

Стивен Вайнберг

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ

Том 2

Современные приложения

Главы

15 – 23

На правах рукописи
Экземпляр Л. М. Лапиной
для личного пользования

Перевод на русский язык А. В. Беркова
с исправлениями на 03.03.2001

с издания

The Quantum Theory of Fields

Volume II
Modern Applications

Steven Weinberg
University of Texas at Austin

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

© Steven Weinberg 1995

This book is in copyright. Subject to statutory exception
and to the provisions of relevant collective licensing agreements,
no reproduction of any part may take place without
the written permission of Cambridge University Press.

First published 1996
Reprinted (with corrections), 1998
Reprinted 2000

СОДЕРЖАНИЕ *

Предисловие	XIII
Обозначения	XVII
15. Неабелевы калибровочные теории	1
15.1. Калибровочная инвариантность	3
Калибровочные преобразования. Структурные константы. Тождество Якоби. Присоединенное представление. Теория Янга–Миллса. Ковариантные производные. Тензор напряженности поля. Конечные калибровочные преобразования. Аналогия с общей теорией относительности.	
15.2. Лагранжианы калибровочной теории и простые группы Ли	9
Лагранжиан калибровочного поля. Метрика. Антисимметричные структурные константы. Простые, полупростые и $U(1)$ алгебры Ли. Структура калибровочной алгебры. Компактные алгебры. Константы связи.	
15.3. Уравнения поля и законы сохранения	17
Сохраняющиеся токи. Ковариантно сохраняющиеся токи. Неоднородные уравнения поля. Однородные уравнения поля. Аналогия с тензором энергии-импульса. Генераторы симметрии.	
15.4. Квантование	20
Первичные и вторичные связи первого рода. Аксиальная калибровка. Неоднозначность Грибова. Канонические переменные. Гамильтониан, духов и антидухов. Фейнмановские правила для полей духов. Модифицированное действие. Подсчет степеней и перенормируемость.	
15.5. Метод де Витта–Фаддеева–Попова	26
Обобщение результатов аксиальной калибровки. Независимость фиксирующих калибровку функционалов. Обобщенная калибровка Фейнмана. Формы вершин.	

* Разделы, отмеченные звездочками, лежат несколько в стороне от основной линии изложения и могут быть опущены при первом чтении.

15.6. Гости	34
Детерминант как функциональный интеграл. Поля гостей и антигостей. Правила Фейнмана для гостей. Модифицированное действие. Подсчет индекса расходимости и перенормируемость.	
15.7. Симметрия БРСТ	38
Вспомогательное поле h_α . БРСТ преобразование. Нильпотентность. Инвариантность нового действия. БРСТ когомология. Независимость фиксации калибровки. Применение к электродинамике. БРСТ квантование. Геометрическая интерпретация.	
15.8. Обобщения симметрии БРСТ*	51
Обозначение де Витта. Общая теорема Фаддеева–Попова–де Витта. БРСТ преобразования. Новое действие. Оператор Славнова. Зависящие от поля структурные константы. Обобщенное тождество якоби. Инвариантность нового действия. Независимость фиксации калибровки. За рамками квадратичных действий для духов. БРСТквантование. БРСТ когомология. Симметрия анти-БРСТ.	
15.9. Формализм Баталина–Вилковыского*	59
Открытые калибровочные алгебры. Антиполя. Мастер-уравнение. Минимальные поля и тривиальные пары. БРСТ преобразования с антиполями. Антискобки. Антиканонические преобразования. Фиксация калибровки. Квантовое мастер-уравнение.	
Приложение А. Теоремы, относящиеся к алгебрам Ли	71
Приложение В. Каталог Картана	77
Задачи	82
Список литературы	84
 16 Методы внешнего поля	 88
16.1. Квантовое эффективное действие	88
Токи. Производящий функционал для всех графов. Производящий функционал для связных графов. Преобразование Лежандра. Производящий функционал для одночастично неприводимых графов. Уравнения поля с квантовыми поправками. Суммирование древесных графов.	
16.2. Вычисление эффективного потенциала	95
Эффективный потенциал для постоянных полей. Однопетлевое вычисление. Расходимости. Перенормировка. Фермионные петли.	
16.3. Энергетическая интерпретация	100
Адиабатическое возмущение. Эффективный потенциал как минимальная энергия. Выпуклость. Нестабильность между локальными минимумами. Линейная интерполяция.	

16.4. Симметрии эффективного действия	104
Симметрии и перенормировка. Тожества Славнова–Тейлора. Линейно реализованные симметрии. Фермионные поля и токи.	
Задачи	108
Список литературы	109
 17 Перенормировка калибровочных теорий	110
17.1. Уравнения Зинн–Жюстена	110
Тожества Славнова–Тейлора для симметрии БРСТ. Внешние поля $K_n(x)$. Антискобки.	
17.2. Перенормировка. Непосредственный анализ	113
Рекурсивное рассуждение. Условие на бесконечности, следующее из симметрии БРСТ. Линейность по $K_n(x)$. Новая симметрия БРСТ. Сокращение расходимостей. Константы перенормировки. Нелинейные калибровочные условия.	
17.3. Перенормировка. Произвольные калибровочные теории*	125
Являются ли перенормируемыми «неперенормируемые» калибровочные теории? Структурные ограничения. Антиканоическая замена переменных. Рекурсивное рассуждение. Когомологические теоремы.	
17.4. Калибровка фонового поля	131
Новые функции, фиксирующие калибровку. Истинная и формальная калибровочная инвариантность. Константы перенормировки.	
17.5. Однопетлевые вычисления в калибровке фонового поля	138
Однопетлевое эффективное действие. Детерминанты. Алгебраическое вычисления в случае постоянных фоновых полей. Перенормировка калибровочных полей и констант связи. Интерпретация бесконечностей.	
Задачи	150
Список литературы	151
 18 Методы ренормгруппы	153
18.1. Откуда берутся большие логарифмы?	155
Сингулярности при нулевой массе. «Инфракрасно чистые» амплитуды и вероятности. Струи. Сингулярности при нулевой массе, происходящие от перенормировки. Операторы перенормировки.	
18.2. Скользящий масштаб	164
Перенормировка Гелл–Манна–Лоу. Уравнение ренормгруппы. Однопетлевые вычисления. Применение к теории ϕ^4 . Множители, соответствующие перенормировке поля. Применение к квантовой электродинамике.	

ке. Эффективная постоянная тонкой структуры. Зависящие от поля перенормированные константы связи. Нестабильность вакуума.

18.3. Варианты асимптотического поведения 179

Сингулярности при конечной энергии. Непрерывный рост. Фиксированная точка при конечной константе связи. Асимптотическая свобода. Квантование на решетке. Тривиальность. Универсальные коэффициенты в бета-функции.

18.4. Эффекты нескольких констант связи и массы 191

Поведение в окрестности фиксированной точки. Инвариантные собственные значения. Неперенормируемые теории. Конечномерные критические поверхности. Перенормировка массы при нулевой массе. Уравнения ренормализационной группы для масс.

18.5. Критические явления* 199

Малые волновые числа. Существенные, несущественные и маргинальные константы связи. Фазовые переходы и критические поверхности. Критическая температура. Поведение корреляционной длины. Критический показатель. Размерность $4 - \epsilon$. Фиксированная точка Вильсона–Фишера. Сравнение с опытом. Классы универсальности.

18.6. Минимальное вычитание 204

Определение перенормированной константы связи. Вычисление β -функции. Применение к электродинамике. Модифицированное минимальное вычитание. Неперенормируемые взаимодействия.

18.7. Квантовая хромодинамика 208

Цвета и ароматы кварков. Вычисление бета-функции. Асимптотическая свобода. Пленение кварков и глюонов. Струи. Аннигиляция e^+e^- в адроны. Случайные симметрии. Неперенормируемые поправки. Поведение калибровочной константы. Экспериментальные результаты для g_s и Λ .

18.8. Исправленная теория возмущений* 216

Ведущие логарифмы. Коэффициенты при логарифмах.

Задачи 218

Список литературы 219

19 Спонтанно нарушенные глобальные симметрии 222

19.1. Вырожденные вакуумы 222

Вырожденные минимумы эффективного потенциала. Нарушенная симметрия или симметричные суперпозиции? Большие системы. Факторизация на больших расстояниях. Диагонализация вакуумных средних. Кластерное разложение.

19.2. Голдстоуновские бозоны	227
Нарушенная глобальная симметрия требует наличия безмассовых бозонов. Доказательство с помощью эффективного потенциала. Доказательство с помощью алгебры токов. Множители F и вакуумные средние. Взаимодействие мягких голдстоуновских бозонов.	
19.3. Спонтанно нарушенные приближенные симметрии	240
Псевдоголдстоуновские бозоны. Головастики. Выстраивание вакуума. Массовая матрица. Положительность.	
19.4. Пионы как голдстоуновские бозоны	247
Киральная симметрия $SU(2) \times SU(2)$ квантовой хромодинамики. Нарушение до изоспина. Векторные и аксиально-векторные слабые токи. Амплитуда распада пиона. Аксиальные формфакторы нуклона. Соотношение Гольдбергера–Треймана. Выстроенность вакуума. Массы кварков и пионов. Взаимодействия мягких пионов. Историческое замечание.	
19.5. Эффективные теории поля. Пионы и нуклоны	260
Алгебра токов для двух мягких пионов. Проверка эффективного лагранжиана с помощью алгебры токов. Преобразование к связи с производной. Нелинейная реализация $SU(2) \times SU(2)$. Эффективный лагранжиан мягких пионов. Прямая проверка справедливости эффективного лагранжиана. Общий эффективный лагранжиан для пионов. Подсчет степеней. Пион-пионное рассеяние для безмассовых пионов. Идентификация множителя F . Пионные массовые слагаемые в эффективном лагранжиане. Пион-пионное рассеяние для реальных пионов. Длины пион-пионного рассеяния. Пион-нуклонный эффективный лагранжиан. Ковариантные производные. $g_A \neq 1$. Подсчет степеней с нуклонами. Длины пион-нуклонного рассеяния. σ -члены. Нарушение изоспина. Правило сумм Адлера–Вайсбергера.	
19.6. Эффективные теории поля. Произвольные нарушенные симметрии	285
Преобразование к связям с производными. Голдстоуновские бозоны и правые смежные классы. Симметричные пространства. Разложение Картана. Правила нелинейного преобразования. Единственность. Ковариантные производные. Слагаемые, нарушающие симметрию. Приложение к кварковому массовым слагаемым. Подсчет степеней. Параметры порядка.	
19.7. Эффективные теории поля. $SU(3) \times SU(3)$	304
$SU(3)$ мультиплеты и матрицы. Голдстоуновские бозоны в нарушенной $SU(3) \times SU(3)$ симметрии. Кварковые массовые слагаемые. Массы псевдоскалярных мезонов. Электромагнитные поправки. Отношения масс кварков. Высшие слагаемые в лагранжиане. Сдвиги масс нуклонов.	

19.8. Аномальные члены в эффективных теориях поля*	315
Слагаемое Весса–Зумино–Виттена. Пятимерная форма. Целая константа связи. Единственность и когомология де Рама.	
19.9. Ненарушенные симметрии	321
Предположение об устойчивости масс. Доказательство Вафы–Виттена. Малые невырожденные массы кварков.	
19.10. Проблема $U(1)$	328
Киральная $U(1)$ симметрия. Применения к псевдоскалярным массам.	
Задачи	332
Список литературы	333
 20 Разложения операторных произведений	 339
20.1. Разложение. Описание и вывод	340
Утверждение о разложении. Доминирование простых операторов. Вывод на языке интегралов по путям	
20.2. Поток импульса*	344
Вклад ϕ^2 для двух больших импульсов. Перенормированные операторы. Интегральное уравнение для коэффициентной функции. Вклад ϕ^2 для многих больших импульсов.	
20.3. Ренормгрупповые уравнения для коэффициентных функций ...	352
Вывод и решение. Поведение в фиксированных точках. Поведение в случае асимптотической свободы.	
20.4. Свойства симметрии коэффициентных функций	355
Инвариантность по отношению к спонтанно нарушенным симметриям	
20.5. Правила сумм для спектральных функций	358
Определение спектральных функций. Первое, второе и третье правила сумм. Приложение к киральной $SU(N) \times SU(N)$ симметрии. Сравнение с экспериментом.	
20.6. Глубоконеупругое рассеяние	365
Формфакторы W_1 и W_2 . Сечение глубоконеупругого рассеяния. Бьеркен-новский скейлинг. Партоновая модель. Соотношение Каллана–Гросса. Правила сумм. Формфакторы T_1 и T_2 . Связь между T_r и W_r . Симметричные тензорные операторы. Твист. Операторы минимального твиста. Вычисление коэффициентных функций. Правила сумм для партоновых функций распределения. Дифференциальные уравнения Альтарелли–Паризи. Логарифмические поправки к бьеркенновскому скейлингу.	
20.7. Ренормалоны*	380
Суммирование теории возмущений по Борелю. Инстантонные и ренормалонные препятствия. Инстантоны в безмассовой теории ϕ^4 . Ренорма-	

лоны в квантовой хромодинамике.

Приложение. Поток импульса. Общий случай	387
Задачи	391
Список литературы	392

21 Спонтанно нарушенные калибровочные симметрии .395

21.1. Унитарная калибровка

Устранение голдстоуновских бозонов. Массы векторных бозонов. Ненарушенные симметрии и безмассовые векторные бозоны. Комплексные представления. Пропагатор векторного поля. Непрерывность для обращающихся в нуль констант связи.

21.2. Перенормируемые ξ -калибровки

Фиксирующие калибровку функции. Лагранжиан с фиксированной калибровкой. Пропагаторы.

21.3. Электрослабая теория

Симметрии, сохраняющие лептонное число. $SU(2) \times U(1)$. $W^\pm$, Z^0 и фотоны. Угол смешивания. Константа связи лептонов с векторными бозонами. Массы $W^\pm$ и Z^0 . Распад мюона. Эффективная постоянная тонкой структуры. Открытие нейтральных токов. Кварковые токи. Угол Кабиббо, с-кварк. Третье поколение. Матрица Кобаяши–Маскавы. Открытие $W^\pm$ и Z^0 . Точные экспериментальные проверки. Случайные симметрии. Перенормируемые поправки. Несохранение лептонов и массы нейтрино. Несохранение барионов и распад протона.

21.4. Динамически нарушенные локальные симметрии*

Фиктивные калибровочные поля. Построение лагранжиана. Подсчет степеней. Общая массовая формула. Пример: $SU(2) \times SU(2)$. Запертая $SU(2) \times SU(2)$. Техницвет.

21.5. Объединение электрослабых и сильных взаимодействий

Простые калибровочные группы. Соотношения между калибровочными константами связи. Ренормгрупповой поток. Угол смешивания и объединение масс. Несохранение барионов и лептонов.

21.6 Сверхпроводимость*

Нарушение $U(1)$ до Z_2 . Голдстоуновская мода. Эффективный лагранжиан. Сохранение заряда. Эффект Меййснера. Глубина проникновения. Критическое поле. Квантование потока. Нулевое сопротивление. Эффект Джозефсона для переменного тока. Теория Ландау–Гинзбурга. Корреляционная длина. Вихревые линии. Восстановление $U(1)$. Стабильность. Сверхпроводники типа I и типа II. Критические поля для вихрей. Поведение в окрестности центра вихря. Эффективная теория электронов

вблизи поверхности Ферми. Подсчет степеней. Введение поля пар. Эффективное действие. Уравнение для щели. Уравнения ренормализационной группы. Условия сверхпроводимости.

Приложение. Произвольная унитарная калибровка 473

Задачи 475

Список литературы 476

22 Аномалии 482

22.1. Проблема распада π^0 482

Вероятность распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Наивные оценки. Подавление за счет киральной симметрии. Сравнение с экспериментом.

22.2. Преобразование меры. Абелева аномалия 486

Киральные и некиральные преобразования. Аномальная функция. Плотность Черна–Понтрягина. Несохранение тока. Сохранение калибровочно неинвариантного тока. Расчет процесса $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Теорема об индексе Атьи–Зингера.

22.3. Прямое вычисление аномалий. Общий случай 498

Фермионные несохраняющиеся токи. Расчет треугольной диаграммы. Векторы сдвига. Симметричная аномалия. Форма Бардина. Теорема Адлера–Бардина. Массивные фермионы. Другой подход. Глобальные аномалии.

22.4. Свободные от аномалий калибровочные теории 516

Калибровочные аномалии обязаны исчезнуть. Действительные и псевдодействительные представления. Защищенные группы. Сокращение аномалий в стандартной модели. Гравитационные аномалии. Приписывание значений гиперзаряда. Другая $U(1)$?

22.5. Безмассовые связанные состояния 523

Составные кварки и лептоны? Ненарушенные киральные симметрии. Условия наложения аномалий 'т Хоофта. Наложение аномалий для ненарушенной киральной симметрии $SU(n) \times SU(n)$ с калибровочной группой $SU(N)$. Случай $N = 3$. Киральная симметрия $SU(3) \times SU(3)$ должна быть нарушена. Условие расщепления 'т Хоофта. Жесткое условие на массы.

22.6. Условия совместности 533

Условия Весса–Зумино. Когомология БРСТ. Вывод симметричной аномалии. Уравнения спуска. Решение уравнений. Швингеровские члены. Аномалии в уравнении Зинн–Жюстена. Антискобочная когомология. Алгебраическое доказательство отсутствия аномалий для защищенных групп.

22.7. Аномалии и голдстоуновские бозоны	549
Наложение аномалий. Решение аномальных тождеств Славнова–Тейлора. Аномальные взаимодействия голдстоуновского бозона. Случай $SU(3) \times SU(3)$. Вывод взаимодействия Весса–Зумино–Виттена. Вычисление целого коэффициента. Обобщение.	
Задачи	560
Список литературы	561
 23 Протяженные полевые конфигурации	565
23.1. Использование топологии	566
Топологические классификации. Гомотопия. Скирмионы. Теорема Деррика. Границы областей. Неравенство Богомольного. Космологические проблемы. Инстантоны. Монополи и вихревые линии. Восстановление симметрии.	
23.2. Гомотопические группы	577
Правило умножения для $\pi_1(M)$. Ассоциативность. Обратные группы. $\pi_1(S_1)$. Топологические законы сохранения. Правило умножения для $\pi_k(M)$. Топологическое число.	
23.3. Монополи	585
Модель $SU(2)/U(1)$. Топологическое число. Электромагнитное поле. Индекс Кронекера. Монополь 'т Хоофта–Полякова. Другое неравенство Богомольного. Монополь БПП. Калибровка Дирака. Квантование заряда. Монополи групп $G/(H \times U(1))$. Космологические проблемы. Взаимодействие монополей с частицами. Монополи групп G/H с неодносвязной группой G . Несуществование состава полей.	
23.4. Интегральный инвариант Картана–Маурера	598
Определение инварианта. Независимость координатной системы. Топологическая инвариантность. Аддитивность. Интегральный инвариант для $S_1 U(1)$. Теорема Ботты. Интегральный инвариант для $S_3 SU(2)$.	
23.5. Инстантоны	604
Вычисление инварианта Картана–Маурера. Плотность Черна–Понтрягина. Еще одно неравенство богомольного. Решение с $n = 1$. Общий топологический индекс. Решение проблемы $U(1)$. Несохранение барионов и лептонов за счет электрослабых инстантонов. Подход в пространстве Минковского. Проницаемость барьера. Тепловые флуктуации.	
23.6. Угол тета	611
Кластерное разложение. Суперпозиция топологических индексов. Несохранение P и CP . Комплексные массы фермионов. Подавление несохранения P и CP малыми массами кварков. Электрический дипольный	

момент нейтрона. Симметрия Печчеи–Квинна. Аксионы. Масса аксиона. Взаимодействия аксионов.

23.7. Квантовые флуктуации в окрестности расширенных полевых конфигураций 620

Общее рассмотрение флуктуаций. Коллективные параметры. Детерминантные множители. Зависимость констант связи. Подсчет коллективных параметров.

23.8. Распад вакуума 623

Истинный и фальшивый вакуумы. Скачущие решения. Четырехмерная вращательная инвариантность. Знак действия. Вероятность распада на единицу объема. Приближение тонких стенок.

Приложение А. Евклидовы функциональные интегралы 629

Приложение В. Список гомотопических групп 635

Задачи 637

Список литературы 638

Именной указатель 642

Предметный указатель 648

Оглавление тома I

1. Историческое введение
2. Релятивистская квантовая механика
3. Теория рассеяния
4. Принцип кластерного разложения
5. Квантовые поля и античастицы
6. Фейнмановские правила
7. Канонический формализм
8. Электродинамика
9. Методы интеграла по путям
10. Непертурбативные методы
11. Однопетлевые радиационные поправки
в квантовой электродинамике
12. Общая теория перенормировок
13. Инфракрасные эффекты
14. Связанные состояния во внешних полях

Предисловие ко второму тому

В этом томе описываются успехи квантовой теории полей, приведшие к пониманию электрослабых и сильных взаимодействий элементарных частиц. Оказалось, что все эти взаимодействия определяются принципами калибровочной инвариантности, поэтому мы начинаем в гл. 15–17 с изложения калибровочных теорий, в которых знакомая калибровочная инвариантность электродинамики обобщается на случай неабелевых групп Ли. Некоторые из самых ярких выводов калибровочных теорий проявляются при большой энергии и лучше всего могут быть изучены методами ренормализационной группы. Эти методы описываются в гл. 18, где они затем применяются к квантовой хромодинамике — современной неабелевой калибровочной теории сильных взаимодействий, а также к теории критических явлений в физике твердого тела. В гл. 19 речь идет о произвольных спонтанно нарушенных глобальных симметриях и их применению к нарушенным $SU(2) \times SU(2)$ и $SU(3) \times SU(3)$ симметриям квантовой хромодинамики. Как методы ренормгруппы, так и нарушенные симметрии интереснее всего проявляются при рассмотрении разложений операторных произведений, чему посвящена гл. 20.

Ключ к пониманию электрослабых взаимодействий — спонтанное нарушение калибровочных симметрий. Мы рассматриваем этот вопрос в гл. 21 в приложении не только к электрослабым взаимодействиям, но и к сверхпроводимости. Помимо спонтанного нарушения совершенно независимо существует возможность нарушения симметрии квантово-механическими эффектами, известными под названием аномалий. Сами аномалии и их различные физические приложения описаны в гл. 22. Этот том завершается обсуж-

дением в гл. 23 расширенных полевых конфигураций, которые могут возникать либо как новые составные части физических состояний, например, скирмионы, монополи или вихревые линии, либо как непертурбативные квантовые поправки к интегралам по путям, в которых аномалии играют решающую роль.

Было бы совершенно невозможно представить связное изложение этих достижений, если бы это делалось в историческом порядке. Вместо этого я расположил материал книги в таком порядке, который мне представляется наилучшим с педагогической точки зрения. Каждый вопрос я рассматриваю в том месте, где мотивы этого, а также необходимые математические понятия можно представить с наименьшим количеством ссылок на материал последующих глав, даже если логика требует несколько иного порядка изложения. Например, вместо того, чтобы рассмотреть неабелевы калибровочные теории в одной очень длинной главе, этот материал разделен между главами 15 и 17, т. к. в гл. 15 рассмотрены мотивы введения в гл. 16 формализма внешнего поля, а этот формализм используется при рассмотрении вопросов гл. 17.

