позволяют нам определить еще одну важнейшую характеристику релятивистского распределения (2.6.4) — среднеквадратичную флуктуацию скорости частиц газа:

$$Dv = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = c^2 [\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2] = c^2 Du, \quad (2.6.20)$$

которая описывает характерную разброс скоростей частиц релятивистского идеального газа.

Теперь анализируем поведения найденных характерных скоростей при очень большом значения параметра b , т.е. $b \gg 1$. В этом случае, как уже отмечалось, тепловая энергия kT намного меньше чем энергия покоя частиц mc^2 . Далее учитывая асимптотики $k_1(b)$ и $k_2(b)$:

$$k_1(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b} \left(1 + \frac{3}{8b} - \frac{15}{2} \frac{1}{(8b)^2} + \dots \right), \quad (2.6.21)$$

$$k_1(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b} \left(1 - \frac{5}{8b} + \frac{129}{128} \frac{1}{b^2} + \dots \right), \quad (2.6.22)$$

в рассматриваемом пределе получаем, что

$$[k_1(b) - k_1(b)]b = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b} \left(1 - \frac{9}{8b} \right). \quad (2.6.23)$$

Теперь вспоминая асимптотику модифицированной функции Бесселя второго порядка $k_2(b)$

$$k_2(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b} \left(1 + \frac{15}{8b} + \dots \right), \quad (2.6.24)$$

на основе выражений (2.6.16), (2.6.19) получаем следующую формулу для среднего квадрата скорости частиц идеального газа

$$\langle v^2 \rangle = c^2 \frac{3}{b} \left(1 - \frac{45}{(8b)^2} \right) = \frac{3\kappa T}{m}. \quad (2.6.25)$$

Это есть результат, вытекающий из максвелловского распределения (2.5.26) для среднего квадрата скорости частиц в нерелятивистском пределе.

В этом же пределе в соответствии с выражениями (2.6.11), (2.6.15) и (2.6.24) получаем

$$\langle v \rangle = c \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\kappa T}{m}. \quad (2.6.26)$$

Это есть формула для средней скорости максвелловского распределения (2.5.26). Таким образом, в рамках применимости максвелловского распределения среднеквадратичная флуктуация скоростей частиц идеального газа согласно (2.6.20), (2.6.25) и (2.6.26) определяется следующим выражением

$$Dv = c^2 Du = c^2 \left(3 - \frac{8}{\pi} \right) \frac{1}{b} = \left(3 - \frac{8}{\pi} \right) \frac{\kappa T}{m}. \quad (2.6.27)$$

И наконец, рассмотрим случай ультрарелятивистских (или безмассовых) частиц, который соответствует очень малым значениям

параметра b т.е. $b \ll 1$ (или $b \rightarrow 0$). Тогда учитывая асимптотики функций $k_1(b)$, $k_2(b)$ и $k_3(b)$ в этом пределе

$$k_1(b) = \frac{1}{b}, \quad k_2(b) = \frac{2}{b^2}, \quad k_3(b) = \frac{\pi}{2}, \quad (2.6.28)$$

получаем из (2.6.15) и (2.6.19) следующие результаты

$$\langle u \rangle = 1 - b^2, \quad \langle u^2 \rangle = 1 - \frac{1}{2}b^2. \quad (2.6.29)$$

Следовательно, в ультрарелятивистском пределе среднеквадратичная флуктуация скоростей частиц некантового идеального газа определяется следующей формулой

$$Dv = c^2 Du = c^2 \frac{3}{2} b^2 = \frac{3}{2} c^2 \left(\frac{mc^2}{\kappa T} \right)^2. \quad (2.6.30)$$

Таким образом, в этом разделе на основе релятивистского распределения скоростей (2.5.19) доказано, что характерные скорости частиц газа: наивероятнейшая, средняя и среднеквадратичная скорости не превышают скорость света. В частности, учитывая недостижимость абсолютного нуля температуры доказанный Нернстом, приходим к заключению, что только безмассовые частицы при любой температуре имеют скорости равная скорости света. Кроме того, можно показать ограниченность среднеквадратичной флуктуации скоростей частиц при любом значении параметра b (смотрите задачи к второй главе).

Заканчивая раздел замечаем, что эти качественные соображения при получении решения (2.6.7) легко можно получать, находя значения b , соответствующие наивероятнейшим скоростям $u_{\text{max}} = \frac{v_{\text{max}}}{c}$, которые определяются следующим образом:

$$b = \left(3 + \frac{2}{u^2} \right) \sqrt{1 - u^2}.$$

Отсюда при $u \ll 1$ и $u = 1 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) получаем приближенные решения (2.6.8) и (2.6.9) уравнения (2.6.7).

На основе выше приведенных анализов приходим к выводу, что в безмассовом пределе все характерные скорости частиц стремятся к скорости света. Иначе говоря, функция распределения модулей скоростей частиц ультррелятивистского идеального газа становится дельта-образной $F_v(\theta) = \delta(\theta - c)$, а их направления совершенно случайны и равновероятны, т.е. распределены изотропно.

Действительно, релятивистская функция распределения нормированной скорости $\Phi(u)$ при $b \ll 1$ приобретает следующий вид

$$\Phi(u) = \frac{b^3}{2} \cdot u^2 (1 - u^2)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-b(1 - u^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Далее полагая $u^2 = 1 - \varepsilon^2$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), получаем

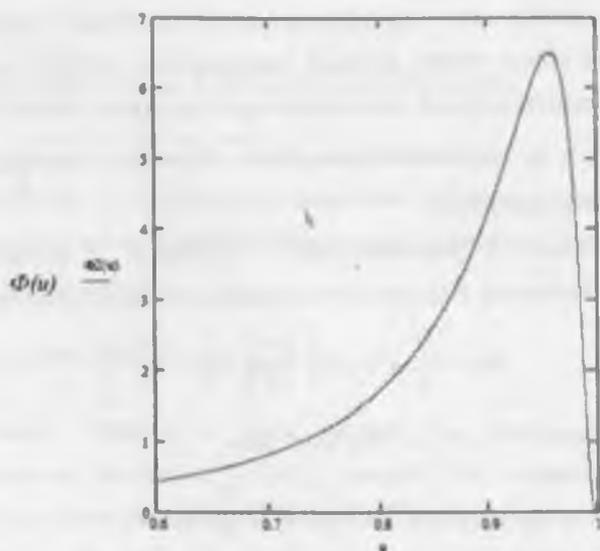
$$\Phi(u) = \frac{b^3}{2\varepsilon^2} \exp \left(-\frac{b}{\varepsilon} \right).$$

Отсюда видно, что если $b = \sqrt{\varepsilon}$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\Phi(u)$ экспоненциально стремится к нулю. Если же $b = \varepsilon^2$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\Phi(u)$ становится бесконечной. Следовательно, при $b \rightarrow 0$ приведенная функция распределения будет дельта-образной т.е.

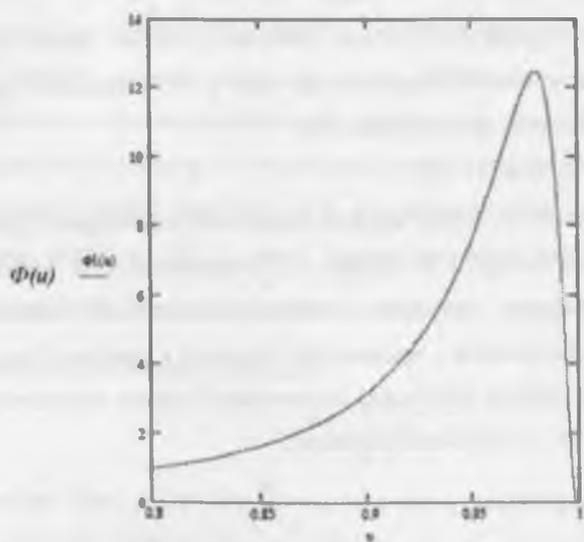
$$\Phi(u) = \delta(1 - u) \quad (\text{рис. 11-13}).$$

Таким образом, на основе анализа выражений характерных скоростей частиц некантового РИГ МБ приходим к фундаментальному заключению, что наименее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорость не превосходит скорость света - предельную скорость в природе. Тем самым доказана справедливость постулатов специальной теории относительности и в релятивистской статистической физике.

$b=1.5$



$b=1$



$$b=0.2$$

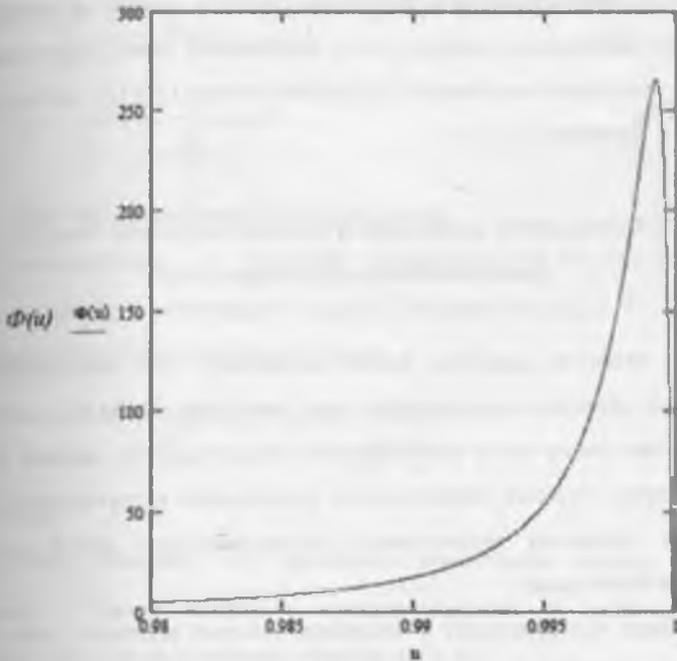


Рис. 11-13. Функция распределения модулей нормированных скоростей частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана ($b=1,5$ (11); 1 (12); 0,2 (13)).

В качестве примера находим среднеквадратичную скорость частиц релятивистского идеального газа при значении параметра, $b=3$, когда тепловая энергия KT равно одной трети энергии покоя частицы газа.

Используя формулу (2.6.19) и учитывая значения специальных функций фигурирующих в ней, получаем

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 0.515 c.$$

Однако согласно формуле Максвелла для средне - квадратичной скорости (2.6.25) $v_{\text{ср}} = c$. Этот результат не имеет физического смысла, так

как, согласно специальной теории относительности ни одна частица с отличной от нуля массой не может иметь скорость равную скорости света. Последнее заключение следует и из найденного нами релятивистской функции распределения модулей скоростей частиц (2.5.19): если $m \neq 0$, то при $v \rightarrow c$ функция $F(v) \rightarrow 0$.

2.7. Связь между давлением и плотностью средней энергии релятивистского идеального газа

Как известно, свойства любого идеального газа определяется его уравнением состояния связывающее три термодинамические величины: давление, плотность чисел частиц (полное число частиц в единице объема) и температуру. Поэтому нашей целью в этом разделе является определение уравнения состояния некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана.

Прежде чем приступит к непосредственному решению этой задачи, для удобства читателей, приводим краткое доказательство выражений для плотности средней энергии (2.A) и давления (2.B) релятивистского идеального газа. Для этого воспользуемся следующим известным выражением тензора энергии-импульса системы невзаимодействующих частиц [100]:

$$T^{\alpha\beta} = nmc^2 \left\langle \frac{dx^\alpha}{dt} \cdot \frac{dx^\beta}{dS} \right\rangle, \quad dS = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (2.7.1)$$

где n — число частиц в единице объема, а угловые скобки означают усреднения по функции распределения скоростей частиц газа.

Далее учитывая определения четырехмерного радиуса-вектора частицы x^α [100]

$$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}^T), \quad (2.7.2)$$

находим следующие выражения необходимые для нахождения T^{α} :

$$\frac{dx^i}{dt} = (c, v^i) = (c, v_x, v_y, v_z), \quad (2.7.3)$$

$$\frac{dx^i}{dS} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^i}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (2.7.4)$$

где v^i — обычная трехмерная скорость частицы.

Следовательно, с помощью выражений (2.7.1)–(2.7.4) можно определить любую компоненту тензора энергии-импульса T^{α} системы взаимодействующих частиц, например,

$$T^{\alpha} = nmc^2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\rangle, \quad T^{\alpha} = nm \left\langle \frac{v^{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\rangle, \quad (2.7.5)$$

где $\alpha = x, y, z$.

Отсюда следует, что временная компонента тензора энергии-импульса T^{α} равна плотности средней энергии ρ релятивистского идеального газа, определяемая выражением (2.А)

$$\rho = nmc^2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\rangle. \quad (2.7.6)$$

Теперь с помощью пространственных компонент тензора энергии-импульса T^{α} получаем, что

$$T^x + T^y + T^z = nmc^2 \left\langle \frac{v^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\rangle. \quad (2.7.5)$$

Однако, при любом изотропном распределении скоростей частиц (а иначе и не может быть из-за равноправия всех направлений в пространстве)

$$T^x = T^y = T^z = P, \quad (2.7.7)$$

убедиться в котором предоставляем читателям самостоятельно.

Таким образом, из (2.7.6)-(2.7.7) получаем следующее выражение для давления релятивистского идеального газа (2.В):

$$P = \frac{nm c^2}{3} \left\langle \frac{v^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\rangle. \quad (2.7.8)$$

Подчеркиваем, что мы не стали приводить здесь выражения для смешанных компонент тензора энергии-импульса T^a при не равных i и k просто потому, что все они равна нулю.

Теперь воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{1-u^2} + \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}, \quad u = \frac{v}{c}, \quad (2.7.9)$$

и учитывая выражения (2.7.6) и (2.7.8) получаем следующее важное равенство, устанавливающее связь между давлением P и плотности средней энергии ρ релятивистского идеального газа

$$\rho - 3P = nm c^2 \left\langle \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\rangle. \quad (2.7.10)$$

Таким образом, как следует из выражений плотности средней энергии ρ (2.7.6) и давления P (2.7.8), а также связывающее их уравнение состояния (2.7.10) – все они определяются статистическим усреднением на основе релятивистского распределения скоростей их частиц $F(v)$ (2.5.19). В этом заключается оригинальность впервые применяемого нами метода нахождения указанных макроскопических величин релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана.

Начнем решения этой задачи с определения плотности средней энергии релятивистского идеального газа основываясь на выражения (2.7.6) и (2.5.19):

$$\rho = nm c^2 \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} F(v) dv = nm c^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \Phi(u) du, \quad (2.7.11)$$

Теперь применяя ставшей нам любимой подстановку $u = mx$ ($0 < x < \infty$) и учитывая выражение $\Phi(u)$ (2.6.4) получаем

$$\rho = nmc^2 \frac{b}{k_2(b)} \left(\int_0^{\infty} sh^2 xe^{-bx} dx + \int_0^{\infty} sh^4 xe^{-bx} dx \right) \quad (2.7.12)$$

Но согласно (2.4.11) интегралы входящие в (2.7.12) соответственно равны

$$I_1 = \frac{k_1(b)}{b}, \quad I_2 = 3 \frac{k_2(b)}{b^2}, \quad (2.7.13)$$

где $k_1(b)$ и $k_2(b)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго порядка.

Таким образом, для плотности средней энергии ρ некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана получаем следующее красивое выражение

$$\rho = nmc^2 \left[\frac{k_1(b)}{k_2(b)} + \frac{3}{b} \right], \quad b = \frac{mc^2}{kT}. \quad (2.7.14)$$

Далее вычислим правую часть равенства (2.7.10)

$$nmc^3 < \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} > = nmc^3 \frac{b}{k_1(b)} \int_0^{\infty} sh^2 xe^{-bx} dx. \quad (2.7.15)$$

Теперь учитывая первый интеграл в выражении (2.7.13) отсюда получаем

$$nmc^3 < \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} > = nmc^3 \frac{k_1(b)}{k_2(b)}. \quad (2.7.16)$$

Подставляя найденную среднюю в правой части равенства (2.7.10) находим следующее выражение для давления некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана

$$P = nkT. \quad (2.7.17)$$

Разумеется, этот результат можно получить и непосредственным усреднением выражения для давления (2.7.8). В этом вы можете убедиться сами, воспользовавшись рекуррентной формулой (2.4.11) для модифицированных функций Бесселя n -го порядка $k_n(z)$. Однако теперь в

отличии от нерелятивистской теории идеального газа давление РИГ (2.7.17) не будет пропорциональной средней кинетической энергии частиц газа, так как, согласно (2.7.14)

$$\langle E_i \rangle = mc^2 \left[\frac{k_1(b)}{k_2(b)} + \frac{3}{b} - 1 \right],$$

является нелинейной функцией тепловой энергии kT . В частности

$$\frac{\langle E_i \rangle}{kT} = b \cdot \left[\frac{k_1(b)}{k_2(b)} + \frac{3}{b} - 1 \right].$$

Используя эту формулу измеряя $\langle E_i \rangle$ и T можно определить энергию покоя частиц газа mc^2 .

Таким образом, уравнение состояния некантового релятивистского идеального газа Максвелла – Больцмана связывающее его давление, плотность средней энергии и температуру определяется следующим выражением

$$\rho - 3P = nmc^2 \frac{k_1(b)}{k_2(b)}, \quad b = \frac{mc^2}{kT}. \quad (2.7.18)$$

Для исключения возможных недоразумений подчеркиваем, что приведенные выше результаты могут быть получены и другими статистическими методами, в частности, на основе выражения свободной энергии релятивистского идеального газа, как было показано в отмеченной выше книге В. Паули [116]. Отметим также, что анализ выражений давления и плотности средней энергии для случаев нерелятивистского идеального газа и безмассового фотонного газа содержится во многих работах, например, в [104, 143].

Теперь исследуем асимптотические поведения давления и плотности средней энергии некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана при предельных значениях параметра b .

Если тепловая энергия kT пренебрежимо мало по сравнению с энергией покоя частиц газа mc^2 , то параметр $b \gg 1$. Далее учитывая асимптотики функций $k_1(b)$ и $k_2(b)$ (2.4.22) имеем

$$\frac{k_1(b)}{k_2(b)} = 1 - \frac{3}{2b} - \frac{45}{64b^2}. \quad (2.7.19)$$

Тогда из (2.7.14) следует, что в этом пределе плотность средней энергии определяется следующей формулой

$$\rho = nmc^2 + \frac{3}{2}nkT. \quad (2.7.20)$$

Однако $\rho - nmc^2 = n < E - E_0 > = n < E_t >$. Следовательно, только для нерелятивистского идеального газа справедливо закон о равномерном распределении средней кинетической энергии $< E_t >$ по степеням свободы, т.е.

$$< E_t > = \frac{3}{2}kT. \quad (2.7.21)$$

В обратном пределе $b \ll 1$ (что означает не только $T \rightarrow \infty$, но и $m \rightarrow 0!$) модифицированные функции Бесселя первого и второго порядка имеют асимптотики указанные в выражении (2.6.28). Тогда из (2.7.14) получаем следующую формулу для плотности средней энергии ультрарелятивистского идеального газа (или релятивистского газа безмассовых частиц)

$$\rho = 3nkT \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{mc^2}{kT} \right)^2 \right]. \quad (2.7.22)$$

В этом пределе из (2.7.18) следует следующее, так называемое, предельное уравнение состояния

$$p = \frac{\rho}{3}, \quad (2.7.23)$$

которое соответствует наибольшему возможному давлению при данной плотности средней энергии ρ .

Исходя из выше приведенных анализов уравнения состояния (2.7.18) связывающее давление, плотность средней энергии и температуру релятивистского идеального газа мы можем записать следующие приближенные уравнения состояния:

$$P = 0, \quad P = \frac{\rho}{3}, \quad (2.7.24)$$

обычно используемые в уравнениях движения материи (вещества и излучения) в космологических теориях [100]. Здесь первое уравнение состояния соответствует нерелятивистскому газу со сверхнизкой температурой ($T \rightarrow 0$), второе же – ультрарелятивистскому газу с очень высокой температурой ($T \rightarrow \infty$) или равновесному излучению. Следовательно, используемые эти приближенные уравнения состояния фактически не зависят от температуры [100]. Поэтому на основе анализа уравнения движения материи, где используются уравнения состояния, не учитывающая зависимость давления и плотности средней энергии от температуры, нельзя в принципе определить изменение температуры Вселенной при ее эволюции. Дополнительным аргументом в пользу этого заключения служит и то обстоятельство, что само установление равновесного распределения Больцмана и вытекающее из него релятивистское распределение скоростей частиц газа возможно только при статистическом равновесии, с неизменной во времени температурой.

Для иллюстрации полученных результатов вычислим среднюю кинетическую энергию, приходящую на одну частицу газа при значении параметра b равное трем. Тогда согласно нерелятивистской теории Максвелла получаем, что $\langle E_i \rangle = \frac{mc^2}{2}$. В то же время согласно теории некантового релятивистского идеального газа (2.7.14)

$$\langle E_i \rangle = \langle E \rangle - mc^2 = mc^2 \cdot \frac{k_1(3)}{k_2(3)} = 1,084 mc^2.$$

Следовательно, уже при значениях тепловой энергии kT порядка одной трети энергии покоя частиц газа m_0c^2 , нерелятивистская теория идеального газа теряет свою применимость.

Заключая раздел особо подчеркиваем, что давление и плотность средней энергии некантового РИГ МБ принимают только неотрицательные значения согласно их физическому смыслу. Далее в третьей главе мы докажем, что это заключение остается верным и для квантовых релятивистских идеальных газов.

Таким образом, ни одно вещество не может иметь отрицательную давление и отрицательную плотность средней энергии. Тем самым исключается возможность существования предполагаемой «темной» материи с такими гипотетическими свойствами.

Комментарии и литературные указания

К разделу 2.1

Уравнение для функции распределения скорости частицы совершающее одномерное релятивистское броуновское движение получено на основе релятивистской связи между импульсом и скоростью.

К разделу 2.2

Получено флуктационно - диссипативное соотношение для одномерного релятивистского броуновского движения путём нахождения среднего квадрата скорости. Показано, что в нерелятивистском приближении оно переходит в знаменитое соотношение Эйнштейна.

К разделу 2.3

На основе одномерного релятивистского функции распределения Больцмана для импульсов частиц идеального газа путём предельного перехода показано, что возможные значения импульсов безмассовых частиц определяется только температурой газа. Иначе говоря для

существования безмассовых термализационных частиц необходимо наличия тепловой энергии.

К разделу 2.4

Найдены средняя и средняя квадрата наблюдаемых частот излучения частиц одномерного релятивистского идеального газа, которые представляют интерес в релятивистской высоко - частотной квантовой электронике и в лазерной спектроскопии межкосмического газа.

В разделах 2.5 - 2.7 представлена теория некантового релятивистского идеального газа Максвелла - Больцмана.

К разделу 2.5

Найдена функция распределения скорости частиц релятивистского идеального газа методом преобразования многомерной функции распределения, на основе трёхмерного релятивистского распределения Больцмана для импульсов. Здесь использована релятивистская инвариантность равновесных функций распределений. Следовательно, приведённый здесь доказательство является окончательным и однозначным.

К разделу 2.6

Найдены характерные скорости частиц релятивистского идеального газа: наименее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости. На основе анализа выражений для этих скоростей получено фундаментальное заключение, что ни одна характерная скорость частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана не превосходит скорость света. Тем самым доказана справедливость постулата специальной теории относительности и в релятивистской статистической физике.

Показано, что найденная функция распределения скорости частиц релятивистского идеального газа и вычисленные на её основе характерные скорости в нерелятивистском пределе переходят в известные результаты

Максвелла, сыгравшее ключевую роль в создании современной статистической физики.

Путём предельного перехода к безмассовым частицам сделано заключение о том, что такие частицы при любой отличной от нуля абсолютной температуре (невозможность которого доказал Нерист) имеют единственную скорость – равную скорости света.

К разделу 2.7

Установлена связь между давлением и плотности средней энергии некантового релятивистского идеального газа. Она получена оригинальным путём усреднения выражения этих величин для системы релятивистских не взаимодействующих частиц по релятивистской функции распределения их скоростей. Ранее в релятивистской статистической физике такой метод получения уравнения состояния некантового релятивистского идеального газа, насколько нам известно, ни кем не применялся.

Показано важность учёта релятивизма частиц идеального газа даже при малых, но конечных значениях отношении энергии покоя частиц к тепловой энергии. Установлено физическая несостоятельность уравнения состояния с отрицательным (обычно предлагаемая для «тёмной» материи) давлением. Доказано, что давление некантового релятивистского идеального газа не может превышать одну треть его плотности средней энергии.

Последняя глава монографии будет посвящена исследованию свойства космического микроволнового излучения на основе обобщения выше полученных результатов для квантовых релятивистских идеальных газов.

Задачи к главе 2

1. На основе распределения (2.1.14) найдите среднюю модуль нормированной скорости релятивистской броуновской частицы и используя выражения (2.2.3) для среднего квадрата модуль нормированной скорости определите средне – квадратичную флуктуацию нормированной скорости

$$Dv = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2.$$

Исследуйте ее зависимость от параметра b .

2. Исследуя экстремум функции распределения скорости для одномерного релятивистского броуновского частицы (2.1.14) определите условия появления ненулевой наиболее вероятной x - составляющей скорости v_x , которая по выражению Климонтовича описывает своеобразный «фазовый переход» в броуновском движении.

3. Определите среднюю, среднего квадрата и определяемая ими дисперсию частоты рассеянного света частицами релятивистского идеального газа, используя формулу

$$v' = v \cdot \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta'}.$$

Здесь v - скорость частицы, θ и θ' - углы, составляемые падающим и рассеянным светом с направлением скорости частицы.

4. Решая уравнение (2.6.7) найдите наиболее вероятную модуль скорости частиц некантового РИГ МБ при произвольных значениях отношения энергии покоя частицы газа mc^2 к тепловой энергии kT .

5. Используя выражения для среднего и среднего квадрата скорости частиц релятивистского идеального газа (2.6.15) и (2.6.19) определите дисперсию скорости частиц

$$Dv = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2.$$

Исследуйте ее зависимость от параметра b .

6. Получите выражения давления некантового РИГ МБ (2.В) полагая, что столкновения их частиц с воображаемой стенкой являются упругими.

Убедитесь в том, что выражение для давления квантовых релятивистских идеальных газов (3.6.48) получается его обобщением на случай квантовой статистики.

7. Определите теплоемкость некантового РИГ МБ при постоянном объеме

$$c_v = \frac{du}{dT}, \quad u = \rho U$$

где u — внутренняя энергия релятивистского идеального газа, ρ — плотность средней энергии газа (2.7.14).

Исследуйте ее зависимость от параметра b .

ГЛАВА 3. РЕЛЯТИВИСТСКИ – ИНВАРИАНТНАЯ
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРВИЧНОГО КОСМИЧЕСКОГО
ИЗЛУЧЕНИЯ

Есть иной, нам неизвестный путь.

Омар Хайям

Боқий дунё учун шартдур – ибодат

Олимлар майдонда бел олимса гар,
Кураш¹ кўрсатарди кимда не хунар.
Оламда ягона шоҳ Парвардигор,
Белгилаб боради тақдир рузгор.

Хайемга тенг бўлмас ҳар бир шеърнавис,
Эйнштейн бўлмас ҳар мутахассис.
Пеле була олмас ҳар бир бозингар,
Кони дур бўлмаса, тош бўлмас гавҳар!

Бор олам ганжими саралар Заргар,
Кимга тош улашар, кимга имжу зар.
Ҳеч ким рад этолмас буюк ҳақиқат:
Боқий дунё учун шартдур – ибодат!

For a perpetual world we should remember It,

*If the scientist struggled on a carpet,
Kurash would reveal what they are able.
The owner of the miracle, the lord of the universe,
The one who define our destiny!*

¹ Узбекский вид борьбы.

*Not every poet can be Khayyam,
Not every scientist can be Einstein.
Not every player can be Pele,
If the mine of a stone is not pure, it is not an emerald!*

*All the values of the world are estimated by the Jeweler,
To whom gives a stone, sapphire to another.
Nobody can denied this great true:
For a perpetual world we should remember It!*

Первичное космическое излучение является, пожалуй, одним из загадочных процессов существующих не только во Вселенной, но также и во всей природе. История открытия и исследования этого действительно таинственного излучения отражена во многочисленной, можно сказать, огромной и продолжающих расти до сих пор литературе [146-170] (смотрите также цитированные в них работы по специальным вопросам космологии). Нашей скромной целью здесь является обращение внимания на некоторых свойствах этого излучения и их новое объяснения на независимой альтернативной основе. Мы вообще не затрагиваем философские аспекты этой проблемы, где, по меткому выражению Фейнмана «каждый имеет право на свое особое мнение».

Интерес к несомненно фундаментальным проблемам рождения и эволюции Вселенной особенно возрос за последнее время. Это связано, естественно, с полученными новыми наблюдательными данными по реликтовому излучению и развитием новых теоретических концепций в этом направлении [172-192].