В процессе изложения читатель познакомится с рядом формальных методов, включая инвариантность Бекки-Руэ-Сторы-Тютин (БРСТ), квантовое эффективное действие и теория гомотопий. Формализм Баталина-Вилковского представлен как альтернативный обходной путь. Он введен в гл. 15 как компактный способ формулировки калибровочных теорий, основанных как на открытой, так и на замкнутой алгебре симметрии, и затем используется в гл. 17 для изучения сокращения бесконечностей в «неперенормируемых» калибровочных теориях, включая общую теорию относительности, и в гл. 22 для доказательства, что некоторые калибровочные теории свободны от аномалий во всех порядках теории возмущений. В этом томе широко используется подход, основанный на эффективной теории поля, особенно, в приложениях к теориям с нарушенными симметриями, в том числе, теории сверхпроводимости. Везде я боролся за максимально возможную ясность изложения, не жалея времени на подробную демонстрацию тех вычислений, в проведении которых я, как мне кажется, мог бы помочь читателю, и опуская вопросы, которые невозможно ясно объяснить при заданном объеме книги.

Главной целью томов I и II этой книги является объяснение читателю, почему квантовая теория полей такая, какая она есть,

и почему именно эта форма теории так хорошо приспособлена для описания реального мира. В т. I изложены основы квантовой теории полей с упором на причины, по которым природа при доступных энергиях описывается эффективными квантовыми теориями полей и, в частности, калибровочными теориями. (Список глав первого тома приведен в конце оглавления к этому тому.) В настоящем томе квантовая теория поля и калибровочная инвариантность являются отправными точками для рассмотрения их приложений.

Этот том будет доступен читателям, имеющим некоторое знакомство с основами квантовой теории поля. Знакомство читателя с т. I не предполагается (хотя это и не помешало бы). Некоторые вопросы теории групп и топологии объясняются по мере надобности.

Ряд описанных в этом томе формальных методов (например, БРСТ инвариантность и ренормгруппа) имеют важные приложения в спекулятивных теориях, включающих суперсимметрии или суперструны. Я разделяю энтузиазм в отношении будущего этих теорий, но не включил их в данный том, так как мне кажется, что они требуют отдельной книги. (Возможно, суперсимметрия и супергравитация станут темами т. III.) Я исключил еще ряд интересных вопросов, например, теория поля при конечной температуре, расчеты калибровочных теорий на решетке и приближение больших N , т. к. все они не требуются для обоснования или дополнения математической техники в остальной части книги, а она и так получилась достаточно большой.

Из-за огромного количества литературы по квантовой теории поля и ее приложениям я не имел возможности прочесть и сослаться на все статьи, имеющие отношение к обсуждаемым темам. Я постарался по каждому разделу дать ссылки на классические работы, а также на статьи, в которых описано последующее развитие рассматриваемых вопросов. Кроме того, я указал ссылки на работы, в которых содержатся детальные расчеты, данные или доказательства, упоминаемые в книге. Как и ранее, отсутствие ссылки не следует понимать как утверждение, что представленное изложение вопроса оригинально, хотя в некоторых случаях это так и есть.

По моему опыту, во втором томе содержится достаточно материала для одногодичного курса лекций для аспирантов по современным проблемам квантовой теории поля или физики элементарных частиц. Избранные главы тт. I и II подходят как основа сжатого

одногодичного курса по принципам и современным приложениям квантовой теории поля. К каждой главе я подобрал задачи. Некоторые из них служат просто в качестве упражнений на использование изложенной в главе техники вычислений, в ряде других результаты главы распространяются на более широкий класс теорий.

* * *

Я должен выразить особую признательность моим коллегам по Техасскому университету Луи Бойа, Филу Канделасу, Брайсу и Сесиль де Витт, Вилли Фишлеру, Иоакиму Гомесу, Вадиму Каплуновскому, и особенно Жаку Дистлеру. За помощь в обсуждении отдельных вопросов я благодарю Луи Альвареса-Гауме, Сидни Коулмена, Джона Диксона, Тони Дункана, Юрга Фрелиха, Артура Джаффе, Марка Хенне, Романа Джакива, Джо Польчинского, Майкла Тинкама, Кумрун Вафа, Дона Вейнгартена, Эдварда Виттена и Бруно Зумино. Джонатан Эванс прочел всю рукопись этого тома и внес ряд ценных предложений. Благодарю также Элис Вилсон, которая сделала рисунки и печатала исходные файлы LATEX до тех пор, пока я не научился делать это сам, а также Терри Рили за содействие в поиске бесчисленного количества книг и статей и Жану Даффи за помощь. Я признателен Маурин Стори и Элисон Вулатт из издательства Кембриджского университета за помощь в подготовке рукописи к изданию, и особенно моему редактору Руфусу Нилу за непрерывные полезные дружеские советы.

Стивен Вайнберг

Остин, Техас
Декабрь 1995

Обозначения

Латинские индексы i, j, k и т. д. принимают обычно значения 1, 2, 3 и нумеруют пространственные координаты.

Греческие индексы μ, ν и т. д. принимают в большинстве случаев значения 1, 2, 3, 0 и нумеруют пространственно-временные координаты, причем x^0 – временная координата.

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование, если это не оговорено особо.

Пространственно-временная метрика $\eta_{\mu\nu}$ диагональна, причем $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$.

Даламбертиан определяется как $\square \equiv \eta_{\mu\nu} \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2 / \partial t^2$, где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^i \partial x^i$ – лапласиан.

Тензор Леви-Чивита $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ определяется как полностью антисимметричный тензор с $\epsilon^{0123} = +1$.

Пространственные векторы обозначаются буквами, набранными полужирным шрифтом.

Шляпка над любым вектором обозначает соответствующий единичный вектор. Так, $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v} / |\mathbf{v}|$.

Точка над любой величиной обозначает производную этой величины по времени.

Матрицы Дирака γ_μ определены так, что $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$. Кроме того, $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ и $\beta = i\gamma^0$.

Ступенчатая функция $\theta(s)$ равна +1 при $s > 0$ и -1 при $s < 0$.

Комплексное сопряжение, транспонирование и эрмитовое сопряжение матрицы или вектора A обозначается как A^* , A^T и $A^\dagger = A^{*T}$ соответственно. Эрмитово сопряженный оператор к оператору O обозначается $O^\dagger$, за исключением случаев, когда используется звездочка, чтобы подчеркнуть, что вектор или матрица операторов не транспонируется. Символы + э. с. или + к. с. в конце уравнения означают добавление слагаемых, эрмитово сопряженных или комплексно сопряженных предыдущим.

За исключением гл. 1, мы используем систему единиц, в которой постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c приняты равными единице. Везде $-e$ — заряд электрона, измеренный в рациональных единицах, так что $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$.

Числа в скобках в конце приводимых числовых данных показывают неопределенность в последних знаках приведенного числа. Если это не оговорено особо, все экспериментальные данные взяты из справочника:

Review of Particle Properties, *Phys. Rev.*, 1994, **D50**, p. 1173.

Неабелевы калибровочные теории

Все квантовые теории поля, успешно описывающие реальный мир, — это неабелевы калибровочные теории, основанные на более общих принципах калибровочной инвариантности, чем простая $U(1)$ инвариантность квантовой электродинамики. Эти теории имеют с электродинамикой то общее привлекательное свойство, отмеченное еще в разделе 8.1, что само существование и некоторые свойства калибровочных полей вытекают из принципа инвариантности относительно локальных калибровочных преобразований.

В электродинамике поля $\psi_n(x)$ с зарядом e_n подвергаются калибровочному преобразованию $\psi_n(x) \rightarrow \exp(ie_n\Lambda(x))\psi_n$ с произвольной функцией $\Lambda(x)$. Поскольку $\partial_\mu\psi_n(x)$ преобразуется не так, как $\psi_n(x)$, следует ввести поле $A_\mu(x)$, преобразующееся по закону $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, и построить с его помощью калибровочно-инвариантную производную $\partial_\mu\psi_n(x) - ie_nA_\mu(x)\psi_n(x)$, которая преобразуется точно так же, как $\psi_n(x)$, и может быть поэтому использована вместе с $\psi_n(x)$ для построения калибровочно-инвариантного лагранжиана. Аналогично, существование и некоторые свойства гравитационного поля $g_{\mu\nu}(x)$ в общей теории относительности следуют из принципа симметрии относительно произвольных преобразований координат^{**}. С учетом этих выдающихся прецедентов было вполне естественно считать, что локальную калибровочную

* Во втором томе продолжается начатая в первом томе нумерация глав. — *Прим. пер.*

^{**} Конечно, как локальная калибровочная инвариантность, так и общая ковариантность могут быть реализованы тривиальным образом, если считать

инвариантность следует распространить на неабелевы калибровочные преобразования.

В первой работе Янга и Миллса 1954 года¹ в качестве неабелевой калибровочной группы была выбрана группа $SU(2)$ изотопических вращений, а векторные поля, аналогичные полю фотонов, интерпретировались как поля сильновзаимодействующих векторных мезонов с изотопическим спином единица. Это предположение немедленно столкнулось с той трудностью, что масса этих векторных мезонов должна была, как у фотонов, равняться нулю, но тогда, казалось бы, любые такие частицы должны были бы быть уже известны экспериментально. Никакие подобные частицы в то время не наблюдались. Другая проблема заключалась в том, что было непонятно, как эту теорию использовать: в ней, как и во всех известных в то время теориях сильных взаимодействий, любое применение теории возмущений казалось невозможным из-за большого значения константы связи.

Вскоре калибровочные теории были обобщены на случай произвольных неабелевых калибровочных групп². Продолжалось математическое исследование проблем квантования этих теорий, особенно в работах Фейнмана³, Фаддеева и Попова⁴ и де Витта⁵, отчасти в качестве разминки перед попыткой решения более сложной проблемы квантования общей теории относительности. Было показано, что наивные фейнмановские правила, получающиеся простым рассматриванием лагранжиана, должны быть дополнены петлями «гостов». Однако до конца 60-х годов оставалось непонятным физическое значение таких теорий. В конце концов оказалось, что все наблюдаемые взаимодействия элементарных частиц порождаются векторными полями, связанными с локальными калибровочными симметриями. Соответствующие частицы спина 1 либо очень тяжелые, что является следствием спонтанного нарушения калибровочной симметрии, либо находятся «в плену» в результате роста константы связи на больших расстояниях. Все эти вопросы будут обсуждаться в главах 21 и 18, соответственно. В этой главе мы зай-

$A_\mu(x)$ и $g_{\mu\nu}(x)$ нединамическими c -числовыми функциями, которые просто характеризуют выбор фазы или системы координат, соответственно. Такие симметрии становятся физически значимыми, когда $A_\mu(x)$ и $g_{\mu\nu}(x)$ рассматриваются как динамические поля, по которым производится интегрирование при вычислении элементов S -матрицы.

мемся формулировкой неабелевых калибровочных теорий и выводом для них фейнмановских правил.

15.1. Калибровочная инвариантность

Предположим, что лагранжиан нашей теории инвариантен относительно совокупности бесконечно малых преобразований полей материи $\psi_l(x)$ вида

$$\delta\psi_l(x) = i\varepsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_l^m \psi_m(x), \quad (15.1.1)$$

с каким-то набором независимых постоянных матриц t_α и действительными инфинитезимальными параметрами $\varepsilon^\alpha(x)$, которые (как и в случае электродинамики) могут зависеть от положения в пространстве-времени. Предполагается, что эти преобразования симметрии являются инфинитезимальными преобразованиями некоторой группы Ли. Как показано в разделе 2.2, отсюда следует, что t_α должны подчиняться коммутационным соотношениям

$$[t_\alpha, t_\beta] = iC_{\alpha\beta}^\gamma t_\gamma, \quad (15.1.2)$$

где $C_{\alpha\beta}^\gamma$ — совокупность действительных констант, называемых структурными константами группы. Из антисимметрии коммутатора немедленно вытекает, что и структурные константы антисимметричны:

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = -C_{\beta\alpha}^\gamma. \quad (15.1.3)$$

Кроме того, из тождества Якоби

$$0 = [t_\alpha, t_\beta], t_\gamma + [t_\gamma, t_\alpha], t_\beta + [t_\beta, t_\gamma], t_\alpha \quad (15.1.4)$$

* В этом томе книги мы в общем случае будем помечать генераторы симметрии буквами α , β , и т. д. из начала греческого алфавита, с тем, чтобы отличать эти метки от индексов μ , ν , и т. д., используемых для обозначения пространственно-временных координат. Позднее, рассматривая нарушенные симметрии, мы часто будем помечать буквами a , b , и т. д. из начала латинского алфавита генераторы спонтанно нарушенных симметрий, и буквами i , j , и т. д. из середины этого алфавита — генераторы ненарушенных симметрий.

следует, что эти константы удовлетворяют условию

$$0 = C^{\delta}_{\alpha\beta} C^{\epsilon}_{\delta\gamma} + C^{\delta}_{\gamma\alpha} C^{\epsilon}_{\delta\beta} + C^{\delta}_{\beta\gamma} C^{\epsilon}_{\delta\alpha}. \quad (15.1.5)$$

Любой набор констант $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих соотношениям (15.1.3) и (15.1.5), определяет по меньшей мере один набор матриц t^A_{α} :

$$(t^A_{\alpha})^{\beta}_{\gamma} \equiv -i C^{\beta}_{\gamma\alpha}, \quad (15.1.6)$$

удовлетворяющих коммутационным соотношениям (15.1.2) со структурными константами $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$:

$$[t^A_{\alpha}, t^A_{\beta}] = i C^{\gamma}_{\alpha\beta} t^A_{\gamma}. \quad (15.1.7)$$

Это так называемое *присоединенное* (или *регулярное* *) представление алгебры Ли со структурными константами $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

Например, в исходной теории Янга–Миллса полями материи был дублет, включавший поля протонов Ψ_p и нейтронов Ψ_n :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix},$$

а t_{α} ($\alpha = 1, 2, 3$) были изоспиновыми матрицами

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы удовлетворяют коммутационными соотношениям (15.1.2), причем

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta},$$

где, как обычно, величина $\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$ равна +1 или -1, если γ, α, β образуют четную или нечетную перестановку индексов 1, 2, 3, соответственно, а в остальных случаях равна нулю. Заметим, что эта алгебра

* Термин «регулярное представление» чаще используется для обозначения представлений группы на пространстве функций на группе. — *Прим. ред.*

совпадает с алгеброй Ли (2.4.18) трехмерной группы вращений. Матрицы t_α реализуют представление спина 1/2 этой алгебры Ли.

Матрицы (15.1.6) присоединенного представления имеют вид (в базисе, где строки и столбцы помечены индексами 1, 2, 3):

$$t_1^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad t_2^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t_3^A = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это представление спина 1 алгебры Ли группы вращений.

Посмотрим, что же нужно для того, чтобы лагранжиан стал инвариантным относительно преобразований (15.1.1). Если бы не было производных, действующих на поля, задача решалась бы просто — любая функция от полей материи, которая инвариантна относительно преобразования (15.1.1) с постоянными ε^α , осталась бы инвариантной и в том случае, когда ε^α были бы произвольными действительными функциями пространственно-временных координат. Однако если лагранжиан содержит производные полей (а так должно быть), инвариантность теряется, поскольку в случае, когда $\varepsilon^\alpha(x)$ зависят от координат, производные полей материи преобразуются не так, как сами поля. После дифференцирования (15.1.1) получаем:

$$\delta(\partial_\mu \psi_l(x)) = i \varepsilon^\alpha(x) (t_\alpha)_l^m (\partial_\mu \psi_m(x)) + i (\partial_\mu \varepsilon^\alpha(x)) (t_\alpha)_l^m \psi_m(x). \quad (15.1.8)$$

Чтобы сделать лагранжиан инвариантным, нужно ввести поле A_μ^α , закон преобразования которого включает слагаемое $\partial_\mu \varepsilon^\alpha$, способное сократить второе слагаемое в (15.1.8). Так как это поле несет индекс α , можно ожидать, что оно подвергнется матричному преобразованию типа (15.1.1), но величины t_α заменятся матрицами присоединенного представления (15.1.6). Попробуем поэтому записать закон преобразования новых «калибровочных» полей в виде

$$\delta A_\mu^\beta = \partial_\mu \varepsilon^\beta + i \varepsilon^\alpha (t_\alpha^\beta)_\gamma A_\mu^\gamma,$$

или, используя (15.1.6),

$$\delta A_\mu^\beta = \partial_\mu \varepsilon^\beta + C_{\gamma\alpha}^\beta \varepsilon^\alpha A_\mu^\gamma. \quad (15.1.9)$$

Это позволяет построить «ковариантную производную»*

$$(D_\mu \psi(x))_l = \partial_\mu \psi_l(x) - i A^\beta_\mu(x) (t_\beta)_l^m \psi_m(x). \quad (15.1.10)$$

Как и планировалось, член $\partial_\mu \epsilon^\beta$ в преобразовании A^β_μ из второго слагаемого в (15.1.10) сокращается с членом, пропорциональным $\partial_\mu \epsilon^\beta$, в преобразовании первого слагаемого, так что

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \psi)_l &= i \epsilon^\alpha (t_\alpha)_l^m \partial_\mu \psi_m - i C^\beta_{\gamma\alpha} \epsilon^\alpha A^\gamma_\mu (t_\beta)_l^m \psi_m \\ &\quad + A^\gamma_\mu (t_\gamma)_l^m (t_\alpha)_m^n \psi_n, \end{aligned}$$

или с учетом (15.1.2)

$$\delta(D_\mu \psi)_l = i \epsilon^\alpha (t_\alpha)_l^m (D_\mu \psi)_m, \quad (15.1.11)$$

Таким образом $D_\mu \psi$ преобразуется как само ψ .

Следует также позаботиться о производных калибровочного поля. Чтобы устранить слагаемое $\partial_\nu \partial_\mu \epsilon^\beta$ в преобразовании $\partial_\nu A^\beta_\mu$, произведем, как и в электродинамике, антисимметризацию по μ и ν . Однако в законе преобразования $\partial_\nu A^\beta_\mu - \partial_\mu A^\beta_\nu$ остаются слагаемые, пропорциональные первым производным от $\epsilon(x)$, происходящие от второго слагаемого в выражении (15.1.9). Простейший способ построения «ковариантного ротора» $F^\gamma_{\nu\mu}$, в законе преобразования которого все подобные производные от $\epsilon(x)$ сокращаются, заключается в рассмотрении коммутатора двух ковариантных производных, действующих на поле материи ψ :

$$([D_\nu, D_\mu] \psi)_l = -i (t_\gamma)_l^m F^\gamma_{\nu\mu} \psi_m, \quad (15.1.12)$$

где

$$F^\gamma_{\nu\mu} \equiv \partial_\nu A^\gamma_\mu - \partial_\mu A^\gamma_\nu + C^\gamma_{\alpha\beta} A^\alpha_\nu A^\beta_\mu. \quad (15.1.13)$$

* Как обсуждается в следующем разделе, при получении формулы (15.1.10) мы молчаливо предполагаем, что любые множители — константы связи типа электрического заряда включены в t_β , а следовательно и в структурные константы.

Из формулы (15.1.12) очевидно, что $F^\gamma_{\nu\mu}$ должно преобразовываться в точности как поле материи, принадлежащее присоединенному представлению:

$$\delta F^\beta_{\nu\mu} \equiv i \varepsilon^\alpha (t^\alpha_\alpha)^{\beta\gamma} F^\gamma_{\nu\mu} = \varepsilon^\alpha C^\beta_{\gamma\alpha} F^\gamma_{\nu\mu}. \quad (15.1.14)$$

Читатель может убедиться прямым вычислением (с учетом соотношения (15.1.5)), что определенная в (15.1.13) величина $F^\alpha_{\nu\mu}$ действительно преобразуется по простому закону (15.1.14).

В ряде случаев полезно знать, что эти бесконечно малые калибровочные преобразования можно расширить до конечных преобразований. Групповой элемент можно параметризовать множеством действительных функций $\Lambda^\alpha(x)$, так что он действует на произвольное поле материи $\psi_l(x)$ матричным преобразованием

$$\psi_l(x) \rightarrow \psi_{l\Lambda}(x) = \left[\exp(it_\alpha \Lambda^\alpha(x)) \right]_{lm} \psi_m(x). \quad (15.1.15)$$

Мы хотим, чтобы ковариантная производная преобразовывалась точно так же:

$$(\partial_\mu - it_\alpha A^\alpha_{\mu\Lambda}) \psi_\Lambda = \exp(it_\alpha \Lambda^\alpha) (\partial_\mu - it_\alpha A^\alpha_\mu) \psi, \quad (15.1.16)$$

поэтому должны потребовать для A^α_μ такого закона преобразования $A^\alpha_\mu \rightarrow A^\alpha_{\mu\Lambda}$, чтобы

$$\partial_\mu \exp(it_\beta \Lambda^\beta) - it_\beta \exp(it_\alpha \Lambda^\alpha) A^\beta_{\mu\Lambda} = -i \exp(it_\alpha \Lambda^\alpha) t_\beta A^\beta$$

откуда

$$t_\alpha A^\alpha_{\mu\Lambda} = \exp(it_\beta \Lambda^\beta) t_\alpha A^\alpha_\mu \exp(-it_\beta \Lambda^\beta) - i \left[\partial_\mu \exp(it_\beta \Lambda^\beta) \right] \exp(-it_\beta \Lambda^\beta). \quad (15.1.17)$$

Формулы (15.1.15) и (15.1.17) сводятся к предыдущим правилам преобразования (15.1.1) и (15.1.9) в пределе, когда $\Lambda^\alpha(x)$ равна $\varepsilon^\alpha(x)$.

Из формулы (15.1.17) следует, что подходящим выбором $\Lambda^\beta(x)$ всегда возможно обратить в нуль $A^\alpha_{\mu\Lambda}(x)$ в одной точке, например $x = z$. (Достаточно потребовать, чтобы $\Lambda^\alpha(z)$ равнялось нулю, а производная $\partial \Lambda^\alpha(x) / \partial x^\mu = -A^\alpha_\mu(x)$ при $x = z$.) Кроме того, всегда можно выбрать $\Lambda^\beta(x)$ так, чтобы одна пространственно-временная

компонента $A_{\mu\Lambda}^{\alpha}(x)$ для всех α обращалась бы в нуль по крайней мере в конечной области в окрестности любой данной точки. Например, чтобы обратить в нуль $A_{3\Lambda}^{\alpha}(x)$, следует решить следующую систему *обыкновенных* дифференциальных уравнений первого порядка для параметров $\Lambda^{\beta}(x)$:

$$\partial_3 \exp(it_{\beta}\Lambda^{\beta}) = -i \exp(it_{\beta}\Lambda^{\beta}) t_{\alpha} A^{\alpha}_3, \quad (15.1.18)$$

которая всегда имеет решение по крайней мере в некоторой конечной области вокруг любой неособой точки.

Однако в общем случае невозможно выбрать $\Lambda^{\alpha}(x)$ так, чтобы обратить в нуль все четыре компоненты $A_{\mu\Lambda}^{\alpha}(x)$ в конечной области. Чтобы это стало возможным, должны быть разрешимы дифференциальные уравнения в *частных* производных

$$\partial_{\mu} \exp(it_{\beta}\Lambda^{\beta}) = -i \exp(it_{\beta}\Lambda^{\beta}) t_{\alpha} A^{\alpha}_{\mu}, \quad (15.1.19)$$

что возможно лишь при выполнении определенных условий интегрируемости. В частности, если $A_{\mu\Lambda}^{\alpha}(x)$ обращаются в нуль везде, то это же верно и для $F_{\mu\nu\Lambda}^{\alpha}(x)$, но так как напряженность поля преобразуется однородно, $F_{\mu\nu\Lambda}^{\alpha}(x)$ может обращаться в нуль только, если в нуль обращается $F_{\mu\nu}^{\alpha}(x)$. Если существует калибровочное преобразование, везде обращающее калибровочное поле $A_{\mu}^{\alpha}(x)$ в нуль, то такое поле называют «чистой калибровкой». Нетрудно показать, что условие, что $F_{\mu\nu}^{\alpha}$ везде обращается в нуль, есть не только необходимое, но и достаточное условие того, что $A_{\mu}^{\alpha}(x)$ может быть представлено в любой односвязной области как чистая калибровка ⁶.

* * *

Существует глубокая аналогия между описанным здесь построением объектов, простым образом преобразующихся под действием калибровочных преобразований, и построением объектов в общей теории относительности, ковариантных относительно общекоординатных преобразований. Мы использовали калибровочное поле для построения ковариантных производных $D_{\mu}\psi_l$ полей материи, имеющих те же свойства по отношению к калибровочным преобразованиям, что и сами эти поля. По аналогии мы используем

аффинную связность $G_{\nu\lambda}^{\mu}(x)$ для построения ковариантных производных тензоров $T^{\rho\sigma\cdots}_{\kappa\lambda\cdots}$:

$$T^{\rho\sigma\cdots}_{\kappa\lambda\cdots;\nu} \equiv \partial_{\nu} T^{\rho\sigma\cdots}_{\kappa\lambda\cdots} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} T^{\lambda\sigma\cdots}_{\kappa\lambda\cdots} + \dots - \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} T^{\rho\sigma\cdots}_{\mu\lambda\cdots} - \dots,$$

которые сами являются тензорами. Кроме того, из производных калибровочного поля мы построили напряженность поля $F^{\alpha}_{\mu\nu}$, закон преобразования которой совпадает с законом калибровочного преобразования поля материи, принадлежащего присоединенному представлению калибровочной группы. Соответственно, из производных аффинной связности можно составить преобразующуюся как тензор величину

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta},$$

называемую тензором кривизны Римана–Кристоффеля. Коммутатор двух калибровочно-инвариантных производных D_{μ} и D_{ν} можно выразить через тензор напряженности поля $F^{\alpha}_{\mu\nu}$. Аналогично, коммутатор двух ковариантных производных по x^{ν} и x^{κ} можно выразить через тензор кривизны:

$$T^{\lambda\cdots}_{\mu\cdots;\nu;\kappa} - T^{\lambda\cdots}_{\mu\cdots;\kappa;\nu} = R^{\lambda}_{\sigma\nu\kappa} T^{\sigma\cdots}_{\mu\cdots} + \dots - R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa} T^{\lambda\cdots}_{\sigma\cdots} - \dots.$$

Необходимым и достаточным условием существования калибровки, в которой калибровочное поле исчезает в конечной односвязной области, является обращение в нуль тензора напряженности поля. Необходимым и достаточным условием существования координатной системы, в которой аффинная связность обращается в нуль в конечной односвязной области, является обращение в нуль тензора кривизны Римана–Кристоффеля. Аналогия нарушается в одном важном пункте: в общей теории относительности аффинная связность сама построена из первых производных метрического тензора, а в калибровочных теориях калибровочные поля не выражаются через более фундаментальные поля.

15.2. Лагранжианы калибровочных теорий и простые группы Ли

Законы преобразования тензора калибровочного поля $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ и полей материи ϕ и их калибровочно-инвариантных производных не

включают производных от параметров преобразования $\varepsilon^\alpha(x)$. Следовательно, если лагранжиан построен только из этих величин и инвариантен относительно глобальных преобразований с постоянными ε^α , то этот лагранжиан инвариантен и относительно калибровочных преобразований с произвольными зависящими от положения параметрами $\varepsilon^\alpha(x)$. Мы поэтому предполагаем, что лагранжиан удовлетворяет указанным условиям, т. е.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi, D_\nu D_\mu \psi, \dots, F^\alpha_{\mu\nu}, D_\rho F^\alpha_{\mu\nu}, \dots) \quad (15.2.1)$$

и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_l} i(t_\alpha)_l^m \psi_m + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \psi_l)} i(t_\alpha)_l^m (D_\mu \psi_m) \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\nu D_\mu \psi_l)} i(t_\alpha)_l^m (D_\nu D_\mu \psi_m) + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^\beta_{\mu\nu}} C^\beta_{\gamma\alpha} F^\gamma_{\nu\mu} \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\rho F^\beta_{\mu\nu}} C^\beta_{\gamma\alpha} D_\rho F^\gamma_{\nu\mu} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (15.2.2)$$

С другой стороны, лагранжиан может не зависеть от самого калибровочного поля, не считая того, что это поле входит в $F^\alpha_{\mu\nu}$ и калибровочно-инвариантные производные D_μ . В частности, исключается массовый член $-m^2_{\alpha\beta} A_{\alpha\mu} A^\mu_\beta / 2$.

Сосредоточимся на тех слагаемых в лагранжиане, которые зависят только от $F^\alpha_{\mu\nu}$. Как и в электродинамике, для любой безмассовой частицы со спином 1 лагранжиан должен содержать описывающее свободную частицу квадратичное по $\partial_\mu A^\alpha_\nu - \partial_\nu A^\alpha_\mu$ слагаемое. Тогда калибровочная инвариантность требует, что это слагаемое должно входить как часть слагаемого, квадратичного по тензору поля $F^\alpha_{\mu\nu}$. Требования лоренц-инвариантности и сохранения четности определяют лагранжиан в виде

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} F^\alpha_{\mu\nu} F^{\beta\mu\nu} \quad (15.2.3)$$

с постоянной матрицей $g_{\alpha\beta}$. Если отказаться от требования сохранения четности (или CP, или T), то в лагранжиан можно добавить слагаемое

$$\mathcal{L}'_A = -\frac{1}{2} \theta_{\alpha\beta} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^\alpha_{\mu\nu} F^\beta_{\rho\sigma}$$

с другой постоянной матрицей $\theta_{\alpha\beta}$. Это слагаемое является на самом деле полной производной и поэтому не влияет на уравнения поля или фейнмановские правила. Однако подобные слагаемые приводят к непертурбативным квантово-механическим эффектам, которые будут обсуждаться в разделе 23.6.

Прежде чем рассматривать свойства матрицы g_{ab} , полезно обратить внимание на то, что невозможно ввести кинематическое слагаемое для калибровочного поля $A^\alpha_\mu(x)$, не включив одновременно взаимодействия этого поля, а именно, слагаемые в (15.2.3), возникающие из квадратичной по полям части напряженности поля $F^\alpha_{\mu\nu}$, определенной формулой (15.1.13). В этом пункте неабелевы калибровочные теории вновь напоминают общую теорию относительности, где кинематическая часть лагранжиана гравитационного поля содержится в лагранжиане Эйнштейна–Гильберта $-\sqrt{g}R / 8\pi G$, также содержащего самодействие поля. Причины в обеих случаях схожи: гравитационное поле взаимодействует само с собой, поскольку оно взаимодействует со всем, что несет энергию и импульс, а калибровочное поле взаимодействует само с собой, так как оно взаимодействует со всем, что преобразуется по нетривиальному представлению (в данном случае, присоединенному) калибровочной группы. В этом состоит отличие от электродинамики, где фотон не несет электрического заряда, т. е. квантового числа, с которым он взаимодействует. Отсюда и возникает возможность ввести в электромагнетизме кинематическое слагаемое $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$, не приносящее новых взаимодействий.

Числовая матрица $g_{\alpha\beta}$ может быть сделана симметричной и должна быть действительной, чтобы получился действительный лагранжиан. Для того, чтобы рассматриваемое слагаемое удовлетворяло требованию калибровочной инвариантности (15.2.2), для всех δ должно выполняться равенство

$$g_{\alpha\beta} F^\alpha_{\mu\nu} C^\beta_{\gamma\delta} F^{\mu\nu} = 0.$$

Чтобы это соотношение выполнялось без наложения дополнительных функциональных соотношений между компонентами F , матрица $g_{\alpha\beta}$ должна удовлетворять условию

$$g_{\alpha\beta}C^{\beta}_{\gamma\delta} = -g_{\gamma\beta}C^{\beta}_{\alpha\delta}. \quad (15.2.4)$$

Существует еще одно важное условие на матрицу $g_{\alpha\beta}$. Как и в квантовой электродинамике, правила канонического квантования и свойства положительности квантово-механического скалярного произведения требуют, чтобы матрица $g_{\alpha\beta}$ в лагранжиане (15.2.3) была положительно определенной. (Это означает, что $g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$ положительно для всех действительных u и обращается в нуль, только если $u^{\alpha} = 0$ для всех α .) Аналогом является требование, чтобы в кинематической части лагранжиана действительного скалярного поля $-\frac{1}{2}Z\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ константа Z была бы положительной.

Приведенные требования на матрицу $g_{\alpha\beta}$ имеют далеко идущие приложения. Оказывается, что следующие три утверждения эквивалентны.

а: Существует действительная симметричная положительно определенная матрица $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющая условию инвариантности (15.2.4).

б: Существует базис алгебры Ли (т. е. множество генераторов $\tilde{t}_{\alpha} = \mathcal{S}_{\alpha\beta}t_{\beta}$, где $\mathcal{S}$ — действительная несингулярная матрица), для которого структурные константы $\tilde{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ антисимметричны не только по нижним индексам β и γ , но и по всем трем индексам α , β и γ . (В этом базисе удобно перестать различать верхние и нижние индексы α , β и т. д. и писать $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}$ вместо $\tilde{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}$).

с: Алгебра Ли есть прямая сумма коммутирующих компактных простых и $U(1)$ * подалгебр **.

* Автор использует для обозначения алгебры группы $U(1)$ символ самой группы. Однако для обозначения алгебр Ли общепринятым является употребление малых букв типа $u(1)$, $su(2)$ и т. д. Большие же буквы используются для обозначения соответствующих групп Ли. Тем не менее, мы сохраняем здесь и далее авторские обозначения. — *Прим. ред.*

** Несколько определений. Подалгебра $\mathcal{H}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$ есть линейное пространство, натянутое на определенные действительные линейные комбинации $t_i = \mathcal{G}_{i\alpha}t_{\alpha}$ генераторов t_{α} алгебры $\mathcal{G}$, такое, что $\mathcal{H}$ само есть алгебра Ли, в том смысле, что коммутаторы t_i друг с другом имеют вид $[t_i, t_j] = ic^k_{ij}t_k$. Подалгебра $\mathcal{H}$ называется *инвариантной*, если коммутатор любого элемента полной алгебры $\mathcal{G}$ с любым элементом подалгебры $\mathcal{H}$ принадлежит подалгебре $\mathcal{H}$. Простая алгебра Ли не содержит инвариантных подалгебр. $U(1)$ подалгебра алгебры $\mathcal{G}$ имеет лишь один генератор, коммутирую-

В приложении А к этой главе дано доказательство эквивалентности утверждений **a**, **b** и **c**.⁷

Прежде чем переходить к обсуждению физических приложений этого результата, было бы полезно сказать чуть больше об условии компактности. Хотя нам это и не понадобится, укажем, что компактная алгебра Ли состоит из генераторов компактной группы Ли, т. е. группы, у которой инвариантный объем конечен. Например, группа вращений компактна, а группа Лоренца — нет. В качестве простого примера простой некомпактной алгебры Ли рассмотрим коммутационные соотношения

$$[t_1, t_2] = -it_3, [t_2, t_3] = it_1, [t_3, t_1] = it_2.$$

В данном случае структурные константы действительны, но не полностью антисимметричны. Ненулевые компоненты структурных констант равны

$$C^3_{12} = -C^3_{21} = -1, C^1_{23} = -C^1_{32} = 1, C^2_{31} = -C^2_{13} = 1.$$

Метрика *, определяемая формулой (15.A.10), диагональна, причем $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -2$.

ций со всеми генераторами самой алгебры $\mathcal{G}$. Полупростая алгебра Ли не содержит инвариантных абелевых подалгебр, т. е. инвариантных подалгебр, генераторы которых коммутируют друг с другом. Полупростые алгебры Ли есть прямые суммы простых (но не $U(1)$) алгебр Ли. Говорят, что простая или полупростая алгебра Ли *компактна*, если матрица $\text{Tr}\{t^A_{\alpha} t^A_{\beta}\} = -C^{\gamma}_{\alpha\beta} C^{\delta}_{\beta\gamma}$ положительно определена. Смысл и важное значение свойств простоты и компактности будут обсуждаться ниже. Когда говорят, что алгебра Ли $\mathcal{G}$ есть прямая сумма подалгебр $\mathcal{H}_n$, имеют в виду, что можно найти базис для $\mathcal{G}$ с генераторами t_{na} , в котором структурные константы принимают вид

$$C^{lc}_{na mb} = \delta_{lm} \delta_{mn} C^{(n)c}_{ab}$$

где $C^{(n)k}_{ab}$ — структурная константа подалгебры $\mathcal{H}_n$.

* Термин «метрика» не случаен. С математической точки зрения, условие (15.2.4), являющееся условием калибровочной инвариантности лагранжиана (15.2.3), определяет метрику g_{ab} на алгебре Ли, инвариантную относительно присоединенного представления, — так называемую метрику Киллинга. — *Прим. ред.*

Эта матрица не является положительно определенной, поэтому алгебра Ли некомпактна. На самом деле, это алгебра Ли некомпактной группы $O(2,1)$, т. е. группы Лоренца в двух пространственных и одном временном измерениях.

Два множества генераторов, отличающихся *действительным* неособенным линейным преобразованием, образуют базис одной и той же алгебры Ли и генерируют одну и ту же группу. Это неверно в случае комплексных линейных преобразований генераторов. В частности, любая простая алгебра Ли может быть приведена к компактной форме изменением фазы генераторов в подходящем базисе. Например, для алгебры Ли из рассмотренного примера всего лишь достаточно определить новые генераторы $t'_1 = it_1$, $t'_2 = it_2$, $t'_3 = t_3$, для которых коммутационные соотношения равны

$$[t'_1, t'_2] = it'_3, [t'_2, t'_3] = it'_1, [t'_3, t'_1] = it'_2.$$

Теперь структурные константы действительны и полностью антисимметричны: $C^a_{bc} = \varepsilon_{abc}$. В данном случае $g_{ab} = 2\delta_{ab}$, и алгебра компактна. Конечно, мы узнаем знакомую алгебру компактной группы трехмерных вращений $O(3)$. Чтобы увидеть, что эта процедура всегда возможна для любой простой алгебры Ли, заметим, что матрица g_{ab} , определенная соотношением (15.A.10), действительна, симметрична и несингулярна, поэтому с помощью действительного ортогонального преобразования она может быть приведена к диагональной форме с ненулевыми элементами на главной диагонали. После этого достаточно умножить все генераторы, которые соответствуют в этом базисе отрицательным диагональным элементам g_{ab} , на множители i .

Заметим без доказательства, что все конечномерные представления компактных групп Ли унитарны, а конечномерные представления компактных алгебр Ли, соответственно, эрмитовы. Кроме того, легко видеть, что только те алгебры Ли, которые могут иметь любое нетривиальное представление независимыми конечномерными эрмитовыми матрицами t_α , являются прямыми суммами $U(1)$ и компактных простых алгебр Ли. Чтобы показать это, определим

$$g_{\alpha\beta} \equiv \text{Tr}\{t_\alpha t_\beta\}.$$

Эта матрица очевидно положительно определена, так как $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \text{Tr}\{(u^\alpha t_\alpha)^2\}$ положительно для любых действительных u^α и обращается в нуль, только если $u^\alpha t_\alpha = 0$, что возможно только, если все u^α равны нулю, поскольку t_α предполагаются независимыми. Кроме того, такая матрица $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условию инвариантности (15.2.4), что можно увидеть, умножив коммутационное соотношение (15.1.2) на t_δ и взяв след. Это дает равенство

$$iC^\gamma_{\alpha\beta}\text{Tr}\{t_\gamma t_\delta\} = \text{Tr}\{[t_\alpha, t_\beta]t_\delta\} = \text{Tr}\{t_\delta t_\alpha t_\beta - t_\beta t_\alpha t_\delta\},$$

очевидно антисимметричное по β и δ . Проверив утверждение **а**, можно сослаться на упомянутую выше теорему, чтобы вывести условие **с**, так что алгебра Ли должна быть прямой суммой компактных простых и $U(1)$ подалгебр.

Вернемся к физической стороне калибровочных теорий. В этом разделе мы пришли к заключению, что построение подходящего кинетического члена в лагранжиане калибровочного поля с необходимостью требует существования положительно определенной симметричной действительной матрицы $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющей условию инвариантности (15.2.4). В приложении А к этой главе мы показали, что этот результат эквивалентен условию, что алгебра Ли является прямой суммой компактных простых и $U(1)$ подалгебр. Важное для наших целей утверждение, связанное с этим результатом, заключается в том, что все простые алгебры Ли принадлежат определенному ограниченному числу типов с известными размерностями. Например, легко видеть, что не существует простых алгебр Ли с числом генераторов менее трех, так как в одном или двух измерениях не может быть ненулевых полностью антисимметричных структурных констант с тремя индексами. В случае трех генераторов можно избежать появления инвариантной подалгебры, взяв не равные нулю константы C^3_{12} , C^2_{31} и C^1_{23} . В базисе, где структурные константы действительны и полностью антисимметричны, есть, очевидно, только одна возможность:

$$C_{\alpha\beta\gamma} = c\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

Здесь c — произвольная ненулевая действительная постоянная, которую можно исключить, изменив масштаб генераторов $t_\alpha \rightarrow t_\alpha/c$, так что алгебра Ли будет иметь вид

$$[t_\alpha, t_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} t_\gamma.$$

В ней можно узнать алгебру Ли трехмерной группы вращений $O(3)$, а также группы $SU(2)$ унитарных унимодулярных матриц в двух измерениях, положенной в основу первой неабелевой калибровочной теории Янга и Миллса. Продолжая в том же духе, можно показать, что не существует простых алгебр Ли с 4, 5, 6 или 7 генераторами, имеется одна алгебра с 8 генераторами и т. д. Математики (особенно Киллинг и Э. Картан) сумели перечислить все простые алгебры Ли. Компактные простые алгебры Ли разбиваются на несколько бесконечных классов алгебр «классических» групп Ли — унитарных унимодулярных, унитарных ортогональных и унитарных симплектических групп, а также пять исключительных алгебр Ли. Этот список представлен в приложении Б к данной главе.

В приложении А также показано, что при выполнении эквивалентных условий **a**, **b** или **c** метрика принимает вид

$$g_{mn,ab} = g_m^{-2} \delta_{mn} \delta_{ab} \quad (15.2.5)$$

с действительными g_m , где индексы m и n отмечают простые или $U(1)$ подалгебры, а индексы a и b нумеруют отдельные генераторы этих подалгебр. Константы g_m^{-2} можно устранить, изменив масштаб калибровочных полей:

$$A_{m\alpha}^\mu \rightarrow \tilde{A}_{m\alpha}^\mu \equiv g_m^{-1} A_{m\alpha}^\mu, \quad (15.2.6)$$

но затем, чтобы сохранить те же выражения (15.1.10) и (15.1.13) для $D_\mu \Phi$ и $F_\alpha^{\mu\nu}$, следует также переопределить матрицы t_α и структурные константы:

$$t_{m\alpha} \rightarrow \tilde{t}_{m\alpha} = g_m t_{m\alpha}, \quad (15.2.7)$$

$$C_{cab}^{(m)} \rightarrow \tilde{C}_{cab}^{(m)} = g_m C_{cab}^{(m)}. \quad (15.2.8)$$

Это означает, что мы всегда можем *определить* масштаб калибровочных полей (опуская теперь знак тильда), так что g_m в (15.2.5) равна единице:

$$g_{ab} = \delta_{ab}, \quad (15.2.9)$$

но тогда матрицы преобразования t_α и структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}$ будут содержать неизвестную мультипликативную константу g_m для каждой простой или $U(1)$ подалгебры. Эти константы являются *константами связи* калибровочной теории. Однако, иногда более удобно предпочесть некоторую, хотя и произвольную, но фиксированную нормировку для t_α и структурных констант внутри каждой простой или $U(1)$ подалгебры, и в этом случае константы связи появятся в лагранжиане калибровочного поля (15.2.3) подобно множителям g_m^{-2} в (15.2.5).

15.3. Уравнения поля и законы сохранения

Подставляя выражение (15.2.9) для матрицы $g_{\alpha\beta}$ в (15.2.3), получаем полный лагранжиан в виде:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha{}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\Psi, D_\mu \Psi), \quad (15.3.1)$$

где в отсутствие калибровочных полей $\mathcal{L}_M(\Psi, \partial_\mu \Psi)$ является лагранжианом «материи». В принципе можно было бы включить в $\mathcal{L}_M$ зависимость от $F_{\alpha\mu\nu}$, а также высшие ковариантные производные $D_\nu D_\mu \Psi$, $D_\lambda F_{\alpha\mu\nu}$ и т. п., но мы исключаем такие неперенормируемые слагаемые по тем же причинам, что и в электродинамике. Как обсуждалось в разделе 12.3, подобные слагаемые при обычных энергиях были бы сильно подавлены отрицательными степенями некоторой очень большой массы. По этой причине лагранжиан стандартной модели слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий имеет общий вид (15.3.1).

Уравнения движения калибровочного поля имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_{\alpha\nu})} &= -\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha\nu}} \\ &= -F_\gamma{}^{\nu\mu} C_{\mu\alpha\beta} A_{\beta\mu} - i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\nu \Psi} t_\alpha \Psi \end{aligned}$$

поэтому

$$\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = -J_\alpha{}^\nu, \quad (15.3.2)$$

где $J_\alpha^\vee$ — ток,

$$J_\alpha^\vee \equiv -F_\gamma^{\vee\mu} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} - i \frac{\partial \mathcal{G}_M}{\partial D_\vee \Psi} t_\alpha \Psi. \quad (15.3.3)$$

Ток $J_\alpha^\vee$ сохраняется в обычном смысле:

$$\partial_\vee J_\alpha^\vee = 0, \quad (15.3.4)$$

что следует как из уравнений Эйлера–Лагранжа для Φ и условия инвариантности (15.2.2), так непосредственно (и проще) из уравнений поля (15.3.2).

В выражения (15.3.2) и (15.3.4) входят обычные, а не ковариантные производные $D_\vee$, поэтому калибровочная инвариантность этих уравнений несколько туманна. Ее можно сделать явной, переписав (15.3.2) через калибровочно-ковариантную производную напряженности поля:

$$\begin{aligned} D_\lambda F_\alpha^{\mu\nu} &\equiv \partial_\lambda F_\alpha^{\mu\nu} - i(t_\beta^A)_{\alpha\gamma} A_{\beta\lambda} F_\gamma^{\mu\nu} \\ &= \partial_\lambda F_\alpha^{\mu\nu} - C_{\alpha\gamma\beta} A_{\beta\lambda} F_\gamma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (15.3.5)$$

Тогда (15.3.2) принимает вид

$$D_\mu F_\alpha^{\mu\nu} = -J_\alpha^\vee, \quad (15.3.6)$$

где $J_\alpha^\vee$ — ток только полей материи:

$$J_\alpha^\vee \equiv -i \frac{\partial \mathcal{G}_M}{\partial D_\vee \Psi} t_\alpha \Psi. \quad (15.3.7)$$

Если $\mathcal{G}_M$ калибровочно-инвариантен, то этот ток калибровочно-ковариантен. Кроме того, действуя $D_\vee$ на (15.3.6) и используя коммутационные соотношения

$$[D_\vee, D_\mu] F_\alpha^{\rho\sigma} = -i(t_\gamma^A)_{\alpha\beta} F_{\gamma\mu} F_\beta^{\rho\sigma} = -C_{\gamma\alpha\beta} F_{\gamma\mu} F_\beta^{\rho\sigma},$$

мы видим, что $J_\alpha^\vee$ удовлетворяет калибровочно инвариантному закону сохранения

$$D_\vee J_\alpha^\vee = 0, \quad (15.3.8)$$

а не обычному закону сохранения (15.3.4), которому удовлетворяет полный ток $\mathcal{J}_\alpha^\nu$. Кроме того с помощью (15.1.5) можно непосредственно вывести тождества

$$D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0, \quad (15.3.9)$$

которые справедливы независимо от того, удовлетворяют или нет калибровочные поля уравнениям поля.