Начальные два раздела этой главы носят вводный характер. В разделе 3.1 на основе эйнштейновского вывода формулы Планка [2,101,116] показано связь между равновесным излучением и тепловым движением

излучающих частиц. В разделе 3.2 приведено паулиевское доказательство релятивистской инвариантности распределения Планка [116], из которого вытекает важное соотношение, связывающее наблюдаемую и излучаемую частоту равновесного теплового излучения через скорость излучающих частиц.

Основную часть главы составляют разделы 3.3-3.6, где представлена новая релятивистки – инвариантная статистическая теория первичного космического излучения. В разделе 3.7 обращено внимание на другую, независимую, конформно – инвариантную термализационную теорию реликтового излучения [184-189], так названная нами по аналогии с предыдущей теорией.

3.1. Статистическое равновесие теплового излучения с идеальным газом

Первичное космическое излучение (или реликтовое излучение) по своей физической природе является равновесным тепловым излучением. Это положение является основополагающим для всех известных космологических теорий, которое установлено на основе наблюдений спектральной плотности реликтового или микрокосмического фонового излучения. Как показывают последние наблюдательные данные [172-183], в областях частот излучения доступных измерению, спектральная плотность первичного космического излучения с высокой точностью соответствует спектральной плотности равновесного теплового излучения. Последняя была определена Планком, как известно, квантовым обобщением универсальной функции Кирхгофа для спектральной плотности равновесного излучения. Однако в выводе Планка, как было указано его современниками, не учитывалось тепловое движение частиц и, следовательно, это было не вполне правильным со статистической точки

зрения. Впоследствии это обстоятельство было учтено Эйнштейном, который раскрыл статистическую связь между частотным распределением энергии излучения теплового возбуждения и распределением скоростей излучающих его частиц газа.

Начнем свое изложение, рассматривая частицы идеального газа как систему атомов находящихся в поле их собственного излучения, частотное распределение плотности энергии излучения теплового возбуждения которого определяется функцией $\nu(\nu, T)$, которую нам необходимо найти. Напомним, что по определению, $\nu(\nu, T) d\nu d\Omega$ выражает энергию излучения отнесенная единице объема с частотами из промежутка от ν до $\nu + d\nu$ испускаемая в пределах бесконечно малого телесного угла $d\Omega$, с осью с единичным вектором в направлении распространения излучения. С другой стороны эта же энергия равна $h\nu dN(\nu)$, где $dN(\nu)$ — число фотонов распространяющихся в направлении единичного вектора из того же промежутка частот.

Для нахождения спектральной плотности теплового излучения будем использовать следующее заключение сделанное Эйнштейном в его работе [190,2]: для установления статистического равновесия между тепловым излучением и идеальным газом необходимо существования динамического равновесия между частицами идеального газа и квантами теплового излучения. Приводимые нами ниже результаты по существу являются кратким конспективным изложением содержания работы [190], в которой читатель может найти обстоятельный вывод используемых нами далее необходимых соотношений.

Для определения условия динамического равновесия между частицами идеального газа и квантами теплового излучения Эйнштейн учел как их поступательное тепловое движение, так и действие случайных толчков испытываемые ими со стороны квантов теплового излучения. Он на основе этих рассуждений, ограничиваясь, случаем нерелятивистского

идеального газа Максвелла-Больцмана, показал, что результирующее изменение импульса каждого отдельно взятого атома газа можно представить в следующем виде:

$$\vec{P} - \vec{P}_0 = \frac{h\nu}{c} \vec{n} - \alpha \vec{v} t. \quad (3.1.1)$$

Здесь $\frac{h\nu}{c}$ - импульс кванта теплового излучения, а \vec{n} означает следующую сумму направления единичных векторов этих квантов

$$\vec{n} = \sum_{\alpha=1}^z \vec{n}_\alpha, \quad (3.1.2)$$

где $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_z$ - обозначают направления взаимодействующих с атомом квантов излучения, которые благодаря тепловой природе излучения носят совершенно случайный, статистически независимый характер, а z - число толчков (или соударений) испытываемый каждым атомом за время t . Следовательно, первое слагаемое $\frac{h\nu}{c} \vec{n}$ описывает случайное изменение импульса отдельного атома газа вследствие взаимодействия со стороны квантов излучения, а второе слагаемое выражает эффективную силу сопротивления - $\alpha \vec{v}$, обусловленная движением атомов в поле теплового излучения. Таким образом, согласно (3.1.1) движение каждого атома можно рассматривать как движение броуновской частицы под действием этих двух сил.

А чтобы количественно характеризовать такое своеобразное движение мы должны знать число соударений z испытываемый каждым атомом и эффективный коэффициент диссипации (или сопротивления) α теплового излучения движущимся атомам. Эти необходимые для нас величины были найдены Эйнштейном [2,190], которые определяются следующими выражениями

$$z = \frac{N_1 B_{12} + N_2 B_{21}}{N_1 + N_2} \tau, \quad (3.1.3)$$

$$\alpha = \frac{N_1 B_{12}}{N_1 + N_2} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \left[B(\nu) - \frac{\nu}{3} \frac{dB}{d\nu} \right] \frac{h\nu}{c^2}. \quad (3.1.4)$$

При получении этих результатов излучающие частицы идеального газа следует рассматривать как атомы с двумя энергетическими состояниями с энергиями E_1 и $E_2 > E_1$, причем $E_2 - E_1 = E = h\nu$. Кроме того считалось, что переходы между этими состояниями пропорциональны спектральной плотности энергии теплового излучения $B(\nu)$, а также коэффициентам поглощения B_{12} и излучения B_{21} , которые связаны соотношением $N_1 B_{12} = N_2 B_{21}$, поскольку при равновесии происхождение этих процессов равновероятны. Забегая вперед, скажем, что эти коэффициенты нам не понадобятся в дальнейшем, поскольку они выпадают из конечных результатов. Ясно, что $N_1 + N_2$ — общее число атомов находящихся соответственно в первом и втором энергетическом состоянии.

Теперь вернемся к анализу изменения импульса каждого отдельно взятого атома описываемое выражением (3.1.1). С физической точки зрения ясно, чтобы не нарушалось статистическое равновесие в рассматриваемой системе идеального газа и теплового излучения средние значения изменения искомых величин не должны зависеть от времени. В противном случае, как это уже подчеркивалось в первой и второй главах монографии, никакого стационарного распределения не существует.

Следовательно, применяя последнее требование к среднеквадратичным флуктуациям изменения импульса каждого атома получаем следующее условие

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle - \langle \vec{p}_0^2 \rangle}{\tau} = 0, \quad (3.1.5)$$

Далее с помощью выражения (3.1.1) находим среднюю $\langle \vec{p}^2 \rangle$, учитывая при этом статистическую независимость направления скоростей атомов и направления излучаемых квантов, определяемые вектором \vec{n} и совершая предел согласно (3.1.5) получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\langle \bar{\Delta}^2 \rangle}{\tau} = 2m\alpha \langle v^2 \rangle. \quad (3.1.6)$$

В этом выражении через $\bar{\Delta}$ обозначено изменение импульса атома, обусловленное их столкновениями с квантами теплового излучения, которое соответствует первому слагаемому (3.1.1) справа от знака равенства. Тогда средняя квадрата этой части изменения импульсов атомов будет равно

$$\langle \bar{\Delta}^2 \rangle = \left(\frac{\hbar v}{c} \right)^2 \sum_{j=1}^z \sum_{i=1}^z \langle \bar{n}_i \bar{n}_j \rangle = \left(\frac{\hbar v}{c} \right)^2 z, \quad (3.1.7)$$

где z число столкновений испытываемый каждым атомом за время τ , которое определяется выражением (3.1.3). В правой части равенства (3.1.6) присутствует средняя квадрата скорости атомов идеального газа $\langle v^2 \rangle$. Следовательно, только при выполнении условия динамического равновесия (3.1.6) между частицами (атомами) идеального газа и квантами теплового излучения не будет нарушаться их равновесное стационарное распределения по скоростям. Поскольку мы рассматриваем случай идеального газа нерелятивистских частиц, их скорости подчиняются, как это было показано во второй главе монографии, распределению Максвелла (2.5.26), согласно которому

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}. \quad (3.1.8)$$

Таким образом, учитывая выражения (3.1.3), (3.1.4) и (3.1.8) из условия динамического равновесия (3.1.6) получим, что для существования статистического равновесия теплового излучения с идеальным газом его спектральная плотность должно удовлетворят следующее уравнение [2]:

$$\frac{\hbar v}{3kT} B(v) = \left(1 - e^{-\frac{\hbar v}{kT}} \right) \left(B(v) - \frac{v}{3} \frac{dB}{dv} \right). \quad (3.1.9)$$

Теперь решая это уравнение находим искомую нами спектральную плотность теплового излучения B , которая, как следует из (3.1.9)

определяется отношением энергии излучаемых квантов и тепловой энергии κT . Вводя переменную

$$x = \frac{h\nu}{\kappa T}, \quad (3.1.10)$$

перепишем уравнение (3.1.8) в следующем виде

$$\frac{dB}{B} = 3 \frac{dx}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} dx, \quad (3.1.11)$$

которое удобно для интегрирования. Отсюда после выполнения необходимых интегрирований получаем следующее выражение для спектральной плотности излучения

$$B(\nu) = A \frac{\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right)^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1}. \quad (3.1.12)$$

Постоянная A фигурирующая в этой формуле определяется, как известно, тем условием, что при $h\nu \ll \kappa T$ (или при $h \rightarrow 0$) она должна переходить в следующее некантовое выражение спектральной плотности теплового излучения (смотрите, например, [2,101])

$$B(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \kappa T. \quad (3.1.13)$$

Далее совершая предельный переход $h \rightarrow 0$ в (3.1.12) и приравнявая получающиеся при этом результаты с (3.1.13) находим, что

$$A = \frac{8\pi}{h^3} \left(\frac{\kappa T}{c}\right)^3. \quad (3.1.14)$$

Следовательно, согласно (3.1.12) и (3.1.14) спектральная плотность равновесного теплового излучения определяется следующим выражением

$$B(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{\kappa T}\right) - 1}. \quad (3.1.15)$$

Это и есть знаменитая формула Планка, полученное в отличии от него, с учетом теплового движения излучающих атомов газа, великим Эйнштейном.

Заклячая раздел, отметим, что релятивистское обобщение изложенной выше теории Эйнштейна было сделано в работе [101]. Не останавливаясь на ее подробное изложение, ограничимся приведением следующих полученных в ней результатов: 1) условие динамического равновесия имеет место не в среднем, как это было показано выше, а в каждом элементарном акте взаимодействия между атомам и газа и квантами теплового излучения; 2) спектральная плотность теплового излучения находящегося в равновесии с излучающим его газом описывается формулой Планка; 3) импульсы атомов идеального газа подчиняются следующему релятивистскому распределению Больцмана:

$$f(\vec{p}) = f(p_x, p_y, p_z) = N \exp \left[-b \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{(mc)^2}} \right], \quad (3.1.16)$$

где $b = \frac{mc^2}{kT}$, mc^2 - энергия покоя отдельной частицы газа, kT - тепловая энергия, а p_x, p_y , и p_z - составляющие импульсов атомов по соответствующим осям.

Распределение (3.1.16) уже было использовано нами во второй главе монографии для построения теории некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана, без связи с тепловым излучением, на основе распределения (3.1.16), известное из статистической физики [7, 104, 105].

Таким образом, при статистическом равновесии идеального газа и теплового излучения спектральная плотность энергии фотонов излучаемые атомами газа подчиняются формуле Планка (3.1.15), скорости же излучающих их атомов подчиняются полученное нами на основе (3.1.16)

следующему релятивистскому распределению [смотрите выражение (2.5.19) и ход рассуждений при его выводе]:

$$F(v) = \frac{v^2}{c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-h\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \frac{b}{k_2(b)}. \quad (3.1.17)$$

Как видно из последнего выражения модули скоростей излучающих атомов лежащих в промежутке от v до $v+dv$ встречаются с вероятностью $dW = F(v)dv$, имея при этом совершенно случайное произвольное равновероятное направление, поскольку их функция распределения скоростей $F(\vec{v})$ (2.5.1) является изотропным. Следовательно, нашей следующей задачей является исследования свойства равновесного теплового излучения атомов идеального газа совершающих поступательное тепловое движение. Решению этого вопроса и посвящен предстоящие разделы этой главы.

3.2. Релятивистская инвариантность распределения Планка

Как уже подчеркивалось в предыдущем разделе важнейшей характеристикой равновесного теплового излучения является его спектральная плотность, которая описывает частотное распределение энергии фотонов излучаемые атомами идеального газа вследствие их теплового возбуждения. Однако, и в то же время, они совершают хаотическое тепловое движение. Таким образом, для анализа свойств равновесного теплового излучения движущихся атомов мы должны учесть результаты специальной теории относительности, согласно которым происходят изменения излучаемых частот, направления их распространения, а также спектральная плотность этого излучения [116,193-200].

Для нахождения законов преобразования выше отмеченных величин как обычно введем неподвижную (связанная с наблюдателем, который покоится) и движущейся (связанная с излучающим атомом) инерциальные системы отсчета. Для определенности направим оси x и x_0 по направлению скорости излучающей частицы \vec{v} . Если излучающий атом в собственной системе испускает квант излучения с частотой ν_0 в направлении единичного волнового вектора \vec{S}_0 , который составляет угол θ_0 с осью x_0 (или с направлением скорости \vec{v}), то для неподвижного наблюдателя частота излучения и косинус угла их направления распространения определяются следующими выражениями (смотрите, любой стандартный университетский курс по электродинамике или специальной теории относительности):

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + u \cos \theta_0}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad \cos \theta = \frac{u + \cos \theta_0}{1 + u \cos \theta_0}, \quad u = \frac{v}{c}. \quad (3.2.1)$$

Соответственно этому, энергия излучения с единицы объема из промежутка частот ν_0 от $\nu_0 + d\nu_0$ испускаемая в пределах бесконечного малого телесного угла $d\Omega_0$, с осью с единичным волновым вектором \vec{S}_0 этого излучения равная $B(\nu_0, \vec{S}_0) \nu_0 d\Omega_0$, для неподвижного наблюдателя будет равной $B(\nu, \vec{S}) \nu d\Omega$.

Таким образом, для нахождения наблюдаемой спектральной плотности равновесного теплового излучения $B(\nu, \vec{S})$ нам необходима связь между выше указанными величинами, которая запишется в следующем виде [116,2]:

$$\frac{B(\nu, \vec{S}) \nu d\Omega}{B(\nu_0, \vec{S}_0) \nu_0 d\Omega_0} = \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^2. \quad (3.2.2)$$

т.е. преобразуется как отношения квадрата наблюдаемых и испускаемых частот излучения ν и ν_0 .

Далее учитывая, что $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = -2\pi d(\cos \theta)$ и соответственно $d\Omega_0 = -2\pi d(\cos \theta_0)$ с помощью (3.2.2) находим наблюдаемую спектральную плотность излучения $B(\nu, \vec{s})$ воспользовавшись следующим преобразованием:

$$\frac{d\nu d\Omega}{d\nu_0 d\Omega_0} = \frac{d\nu d(\cos \theta)}{d\nu_0 d(\cos \theta_0)} = |D| d\nu_0 d \cos \theta_0. \quad (3.2.3)$$

Здесь D - детерминант преобразования, который определяется следующим выражением (сравните с (2.5.2))

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu}{\partial \nu_0} & \frac{\partial \nu}{\partial \cos \theta_0} \\ \frac{\partial \cos \theta}{\partial \nu_0} & \frac{\partial \cos \theta}{\partial \cos \theta_0} \end{vmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Теперь учитывая связь между наблюдаемой ν и испускаемой частотой излучения ν_0 , а также между наблюдаемым θ и испускаемым θ_0 углом излучаемых квантов с направлением скорости \vec{v} излучающих частиц (3.2.1) получаем, что

$$|D| = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u \cos \theta_0} = \frac{\nu_0}{\nu}. \quad (3.2.5)$$

Подставляя выражения (3.2.3) и (3.2.5) в (3.2.2) находим наблюдаемую спектральную плотность излучения

$$B(\nu, \vec{s}) = B(\nu_0, \vec{s}_0) \frac{(1+u \cos \theta_0)^2}{(1-u^2)^{3/2}} = B(\nu_0, \vec{s}_0) \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^3. \quad (3.2.6)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{B(\nu, \vec{s})}{\nu^3} = \frac{B(\nu_0, \vec{s}_0)}{\nu_0^3}, \quad (3.2.7)$$

которое выражает фундаментальное свойство - релятивистскую инвариантность $\frac{B(\nu)}{\nu^3}$ т.е. распределения Планка $f_\nu = \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}$. И наконец, возвращаясь к выражению (3.2.2) находим величину $B(\nu) d\nu$,

которое означает ту часть плотности энергии соответствующая интервалу частот от ν до $\nu + d\nu$:

$$B(\nu, \bar{S}) d\nu = B(\nu_0, \bar{S}_0) d\nu_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^4. \quad (3.2.8)$$

Следовательно, учитывая частотное распределение фотонов излучаемых атомами идеального газа вследствие их теплового возбуждения, спектральная плотность энергии излучения которых определяется формулой Планка (3.1.15) и проводя интегрирования в обеих частях равенства (3.2.8) получаем, что

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^4. \quad (3.2.9)$$

Отсюда следует, что температура T измеряемая наблюдателем будет различной в разных направлениях наблюдения и определяется выражением

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1 + u \cos \theta_0}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (3.2.10)$$

Разумеется последнее соотношение можно было получить воспользовавшись релятивистской инвариантности величины $\frac{B(\nu)}{\nu^3}$ (3.2.7) и учитывая явный вид формулы Планка (3.1.15). Закрывая раздел приводим найденные выражения к виду непосредственно определяемой наблюдаемым углом между излучаемым квантом излучения и направлением скорости $\bar{\nu}$ излучающей частицы выражая $\cos \theta_0$ через $\cos \theta$ согласно второй формуле (3.2.1):

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - u^2}}{1 + u \cos \theta}. \quad (3.2.11)$$

Таким образом, согласно выражениям (3.2.11) и (3.2.7) спектральная плотность равновесного теплового излучения $B(\nu, \theta)$ приобретает угловую зависимость и будет различной в разных направлениях наблюдения вследствие движения излучающих частиц. На самом деле это следствие

было учтено Эйнштейном в его работе [190], который показал анизотропность спектральной плотности равновесного теплового поле излучения для движущихся атомов идеального газа, правда, ограничивался, как уже подчеркивалось в предыдущем разделе, нерелятивистским приближением.

В дальнейшем, в отличии от Эйнштейна, нам предстоит провести анализ наблюдаемых характеристик равновесного теплового излучения на основе точного релятивистского закона преобразования частот (3.2.11) и точной релятивистской функции распределения скоростей излучающих частиц (3.1.17). Это и есть основная суть, предлагаемая ниже нами релятивистски-инвариантной статистической теории первичного космического излучения.

Приведенный выше строгое доказательство релятивистской инвариантности распределения Планка можно доказать и более простым путем. Действительно, как это было сделано в разделе 2.5 для доказательства инвариантности релятивистского распределения Больцмана для импульсов, введем следующие четырехмерные векторы:

$$V^i = (c, \vec{0})$$

$$P^i = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \vec{n} \right).$$

Здесь: V^i - четырехмерная скорость неподвижной системы координат ($V = 0$), P^i - четырехмерный импульс фотона, $h\nu$ - энергия фотона, \vec{n} - единичный вектор импульса фотона.

Отсюда находя скалярное произведение этих четырехмерных векторов, которое является инвариантом, получаем, что

$$P^i V_i = h\nu$$

также есть релятивистски - инвариантная величина.

Следовательно, чтобы выполнялось релятивистская инвариантность распределения Планка, должно выполняться условие (см. (3.2.11))

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{h\nu_0}{kT_0}, \quad \frac{T}{T_0} = \frac{\nu}{\nu_0}$$

Релятивистски – инвариантная статистическая теория первичного космического излучения

Согласно существующим теориям анизотропии реликтового излучения [171,167,216-219], на относительное изменение его температуры могут дать вклад следующие факторы:

- 1) рассеяния реликтовых фотонов на гравитационном потенциале (или что, то же самое на гравитонах).
- 2) флуктуации средней плотности барионов
- 3) рассеяние на очень горячем свободном газе электронов...

Однако выполненные за последнее более сорока лет прецизионные измерения показали, что [171,219]:

1) Вклад гравитационного рассеяния в анизотропии температуры реликтового излучения обнаружено не было, а лишь установлено его верхний предел.

2) Чтобы воспроизвести современное значение барионной плотности температурная анизотропия пропорциональная ей должна быть порядка

$\frac{\Delta T}{T} = 10^{-4} - 10^{-3}$. Однако подобное значение не наблюдается, так как барион-

фотонное отношение порядка 10^{-7} , т.е., меньше чем выше приведенной оценки на три-четыре порядка.

3) По оценкам рассеяние на очень горячем электронном газе в галактике с температурой порядка 10^4 К должно привести к относительному изменению температуры порядка 10^{-3} . Однако измерения со спутника COBE дают следующие возможные ограничения на относительное

изменение температуры обусловленное этим эффектом $\frac{\Delta T}{T} \leq 3 \cdot 10^{-5}$, т.е. на два порядка меньше чем ожидаемого.

Как известно, любая теория основывается на определенных допущения, гипотезы или постулаты. В соответствии этому представляемая релятивистски-инвариантная статистическая теория первичного космического излучения основана на следующие предположения:

1) Ранняя Вселенная представляла собою совокупность релятивистских идеальных газов элементарных частиц;

2) Первичное космическое излучение излучаются частицами этих газов, находящихся с этим излучением в равновесии;

3) Наблюдаемые макроскопические характеристики первичного космического излучения определяются релятивистской инвариантностью распределения Планка для этого излучения и функцией распределения скоростей излучающих его частиц.

4) Следуя теорию парастатистики считаем, что возможно непрерывное изменение индекса статистики \mathcal{E} между ферми – статистикой ($\mathcal{E} = -1$) и статистикой Максвелла – Больцмана ($\mathcal{E} = 0$), а также между последней и бозе – статистикой ($\mathcal{E} = 1$) [160].

Для исключения возможных недоразумений, подчеркиваем, что мы в отличии от существующих теорий тепловых историй Вселенной (или теорий «большого взрыва» и ее современных модификаций) рассматриваем свойства первичного микрокосмического излучения во неизменной Вселенной. При этом мы вообще не затрагиваем «начала» (окутанная тайной) и «конца» (которое неизвестно) Вселенной. На самом деле, это по существу, ни знает никто -как правильно отмечалось в работах [146-156].

Таким образом, основами релятивистки – инвариантной статистической теории первичного космического излучения являются следующие две формулы

$$\frac{T}{T_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u \cos \theta}, \quad (3.A)$$

$$\frac{B(v, \bar{S})}{v^3} = \frac{B(v_0, \bar{S}_0)}{v_0^3}, \quad (3.B)$$

которые являются следствиями инвариантности скорости света и интервала.

Излагая ниже релятивистки – инвариантная статистическая теория первичного космического излучения представляет собой новое, возможное, физическое объяснение происхождения и свойств этого излучения. В разделе 3.3 найдена функция распределения наблюдаемых частот первичного космического излучения и на ее основе показано, что существует минимальная наблюдаемая максимальная спектральная интенсивность этого излучения. Раздел 3.4 посвящен анализу флуктуаций температуры реликтового излучения и показано, что среднеквадратичная наблюдаемая температура равно равновесной температуре Вселенной, при которой происходило первичное космическое излучение. В разделе 3.5 найдено угловая зависимость наблюдаемой температуры реликтового излучения и на ее основе проанализированы анизотропия его наблюдаемой температуры. В разделе 3.6 найдено средняя плотность чисел частиц во Вселенной, а также уравнение состояния квантовых релятивистских идеальных газов в ней. Раздел 3.7 посвящен краткому анализу другой, независимой теории реликтового излучения представленная в работах [183-187], а так же сопоставлению этих двух новых теорий первичного микрокосмического излучения.

3.3. Минимальная наблюдаемая максимальная спектральная интенсивность первичного космического излучения

Находим функцию распределения наблюдаемых частот первичного космического излучения полагая, что оно формировалось частицами одномерного релятивистского идеального газа находящиеся с ним в тепловом равновесии (смотрите раздел 3.2). С теоретической точки зрения понятно, что этот выбор обусловлено необходимостью, так как, только в этом случае возможно аналитическое решение исследуемой проблемы (смотрите, например, предыдущие главы монографии, где упоминались и обсуждались ряд таких работ). Впрочем, в идейном плане, она представляет собой релятивистское обобщение одномерной модели Эйнштейна. Однако, как будет показано в конце главы такое своеобразное упрощение не влияет на суть ниже получаемых на ее основе результатов.

Следовательно, учитывая, что наблюдаемая частота и испускаемая частота излучения в рассматриваемом случае связаны точной формулой Доплера (смотрите первую и вторую главу монографии):

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}, \quad u = \frac{v_0}{c}, \quad (3.3.1)$$

на основе функции распределения скорости излучающих частиц (смотрите вторую главу)

$$\varphi(u) = \frac{1}{2k_1(b)} (1-u^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-b(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\right], \quad (3.3.2)$$

используя закон преобразования функции распределения

$$\varphi(x)dx = \varphi(u(x)) \left| \frac{du}{dx} \right| dx = f(x)dx, \quad (3.3.3)$$

получаем следующую функцию распределения нормированных наблюдаемых частот излучения [А6,А7]

$$f(x) = \frac{1}{4k_1(b)} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \exp\left[-\frac{b}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]. \quad (3.3.4)$$

Здесь

$$b = \frac{mc^2}{kT_0}, \quad x = \frac{v}{v_0}, \quad (3.3.5)$$

где m — масса частиц газа, T_0 — равновесная температура, при которой происходило тепловое излучение частиц газа благодаря их тепловому возбуждению за счет тепловой энергии, c — скорость света, k — постоянная Больцмана.

Таким образом, как видно из выражений (3.3.4) и (3.3.5) функция распределения наблюдаемых частот излучения зависит от единственного параметра, который определяется инвариантным отношением энергии покоя частицы и тепловой энергией kT_0 . Особо подчеркиваем, что T_0 — равновесная температура, не зависящая от времени. В противном случае, как это было показано в начале этой главы (и в предшествующих главах) не существует ни стационарное распределения Максвелла-Больцмана по импульсам, ни распределения Планка по частотам излучаемых фотонов.

Прежде чем перейти к анализу свойства найденной функции распределения наблюдаемых частот излучения скажем несколько слов о существующих результатах на эту тему. Как показывает проведенный нами обзор, ранее подобные функции широко применялись в спектральной теории излучения [2,7,68,157,158], применительно к излучению нерелятивистских частиц (или атомов). Поскольку в этом приближении

$$v = v_0(1 - u), \quad u = \frac{v_x}{c}, \quad (3.3.6)$$

где v_x — проекция скорости излучающей частицы на направления наблюдения излучения, благодаря тому, что скорости излучающих частиц подчиняются следующей одномерной функции распределения Максвелла (смотрите вторую главу)

$$\varphi_M(u) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \exp\left(-\frac{b}{2} u^2\right), \quad b = \frac{mc^2}{kT}, \quad (3.3.7)$$

мы получаем с помощью закона преобразования функции распределения (3.3.3), что спектральная форма линий излучения имеет следующий гауссовский вид [158]:

$$f_r(\Delta\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi <\Delta\nu^2>}} \exp\left(-\frac{\Delta\nu^2}{2 <\Delta\nu^2>}\right). \quad (3.3.8)$$

Отсюда сразу видно, что и частота соответствующая максимуму этой кривой и средняя наблюдаемая частота равны испускаемой частоте излучения ν_0 , какова бы не была масса излучающей частицы и температура. Следовательно, в этом случае, единственной характеристикой, доступной измерению, является среднеквадратичная флуктуация частоты излучения:

$$<\Delta\nu^2> = <(\nu - \nu_0)^2> = \nu_0^2 \cdot \frac{kT}{mc^2}.$$

Она пропорциональна температуре газа излучающих частиц и называется доплеровским тепловым уширением линий излучения.

Теперь найдем наиболее вероятную наблюдаемую частоту в нашем случае, которая соответствует максимуму функции распределения наблюдаемых частот (3.3.4). Вычисляя ее производную, и приравнявая ее нулю, получаем следующее уравнение

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{4k_1(b)} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) - \frac{2}{x^2} \right] \exp\left[-\frac{b}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] = 0, \quad (3.3.9)$$

Отсюда видно, что производная искомой функции обращается в ноль при $x=0$ и $x=\infty$. Но в этих точках сама функция распределения экспоненциально стремится к нулю. Следовательно, могут существовать конечные корни этого уравнения, являющихся решением следующего уравнения

$$\frac{b}{4} = \frac{x}{1-x^2}, \quad (3.3.10)$$

Таким образом, согласно последнему уравнению его возможные корни лежат в промежутке от нуля до единицы. Иначе говоря, наиболее вероятная наблюдаемая частота меняется в пределах от нуля до испускаемой частоты излучения ν_0 .