Эти результаты позволяют еще раз подчеркнуть отмеченную в разделе 15.1 глубокую аналогию между неабелевыми калибровочными теориями и общей теорией относительности. В общей теории относительности существует аналогичный току J^μ тензор энергии-импульса материи T^ν_μ , удовлетворяющий общековариантному закону сохранения $T^\nu_{\mu;\nu} = 0$ и входящий в правую часть уравнений Эйнштейна в их общековариантной форме: $R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R = -8\pi G T^\nu_\mu$. Однако T^ν_μ не сохраняется в обычном смысле, т. к. $\partial_\nu T^\nu_\mu$ не обращается в нуль. С другой стороны, перенеся в уравнении Эйнштейна из левой стороны в правую все нелинейные слагаемые, получим уравнение поля ⁸

$$\left(R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R \right)_{\text{LINEAR}} = -8\pi G \tau^\nu_\mu,$$

где нетензор τ^ν_μ равен

$$\tau^\nu_\mu \equiv T^\nu_\mu + \frac{1}{8\pi G} \left(R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R \right)_{\text{NONLINEAR}},$$

аналогично $\mathcal{J}_\alpha^\nu$. Как и ток $\mathcal{J}_\alpha^\nu$, величина τ^ν_μ сохраняется в обычном смысле,

$$\partial_\nu \tau^\nu_\mu = 0,$$

и может рассматриваться как ток энергии-импульса

$$P_\mu = \int \tau^0_\mu d^3x.$$

В нем содержится чисто гравитационное слагаемое, так как гравитационные поля несут энергию и импульс. Без этого слагаемого τ^ν_μ

не мог бы сохраняться. Аналогично, $\mathcal{J}_\alpha^\nu$ содержит слагаемое калибровочного поля (первое слагаемое в (15.3.3)), так как для неабелевых групп (тех, у которых $C_{\alpha\beta}^\gamma \neq 0$) калибровочные поля несут квантовые числа, с которыми они же и взаимодействуют. Поскольку ток $\mathcal{J}_\alpha^\nu$ сохраняется в обычном смысле, его можно рассматривать как ток таких квантовых чисел, причем генераторы симметрии определяются независимыми от времени величинами

$$T_\alpha = \int \mathcal{J}_\alpha^0 d^3x. \quad (15.3.10)$$

(Кроме того, однородные уравнения (15.3.9) включают ковариантные производные, как и тождества Бьянки в общей теории относительности.) Ни одно из этих усложнений не возникает в квантовой электродинамике, так как фотоны не несут то квантовое число, электрический заряд, с которым они взаимодействуют.

15.4. Квантование

Переходим к квантованию описанных в двух предыдущих разделах калибровочных теорий. Лагранжиан берется в виде (15.3.1):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\Psi, D_\mu \Psi), \quad (15.4.1)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\alpha\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}, \\ D_\mu \Psi &\equiv \partial_\mu \Psi - it_\alpha A_{\alpha\mu} \Psi. \end{aligned}$$

Невозможно немедленно проквантовать эту теорию, приравняв коммутаторы произведению i на соответствующие скобки Пуассона. Проблема заключается в связях. По терминологии Дирака, введенной в гл. 7, существует первичная связь

$$\Pi_{\alpha 0} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha^0)} = 0, \quad (15.4.2)$$

и вторичная связь, обусловленная полевым уравнением для A_α^0 :

$$\begin{aligned}
-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha^0)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha 0}} &= \partial_\mu F_\alpha^{\mu 0} + F_\gamma^{\mu 0} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} + J_\alpha^0 \\
&= \partial_k \Pi_\alpha^k + \Pi_\gamma^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta k} + J_\alpha^0 = 0,
\end{aligned} \tag{15.4.3}$$

где $\Pi_\alpha^k \equiv \partial \mathcal{L} / \partial(\partial_0 A_{\alpha k}) = F_\alpha^{k0}$ — сопряженный $A_{\alpha k}$ «импульс», индекс $k = 1, 2, 3$. Скобки Пуассона $\Pi_{\alpha 0}$ с $\partial_k \Pi_\alpha^k + \Pi_\gamma^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta k} + J_\alpha^0$ обращаются в нуль (так как последняя величина не зависит от A_α^0), так что это связи первого рода, с которыми нельзя обойтись простой заменой скобок Пуассона на скобки Дирака.

Как и в электродинамике, для работы со связями следует выбрать калибровку. В данном случае принятая в электродинамике кулоновская калибровка привела бы к болезненным усложнениям*, поэтому мы предпочтем вести рассмотрение в *аксиальной калибровке*, основанной на условии

$$A_{\alpha 3} = 0. \tag{15.4.4}$$

Каноническими переменными калибровочного поля являются в этом случае $A_{\alpha i}$, где теперь i принимает значения 1 и 2, и канонически сопряженные импульсы

$$\Pi_{\alpha i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\alpha i})} = -F_\alpha^{0i} = \partial_0 A_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}. \tag{15.4.5}$$

Поле $A_{\alpha 0}$ не является независимой канонической переменной, а определяется через другие переменные в силу уравнения связи (15.4.3). Чтобы увидеть это, заметим, что компоненты напряженности «электрического» поля $F_\alpha^{\mu 0}$ равны

* Помимо чисто алгебраических усложнений, в кулоновской калибровке (как во многих других) возникает проблема, известная под названием неоднозначности Грибова⁹: даже при условии, что $\mathbf{A}_\alpha$ обращается в нуль в пространственной бесконечности, для каждого решения уравнения кулоновской калибровки $\nabla \cdot \mathbf{A}_\alpha = 0$ существуют другие решения, отличающиеся конечными калибровочными преобразованиями. Неоднозначность Грибова не будет нас беспокоить, поскольку мы проводим квантование в аксиальной калибровке, где эта неоднозначность отсутствует, а другие калибровки, например, лоренцовская, используются только для построения ряда теории возмущений.

$$F_{\alpha}^{i0} = \Pi_{\alpha i}, \quad F_{\alpha}^{30} = \partial_3 A_{\alpha}^0, \quad (15.4.6)$$

так что уравнение связи (15.4.3) принимает вид

$$-(\partial_3)^2 A_{\alpha}^0 = \partial_i \Pi_{\alpha i} + \Pi_{\gamma i} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta i} + J_{\alpha}^0, \quad (15.4.7)$$

и это уравнение можно легко решить (при разумных граничных условиях), что определяет A_{α}^0 как функционал от $\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$ и J_{α}^0 . (Мы используем соглашение о суммировании по неммым индексам, причем индексы i, j и т. д. принимают значения 1 и 2.) Следует отметить, что канонически сопряженный импульс к полю материи Ψ_l равен

$$\pi_l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Psi_l)} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(D_0 \Psi_l)}, \quad (15.4.8)$$

так что компонента тока материи может быть выражена через канонические переменные *только* самих полей материи:

$$J_{\alpha}^0 = -i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(D_0 \Psi_l)} (t_{\alpha})_{lm} \Psi_m. \quad (15.4.9)$$

Таким образом, формула (15.4.7) определяет A_{α}^0 в данный момент времени как функционал от канонических переменных $\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$, π_l и Ψ_l , взятых в этот же момент.

После того, как в рассматриваемой калибровке определены канонические переменные, можно перейти к построению гамильтониана. Плотность гамильтониана имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_l \partial_0 \Psi_l - \mathcal{L} \\ &= \Pi_{\alpha i} (F_{\alpha 0 i} + \partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \pi_l \partial_0 \Psi_l \\ &\quad - \frac{1}{2} F_{\alpha 0 i} F_{\alpha 0 i} + \frac{1}{2} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \frac{1}{2} F_{\alpha i 3} F_{\alpha i 3} \\ &\quad - \frac{1}{2} F_{\alpha 0 3} F_{\alpha 0 3} - \mathcal{L}_M. \end{aligned} \quad (15.4.10)$$

Используя выражения (15.4.4) и (15.4.6), находим:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_M + \Pi_{\alpha i} (\partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha i} \Pi_{\alpha i} + \\ &\quad + \frac{1}{2} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} - \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha 0} \partial_3 A_{\alpha 0}, \end{aligned} \quad (15.4.11)$$

где $\mathcal{H}_M$ — плотность гамильтониана материи:

$$\mathcal{H}_M \equiv \pi_l \partial_0 \psi_l - \mathcal{L}_M. \quad (15.4.12)$$

Следуя общим правилам, выведенным в разделе 9.2, можно с помощью полученной плотности гамильтониана вычислять матричные элементы как функциональные интегралы по $A_{\alpha i}$, $\Pi_{\alpha i}$, ψ_l и π_l с весовым множителем $\exp(iI)$, где

$$I = \int d^4x [\Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_l \partial_0 \psi_l - \mathcal{H} + \text{слагаемые с } \varepsilon], \quad (15.4.13)$$

а слагаемые с ε служат только для получения в знаменателях пропагаторов правильных бесконечно малых мнимых добавок (см. раздел 9.2). Заметим, что формулы (15.4.7) и (15.4.9) определяют A_α^0 как функционал от канонических переменных, *линейный* по $\Pi_{\alpha i}$ и π_l . Тогда анализ формулы (15.4.11) показывает, что подынтегральное выражение в полном действии (15.4.13) не более чем квадратично по $\Pi_{\alpha i}$ и π_α (при условии, что $\mathcal{L}_M$ не более чем квадратичен по $D_\mu \psi$). Поэтому с помощью обычных правил гауссовского интегрирования можно вычислить функциональный интеграл по каноническим «импульсам». Проблема, связанная с такой процедурой, состоит в том, что коэффициенты в квадратичных по $\Pi_{\alpha i}$ слагаемых в (15.4.13) являются функциями $A_{\alpha i}$, так что гауссовский интеграл приводит к неприятным множителям, содержащим зависящие от поля детерминанты. Кроме того, весь описанный формализм выглядит безнадежно лоренц-неинвариантным.

Вместо того, чтобы продолжать такой путь, применим трюк, аналогичный использованному в разделе 9.6 при формулировке электродинамики на языке функциональных интегралов. Заметим, что если попытаться рассматривать $A_{\alpha 0}$ как независимую переменную, то действие (15.4.13) очевидно квадратично по $A_{\alpha 0}$, причем коэффициент при слагаемом второго порядка $A_{\alpha 0}(x)A_{\beta 0}(y)$ равен не зависящему от полей ядру $(\partial_3)^2 \delta^4(x - y)$. Как было показано в приложении к гл. 9, интеграл от такого гауссиана по $A_{\alpha 0}(x)$ с точностью до постоянного множителя равен значению подынтегрального выражения в стационарной «точке» показателя экспоненты. Но стационарная точка действия есть решение уравнения связи (15.4.7), поскольку вариационная производная действия в данном случае равна

$$\frac{\delta I}{\delta A_{\alpha 0}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_{\alpha 0}} = J_{\alpha}^0 + \partial_i \Pi_{\alpha i} + C_{\beta\alpha\gamma} \Pi_{\beta i} A_{\gamma i} - \partial_3^2 A_{\alpha 0}.$$

Отсюда, вместо того, чтобы использовать для $A_{\alpha 0}$ решение уравнения (15.4.7), можно с тем же успехом считать эту величину независимой переменной интегрирования.

Итак, если рассматривать $A_{\alpha 0}$ как независимую переменную, гамильтониан $\int d^3x \mathcal{H}$ очевидно квадратичен по $\Pi_{\alpha i}$, причем коэффициент при слагаемом второго порядка $\Pi_{\alpha i}(x) \Pi_{\beta j}(y)$ определяется не зависящим от поля ядром $\frac{1}{2} \delta^4(x - y) \delta_{ij}$. Предполагая, что это же верно и для материальной переменной π_i , можно с точностью до постоянного множителя вычислить интегралы по путям по π_i и $\Pi_{\alpha i}$, просто взяв π_i и $\Pi_{\alpha i}$ в стационарных точках действия, соответствующих лагранжиану (15.4.1):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta I}{\delta \pi_i} = \partial_0 \psi_i - \frac{\partial \mathcal{H}_M}{\partial \pi_i}, \\ 0 &= \frac{\delta I}{\delta \Pi_{\alpha i}} = \partial_0 A_{\alpha i} - \Pi_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i} = F_{\alpha 0 i} - \Pi_{\alpha i}. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений обратно в (15.4.13) дает

$$\begin{aligned} I &= \int d^4x \left[L_M + \frac{1}{2} F_{\alpha 0 i} F_{\alpha 0 i} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} - \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} + \frac{1}{2} (\partial_3 A_{\alpha 0})^2 \right] = \int d^4x L, \end{aligned} \quad (15.4.14)$$

где $\mathcal{L}$ — лагранжиан (15.3.1), с которого мы начинали! Иными словами, мы должны брать функциональные интегралы по $\psi_i(x)$ и всем четырем компонентам $A_{\alpha\mu}(x)$ с явно ковариантным весовым множителем $\exp(iI)$, определяющимся выражениями (15.4.14) и (15.3.1), а условие аксиальной калибровки обеспечивается включением множителя

$$\prod_{x, \alpha} \delta(A_{\alpha 3}(x)). \quad (15.4.15)$$

Если $\phi_A, \phi_B \dots$ калибровочно-инвариантны, то

$$\begin{aligned} \langle T\{\phi_A \phi_B \dots\} \rangle_{\text{VACUUM}} &\propto \int \left[\prod_{l,x} d\psi_l(x) \right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x) \right] \\ &\times \phi_A \phi_B \dots \exp\{iI + \text{слагаемые с } \varepsilon\} \prod_{x,\alpha} \delta(A_{\alpha 3}(x)), \end{aligned} \quad (15.4.16)$$

где калибровочно- и лоренц-инвариантное действие I дается формулой (15.4.14).

* * *

Для будущих ссылок заметим, что элемент объема $\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x)$ для интегрирования по калибровочным полям в (15.4.16) калибровочно-инвариантен в том смысле, что

$$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\Lambda\alpha\mu}(x) = \prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x), \quad (15.4.17)$$

где $A_{\Lambda\alpha\mu}(x)$ есть результат действия калибровочного преобразования с параметрами $\Lambda_\alpha(x)$ на $A_{\alpha\mu}(x)$. Достаточно показать, что это верно для преобразований близких к единичному, например, с инфинитезимальными параметрами $\lambda_\alpha(x)$. В этом случае

$$A_{\lambda\alpha}^\mu = A_\alpha^\mu + \partial^\mu \lambda_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\mu \lambda_\gamma,$$

так что элементы объема связаны соотношением

$$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\lambda\alpha\mu}(x) = \text{Det}(.f) \prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x)$$

где $.f$ — «матрица»:

$$N_{\alpha\mu x, \beta\nu y} = \frac{\delta A_{\lambda\alpha\mu}(x)}{\delta A_{\beta\nu}(y)} = \delta^4(x-y) \delta_\mu^\nu [\delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\gamma(x)].$$

Детерминант $.f$ равен единице в первом порядке по λ_g , так как след $C_{\alpha\alpha\gamma}$ равен нулю.

В этой главе будем предполагать, что элемент объема интегрирования по полям материи $\prod_{n,x} d\psi_n(x)$ также калибровочно-инвариантен. Этот пункт таит много тонкостей, к которым мы еще вернемся в гл. 22, однако там показано, что наше предположение оказывается верным для рассматриваемых сейчас неабелевых калибровочных теорий сильных и электрослабых взаимодействий.

15.5. Метод де Витта–Фаддеева–Попова

Формула (15.4.16) для функционального интеграла была получена в калибровке, удобной для канонического квантования, однако фейнмановские правила, которые можно было бы из нее вывести, скрывали бы лежащую в основе теории вращательную и лоренц-инвариантность. Чтобы получить явно лоренц-инвариантные фейнмановские правила, следует изменить калибровку.

Прежде всего, заметим, что формула (15.4.16) является (с точностью до несущественного постоянного множителя) частным случаем общего класса функциональных интегралов вида

$$\mathcal{J} = \int \left[\prod_{n,x} d\phi_n(x) \right] \mathcal{G}[\phi] B[f[\phi]] \text{Det } \mathcal{F}[\phi], \quad (15.5.1)$$

Здесь $\phi_n(x)$ — набор калибровочных полей и полей материи, $\prod_{n,x} d\phi_n(x)$ — элемент объема, $\mathcal{G}[\phi]$ — функционал от $\phi_n(x)$, удовлетворяющий условию калибровочной инвариантности

$$\mathcal{G}[\phi_\lambda] \prod_{n,x} d\phi_{\lambda n}(x) = \mathcal{G}[\phi] \prod_{n,x} d\phi_n(x), \quad (15.5.2)$$

где $\phi_{\lambda n}(x)$ — результат действия на ϕ калибровочного преобразования с параметрами $\lambda_\alpha(x)$. (Обычно, когда это условие выполняется, функционал $\mathcal{G}$ и элемент объема инвариантны по-отдельности, но нам понадобится только формула (15.5.2).) Кроме того, $f_\alpha[\phi; x]$ является калибровочно неинвариантным «фиксирующим калибровку функционалом» этих полей, также зависящим от x и α , $B[f]$ — некоторый числовой функционал, определенный для произвольных функций $f_\alpha(x)$ от x и α , $\mathcal{F}$ — «матрица»

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\Phi] \equiv \frac{\delta f_{\alpha}[\Phi_{\lambda}; x]}{\delta \lambda_{\beta}(y)} \Big|_{\lambda=0}. \quad (15.5.3)$$

(В соответствии с нашими обычными обозначениями для функционалов от функций или функционалов считается, что $B[f[\Phi]]$ зависит от значений, принимаемых функционалом $f_{\alpha}[\Phi; x]$ для всех значений не указанных явно переменных α и x , но при фиксированной выписанной явно переменной — функции $\Phi_n(x)$.) Выражение (15.5.1) не является самым широким из возможных обобщением выражения (15.4.16). В разделе 15.7 мы увидим, что существует дальнейшее обобщение, требуемое в ряде случаев. Начнем все же с (15.5.1), так как это поможет обосновать формализм раздела 15.7, и вполне достаточно для работы с неабелевыми калибровочными теориями в большинстве удобных калибровок.

Нам следует проверить, что интеграл по путям (15.4.16) является на самом деле частным случаем выражения (15.5.1). Поля $\Phi_n(x)$ в (15.4.16) включают как $A_{\alpha\mu}(x)$, так и поля материи $\Psi_l(x)$, причем

$$f_{\alpha}[A, \Psi; x] = A_{\alpha 3}(x), \quad (15.5.4)$$

$$B[f] = \prod_{x, \alpha} \delta(f_{\alpha}(x)), \quad (15.5.5)$$

$$\mathcal{G}[A, \Psi] = \exp\{iI + \text{слагаемые с } \epsilon\} \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \dots, \quad (15.5.6)$$

$$\prod_{n, x} d\Phi_n(x) = \left[\prod_{l, x} d\Psi_l(x) \right] \left[\prod_{\alpha, \mu, x} dA_{\alpha}^{\mu}(x) \right]. \quad (15.5.7)$$

(Мы опускаем различие между верхними и нижними индексами α , β , ...) Сравнение (15.4.16) с выражениями (15.5.1)–(15.5.3) показывает, что эти интегралы по путям действительно одинаковы, если не считать множителя $\text{Det } \mathcal{F}[\Phi]$. В частном случае фиксирующего калибровку функционала (15.5.4) этот множитель не зависит от поля. Действительно, если $A_{\alpha}^3(x) = 0$, тогда изменение $A_{\alpha}^3(x)$ под действием калибровочного преобразования с параметрами $\lambda_{\alpha}(x)$ равно

$$A_{\lambda\alpha}^3(x) = \partial_3 \lambda_{\alpha}(x) = \int d^4 y \lambda_{\alpha}(y) \partial_3 \delta^4(x - y),$$

так что в данном случае (15.5.3) — не зависящая от поля «матрица»

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\Phi] = \delta_{\alpha\beta} \partial_3 \delta^4(x - y).$$

Поэтому в такой калибровке детерминант в (15.5.1) тоже не зависит от поля. Как обсуждалось в гл. 9, не зависящие от поля множители в функциональном интеграле влияют только на ту часть средних и матричных элементов S -матрицы, которые связаны с вакуумными флуктуациями и несущественны при вычислении связных частей S -матрицы.

Чтобы увидеть, что функциональный интеграл (15.4.16) для неабелевых калибровочных теорий является частным случаем общего интеграла по путям (15.5.1), следует заметить, что в этом выражении мы можем свободно изменять калибровку. Конкретнее, справедлива теорема, что *интеграл (15.5.1) действительно не зависит (в широких пределах) от фиксирующей калибровку функционала $f_\alpha[\Phi; x]$ и зависит от выбора функционала $B[f]$ только через несущественный постоянный множитель.*

Доказательство. Заменяем везде в (15.5.1) переменную интегрирования Φ на новую переменную Φ_Λ , где $\Lambda^\alpha(x)$ — произвольный (но фиксированный) набор параметров калибровочного преобразования:

$$\mathcal{I} = \int \left[\prod_{n,x} d\Phi_{\Lambda n}(x) \right] \mathcal{G}[\Phi_\Lambda] B[f[\Phi_\Lambda]] \text{Det } \mathcal{F}[\Phi_\Lambda], \quad (15.5.8)$$

(Этот шаг математически тривиален, напоминая замену интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ на $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$, и пока что не использует наши предположения о калибровочной инвариантности.) Затем используем предполагаемую калибровочную инвариантность (15.5.2) меры $\text{Pd}\Phi$, умноженной на функционал $\mathcal{G}[\Phi]$, чтобы переписать это выражение в виде

$$\mathcal{I} = \int \left[\prod_{n,x} d\Phi_{\Lambda n}(x) \right] \mathcal{G}[\Phi] B[f[\Phi_\Lambda]] \text{Det } \mathcal{F}[\Phi_\Lambda]. \quad (15.5.9)$$

Так как $\Lambda^\alpha(x)$ было произвольным, выражение в левой части не может от него зависеть. Интегрируя по $\Lambda^\alpha(x)$ с некоторым подходящим весовым функционалом $\rho[\Lambda]$ (он будет выбран ниже), получим:

$$\mathcal{J} = \int \left[\prod_{\alpha, x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \rho[\Lambda] = \int \left[\prod_{n, x} d\varphi_n(x) \right] \mathcal{G}[\varphi] C[\varphi], \quad (15.5.10)$$

где

$$C[\varphi] \equiv \int \left[\prod_{\alpha, x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \rho[\Lambda] B[f[\varphi_\Lambda]] \text{Det } \mathcal{F}[\varphi_\Lambda]. \quad (15.5.11)$$

Теперь выражение (15.5.3) принимает вид

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\varphi_\Lambda] = \left. \frac{\delta f_\alpha[(\varphi_\Lambda)_\lambda; x]}{\delta \lambda^\beta(y)} \right|_{\lambda=0}. \quad (15.5.12)$$

Мы предполагаем, что рассматриваемые преобразования образуют группу. Это означает, что результат осуществления калибровочного преобразования с параметрами $\Lambda^\alpha(x)$, за которым следует калибровочное преобразование с параметрами $\lambda^\alpha(x)$, можно записать как действие одного калибровочного преобразования, являющегося «произведением» предыдущих, с параметрами $\tilde{\Lambda}^\alpha(x; \Lambda, \lambda)$:

$$(\varphi_\Lambda)_\lambda = \varphi_{\tilde{\Lambda}(\Lambda, \lambda)}. \quad (15.5.13)$$

Используя цепное правило частного (функционального) дифференцирования, имеем

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\varphi_\Lambda] = \int \mathcal{J}_{\alpha x, \gamma z}[\varphi, \Lambda] \mathcal{R}^{\gamma z}_{\beta y}[\Lambda] d^4 z, \quad (15.5.14)$$

где

$$\mathcal{J}_{\alpha x, \gamma z}[\varphi, \Lambda] \equiv \left. \frac{\delta f_\alpha[\varphi_{\tilde{\Lambda}}; x]}{\delta \tilde{\Lambda}^\gamma(z)} \right|_{\tilde{\Lambda}=\Lambda} = \frac{\delta f_\alpha[\varphi_\Lambda; x]}{\delta \Lambda^\gamma(z)} \quad (15.5.15)$$

и

$$\mathcal{R}^{\gamma z}_{\beta y}[\Lambda] = \left. \frac{\delta \tilde{\Lambda}^\gamma(z; \Lambda, \lambda)}{\delta \lambda^\beta(y)} \right|_{\lambda=0}. \quad (15.5.16)$$

Отсюда следует, что

$$\text{Det } \mathcal{F}[\varphi_\Lambda] = \text{Det } \mathcal{J}[\varphi, \Lambda] \text{Det } \mathcal{R}[\Lambda]. \quad (15.5.17)$$

Заметим, что $\text{Det } \mathcal{J}[\varphi, \Lambda]$ есть не что иное, как якобиан преобразования переменных интегрирования от $\Lambda^\alpha(x)$ к $f_\alpha[\varphi_\Lambda; x]$ (при фиксированном φ). Поэтому если выбрать весовую функцию $\rho[\Lambda]$ в виде

$$\rho(\Lambda) = 1/\text{Det } \mathcal{R}[\Lambda], \quad (15.5.18)$$

то

$$\begin{aligned} C[\varphi] &= \int \left[\prod_{\alpha, x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \text{Det } \mathcal{J}[\varphi, \Lambda] B[f[\varphi_\Lambda]] \\ &= \int \left[\prod_{\alpha, x} d\Lambda^\alpha(x) \right] B[f] \equiv C, \end{aligned} \quad (15.5.19)$$

что очевидно не зависит от φ . (Читатель может узнать в формуле (15.5.18) определение инвариантной меры (меры Хаара) на пространстве групповых параметров.) Имеем окончательно

$$\mathcal{J} = \frac{C \int \left[\prod_{n, x} d\varphi_n(x) \right] \mathcal{G}[\varphi]}{\int \left[\prod_{\alpha, x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \rho[\Lambda]}. \quad (15.5.20)$$

Это выражение явно не зависит от нашего выбора $f_\alpha[\varphi; x]$, который полностью свелся к изменению переменной интегрирования, и зависит от выбора $B[f]$ только через константу C , что и требовалось доказать.