Теперь точно решая получающиеся из (3.3.10) следующие уравнение четвертой степени

$$x^4 + \frac{4}{b}x - 1 = 0, \quad (3.3.11)$$

находим для наиболее вероятной наблюдаемой частоты излучения следующее выражение [А6, А7]

$$\frac{\nu_{\text{об}}}{\nu_0} = x_{\text{об}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2W - (y-z)} - \sqrt{y-z} \right]. \quad (3.3.12)$$

Здесь

$$y = 2\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{b^3}}, \quad z = 2\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{b^3} - \frac{1}{b^3}},$$

$$W = \sqrt{(y-z)^2 + 3yz}. \quad (3.3.13)$$

Предоставляя читателям в качестве упражнения проверки правильности найденного корня (3.3.12) уравнения (3.3.11), заметим, что согласно выражению для наиболее вероятной наблюдаемой частоты (3.3.12), она определяется при заданной равновесной температуре T_0 , энергией покоя формирующих эту излучению частиц одномерного релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана. Как видно при любом значении параметра b наиболее вероятная наблюдаемая частота излучения $\nu_{\text{об}}$ меньше частоты ν_0 испускаемого излучения.

Далее анализируя зависимость максимума функции распределения, наблюдаемых частот излучения от параметрах b мы нашли наименьшее значение ее максимального значения, которое существует при значении параметра b (которую для простоты назовем критическим) равный

$$\Delta = 1.865, \quad (3.3.14)$$

найденное нами численно с помощью аналитических выражений для функции распределения наблюдаемых частот излучения (3.3.4) и наиболее вероятной наблюдаемой частоты излучения (3.3.12). Этому критическому значению h_0 соответствует

$$\frac{v_{00}}{v_0} = 0.4477, \quad (3.3.15)$$

которую легко вычислить на основе формул (3.3.12) и (3.3.13). Или еще проще его проверит согласно выражению (3.3.10) (рис. 14-17).

(Отметим, что в работах [А6,А7] допущена неточность, которая здесь исправлена).

Подчеркиваем, что найденная выше функция распределения наблюдаемых частот излучения справедливо как при спонтанном излучении, так и при равновесном излучении. В этих случаях будет разной только частотное распределение излучаемых атомами фотонов, т.е. их спектральная плотность излучения. Но в обоих случаях результирующая интенсивность излучения пропорционально числу излучающих частиц и спектральной плотности этого излучения [157,158]:

$$dI = dN \cdot B(v) = N \varphi(u) du \cdot B(v). \quad (3.3.16)$$

Поскольку согласно формуле преобразования функций распределения (3.3.3), вероятность того, что излучающая частица имеет составляющую скорости, вдоль направления наблюдения в интервале $(u; u + du)$ равна – вероятности наблюдаемых частот в интервале частот $(v; v + dv)$, мы можем записать предыдущее выражение в следующем виде

$$dI(v) = NP(v) \cdot B(v)dv, \quad \frac{dI(v)}{Ndv} = P(v) \cdot B(v). \quad (3.3.17)$$

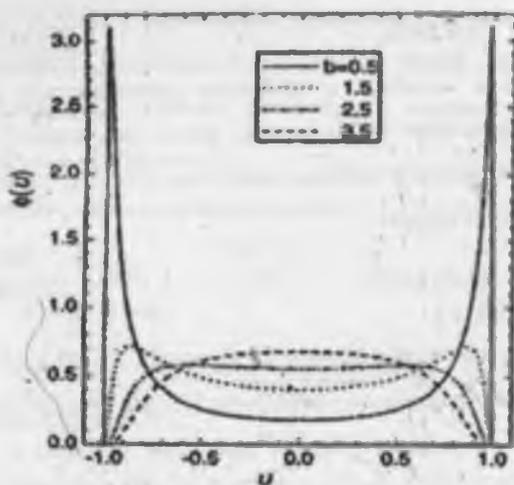


Рис. 14. Функция распределения скорости частиц одномерного релятивистского идеального газа

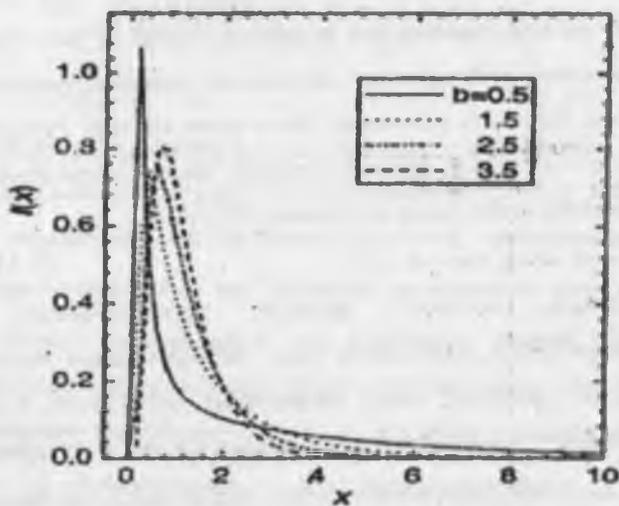


Рис. 15. Функция распределения наблюдаемых частот первичного космического излучения $[I(x) \equiv f(x)]$.

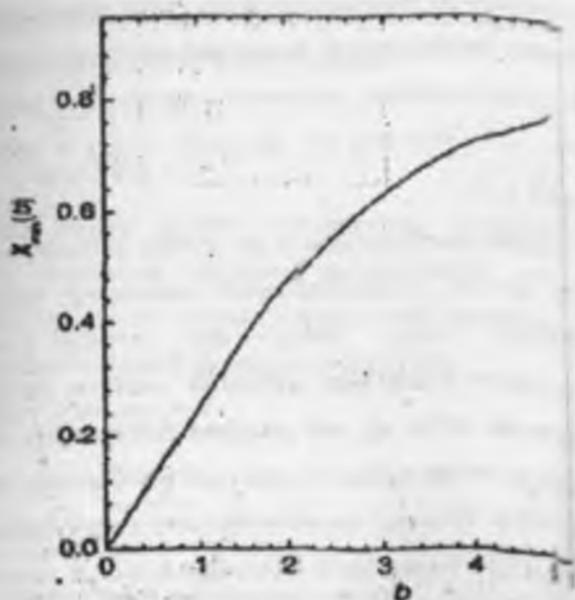


Рис. 16. Зависимость наиболее вероятной наблюдаемой величины реликтового излучения от параметра b

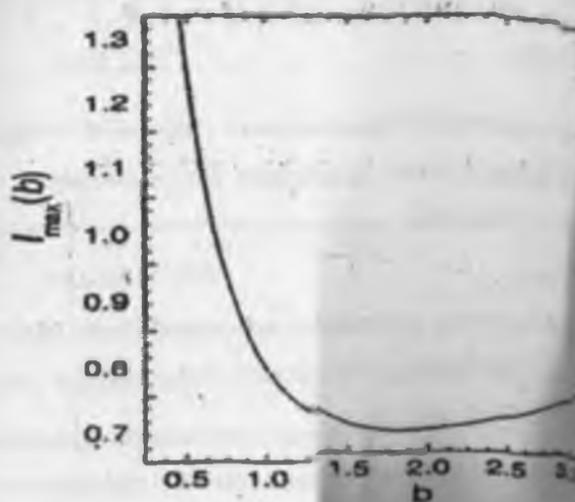


Рис. 17. Зависимость максимума функции распределения частот первичного космического излучения от параметра b

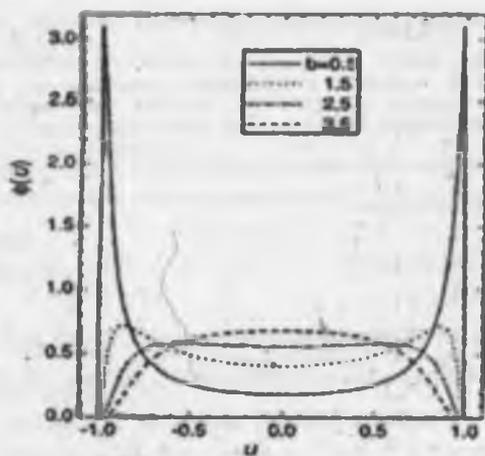


Рис. 14. Функция распределения скорости частиц одномерного релятивистского идеального газа

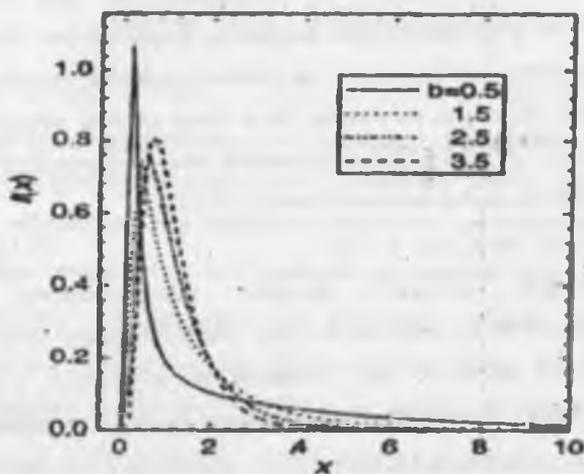


Рис. 15. Функция распределения наблюдаемых частот первичного космического излучения $[I(x) = f(x)]$.

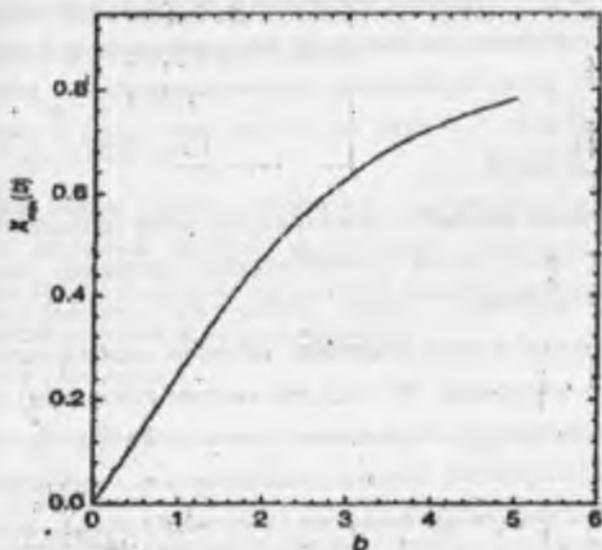


Рис. 16. Зависимость наиболее вероятной наблюдаемой частоты реликтового излучения от параметра b

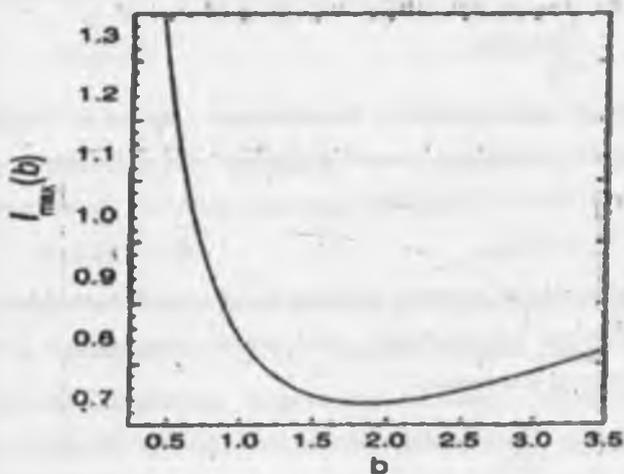


Рис. 17. Зависимость максимума функции распределения наблюдаемых частот первичного космического излучения от параметра b

Следовательно, спектральная интенсивность излучения отнесенная к одной частице и приходящая на единичный частотный интервал в направлении наблюдения равна произведению плотности вероятности наблюдаемых частот излучения $P(\nu)$ (или что, то же самое $f(x)$) и спектральной плотности излучения $B(\nu)$.

Последнее выражение справедливо для любых наблюдаемых частот и, в том числе, частоте соответствующей максимуму спектральной плотности излучения. Теперь учтем, что согласно последним наблюдательным данным реликтовое излучения является всюду почти изотропной с точностью 10^{-3} и его наблюдаемая спектральная плотность ничем не отличается от распределения Планка для равновесного теплового излучения [171,216-219]. Поэтому пренебрегая пока малой анизотропией наблюдаемой температуры реликтового излучения в разных направлениях (которую мы учтем и анализируем в следующих разделах), мы можем считать, что частота соответствующая наблюдаемой максимальной спектральной плотности этого излучения дается известной формулой Вина

$$\frac{h\nu_m}{kT_m} = 2,822. \quad (3.3.18)$$

Наблюдаемая максимальная спектральная плотность первичного космического излучения согласно последним наблюдательным данным соответствует частоте [216-219]

$$\nu_m = 160 \text{ Гц}. \quad (3.3.19)$$

Следовательно, согласно последним двум выражениям температура соответствующая максимальной наблюдаемой спектральной плотности реликтового излучения равна

$$T_m = \frac{h\nu_m}{2,822} = 2,728 \text{ К}. \quad (3.3.20)$$

Таким образом, объединяя выше приведенные распределения придем к выводу, что существует минимальная наблюдаемая максимальная

спектральная интенсивность первичного космического излучения (3.3.17), при выполнении следующих двух условий:

$$\nu_{\text{нн}} = \nu_0 \cdot 0,4477, \quad (3.3.21-1)$$

$$h\nu_{\text{н}} = 2822 \text{ кТэВ}. \quad (3.3.21-2)$$

Здесь первое условие соответствует наименьшему возможному значению максимума функции распределения наблюдаемых частот излучения. Второе же условие соответствует максимальной наблюдаемой спектральной плотности реликтового излучения.

Далее учитывая, что

$$\frac{\nu_{\text{нн}}}{\nu_0} = \frac{T_{\text{н}}}{T_0}, \quad (3.3.22)$$

которое обеспечивает релятивистскую инвариантность распределения Планка равновесного теплового излучения – таковым и является согласно последним наблюдательным реликтовое излучения и учитывая совместность условий (3.3.21-1) и (3.3.21-2) т.е. $\nu_{\text{нн}} = \nu_{\text{н}}$ получаем, что

$$\frac{T_{\text{н}}}{T_0} = 0,4477. \quad (3.3.23)$$

Отсюда получаем для равновесной температуры Вселенной T_0 при котором произошло ее рождение и формировалось первичное микрокосмическое излучение следующее значение:

$$T_0 = 6,09\text{К}. \quad (3.3.24)$$

Теперь воспользовавшись критическим значением параметра b_0 (3.3.14) и выражение b_0 (3.3.5), находим энергию покоя частицы сформировавшая первичное космическое излучение, соответствующая минимальной наблюдаемой максимальной спектральной интенсивности реликтового излучения

$$m_0 c^2 = b_0 \cdot \kappa T_0 = 9,768 \cdot 10^{-4} \text{эВ}. \quad (3.3.25)$$

$$\langle T \rangle = T_0 \int \int \int \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v(u) \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)} F(v) dv \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (3.4.4)$$

Здесь знак $\langle \rangle$ — означает усреднения по всевозможным углам направление наблюдения, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ — элемент телесного угла наблюдения.

Отметим еще раз, что последнее соотношение вытекает из релятивистской инвариантности распределения Планка равновесного теплового излучения (смотрите раздел 3.2), таковым и является наблюдаемая спектральная плотность реликтового излучения согласно последним данным наблюдения [216-219]. Теперь проведем интегрирование, т.е. усреднение по углам наблюдения, обозначая искомым интеграл через:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{1 + u \cos \theta}, \quad u = \frac{v}{c}. \quad (3.4.5)$$

Далее вводя новую переменную интегрирования $l = \cos \theta$ из (3.4.5) получаем, что

$$I_1 = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{dl}{1 + ul} = \frac{2\pi}{u} \ln \frac{1+u}{1-u}. \quad (3.4.6)$$

Подставим найденный интеграл в (3.4.4) и учитывая явный вид функции распределения модулей скоростей излучающих частиц даваемое выражением (3.4.3) имеем

$$\langle T \rangle = T_0 \cdot \frac{b}{k_2(b)} \int_0^{\infty} u (1 - u^2)^{-2} \ln \frac{1+u}{1-u} \exp \left[-b(1 - u^2)^{-1/2} \right] du. \quad (3.4.7)$$

Теперь делая нашу любимую подстановку, $u = \tanh x$ ($0 \leq x < \infty$) которая использовалась не раз в предыдущих главах, с помощью (3.4.7) получаем:

$$\langle T \rangle = T_0 \cdot \frac{b}{k_2(b)} \int_0^{\infty} dx \sinh x \cosh x \exp(-b \cosh x), \quad b = \frac{mc^2}{kT_0}. \quad (3.4.8)$$

Далее вычисляя последний интеграл методом интегрирования по частям получаем, что

$$\langle T \rangle = T_0 \cdot \frac{b}{k_2(b)} \left[\frac{1}{b} \int_0^b e^{-ksx} dx + \int_0^b dx k_1 x e^{-ksx} \right]. \quad (3.4.9)$$

Но как было показано во второй главе фигурирующие здесь интегралы равны соответственно модифицированным функциям Бесселя нулевого и первого порядка.

Далее учитывая, что

$$k_0(b) = k_1(b) - 2 \frac{k_1(b)}{b}, \quad (3.4.10)$$

получаем следующее компактное выражение, определяющее среднюю наблюдаемую температуру реликтового излучения [A11]:

$$\langle T \rangle = T_0 \left[\frac{1}{b} + \left(1 - \frac{2}{b^2}\right) \frac{k_1(b)}{k_2(b)} \right], \quad \langle T \rangle = T_0 \cdot \frac{b}{k_2(b)} \left[\left(1 - \frac{2}{b^2}\right) \frac{k_1(b)}{b} + \frac{k_1(b)}{b^2} \right]. \quad (3.4.11)$$

Теперь нам предстоит определить среднеквадратичную наблюдаемую температуру реликтового излучения которая определяется формулой

$$T_m = \sqrt{\langle T^2 \rangle}, \quad (3.4.12)$$

где $\langle T^2 \rangle$ — средняя квадрата наблюдаемой температуры реликтового излучения. Используя как и ранее формулу для вычисления средних значений (смотрите предыдущие главы монографии), получаем для нахождения последней следующее интегральное выражение

$$\langle T^2 \rangle = T_0^2 \int_0^c \int_{(\Omega)} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} F(v) dv \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (3.4.13)$$

Далее вычисляя интеграл зависящий от угловых переменных получаем, что

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}. \quad (3.4.14)$$

Подставляя выражения найденного интеграла в (3.4.13) имеем

$$\langle T^2 \rangle = T_0^2 \int_0^c F(v) dv = T_0^2, \quad (3.4.15)$$

так как функция распределения модулей скоростей частиц некантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана удовлетворяет условию нормировки (смотрите раздел 2.5-2.6)

$$\int_0^c F(v) dv = 1. \quad (3.4.16)$$

Таким образом, мы получаем нетривиальный вывод о том, что среднеквадратичная наблюдаемая температура реликтового излучения $T_{\text{наб}}$ в точности равна T_0 – равновесной температуре Вселенной (или температуре формирования первичного микрокосмического излучения).

Теперь докажем, что выше полученные результаты для средней и среднеквадратичной и определяемая ими среднеквадратичной флуктуации наблюдаемой температуры реликтового излучения являются не очевидными.

Действительно, согласно существующим нерелятивистским теориям спектральных линий излучения и анизотропии реликтового излучения (смотрите, например [7,157,158,216-219]) наблюдаемая температура T и равновесная температура T_0 излучающего газа связаны между собой следующим линейным соотношением

$$T = T_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right), \quad (3.4.17)$$

а функция распределения скорости излучающих частиц подчиняются, как известно, распределению Максвелла (смотрите раздел 2.6)

$$F_{\text{ма}}(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v^2}{v_{\text{ма}}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{\text{ма}}^2}\right). \quad (3.4.18)$$

Здесь $v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ — наиболее вероятная скорость частиц нерелятивистского идеального газа.

Следовательно, в этом случае для средней наблюдаемой температуры реликтового излучения получаем

$$\langle T \rangle = T_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) F_*(v) dv \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} = T_0. \quad (3.4.19)$$

Отсюда следует, что средняя наблюдаемая температура реликтового излучения равна равновесной температуре T_0 и не зависит от отношения энергии покоя излучающих частиц mc^2 и тепловой энергии kT_0 (сравните последний результат с (3.4.11)).

Теперь определим среднюю квадрата наблюдаемой температуры

$$\langle T^2 \rangle = T_0^2 \left\langle \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2 \right\rangle = T_0^2 \left\langle 1 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \right\rangle. \quad (3.4.20)$$

Далее проведя интегрирование по наблюдаемым углам излучения имеем

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} = \frac{1}{3}. \quad (3.4.21)$$

Учитывая последнее с помощью (3.4.20) получаем, что средняя квадрата наблюдаемой температуры реликтового излучения определяется следующим выражением:

$$\langle T^2 \rangle = T_0^2 \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \right] = T_0^2 \left(1 + \frac{kT_0}{mc^2} \right). \quad (3.4.22)$$

Таким образом, используя найденные выражения для средней и среднего квадрата температуры, определим единственно возможную, доступное измерению характеристику этого излучения — среднеквадратичную флуктуацию наблюдаемой температуры реликтового излучения:

$$\Delta T = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 = T_0^2 \frac{kT_0}{mc^2}. \quad (3.4.23)$$

Разумеется, последняя формула справедлива только при $\kappa T_0 \ll mc^2$. Следовательно, сравнивая эти результаты для характерных средних наблюдаемых температур реликтового излучения с точной релятивистской теории даваемые формулами (3.4.11) и (3.4.22), мы приходим к заключению, что они различаются кардинально. Это заключение и доказывает не trivialность выше полученных результатов на основе релятивистской функции распределения скоростей излучающих частиц, которые и формируют реликтовое излучение.

Теперь вернемся к точным формулам для средней наблюдаемой и среднеквадратичной наблюдаемой температурам реликтового излучения (3.4.11), (3.4.12) и обсудим их возможные физические последствия более подробно.

Начнем ее анализ с предельного случая очень малых значений параметра $b \ll 1$ или когда $b \rightarrow 0$, что соответствует безмассовому пределу. Так как асимптотики модифицированных функций Бесселя первого и второго порядка в этом пределе имеют вид

$$k_0(b) = \frac{1}{b}, \quad k_1(b) = \frac{2}{b^2}, \quad (3.4.24)$$

то согласно формуле (3.4.11) средняя наблюдаемая температура реликтового излучения определяется следующим образом

$$\langle T \rangle \approx T_0 \cdot \frac{b}{2} = \frac{mc^2}{2k}. \quad (3.4.25)$$

Следовательно, если бы первичное микрокосмическое излучение формировалось безмассовыми частицами то средняя, а также наиболее вероятная наблюдаемая температура равнялось бы нулю. Однако согласно последним наблюдательным данным температура реликтового излучения T_0 — соответствующая его максимальной наблюдаемой спектральной плотности не равна нулю и порядка 2,728К. Поскольку наиболее вероятная наблюдаемая температура $T_{HB} = T_m$ при минимальной наблюдаемой

максимальной спектральной интенсивности реликтового излучения, как было доказано нами выше в разделе 3.3, соответствует критическому значению параметра b

$$b_0 = \frac{mc^2}{\kappa T_0} = 1,865, \quad (3.4.26)$$

мы приходим к заключению о необходимости существования частицы с отличной от нуля массой, определяемая последним выражением. Наверно эту частицу формировавшая первичное космическое излучение следовало бы назвать «худоном» (это слово имеет узбекское происхождение и в переводе на русский язык означает «божья частица», аналогично тому, что хиггсовские бозоны также называют этим именем).

Теперь анализируем среднюю наблюдаемую температуру реликтового излучения в обратном пределе т.е. при очень больших значениях параметра $b \gg 1$, что соответствует $\kappa T_0 \ll mc^2$ и означает релятивистский предел. В этом случае асимптотики нужных нам модифицированных функций Бесселя имеют следующий вид

$$k_1(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b} \left(1 + \frac{3}{2b} + \dots \right), \quad (3.2.27)$$

$$k_2(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b} \left(1 + \frac{15}{8b} + \dots \right). \quad (3.2.28)$$

Следовательно, в этом пределе

$$\frac{k_1(b)}{k_2(b)} = 1 - \frac{3}{2b}, \quad (3.4.29)$$

и согласно (3.4.11) средняя наблюдаемая температуры реликтового излучения определяется следующей простой формулой

$$\langle T \rangle = T_0 \left(1 - \frac{1}{2b} \right) = T_0 \left(1 - \frac{\kappa T_0}{2mc^2} \right). \quad (3.4.30)$$

На основе вышеприведенного анализа мы приходим к следующему важному нетривиальному выводу о том, что средняя наблюдаемая

температура реликтового излучения не превышает температуру T_0 – при которой формировалось первичное космическое излучение, т.е. при изменении параметра b от нуля до бесконечности средняя наблюдаемая температура реликтового излучения меняется от нуля до T_0 . Иначе говоря, подобное изменение средней наблюдаемой температуры реликтового излучения связано с тепловым движением частиц релятивистского идеального газа, формировавшие первичное космическое излучение.

Заключая раздел приведем значения характерных средних наблюдаемых температур реликтового излучения при $b_0 = 1,865$ – соответствующий минимальной наблюдаемой максимальной спектральной интенсивности реликтового излучения, что было доказано в разделе 3.3. Вычисляя значения модифицированных функций Бесселя получим, что при $b_0 = 1,865$:

$$k_1(b_0) = 0.15891, \quad k_2(b_0) = 0.31510. \quad (3.4.31)$$

Тогда согласно (3.4.11) имеем

$$\langle T \rangle = 0,75012 T_0. \quad (3.4.32)$$

Далее учитывая что этому критическому значению b_0 соответствует равновесная температура $T_0 = 6,09 K$ – при которой произошло первичное космическое излучение, согласно (3.4.32) получаем ее значение равная

$$\langle T \rangle = 4,56823 K. \quad (3.4.33)$$

Зная эти характерные температуры теперь мы сможем найти характерный разброс (или как иногда говорят – дисперсию) наблюдаемой температуры реликтового излучения, который, как известно, определяется следующим выражением:

$$\Delta T = \sqrt{DT} = \sqrt{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2} = 0,66177 T_0 = 4,03242 K. \quad (3.4.34)$$

Таким образом, при приведенном значении параметра $b_0 = b_1 = 1,865$ средняя наблюдаемая температура реликтового излучения порядка 4,56823

К и характерный разброс наблюдаемой температуры этого излучения порядка 4,03242 К. Подчеркиваем, что средняя температура реликтового излучения, согласно наблюдениям Пиззиаса и Вильсона лежит в пределах $3,5 \pm 1$ К. Иначе говоря их измерения соответствует не температуре наблюдаемой максимальной спектральной плотности этого излучения, которая равна $T_0 = 2,728$ К, а среднему по всевозможным направлениям наблюдения.

Подчеркиваем еще одно важное следствие, которое вытекает из приведенного анализа: флуктуация наблюдаемой температуры реликтового излучения относительно большая. Это связано с тем, что параметр h_0 имеет конечное значение (порядка $h_0 = 1,865$) т.е. тепловая энергия kT_0 составляет примерно половину энергии покоя частицы, формировавшее первичное космическое излучение.

Предлагая читателям в качестве упражнения анализ изменения флуктуаций наблюдаемой температуры реликтового излучения во всем интервале изменения параметра $0 < b < \infty$, мы перейдем к исследованию наиболее важной характеристики реликтового излучения, а именно: анизотропии наблюдаемой температуры реликтового излучения – природа которой еще не вполне ясно [216-219]. Этому будет посвящен следующий раздел.

3.5. Анизотропия наблюдаемой температуры первичного космического фонового излучения

Как показывает анализ литературы посвященные анизотропии температуры реликтового излучения существуют ряд моделей

предлагающие тот или иной механизм этой анизотропии: пик Зельдовича, эффект Сакса-Вольфа, кинетическая, квадрупольная и т.д. [216-219]. Но, как подчеркивалось в этих работах, полной ясности в этом вопросе в настоящее время не существует. Поэтому ниже мы предлагаем новое, возможное физическое объяснение анизотропии наблюдаемой температуры реликтового излучения, которое основано на представлении, что оно обусловлено тепловым движением частиц формировавшие первичное космическое излучение.

Действительно, на результаты, представленные в предыдущем разделе можно взглянуть иначе, а именно: сначала провести интегрирование по всевозможным скоростям излучающих частиц и затем проводить интегрирование по углам наблюдения излучения, т.е. искомую среднюю наблюдаемую температуру записать в следующем виде:

$$\langle T \rangle = T_0 \cdot \frac{b}{2k_2(b)} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 df(u) \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u \cos \theta}, \quad (3.5.1)$$

где

$$f(u) = u^2 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-b(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \right], \quad u = \frac{v}{c}. \quad (3.5.2)$$

Если в последнем интегральном выражении введем косинус угла между направлением скорости излучающей частицы и направлением наблюдения излучения и обозначим его как $\mu = \cos \theta$, то из предыдущего выражения следует, что [A11]

$$\langle T \rangle = T_0 \cdot \frac{b}{2k_2(b)} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^1 df(u) \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u\mu} = T_0 \cdot \frac{b}{k_2(b)} \int_{(0)} J(\mu) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (3.5.3)$$

Из этого выражение видно, что мы можем вводить следующую функцию зависящая от μ - косинуса угла наблюдения [A11]

$$J(\mu) = \int_0^1 df(u) \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u\mu}. \quad (3.5.4)$$

которая и описывает угловую зависимость, т.е. анизотропию наблюдаемой температуры реликтового излучения.

Угловая функция наблюдаемой температуры первичного космического излучения (ПКИ)

Теперь нам необходимо определить явный вид функции $J(\mu)$. Но, к сожалению, последний интеграл в общем виде вычислить не удастся из-за сложной зависимости подынтегральной функции. Поэтому далее мы ограничимся с учетом главного порядка релятивистских эффектов т.е.

разложим $\frac{1}{1+u\mu}$ с точностью до u^2

$$\frac{1}{1+u\mu} = 1 - u\mu + u^2\mu^2 + \dots, \quad (3.5.5)$$

которое и соответствует этому приближению.

Отметим, что это разложение даст после его подстановки в выражении (3.5.4) правильный результат даже при $u \rightarrow 1$, поскольку, как мы показали во второй главе, ни одна частица с массой отличной от нуля не может иметь скорость равную скорости света т.е. релятивистская функция распределения $f(u)$ определяемая выражением (3.5.2) экспоненциально стремится к нулю при $u \rightarrow 1$, если $b \neq 0$.

Подчеркиваем также, что примененный нами здесь подход в некоторой степени подобен полурелятивистскому методу Эйнштейна (о котором говорилось во второй главе). Но в отличие от него (который использовал для скоростей распределения Максвелла (3.4.18)) мы для функции $f(u)$ сохраняем ее точный релятивистский вид, даваемый выражением (3.5.2).

Теперь подставляя разложение (3.5.5) в выражение (3.5.4) для искомой нами угловой функции наблюдаемой температуры первичного космического излучения получаем следующее выражение [A11]:

$$J(\mu) = a_0 - a_1\mu + a_2\mu^2 + \dots \quad (3.5.6)$$

где коэффициенты угловой функции наблюдаемой температуры реликтового излучения определяются следующими выражениями:

$$a_0 = \int_0^1 d\mu f(\mu) \sqrt{1-\mu^2}, \quad (3.5.7-0)$$

$$a_1 = \int_0^1 d\mu f(\mu) \sqrt{1-\mu^2} \mu, \quad (3.5.7-1)$$

$$a_2 = \int_0^1 d\mu f(\mu) \sqrt{1-\mu^2} \mu^2. \quad (3.5.7-2)$$

Далее поочередно находим нужные нам коэффициенты угловой функции a_0, a_1 и a_2 .

Сперва вычислим коэффициент a_0 используя как и ранее подстановку $\mu = thx$. Тогда учитывая явный вид релятивистской функции распределения скорости $f(\mu)$ (3.5.2) и выражение (3.5.7-0) для коэффициента a_0 получаем

$$a_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} dx sh^2 x e^{-bx} = \frac{k_1(b)}{b}. \quad (3.5.8-0)$$

Аналогичным образом получаем для нахождения коэффициента a_1 следующее интегральное выражение

$$a_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} dx sh^2 x e^{-bx} \frac{shx}{chx}.$$

Для вычисления последнего интеграла введем новую переменную $t = chx$, что позволяет записать коэффициент a_1 в следующем виде

$$a_1 = \int_1^{\frac{1}{2}} dt e^{-bt} - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} e^{-bt}.$$

Фигурирующие в последнем выражении интегралы вычисляются элементарно и соответственно даются следующим формулами:

$$\int_1^{\infty} dtte^{-bt} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{b}\right) e^{-b}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-bt} = E_1(b).$$

Здесь $E_1(b)$ — интегральная показательная функция первого порядка. Таким образом, коэффициент a_1 выражается следующей формулой:

$$a_1 = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{b}\right) e^{-b} - E_1(b). \quad (3.5.8-1)$$

Наконец определим последний коэффициент угловой функции наблюдаемой температуры реликтового излучения a_2 :

$$a_2 = \int_0^{\infty} dx x h^2 x e^{-bx} \cdot \frac{sh^2 x}{ch^2 x} = \int_0^{\infty} dx x h^2 x e^{-bx} - \int_0^{\infty} dx e^{-bx} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{ch^2 x} e^{-bx}.$$

Далее учитывая, что все присутствующие здесь интегралы даются следующим выражениями (смотрите предыдущие главы монографии):

$$\int_0^{\infty} dx x h^2 x e^{-bx} = \frac{k_1(b)}{b},$$

$$\int_0^{\infty} dx e^{-bx} = k_0(b),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{ch^2 x} e^{-bx} = ki_1(b),$$

получаем для искомого коэффициента a_2 следующее выражение

$$a_2 = \frac{k_1(b)}{b} - k_0(b) + ki_1(b).$$

Здесь $k_0(b)$ и $k_1(b)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка, $ki_1(b)$ — интегральная функция Бесселя второго порядка.

Теперь используя что,

$$k_0(b) = k_1(b) - \frac{2}{b} k_1(b)$$

коэффициент a_2 приведем к виду

$$a_2 = \frac{3k_1(b)}{b} - k_1(b) + ki_1(b), \quad (3.5.8-2)$$

удобную для его вычисления.

Таким образом, коэффициенты угловой функции наблюдаемой температуры реликтового излучения, как средняя наблюдаемая температура этого излучения, определяются единственным параметром b т.е. отношением энергии покоя излучающих частиц mc^2 и тепловой энергии kT_0 .

Теперь мы сможем исследовать свойства угловой функции наблюдаемой температуры первичного космического излучения $J(\mu)$, так как знаем коэффициенты a_0, a_1 и a_2 , которые согласно их определению, выражаемые соотношениями (3.5.7-0) – (3.5.7-2) положительны. Следовательно, согласно известным свойствам квадратичной функции, угловая функция $J(\mu)$, имеет свое наименьшее значение при (рис. 18)

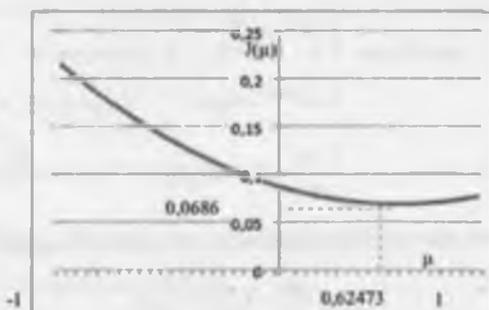


Рис. 18. Угловая функция наблюдаемой температуры первичного космического излучения

$$\mu = \frac{a_1}{2a_2} = \mu_{\text{кр}}, \quad (3.5.9)$$

которую мы для простоты далее назовем критической. Это наименьшее значение угловой функции наблюдаемой температуры реликтового излучения согласно (3.5.6) и (3.5.9) определяется следующим выражением:

$$J_{\mu} = J(\mu_{\varphi}) = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}. \quad (3.5.10)$$

Отсюда учитывая, что температура реликтового излучения наблюдаемая в направлении угла наблюдения θ определяется согласно (3.5.3) выражением:

$$T(\mu) = T_0 \cdot \frac{b}{k_2(b)} J(\mu), \quad (3.5.11)$$

придем к нетривиальному выводу, что существует направление наблюдения при котором наблюдаемая температура реликтового излучения является наименьшей.

Анизотропия наблюдаемой температуры реликтового излучения

Найденная выше угловая функция наблюдаемой температуры реликтового излучения позволяет определить наиболее его важную характеристику, а именно: анизотропию наблюдаемой температуры т.е. разность его наблюдаемой температуры в разных направлениях наблюдения.

Действительно, используя обычную разложения Тейлора для двух близких друг к другу углов наблюдения, согласно (3.5.6) получаем для разности наблюдаемых в этих направлениях температуры реликтового излучения следующее выражение

$$\Delta T = T_0 \cdot \frac{b}{k_2(b)} \Delta J = \Delta T_1 + \Delta T_2. \quad (3.5.12)$$

Здесь ΔT_1 и ΔT_2 выражают соответственно анизотропию первого и второго порядка наблюдаемой температуры реликтового излучения и определяются следующим образом:

$$\Delta T_1 = T_0 \cdot \frac{b}{k_2(b)} \cdot \frac{dJ}{d\mu} (\mu_1, \chi \mu_1 - \mu_1) = T_0 \cdot \frac{b}{k_2(b)} (2a_2 \mu_1 - a_1 \chi \mu_1 - \mu_1). \quad (3.5.13)$$

$$\Delta T_1 = T_s \cdot \frac{b}{k_1(b)} \cdot \frac{d^2 J}{2d\mu^2} (\mu_1, \mu_2 - \mu_1)^2 = T_s \cdot \frac{b}{k_1(b)} \cdot 1 \cdot a_1 (\mu_2 - \mu_1)^2. \quad (3.5.14)$$

Оставляя читателям в качестве упражнения анализа угловой функции наблюдаемой температуры реликтового излучения при предельных значениях параметра b ($b \gg 1$ или $b \ll 1$), мы в заключении раздела приводим значения интересующих нас характеристик анизотропии наблюдаемой температуры реликтового излучения при $b_0 = 1.865$, которому как было показано в разделе 3.3 соответствует минимальная наблюдаемая максимальная спектральная интенсивность первичного космического излучения.

Воспользовавшись значениями модифицированных функций Бесселя, интегральной показательной функции и интегральной функции Бесселя при этом значении параметра $b_0 = b_1$ получаем

$$a_0 = 0.09013 \quad a_1 = 0.06892 \quad a_2 = 0.05516.$$

Зная значения коэффициентов угловой функции $J(\mu)$ вначале находим угол наблюдения соответствующий минимальной наблюдаемой температуре реликтового излучения:

$$\mu_{\text{оп}} = \frac{a_1}{2a_2} = 0.62473 = \cos \theta_{\text{оп}}.$$

Следовательно, этот искомый угол наблюдения равен

$$\theta_{\text{оп}} = 51,3^\circ.$$

Этому углу наблюдения соответствует наименьшее значение угловой функции наблюдаемой температуры реликтового излучения равно

$$J_{\text{мин}} = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} = 0.0686.$$

Тогда учитывая, что $k_1(b_1) = 0.31510$ имеем следующее значение для минимальной наблюдаемой температуры реликтового излучения

$$T_{\text{ан}} = T_0 \frac{b_{\mu}}{k_1(\mu_{\text{к}})} \cdot J_{\text{ан}} = T_{\text{к}} \cdot J_{\text{ан}} = 2,4727 \text{ K}.$$

Теперь проанализируем анизотропию наблюдаемой температуры реликтового излучения вблизи угла наблюдения $\theta_{\text{к}}$ в котором наблюдается ее наименьшее значение. Так как в этом случае $\frac{dT}{d\mu}(\mu_{\text{к}}) = 0$, то анизотропия наблюдаемой температуры вблизи этого направления полностью определяется анизотропией второго порядка наблюдаемой температуры реликтового излучения т.е.

$$\Delta T_2 = T_0 \frac{b_2}{k_2(\mu_{\text{к}})} a_2 (\mu - \mu_{\text{к}})^2. \quad (3.5.15)$$

Далее для ее оценки возьмем угол отличающийся от критического угла наблюдения на 0,5 градус, например, при $\theta = 51,3 \pm 0,50^\circ$.

Тогда для значения вышеприведенных характеристик наблюдаемой температуры реликтового излучения получаем

$$\Delta T_1 = 0, \quad \Delta T_2 = 91,9369 \text{ мкК}$$

Теперь оцениваем анизотропию наблюдаемой температуры в непосредственной близости угла наблюдения соответствующая $T_{\text{ан}}$. Взяв, например, $\theta_1 = 50,3^\circ$ и $\theta_2 = 50^\circ$ получаем

$$\Delta T_1 = 2,911 \text{ мК}; \quad \Delta T_2 = 31,8121 \text{ мкК}.$$

Следовательно, вблизи этих углов наблюдения, $\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = 1,09282 \cdot 10^{-2}$

т.е. анизотропия второго порядка меньше на два порядка чем анизотропия первого порядка наблюдаемой температуры реликтового излучения.

Найденная нами аналитическим путем направление наблюдения при котором наблюдается минимальная температура реликтового излучения соответствующий критическому углу наблюдения $\theta_{\text{к}} = 51,3^\circ$ близка к экспериментально обнаруженному значения этого угла, порядка $48,5 \pm 3^\circ$ [216-219].

Величина анизотропии второго порядка наблюдаемой температуры реликтового излучения 91,9369 мкК удивительно близка (можно сказать с невероятной точностью) к ее экспериментально определенному значению порядка 90 мкК [216-219], полученная относительно недавно с помощью измерительных космических комплексов – Вилкинсон, Реликт, Планк и другие (с которыми подробно можете ознакомиться читая специальную литературу приведенные во выше указанных работах [216-219]). Она близка также к суммарной анизотропии квадрупольной компоненты порядка 75 мкК, и так называемой, платы Зельдовича порядка 20 мкК, что вместе составляет порядка 95 мкК. Но в отличие от существующих теорий, которые предлагают для объяснения анизотропии температуры реликтового излучения различные физические механизмы, в рамках предложенной теории анизотропия наблюдаемой температуры реликтового излучения объяснено единым механизмом, а именно: тепловым движением частиц формировавшие первичное космическое излучения.

Резюмируя полученные результаты приходим к заключению, что угловая зависимость наблюдаемой температуры реликтового излучения описываемая аппроксимационной формулой (3.5.6) с хорошей точностью отражает свойства анизотропии наблюдаемой температуры этого излучения и самое главное показывает существования направления наблюдения в котором наблюдается абсолютно заниженная температура реликтового излучения.

Теперь приведем выражения анизотропии первого и второго порядка наблюдаемой температуры реликтового излучения к виду, непосредственно зависящее от угла наблюдения. Для этого полагаем, что $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = \theta + \alpha$, где α - разность углов наблюдения, выраженная в радианах, которую примем равной 0,5 градусам. Тогда будем получать следующие выражения:

$$\Delta T_1 = T_{sp}(2a_1\mu_1 - a_1)(\mu_2 - \mu_1) = T_{sp}(a_1 \sin \theta - a_2 \sin(2\theta))\alpha, \quad (3.5.16)$$

$$\Delta T_2 = T_{\psi} a_2 (\mu_2 - \mu_1)^2 = T_{\psi} a_1 \sin^2 \theta \alpha^2. \quad (3.5.17)$$

Из последнего выражения сразу следует, что анизотропия второго порядка будет максимальной при угле наблюдения 90° .

Далее находя производную от ΔT_1 по углу наблюдения θ и приравняв ее нулю найдем следующие ее точки экстремума.

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{1}{4} \left[\mu_{кр} + \sqrt{\mu_{кр}^2 + 8} \right], \\ \cos \theta_2 &= \frac{1}{4} \left[\mu_{кр} - \sqrt{\mu_{кр}^2 + 8} \right], \quad \mu_{кр} = \frac{a_1}{2a_2}. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Таким образом, анизотропия первого порядка наблюдаемой температуры реликтового излучения имеет минимум при косинусе угла наблюдения $\cos \theta_1$ ($\Delta T_{1\text{---}} < 0$) и максимум при косинусе наблюдения $\cos \theta_2$ ($\Delta T_{1\text{---}} > 0$) (рис.19).

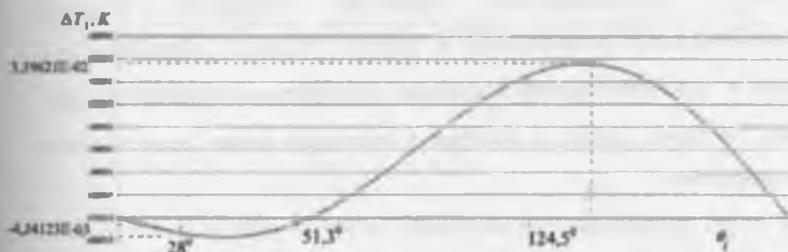


Рис. 19. Анизотропия первого порядка наблюдаемой температуры первичного космического излучения

Напомним, как было показано выше, она равна нулю при критическом угле наблюдения $\mu_{\psi} = \cos \theta_{\psi} = \frac{a_1}{2a_2}$. При угловом разрешении $\alpha = 1,745 \cdot 10^2$ они равны соответственно: $\Delta T_{1\text{---}} = -4,24123 \text{ мК} (\theta = 28^\circ)$ и $\Delta T_{1\text{---}} = 3,39621 \cdot 10^{-2} \text{ К} (\theta = 124,5^\circ)$; $\Delta T_{2\text{---}} = 1,5141 \text{ мК} (\theta = 90^\circ)$ (рис. 20).

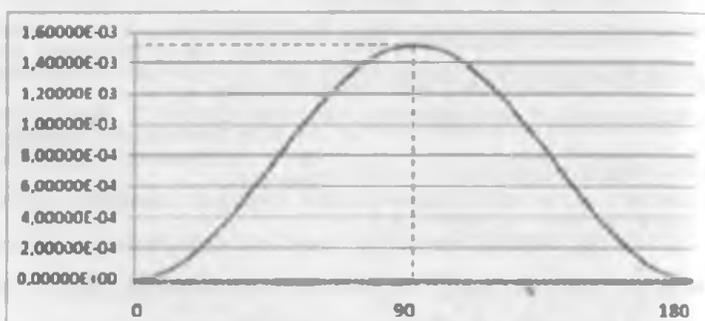


Рис. 20. Анизотропия второго порядка наблюдаемой температуры первичного космического излучения

Следовательно, анизотропия наблюдаемой температуры реликтового излучения существует во всех направлениях наблюдения¹. Проверка выше найденных закономерностей являются предметом будущих экспериментальных исследований и требует углового разрешения 0,5 градуса и чувствительности измерения температуры порядка 56,8 мкК (для ΔT_1) и 21,8 мК (для ΔT_2), которые в настоящее время является пока недостижимыми.

Угловая корреляционная функция наблюдаемой температуры реликтового излучения

Далее разложим угловую функцию эффективной наблюдаемой температуры ПКИ на полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta) = P_n(\mu)$ ($n=0,1,2,\dots$),

¹ Смотрите приложение в конце монографии, в котором приведены значения анизотропий температуры ПКИ.

которое удобно в некоторых случаях, так как последнее обладает следующим свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{2 \cdot \delta_{ln}}{l+n+1}, \quad (3.5.19)$$

где δ_{ln} - символ Кронекера ($\delta_{ln} = 1$, при $l = n$ и равен нулю при $l \neq n$).

Тогда представляя угловую функцию $J(\mu)$ в виде

$$J(\mu) = \sum_{l=0}^n \sqrt{l + \frac{1}{2}} C_l P_l(\mu) \quad (3.5.20)$$

и используя, что

$$\int_{-1}^1 J(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{C_n}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (3.5.21)$$

получаем

$$J(\mu) = \sum_{l=0}^n \sqrt{l + \frac{1}{2}} C_l P_l(\mu) = a_0 - a_1 \mu + a_2 \mu^2 = r_0 P_0(\mu) + r_1 P_1(\mu) + r_2 P_2(\mu) \quad (3.5.22)$$

Здесь: $P_0(\mu) = 1$, $P_1(\mu) = \mu$, $P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$.

$$r_0 = a_0 + \frac{a_2}{3}, \quad r_1 = -a_1, \quad r_2 = \frac{2}{3} a_2$$

$J(\mu)$ - угловая функция наблюдаемой температуры ПКИ; $P_n(\mu)$ - полиномы Лежандра n -ного порядка.

Таким образом, в рассматриваемом случае отличны от нуля только первые три коэффициента разложения C_0, C_1 и C_2 . А все C_l при $l \geq 3$ равны нулю (смотрите задачи в конце главы). С помощью этого разложения легко найти среднюю квадрата наблюдаемой температуры

$$\langle T^2 \rangle = \langle T^2(\mu) \rangle = T_\varphi^2 \langle R(\mu) \rangle, \quad (3.5.23)$$

Здесь: $T_\varphi = T_0 \frac{h_\varphi}{k_2(b_\varphi)}$, $R(\mu) = J^2(\mu)$, $R(\mu)$ - угловая корреляционная

функция наблюдаемой температуры реликтового излучения.

Особо подчеркиваем, что в существующих теориях C_l называются мультипольными моментами и угловая корреляционная функция флуктуаций температуры реликтового излучения начинается только со второго [171,216-219]:

$$c(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\theta).$$

Далее предполагая, что ожидаемые флуктуации температуры реликтового излучения являются гауссовыми случайными величинами (то есть независимо от физического механизма этих флуктуаций: рассеяние на гравитационном потенциале, рассеяние на флуктуациях плотностей барионов и т.д.), C_l находят следующим образом:

$$(2l+1)C_l = \sum_i |a_l^i|^2 = a_l^2.$$

Коэффициенты a_l^i рассчитывается считая, что поле излучения сферически – симметричное и его можно разложить по сферическим гармоническим функциям:

$$T(\vec{n}) = T_0 \sum_{l,m} a_l^m Y_{lm}(\vec{n}) = T_0 [1 + \epsilon(\vec{n})].$$

Здесь T_0 – средняя температура фонового излучения, $\epsilon(\vec{n})$ – возможное отклонение измеряемой (или наблюдаемой) температуры от T_0 в направлении наблюдения с единичным вектором \vec{n} .

Теперь следуя, существующим теориям анизотропии температуры реликтового излучения полагаем, что кинетическая анизотропия обусловлено движением Земли (Солнца или местной группы) относительно реликтового излучения.

Тогда разность температуры соответствующая углам наблюдения θ_1 и θ_2 будет равна

$$\Delta T_r = T_r \cdot \frac{v}{c} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Далее считаем, что $\theta_1 = 50,3^\circ$ и $\theta_2 = 50^\circ$. Тогда $\cos\theta_2 - \cos\theta_1 \approx 4 \cdot 10^{-3}$. Теперь учитывая, что $T_\gamma = 2,728 \text{ K}$ и измеренная скорость местной группы $v \approx 627 \text{ км/с}$ [219], получаем $\Delta T_\gamma = 2,28 \cdot 10^{-5} \text{ K}$.

Но эта величина приблизительно на два порядка меньше чем измеренной кинетической компоненты, которая равна 3 мК.

Следовательно, анизотропию кинетической компоненты температуры реликтового излучения невозможно объяснить движением галактики (или ее частей) относительно микрокосмического излучения.

Добавим также, что согласно заключению работы [220] красное смещение не обусловлено движением галактики (или ее частей), а вызвано другими причинами, так как, не было никакого «Большого взрыва», а произошло холодное рождение Вселенной.

Очевидно, нужно обладать большим «мужеством» и «гениальной» фантазией чтобы поле равновесного теплового излучения (именно таким является реликтовое излучение — это заключение последних наблюдательных данных) представит сферически — симметричным и считать гауссовыми флуктуации температуры реликтового излучения. Поэтому мы далее приводим результаты подобных «теорий» анизотропии температуры реликтового излучения без комментариев.

Для нахождения C_l используется значение порядков от $l=2$ до нескольких сотен (200, 300, 500) и даже тысячи (1200, 2400, 3200)! Разумеется, эти вычисления невозможно провести аналитическим путем и можно найти только численным методом.

В существующих теориях анизотропии реликтового излучения утверждается, что измеренная анизотропия наблюдаемой температуры полностью определяется квадрупольной компонентой и описывается угловой корреляционной функцией следующего вида

$$c_2(\theta) = Q - P_2(\cos \theta).$$

Но измеренные угловые корреляционные функции, приведенные в [216-217] не подчиняется предыдущей угловой зависимости, поскольку измеренная угловая корреляционная функция является асимметричной. Но квадрупольная корреляционная функция $c_2(\theta)$ - симметрично относительно замены μ на $-\mu$ и имеет совершенно другую угловую зависимость, не похожая на экспериментальную.

Предложенная же нами угловая корреляционная функция наблюдаемой температуры реликтового излучения $R(\mu) = J^2(\mu)$ является асимметричной, т.е. $J(\mu) \neq J(-\mu)$ и правильно описывает измеренную угловую корреляционную функцию флуктуаций температуры фонового излучения, так как, разложение на полиномов Лежандра угловой функции наблюдаемой температуры ПКИ $J(\mu)$ является точным. Это связано, естественно, с тем, что последняя - конечный многочлен. Как отмечал Чандрасекар [157], в этом случае любая статистическая характеристика, зависящая от угловой переменной $\mu = \cos \theta$ вычисляется с погрешностью равной нулю. При более сложной зависимости угловой функции $J(\mu)$ удастся найти лишь «наилучшее» приближение. Читатели сами могут убедиться в том, что действительно средняя квадрата наблюдаемой температуры, найденная на основе корреляционной функции $R(\mu)$, точно равно ее значению, полученная с помощью угловой функции $J(\mu)$.

Обратная задача теории первичного космического излучения (ПКИ)

Завершая раздел, рассмотрим возможную обратную задачу теории ПКИ: пусть нам удалось (как в экспериментах «Реликт» и WMAP) определить галактические координаты точки с «абсолютно» заниженной температурой реликтового излучения, с угловым разрешением $0,5^\circ$

градусов и $\theta_{cp} = 52^\circ$, которому соответствует $\mu_{cp} = 0.62375$. Далее примем, что эту температуру удалось измерять с прецизионной точностью 30 мк К и $T_{min} = 2,473$ К.

Таким образом, чтобы определить равновесную температуру Вселенной нам достаточно вычислить b_{cp} которому соответствуют минимум $J(\mu)$. Это нам заодно позволяет найти и все коэффициенты угловой функции зависящие только от b .

Таблица 1

	b	a_1	a_2	$\mu(b)$	a_0
	0	1	2	3	4
0	0.2	23.3392720632	22.8780787865	0.5101239862	23.8798621762
1	0.3	8.785030994	9.4703301083	0.5171430807	10.1866411829
2	0.4	5.1629202983	4.9220210903	0.5244715739	5.4608871356
3	0.5	3.0794103747	2.8948407141	0.5318780702	3.3128835433
4	0.6	1.984783334	1.8402397842	0.5392730284	2.1713926585
5	0.7	1.3490781382	1.2340438486	0.5466086728	1.5004055708
6	0.8	0.9531411413	0.8604553583	0.5538585657	1.0772273719
7	0.9	0.693497986	0.6180748871	0.5610145483	0.7961484225
8	1	0.5163749547	0.4545017452	0.5680670758	0.6018068474
9	1.1	0.3917182468	0.3408146101	0.5750182688	0.4834181195
10	1.2	0.3017493924	0.2592537527	0.5819578173	0.362160321
11	1.3	0.2354503039	0.2000061972	0.588610464	0.2865750023
12	1.4	0.185736158	0.1580127746	0.5952594537	0.2291685057
13	1.5	0.1479026218	0.1228790392	0.6018228284	0.1848252017
14	1.6	0.1187426211	0.0976046972	0.6082843575	0.1503961946
15	1.7	0.0960185475	0.0781082109	0.6146665315	0.1231544045
16	1.8	0.0781377847	0.0629178694	0.6209504982	0.1014572774
17	1.9	0.0639477009	0.050983154	0.6271453992	0.0840316594
18	2	0.0526009542	0.0415295182	0.6332980142	0.0699329408
19	2.1	0.0434682971	0.0338810745	0.6393780975	0.0584508722
20	2.2	0.0360672903	0.0279444874	0.6453388602	0.0490440047

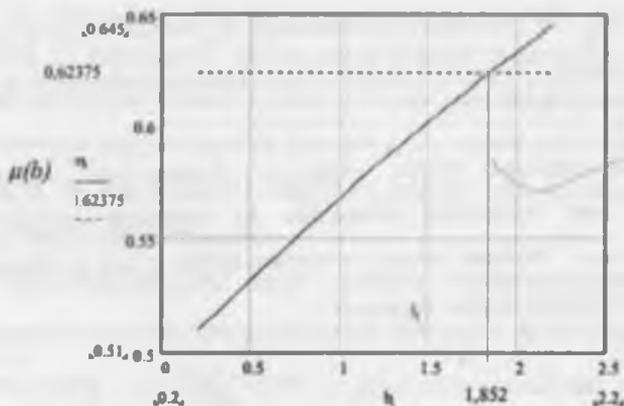


Рис. 21. Численное решение экстремального уравнения, определяющее минимальную наблюдаемую температуру реликтового излучения

Для нахождения $b_{\text{оп}}$ мы численно решали, экстремальное уравнение

$$\cos \theta_{\text{оп}} = \mu_{\text{оп}} = \frac{a_1}{2a_2},$$

варьируя параметр b .

Результаты численного счета представлены в таблице 1 и на рисунке 21. С

их помощью мы определяли, что $b_{\text{оп}} = 1.852$ и $J_{\text{min}} = 0.07058$, $\frac{h_{\text{оп}}}{k_1(b_{\text{оп}})} = 5.77961$.

Тогда используя найденную выше связь между T_{min} и T_0 получаем что $T_0 = 6,06(276) \text{ K}$.