Прежде чем описывать приложения этой теоремы, следует сделать паузу и отметить неясное место в доказательстве. Интегралы в числителе и знаменателе выражения (15.5.20) плохо определены по одной и той же причине. Так как предполагается, что $\mathcal{G}[\varphi]$ калибровочно инвариантно, интеграл от этой величины по φ не может, вероятно, сходиться. Подынтегральное выражение равно константе вдоль всех «орбит», получаемых калибровочным преобразованием φ в φ_λ со всеми возможными $\lambda^\alpha(x)$. Аналогично, подынтегральное выражение в знаменателе расходится, так как $\rho(\Lambda) \text{Pd}\Lambda$

есть не что иное, как обычный инвариантный элемент объема при интегрировании по группе, и он тоже постоянен вдоль «орбит» $\Lambda \rightarrow \Lambda(\Lambda, \lambda)$. Такую расходимость в числителе и знаменателе (15.5.20) можно устранить, переформулировав теорию на конечной пространственно-временной решетке. В этом случае объем калибровочной группы равен просто объему самой глобальной группы Ли, умноженной на число узлов решетки. Поскольку фиксирующий калибровку множитель $B[f]$ устраняет эту расходимость в исходном определении (15.5.1) для левой части равенства (15.5.20), мы вправе считать, что при устремлении числа узлов решетки к бесконечности расходимости в числителе и знаменателе в правой части (15.5.20) сокращаются.

Теперь к делу. Мы видели, что среднее по вакууму (15.4.16) в аксиальной калибровке задается функциональным интегралом общего вида (15.5.1). Вооруженные доказанной выше теоремой, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \langle T\{O_A O_B \dots\} \rangle_V &\propto \int \left[\prod_{l,x} d\psi_l(x) \right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA^\mu_\alpha(x) \right] \\ &\times O_A O_B \dots \exp\{iI + \text{слагаемые с } \epsilon\} B[f[A, \psi]] \text{Det } \mathcal{F}[A, \psi]. \end{aligned} \quad (15.5.21)$$

для (почти) любого выбора $f_\alpha[A, \psi; x]$ и $B[f]$. Поэтому мы вправе теперь использовать (15.5.21) для вывода фейнмановских правил в более удобной калибровке.

Мы умеем вычислять функциональные интегралы от гауссианов, умноженных на полиномы, так что в общем случае выберем

$$B[f] = \exp\left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x f_\alpha(x) f_\alpha(x)\right) \quad (15.5.22)$$

с произвольным действительным параметром ξ . При таком выборе влияние множителя $B[f]$ в (15.5.21) заключается просто в добавлении к эффективному лагранжиану слагаемого

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha. \quad (15.5.23)$$

Простейший лоренц-инвариантный выбор фиксирующей калибровки функции f_α совпадает с выбором в электродинамике:

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu. \quad (15.5.24)$$

В этом случае голый пропагатор калибровочного поля может быть вычислен так же, как в электродинамике. Часть эффективного действия, отвечающая свободному векторному бозону, можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_{0A} &= - \int d^4x \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) (\partial^\mu A_\alpha{}^\nu - \partial^\nu A_\alpha{}^\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\alpha{}^\mu) (\partial^\nu A_\alpha{}^\nu) + \text{слагаемые с } \varepsilon \right] \\ &= - \frac{1}{2} \int d^4x \mathcal{D}_{\alpha\mu x, \beta\nu y} A_\alpha{}^\mu(x) A_\beta{}^\nu(y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha\mu x, \beta\nu y} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial y_\lambda} \delta^4(x-y) \\ &\quad - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \delta^4(x-y) + \text{слагаемые с } \varepsilon \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4p \left[\eta_{\mu\nu} (p^2 - i\varepsilon) - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) p_\mu p_\nu \right] e^{ip \cdot (x-y)}. \end{aligned}$$

Находя обратную матрицу к матрице в квадратных скобках, находим пропагатор

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\mu, \beta\nu}(x, y) &= (\mathcal{D}^{-1})_{\alpha\mu x, \beta\nu y} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4p \left[\eta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 - i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (15.5.25)$$

Это обобщение калибровок Ландау и Фейнмана, которые соответствуют значениям $\xi = 0$ и $\xi = 1$, соответственно. При $\xi \rightarrow 0$ функции

онал (15.5.22) очень быстро осциллирует за исключением области вблизи $f_\alpha = 0$, так что этот функционал действует как дельта-функция, воспроизводя калибровочное условие Ландау $\partial_\mu A^\mu = 0$, естественно приводящее к пропагатору, удовлетворяющему соответствующему условию $\partial^\mu \Delta_{\alpha\mu\beta\nu} = 0$. При ненулевых значениях ξ функционал $B[f]$ не отбирает калибровочных полей, удовлетворяющих какому-то конкретному калибровочному условию, наложенному на поле $A_{\alpha\mu}$. Обычно ссылаются на пропагатор (15.5.25) как на пропагатор в «обобщенной калибровке Фейнмана» или «обобщенной ξ -калибровке». Часто хорошей стратегией является вычисление физических амплитуд с произвольным ξ , и последующая проверка в конце вычислений, что результат от ξ не зависит.

С одной оговоркой фейнмановские правила становятся теперь очевидными. Вклады вершин извлекаются из слагаемых со взаимодействием в исходном лагранжиане $\mathcal{L}$, пропагаторы калибровочного поля даются выражением (15.5.25), а пропагаторы полей материи вычисляются как и раньше. Конкретно, трилинейное взаимодействие в $\mathcal{L}$ имеет вид

$$-\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) A_\beta^\mu A_\gamma^\nu$$

и соответствует вершине, к которой прикреплены три линии векторных бозонов. Если эти линии несут (входящие) импульсы p, q, k , а также лоренцовские и калибровочные индексы $\mu\alpha, \nu\beta, \rho\gamma$, то в соответствии с правилами Фейнмана в импульсном пространстве, вклад такой вершины в подынтегральное выражение равен

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p + q + k) [-iC_{\alpha\beta\gamma}] \times [p_\nu \eta_{\mu\lambda} - p_\lambda \eta_{\mu\nu} + q_\lambda \eta_{\nu\mu} - q_\mu \eta_{\nu\lambda} + k_\mu \eta_{\lambda\nu} - k_\nu \eta_{\lambda\mu}]. \quad (15.5.26)$$

Кроме того, член взаимодействия A^4 в $\mathcal{L}$, имеющий вид

$$-\frac{1}{4} C_{\varepsilon\alpha\beta} C_{\varepsilon\gamma\delta} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_\gamma^\mu A_\delta^\nu$$

соответствует вершине, к которой прикреплены четыре линии векторных бозонов. Если эти линии несут (входящие) импульсы $p, q, k,$

l , а также лоренцовские и калибровочные индексы $\mu\alpha$, $\nu\beta$, $\rho\gamma$ и $\sigma\delta$, вклад такой вершины в подынтегральное выражение равен

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p+q+k+l) \times \left[-C_{\varepsilon\alpha\beta} C_{\varepsilon\gamma\delta} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) - C_{\varepsilon\alpha\gamma} C_{\varepsilon\delta\beta} (\eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho}) - C_{\varepsilon\alpha\delta} C_{\varepsilon\beta\gamma} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma}) \right]. \quad (15.5.27)$$

(Напомним, что структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}$ включают множители констант связи, так что множители (15.5.26) и (15.5.27) — соответственно, первого и второго порядка по константам связи.)

Единственное усложнение в фейнмановских правилах, с которым мы до сих пор не имели дела, это наличие в (15.5.21) множителя $\text{Det } \mathcal{F}$, который *не постоянен* в произвольных калибровках. Переходим к рассмотрению этого множителя.

15.6. Госты

Посмотрим, как модифицируются фейнмановские правила для неабелевых калибровочных теорий с учетом множителя $\text{Det } \mathcal{F}$ в формуле (15.5.22). Для этого напомним, что, как показано в разделе 9.5, детерминант любой матрицы $\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}$ можно выразить как функциональный интеграл

$$\text{Det } \mathcal{F} \propto \int \left[\prod_{\alpha, x} d\omega_{\alpha}^*(x) \right] \left[\prod_{\alpha, x} d\omega_{\alpha}(x) \right] \exp(iI_{\text{GH}}), \quad (15.6.1)$$

где

$$I_{\text{GH}} \equiv \int d^4x d^4y \omega_{\alpha}^*(x) \omega_{\beta}(y) \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}. \quad (15.6.2)$$

Здесь ω_{α}^* и ω_{α} — набор независимых антикоммутирующих классических переменных, а константа пропорциональности не зависит от поля. (Чтобы воспроизвести множитель $\text{Det } \mathcal{F}$, полевые переменные ω_{α} и ω_{α}^* необходимо выбрать фермионными. Если бы они были бозонными, то функциональный интеграл (15.6.1) был бы пропорционален $(\text{Det } \mathcal{F})^{-1}$.) Поля ω_{α}^* и ω_{α} не обязательно связаны операцией комплексного сопряжения. Действительно, в разделе 15.7 мы увидим, что для некоторых целей следует предположить, что ω_{α}^* и ω_{α}

являются независимыми *действительными* переменными. Наличие множителя $\text{Det } \mathcal{F}$ эквивалентно включению $I_{\text{GH}}(\omega, \omega^*)$ в полное эффективное действие и интегрированием по «полям» ω и ω^* . Иначе говоря, для произвольных фиксирующих калибровку функционалов $f_\alpha(x)$ получаем

$$\begin{aligned} \langle T\{\rho_A \dots\} \rangle_V &\propto \int \left[\prod_{n,x} d\psi_n(x) \right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x) \right] \\ &\times \left[\prod_{\alpha,x} d\omega_\alpha(x) d\omega_\alpha^*(x) \right] \exp(iI_{\text{MOD}}[\psi, A, \omega, \omega^*]) \rho_A \dots, \end{aligned} \quad (15.6.3)$$

где I_{MOD} — модифицированное действие

$$I_{\text{MOD}} = \int \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha \right] + I_{\text{GH}}. \quad (15.6.4)$$

Поля ω_α и ω_α^* являются лоренцовскими скалярами (по крайней мере, в ковариантных калибровках), но подчиняются статистике Ферми. В данном случае связь между спином и статистикой реально не нарушается, так как не существует описываемых этими полями частиц, которые могли бы возникать в начальном или конечном состояниях*. По этой причине ω_α и ω_α^* называются полями «гостов» и «антигостов»**. Из (15.6.2) следует, что действие подчиняется закону сохранения величины, называемой «числом гостов» или «гостовским числом», равным +1 для ω_α , −1 для ω_α^* и 0 для всех остальных полей.

Фейнмановские правила для гостов проще всего выглядят в случае, когда «матрица» $\mathcal{F}$ может быть записана в виде

* Формально теорема о связи спина и статистики не нарушена, потому что эти поля нарушают условие теоремы о дефинитности метрики гильбертова пространства состояний. — *Прим. ред.*

** Английские термины «ghosts» и «antighosts», буквально «духи» и «антидухи», в контексте калибровочных теорий чаще переводятся калькой «госты» и «антигосты». Термин «духи» обычно используют в более общем контексте для обозначения полей с индефинитной метрикой. — *Прим. ред.*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1, \quad (15.6.5)$$

где $\mathcal{F}_0$ не зависит от поля и нулевого порядка по константе связи, а $\mathcal{F}_1$ зависит от поля и пропорциональна первой или более высокой степени константы связи. В этом случае пропагатор гостов равен

$$\Delta_{\alpha\beta}(x, y) = (\mathcal{F}_0^{-1})_{\alpha x, \beta y} \quad (15.6.6)$$

а вершины для гостов должны извлекаться из члена с взаимодействием

$$I'_{\text{GH}} = \int d^4x d^4y \omega_\alpha^*(x) \omega_\beta(y) (\mathcal{F}_1)_{\alpha x, \beta y}. \quad (15.6.7)$$

Например, в рассмотренной в предыдущем разделе обобщенной ξ -калибровке имеем

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu \quad (15.6.8)$$

и для бесконечно малого калибровочного параметра λ_α формула (15.1.9) принимает вид:

$$A_{\alpha\lambda}^\mu = A_\alpha^\mu + \partial^\mu \lambda_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\beta A_\gamma^\mu,$$

так что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y} &= \left. \frac{\delta \partial_\mu A_{\alpha\lambda}^\mu(x)}{\delta \lambda_\beta(y)} \right|_{\lambda=0} \\ &= \square \delta^4(x - y) + C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [A_\gamma^\mu(x) \delta^4(x - y)]. \end{aligned} \quad (15.6.9)$$

Это выражение имеет вид (15.6.5), где

$$(\mathcal{F}_0)_{\alpha x, \beta y} = \square \delta^4(x - y) \delta_{\alpha\beta}, \quad (15.6.10)$$

$$(\mathcal{F}_1)_{\alpha x, \beta y} = -C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [A_\gamma^\mu(x) \delta^4(x - y)]. \quad (15.6.11)$$

Из формул (15.6.6) и (15.6.10) видим, что пропагатор гостов имеет вид

$$\Delta_{\alpha\beta}(x, y) = \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^{-4} \int d^4p (p^2 - i\epsilon)^{-1} e^{ip \cdot (x-y)}, \quad (15.6.12)$$

так что в данной калибровке госты ведут себя как бесспиновые фермионы нулевой массы, преобразующиеся по присоединенному представлению калибровочной группы. Используя формулы (15.6.7) и (15.6.11) и интегрируя по частям, находим, что слагаемое в действии, описывающее взаимодействие гостов, имеет вид

$$I'_{\text{ГН}} = \int d^4x C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \omega_\alpha^*}{\partial x^\mu} A_\gamma^\mu \omega_\beta. \quad (15.6.13)$$

Это взаимодействие соответствует вершинам, к которым прикреплены одна выходящая и одна входящая линии гостов и одна линия векторного бозона. Если эти линии несут (входящие) импульсы p, q, k , соответственно, а калибровочное поле несет векторный индекс μ , то по правилам Фейнмана в импульсном пространстве вклад такой вершины в подынтегральное выражение равен

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p + q + k) \times i p_\mu C_{\alpha\beta\gamma}. \quad (15.6.14)$$

Госты распространяются вдоль петель, причем к каждой вершине вдоль петель подсоединена одна линия векторного бозона. Кроме того, каждая петля гостов вносит дополнительный знак «минус», что обычно для фермионных полевых переменных.

Лишний знак «минус» для гостовских петель позволяет считать, что каждое гостовское поле ω_α вместе со связанным с ним антигостовским полем ω_α^* представляют нечто вроде отрицательной степени свободы. Эти отрицательные степени свободы необходимы потому, что при использовании ковариантных пропагаторов калибровочных полей мы завышаем результат. Физические степени свободы — это число компонент $A_\alpha^\mu(x)$ за вычетом числа параметров $\Lambda_\alpha(x)$, необходимых для описания калибровочного преобразования*.

Подведем итоги. В обобщенной ξ -калибровке модифицированное действие (15.6.4) может быть записано в виде

$$I_{\text{MOD}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{MOD}}, \quad (15.6.15)$$

* Фактически, вдвое больше. — Прим. ред.

где модифицированный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MOD}} = \mathcal{L}_M - \frac{1}{4} F_\alpha^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\alpha^\mu) (\partial_\nu A_\alpha^\nu) \\ - \partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\alpha^*) A_\gamma^\mu \omega_\beta. \end{aligned} \quad (15.6.16)$$

Важно, что этот лагранжиан *перенормируем* (если этим свойством обладает лагранжиан материи) в том элементарном понимании, что его слагаемые содержат произведения полей и их производных массовой размерности четыре или меньше *. (Кинематическое слагаемое $-\partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\alpha$ в (15.6.16) фиксирует массовую размерность полей ω и ω^* равной единице, как у обычного скалярного или калибровочного поля.) Однако, перенормируемость не сводится к подсчету индекса расходимости. Необходимо, чтобы для каждой расходимости существовал контрчлен, который ее устраняет **. В следующем разделе мы рассмотрим замечательную симметрию, которую затем используем в разделе 17.2 для того, чтобы показать, что неабелевы калибровочные теории действительно перенормируемы в указанном смысле. Более того, эта симметрия может заменить подход де Витта–Фаддеева–Попова, которому мы пока что следовали.

15.7. БРСТ симметрия

Хотя описанный в двух предыдущих разделах метод де Витта–Фаддеева–Попова явно демонстрирует лоренц-инвариантность теории, он все же базируется на выборе калибровки и, следовательно, затемняет лежащую в основе теории калибровочную инвариантность. Это становится серьезной проблемой при попытках

* Говорят, что теория (или лагранжиан) перенормируема по индексу (см. т. I). Под массовой размерностью понимается размерность членов в лагранжиане, выраженная в степенях массы. — *Прим. ред.*

** Эта недостаточно четкая авторская фраза подразумевает, что соответствующим образом подобранные контрчлены должны иметь структуру исходного действия, иными словами, имеется в виду мультипликативная перенормируемость (см. ниже начало раздела 17.2). — *Прим. ред.*

доказать перенормируемость теории. Ведь калибровочная инвариантность ограничивает форму тех слагаемых в лагранжиане, которые могут выполнять роль контрчленов для поглощения ультрафиолетовых расходимостей. Но если мы фиксировали калибровку, то откуда мы знаем, что калибровочная инвариантность по-прежнему ограничивает возможные расходимости?

Примечательно, однако, что даже после выбора калибровки функциональный интеграл все еще обладает симметрией, связанной с калибровочной инвариантностью. Эта симметрия была открыта в 1975 году Бекки, Руэ и Сторой¹⁰ (и независимо Тютиным¹¹) через несколько лет после работы Фаддеева, Попова и де Витта, и в честь своих первооткрывателей называется БРСТ симметрией. Мы опишем ее примерно так, как это было сделано в первоначальных работах, как побочный продукт развития метода Фаддеева, Попова и де Витта. Однако мы увидим, что БРСТ симметрия может рассматриваться и как замена подхода Фаддеева, Попова и де Витта. Из выражений (15.6.3) и (15.6.4) следует, что фейнмановские правила для неабелевой калибровочной теории можно получить из интеграла по путям по полям материи, калибровочным полям и полям гостов с модифицированным действием, которое можно записать в виде

$$I_{\text{MOD}} = I_{\text{EFF}} + I_{\text{GH}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{MOD}}, \quad (15.7.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{MOD}} \equiv \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha + \omega_\alpha^* \Delta_\alpha, \quad (15.7.2)$$

где, по определению,

$$\Delta_\alpha(x) \equiv \int d^4y \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[A, \psi] \omega_\beta(y). \quad (15.7.3)$$

Это отвечает выбору фиксирующего калибровку функционала в (15.5.21) в виде

$$B[f] \propto \exp\left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x f_\alpha f_\alpha\right) \quad (15.7.4)$$

Для наших целей полезно переписать $B[f]$ как интеграл Фурье:

$$B[f] = \int \left[\prod_{\alpha, x} dh_{\alpha}(x) \right] \exp \left[\frac{i\xi}{2} \int h_{\alpha} h_{\alpha} \right] \exp \left[i \int d^4x f_{\alpha} h_{\alpha} \right]. \quad (15.7.5)$$

Теперь мы должны брать функциональный интеграл по полю h_{α} (его часто называют «полем Наканиши–Лаутрупа»^{11a}), а также по полям материи, калибровочным, гостовским и антигостовским полям с новым модифицированным действием

$$I_{\text{NEW}} = \int d^4x \left(\mathcal{L} + \omega_{\alpha}^* \Delta_{\alpha} + h_{\alpha} f_{\alpha} + \frac{1}{2} \xi h_{\alpha} h_{\alpha} \right). \quad (15.7.6)$$

Это модифицированное действие калибровочно неинвариантно. Оно и должно быть таковым, если мы хотим использовать его в функциональных интегралах. Однако действие инвариантно относительно преобразования БРСТ симметрии, параметризованного бесконечно малой константой θ , которая антикоммутирует с ω_{α} , ω_{α}^* и всеми фермионными полями материи. При заданном параметре θ БРСТ преобразование имеет вид

$$\delta_{\theta} \psi = i t_{\alpha} \theta \omega_{\alpha} \psi, \quad (15.7.7)$$

$$\delta_{\theta} A_{\alpha\mu} = \theta D_{\mu} \omega_{\alpha} = \theta [\partial_{\mu} \omega_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_{\gamma}], \quad (15.7.8)$$

$$\delta_{\theta} \omega_{\alpha}^* = -\theta h_{\alpha}, \quad (15.7.9)$$

$$\delta_{\theta} \omega_{\alpha} = -\frac{1}{2} \theta C_{\alpha\beta\gamma} \omega_{\beta} \omega_{\gamma}, \quad (15.7.10)$$

$$\delta_{\theta} h_{\alpha} = 0. \quad (15.7.11)$$

(Напомним, что в фермионных функциональных интегралах нет никакой связи между ω_{α} и ω_{α}^* , так что выражение (15.7.9) не должно быть сопряженным к (15.7.10).) Поскольку h_{α} инвариантно относительно БРСТ преобразований, мы можем, не нарушая БРСТ инвариантности действия, по желанию заменить гауссовский множитель $\exp(\frac{1}{2} i \xi \int h_{\alpha} h_{\alpha})$ в (15.7.5) на произвольный гладкий функционал от h_{α} , что приводит к произвольному функционалу $B[f]$. Однако для целей диаграммных вычислений и перенормировки полезно оставить $B[f]$ в гауссовой форме.