Таким образом, прецизионный метод определения характеристик реликтового излучения полученный на основе трехмерной функции распределения скоростей излучающих частиц подтверждает результаты для модели одномерного идеального газа со следующими погрешностями 1)

относительная: $\frac{\Delta b_{\text{эф}}}{b_{\text{эф}}} = 6,97 \cdot 10^{-1}$ и $\frac{\Delta T_0}{T_0} = 4,93 \cdot 10^{-3}$. 2) абсолютная:
 $\Delta b_{\text{эф}} = 1,3 \cdot 10^{-2}$ и $\Delta T_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ K}$.

Приведенный результат показывает также, что измерения «Реликт» а и WMAP находятся на пороге допустимой шести процентной точности. В то же время погрешность аналитических расчетов не превышают даже одного процента. Кроме того, предложенная теория определяет минимальную наблюдаемую температуру $T_{\text{дн}} = 2,4727 \text{ K}$ и равновесную температуру Вселенной $T_{\text{дн}} = 6,09 \text{ K}$, которые не найдены ни в одном космическом спутниковом эксперименте проводимых с 1970 года по сей день (последний из них – европейский спутник «Планк» запущен в мае 2009 года, первый этап исследований которого завершится 2020 году)!

Представляет важный интерес знания средней плотности чисел различных частиц заполняющие Вселенную, как для космологии, так и для науки в целом. Эта проблема и является темой следующего раздела

3.6. Вселенная как совокупность квантовых релятивистских идеальных газов

Определение средней плотности чисел частиц во Вселенной представляет фундаментальный интерес, поскольку их знание позволяет определить отношения средней плотности барионов и фотонов, основной источник неопределенности которого связано с недостатком современных знаний о плотности барионов во Вселенной [216-219].

Средняя плотность чисел частиц

Определим среднюю плотность чисел различных частиц обычным образом, согласно следующей формулы квантовой статистической физики [6,7,68,105,200]:

$$n = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty f(p) dp, \quad (3.6.1)$$

где $f(p)$ — инвариантная функция распределения частиц квантовых релятивистских идеальных газов по импульсам [123, 124, 156, 174, 180]:

$$f(p) = \left[\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) - \varepsilon \right]^{-1}, \quad (3.6.2)$$

Здесь g — спиновая степень свободы частицы, $E = E(p)$ — энергия частицы, μ — химпотенциал для этой частицы, ε — индекс статистики, который принимает следующие значения в зависимости от того, какой статистике подчиняется частица т.е.

$$\varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{для распределения Ферми-Дирака} \\ 0, & \text{для распределения Максвелла-Больцмана} \\ 1, & \text{для распределения Бозе-Эйнштейна} \end{cases}$$

Далее мы находим среднюю плотность чисел частиц во Вселенной полагая, что ранняя Вселенная представляет собой систему газов элементарных частиц, образно названная нами — совокупностью квантовых релятивистских идеальных газов (КРИГ).

Для вычисления средней плотности чисел частиц выражение (3.6.1) с учетом вида инвариантной функции распределения $f(p)$ (3.6.2) удобно представить следующим образом:

$$n = 4\pi \frac{g}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 e^{-\frac{E-\mu}{kT}}}{1 - \varepsilon e^{-\frac{E-\mu}{kT}}} dp. \quad (3.6.3)$$

Аналогично предыдущему разделу дробь $\left(1 - \varepsilon e^{-\frac{E-\mu}{kT}}\right)^{-1}$ можно представить как сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1 - \varepsilon e^{-\frac{E-\mu}{kT}}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n e^{-\frac{n(E-\mu)}{kT}},$$

где так как $|v| \leq 1$, должно выполняться условие $e^{-\frac{E-\mu}{kT}} < 1$, т.е. $\mu < E_0$ — для любой частицы.

Таким образом, независимо от того какой статистике подчиняется квантовый релятивистский идеальный газ его средняя плотность чисел частиц определяется следующим образом:

$$n = 4\pi \frac{g}{h^3} \int_0^{\infty} p^2 e^{-\frac{E-\mu}{kT}} \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \epsilon^s e^{-\frac{s(E-\mu)}{kT}} \right] dp. \quad (3.6.4)$$

Для вычисления этого интеграла используем опыт приобретенного нами для нахождения уравнения состояния некантового релятивистского идеального газа Максвелла — Больцмана (смотрите раздел 2.7) и полагаем, что $u = \frac{v}{c} = \text{th} \chi$. Тогда используя связь между энергией и импульсом релятивистской частицы с ее скоростью имеем:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \text{ch} \chi. \quad (3.6.5)$$

$$p = \frac{Ev}{c^2} = mc \text{sh} \chi. \quad (3.6.6)$$

Подставляя найденные выражения для энергии и импульса частиц в (3.6.4) получаем следующее интегральное выражение

$$n = 4\pi \frac{g}{h^3} (mc)^3 \int_0^{\infty} dx \text{sh}^2 \chi \text{ch} \chi e^{-\theta \text{ch} \chi} \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \epsilon^s e^{-s\theta \text{ch} \chi} \right], \quad (3.6.7)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения для отношения энергии покоя частицы и тепловой энергии kT

$$\frac{mc^2}{kT} = b, \quad (3.6.8)$$

а также для отношения химпотенциала и тепловой энергии kT

$$\frac{\mu}{kT} = \theta. \quad (3.6.9)$$

Далее учтем, что (смотрите первую и вторую главу монографии)

$$\int_0^{\infty} dx x h^2 x e^{xv} = \frac{k_1(x)}{x}. \quad (3.6.10)$$

Таким образом, средняя плотность чисел частиц любого газа определяется следующим компактным и красивым выражением:

$$n = 4\pi \frac{g}{h^3} (mc)^3 \left[e^{k_1(b)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\theta} \frac{k_1[(n+1)b]}{(n+1)b} \right]. \quad (3.6.11)$$

Далее полагаем, что для всех элементарных частиц заполнивших Вселенную химпотенциал равен нулю, т.к. химпотенциал является характеристикой термостата (в данном случае Вселенной), а не отдельных находящихся с ним в равновесии КРИГ – он одинаковый для всей системы. Поскольку для фотонов μ равен нулю, то и для КРИГ $\mu = 0$. Из предыдущего выражения при $\theta = 0$ получаем:

$$n = \frac{4\pi g}{h^3} (mc)^3 \frac{1}{b} \left[k_1(b) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{k_1[(n+1)b]}{n+1}} \right], \quad (3.6.12)$$

которая является сохраняющимся для каждого сорта квантового релятивистского идеального газа независимо от его статистики, если $\mu = 0$ что было показано в работах [156,174]. Следовательно, при этом сохраняется и суммарная средняя плотность чисел частиц во Вселенной.

Теперь конкретизируя статистику квантовых релятивистских идеальных газов получаем, что их средняя плотность чисел частиц определяются следующими выражениями:

$$n_{\text{ФТ}} = \frac{4\pi g_{\text{ФТ}}}{h^3} \frac{(mc)^3}{b} \left[k_1(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_1[(n+1)b]}{n+1} \right], \quad (3.6.13)$$

$$n_{\text{БЭ}} = \frac{4\pi g_{\text{БЭ}}}{h^3} (mc)^3 \frac{k_1(b)}{b}, \quad (3.6.14)$$

$$n_{\text{КРИГ}} = \frac{4\pi g_{\text{КРИГ}}}{h^3} \frac{(mc)^3}{b} \left[k_1(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1[(n+1)b]}{n+1} \right]. \quad (3.6.15)$$

Здесь принято очевидная сокращенная запись соответствующих статистик: Ферми-Дирака (ФД), Максвелла – Больцмана (МБ) и Бозе – Эйнштейна (БЭ).

Особо подчеркиваем, что полученные здесь результаты носят также и общезначимое значение как для фотонного газа, так и для идеального газа любых бозонов и фермионов, так как, когда их средняя плотность чисел частиц определяется температурой, требование отличия от нуля химического потенциала не является необходимым [68,105]. Проще говоря, когда возбуждение квазичастиц (или рождение частиц, говоря в общем случае) обусловлено температурой (например, как фотоны теплового излучения) их плотность чисел частиц нельзя считать заданным или фиксированным, как например, концентрацию электронов в металле или сверхпроводнике.

Естественно заслуживает особый интерес поведение средней плотности чисел частиц различной массы при заданной температуре, поскольку в условиях теплового равновесия вся система квантовых релятивистских идеальных газов имеет одну и ту же температуру.

Начнем свой анализ как всегда с наиболее простого случая. Как видно из последних выражений – это квантовый релятивистский идеальный газ Максвелла-Больцмана.

Учитывая асимптотики функции Бесселя второго порядка $\lambda_2(b)$ выражаемые формулами (3.4.24) и (3.4.28) на основе соотношения (3.6.14) получаем, что

$$n_{MB} = \frac{4\pi g_s}{h^3} (mc)^3 \frac{2}{b^3} = 4\pi g_s \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \cdot 2, \quad (3.6.16)$$

которая соответствует средней плотности чисел частиц квантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана в безмассовом или, что, то же самое в ультрарелятивистском пределе, т.е. при $b \rightarrow 0$.

В обратном нерелятивистском пределе (или образно говоря для сверхтяжелых частиц) т.е. $b \gg 1$ имеем

$$n_{\text{лк}} = \frac{4\pi g_0}{h^3} (mc)^3 \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-\dots} = 4\pi g_0 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} b^{-\frac{1}{2}} e^{-\dots} \quad (3.6.17)$$

Следовательно, сопоставляя полученные выражения придем к выводу, что при заданной равновесной температуре средняя плотность чисел частиц квантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана определяется вкладом наилегчайших частиц т.е. безмассовыми частицами.

Теперь перейдем к анализу средней плотности чисел частиц идеального газа бозонов подчиняющихся статистике Бозе -Эйнштейна на основе (3.6.15). Опять учитывая выше указанные асимптотики функции Бесселя второго порядка $J_2(b)$ получаем, что

$$n_{\text{боз}} = \frac{4\pi g_0}{h^3} \frac{(mc)^3}{(b)^3} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right] = 4\pi g_0 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \cdot 2S_1$$

Это соответствует ультрарелятивистскому пределу, т.е. случаю $b \rightarrow 0$.

Далее найдем сумму:

$$S_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2),$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана в точке $s = 2$. $\zeta(2) = 1,6449 \dots$

Следовательно, учитывая последнюю сумму получаем, что

$$n_{\text{боз}} = 4\pi g_0 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \cdot 2\zeta(2), \quad (3.6.18)$$

которое в точности соответствует средней плотности чисел безмассовых газов бозонов, а также фотонов [6,7,156,174]. Подчеркиваем, что эти результаты были получены ранее только при $b=0$, рассматривая безмассовые бозоны как «особый» газ. Здесь впервые они получены в пределе $b \rightarrow 0$ на основе точной формулы (3.6.15).

В обратном, т.е. нерелятивистском пределе $mc^2 \gg kT$ получаем, что

$$n_{\text{лк}} = 4\pi g_0 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} b^{-\frac{1}{2}} e^{-\dots}, \quad (3.6.19)$$

которое естественно, как и следовало ожидать, совпадает с известными результатами (смотрите, например, [68], [105]) справедливые только в этом пределе.

Наконец исследуем среднюю плотность чисел газы фермионов на основе (3.6.13). В ультра релятивистском пределе $b \ll 1$ или $b \rightarrow 0$ получаем, что

$$n_{\text{ФЛ}} = \frac{4\pi g_{-1}}{h^3} \frac{(mc)^3}{(b)^3} \cdot 2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3} \right] = 4\pi g_{-1} \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \cdot 2S_2.$$

Далее найдем сумму

$$S_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} = \frac{3}{4} \zeta(3).$$

Следовательно, учитывая последнюю сумму и подставляя ее в предыдущее выражение получаем, что

$$n_{\text{ФЛ}} = 4\pi g_{-1} \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \cdot 2 \frac{3}{4} \zeta(3), \quad (3.6.20)$$

которое в точности соответствует средней плотности чисел безмассовых газы фермионов [156,174] – полученный ранее в литературе только в «особом» случае $b=0$.

В обратном т.е. нерелятивистском пределе, как и в случае газа бозонов получаем, что

$$n_{\text{ФЛ}} = 4\pi g_{-1} \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} b^{\frac{3}{2}} e^{-b}, \quad (3.6.21)$$

которое переходит к результату статистики Максвелла – Больцмана даваемый формулой (3.6.17), подтвердив тем самым, что это статистика правильно описывает поведение частиц в очень большом числе практически важных случаев, с которыми наиболее часто приходится встречаться. Этим объясняется важное значение этого распределение в статистической физике. Но мы, как это следует из вышеприведенных результатов (3.6.16), (3.6.18) и (3.6.20), доказали его применимость также и

в ультрарелятивистском случае, впервые в физической литературе, путем предельного перехода к безмассовому пределу.

Таким образом, мы приходим к важному заключению, что средняя плотность чисел частиц квантовых релятивистских идеальных газов, подчиняющихся статистикам Максвелла-Больцмана, Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна при любом значении параметра b выражаются формулами (3.6.13) – (3.6.15) когда она определяется равновесной температурой системы, а не является заданной. Коэффициенты же g_{-1}, g_0, g_1 и $2 \cdot 2\zeta(3)$ и $\frac{3}{4} \cdot 2\zeta(3)$ показывают спиновую степень свободы частиц и статистику которой подчиняется квантовый релятивистский идеальный газ, т.е. отражает специфику его частиц.

Теперь возвращаясь к вопросу об определении суммарной средней плотности частиц во Вселенной замечаем, что она в основном определяется вкладом безмассовых частиц. Массивные (или сверхмассивные) частицы (разумеется по сравнению с энергией покоя частиц формировавшие первичное космическое излучение $m_0 c^2 = 1.865 \text{ кТ}_0$) вносят пренебрежимо малый экспоненциальный вклад в эту сумму (для всех трех статистик). Или другими словами их влияние на процессы происходящие во Вселенной не существенно и они объясняют сверхмалые флуктуации суммарной плотности чисел частиц во Вселенной. В указанную сумму следует добавить и вклад вносимый частицами формировавшие реликтовое излучение, т.е.

$$n_{\text{лир}} = \frac{4\pi g_s (mc)^3}{h^3} \frac{k_2(b_s)}{b_s} = 4\pi g_s \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \cdot b_s^2 k_2(b_s), \quad (3.6.22)$$

поскольку для этой частицы она имеет величину

$$n_{\text{лир}} = 4\pi g_s \left(\frac{kT}{hc}\right)^3, \quad (3.6.23)$$

так как при $h_0 = 1.865$ соответствующий минимальной наблюдаемой максимальной спектральной интенсивности первичного космического излучения $h_0^2 k_1(h_0) = 1.0327$ т.е. практически равна единице.

Таким образом, учитывая что

$$\kappa T_0 = m_0 c^2, \quad (3.6.24)$$

мы приходим к выводу, что величина $4\pi \left(\frac{\kappa T}{hc}\right)^3$ определяющая вклады всех бозонов и фермионов с нулевой массой является инвариантом, так как, энергия покоя любой частицы согласно специальной теории относительности является релятивистски – инвариантной. Обозначая эту характерную плотность чисел частиц худонов-боже частиц формировавших первичное космическое излучения через n_0 и учитывая, что равновесная температура рождения Вселенной $T_0 = 6.09 K$ получаем

$$n_0 = 4\pi \left(\frac{\kappa T}{hc}\right)^3 = 951,8 \frac{1}{\text{см}^3}. \quad (3.6.25)$$

Так как реликтовые фотоны являются бозонами со спиновым степеней свободы $g_\gamma = 2$ согласно (3.6.18) средняя плотность чисел частиц реликтовых фотонов при равновесной температуре Вселенной $T_0 = 6,09 K$ равна

$$n_0 = 4576,2544 \text{ см}^{-3}.$$

Тогда учитывая, что

$$\frac{n_\gamma}{n_0} = \left(\frac{T_\gamma}{T_0}\right)^3, \quad \frac{T_\gamma}{T_0} = 0,4477, \quad (3.6.26)$$

получаем $n_\gamma = 410,6496 \text{ см}^{-3}$.

Найденная нами чисто аналитическим путем это значение близко к ее экспериментально определенной величине

$$n_\gamma = 412 \pm 2 \text{ см}^{-3}$$

полученная на основе данных спутника COBE (Cosmic Background Explorer), специально построенный для исследования космического фонового излучения [216-219].

Воодушевленные этим невероятным даром судьбы – это по другому объяснить совершенно невозможно, найдем плотность средней энергии и давлению квантового релятивистского идеального газа, которые необходимы, как это было показано во второй главе, для получения его уравнения состояния.

Плотность средней энергии

Начнем с нахождения плотности средней энергии. Так как число частиц в единице объема имеющие импульсы заключенные в промежутке $p, p + dp$ равно

$$dn_p = \frac{g}{h^3} f(p) 4\pi p^2 dp, \quad (3.6.27)$$

а энергия релятивистской частицы определяется формулой

$$E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}, \quad (3.6.28)$$

мы получаем следующее интегральное выражение для ее определения:

$$\rho = 4\pi \frac{g}{h^3} \int_0^\infty E(p) f(p) p^2 dp. \quad (3.6.29)$$

Считаем излишним подчеркнуть, что это просто обобщение формулы (2.7.6) на случай квантового релятивистского идеального газа.

Далее воспользовавшись предыдущим результатом (3.6.11) при получении выражения для средней плотности чисел частиц квантового релятивистского идеального газа и учитывая (3.6.5)-(3.6.6) получаем

$$\rho = 4\pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \cdot kT^4 e^{\alpha} \int_0^\infty dx x h^{-1} x c h^2 x c^{-4} e^{-4x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} e^{-4nx} \right]. \quad (3.6.30)$$

Теперь учитывая, что $ch^{-1}x = 1 + h^{-1}x$ с помощью (3.6.30) получаем

$$\rho = 4\pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \cdot kT b^4 e^\theta (I_1 + I_2). \quad (3.6.31)$$

Здесь I_1 выражает следующий интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty dx x h^2 x \left[e^{-bx} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n e^{n\theta} e^{-(n+1)bx} \right]. \quad (3.6.32)$$

Интеграл I_2 тоже записывается подобным образом

$$I_2 = \int_0^\infty dx x h^4 x \left[e^{-bx} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n e^{n\theta} e^{-(n+1)bx} \right]. \quad (3.6.33)$$

Далее воспользуемся, тем, что

$$\int_0^\infty dx x h^{2n} x e^{-bx} = (2n-1)! \frac{k_n(\varepsilon)}{b^{2n}}, \quad (3.6.34)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Таким образом, плотность средней энергии квантового релятивистского идеального газа определяется следующим выражением

$$\rho = 4\pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \cdot (kT) b^4 e^\theta \times \left\{ \frac{k_1(b)}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n e^{n\theta} \cdot \frac{k_2[(n+1)b]}{(n+1)b} + 3 \cdot \frac{k_1(b)}{b^2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n e^{n\theta} \cdot \frac{k_2[(n+1)b]}{(n+1)^2 b^2} \right\}, \quad (3.6.35)$$

которое справедливо независимо от того, какой статистике подчиняется частица этого газа.

Теперь вернемся к анализу плотности средней энергии во Вселенной, и полагаем, что $\theta = 0$, т.е. $\mu = 0$, которое было обосновано при исследовании средней плотности чисел частиц квантового релятивистского идеального газа, когда она определяется равновесной температурой в системе.

Следовательно, в этом случае конкретизируя индекс статистики частиц квантового релятивистского идеального газа, получаем следующие выражения для плотности средней энергии:

$$\rho_{01} = 4\pi g_{-1} \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \cdot (kT)b^4 \times \left\{ \frac{k_1(b)}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{k_1[(n+1)b]}{(n+1)b} + 3 \cdot \frac{k_2(b)}{b^2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{k_2[(n+1)b]}{(n+1)^2 b^2} \right\} \quad (3.6.36)$$

$$\rho_{02} = 4\pi g_{-1} \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \cdot (kT)b^4 \cdot \left\{ \frac{k_1(b)}{b} + 3 \cdot \frac{k_2(b)}{b^2} \right\} \quad (3.6.37)$$

$$\rho_{03} = 4\pi g_{-1} \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \cdot (kT)b^4 \times \left\{ \frac{k_1(b)}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1[(n+1)b]}{(n+1)b} + 3 \cdot \frac{k_2(b)}{b^2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_2[(n+1)b]}{(n+1)^2 b^2} \right\} \quad (3.6.38)$$

Здесь $g_{-1} \cdot g_0$ и g_1 выражает спиновую степень свободы соответствующей статистики.

Естественно, выражения для средней плотности чисел частиц и энергии может быть записано в единой унифицированной форме, что мы и будем делать после нахождения выражения давления квантового релятивистского идеального газа.

Теперь исследуем поведения плотности средней энергии квантовых релятивистских идеальных газов определяемые последними выражениями в нерелятивистском пределе т.е. при $mc^2 \gg kT$ (или в случае сверхтяжелых частиц), что соответствует очень большим значениям параметра b ($b \gg 1$).

Тогда учитывая асимптотики модифицированной функции Бесселя первого и второго порядка (3.4.27), (3.4.28) с помощью выражений (3.6.36)-(3.6.38) получаем, что плотность средней энергии для статистик Максвелла-Больцмана, Ферми - Дирака и Бозе - Эйнштейна пропорциональны следующему множителю

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{b^2} e^{-b}, \quad (3.6.39)$$

которая показывает, образно говоря, экспоненциальную «подавления» вкладов нерелятивистских частиц в плотность средней энергии.

В обратном, т.е. ультрарелятивистском пределе (или для наилегчайших частиц) учитывая асимптотические формулы (3.4.24) получаем, что средняя плотность энергии определяется следующими выражениями ($b \ll 1$ или $b \rightarrow 0$)

$$\rho_{\text{из}} = 4\pi g_0 \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 (kT)^6 = 6g_0 A. \quad (3.6.40)$$

$$\rho_{\text{боз}} = 6g_{-1} A \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^4} \right], \quad (3.6.41)$$

$$\rho_{\text{фер}} = 6g_{+1} A \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} \right]. \quad (3.6.42)$$

Далее найдем эти суммы обычным образом

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^4} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4} = (1-2^{-4})\zeta(4) = \frac{7}{8}\zeta(4). \quad (3.6.43)$$

Последняя сумма тоже находится аналогичным путем

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \zeta(4), \quad (3.6.44)$$

где $\zeta(4)$ — значение дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при $S=4$ равно

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1,082323.. \quad (3.6.45)$$

Следовательно, плотность средней энергии газов бозонов и фермионов ультрарелятивистских частиц определяются идентичным образом, согласно следующим формулам

$$\rho_{\text{боз}} = 6g_{-1} A \cdot \frac{7}{8} \zeta(4), \quad (3.6.46)$$

$$\rho_{\text{фер}} = 6g_{+1} A \cdot \zeta(4). \quad (3.6.47)$$

Отсюда следует, что как в случае средней плотности чисел частиц в плотность средней энергии основной вклад вносят ультрарелятивистские безмассовые бозоны и фермионы. Эти результаты полученные нами предельным переходом совпадают с ранее известными результатами

(смотрите, например, [68], [105]), справедливые только при $b = 0$ т.е. по выражению их авторов в «особом» случае т.е. для безмассовых бозонов и фермионов.

Давление квантовых релятивистских идеальных газов (КРИГ)

Теперь мы перейдем к нахождению ранее обещанной формулы для давления квантового релятивистского идеального газа.

Для этого нам достаточно найти квантовое обобщение выражения давления для релятивистских идеальных газов (2.7.8) учитывая связь между энергией и импульсом релятивистской частицы с ее скоростью (3.6.5), (3.6.6) и (3.6.28). В результате такого обобщения получаем следующее выражение для давления любого квантового релятивистского идеального газа

$$P = \frac{4\pi}{3} \frac{g}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{p^3 c^2}{E(p)} f(p) p^2 dp. \quad (3.6.48)$$

Далее воспользовавшись соотношениями (3.6.5), (3.6.6) и учитывая ранее полученные результаты при нахождении плотности средней энергии, получаем для давления КРИГ следующее интегральное выражение

$$P = \frac{4\pi^2}{3} g b^3 \int_0^{\infty} dx \sinh^3 x \left[e^{-bx} + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n e^{n\epsilon} e^{-b(n+1)x} \right]. \quad (3.6.49)$$

Сравнивая последнее выражение с (3.6.33) сразу получаем учитывая (3.6.35) следующее общее выражение для давления любого квантового релятивистского идеального газа

$$P = \frac{4\pi}{3} g e^{\epsilon} b^3 \left\{ 3 \frac{k_1(b)}{b^2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n e^{n\epsilon} \frac{k_1[(n+1)b]}{(n+1)^2 b^2} \right\}. \quad (3.6.50)$$

Уравнение состояния КРИГ

Воспользовавшись полученными выражениями для плотности средней энергии и давления квантового релятивистского идеального газа (3.6.35) и (3.6.50), получаем следующее выражение

$$p - 3P = Ag_0^2 b^3 \left\{ \frac{k_1(b)}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \frac{k_1[(n+1)b]}{(n+1)b} \right\}, \quad (3.6.51)$$

которое представляет собой уравнение состояния квантового релятивистского идеального газа, связывающее его давление, плотность средней энергии и его температуру. Это на самом деле есть обобщения для квантового релятивистского идеального газа соотношений (2.7.10) и (2.7.18), полученного нами ранее для неквантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана. Особо подчеркиваем, что любой квантовый релятивистский идеальный газ подчиняющийся этому уравнению состояния находится и в состоянии равновесия, поскольку оно получено на основе стационарного инвариантного распределения. В противном случае ни какого стационарного распределения не существует т.е. не имеют место ни распределения Максвелла - Больцмана, ни распределения Ферми - Дирака и ни распределения Бозе - Эйнштейна.

Теперь опять возвращаясь к нахождению давления квантовых релятивистских идеальных газов наполнивших Вселенную полагаем, что $\theta=0$ т.е. $\mu=0$. Тогда из (3.6.50) получаем следующие выражения для давлений КРИГ соответствующие статистикам Ферми - Дирака, Максвелла - Больцмана и Бозе - Эйнштейна:

$$P_{FD} = Ag_0 b^3 \left\{ k_1(b) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k_1[(n+1)b]}{(n+1)^2} \right\}, \quad (3.5.52)$$

$$P_{MB} = Ag_0 b^3 k_1(b). \quad (3.6.53)$$

$$P_{BE} = Ag_0 b^3 \left\{ k_2(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_2[(n+1)b]}{(n+1)^2} \right\}. \quad (3.6.54)$$

Отсюда следует, что для нерелятивистских квантовых идеальных газов, т.е. когда $mc^2 \gg kT$ (или сверхтяжелых частиц) давление будет пропорциональным следующему множителю

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} b^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu}{kT}},$$

которая показывает их экспоненциально малый вклад, вносимый в суммарное давление.

Для ультра - релятивистских (или обратно говоря- световых) безмассовых частиц, учитывая, что при $b \rightarrow 0$, $b^2 k_2(b) \rightarrow 2$ получаем

$$P_{ФД} = 2Ag \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \right]. \quad (3.6.55)$$

$$P_{МБ} = 2Ag. \quad (3.6.56)$$

$$P_{БЭ} = 2Ag \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right]. \quad (3.6.57)$$

Далее учитывая, что сумма для статистики Ферми-Дирака равна $\frac{7}{8} \zeta(4)$, а для статистики Бозе - Эйнштейна равна $\zeta(4)$ - согласно выражением (3.6.43) и (3.6.44), получаем следующие красивые выражения

$$P_{ФД} = 2Ag \cdot \frac{7}{8} \zeta(4), \quad (3.6.58)$$

$$P_{МБ} = 2Ag, \quad A = 4\pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 (kT), \quad (3.6.59)$$

$$P_{БЭ} = 2Ag \zeta(4). \quad (3.6.60)$$

Следовательно, в каждой статистике основную вклад в давление квантового релятивистского идеального газа вносят опять безмассовые или световые частицы. Заметим также, что полученные нами предельным переходом $b \rightarrow 0$ выражения для давлений бозонов и фермионов переходят в их известные выражения (смотрите, например, [156], [174]) - которые получены только при $b = 0$.

И наконец, переходя к пределу $b \rightarrow 0$ в уравнении состояния квантовых релятивистских идеальных газов (3.6.51) и учитывая, $k_2(z) = 2 \cdot z^{-2}$ при $z \rightarrow 0$, приходим к выводу, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} (\rho - 3P) = 0. \quad (3.6.61)$$

Последнее выражение имеет прозрачный физический смысл и означает, что в этом пределе

$$P = \frac{\rho}{3}. \quad (3.6.62)$$

Следовательно, предельное уравнения состояния (3.6.62) верно для любого КРИГ и показывает, что наибольшее давление равно одной трети максимальной плотности средней энергии.

Подчеркиваем, что мы здесь впервые доказали, что давление создаваемое квантовым релятивистским идеальным газом в этом пределе точно компенсируется давлением излучения (или световых бозонов и фермионов). А это означает, что условия равновесия выражаемое уравнением состояния квантовых релятивистских идеальных газов выполняется всегда. Иными словами, они не нарушают условия равновесия и стационарности Вселенной.

Иллюстрируем вышесказанные на примере квантового релятивистского идеального газа Максвелла – Больцмана при равновесной температуре T_0 – рождения Вселенной и формирования первичного микрокосмического излучения. Далее учитывая, что $T_0 = 6.09 \text{ K}$ и $h_0 = 1.865 \text{ с}$ помощью соотношения (3.6.51) получаем

$$\rho_0 - 3P_0 = 4h_0^3 k_1(h_0), \quad A_0 = kT_0 n_0. \quad (3.6.63)$$

Далее учтем, как было показано, выше, что $n_0 = 950 \text{ см}^{-3}$ и $k_1(h_0) = 0.1592$.

Тогда получаем, что это разность порядка 80 пико Паскаль! Иначе говоря эта разность никак не может влияет на судьбу Вселенной и служит нам своеобразной памятью о ее рождении.

Заканчивая на этом изложение предложенный выше релятивистски-инвариантной статистической теории первичного космического излучения мы можем сделать следующие выводы на ее основе:

1. Температура 2.728 К соответствует минимальной наблюдаемой максимальной спектральной интенсивности реликтового излучения.

2. Анизотропия наблюдаемой температуры этого излучения может быть объяснено тепловым движением частиц формировавших первичного космического излучения на основе модели релятивистского идеального газа Максвелла – Больцмана.

3. На основе теории квантового релятивистского идеального газа доказана равновесность и неизменность Вселенной. Резюмируя релятивистски-инвариантную статистическую теорию первичного космического излучения, мы можем сказать, что при рождении Вселенной и формирования первичного космического излучения произошла конденсация безмассовых частиц квантовых релятивистских идеальных газов, с наибольшей плотностью средней энергии, чисел частиц и давления.

4. Согласно найденного чисто аналитическом путем средней плотности чисел реликтовых фотонов с последними наблюдательными данными служит неопровержимым доказательством того, что действительно равновесная температура Вселенной равно $T_0 = 2,728 \text{ К}$, максимальная средняя плотность чисел реликтовых фотонов $n_{\gamma} = 4576,2544 \text{ см}^{-3}$. Следовательно, средняя плотность чисел реликтовых фотонов наблюдаемых при $T_{\text{наб}} = 2,4727 \text{ К}$ будет порядка $n_{\gamma_{\text{наб}}} = 305,3229 \text{ см}^{-3}$.

5. Найденные выражения для средней n и ρ представляют интерес, в частности, при исследовании бозе – эйнштейновской конденсации идеальных газов и для газа со слабым межчастичным взаимодействием, когда максимальная энергия квантовых состояний $E_{\text{макс}}$ конечная величина (в статистическом пределе, как известно, считается, что число квантовых состояний равен бесконечности) и число конденсированных частиц ограничено. Как было показано в работе [189] (где предложен численный

рекуррентный способ определения средней плотности чисел частиц и плотности средней энергии конденсированных частиц по конечному числу состояний), это важно при температурах близких к критической температуре конденсации, т.е. когда отношение $\frac{E_{max}}{kT}$ - конечная величина.

Так как в распределении Бозе – Эйнштейна при осуществлении Бозе – Эйнштейновской конденсации (БЭК) химпотенциал μ должен равняться нулю [191,194], в него существенный вклад дают квантовые состояния с энергиями порядка $0 \leq E \leq 3kT_c$, (T_c критическая температура) т.е. при $\frac{E_{max}}{kT} \gg 1$ он экспоненциально убывает, нам достаточно ограничиться для нахождения этих характеристик БЭК первыми тремя слагаемыми в выражениях средней плотности чисел частиц и плотности средней энергии, не прибегая к численной процедуре их нахождения суммированием по большому (но конечному $n_{max} = 350$) числу квантовых состояний.

6. Предложенное уравнение состояния КРИГ, подчиняющихся ферми и бозе статистикам могут найти применение также при исследовании свойства кварк – глюонной плазмы, с учетом того, что кварки – фермионы, а глюоны – бозоны.

7. Кроме того уравнение состояния квантового РИГ Максвелла – Больцмана представляют интерес как точно решаемая модель при изучении уравнений состояния квантовых субатомных многочастичных статистических систем, где отношение тепловой энергии к энергии покоя частиц могут меняться от нуля до бесконечности.

Представив читателям возможность анализа статистических характеристики квантовых релятивистских идеальных газов при отличных от нуля химпотенциалов мы перейдем к их ознакомлению с еще одной независимой теорией. Это теория, по нашему мнению, наиболее близка по своему духу выше представленная нами теорию.

3.7. Конформно – инвариантная термализационная теория реликтового излучения

Эта теория как выше представленная разрабатывалась в течении долгого времени и ее основная суть изложена в работах [183-188]. Развита авторами эта теория является конформно-инвариантной версией стандартной Космологической Модели в квантовой теории поля и общей Теории относительности. Так как в настоящей монографии наше рассмотрение везде ведется в рамках специальной Теории относительности мы к сожалению не сможем дать детальное изложение этой теории.

В наиболее емком виде она представлена в работе [183] «Космологическое рождение векторных бозонов и реликтовое излучение» - скромное по названию, но богатой по содержанию.

Суть развитой теории в этой работе сводится к следующему. Изложенная в тетрадных представлениях эта теория достаточно громоздна (в математическом аспекте), но не лишена изящества – так как записанная в этих переменных космологические уравнения становятся конформно-инвариантными. В частности, записанные в относительных конформных переменных начальные условия становятся наблюдательными данными. Важно также, что в такой конформной форме уравнение описывающее эволюции Вселенной сводится к уравнению движения релятивистской частицы ничем не отличающейся в специальной Теории относительности.

В рамках этой теории появление векторных бозонов объясняется их космологическим рождением из вакуума. Затем спустя порядка времени релаксации – не превышающая время формирования плотности векторных бозонов за счет их космологического рождения, образуется своеобразная совокупность идеальных газов бозонов и фотонов реликтового излучения – продуктами их распада. Иначе говоря формируется коллектив бозе-частиц.

Далее авторы в качестве такой модели рассматривают вырожденный газ Бозе - Эйнштейна с функцией распределения

$$F(T_v, q) = \left[\exp \frac{\omega_v - m_v}{T_v} - 1 \right]^{-1}. \quad (3.7.1)$$

Отметим, что в течении этого раздела мы придерживаемся обозначения авторов, где применяется естественная система единиц: $[v] = [t] = [h] = 1$.

В выражении (3.7.1) функции распределения

$$\omega_v = \sqrt{m_v^2 + q_v^2}, \quad (3.7.2)$$

которое следует из соотношений Де-Бройля для энергии и импульса

$$E_v = \hbar \omega_v = \sqrt{m_v^2 c^4 + q_v^2 c^2} \quad (3.7.3)$$

в указанной системе единиц.

Зная функцию распределения вырожденного газа Бозе - Эйнштейна (3.7.1), а также вероятность космологического рождения (продольных и поперечных) векторных бозонов (которые определяются уравнениями Боголюбова) $[N^{j \pm}]$ можно определить плотность чисел термализованных бозонов при температуре T_v следующим образом

$$n_v(T_v) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 F(T_v, q) N^{j \pm}(q^{\parallel}, q^{\perp}), \quad (3.7.4)$$

что следует из закона умножения независимых вероятностей.

Далее проводя численное интегрирование авторы находили следующую зависимость плотности чисел векторных бозонов от температуры

$$n_v = \frac{T_v^3}{2\pi^2} \cdot 2.431. \quad (3.7.5)$$

Здесь температура векторных бозонов T_v есть инвариант в рамках рассматриваемой модели, которая согласно оценкам авторов порядка 3,41 К.

Затем температуру термализованных бозонов «наследуют» реликтовые фотоны – конечные продукты их распада, которые формируют первичное космическое излучение. Далее учитывая постоянства объема Вселенной в рассматриваемой модели эволюции, следует ожидать, что плотность чисел фотонов совпадает с плотностью чисел векторных бозонов т.е.

$$n_\gamma = \frac{T_b^3}{\pi^2} \cdot 2,404 = n_b, \quad (3.7.6)$$

Используя последнее приближенное равенство нетрудно определить температуру реликтового излучения T_γ

$$T_\gamma = 0,8T_b = 2,728 \text{ K} \quad (3.7.7)$$

которая, как подчеркивают авторы, удивительно близка к наблюдаемой температуре реликтового излучения. Этот результат и привела нас к заключению, что эту работу следует величать названием, которое стоит в наименовании этого раздела.

Еще одним, на наш взгляд, важным результатом этой работы является оценка отношения плотности чисел барионов и фотонов

$$\frac{n_b}{n_\gamma} = X_\sigma = 10^{-9}, \quad (3.7.8)$$

где X_σ – константа сверхслабого взаимодействия. Следовательно, влияние барионов на процесс эволюции Вселенной пренебрежимо мало и это ведет к барионной асимметрии во Вселенной.

Таким образом, в рамках теории предложенной авторами число рожденных векторных бозонов их космологическим появлением из вакуума может быть достаточным для объяснения происхождения материи во Вселенной: согласно результатам этой теории температура реликтового излучения – неизменна, а Вселенная – стационарна. И самое главное:

влияние видимой барионной материи на эволюцию Вселенной ничтожно мало.

Заканчивая последний раздел этой главы и всей монографии сопоставим следующие выражения относящихся к обсуждаемой здесь проблеме – температуре первичного микрокосмического излучения:

$$\left. \begin{aligned} T_M &= 0,4477 T_0 \\ T_V &= 0,8 T_V \end{aligned} \right\} \quad (3.7.9)$$

Здесь первое выражение вытекает из релятивистски – инвариантной статистической теории первичного космического излучения, где T_M соответствует температуре минимальной наблюдаемой максимальной спектральной интенсивности этого излучения. Второе выражение следует из конформно – инвариантной термализационной теории реликтового излучения, где T_V инвариантная температура газа векторных бозонов.

Теперь учитывая, что $T_M = T_V = 2,728 \text{ K}$ получаем из этих выражений следующую связь между температурой газа векторных бозонов T_V и равновесной температурой рождения Вселенной T_0 .

$$0,8 T_V = 0,4477 T_0. \quad (3.7.10)$$

Далее учитывая значения $T_0 = 6,09 \text{ K}$ – найденная в рамках релятивистски – инвариантной статистической теории первичного космического излучения, из последнего равенства получаем, что

$$T_V = 341 \text{ K},$$

которая находится в полном согласии с результатом конформно – инвариантной термализационной теории реликтового излучения.

И наоборот учитывая величину инвариантной температуры газа векторных бозонов $T_V = 341 \text{ K}$ – найденная в конформно – инвариантной термализационной теории реликтового излучения находим, что

$$T_0 = 6,09 \text{ K},$$

которая совпадает с результатом релятивистски – инвариантной статистической теории первичного космического излучения.

Таким образом, система выражений (3.7.9) устанавливает соответствия между выше приведенными теориями.

Следовательно, на основе приведенных сопоставлений мы приходим к выводу, что несмотря на различия используемых подходов и различной их интерпретации релятивистски – инвариантная статистическая теория первичного космического излучения и конформно – инвариантная термализационная теория реликтового излучения приводят к одинаковой по физической сути результату, а именно: температура первичного микрокосмического излучения – неизменна, а Вселенная – стационарна.

Комментарии и литературные указания

К разделу 3.1

Следуя Эйнштейновскому выводу формулы Планка для спектральной плотности теплового излучения, где учтено тепловое движения излучающих частиц, показано, что уравнения движения частиц аналогично броуновскому движению частицы под действием случайных толчков фотонов и эффективной силы сопротивления равновесного излучения.

Показано, что только при установлении статистического равновесия теплового излучения с идеальным газом существует стационарное распределение импульсов атомов - описываемое релятивистским распределением Больцмана и частотное распределение теплового излучения подчиняется формуле Планка.

К разделу 3.2

На основе специальной теории относительности показано, что происходят изменение излучаемых частот, направление их распространения, а также спектральной плотности этого излучения. Однако

его характерная интенсивность $B(\nu)/\nu^3$ (где $B(\nu)$ - спектральная плотность равновесного излучения) является релятивистски инвариантным.

В разделах 3.3-3.6 представлена релятивистски - инвариантная статистическая теория первичного космического излучения.

К разделу 3.3

На основе модели одномерного релятивистского идеального газа получена функция распределения наблюдаемых частот излучения, которая представляет собой обобщением полурелятивистского подхода Эйнштейна на полностью релятивистский случай. Анализируя выражения для спектральной интенсивности излучения найдено критическое значение отношения энергии покоя излучающих частиц и тепловой энергии, при котором она имеет свое возможное наименьшее максимальное значение.

К разделу 3.4

Найдены важнейшие характерные наблюдаемые температуры реликтового излучения, а именно: средняя и среднеквадратичная наблюдаемая температура. Получено важное заключение, что последняя в точности равно равновесной температуре при котором произошло первичное космическое излучение. На самом деле это и есть температура Вселенной.

К разделу 3.5

Проанализировав анизотропию наблюдаемой температуры реликтового излучения получена её угловая функция по направлениям наблюдения. На её основе найдено, что существует направление наблюдения, при котором наблюдаемая температура реликтового излучения имеет своё минимальное значение. Нахождение этого минимума позволяло также определить величины анизотропии наблюдаемой температуры реликтового излучения (названные нами первого и второго порядка), которые удивительно близки к наблюдательным данным, полученные экспериментальным путём с помощью прецизионных измерений со космических спутников.

К разделу 3.6

Представляя раннюю Вселенную как систему квантовых релятивистских идеальных газов элементарных частиц находящихся в статистическом равновесии найдены: средние плотности чисел частиц и плотности средней энергии этих газов, подчиняющихся распределениям Ферми-Дирака, Максвелла – Больцмана и Бозе-Эйнштейна. Это позволяло определить также уравнения состояния квантовых релятивистских идеальных газов. Получено важное заключение, что чрезмерная малость отношения чисел барионов и фотонов имеет статистическую природу и обусловлена их уровнем «заселенности» во Вселенной. Найдена максимальная средняя плотность чисел реликтовых фотонов во Вселенной.

Показано, что Вселенная находится в равновесии, поскольку каждый квантовый идеальный газ заполняющий её подчиняется своему уравнения состояния, которое есть следствия инвариантности и стационарности равновесных распределений Ферми-Дирака, Максвелла – Больцмана и Бозе-Эйнштейна.

К разделу 3.7

Представлена теория космологического рождения векторных бозонов и реликтового излучения предложенная Первушиным В.Н и его научной группой, названная нами исходя из её физической сути, конформно-инвариантной термализационной теорией реликтового излучения.

Показано, что несмотря на различие используемых подходов и различной их интерпретации обе теории приводят к одинаковой по физической сути результату: температура реликтового излучения – неизменна, а Вселенная – равновесная и стационарная.

Представленные результаты показывают, что все свойства ПКИ можно объяснять с равным успехом и не связываясь с эволюцией Вселенной, только на основе его релятивистски – инвариантной статистической природы.

Это есть главное заключение выше приведенных теорий, которые вместе можно называть инвариантной версией общей равновесной теории Вселенной – которую предстоит построить в будущем.

Вот так неожиданно закончилось наше путешествие – начатое с удивительного частицеподобного мира нелинейных волн, прошедшее через долину релятивистских идеальных газов и завершившийся в вечной Вселенной.

Мы будем искренно рады если это путешествие принесло Вам удовлетворение.

Желаем Вам доброго пути в науке – пути бесконечных немыслимых изысканий, которым нет конца...

Задачи к главе 3

1. Определите эффективный коэффициент сопротивления теплового излучения α (3.1.4), учитывая явный вид спектральной плотности излучения (3.1.15). Упростите его вид при очень малых и при очень больших значениях отношения энергии фотона $h\nu$ и тепловой энергии kT .
2. Используя формулу Планка (3.1.15) и учитывая

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}$$

где: θ - угол наблюдения излучения неподвижным наблюдателем, ν_0 - излучаемая частота излучения, найдите полную (т.е. интегрированную по всем частотам) интенсивность излучения в заданном направлении, на основе следующего выражения

$$I = \int_0^\infty d\nu M \nu$$

3. Функция распределения частот реликтового излучения рассеянных на газе электронов, которые имеют максвелловское распределение скоростей согласно Чандрасекару [157] записывается в следующем виде:

$$f(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-ax^2), \quad a = \frac{mc^2}{kT_e},$$

$$x = \pm \frac{v - v_0}{v_0} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \cos\alpha}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Здесь: mc^2 - энергия покоя электрона, kT_e - тепловая энергия, v_0 - частота излучения реликтовых фотонов соответствующая максимуму спектральной плотности (3.1.15) при температуре T_e , $0 \leq \alpha \leq \pi$ наблюдаемый угол рассеяния реликтового излучения, v - частота реликтовых фотонов рассеянных под углом α .

Используя выше приведенные выражения найдите $\langle v \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $Dv = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$ и $v_- = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ учитывая, что $kT_e \ll mc^2$ (так как, только при выполнении этого условия справедливо максвелловское распределение скоростей [см. вторую главу]).

4. Определите асимптотический вид угловой функции наблюдаемой температуры ПКИ $J(\mu)$ (3.5.6) находя коэффициентов a_0 , (3.5.8-0), a_1 , (3.5.8-1), a_2 , (3.5.8-2) в ультрарелятивистском ($b \ll 1$ или $m \rightarrow 0$) и нерелятивистском случае ($b \gg 1$ или $kT_e \ll mc^2$). Проанализируйте полученные Вами угловые функции в указанных пределах.

5. Разложите угловую функцию $J(\mu)$ (3.5.6) по полиномам Лежандра $P_l(\cos \theta)$, используя следующее выражение

$$J(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{l + \frac{1}{2}} C_l P_l(\mu)$$

Коэффициенты разложения C_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) найдите используя свойства ортогональности $P_l(\mu)$:

$$\int_0^\infty n_l(\mu) \nu_l(\mu) d\mu = \frac{2 \cdot \delta_l}{1+n_l+1}$$

Здесь: δ_l - символ Кронекера: равен нулю при $l \neq n$ и равен единице при $l = n$ ($l, n = 0, 1, 2, \dots$).

6. Используя решения предыдущей задачи определите среднюю и среднюю квадрата наблюдаемой температуры реликтового излучения. Исследуйте также дисперсию наблюдаемой температуры реликтового излучения в зависимости от параметра b .

7. Ограничиваясь первыми тремя слагаемыми (или говоря на «модном» ныне языке - трех - кластерным разложением) в каждой сумме ($n = 1, 2, 3$) определите:

а) среднюю плотность чисел частиц бозонов и фермионов (3.6.13); (3.6.15)

б) плотность средней энергии бозонов и фермионов (3.6.36); (3.6.38)

в) уравнения состояния бозонов и фермионов (3.6.51; $\epsilon = -1; +1$), при конечных значениях отношения энергии их частиц mc^2 и тепловой энергии kT . (Эта самая сложная задача в монографии или, может быть, теории квантового релятивистского идеального газа...).

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Кучим беҳад дема, Али эмассан.

Мағлуб бўлди оҳир, ҳатто, Искандар.

Даҳо жанг ҳамки, валий эмассан.

Ҳақ айтган: олдимида ҳамма баробар.

Не скажи: я – всемогущий, ты не Али,

Был повержен даже шах Искандари.

Может быть, ты – гений, но – не Пророк,

«Все предо мной равны»- Бог изрек.

Заканчивая монографию хотелось бы надеяться, что некоторые идеи и подходы развитие в ней могут найти свои применения для решения следующих научных проблем:

1. Природа токовых флуктуаций во высоко-температурных сверхпроводниках.
2. Конденсация частиц квантовых релятивистских идеальных газов.
3. Теория инвариантно-равновесной Вселенной.

История, представленных в монографии исследований берет свое начало с 1997 года, когда, как известно, отмечалось 2500 летие благородной Бухары, родины великой Авиценны. На кануне этого юбилея в Бухарском Университете был проведен международный семинар по магнетизму, в котором я впервые представил релятивистскую функцию распределения скорости броуновских флаксонов. Присутствующий на этом семинаре профессор Грановский (МГУ), игнорируя все правила научной этики прервал моё выступление и воскликнул, что «... подобный результат никогда и нигде не видел! Это просто замечательно!». И он убеждал меня продолжить эти исследования...

Однако, стимулирующим для меня была работа [35], в которой результаты теории и (численного) эксперимента отличались на порядок и более. По признанию самих авторов, они не смогли понять причину этого расхождения. Мне подумалось, что здесь кроется что-то необычное и неизвестное...

Поскольку целью моих исследований было нахождение дисперсии частоты излучения, производимого флаксонами, движущимися в джоузефсоновской линии передачи (ДЛП) мне необходимо было найти средне-арифметическую и средне-квадратичную скорость этих квантовых вихрей. В результате проведенных исследований я пришел к выводу, что выше приведенная, наиболее важная характеристика ДЛП, будет ограниченной при любом уровне токовых флуктуаций в системе. Это, на самом деле, было ещё одним уникальным свойством нелинейного механизма передачи информации с помощью солитонов.

Далее используя обратную аналогию между частицеподобными волнами и частицами вскоре удалось развить эти результаты для броуновского движения обычных частиц и одномерного релятивистского идеального газа. В частности, вычисления флуктуации частоты излучения частиц одномерного РИГ привели к определению функции распределения наблюдаемых частот излучения, которая оказалось существенно ... негауссовой!

Естественным концом первого этапа исследований было развитие теории РИГ броуновских флаксонов, которую я представил, как приглашенный доклад, в международном рабочем совещании «Вихри в ВТСП» (Ташкент, 2002). Результаты показали сверхнеобычность этого газа, так как, средняя кинетическая энергия и давление этого газа оказались ... нелинейной функцией температуры, а также зависели от энергии покоя флаксонов.

В завершающем этапе исследований хотелось обобщить полученные выше результаты для объяснения, не понятого до сих пор до конца, природы реликтового излучения. Здесь «открывающим» суть вещей для меня явилось Эйнштейновский вывод формулы Планка для равновесного теплового излучения, приведенный в очень старой, но не потерявшая своей ценности, книге Р.Беккера «Электронная теория».

Я понял, что для объяснения свойства первичного космического излучения надо объединить релятивистскую инвариантность распределения Планка для фотонов и статистику т.е. функцию распределения скоростей частиц формировавших этого излучения.

Эти результаты я докладывал в своем выступлении в международной конференции «Нелинейная динамика и фундаментальное взаимодействие» (Ташкент, 2004 г.). Но учитывая тематику конференции ограничивался только приведением выражений для наблюдаемой частоты реликтового излучения и функцией распределения скоростей частиц РИГ. Затем случившиеся «истории» с моей статьей в журналах Physical Review E и «Успехи физических наук» (сейчас не время и не место говорить об этом) привели меня к принципиальному заключению, что их не следует опубликовать нигде, не доводя до определенного логического конца...

В результате мне удалось разработать релятивистски-инвариантную статистическую теорию первичного космического излучения, которая впервые представлена в книге, которую Вы держите в своих руках...

Признаюсь, что, как это часто бывает, в подобных, неординарных случаях, мне пришлось не легко. Поэтому, считаю своим долгом, выразить свою глубокую признательность Гинзбургу В.Л. (ФИ РАН), Чиркину А.С. (МГУ) и Первушину В.Н. (ОИЯИ), за проявленные ими интерес к полученным результатам, частных обсуждений (которых я ценю и этого не скрываю, на три порядка выше, чем мнение не посвященной многомиллионной публики!) и конструктивных предложений. Они

вселяли в моей душе надежду, о благополучном завершении начатого мною дела (тогда, более десяти лет назад, конца этой работы не знал никто из нас. А кто знает что его ждет?!). Встречи с ними были самыми незабываемыми мгновениями времени моего пребывания в России в 2004-2005 г.г.

За результаты представленных в монографию и возможные ошибки отвечаю только я. На основе вышесказанного могу сказать, что релятивистски-инвариантную статистическую природу первичного космического излучения было суждено первым понять мне. Тому Бог свидетель...

Ваши мнения и предложения можете отправить мне по адресу: Узбекистан, г.Бухара, ул. К.Муртазиева, 15, Бухарский Инженерно Технологический Институт, Жумаев М.Р. (mrjumaev2011@mail.ru)

Работы на основе которых написана монография

A1. Джумаев М.Р., Носирова Н.К. Функция распределения скорости флюксона в длинном джозефсовском контакте с диссипацией и током смещения / Тезисы докл. межд. сем. по магнетизму (отв. ред. : Джумаев М.Р., акад. Мукимов К.М), Бухара, с. 20-21 (1997).

A2. Jumaev M.R. et al. Dynamics of fluxons on action dissipation and fluctuation / Abstracts of Intern. Conf. Act. Problem of modern nucl. phys. Bukhara, p. 167-168, eds. acad. Yuldashev B.S, et al (1999)

A3. Abdullayev F.Kh., Jumaev M.R., Tsoy E.N. Dynamics of fluxons in junctions under the noise current // Journ. of Techn. physics, V.45, p. 566-570, trans. Amer. Inst. of Physics (AIP) (2000).

A4. Jumaev M.R. The Doppler effect and form of the profile of radiation spectral lines / NATO Adv. Res. Workshop on Nonl. and Disorder Theory and

appl., Tashkent, Uzbekistan, 2-6 Oct. 2000, Proc. Publ. Kluwer Acad. Publishers, eds. Abdullayev F.Kh., e.a., p. 411-414 (2001).

A5. Jumaev M.R. Theory of relativistic ideal gas fluxons // Inv. Talk on Intern. Workshop Vortexies in High. Temp. Super. Cond. Tashkent, Uzbekistan, 21-22 May (2002), unpublished.

A6. Jumaev M.R. Theory of relativistic ideal gas for quasi and ordinary particles / NATO Adv. Res. Workshop on Nonlinear Dynamics and Fund. Interactions, 10-16 Oct., Tashkent, Uzbekistan, (2004); See Scient. prog. NDFI-2004 and Proc. publ. by Kluwer Acad. Publishers, eds. F.Khanna, D.Matrasulov, p. 155-156 (2006).

A7. Jumaev M.R. Nonlinear fluctuation mechanism for matter creation and reminds of the creation of the Universe // scientific reports of Bukhara University. N.1 p. 66-75 (2005).

A8. Джумаев М.Р. Эволюция случайных импульсов в нелинейных системах с флуктуирующими параметрами / Док. дисс., 138с (2002).

A9. Джумаев М.Р. Теория распространения и излучения солитонов в неоднородных и нестационарных средах / Канд. Дисс., 115 с. (1989).

A10. Заключительный отчет по научному проекту «Условия образования и свойства солитонных структур в нелинейных системах с переменными параметрами» ФФИ ГКНТ Р Узб. (с 01.06.1998 по 30.06.2000 г.) (2000).

A11. Отчет по научному проекту «Флуктуация температуры реликтового излучения», 16 с., ОИЯИ, Дубна (2004-2005 г.г) (неопубл.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Fluctuation phenomena: Disorder and nonlinearity/ Proc. ed. by A.R.Bishop e.a , World scientific, Singapore (1995).
2. Беккер Р. Электронная теория/ Изд. ОНТИ , 461 с (1936).
3. Ахмаюк С.А и др. Введение в статистическую радиофизику и оптику/ М. "Наука", 640 с (1981).
4. Паташинский А.З , Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов / М. "Наука" (1982).
5. Стэнли Г. Фазовые переходы и критические явления / М. "Мир" (1973).
6. Ахиезер А.И., Пелетменский С.В. Методы статистической физики/ М. "Наука", 368 с (1977).
7. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика / М. "Наука", 608 с (1982); Климонтович Ю.Л. Нелинейные броуновское движение // УФН. Т.164, в.8, с. 811-844 (1994).
8. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структур, устойчивости и флуктуаций / М. "Мир" (1973).
9. Ван Кампеи Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии/ М. "Высш. Школа ", 376 с (1990).
10. Stratonovich R.L. Theory of random noise/ N.Y Gordon and Breach (1981).
11. Risken H. The Fokker – Plank equation / Berlin, Springer (1984).
12. Horsthemke W., Lefever R. Noise – induced transitions/ Spr. Verl. Berlin (1984).
13. Бишоп А. Солитоны и физические возмущения. Солитоны в действии/ (под ред Л.А Островского) М "Мир" с. 72 – 102 (1981).