При проверке инвариантности действия (15.7.1) весьма полезно заметить сначала, что преобразование (15.7.7)–(15.7.11) является *нильпотентным*. Это означает, что если F — некоторый функционал от ψ , A , ω , ω^* и h , и sF определено равенством

$$\delta_\theta F \equiv \theta sF, \quad (15.7.12)$$

то *

$$\delta_\theta(sF) = 0 \quad (15.7.13)$$

или эквивалентно

$$s(sF) = 0. \quad (15.7.14)$$

Можно непосредственно проверить эту нильпотентность, когда δ_θ действует на одно поле. Во-первых, при действии на поле материи

$$\begin{aligned} \delta_\theta s\psi &= it_\alpha \delta_\theta(\omega_\alpha \psi) = -\frac{1}{2} i C_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi - t_\alpha t_\beta \omega_\alpha \theta \omega_\beta \psi \\ &= -\frac{1}{2} i C_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi + t_\alpha t_\beta \theta \omega_\alpha \omega_\beta \psi. \end{aligned}$$

Произведение $\omega_\alpha \omega_\beta$ во втором слагаемом справа антисимметрично по α и β , поэтому можно заменить $t_\alpha t_\beta$ в этом слагаемом на $\frac{1}{2}[t_\alpha, t_\beta]$, так что это слагаемое сокращается с первым:

$$ss\psi = 0. \quad (15.7.15)$$

Далее, действуя на калибровочное поле, имеем:

$$\begin{aligned} \delta_\theta sA_{\alpha\mu} &= \delta_\theta D_\mu \omega_\alpha \\ &= \partial_\mu \delta_\theta \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} \delta_\theta A_{\beta\mu} \omega_\gamma + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \delta_\theta \omega_\gamma = \end{aligned}$$

* В первых работах по БРСТ симметрии функционал $B[f]$ был оставлен в виде (15.7.4), так что h_α в (15.7.9) заменяется на $-f_\alpha/\xi$, и БРСТ преобразование было нильпотентным только при действии на функции от ω_α , калибровочных полей и полей материи, но не на функции от ω_α^*

$$\begin{aligned}
&= \theta \left(-\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (\omega_\beta \omega_\gamma) + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\beta) \omega_\gamma \right. \\
&\quad \left. + C_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\delta\epsilon} A_{\delta\mu} \omega_\epsilon \omega_\gamma - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} A_{\beta\mu} \omega_\delta \omega_\epsilon \right) \\
&= \theta \left(\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\beta) \omega_\gamma + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\gamma) \omega_\beta \right. \\
&\quad \left. - C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} A_{\delta\mu} \omega_\epsilon \omega_\beta - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} A_{\beta\mu} \omega_\delta \omega_\epsilon \right).
\end{aligned}$$

Первые два слагаемых в последнем выражении сокращаются в силу антисимметрии $C_{\alpha\beta\gamma}$ по β и γ , а третье и четвертое слагаемые сокращаются в силу тождества Якоби (15.1.5), так что

$$ssA_{\alpha\mu} = 0. \quad (15.7.16)$$

Из формул (5.7.9) и (15.7.11) немедленно вытекает, что

$$ss\omega_\alpha^* = 0 \quad (15.7.17)$$

и

$$ssh_\alpha = 0. \quad (15.7.18)$$

Окончательно

$$\begin{aligned}
\delta_\theta s\omega_\alpha &= -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} \delta_\theta (\omega_\beta \omega_\gamma) \\
&= \frac{1}{4} \theta (C_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\delta\epsilon} \omega_\delta \omega_\epsilon \omega_\gamma + C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} \omega_\beta \omega_\delta \omega_\epsilon) \\
&= \frac{1}{4} \theta C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} [-\omega_\delta \omega_\epsilon \omega_\beta + \omega_\beta \omega_\delta \omega_\epsilon],
\end{aligned}$$

что с учетом свойств симметрии произведения $\omega_\beta \omega_\delta \omega_\epsilon$ при перестановке индексов равно нулю в силу тождества Якоби:

$$ss\omega_\alpha = 0. \quad (15.7.19)$$

Рассмотрим теперь произведение двух полей ϕ_1 и ϕ_2 , каждое из которых или оба сразу могут быть полями ψ , A , ω , ω^* или h ,

причем не обязательно взятыми в одной и той же точке пространства-времени. Тогда

$$\delta_\theta(\varphi_1\varphi_2) = \theta(s\varphi_1)\varphi_2 + \varphi_1\theta(s\varphi_2) = \theta[(s\varphi_1)\varphi_2 \pm \varphi_1s\varphi_2],$$

где знак «плюс» соответствует случаю, когда φ_1 — бозонное поле, а знак «минус», когда φ_1 — фермионное поле. Это означает, что

$$s(\varphi_1\varphi_2) = (s\varphi_1)\varphi_2 \pm \varphi_1s\varphi_2.$$

Как мы видели, $\delta_\theta(s\varphi_1) = \delta_\theta(s\varphi_2) = 0$, действие БРСТ преобразования на $s(\varphi_1\varphi_2)$ равно

$$\delta_\theta s(\varphi_1\varphi_2) = (s\varphi_1)\theta(s\varphi_2) \pm \theta(s\varphi_1)(s\varphi_2).$$

Но $s\varphi$ всегда имеет статистику, противоположную φ , так что, перемещение θ в первом слагаемом в правой части налево вносит знаковый множитель $\mp$:

$$\delta_\theta s(\varphi_1\varphi_2) = \theta[\mp(s\varphi_1)(s\varphi_2) \pm (s\varphi_1)(s\varphi_2)].$$

Продолжая в том же духе, видим, что БРСТ преобразования нильпотентны при действии на любое произведение полей в произвольных пространственно-временных точках:

$$\delta_\theta s(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\dots) = 0.$$

Любой функционал $F[\varphi]$ можно записать как сумму многократных интегралов от таких произведений с s -числовыми коэффициентами, так что аналогично получаем

$$\delta_\theta sF[\varphi] = \theta ssF[\varphi] = 0. \quad (15.7.20)$$

Доказательство нильпотентности БРСТ преобразования завершено.

Вернемся к проверке инвариантности действия (15.7.6) относительно БРСТ преобразований. Во-первых, заметим, что для любого функционала только от полей материи и калибровочных полей БРСТ преобразование есть просто калибровочное преобразование с инфинитезимальным калибровочным параметром

$$\lambda_\alpha(x) = \theta \omega_\alpha(x). \quad (15.7.21)$$

Поэтому первое слагаемое в (15.7.21) автоматически БРСТ инвариантно:

$$\delta_\theta \int d^4x \mathcal{L} = 0. \quad (15.7.22)$$

Чтобы вычислить результат действия БРСТ преобразования на оставшуюся часть действия (15.7.6), заметим, что его действие на функцию, фиксирующую калибровку, есть в точности калибровочное преобразование (15.7.21), так что

$$\begin{aligned} \delta_\theta f_\alpha[x; A, \psi] &= \int \frac{\delta f_\alpha[x; A_\lambda, \psi_\lambda]}{\delta \lambda^\beta(y)} \Big|_{\lambda=0} \theta \omega_\beta(y) d^4y \\ &= \theta \int \mathcal{F}_{\alpha\beta}(y) \omega_\beta(y) d^4y \end{aligned}$$

или, записывая это выражение с помощью величины (15.7.3),

$$\delta_\theta f_\alpha[x; A, \psi] = \theta \Delta_\alpha(x; A, \psi, \omega). \quad (15.7.23)$$

(Заметим, что F — бозонная величина, так что при перемещении θ налево знак не меняется.) Напомним также, что $\delta_\theta \omega_\alpha = -\theta h_\alpha$ и $\delta_\theta h_\alpha = 0$. Поэтому отличные от $\mathcal{L}$ слагаемые в подынтегральном выражении «нового» действия (15.7.6) можно записать в виде

$$\omega_\alpha^* \Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2} \xi h_\alpha h_\alpha = s \left(\omega_\alpha^* f_\alpha + \frac{1}{2} \xi \omega_\alpha^* h_\alpha \right), \quad (15.7.24)$$

Иначе говоря,

$$I_{\text{NEW}} = \int d^4x \mathcal{L} + s\Psi, \quad (15.7.25)$$

где

$$\Psi \equiv - \int d^4x \left(\omega_\alpha^* f_\alpha + \frac{1}{2} \xi \omega_\alpha^* h_\alpha \right). \quad (15.7.26)$$

Из нильпотентности БРСТ преобразования немедленно вытекает, что слагаемые $s\Psi$ и $\int d^4x \mathcal{L}$ БРСТ инвариантны.

В определенном смысле верен и обратный результат. В разделе 17.2. мы увидим, что перенормируемый лагранжиан, подчиняю-

щийся БРСТ инвариантности и другим симметриям лагранжиана (15.7.25), должен иметь вид (17.7.25) с точностью до изменения значений ряда постоянных коэффициентов. Но этого еще недостаточно для доказательства перенормируемости таких теорий. Преобразования БРСТ симметрии действуют на поля нелинейно, и в этом случае нет простой связи между симметриями лагранжиана и симметриями матричных элементов и функций Грина. В разделе 17.2. с помощью развитых в следующей главе методов внешнего поля будет показано, что ультрафиолетово расходящиеся части фейнмановских амплитуд (но не их конечные части) действительно подчиняются условию некоторой перенормированной БРСТ инвариантности, и это позволяет завершить доказательство перенормируемости.

Из выражения (15.7.25) следует, что физическое содержание любой калибровочной теории заключено в ядре БРСТ оператора (т. е. в произвольном БРСТ инвариантном выражении $\int d^4x \mathcal{L} + s\Psi$), взятом по модулю (т. е. за вычетом — *прим. пер.*) слагаемых, принадлежащих образу БРСТ преобразования (т. е. слагаемых вида $s\Psi$). Для любого нильпотентного преобразования ядро, взятое по модулю образа, определяется как *когомология* этого преобразования *. То, что физическое содержание калибровочной теории можно отождествить с когомологией БРСТ оператора, можно обосновать еще с одной точки зрения¹². Согласно фундаментальному физическому требованию матричные элементы между физическими состояниями должны быть независимы от нашего выбора фиксирующей калибровку функции f_α , иными словами, независимы от функционала Ψ в (15.7.25). Изменение любого матричного элемента $\langle \alpha | \beta \rangle$ за счет изменения $\tilde{\delta}\Psi$ в Ψ равно

$$\tilde{\delta}\langle \alpha | \beta \rangle = i\langle \alpha | \tilde{\delta}I_{\text{нов}} | \beta \rangle = i\langle \alpha | s\tilde{\delta}\Psi | \beta \rangle. \quad (15.7.27)$$

(Мы используем тильду, чтобы отличить это произвольное изменение фиксирующей калибровку функции от калибровочного или БРСТ преобразования.) Можно ввести фермионный БРСТ «заряд» Q , определенный так, что для любого полевого оператора F

* Другими словами, когомология нильпотентного преобразования есть фактор ядра этого преобразования по его образу. — *Прим. ред.*

$$\delta_\theta \Phi = i[\theta Q, \Phi] = i\theta[Q, \Phi]_\mp,$$

или иначе

$$[Q, \Phi]_\mp = i s \Phi, \quad (15.7.28)$$

где знаки $-$ или $+$ соответствуют бозонному или фермионному Ψ . Из нильпотентности преобразования БРСТ следует:

$$0 = -ss\Phi = [Q, [Q, \Phi]_\mp]_\pm = [Q^2, \Phi]_-.$$

Чтобы эти формулы были верны для любых операторов F , необходимо, чтобы Q^2 было либо равно нулю, либо пропорционально единичному оператору. Но последнее невозможно, так как Q^2 обладает ненулевым гостовским квантовым числом*, следовательно Q^2 должно обратиться в нуль:

$$Q^2 = 0. \quad (15.7.29)$$

Из выражений (15.7.27) и (15.7.28) имеем:

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|[Q, \tilde{\delta}\Psi]|\beta\rangle. \quad (15.7.30)$$

Чтобы это выражение было равно нулю для всех изменений $\tilde{\delta}\Psi$ в Ψ , необходимо, чтобы

$$\langle\alpha|Q = Q|\beta\rangle = 0. \quad (15.7.31)$$

Таким образом, физические состояния находятся в ядре нильпотентного оператора Q . Два физических состояния, отличающихся только на вектор состояния в образе Q , т. е. вида $Q|\dots\rangle$, очевидно, имеют одни и те же матричные элементы со всеми другими физическими состояниями и, следовательно, физически эквивалентны. Отсюда *независимые* физические состояния соответствуют состояниям, принадлежащим фактору ядра Q по образу Q , т. е. соответствуют когомологии Q .

* Напомним, что гостовское квантовое число определяется равным $+1$ для ω_α , -1 для ω_α^* и 0 для всех калибровочных полей и полей материи.

Чтобы понять, как это используется на практике, рассмотрим простой пример из чистой электродинамики *. Выбирая фиксирующую калибровку функцию как $f = \partial_\mu A^\mu$ и интегрируя по вспомогательному полю h , находим, что БРСТ преобразование (15.7.8)–(15.7.10) имеет вид

$$sA_\mu = \partial_\mu \omega, \quad s\omega^* = \partial_\mu A^\mu / \xi, \quad s\omega = 0. \quad (15.7.32)$$

Разложим поля по нормальным модам **:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} [a^\mu(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + a^{\mu*}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}], \\ \omega(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} [c(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + c^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}], \\ \omega^*(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} [b(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + b^*(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}], \end{aligned} \quad (15.7.33)$$

Сравнивая коэффициенты при $e^{\pm ip \cdot x}$ с двух сторон в уравнении (15.7.28), имеем:

$$\begin{aligned} [Q, a^\mu(\mathbf{p})]_- &= -p^\mu c(\mathbf{p}), \quad [Q, a^{\mu*}(\mathbf{p})]_- = p^\mu c^*(\mathbf{p}), \\ [Q, b(\mathbf{p})]_+ &= p^\mu a_\mu(\mathbf{p}) / \xi, \quad [Q, b^*(\mathbf{p})]_+ = p^\mu a_\mu^*(\mathbf{p}) / \xi, \\ [Q, c(\mathbf{p})]_+ &= [Q, c^*(\mathbf{p})]_+ = 0. \end{aligned} \quad (15.7.34)$$

* Из формул (15.6.11) и (15.6.7) следует, что поскольку структурные константы в электродинамике равны нулю, поля гостов не взаимодействуют с другими полями. Тем не менее электродинамика является хорошим примером использования БРСТ симметрии для нахождения физических состояний. Действительно, анализируя условия физичности для ин- и аут-состояний, мы пренебрегаем взаимодействиями, так что для этой цели неабелева калибровочная теория может трактоваться как несколько копий квантовой электродинамики.

* Точно так же, как $\omega^*(x)$ не следует рассматривать как эрмитово сопряженную величину к $\omega(x)$, коэффициенты b^* и c^* не являются сопряженными к c и b . Но так как $A^\mu(x)$ эрмитово, то $\omega(x)$ также эрмитово при условии, что оператор Q эрмитов.

Рассмотрим любое состояние $|\psi\rangle$, удовлетворяющее условию физичности (15.7.31):

$$Q|\psi\rangle = 0. \quad (15.7.35)$$

Тогда состояния $|e, \psi\rangle = e_\mu a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle$ с одним дополнительным фотоном удовлетворяет условию физичности $Q|e, \psi\rangle = 0$, если $e_\mu p^\mu = 0$. Кроме того, состояние $|\psi\rangle' \equiv b^*(\mathbf{p})|\psi\rangle$ удовлетворяет условию

$$Q|\psi\rangle' = p^\mu a_\mu^*(\mathbf{p})|\psi\rangle / \xi, \quad (15.7.36)$$

так что $|e + \alpha p, \psi\rangle = |e, \psi\rangle + \xi \alpha Q|\psi\rangle'$ и поэтому физически эквивалентно $|e, \psi\rangle$. Отсюда мы заключаем, что e^μ физически эквивалентно $e^\mu + \alpha p^\mu$, что представляет обычное условие «калибровочной инвариантности», накладываемое на векторы поляризации фотона. С другой стороны,

$$Qb^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = p^\mu a^*(\mathbf{p})|\psi\rangle \neq 0,$$

так что $b^*|\psi\rangle$ не удовлетворяет условию физичности (15.7.31). Кроме того, для любого e_μ с $e \cdot p \neq 0$ имеем

$$c^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = Qe_\mu a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle / e \cdot p,$$

так что $c^*|\psi\rangle$ является БРСТ точным*, а следовательно эквивалентным нулю. Таким образом, физическое гильбертово пространство свободно от гостов и антигостов.

Чтобы сохранить лоренц-инвариантность, следует интерпретировать все четыре компоненты $a^\mu(\mathbf{p})$ как операторы уничтожения в том смысле, что

$$0 = a_\mu(\mathbf{p})|0\rangle, \quad (15.7.37)$$

где $|0\rangle$ — БРСТ инвариантное вакуумное состояние. Но канонические коммутационные соотношения, выведенные из БРСТ инвариантного действия (скажем, при $\xi = 1$) имеют вид

* На языке теории когомологий, вектор является БРСТ точным, если он принадлежит образу нильпотентного БРСТ оператора. — Прим. ред.

$$[a_\mu(\mathbf{p}), a_\nu^*(\mathbf{p}')]_- = \eta_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (15.7.38)$$

и соответствуют пропагатору в фейнмановской калибровке. Это нарушает обычные требования положительности в квантовой механике, так как из (15.7.37) и (15.7.38) вытекает¹³, что

$$\langle 0 | a_0(\mathbf{p}) a_0^*(\mathbf{p}') | 0 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle. \quad (15.7.39)$$

Тем не менее, мы можем быть уверенными, что все амплитуды между физическими состояниями удовлетворяют обычным условиям положительности, так как эти состояния удовлетворяют (15.7.31), а для таких состояний амплитуды перехода совпадают с теми, которые получаются в более физических калибровках типа кулоновской или аксиальной, в которых не возникает проблем с положительностью или унитарностью.

Рассмотренный до сих пор формализм Фаддеева–Попова–де Витта с необходимостью приводит к действию, билинейному по полям гостов ω_α^* и ω_α . Это адекватно перенормируемым теориям Янга–Миллса с фиксирующей калибровку функцией $f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha$, но не годится в более общих случаях. Например, как мы увидим в разделе 17.2, в других калибровках перенормируемые теории Янга–Миллса нуждаются в наличии слагаемых $\omega^* \omega^* \omega \omega$ в лагранжиане, которые служили бы контрчленами для сокращения ультрафиолетовых расходимостей в петлевых диаграммах с четырьмя внешними линиями гостов.

К счастью, формализм Фаддеева–Попова–де Витта представляет только один из способов построения некоторого класса эквивалентных лагранжианов, приводящих к одной и той же унитарной S -матрице. Более общим подходом является БРСТ формализм, который позволяет вообще обойтись без формализма Фаддеева–Попова–де Витта. В этом подходе действие выбирается как самый общий локальный функционал полей материи, калибровочных полей, полей ω^A , ω^{*A} и h^A с гостовским числом нуль, инвариантный относительно БРСТ преобразования (15.7.7)–(15.7.11) и относительно любой другой глобальной симметрии теории. (Для перенормируемых теорий следует также ограничиться лагранжианами, которые являются операторами размерности четыре или меньше, однако это ограничение не играет никакой роли в последующем обсуждении.) Мы докажем в следующем разделе, что в рамках более широких,

чем теории Янга–Миллса, наиболее общее действие такого рода есть сумма функционала только полей материи и калибровочных полей (коллективно обозначаемых ϕ) и слагаемого, которое определяется действием БРСТ оператора s на произвольный функционал Ψ с гостовским числом -1 :

$$I_{\text{NEW}}[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + s\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h], \quad (15.7.40)$$

как это и было в случае действия Фаддеева–Попова–де Витта (15.7.25), но теперь $s\Psi$ не обязательно билинейно по полям гостов и антигостов.

По тем же соображениям, что и выше, элементы S -матрицы для состояний, обращающихся в нуль под действием генератора БРСТ симметрии Q , не зависят от выбора Ψ в (15.7.40). Поэтому, если при некотором выборе Ψ госты отщепляются, они отщепляются и в общем случае. В теориях Янга–Миллса такой функционал Ψ обеспечивается квантованием в аксиальной калибровке, так что в этих теориях госты отщепляются при произвольном выборе функционала $\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h]$, а не только при выборе типа (15.7.25), порождаемом формализмом Фаддеева–Попова–де Витта.

Можно пойти еще дальше и освободиться от всякой зависимости от канонического квантования в лоренц-неинвариантных калибровках типа аксиальной. Пусть действие есть наиболее общий функционал полей материи, калибровочных полей и полей ω^A , ω^{*A} и h^A с гостовским числом нуль, инвариантный относительно БРСТ преобразования (15.7.7)–(15.7.11) и относительно других глобальных симметрий теории, включая лоренцовскую инвариантность. Из БРСТ инвариантности действия можно вывести существование сохраняющегося нильпотентного БРСТ генератора Q . Если считать поля гостов и антигостов эрмитовыми, то Q эрмитов. Как и выше, пространство физических состояний включает те состояния, которые уничтожаются действием оператора Q , причем два состояния считаются эквивалентными, если их разность есть результат действия оператора Q на другое состояние. Было показано, что для янг–миллсовских теорий такое пространство свободно от гостов и антигостов и обладает положительно определенной нормой, и что S -матрица в этом пространстве унитарна.^{13а}

Описанная процедура известна как *БРСТ квантование*. Она была распространена на теории с другими локальными симметрия-

ми, такими, как общая теория относительности и теории струн. К сожалению, в настоящее время представляется, что в каждом случае необходимо отдельно доказывать, что БРСТ когомология свободна от гостов, а действующая в этом пространстве S -матрица унитарна. Ключевым моментом этих доказательств является то, что для каждой степени свободы с отрицательной нормой, например, для временных компонент калибровочных полей в теориях Янга–Миллса, существует одна локальная симметрия, позволяющая от-трансформировать эту степень свободы.

* * *

Хотя далее это и не понадобится, существует красивая геометрическая интерпретация¹⁴ гостов и БРСТ симметрии, о которой стоит упомянуть. Калибровочные поля A_α^μ можно записать как 1-формы $A_\alpha \equiv A_{\alpha\mu} dx^\mu$, где dx^μ – множество антикоммутирующих чисел (см. раздел 5.8). Эти формы можно скомбинировать с гостовским полем и образовать 1-форму $A_\alpha \equiv A_\alpha + \omega_\alpha$ в расширенном пространстве. Кроме того, обычную внешнюю производную $d \equiv dx^\mu \partial / \partial x^\mu$ можно объединить с БРСТ оператором s , образовав действующую в этом пространстве внешнюю производную $D \equiv d + s$, которая нильпотентна, поскольку $s^2 = d^2 = sd + ds = 0$.

В следующей главе мы введем в рассмотрение методы внешнего поля, которые в совокупности с БРСТ симметрией будут использованы в гл. 17 для завершения доказательства перенормируемости неабелевых калибровочных теорий.