14. Bishop A.R. Chaos and solitons in nonlinear dissipative systems/ Proc "statistics and dynamics of nonlinear systems", Springer, p. 197 – 203 (1983).
15. Christiansen P.L. Aspects of model nonlinear dynamics: solitons and chaos phenomena / Radio science, v. 19 p. 1124 – 1130 (1984).
16. Nonlinear phenomena at phase transition and instabilities/ Proc. Ed. T.Riste, N.Y, plenum publ. corp. (1982).
17. Overman E.A., McLaughlin D.W., Bishop A.R. Coherence and chaos in the driven damped SG solitons. Measurement of solitons spectrum// Physica D, v.19 , p. 1 – 41 (1987).
18. Nonlinear physics: theory and experiment/ Proc. ed. Alfimto E. e.a world scientific Singapore, 582 p. (1996).
19. Likharev K.K Dynamics of Josephson junctions and circuits/ Gordon and breach, N.Y (1996).
20. Pagano S. Nonlinear dynamics in long Josephson junction/ Report N.S – 42 , the techn. Univ. of Denmark (1987).
21. Barone A. Paterno G. Physics and applications of the Josephson effect/ Wiley , N.Y (1982).
22. Stimulated effects in Josephsons devices/ Proc. ed. Russo M., Costabile G., World scientific, Singapore (1990).
23. Скотт Э. Волны в активных и линейных средах в приложении к электронике/ М. "Мир" 560 с. (1977).
24. Hennih D., Tsironis G.P wave transmission in nonlinear lattices// Phys Rep. v.307 p. 333 – 432 (1999).
25. Lattice effect in HTSC/ Proc. ed. Bishop A.R. e.a. world scientific, Singapore (1992).
26. Москвин А.С. Природа необычного физического поведения медных оксидов/ Препринт Уральск. ГУ, 180 с (1995).

27. Полушкин В.И. Основы для разработки высоко- температурных сквидовских систем в интегральном исполнении// Сверхпроводимость: ФХТ, т.6, в.5, с. 895 – 946 (1993).
28. Куприянов М.Ю., Лихарев К.К. Эффект Джозефсона в ВТСИ и структурах на их основе// УФН т.160 в.5 с.48 – 87 (1995).
29. Petrov M.I. e.a. Influence of transport current and thermal fluctuations on the resistive properties of HTSC + CuS composites// Phys. Solid State, v.41, N.6, p.881 – 886 (1999).
30. The new superconducting electronics/ Proc eds. Weinstock, Ralston R.W , Kluwer, Dordrecht (1993)
31. Wang L. e.a. Theory of $\frac{1}{f}$ magnetic flux noise in high - T_c Superconductors// Phys. Rev. Lett., V.64, p. 3094 – 3097 (1990).
32. Jonson M. e.a. Random telegraph signals in high – temperature superconductors// Phys. Rev. Bv. 42, p. 10792 – 10795 (1990).
33. Галперин Ю.М. О низкочастотных шумах в высокотемпературных сверхпроводниках// ФТТ, т.31, в.5, с.155–164. (1990)
34. Salerno M., e.a. Thermal sine – Gordon system in the presence of different types of dissipation// Phys. Rev. B, v. 38, N.1, p. 593 – 596 . (1988)
35. If F., Christiansen P.L. e.a. Simulation studies of radiation linewidth in circular Josephson junction fluxon oscillators/ Phys.rev. B, v.32, N.3. p. 1512 – 1518 . (1985)
36. Golubov A.A. e.a. Radiation linewidth of a long Josephson junction in the flux – flow regime// Phys.rev. B, v.54, в.5, p. 3047 – 3050. (1996)
37. Парментье П. Флюксоны в распределенных джозефсоновских системах/ Сб. ст “Солитоны в действии” (под ред. Л.А. Островского) М. “Мир” с. (1981).
38. Akoh H. e.a. Direct observation of fluxon reflection in a Josephson transmission line// Phys. Rev. B, v.35, p. 5357 – 5360.

39. Gorshkov K.A., Ostrovskiy L.A. Interaction of solitons in nonintegrable systems: direct perturbation method and application// *Phys. D*, N.1,2, p. 428 – 438.
40. Kaup D.J., Newell A.C. Solitons as particles and oscillators in slowly changing media/ *Proc. roy. soc., London*, v. A361, p. 413 – 446 (1978).
41. Abdullaev F.Kh. Theory of solitons in inhomogeneous media/ Wiley, Chichester (1994).
42. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering/ Cambridge univ. press, 516 p. (1991).
43. Kivshar Y.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems// *Rev. Mod. Phys.*, v.61, N.4, p. 763 – 915 (1989).
44. Маклафлин Д., Скотт Э. Многосолитонная теория возмущений/ Сб.ст. "Солитоны в действии" с. 1459 – 1466 (1985).
45. Alonso L.M. Effect on the radiation component to solitons motion. *Phys.Rev. D*, v.32, N. 6, p. 1459 – 1466 (1985).
46. Alonso L.M. Dynamic properties of the radiation component in the sine – Gordon equation// *Phys.lett A*, v.114, N.w6, p. 285 – 288 (1985).
47. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно – неоднородных средах/ М "Наука", 360 с. (1980).
48. Кубарев С.И., Пономарев О.А. Эффекты динамической связи в статистической физике/ М. "Наука", 141 с. (1992).
49. Питовранов С.Е., Четвериков В.М. Поправки к диффузионному приближению в стохастических дифференциальных уравнениях// *ТМФ*, т. 35, в.2 с. 211 – 223 (1978).
50. Hamiltonian systems with Stochastic behavior/ Proc. ed. Ford J., Cassati G., Springer, Berlin (1979).
51. Климонтович Ю.Л. Нелинейное броуновское движение// *УФН*, т. 35, в.2, с. 811 – 844 (1994).

52. Татарский В.И. Некоторые методы решения стохастических дифференциальных уравнений// Изв. ВУЗов, радиофизика, т.17, в.4, с. 570 – 595.
53. Боголюбов Н.Н. О стохастических процессах в динамических системах// Физ. ЭЦ и АЯ, т.9, в.4, (1978).
54. Боголюбов Н.Н. и др. Математические методы статистической механики модельных систем/ М. "Наука" (1989).
55. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике/ М. "Мир", с.1,2 (1990).
56. Bonomo R.P., Riggi F. The evolution of the speed distribution for a two – dimensional ideal gas: a computer simulation// Amer. Journ. Phys, v. 52, p 54 (1984)
57. Williams J.H., Joyce G. Equilibrium properties of a one – dimensional kinetic system// Journ chem. phys., V. 59, P. 741 (1973).
58. Беттх Дж., Пауэлл Дж. Распространение солитонов в одномерной цепочке при ударном сжатии/ Сб.ст. "Солитоны в действии", с 269 – 288 (1981).
59. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М.Абрамовича и И.Стигана М., "Наука", 832 с. (1979).
60. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике/ М. "Наука" (1978).
61. Bass F.G. e.a. Dynamics of solitons under random perturbations// Phys. Rep., v.157, p. 63 – 181 (1988).
62. Басс Ф.Г. и др. Солитон в поле случайных сил// ЖЭТФ, т.88, в.2, с 541 – 549 (1985)
63. Tsou E.N., Umarov B.A. Stochastic breaking by ac – bias of a bifluxon state in coupled long Josephson junction// Phys. Lett. A, N.235, p. 147 – 152 (1997).
64. Quintero N.R. e.a. Overdamped sine – gordon work in thermal bath// Phys. Rev. E, v.60, p.222 (1999).

65. Marchesoni F. Thermal ratchets in 1+1 dimensions// *Phys. Rev. Lett.* V.77, N.12, p. 2364 – 2367 (1996).
66. Filatrella G. et al. Inverse ac Josephson effect for a fluxon in a long modulated junction// *Phys. Lett. A*, N. 198, p. 43 – 50 (1995).
67. Ustinov A.V., Malomed B.A. Fluxon – fluxon collision testing by a dissipative spot// *Phys. Rev. B*, v.54, N.13, p.9047 – 9049 (1996).
68. Василевский А.С., Мулгановский В.В. Статистическая физика и термодинамика// М., "Проса.", 256 с. (1985).
69. Krasnov V.M. Anomalous fluxon properties of layered superconductors. [archive: cond – mat / 0109090], 23 p. (2001).
70. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах/ Киев, "Наукова Думка", 304 с. (1988).
71. Karpman V.I. Breather decay into fluxon – antifluxon pair and its transformation into bunched fluxon in a long Josephson junction// *Phys. Lett. A*, v.88, p.207 – 210 (1982).
72. Malomed B.A. Emission, quasi classical quantization and stochastic decay of sine Gordon solitons in external fields// *Physica D*, v. 27, p. 113 – 157 (1987).
73. Nozaki K. Stochastic instability of Sine – Gordon solitons// *Phys. Rev. Lett.*, V.49, p.1883 – 1885 (1983).
74. Legrand O. Kink – antikink dissociation and annihilation : a collective – coordinate description// *Phys. Rev. A*, v.36, p. 5068 – 5073 (1987).
75. Лихарев К.К., Ульрих Б.Т. Системы с Джозефсоновскими контактами/ Изд. МГУ, 447 с. (1978).
76. Фундаментальные проблемы ВТСП/ Сб. расш. тезисов I – II Межд. конф. " ФП ВТСП "(18 – 22 октября, 2004, Москва – Звенигород), 352 с. (2004).

77. Шадрин А.В. и др. Металлоксидные сверхпроводящие бикристаллические переходы с высокими критическими параметрами/ В сб [76], с. 317 – 318 (2004).
78. Лем Дж.Л. Введение в теорию солитонов/ М. "Мир" , 294 с. (1983).
79. Scott A. Nonlinear science : emergence and dynamics coherent structures/ Oxford univ. press (1999).
80. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи/ М., "Наука", 190 с. (1980).
81. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов/ М., "Наука", 528 с. (1986).
82. Abdullaev F.Kh. e.a. Evolution of randomly perturbed KDV solitons // *phys.Rev.E*, v.52,N.4, p. 3577 – 3583 (1995).
83. Abdullaev F.Kh., Abdumalikov A.A. Evolution of randomly perturbed Sine – Gordon kink// *Phys D*, 1859 , p. 1 – 8 (1998).
84. Jackson E.A. Perspective of nonlinear dynamics/ Cambridge Univ. press , v. 1 – 2 (1991).
85. Курин В.В., Пименов И.В. Квантовые шумы в сверхпроводниковых генераторах и распределенных Джозефсоновских переходах/ В сб [76], с. 132 – 133 (2004).
86. Борисенко И.В. и др. Сверхпроводниковый джозефсоновский детектор терагерцового диапазона, работающий при температуре жидкого азота/ В сб. [76], с. 265 – 266 (2004).
87. Булаевский Л.Н. и др. Излучение от движущейся решетки джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках/ В сб. [76], с.75 – 77 (2004).
88. Куинн И.А. Теория упругих сред с микроструктурой/ М., "Наука", с.416 (1975).

89. Krumhansl J.A., Schrieffer J.R. Dynamics and statistical mechanics of a one dimensional model Hamiltonian for structural phase transition// *Phys. Rev B*, v.11, p.3535 – 3545 (1975).
90. Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems/ *Cambr. univ press*, p.50 – 60 (1995).
91. Rasmussen K. e.a. Statistical mechanics of a discrete nonlinear systems// *Phys. Rev. Lett*, v.84, p.3740 – 3743 (2000).
92. Абдуллаев Ф.Х. Динамический хаос солитонов/ Ташкент, "Фан", 168 с. (1990).
93. Nonlinear science at the dawn of the 21-century/ *Proc. ed. Christiansen P.L., Soerenen M.P., Spr.Verlag, Berlin*(1999).
94. Захаров В.Е. Кинетическое уравнение для солитонов// *ЖЭТФ* т.60, в.3, с. 993 – 1000 (1971).
95. Baryachtar V.G. e.a. A kinetic equation for the kink – type solitons/ *Preprint N.82 – 166, 52 p. inst. Theor. Phys., Kiev*(1982).
96. Maki K. Classical Sine – Gordon limit of Bethe anstanz thermodynamics// *Phys. Rev. B*, v.33, p.3075 – 3080(1985).
97. Willis C.R., Boesch R. Effect of lattice discreteness on the statistical mechanics of a dilute gas of kinks// *Phys Rev B*, v.141, N.7, p.4570 – 4578 (1990).
98. Nonlinear coherent structures in physics and biology/ *Proc. ed. by Spatchek K.H., Mertens F.G., NATO ASI . 329 p. (1994).*
99. Instabilities and nonequilibrium structures/ *Proc. e.d. Zeler W., Kluwer, Dordrecht* (1997).
100. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля/ М., "Наука", 512 с. (1988).
101. U.B. Ya'akov. Relativistic Brownian motion and the spectrum of thermal radiation// *Phys. Rev. D*, V.23, P.1441 – 1450 (1981)

102. Baym C. e.a. The transition temperature of the dilute interacting Bose gas// *Phys. Rev. Let.*, V.83, p.1703 – 1706.
103. Wadati M., Kato G. Exact cluster expansions for a one dimensional delta-functions Bose gas/ *Proc of the Workshop "Nonl. and Dis. : Theory and appl"*, (Tashkent, UZB, 2 – 6 Oct. 2001), Kluwer Acad. Publ. p.351 – 364 (2001).
104. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика / М., "Наука" (1995).
105. Васильев А.В. Введение в статистическую физику / М., "Высшая школа", 272с (1980).
106. Synge J.L. The relativistic gas / North – Holland, Amsterdam (1957)
107. Cercignani C. Kremer G.M The Relativistic Boltzmann equation // *Birkhauser, Berlin* (2002)
108. Tolmen R.C. Relativity, thermodynamics and cosmology / Dover, N.Y. (1987)
109. De Groot S.R. e.a. Relativistic kinetic theory / North-Holland, Amsterdam (1980)
110. Zygadlo R. Free Brownian motion approach to the ideal gas of relativistic particles. // *Phys. Let. A*, 345, p. 323 – 329 (2005)
111. Chacon-Acosta G., Kremer G.M. Fokker-planck type equations for a simple gas and for a semi relativistic Brownian motion from a relativistic kinetic theory. // *Phys. Rev. E*, v.76 : 021201 (2007)
112. Kaniadakis G. Towards a relativistic statistical theory. // *Phys. A*, N.365, p.17 – 23 (2006)
113. Debbasch F. Equilibrium distribution function of a relativistic dilute perfect gas. // *Phys. A*, N.387, p.2443 – 2454 (2007)
114. Hakim R., Sivak H.D. Relativistical statistical mechanics, a brief overview. // *AIP conf. Proc.* 841, p.63 – 99 (2006)

115. Van Hees H., Rapp R. Thermalization of heavy quarks in quark - gluon plasma. // *Phys. Rev. C*, 71 (3):03490 (2005)
116. Паули В. Теория относительности / М., "Наука", 336с. (1983)
117. Eichler J., Meychof W.E. Relativistic atomic collisions. / Acad. Press, N.Y. (1995)
118. McGuire J.H. Multiple electron excitation, ionization and transfer in high-velocity atomic and molecular collisions / *Adv. In atom., mol. and opt.*, p.217-323 (1992).
119. Eichler J. Theory of relativistic ion-atom collisions. // *Phys. Rev.* v.193, p.167 - 277
120. Drake S.P, e.a. Chaos in special relativistic dynamics. *Phys. Rev. E*, v.53, p.1351
121. Хора Х. Физика лазерной плазмы /М. Энергоатомиздат. 272с. (1986)
122. Luzzi R. e.a. On the statistical foundations of irreversible thermodynamics / Teubner Verl. (1999)
123. Eu B.C. Nonequilibrium statistical mechanics / Kluwer, Dordrecht (1998).
124. Dixon W.G. Special relativity: the foundation of macroscopic physics / Camb Univ. Press. (1982)
125. Zubarev D.N, e.a. Statistical mechanics of nonequilibrium processes / Acad. Verl., Berlin, V.1,2 (1997).
126. Стратонович Р.А. Нелинейная неравновесная термодинамика / М. "Наука", (1985); англ. пер. Spr.-Verlag, Berlin (1992).
127. Plasma theory and nonlinear process in physics / Proc. ed. Baryakhtar V.G, e.a. World Scient, Singapore (1994).
128. Berejiani V.I., Mahajan S. Large amplitude localized structures in a relativistic electron - positron ion plasma / ICTP, Trieste, IC 94 - 67, 18 p. (1994)

129. Kates R. Kaup D.J Nonlinear evolution of Langmuir and electromagnetic pulse in a warm, unmagnetized plasma: modulational instability, integrability and self – focusing in 2 + 1 dimensions // *J. Plasma physics*, v.52 , p. 75 – 90 (1994)
130. Mukherjee J., Chowdhury A.R. Nonlinear Landau damping in relativistic plasma. // *J. Plasma physics*, v. 52, p. 55 – 74 (1994).
131. Umstadter D. Nonlinear Thomson and Compton Scattering in relativistic plasmas. / *Int. Quant. Electr. Conf. Moscow SU* , p. 20 (1994)
132. Lontana M. e.a. On the theory of relativistic electromagnetic solitons in hot multi – components plasmas / *Ibidem*, p. 32 (2008)
133. Grashin A.F., Efimenko A.D Super nonequilibrium thermodynamics in subatomic physics // *ЯФ*, т. 56, в. 11, с. 114 – 121 (1993)
134. Максвелл Дж.К. Пояснения к динамической теории газов. / В книгах “Основатели кинетической теории материи” (М. 1937); “Статьи и речи” (М. “Наука” 1968)
135. Больцман Л. Кинетическая теория материи / (М. 1956); “Статьи и речи” (М. “Наука” 1970)
136. Гиббс Д.Б. Основные принципы статистической механики / М. (1994).
137. Кирхгоф Г.Р и его исследования по тепловому излучению / *Труды Инс.* 110 – 156 (1960)
138. Ланжевен П. Избранные труды / М. (1960)
139. Планк М. Теория теплового излучения / М., ОНТИ (1935); *Термодинамика* / М. (1925)
140. Ферми Э. Термодинамика / Изд. Харьков Униа. (1973)
141. Эйнштейн А. Собрание научных трудов / М. “Наука” т. 1 – 4 (1965 – 1967).
142. Гельфер Я.М История и методология термодинамики и статистической физики / М. “Высшая школа” (1981)

143. Фейнман Р. Статистическая механика / М. "Мир" (1978)
144. Эренфест П. Относительность. Кванты, статистика / М., "Наука" (1972)
145. Лоренц Х.А. Статистическая теория в термодинамике / М., Гостехиздат (1935)
146. Силк Дж. Большой взрыв: рождение и эволюция Вселенной / М. "Мир" с. 371 (1982).
147. The very early universe / Proc. eds.¹ Gibbons G.W. e.a. Cambr. Univ. Press (1983).
148. Ryan M.P (Jr), Shapley L.C Homogenous relativistic cosmology / Princ. Univ. press. (1976).
149. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная теория / М., "Наука" (1984).
150. Шредингер Э. Пространственно - временная структура Вселенной / М., "Наука" (1986).
151. Bernstein J. Kinetic theory of the expanding Universe / Cambridge univ. press (1985); (2004).
152. Kolb E.W., Turner M.S. The early universe / Add - Wesley (1993).
153. Peebles P. Principles of physical cosmology / Princ. Univ. Press. (1993).
154. Долгов А.Д. и др. Космология ранней Вселенной / М. Изд. МГУ (1988).
155. Grib A.A Early expanding universe / St - Peterburg (1995).
156. R. Dominguez, Tenreiro Quiros R. An introduction to cosmology and partical physics / World Scien, Singapore (1988).
157. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии / М., ИЛ, 432 с. (1953).
158. Мейтленд А., Данн М. Введение в физику лазеров / М., "Наука" (1978).

159. Леонтович М.А. Введение в термодинамику и статистическую физику / М., "Наука" (1983).
160. Говорков А.Б. Теорема о статистике тождественных частиц // Физ ЭЧ и АЯ, т. 24, в.5, с. 1341 – 1413 (1993).
161. Tautz R.C. A new distribution functions for relativistic counter streaming plasma // Arxiv: 1003: 0825Y1 [arstroph. he] (2010).
162. Charon – Acosta G, e.a. On the manifestly covariant Juttner distribution and equipartition theorem // Arxiv: 0910. 1625 v.1., [cond – mat.stat – mech] (2009).
163. Weinberg S. Cosmology / Oxford Univ. Press (2008)
164. Pathria R.K. Statistical mechanics / Butt – hein. (2001)
165. Cubero D e.a Thermal equilibrium and statistical thermometers in special relativity // Phys. Rev. Let. 99, 170601 (2007)
166. Introduction to relativistic mechanics / World Sci. books.com / 7881, chapter. 1, p. 1 – 26 (1982).
167. Cosmic microwave background radiation challenges: 2010 – 2020/ lamda.gsfc.nasa/ gov.links/ experimental – sites.cfm
168. Schlikeiser R. Cosmic ray astrophysics / Berlin (2003)
169. Mazo R. M Brownian motion/ Oxford Sci. publ, Oxford (2002)
170. Zaslavskiy G.M Chaos, fractional kinetics and anomalous transport // Phys. Rep. 371, p. 461 – 580 (2002)
171. Сажин М.В Анизотропия и поляризация реликтового излучения. Последние данные // УФН, т. 174, в.2, с. 197 – 205 (2004)
172. Чернин А.Д Космический вакуум // УФН, Т. 171, в. 11, с. 1153 – 1175 (2001)
173. Current topics in Astrofundamental physics: the cosmic micro wave background / Proc. ed. Sanchez N.G., Dordrecht, Kluwer, Acad. Publ. (2001)
174. Borner G. The early universe: facts and fiction/ Spr. Verl. (2003)

175. Roos M. Introduction to cosmology/ John Wiley, Chichester (2003)
176. Peacock J.A Cosmological physics/ Cambridge univ. press (2003)
177. Narlikar J.V An introduction to cosmology/ Cambridge univ. press (2002).
178. Perkins D.H. Particle Astrophysics/ Oxford Univ. press (2009).
179. Peter P., Uzan J. Primordial cosmology/ Oxford Univ. press (2009).
180. Dodelson S. Modern cosmology/ Acad. Press, Elsevier (2003)
181. Komatsu E. e.a. Non – Gaussianity as a probe of the physics of the primordial Universe and the astrophysics of the low redshift Universe/ in “the astronomy and astrophysics decade survey 2010 of astronomy” p. 158 (2009).
182. Lawrence C.R Ongoing and future ground based and balloon – borne CMB temperature and polarization experiments. In book “CMB and physics of the early universe” (2006).
183. Pervushin V. N e.a Astrophysics in relative units as the theory of a conformal brane / Proc. of 25 – th. Int. Worksh. on Fund. Prob. of high energy phys. and field theory, v.2, p. 293 – 314 (2002).
184. Блашке В. и др. Космологическое рождение векторных бозонов и реликтовое излучение // ЯФ, т. 67, в.5, с. 1074 – 1086 (2004).
185. Проблемы калибровочных теорий / Дубна, ОИЯИ, 137 с. (2004).
186. Blashke D.B., e.a. Kinetic description of vacuum creation of massive vector bosons. P. 115 – 126 in [185] (2004).
187. Pervushin V.N , Skokov V.V. Kinetic description of fermion production in cosmology and QED. P. 131 – 136 in [185] (2004)
188. Pervushin V.N., Skokov V.V Conformal relativity: theory and observation // Int. conf. hadron str. (2004). J. Acta physica Slovacia , v. 55 (2005).

189. Трифонов Е.Д., Загуляев С.Н. О функции распределения частиц в Бозе – Эйнштейновском конденсате идеального газа // УФН , т. 180 , н.1 , с. 89 – 86 (2010)
190. Эйнштейн А. В собр. Тр.[141] , т.3 , с. 489 – 592 / (М. “Наука”) (1966)
191. Pitaevskii L., Stringari S. Bose – Einstein condensation / Oxford : Clur. Press (2003)
192. Landsberg P.T. Thermodynamics with quantum statistical illustration / N.Y, Interscience publ. (1961)
193. Fowler P.H. Statistical mechanics, the theory of the properties of matter in equilibrium / Cambr. Univ. press. (1936)
194. Abdullaev F.Kh. Nonlinear matter waves in cold quantum gases / Inter. Islamic univ. Malaysia , 261 p. (2005)
195. Prey E., Kroy K. Brownian motion : paradigm of soft matter and biological physics // Ann. Physik (Leipzig), 14, p. 20 – 50 (2005)
196. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения глазами физика / М., 528 с.(2002).
197. Эйнштейн А. Теория относительности (избр. работы)/ Ижевск, 205 с (2000)
198. Гиббс Дж.В. Основные принципы статистической механики/ М., РИЦ, 200 с (2002)
199. Zeilik M. Astronomy the evolving Universe / The Univ/ New Mex., 568 p (1991).
200. Лайтман А. и др. Сборник задач по теории относительности и гравитации / М. “Мир”, 535 с. (1979)
201. Beccatini F., Tinti L. The ideal relativistic rotating gas a perfect fluid with spin // Arxiv: 1012. 3063 v1 [physics. Class – ph] 14 dec. (2010)

202. Louis – Martinez D.J Classical relativistic ideal gas in thermodynamic equilibrium in a uniformly accelerated reference frame // Arxiv: 1012.3063 v1 [physics. Class – ph] 14 Dec. (2010).
203. Scott D., Smoot G.F. Cosmic microwave background / USB – LNL, 18 dec (2013).
204. Winstein B. The cosmic microwave background radiation. Center for cosm. physics, the Univ. of Chicago, Chicago, Illinois, 60637 (2010 and later).
205. Эддингтон А. Пространство, время и тяготение / Москва, УРСС, 224 с (2003).
206. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах / Пер. с немец., Москва-Ижевск, 256 с (2004).
207. Chernikov N.A Equilibrium distribution of the relativistic gas // Acta phys. Pol. V. 26 , p. 1069 – 1092 (1964)
208. Duviryuk A. e.a Classical relativistic system of charges. Hamiltonian description, form of dynamics and partition function // Cond. Mat. Phys, v.4 , p. 5 – 14 (2001).
209. Angst J. Poisson boundary of a relativistic diffusion in spatially flat Robertson – Walker space – times / Preprint (2010).
210. Frachi J., Le Jan Y. Curvature diffusion in general relativity / Preprint (2010).
211. Baillet I. A stochastic approach to relativistic diffusions // Ann. De L'inst. H.Poincare (2010)
212. Dowker F. Energy – momentum diffusion from space – time discreteness // Phys. Rev. D. 29:124047 (2009).
213. Debbasch F. A diffusion process in curved space – time // J. Mathem. Phys. v.45[7] : p. 2744 – 2760 (2004).
214. Debbasch F. e.a. Relativistic Ornstein – Uhlenback process // J. stat. phys, 88 {3 – 4}, p. 945 – 966 (1997).

215. Hakim R. A covariant theory of relativistic Brownian motion, local equilibrium // Journ. of Mathem. physics, v. 6, p. 1482 (1965).

216. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters / 51 p., arxiv: [astro-ph / 0302209](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0302209) v.3 (17 June, 2003).

217. First Year WMAP observations: the angular power spectrum / 44 p., arxiv: [astro-ph / 0302217](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0302217) v.1 (1 Feb., 2003).

218. Скулачев Д.П. Корреляция данных по анизотропии реликтового излучения в экспериментах WMAP и «Реликт-1» // УФН, т.180, в.4, с.389-392 (2010).

219. Клардор-Клейнротхаус Г.В. Астро-физика элементарных частиц / Глава 7. Космическое фоновое излучение, с.206-226, Дубна (2004).

220. Герштейн С.С. и др. Космологическая постоянная и пространство Минковского // физ. ЭЧ и АЯ, т.38, в.3, с.569-586 (2007).