15.8. Обобщения БРСТ симметрии *

Описанная в предыдущем разделе БРСТ симметрия допускает полезное обобщение на случай квантования широкого класса теорий, включая общую теорию относительности и теории струн. Во всех этих случаях мы имеем дело с действием $I[\phi]$ и мерой $[d\phi] \equiv \prod_r d\phi^r$, инвариантными относительно инфинитезимальных преобразований

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

$$\varphi^r \rightarrow \varphi^r + \varepsilon^A \delta_A \varphi^r. \quad (15.8.1)$$

Здесь используется сокращенная система «обозначений де Витта» *, в которой r и A включают как пространственно-временные координаты, так и дискретные индексы, а суммы включают интегралы по этим координатам. Например, для калибровочного преобразования (15.1.9) индекс A включает групповой индекс α и пространственно-временную координату x , причем $\varepsilon^{\alpha x} \equiv \varepsilon^\alpha(x)$, а индекс r содержит векторный индекс μ , а также групповой индекс α и пространственно-временную координату x , так что $\varphi^{\mu\alpha x} \equiv A^\mu_\alpha(x)$. В обозначениях, введенных в (15.8.1), вариация $\delta_A \varphi^r$ из преобразования (15.1.9) запишется в виде

$$\delta_{\beta\gamma} \varphi^{\mu\alpha x} = \delta^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta^4(x-y) + C^\beta_{\gamma\alpha} \varphi^{\mu\gamma x} \delta^4(x-y).$$

Как и в рассмотренном в предыдущем разделе частном случае теорий Янга–Миллса, БРСТ-инвариантность можно использовать как замену формулировки Фаддеева–Попова–де Витта, которая применима даже тогда, когда подход Фаддеева–Попова–де Витта теряет силу. Тем не менее, чтобы обосновать введение БРСТ-инвариантности, начнем с формулировки Фаддеева–Попова–де Витта теорий с произвольными локальными симметриями, а затем перейдем к рассмотрению дальнейших обобщений.

Следуя тем же рассуждениям, которые использовались при выводе формулы (15.5.21), получим обобщенную теорему Фаддеева–Попова–де Витта:

$$\frac{C}{\Omega} \int [d\varphi] e^{iI[\varphi]} V[\varphi] = \int [d\varphi] e^{iI[\varphi]} B[f[\varphi]] \text{Det}(\delta_A f_B[\varphi]) V[\varphi], \quad (15.8.2)$$

Здесь $V[\varphi]$ — произвольный функционал от φ^r , инвариантный относительно калибровочных преобразований (15.8.1), $f_A[\varphi]$ — множество функционалов φ^r , фиксирующих калибровку и выбранных так, что «матрица» $\delta_A f_B[\varphi]$ имеет отличный от нуля детерминант, а $B[f]$ — более или менее произвольный функционал f_A (например,

* Эти обозначения часто называют «конденсированными». — Прим. ред.

$\Pi_A \delta(f_A)$) *. Постоянная Ω есть объем калибровочной группы, а постоянная C определяется, как и в (15.5.19), интегралом

$$C \equiv \int [df] B[f]. \quad (15.8.3)$$

Как мы видели, значение равенства (15.8.3) в калибровочных теориях заключается в утверждении, что интеграл в правой части не зависит от выбора фиксирующих калибровку функционалов f^A , а зависимость от $B[f]$ содержится только в константе C . Если удастся придать какой-то смысл обычно бесконечному групповому объему Ω , как в калибровочных теориях на конечной пространственно-временной решетке, равенство (15.8.2) может иметь ценность как формула, определяющая интеграл в левой части.

Для определения нильпотентного БРСТ-преобразования мы должны сначала представить функционал $B[f]$ в виде фурье-интеграла

$$B[f] = \int [dh] \exp(ih^A f_A) \mathcal{B}[h], \quad (15.8.4)$$

где $[dh] = \Pi_A dh^A$. Кроме того, детерминант можно записать как интеграл по фермионным c -числовым полям ** ω^{*A} и ω^A :

$$\text{Det}(\delta_A f_B[\Phi]) \propto \int [d\omega^*] [d\omega] \exp(i\omega^{*B} \omega^A \delta_A f_B), \quad (15.8.5)$$

где $[d\omega^*] \equiv \Pi_A d\omega^{*A}$ и $[d\omega] \equiv \Pi_A d\omega^A$ и, как обычно, знак $\propto$ означает пропорциональность с точностью до независящих от поля множите-

* Мы используем те же буквы A, B , и т. д., для обозначения функций f_A и калибровочных вариаций δ_A . Это делается для того, чтобы подчеркнуть, что должно существовать столько же фиксирующих калибровку функционалов, сколько существует независимых калибровочных преобразований. Однако в некоторых случаях, например, в теории струн, естественно использовать фиксирующие калибровку функционалы f^a , индекс a которых пробегает «столько же» значений, что и индекс A в калибровочной вариации δ_A , но сами значения этих индексов совершенно различны. Излагаемый формализм не требует никаких изменений до тех пор, пока мы можем определить $f_A = c_{Aa} f^a$, где матрица c_{Aa} не зависит от поля и несингулярна.

** В теориях струн и ряде других принято обозначать поля Гостов ω^{*A} и ω^A как b^A (или b_A) и c^A , соответственно.

лей. Подставляя эти выражения в (15.8.2), получаем общую формулу для функционального интеграла в фиксированной калибровке:

$$\begin{aligned} & \int [d\varphi] \exp(iI[\varphi]) B[f[\varphi]] \text{Det}(\delta_A f_B[\varphi]) V[\varphi] \\ & \propto \int [d\varphi] [dh] [d\omega^*] [d\omega] \exp(iI_{\text{NEW}}[\varphi, h, \omega, \omega^*]) \mathcal{N}[h] V[\varphi], \end{aligned} \quad (15.8.6)$$

где I_{NEW} — новое полное действие

$$I_{\text{NEW}}[\varphi, h, \omega, \omega^*] = I[\varphi] + h^A f_A[\varphi] + \omega^{*B} \omega^A \delta_A f_B[\varphi]. \quad (15.8.7)$$

Как отмечалось в разделе 15.6, введение полей гостов можно представлять как компенсацию за то, что мы интегрируем по всем φ^r , включая те, которые отличаются только калибровочными преобразованиями (15.8.1). Поскольку гости являются фермионами, петли, образованные линиями гостов, вносят дополнительный знак «минус», что позволяет таким петлям компенсировать вклады от интегрирования по калибровочно эквивалентным полям φ . Однако, для того, чтобы такой механизм работал, число духовых полей ω^A должно совпадать с числом независимых калибровочных преобразований. Иными словами, поскольку ω^A независимы, все калибровочные преобразования (15.8.1) также должны быть независимы. Именно так обстоит дело для калибровочных преобразований в теории Янга–Миллса и преобразований координат в общей теории относительности, но может быть и иначе. Классическим примером теории с зависимыми калибровочными преобразованиями является описанная в разделе 8.8 теория калибровочных полей, представляющих собой p -формы. Такая p -форма A (антисимметричный тензор ранга p) подвергается калибровочному преобразованию $A \rightarrow A + d\varphi$, где φ есть $(p-1)$ -форма, а $d\varphi$ — ее внешняя (антисимметризованная) производная. Так как d — нильпотентный оператор, то для $p \geq 2$ можно сдвинуть φ на величину $d\varphi$ без изменения калибровочного преобразования, так что имеется определенного вида инвариантность самих калибровочных преобразований относительно калибровочных преобразований, у которых параметрами преобразования являются $(p-2)$ -формы ψ . В таких случаях, чтобы компенсировать введение слишком большого количества гостов, нужно также вводить «госты для гостов»¹⁵. При $p \geq 3$ требуется дальнейшая компенсация путем введения «гостов для гостов для гостов» и т. д.

Ниже мы предположим, что все калибровочные преобразования (15.8.1) независимы, так что достаточно иметь только поля гостов ω^A (и антигостов ω^{*A}).

Хотя первоначальная симметрия устранилась за счет включения калибровочно неинвариантного функционала $B[f]$, новое полное действие обладает точной симметрией относительно инфинитезимальных БРСТ преобразований

$$\chi \rightarrow \chi + \theta s\chi, \quad (15.8.8)$$

где χ — любое из полей φ^r , ω^A , ω^{*A} или h^A , θ — инфинитезимальное антикоммутирующее s -число, а s — оператор Славнова:

$$s = \omega^A \delta_A \varphi^r \frac{\delta_L}{\delta \varphi^r} - \frac{1}{2} \omega^B \omega^C f^A_{BC} \frac{\delta_L}{\delta \omega^A} - h^A \frac{\delta_L}{\delta \omega^{*A}}. \quad (15.8.9)$$

Нижний индекс L в (15.8.9) означает левое дифференцирование, определенное так, что если $\delta F = \delta \chi G$, то $\delta_L F / \delta \chi = G$, а f^A_{BC} — структурные константы*, возникающие в коммутационном соотношении

$$[\delta_B, \delta_C] = f^A_{BC} \delta_A. \quad (15.8.10)$$

В неабелевых калибровочных теориях и в теориях струн константы f^A_{BC} не зависят от поля, однако формализм БРСТ не ограничивается этим случаем. Прямое вычисление показывает, что

$$s^2 = \frac{1}{2} \omega^A \omega^B \left[\delta_A \varphi^s \frac{\delta_L (\delta_B \varphi^r)}{\delta \varphi^s} - \delta_B \varphi^s \frac{\delta_L (\delta_A \varphi^r)}{\delta \varphi^s} - f^C_{AB} \delta_C \varphi^r \right] \frac{\delta_L}{\delta \varphi^r} - \frac{1}{2} \omega^B \omega^C \omega^D \left[f^E_{BC} f^A_{DE} + \delta_D \varphi^r \frac{\delta_L f^A_{BC}}{\delta \varphi^r} \right] \frac{\delta_L}{\delta \omega^A}. \quad (15.8.11)$$

Отсюда, условие нильпотентности БРСТ преобразования эквивалентно коммутационному соотношению (15.8.10) и условию совместности

* Например, для калибровочного преобразования, действующего на поле материи $\psi(x)$, имеем: $\delta_{\beta\gamma} \psi(x) = it_{\beta\gamma} \psi(x) \delta^4(x - y)$ и $\delta_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\epsilon} \psi(x) = -t_{\gamma\beta} t_{\gamma\epsilon} \psi(x) \delta^4(x - y) \delta^4(x - z)$. Отсюда в данном случае получаем $f^{\alpha\kappa}_{\beta\gamma\epsilon} = C^{\alpha}_{\beta\gamma} \delta^4(x - y) \delta^4(x - z)$.

$$f^E_{[BC}f^A_{D]E} + \delta_{[D}\phi^r(\delta_L f^A_{BC]}/\delta\phi^r) = 0, \quad (15.8.12)$$

где скобки в нижних индексах обозначают антисимметризацию по отношению к взятым в скобки индексам B , C и D . Формула (15.8.12) может быть выведена из коммутационного соотношения (15.8.10) тем же способом, что и обычное тождество Якоби, и заменяет это тождество в случае симметрий с зависящими от поля структурными константами.

Чтобы показать, что преобразование (15.8.8) является симметрией I_{NEW} , заметим (вспоминая, что θ антикоммутирует с ω^{*A}), что (15.8.7) можно переписать в виде

$$I_{\text{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I[\phi] - s(\omega^{*A}f_A). \quad (15.8.13)$$

Слагаемое $I[\phi]$ БРСТ-инвариантно, так как на полях ϕ^r БРСТ преобразование является простым калибровочным преобразованием (15.8.1), в котором произведена замена ϵ^A на $\theta\omega^A$, и которое коммутирует со всеми ϕ^r . Слагаемое $s(\omega^{*A}f_A)$ БРСТ инвариантно, так как БРСТ преобразования нильпотентны.

По ряду причин нам потребуются рассмотрение более широкого класса действий, чем те, которые могут быть построены методом Фаддеева–Попова–де Витта. Этот класс определяется требованием, что действие инвариантно относительно БРСТ преобразования (15.8.8). В качестве шага к тому, чтобы продемонстрировать, что такое действие приводит к физически значимым результатам, докажем сейчас общее утверждение (уже использовавшееся в предыдущем разделе), что наиболее общий БРСТ-инвариантный функционал с гостовским числом нуль есть сумма функционалов от одного поля ϕ и дополнительного слагаемого, получающегося действием БРСТ оператора s на произвольный функционал Ψ с гостовским числом -1 :

$$I_{\text{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I_0[\phi] + s\Psi[\phi, h, \omega, \omega^*]. \quad (16.8.14)$$

Например, таким является действие Фаддеева–Попова–де Витта (15.8.13). Коротко говоря, БРСТ когомология состоит из калибровочно инвариантных функционалов $I[\phi]$ только от полей ϕ^r .

Чтобы доказать формулу (15.8.14), заметим, что БРСТ преобразование (15.8.8)–(15.8.9) не изменяет полного числа полей h^A и ω^{*A} .

Поэтому, если разложить I в ряд слагаемых I_N , содержащих суммарное число N полей h^A и ω^{*A} , то в sI не может быть никаких сокращений между слагаемыми с разными N , следовательно, каждое слагаемое должно быть по-отдельности БРСТ инвариантно:

$$sI_N = 0. \quad (15.8.15)$$

Введем теперь так называемый оператор Ходжа:

$$t \equiv \omega^{*A} \frac{\delta}{\delta h^A}, \quad (15.8.16)$$

Можно непосредственно проверить справедливость антикоммутиационного соотношения

$$\{s, t\} = -\omega^{*A} \frac{\delta_L}{\delta \omega^{*A}} - h^A \frac{\delta}{\delta h^A}. \quad (15.8.17)$$

Применяя к I_N оператор $\{s, t\}$ и используя (15.8.15), находим:

$$stI_N = -NI_N, \quad (15.8.18)$$

так что каждое I_N , за исключением I_0 , является БРСТ точным в том смысле, что может быть записано как оператор s , действующий на другой функционал. Полный функционал I можно поэтому записать в виде $I_0 + s\Psi$, где

$$\Psi = - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{tI_N}{N}. \quad (15.8.19)$$

Слагаемое I_0 , по определению, не зависит от ω^{*A} и h^A , а так как мы предположили, что у него нулевое гостовское число, это слагаемое должно быть независимым и от ω^A , что и требовалось доказать.

Чтобы показать инвариантность физических матричных элементов относительно изменений в определении фиксирующего калибровку функционала Y , определим фермионный «заряд» Q так, что изменение любого оператора F относительно БРСТ преобразования равно

$$\delta_\theta \Phi = i[\theta Q, \Phi] = i\theta[Q, \Phi]_\mp, \quad (15.8.20)$$

где верхний или нижний знак в выражении $[x, y]_\mp = xy \mp yx$ соответствует бозонному или фермионному оператору. Как и в предыдущем разделе, из нильпотентности БРСТ преобразования вытекает, что $Q^2 = 0$. Матричные элементы калибровочно инвариантных операторов между физическими состояниями не зависят от выбора Ψ , если и только если физические состояния $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ удовлетворяют условиям

$$Q|\alpha\rangle = \langle\beta|Q = 0, \quad (15.8.21)$$

так что физически различимые физические состояния вновь находятся в одно-однозначном соответствии с элементами когомологии заряда Q . Поэтому общее БРСТ-инвариантное действие (15.8.3) будет приводить к физически значимым результатам для любого фиксирующего калибровку функционала Ψ , если мы можем найти *какой-нибудь* функционал Ψ , вроде аксиальной калибровки в теориях Янга–Миллса, приводящий к калибровке, в которой госты не взаимодействуют с другими полями. Если свободный от гостей выбор Ψ неудобен для реальных вычислений, как, скажем, неудобна аксиальная калибровка из-за того, что она нарушает лоренц-инвариантность, можно выбрать любой нравящийся нам фиксирующий калибровку функционал Ψ и при этом быть уверенным, что унитарная S -матрица не будет содержать гостей в начальном или конечном состояниях.

Описанный подход хорошо работает в теориях струн, где так называемое квантование на световом конусе заменяет аксиальную калибровку. Однако в других теориях, вроде общей теории относительности, не существует способа выбора координатной системы, в которой госты отщепляются. В таких теориях можно действовать с помощью метода квантования БРСТ, описанного в конце предыдущего раздела, используя БРСТ-инвариантность для доказательства того, что в физическом свободном от гостей гильбертовом пространстве S -матрица унитарна.

Открытие¹⁷ инвариантности относительно антиБРСТ симметрии¹⁸ показало, что несмотря на внешние различия, существует аналогия между ролями ω^A и ω^{*A} , остающаяся пока что несколько загадочной.

15.9. Формализм Баталина–Вилковыского*

В этом разделе будет описан мощный формализм, широко известный под названием метода Баталина–Вилковыского¹⁹. Этот метод был развит в рамках лагранжевого подхода, но уходит корнями в более ранний формализм Баталина–Фрадкина–Вилковыского²⁰, развитого в рамках гамильтонового подхода. (Было доказано, что обе схемы эквивалентны в рамках теории возмущений²¹.) Как мы увидим в разделе 17.1, та же формальная технология рассматривалась еще раньше Зинн–Жюстеном²² для того, чтобы разобраться с перенормировкой калибровочных теорий. Существуют по меньшей мере три области, где формализм доказал свою ценность.

1. До сих пор мы рассматривали только неприводимые симметрии, алгебра которых замкнута в смысле формулы (15.8.10). В ряде теорий, например, в супергравитации (без вспомогательных полей)²³, алгебра открыта. Она замыкается только в случае, когда удовлетворяются уравнения поля, так что в (15.8.10) возникают слагаемые, пропорциональные $\delta I/\delta \chi^n$. Аналогичные слагаемые появляются тогда и в условиях совместности (15.8.12). Тогда из формулы (15.8.11) следует, что s^2 в таких теориях не обращается в нуль, а равно линейной комбинации производных $\delta I/\delta \chi^n$. Как мы увидим в данном разделе, метод Баталина–Вилковыского позволяет рассматривать очень общие калибровочные теории, включая теории с открытыми или приводимыми алгебрами калибровочной симметрии.

2. Как упоминалось выше, существенные черты формализма Баталина–Вилковыского первоначально были использованы Зинн–Жюстеном для доказательства перенормируемости калибровочных теорий. Критический пункт, который поясняется в разделе 17.1, заключается в том, что хотя сумма всех одночастично неприводимых диаграмм в фоновом поле не удовлетворяет БРСТ симметриям исходного действия, она сохраняет одно из ключевых свойств действия, известное под названием мастер-уравнения.

3. Метод Баталина–Вилковыского является удобным для анализа возможных нарушений симметрий действия за счет квантовых эффектов. Он использован для этой цели в разделе 22.6.

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

Исходным пунктом формализма Баталина–Вилковицкого является введение так называемых «антиполей» для каждого поля в теории. Пусть χ^n включает все поля φ^r , ω^A , ω^{*A} и η^A . Для каждого χ^n введем внешнее антиполе $\chi_n^\dagger$ с той же бозе- или ферми-статистикой и противоположным гостовским числом, что и у БРСТ-преобразованного поля $s\chi^n$. Иначе говоря, статистика $\chi_n^\dagger$ противоположна χ^n , а гостовское число равно $-\text{gh}(\chi^n) - 1$, где $\text{gh}(\chi^n)$ — гостовское число поля χ^n . В простейших случаях, включающих теории Янга–Миллса и квантовую гравитацию**, исходное калибровочно инвариантное действие $I[\varphi]$ дополняется слагаемым, связывающим антиполя $\chi_n^\dagger$ с $s\chi^n$, так что действие принимает вид

$$S[\chi, \chi^\dagger] \equiv I[\varphi] + (s\chi^n)\chi_n^\dagger. \quad (15.9.1)$$

Оно удовлетворяет так называемому *мастер-уравнению*

$$0 = \frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L S}{\delta \chi^n}, \quad (15.9.2)$$

где R и L обозначают правое и левое дифференцирование. Чтобы убедиться в этом, заметим, что слагаемые в (15.9.2) нулевого порядка по антиполям удовлетворяют условию калибровочной инвариантности

$$0 = (s\varphi^r) \frac{\delta_L I}{\delta \varphi^r} = \omega^A \delta_A I[\varphi], \quad (15.9.3)$$

а слагаемые, линейные по антиполям, обеспечивают выполнение условия нильпотентности

$$0 = (s\chi^m) \frac{\delta_L (s\chi^n)}{\delta \chi^m} = s^2 \chi^n. \quad (15.9.4)$$

* Символ † используется здесь вместо более привычного * для того, чтобы подчеркнуть, что он не имеет никакого отношения к символу комплексного или зарядового сопряжения. В частности, антигостовское поле ω^{*A} не то же самое, что антиполе $\omega_A^\dagger$ к полю ω^A .

** Имеются в виду так называемые неприводимые теории с замкнутой алгеброй. — *Прим. ред.*

Поля являются внешними, и им следует придать подходящие значения, прежде чем использовать $S[\chi, \chi^\dagger]$ для вычисления S -матрицы. Для этой цели введем произвольный фермионный функционал $\Psi[\chi]$ с духовым числом -1 и положим *

$$\chi_n^\dagger = \frac{\delta \Psi[\chi]}{\delta \chi^n}. \quad (15.9.5)$$

Тогда формула (15.9.1) примет вид

$$S[\phi, \delta \Psi / \delta \chi] = I[\phi] + (s\chi^n) \delta \Psi[\chi] / \delta \chi^n = I[\phi] + s\Psi[\chi]. \quad (15.9.6)$$

Сравнение с (15.8.14) показывает, что это то же самое, что и действие $I_{\text{NEW}}[\chi]$ с фиксированной калибровкой. Отсюда, используя те же аргументы, что и в предыдущем разделе, мы видим, что физические матричные элементы не изменяются в результате малых изменений Ψ . Действие (15.8.7), построенное методом Фаддеева–Попова–де Витта, соответствует выбору $\Psi = -\omega^{*A} f_A$, для которого $\phi_r^\dagger = \omega^{*A} \delta f_A / \delta \phi^r$, $\omega_C^\dagger = 0$ и $\omega_A^{*\dagger} = -f_A$.

До сих пор не возникло ничего нового. Первый новый момент заключается в том, что мастер-уравнение (15.9.2) можно использовать в более общих теориях, считая, что $S[\chi, \chi^\dagger]$ — нелинейный функционал антиполей $\chi_n^\dagger$. (Как обсуждалось в предыдущем разделе, для приводимых теорий следует также включить в число полей χ^n госты для гостей, а также их антиполя.) Как и выше, выберем статистику $\chi_n^\dagger$ противоположной статистике χ^n , а гостовское число этих полей равным $-\text{gh}(\chi^n) - 1$, и потребуем, чтобы $S[\chi, \chi^\dagger]$ был бозонным оператором с духовым числом нуль. Так как поля ω^{*A} и h_A имеют *линейные* БРСТ преобразования, они не подвержены тем усложнениям, которые возникают у других полей χ^n (см. в этой связи раздел 16.4). Поэтому как эти поля, так и их антиполя входят в действие $S[\chi, \chi^\dagger]$ так же, как и в (15.9.1). Иными словами,

$$S = S_{\min}[\phi, \omega, \phi^\dagger, \omega^\dagger] - h^A \omega_A^{*\dagger}, \quad (15.9.7)$$

* Здесь нет нужды различать левое и правое дифференцирование, так как и χ^n , и $\delta \Psi / \delta \chi^n$ должны быть бозонными величинами.

где $\varphi_r^\pm$, $\omega_A^\pm$ и $\omega_A^{*\pm}$ — антиполя к φ^r , ω^A и ω^{*A} с духовыми числами -1 , -2 и 0 , соответственно, а $S_{\min}[\varphi, \omega, \varphi^\pm, \omega^\pm]$ — некоторый бозонный функционал с духовым числом нуль. Последнее слагаемое в (15.9.7) не влияет на мастер-уравнение, так что само $S_{\min}$ удовлетворяет этому уравнению*.