ПРИЛОЖЕНИЕ

**Анизотропия первого и второго порядка наблюдаемой температуры
первичного космического излучения**

θ_1	θ_{11}	$\Delta T_1, K$	$\Delta T_2, K$
0,000000000	0,500000000	-5,68211808230E-05	2,88267819584E-08
0,500000000	1,000000000	-1,70441919686E-04	2,59427866167E-07
1,000000000	1,500000000	-2,83968972528E-04	7,20559791260E-07
1,500000000	2,000000000	-3,97324544230E-04	1,41208209198E-06
2,000000000	2,500000000	-5,10430900135E-04	2,33378412395E-06
2,500000000	3,000000000	-6,23210393018E-04	3,48538512779E-06
3,000000000	3,500000000	-7,35585490027E-04	4,86653431468E-06
3,500000000	4,000000000	-8,47478799588E-04	6,47681097320E-06
4,000000000	4,500000000	-9,58813098267E-04	8,31572459748E-06
4,500000000	5,000000000	-1,06951135758E-03	1,03827150366E-05
5,000000000	5,500000000	-1,17949677074E-03	1,26771526653E-05
5,500000000	6,000000000	-1,28869277932E-03	1,51983385756E-05
6,000000000	6,500000000	-1,39702309988E-03	1,79455047899E-05
6,500000000	7,000000000	-1,50441175045E-03	2,09178144947E-05
7,000000000	7,500000000	-1,61078307698E-03	2,41143622957E-05
7,500000000	8,000000000	-1,71606177963E-03	2,75341744934E-05
8,000000000	8,500000000	-1,82017293897E-03	3,11762093800E-05
8,500000000	9,000000000	-1,92304204209E-03	3,50393575563E-05
9,000000000	9,500000000	-2,02459500855E-03	3,91224422701E-05
9,500000000	10,000000000	-2,12475821618E-03	4,34242197740E-05
10,000000000	10,500000000	-2,22345852676E-03	4,79433797051E-05
10,500000000	11,000000000	-2,32062331159E-03	5,26785454834E-05
11,000000000	11,500000000	-2,41618047678E-03	5,76282747315E-05
11,500000000	12,000000000	-2,51005848853E-03	6,27910597141E-05
12,000000000	12,500000000	-2,60218639807E-03	6,81653277967E-05
12,500000000	13,000000000	-2,69249386656E-03	7,37494419252E-05
13,000000000	13,500000000	-2,78091118969E-03	7,95417011245E-05

13,5000000000	14,0000000000	-2,86736932217E-03	8,55403410161E-05
14,0000000000	14,5000000000	-2,95179990192E-03	9,17435343564E-05
14,5000000000	15,0000000000	-3,03413527414E-03	9,81493915925E-05
15,0000000000	15,5000000000	-3,11430851508E-03	1,04755961438E-04
15,5000000000	16,0000000000	-3,19225345563E-03	1,11561231468E-04
16,0000000000	16,5000000000	-3,26790470465E-03	1,18563128732E-04
16,5000000000	17,0000000000	-3,34119767204E-03	1,25759520383E-04
17,0000000000	17,5000000000	-3,41206859162E-03	1,33148214331E-04
17,5000000000	18,0000000000	-3,48045454368E-03	1,40726959908E-04
18,0000000000	18,5000000000	-3,54629347730E-03	1,48493448555E-04
18,5000000000	19,0000000000	-3,60952423239E-03	1,56445314525E-04
19,0000000000	19,5000000000	-3,67008656145E-03	1,64580135601E-04
19,5000000000	20,0000000000	-3,72792115106E-03	1,72895433839E-04
20,0000000000	20,5000000000	-3,78296964301E-03	1,81388676317E-04
20,5000000000	21,0000000000	-3,83517465525E-03	1,90057275913E-04
21,0000000000	21,5000000000	-3,88447980240E-03	1,98898592087E-04
21,5000000000	22,0000000000	-3,93082971606E-03	2,07909931688E-04
22,0000000000	22,5000000000	-3,97417006469E-03	2,17088549775E-04
22,5000000000	23,0000000000	-4,01444757328E-03	2,26431650451E-04
23,0000000000	23,5000000000	-4,05161004259E-03	2,35936387719E-04
23,5000000000	24,0000000000	-4,08560636811E-03	2,45599866342E-04
24,0000000000	24,5000000000	-4,11638655866E-03	2,55419142732E-04
24,5000000000	25,0000000000	-4,14390175462E-03	2,65391225842E-04
25,0000000000	25,5000000000	-4,16810424583E-03	2,75513078079E-04
25,5000000000	26,0000000000	-4,18894748911E-03	2,85781616228E-04
26,0000000000	26,5000000000	-4,20638612544E-03	2,96193712394E-04
26,5000000000	27,0000000000	-4,22037599672E-03	3,06746194951E-04
27,0000000000	27,5000000000	-4,23087416222E-03	3,17435849510E-04
27,5000000000	28,0000000000	-4,23783891454E-03	3,28259419900E-04
28,0000000000	28,5000000000	-4,24122979532E-03	3,39213609156E-04
28,5000000000	29,0000000000	-4,24100761044E-03	3,50295080525E-04
29,0000000000	29,5000000000	-4,23713444487E-03	3,61500458485E-04
29,5000000000	30,0000000000	-4,22957367712E-03	3,72826329768E-04

30,000000000	30,500000000	-4,21828999328E-03	3,84269244404E-04
30,500000000	31,000000000	-4,20324940061E-03	3,95825716772E-04
31,000000000	31,500000000	-4,18441924079E-03	4,07492226657E-04
31,500000000	32,000000000	-4,16176820268E-03	4,19265220327E-04
32,000000000	32,500000000	-4,13526633466E-03	4,31141111614E-04
32,500000000	33,000000000	-4,10488505661E-03	4,43116283008E-04
33,000000000	33,500000000	-4,07059717135E-03	4,55187086754E-04
33,500000000	34,000000000	-4,03237687575E-03	4,67349845970E-04
34,000000000	34,500000000	-3,99019977131E-03	4,79600855760E-04
34,500000000	35,000000000	-3,94404287437E-03	4,91936384348E-04
35,000000000	35,500000000	-3,89388462581E-03	5,04352674214E-04
35,500000000	36,000000000	-3,83970490036E-03	5,16845943234E-04
36,000000000	36,500000000	-3,78148501540E-03	5,29412385838E-04
36,500000000	37,000000000	-3,71920773935E-03	5,42048174166E-04
37,000000000	37,500000000	-3,65285729956E-03	5,54749459235E-04
37,500000000	38,000000000	-3,58241938978E-03	5,67512372109E-04
38,000000000	38,500000000	-3,50788117715E-03	5,80333025083E-04
38,500000000	39,000000000	-3,42923130869E-03	5,93207512860E-04
39,000000000	39,500000000	-3,34645991739E-03	6,06131913747E-04
39,500000000	40,000000000	-3,25955862776E-03	6,19102290847E-04
40,000000000	40,500000000	-3,16852056095E-03	6,32114693257E-04
40,500000000	41,000000000	-3,07334033942E-03	6,45165157273E-04
41,000000000	41,500000000	-2,97401409102E-03	6,58249707597E-04
41,500000000	42,000000000	-2,87053945275E-03	6,71364358549E-04
42,000000000	42,500000000	-2,76291557392E-03	6,84505115279E-04
42,500000000	43,000000000	-2,65114311890E-03	6,97667974985E-04
43,000000000	43,500000000	-2,53522426934E-03	7,10848928132E-04
43,500000000	44,000000000	-2,41516272594E-03	7,24043959675E-04
44,000000000	44,500000000	-2,29096370975E-03	7,37249050278E-04
44,500000000	45,000000000	-2,16263396293E-03	7,50460177545E-04
45,000000000	45,500000000	-2,03018174909E-03	7,63673317236E-04
45,500000000	46,000000000	-1,89361685313E-03	7,76884444502E-04
46,000000000	46,500000000	-1,75295058054E-03	7,90089535106E-04

46.5000000000	47.0000000000	-1.60819575633E-03	8.03284566649E-04
47.0000000000	47.5000000000	-1.45936672334E-03	8.16465519796E-04
47.5000000000	48.0000000000	-1.30647934021E-03	8.29628379502E-04
48.0000000000	48.5000000000	-1.14955097871E-03	8.42769136232E-04
48.5000000000	49.0000000000	-9.88600520744E-04	8.55883787184E-04
49.0000000000	49.5000000000	-8.23648354775E-04	8.68968337508E-04
49.5000000000	50.0000000000	-6.54716371786E-04	8.82018801524E-04
50.0000000000	50.5000000000	-4.81827960778E-04	8.95031203934E-04
50.5000000000	51.0000000000	-3.05008003788E-04	9.08001581034E-04
51.0000000000	51.5000000000	-1.24282870420E-04	9.20925981921E-04
51.5000000000	52.0000000000	6.03195880906E-05	9.33800469698E-04
52.0000000000	52.5000000000	2.48770045294E-04	9.46621122672E-04
52.5000000000	53.0000000000	4.41037706405E-04	9.59384035546E-04
53.0000000000	53.5000000000	6.37090315660E-04	9.72085320614E-04
53.5000000000	54.0000000000	8.36894164138E-04	9.84721108943E-04
54.0000000000	54.5000000000	1.04041409805E-03	9.97287551547E-04
54.5000000000	55.0000000000	1.24761352748E-03	1.00978082057E-03
55.0000000000	55.5000000000	1.45845443561E-03	1.02219711043E-03
55.5000000000	56.0000000000	1.67289738839E-03	1.03453263902E-03
56.0000000000	56.5000000000	1.89090154463E-03	1.04687364881E-03
56.5000000000	57.0000000000	2.11242466663E-03	1.05894640803E-03
57.0000000000	57.5000000000	2.33742313115E-03	1.07101721177E-03
57.5000000000	58.0000000000	2.56585194093E-03	1.08299238317E-03
58.0000000000	58.5000000000	2.79766473657E-03	1.09486827445E-03
58.5000000000	59.0000000000	3.03281380889E-03	1.10664126812E-03
59.0000000000	59.5000000000	3.27125011173E-03	1.11830777801E-03
59.5000000000	60.0000000000	3.51292327517E-03	1.12986425038E-03
60.0000000000	60.5000000000	3.75778161917E-03	1.14130716501E-03
60.5000000000	61.0000000000	4.00577216762E-03	1.15263303630E-03
61.0000000000	61.5000000000	4.25684066287E-03	1.16383841426E-03
61.5000000000	62.0000000000	4.51093158065E-03	1.17491988563E-03
62.0000000000	62.5000000000	4.76798814530E-03	1.18587407488E-03
62.5000000000	63.0000000000	5.02795234561E-03	1.19669764527E-03

63,000000000	63,500000000	5,29076495085E-03	1,20738729983E-03
63,500000000	64,000000000	5,55636552734E-03	1,21793978239E-03
64,000000000	64,500000000	5,82469245537E-03	1,22835187855E-03
64,500000000	65,000000000	6,09568294646E-03	1,23862041670E-03
65,000000000	65,500000000	6,36927306109E-03	1,24874226894E-03
65,500000000	66,000000000	6,64539772673E-03	1,25871435205E-03
66,000000000	66,500000000	6,92399075629E-03	1,26853362844E-03
66,500000000	67,000000000	7,20498486689E-03	1,27819710706E-03
67,000000000	67,500000000	7,48831169905E-03	1,28770184433E-03
67,500000000	68,000000000	7,77390183617E-03	1,29704494501E-03
68,000000000	68,500000000	8,06168482440E-03	1,30622356309E-03
68,500000000	69,000000000	8,35158919286E-03	1,31523490269E-03
69,000000000	69,500000000	8,64354247414E-03	1,32407621887E-03
69,500000000	70,000000000	8,93747122520E-03	1,33274481846E-03
70,000000000	70,500000000	9,23330104856E-03	1,34123806094E-03
70,500000000	71,000000000	9,53095661378E-03	1,34955335918E-03
71,000000000	71,500000000	9,83036167932E-03	1,35768818026E-03
71,500000000	72,000000000	1,01314391146E-02	1,36564004623E-03
72,000000000	72,500000000	1,04341109226E-02	1,37340653487E-03
72,500000000	73,000000000	1,07382982623E-02	1,38098528045E-03
73,000000000	73,500000000	1,10439214718E-02	1,38837397440E-03
73,500000000	74,000000000	1,13509000918E-02	1,39557036605E-03
74,000000000	74,500000000	1,16591528887E-02	1,40257226331E-03
74,500000000	75,000000000	1,19685978791E-02	1,40937753334E-03
75,000000000	75,500000000	1,22791523529E-02	1,41598410319E-03
75,500000000	76,000000000	1,25907328986E-02	1,42238996042E-03
76,000000000	76,500000000	1,29032554271E-02	1,42859315376E-03
76,500000000	77,000000000	1,32166351971E-02	1,43459179366E-03
77,000000000	77,500000000	1,35307868396E-02	1,44038405286E-03
77,500000000	78,000000000	1,38456243833E-02	1,44596816698E-03
78,000000000	78,500000000	1,41610612803E-02	1,45134243507E-03
78,500000000	79,000000000	1,44770104314E-02	1,45650522005E-03
79,000000000	79,500000000	1,47933842123E-02	1,46145494930E-03

79,5000000000	80,0000000000	1,51100944992E-02	1,46619011508E-03
80,0000000000	80,5000000000	1,54270526954E-02	1,47070927501E-03
80,5000000000	81,0000000000	1,57441697573E-02	1,47501105251E-03
81,0000000000	81,5000000000	1,60613562216E-02	1,47909413722E-03
81,5000000000	82,0000000000	1,63785222313E-02	1,48295728540E-03
82,0000000000	82,5000000000	1,66955775629E-02	1,48659932029E-03
82,5000000000	83,0000000000	1,70124316534E-02	1,49001913249E-03
83,0000000000	83,5000000000	1,73289936273E-02	1,49321568029E-03
83,5000000000	84,0000000000	1,76451723240E-02	1,49618798999E-03
84,0000000000	84,5000000000	1,79608763250E-02	1,49893515621E-03
84,5000000000	85,0000000000	1,82760139818E-02	1,50145634212E-03
85,0000000000	85,5000000000	1,85904934426E-02	1,50375077974E-03
85,5000000000	86,0000000000	1,89042226810E-02	1,50581777018E-03
86,0000000000	86,5000000000	1,92171095230E-02	1,50765668381E-03
86,5000000000	87,0000000000	1,95290616751E-02	1,50926696047E-03
87,0000000000	87,5000000000	1,98399867522E-02	1,51064810965E-03
87,5000000000	88,0000000000	2,01497923055E-02	1,51179971066E-03
88,0000000000	88,5000000000	2,04583858505E-02	1,51272141269E-03
88,5000000000	89,0000000000	2,07656748949E-02	1,51341293499E-03
89,0000000000	89,5000000000	2,10715669670E-02	1,51387406691E-03
89,5000000000	90,0000000000	2,13759696432E-02	1,51410466800E-03
90,0000000000	90,5000000000	2,16787905768E-02	1,51410466800E-03
90,5000000000	91,0000000000	2,19799375256E-02	1,51387406691E-03
91,0000000000	91,5000000000	2,22793183801E-02	1,51341293499E-03
91,5000000000	92,0000000000	2,25768411917E-02	1,51272141269E-03
92,0000000000	92,5000000000	2,28724142008E-02	1,51179971066E-03
92,5000000000	93,0000000000	2,31659458645E-02	1,51064810965E-03
93,0000000000	93,5000000000	2,34573448851E-02	1,50926696047E-03
93,5000000000	94,0000000000	2,37465202376E-02	1,50765668381E-03
94,0000000000	94,5000000000	2,40333811977E-02	1,50581777018E-03
94,5000000000	95,0000000000	2,43178373702E-02	1,50375077974E-03
95,0000000000	95,5000000000	2,45997987157E-02	1,50145634212E-03
95,5000000000	96,0000000000	2,48791755792E-02	1,49893515621E-03

96,000000000	96,500000000	2,51558787175E-02	1,49618798999E-03
96,500000000	97,000000000	2,54298193261E-02	1,49321568029E-03
97,000000000	97,500000000	2,57009090676E-02	1,49001913249E-03
97,500000000	98,000000000	2,59690600982E-02	1,48659932029E-03
98,000000000	98,500000000	2,62341850950E-02	1,48295728540E-03
98,500000000	99,000000000	2,64961972833E-02	1,47909413722E-03
99,000000000	99,500000000	2,67550104634E-02	1,47501105251E-03
99,500000000	100,000000000	2,70105390370E-02	1,47070927501E-03
100,000000000	100,500000000	2,72626980343E-02	1,46619011508E-03
100,500000000	101,000000000	2,75114031401E-02	1,46145494930E-03
101,000000000	101,500000000	2,77565707201E-02	1,45650522005E-03
101,500000000	102,000000000	2,79981178472E-02	1,45134243507E-03
102,000000000	102,500000000	2,82359623269E-02	1,44596816698E-03
102,500000000	103,000000000	2,84700227236E-02	1,44038405286E-03
103,000000000	103,500000000	2,87002183856E-02	1,43459179366E-03
103,500000000	104,000000000	2,89264694706E-02	1,42859315376E-03
104,000000000	104,500000000	2,91486969708E-02	1,42238996042E-03
104,500000000	105,000000000	2,93668227377E-02	1,41598410319E-03
105,000000000	105,500000000	2,95807695064E-02	1,40937753334E-03
105,500000000	106,000000000	2,97904609206E-02	1,40257226331E-03
106,000000000	106,500000000	2,99958215560E-02	1,39557036605E-03
106,500000000	107,000000000	3,01967769448E-02	1,38837397440E-03
107,000000000	107,500000000	3,03932535987E-02	1,38098528045E-03
107,500000000	108,000000000	3,05851790327E-02	1,37340653487E-03
108,000000000	108,500000000	3,07724817878E-02	1,36564004623E-03
108,500000000	109,000000000	3,09550914540E-02	1,35768818026E-03
109,000000000	109,500000000	3,11329386926E-02	1,34955335918E-03
109,500000000	110,000000000	3,13059552586E-02	1,34123806094E-03
110,000000000	110,500000000	3,14740740221E-02	1,33274481846E-03
110,500000000	111,000000000	3,16372289904E-02	1,32407621887E-03
111,000000000	111,500000000	3,17953553288E-02	1,31523490269E-03
111,500000000	112,000000000	3,19483893818E-02	1,30622356309E-03
112,000000000	112,500000000	3,20962686934E-02	1,29704494501E-03

112,5000000000	113,0000000000	3,22389320275E-02	1,28770184433E-03
113,0000000000	113,5000000000	3,23763193879E-02	1,27819710706E-03
113,5000000000	114,0000000000	3,25083720375E-02	1,26853362844E-03
114,0000000000	114,5000000000	3,26350325178E-02	1,25871435205E-03
114,5000000000	115,0000000000	3,27562446675E-02	1,24874226894E-03
115,0000000000	115,5000000000	3,28719536410E-02	1,23862041670E-03
115,5000000000	116,0000000000	3,29821059266E-02	1,22835187855E-03
116,0000000000	116,5000000000	3,30866493641E-02	1,21793978239E-03
116,5000000000	117,0000000000	3,31855331619E-02	1,20738729983E-03
117,0000000000	117,5000000000	3,32787079144E-02	1,19669764527E-03
117,5000000000	118,0000000000	3,33661256180E-02	1,18587407488E-03
118,0000000000	118,5000000000	3,34477396875E-02	1,17491988563E-03
118,5000000000	119,0000000000	3,35235049718E-02	1,16383841426E-03
119,0000000000	119,5000000000	3,35933777692E-02	1,15263303630E-03
119,5000000000	120,0000000000	3,36573158421E-02	1,14130716501E-03
120,0000000000	120,5000000000	3,37152784318E-02	1,12986425038E-03
120,5000000000	121,0000000000	3,37672262720E-02	1,11830777801E-03
121,0000000000	121,5000000000	3,38131216030E-02	1,10664126812E-03
121,5000000000	122,0000000000	3,38529281846E-02	1,09486827445E-03
122,0000000000	122,5000000000	3,38866113089E-02	1,08299238317E-03
122,5000000000	123,0000000000	3,39141378122E-02	1,07101721177E-03
123,0000000000	123,5000000000	3,39354760877E-02	1,05894640803E-03
123,5000000000	124,0000000000	3,39505960959E-02	1,04678364881E-03
124,0000000000	124,5000000000	3,39594693764E-02	1,03453263902E-03
124,5000000000	125,0000000000	3,39620690577E-02	1,02219711043E-03
125,0000000000	125,5000000000	3,39583698678E-02	1,00978082057E-03
125,5000000000	126,0000000000	3,39483481433E-02	9,97287551547E-04
126,0000000000	126,5000000000	3,39319818389E-02	9,84721108943E-04
126,5000000000	127,0000000000	3,39092505356E-02	9,72085320614E-04
127,0000000000	127,5000000000	3,38801354492E-02	9,59384035546E-04
127,5000000000	128,0000000000	3,38446194378E-02	9,46621122672E-04
128,0000000000	128,5000000000	3,38026870092E-02	9,33800469698E-04
128,5000000000	129,0000000000	3,37543243272E-02	9,20925981921E-04

129,0000000000	129,5000000000	3,36995192185E-02	9,08001581034E-04
129,5000000000	130,0000000000	3,36382611778E-02	8,95031203934E-04
130,0000000000	130,5000000000	3,35705413733E-02	8,82018801524E-04
130,5000000000	131,0000000000	3,34963526518E-02	8,68968337508E-04
131,0000000000	131,5000000000	3,34156895426E-02	8,55883787184E-04
131,5000000000	132,0000000000	3,33285482613E-02	8,42769136232E-04
132,0000000000	132,5000000000	3,32349267135E-02	8,29628379502E-04
132,5000000000	133,0000000000	3,31348244971E-02	8,16465519796E-04
133,0000000000	133,5000000000	3,30282429051E-02	8,03284566649E-04
133,5000000000	134,0000000000	3,29151849272E-02	7,90089535106E-04
134,0000000000	134,5000000000	3,27956552509E-02	7,76884444503E-04
134,5000000000	135,0000000000	3,26696602630E-02	7,63673317236E-04
135,0000000000	135,5000000000	3,25372080492E-02	7,50460177545E-04
135,5000000000	136,0000000000	3,23983083943E-02	7,37249050278E-04
136,0000000000	136,5000000000	3,22529727818E-02	7,24043959675E-04
136,5000000000	137,0000000000	3,21012143921E-02	7,10848928132E-04
137,0000000000	137,5000000000	3,19430481016E-02	6,97667974985E-04
137,5000000000	138,0000000000	3,17784904798E-02	6,84505115279E-04
138,0000000000	138,5000000000	3,16075597873E-02	6,71364358549E-04
138,5000000000	139,0000000000	3,14302759723E-02	6,58249707597E-04
139,0000000000	139,5000000000	3,12466606672E-02	6,45165157273E-04
139,5000000000	140,0000000000	3,10567371841E-02	6,32114693257E-04
140,0000000000	140,5000000000	3,08605305108E-02	6,19102290847E-04
140,5000000000	141,0000000000	3,06580673049E-02	6,06131913747E-04
141,0000000000	141,5000000000	3,04493758890E-02	5,93207512860E-04
141,5000000000	142,0000000000	3,02344862439E-02	5,80333025083E-04
142,0000000000	142,5000000000	3,00134300027E-02	5,67512372109E-04
142,5000000000	143,0000000000	2,97862404432E-02	5,54749459235E-04
143,0000000000	143,5000000000	2,95529524806E-02	5,42048174166E-04
143,5000000000	144,0000000000	2,93136026593E-02	5,29412385838E-04
144,0000000000	144,5000000000	2,90682291449E-02	5,16845943234E-04
144,5000000000	145,0000000000	2,88168717145E-02	5,04352674214E-04
145,0000000000	145,5000000000	2,85595717477E-02	4,91936384348E-04

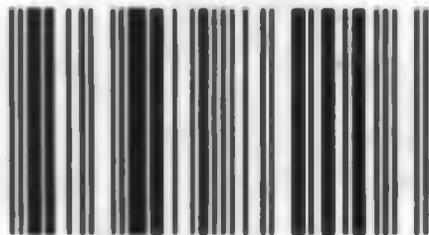
145,5000000000	146,0000000000	2,82963722167E-02	4,79600855760E-04
146,0000000000	146,5000000000	2,80273176755E-02	4,67349845970E-04
146,5000000000	147,0000000000	2,77524542497E-02	4,55187086754E-04
147,0000000000	147,5000000000	2,74718296245E-02	4,43116283008E-04
147,5000000000	148,0000000000	2,71854930333E-02	4,31141111614E-04
148,0000000000	148,5000000000	2,68934952454E-02	4,19265220327E-04
148,5000000000	149,0000000000	2,65958885533E-02	4,07492226657E-04
149,0000000000	149,5000000000	2,62927267596E-02	3,95825716772E-04
149,5000000000	150,0000000000	2,59840651633E-02	3,84269244405E-04
150,0000000000	150,5000000000	2,56699605459E-02	3,72826329768E-04
150,5000000000	151,0000000000	2,53504711567E-02	3,61500458485E-04
151,0000000000	151,5000000000	2,50256566985E-02	3,50295080525E-04
151,5000000000	152,0000000000	2,46955783115E-02	3,39213609156E-04
152,0000000000	152,5000000000	2,43602985581E-02	3,28259419900E-04
152,5000000000	153,0000000000	2,40198814066E-02	3,17435849510E-04
153,0000000000	153,5000000000	2,36743922143E-02	3,06746194951E-04
153,5000000000	154,0000000000	2,33238977113E-02	2,96193712394E-04
154,0000000000	154,5000000000	2,29684659821E-02	2,85781616228E-04
154,5000000000	155,0000000000	2,26081664487E-02	2,75513078079E-04
155,0000000000	155,5000000000	2,22430698518E-02	2,65391225842E-04
155,5000000000	156,0000000000	2,18732482324E-02	2,55419142732E-04
156,0000000000	156,5000000000	2,14987749131E-02	2,45599866342E-04
156,5000000000	157,0000000000	2,11197244784E-02	2,35936387719E-04
157,0000000000	157,5000000000	2,07361727552E-02	2,26431650451E-04
157,5000000000	158,0000000000	2,03481967925E-02	2,17088549775E-04
158,0000000000	158,5000000000	1,99558748413E-02	2,07909931688E-04
158,5000000000	159,0000000000	1,95592863336E-02	1,98898592087E-04
159,0000000000	159,5000000000	1,91585118610E-02	1,90057275913E-04
159,5000000000	160,0000000000	1,87536331539E-02	1,81388676317E-04
160,0000000000	160,5000000000	1,83447330590E-02	1,72895433839E-04
160,5000000000	161,0000000000	1,79318955174E-02	1,64580135601E-04
161,0000000000	161,5000000000	1,75152055423E-02	1,56445314525E-04
161,5000000000	162,0000000000	1,70947491958E-02	1,48493448555E-04

162.0000000000	162.5000000000	1,66706135664E-02	1,40726959908E-04
162.5000000000	163.0000000000	1,62428867448E-02	1,33148214331E-04
163.0000000000	163.5000000000	1,58116578010E-02	1,25759520383E-04
163.5000000000	164.0000000000	1,53770167596E-02	1,18563128732E-04
164.0000000000	164.5000000000	1,49390545762E-02	1,11561231468E-04
164.5000000000	165.0000000000	1,44978631123E-02	1,04755961438E-04
165.0000000000	165.5000000000	1,40535351106E-02	9,81493915925E-05
165.5000000000	166.0000000000	1,36061641703E-02	9,17435343564E-05
166.0000000000	166.5000000000	1,31558447213E-02	8,55403410161E-05
166.5000000000	167.0000000000	1,27026719988E-02	7,95417011245E-05
167.0000000000	167.5000000000	1,22467420175E-02	7,37494419252E-05
167.5000000000	168.0000000000	1,17881515456E-02	6,81653277967E-05
168.0000000000	168.5000000000	1,13269980784E-02	6,27910597140E-05
168.5000000000	169.0000000000	1,08633798119E-02	5,76282747315E-05
169.0000000000	169.5000000000	1,03973956162E-02	5,26785454834E-05
169.5000000000	170.0000000000	9,92914500832E-03	4,79433797051E-05
170.0000000000	170.5000000000	9,45872812546E-03	4,34242197740E-05
170.5000000000	171.0000000000	8,98624569748E-03	3,91224422701E-05
171.0000000000	171.5000000000	8,51179901960E-03	3,50393575564E-05
171.5000000000	172.0000000000	8,03548992471E-03	3,11762093800E-05
172.0000000000	172.5000000000	7,55742075566E-03	2,75341744934E-05
172.5000000000	173.0000000000	7,07769433729E-03	2,41143622957E-05
173.0000000000	173.5000000000	6,59641394843E-03	2,09178144947E-05
173.5000000000	174.0000000000	6,11368329362E-03	1,79455047899E-05
174.0000000000	174.5000000000	5,62960647487E-03	1,51983385756E-05
174.5000000000	175.0000000000	5,14428796318E-03	1,26771526653E-05
175.0000000000	175.5000000000	4,65783256997E-03	1,03827150366E-05
175.5000000000	176.0000000000	4,17034541847E-03	8,31572459748E-06
176.0000000000	176.5000000000	3,68193191497E-03	6,47681097320E-06
176.5000000000	177.0000000000	3,19269771997E-03	4,86653431468E-06
177.0000000000	177.5000000000	2,70274871930E-03	3,48538512779E-06
177.5000000000	178.0000000000	2,21219099513E-03	2,33378412395E-06
178.0000000000	178.5000000000	1,72113079699E-03	1,41208209198E-06

Монография посвящена анализу и решения современных актуальных проблем в областях теории нелинейных волн в системах с флуктуирующими параметрами, релятивистской статистической физики и явления реликтового излучения. Дано систематическое изложение решаемых вопросов с единой точки зрения, на основе релятивистской функции распределения скоростей (квази и обычных частиц). В ней впервые представлены следующие теории, разработанные автором: 1. Теория релятивистского броуновского движения квантов магнитного потока. 2. Теория неквантового релятивистского идеального газа Максвелла-Больцмана. 3. Релятивистски – инвариантная статистическая теория первичного космического излучения. Монография рассчитана для научных работников занимающихся исследованиями во выше указанных областях, а также может быть полезным студентам старших курсов университетов-специализирующихся по специальности теоретическая физика, астрофизики и элементарных частиц и космологии



Жумаев Мустахим Рафиевич, 1960 года рождения. В 1983 г. окончил ТашГУ. Научные направления: Теория солитонов в нелинейных системах с флуктуирующими параметрами, релятивистская статистическая физика, космология. Провел исследование в ИПФ (Нижний Новгород), в ОИЯИ (Дубна). Дал новое физическое объяснение свойствам реликтового излучения.



978-3-659-86900-6