Так как действие $S_{\min}$ имеет гостовское число нуль, его разложение по степеням антиполей должно иметь вид:

$$\begin{aligned} S_{\min} = & I[\varphi] + \omega^A f_A^r[\varphi] \varphi_r^\pm + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f_{AB}^C[\varphi] \omega_C^\pm \\ & + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f^{rs}_{AB}[\varphi] \varphi_r^\pm \varphi_s^\pm + \omega^A \omega^B \omega^C f^{rD}_{ABC}[\varphi] \varphi_r^\pm \omega_D^\pm \\ & + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B \omega^C \omega^D f^{EF}_{ABCD}[\varphi] \omega_E^\pm \omega_F^\pm + \dots \end{aligned} \quad (15.9.8)$$

Первое слагаемое в правой части мастер-уравнения (15.9.2) — нулевого порядка по антиполям (следовательно, первого порядка по ω^A), и оно дает

$$0 = f_A^r[\varphi] \frac{\delta I[\varphi]}{\delta \varphi^r}, \quad (15.9.9)$$

Но это означает, что $I[\varphi]$ инвариантно относительно преобразования

$$\varphi^r \rightarrow \varphi^r + \varepsilon^A f_A^r[\varphi] \quad (15.9.10)$$

с произвольными инфинитезимальными ε^A . Рассматривая слагаемое в мастер-уравнении, пропорциональное $\varphi_s^\pm$ справа и $\omega^A \omega^B$ слева, находим:

$$0 = f_A^r[\varphi] \frac{\delta f_B^s[\varphi]}{\delta \varphi^r} - f_B^r[\varphi] \frac{\delta f_A^s[\varphi]}{\delta \varphi^r} + f_{AB}^C[\varphi] f_C^s[\varphi] + \frac{\delta I[\varphi]}{\delta \varphi^r} f_{AB}^{rs}[\varphi], \quad (15.9.11)$$

После того, как выполнены уравнения поля $\delta I / \delta \varphi = 0$, это выражение становится коммутационным соотношением для преобразования (15.9.10) (со структурными константами $f_{AB}^C[\varphi]$). Еще одно ли-

* Поля φ^r , ω^A , $\varphi_r^\pm$, $\omega_A^\pm$ иногда называют *минимальными переменными*, а поля типа ω^{*A} и h_A , которые вместе со своими антиполями входят билинейно, как в формуле (15.9.7), называют *тривиальными парами*.

нейное по антиполям слагаемое в мастер-уравнении пропорционально $\omega^A \omega^B \omega^C$ слева и $\omega^\dagger_D$ справа. Оно дает

$$0 = f_{[A}^r[\phi] \frac{\delta f^D_{BC]}[\phi]}{\delta \phi^r} - f^E_{[AB}[\phi] f^D_{C]E}[\phi] + f_{ABC}^{rD}[\phi] \frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi^r}, \quad (15.9.12)$$

где квадратные скобки в нижних индексах указывают на антисимметризацию по отношению к заключенным в скобки индексам A , B и C . На уравнениях движения это выражение становится обобщенным тождеством Якоби (15.8.12). Уравнение (15.9.11) — необходимое условие для совместности условия симметрии (15.9.9) (в предположении, что f_A^r доставляют полный набор калибровочных симметрий*), а уравнение (15.9.12) есть необходимое условие для совместности коммутационных соотношений (15.9.11). Заметим, что те слагаемые в (15.9.11) и (15.9.12), которые возникают из квадратичных по антиполям слагаемых в $S_{\min}$, пропорциональны $\delta I[\phi]/\delta \chi$, так что они обращаются в нуль, если удовлетворяются уравнения поля. В этом смысле, они характерны для открытых алгебр симметрии. Слагаемые в мастер-уравнении второго или более высокого порядка по антиполям возникают от слагаемых третьего и/или более высоких порядков по антиполям в $S_{\min}$. Они обеспечивают условия совместности для соотношений (15.9.11) и (15.9.12), условия совместности для этих условий совместности, и т. д. Достоинством формализма Баталина–Вилковыского является то, что все эти условия совместности содержатся в одном мастер-уравнении.

Это уравнение можно иначе интерпретировать как утверждение об инвариантности S относительно обобщенного преобразования БРСТ. Чтобы увидеть это, а также для дальнейших применений, полезно ввести формальный объект, известный как *антискобка*. Возвращаясь к прежним обозначениям, определим антискобку двух произвольных функционалов $F[\chi, \chi^\dagger]$ и $G[\chi, \chi^\dagger]$ следующим образом:

$$(F, G) \equiv \frac{\delta_R F}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L G}{\delta \chi_n^\dagger} - \frac{\delta_R F}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L G}{\delta \chi^n}. \quad (15.9.13)$$

* Это предположение называют условием полноты для генераторов калибровочной симметрии. — Прим. ред.

Заметим, что правые и левые функциональные производные бозонного функционала типа S по бозонным или фермионным полевым переменным либо просто равны друг другу, либо равны друг другу с противоположным знаком, соответственно. Так как или $\chi_n^\dagger$ или χ^n всегда фермионное поле, а другое — бозонное, откуда вытекает, что в антискобке (S, S) второе слагаемое в правой части (15.9.13) изменяет знак, если поменять порядок левого и правого дифференцирования:

$$\frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L S}{\delta \chi^n} = - \frac{\delta_L S}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_R S}{\delta \chi^n} = - \frac{\delta_R S}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L S}{\delta \chi_n^\dagger}.$$

(Последний шаг разрешен, поскольку один из множителей бозонный, и их порядок несуществен.) Мы видим, что второе слагаемое справа в формуле (15.9.13) для (S, S) равно первому с обратным знаком. Поэтому мастер-уравнение (15.9.2) можно записать как требование, чтобы антискобка действия S с самим собой обращалась в нуль:

$$(S, S) = 0. \quad (15.9.14)$$

Это требование нетривиально, так как антискобка обладает общим свойством симметрии

$$(F, G) = \pm (G, F), \quad (15.9.15)$$

где знак $+1$ берется, когда F и G — оба бозонные функционала, а знак -1 — во всех остальных случаях. В частности, антискобка (F, F) автоматически равна нулю, если F — фермионный (но не бозонный) функционал.

Обобщенное БРСТ преобразование определяется формулами:

$$\hat{\delta}_\theta \chi^n = \theta \frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^\dagger} = -\theta (S, \chi^n), \quad (15.9.16)$$

$$\hat{\delta}_\theta \chi_n^\dagger = \theta \frac{\delta_R S}{\delta \chi^n} = -\theta (S, \chi_n^\dagger), \quad (15.9.17)$$

где θ — фермионная инфинитезимальная константа. (Когда S имеет вид (15.9.1), преобразование совпадает с исходным БРСТ преобразованием $\delta \chi^n = \theta s \chi^n$.) Чтобы вычислить результат действия этого пре-

образования на произвольные функционалы, заметим, что анти-скобка действует как производная в том смысле, что

$$(F, GH) = (F, G)H \pm G(F, H), \quad (15.9.18)$$

где берется знак $-$, если G — фермионный, а F — бозонный функционалы, и знак $+$ в остальных случаях. Следовательно, если G и H — произвольные функционалы от χ и $\chi^\dagger$, причем $\hat{\delta}_\theta G = -\theta(S, G)$ и $\hat{\delta}_\theta H = -\theta(S, H)$, то

$$\hat{\delta}_\theta(GH) = -\theta(S, G)H - G\theta(S, H) = \theta[(S, G)H \pm G(S, H)],$$

где берутся знаки $+$ или $-$, если G — бозонный или фермионный функционал, соответственно. Выбирая F в (15.9.18) равным бозонному функционалу S , видим, что

$$\hat{\delta}_\theta(GH) = -\theta(S, GH).$$

Вместе с формулами (15.9.16) и (15.9.17) это показывает, что для любого функционала F , построенного как сумма произведений полей и антиполей,

$$\hat{\delta}_\theta F = -\theta(S, F). \quad (15.9.19)$$

Мастер-уравнение (15.9.14) можно интерпретировать как утверждение, что эти обобщенные БРСТ преобразования оставляют S инвариантным:

$$\hat{\delta}_\theta S = -\theta(S, S) = 0. \quad (15.9.20)$$

Как и в случае исходного БРСТ преобразования, это преобразование симметрии нильпотентно. Чтобы увидеть это, используем тождество Якоби для антискобки:

$$\pm(F, (G, H)) + \text{цикл. перестановки} = 0, \quad (15.9.21)$$

где в первом слагаемом берется знак $-$, если F и H — бозонные функционалы, и знак $+$ во всех остальных случаях (соответствующие знаки берутся и в двух других циклических перестановках F , G и H). Полагая $F = G = S$, получаем из (15.9.21)

$$0 = \mp(S, (S, H)) \mp (H, (S, S)) + (S, (H, S)) = \mp 2(S, (S, H)) \mp (H, (S, S)),$$

где знаки $-$ или $+$ соответствуют бозонному или фермионному функционалу H . Тогда из мастер-уравнения (15.9.14) вытекает условие нильпотентности

$$(S, (S, H)) = 0. \quad (15.9.22)$$

Вследствие этой симметрии решение мастер-уравнения не единственно. Например, из (15.9.22) следует, что для любого заданного решения S можно найти другое решение, определяемое инфинитезимальным преобразованием

$$S' = S + (\delta F, S), \quad (15.9.23)$$

где δF — инфинитезимальный функционал от χ и $\chi^\dagger$, который произволен, за исключением того, что он должен быть фермионным и иметь гостовское число -1 , с тем, чтобы S' был бозонным функционалом с духовым числом нуль. В частности, выбирая δF фермионным функционалом $\epsilon\Psi$ только от полей χ^n , имеем

$$S'[\chi, \chi^\dagger] = S[\chi, \chi^\dagger] + \epsilon \frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi^n} \frac{\delta_R S}{\delta\chi_n^\dagger} = S\left[\chi, \chi^\dagger + \epsilon \frac{\delta\Psi}{\delta\chi}\right]. \quad (15.9.24)$$

Эти инфинитезимальные преобразования можно тривиально проинтегрировать и показать, что мастер-уравнение по-прежнему удовлетворяется, если совершить сдвиг антиполей к новым переменным $\chi_n^{\prime\dagger} \equiv \chi_n^\dagger - \delta\Psi/\delta\chi^n$. *

Преобразование (15.9.23) есть частный случай преобразований, обычно называемых каноническими. Будем называть их «антикано-

* Оставляя переменные полей неизменными: $\chi'^n = \chi^n$. Преобразование функционалов при преобразовании полей и антиполей $\chi^n \rightarrow \chi'^n$, $\chi_n^\dagger \rightarrow \chi_n^{\prime\dagger}$ (замена переменных) понимается здесь как преобразование «по скалярному представлению»: $S'(\chi', \chi'^\dagger) = S(\chi, \chi^\dagger)$, что на языке функционалов эквивалентно преобразованию $S(\chi, \chi^\dagger) \rightarrow S'(\chi, \chi^\dagger) = S(\chi', \chi'^\dagger)$, где $\chi^n \rightarrow \chi'^n$, $\chi_n^\dagger \rightarrow \chi_n^{\prime\dagger}$ есть обратная замена переменных. Автор использует оба языка. Правильным является преобразование функционалов по «антипредставлению»: $S(\chi, \chi^\dagger) \rightarrow S'(\chi, \chi^\dagger) = S(\chi', \chi'^\dagger)$. — Прим. ред.

ническими», чтобы отличать от канонических преобразований в гл. 7. Антиканоическое преобразование — это любое конечное или инфинитезимальное преобразование полей и антиполей, оставляющее неизменными фундаментальные антискобочные соотношения:

$$(\chi^n, \chi_m^\pm) = \delta_m^n, \quad (\chi^n, \chi^m) = (\chi_n^\pm, \chi_m^\pm) = 0. \quad (15.9.25)$$

Например, рассмотрим инфинитезимальное антиканоническое преобразование, порождаемое инфинитезимальным фермионным генератором δF , под действием которого всякий бозонный или фермионный функционал G преобразуется в функционал

$$G \rightarrow G' = G + (\delta F, G). \quad (15.9.26)$$

Нетрудно показать, что это преобразование не изменяет антискобок (15.9.25). Для этого заметим, что антискобка (G, H) двух функционалов G и H преобразуется в (G', H') , причем с точностью до первого порядка по бесконечно малым добавкам

$$(G', H') = (G, H) + ((\delta F, G), H) + (G, (\delta F, H)).$$

Используя тождество Якоби (15.9.21), имеем

$$(G', H') = (G, H) + (\delta F, (G, H)), \quad (15.9.27)$$

В частности, если (G, H) есть s -число, оно не изменяется антиканоническим преобразованием. (Это другой способ увидеть, что преобразование (15.9.23) не изменяет мастер-уравнения.) У полей и антиполей s -числовые антискобки (15.9.25), поэтому то же самое должно быть верным и для преобразованных полей и антиполей *.

* Конечное антиканоническое преобразование полей и антиполей $\chi^n \rightarrow \chi'^n$, $\chi_n^\pm \rightarrow \chi'^\pm_n$ (антиканоническая замена переменных) порождается производящим функционалом $F[\chi, \chi']$ с гостовским числом -1 и определя-

ется неявными формулами $\chi'_n = \frac{\delta F(\chi, \chi')}{\delta \chi_n^\pm}$, $\chi_n^\pm = \frac{\delta F(\chi, \chi')}{\delta \chi'^n}$, при этом «суперматрица» $\frac{\delta_L}{\delta \chi'^n} \frac{\delta_R}{\delta \chi_m^\pm} F(\chi, \chi')$ должна быть невырождена. Антиканоическое

Чтобы вычислить S -матрицу, следует придать антиполям определенные значения. Как и в простом случае замкнутых калибровочных алгебр, когда S имеет линейную по антиполям форму (15.9.1), можно сделать это, выбрав антиполя в виде (15.9.5). Иными словами, мы вычисляем S -матрицу, используя действие с «фиксированной калибровкой»

$$I_\Psi[\chi] = S\left[\chi, \frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi}\right], \quad (15.9.28)$$

где $\Psi[\chi]$ – фермионный функционал с гостовским числом -1 . В соответствии с замечаниями после формулы (15.9.24), это эквивалентно тому, чтобы выбрать канонически преобразованные антиполя $\chi^\pm$ равными нулю*.

Действие с фиксированной калибровкой инвариантно относительно БРСТ преобразования, действующего только на поля χ^n :

$$\delta_\theta \chi^n = \theta s\chi^n, \text{ где } s\chi^n = \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\pm = \delta\Psi/\delta\chi}. \quad (15.9.29)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что

преобразование функционалов сохраняет антискобку в том смысле, что $(G', H') = (G, H)'$, и соответственно переводит решение мастер-уравнения в решение же. Другими словами, мастер-уравнение инвариантно относительно антиканонических преобразований. Бесконечно малому антиканоническому преобразованию отвечает производящий функционал

$$F(\chi, \chi^\dagger) = \chi^n \chi_n^\dagger - \delta F(\chi, \chi^\dagger),$$

$$\text{так что } \delta\chi^n = -\frac{\delta F}{\delta\chi_n^\dagger} = -(\delta F, \chi^n), \quad \delta\chi_n^\dagger = -\frac{\delta F}{\delta\chi^n} = -(\delta F, \chi_n^\dagger)$$

и соответствующее бесконечно малое преобразование функционалов имеет вид $\delta G(\chi, \chi^\dagger) = (\delta F, G)$. — *Прим. ред.*

* На языке преобразования функционалов это означает положить $\chi^\pm = 0$. Заметим, что для вычисления S -матрицы последнее необязательно. Фиксации калибровки отвечает антиканоническое преобразование фиксации калибровки, производящий функционал которого имеет вид $F(\chi, \chi^\dagger) = \chi^n \chi_n^\dagger + \Psi(\chi)$. — *Прим. ред.*

$$sI_\Psi[\chi] = \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi^n} \right)_{\chi^\dagger = \delta \Psi / \delta \chi} + \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi_m^\dagger} \frac{\delta_L^2 \Psi[\chi]}{\delta \chi^m \delta \chi^n} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta \Psi / \delta \chi}.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль как следствие мастер-уравнения, а второе — из-за антисимметрии * выражения в скобках по m и n **.

Для замкнутых алгебр с S вида (15.9.1) преобразование (15.9.29) совпадает с исходным БРСТ преобразованием $\delta_\theta \chi^n = \theta s \chi^n$. Но для произвольных открытых алгебр преобразование (15.9.29) не совпадает с исходным БРСТ преобразованием и в общем случае даже не нильпотентно, если только не удовлетворяются уравнения поля. Вместо этого из слагаемых первого порядка по сдвинутым антиполям $\chi_n^{\dagger'} = \chi_n^\dagger - \delta \Psi[\chi] / \delta \chi^n$ в мастер-уравнении находим:

$$s^2 \chi^m = \mp \left(\frac{\delta_L}{\delta \chi_m^\dagger} \frac{\delta_R}{\delta \chi_n^\dagger} I[\chi, \chi^\dagger] \right)_{\chi^\dagger = \delta \Psi / \delta \chi} \frac{\delta I_\Psi[\chi]}{\delta \chi^n}, \quad (15.9.30)$$

где знаки $-$ или $+$ соответствуют бозонным или фермионным χ^m . Мы снова видим, что характерная для открытых калибровочных алгебр зависимость от уравнений поля связана с квадратичными по антиполям слагаемыми в S .

* Если оба поля χ^n и χ^m — бозонные, то это следствие антикоммутативности $\delta S / \delta \chi^n$ и $\delta S / \delta \chi^m$. Если одно из полей χ^n и χ^m — фермионное, а другое — бозонное, это есть следствие того, что правые и левые производные S по тому из полей, которое фермионное, имеют противоположные знаки. Наконец, слагаемые, в которых оба поля χ^n и χ^m — фермионные, антисимметричны, так как в этих слагаемых антисимметрична величина $\delta_L^2 \Psi / \delta \chi^m \delta \chi^n$.

** Инвариантность действия с фиксированной калибровкой относительно БРСТ преобразования (15.9.29) есть прямое следствие инвариантности мастер-уравнения относительно антиканонического преобразования фиксации калибровки (см. предыдущее прим. ред.). — *Прим. ред.*

До сих пор мы рассматривали только формулировку классической теории поля, основанной на открытой или замкнутой калибровочной алгебре. Теперь следует понять, каким образом в таких теориях проводятся квантово-механические вычисления. Физические матричные элементы можно вычислить с помощью функциональных интегралов с весом $\exp(iI[\chi])$, где, как объяснялось выше, $I_\Psi[\chi]$ получается из $S[\chi, \chi^\dagger]$, если положить $\chi_n^\dagger = \delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$, или иными словами $\chi_n^{\dagger*} = 0$. Мы хотим вычислить влияние изменения $\Psi[\chi]$ на эти матричные элементы. Во-первых, рассмотрим амплитуду вакуум-вакуум:

$$Z_\Psi = \int [\prod d\chi] \exp(iI_\Psi[\chi]). \quad (15.9.31)$$

В результате сдвига $\delta\Psi[\chi]$ в $\Psi[\chi]$ эта амплитуда изменяется на величину

$$\delta Z = i \int [\prod d\chi] \exp(iI_\Psi[\chi]) \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \left(\frac{\delta(\delta\Psi[\chi])}{\delta\chi^n} \right). \quad (15.9.32)$$

Интегрируя по частям в пространстве полей, получаем

$$\begin{aligned} \delta Z = i \int [\prod d\chi] \exp(iI_\Psi[\chi]) \\ \times \left\{ \frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_n^\dagger} \frac{\delta_L I_\Psi[\chi]}{\delta\chi^n} - i\Delta S[\chi, \chi^\dagger] \right\}_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi], \end{aligned} \quad (15.9.33)$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\delta_R}{\delta\chi_n^\dagger} \frac{\delta_L}{\delta\chi^n}. \quad (15.9.34)$$

Мы видим, что условие независимости амплитуды вакуум-вакуум от Ψ в общем случае *не совпадает* с мастер-уравнением (15.9.2), а является так называемым *квантовым мастер-уравнением*

$$(S, S) - 2i\Delta S = 0 \quad \text{при} \quad \chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi. \quad (15.9.35)$$

В системе единиц СГС множитель $1/\hbar$ сопровождает каждый множитель $S[\chi, \chi^\dagger]$, так что второе слагаемое в (15.9.35) содержит на самом деле коэффициент $-2i\hbar$ вместо $-2i$. Таким образом, всякий

раз, когда удовлетворяется квантовое мастер-уравнение (15.9.35), слагаемое в S нулевого порядка по $\hbar$ удовлетворяет исходному мастер-уравнению (15.9.2). Обычно нетрудно построить действие, удовлетворяющее классическому мастер-уравнению, так что первое слагаемое в (15.9.35) обращается в нуль, и вопрос заключается в том, обращается ли в нуль второе слагаемое. Случай, когда квантовое мастер-уравнение (15.9.35) не удовлетворяется локальным действием, рассмотрен в гл. 22 в связи с аномалиями.

Предполагая, что квантовое мастер-уравнение (15.9.35) удовлетворяется, можно записать изменение, происходящее в среднем по вакууму от оператора $\phi[\chi]$ за счет изменения $\delta\Psi$ в Ψ , в виде

$$\delta\langle\phi\rangle = \frac{-i}{Z_\Psi} \int [\prod d\chi] \exp(iI_\Psi[\chi]) \frac{\delta_R \phi[\chi]}{\delta\chi^n} \left(\frac{\delta_R S(\chi, \chi^\dagger)}{\delta\chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi]. \quad (15.9.36)$$

Коэффициент при экспоненте под интегралом в (15.9.36) равен $s\phi[\chi]$. Мы видим, что средние значения операторов, инвариантных * относительно обобщенных БРСТ преобразований (15.9.16)–(15.9.17), не изменяются при изменении фиксирующего калибровку фермиона Ψ . Аналогичные результаты верны и для средних по вакууму от двух или более операторов.

Приложение А. Теорема об алгебрах Ли

В этом приложении мы рассмотрим произвольную алгебру Ли $\mathcal{G}$ с генераторами t_α и структурными константами $C_{\beta\gamma}^\alpha$ и докажем эквивалентность трех утверждений.

* Для открытых калибровочных теорий в общем случае не существует операторов, отличных от констант, которые инвариантны относительно преобразований (15.9.16)–(15.9.17). Вместо этого следует рассматривать операторы $\phi(\chi, \chi^\dagger)$, инвариантные относительно нильпотентного «квантового БРСТ оператора» σ , определенного равенством $\sigma\phi = (\phi, S) - i\Delta\phi$. Если ϕ зависит только от χ , это условие сводится к (15.9.36). Если $\sigma\phi = 0$, тогда среднее от $\phi(\Psi, \delta\Psi/\delta\chi)$ не изменяется в результате малого изменения фиксирующего калибровку фермиона Ψ .²⁴

- а:** Существует действительная симметричная положительно определенная матрица $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющая условию инвариантности

$$g_{\alpha\beta}C^{\beta}_{\gamma\delta} = -g_{\gamma\beta}C^{\beta}_{\alpha\delta}. \quad (15.A.1)$$

(В разделе 15.2 было показано, что именно такое условие (15.2.4) необходимо на основании физических соображений.)

- б:** Существует базис алгебры Ли (т. е. набор генераторов $\tilde{t}_{\alpha} = \mathcal{S}_{\alpha\beta}t_{\beta}$, где $\mathcal{S}$ — действительная несингулярная матрица), в котором структурные константы $\tilde{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ антисимметричны не только по паре нижних индексов β и γ , но и по всем трем индексам α , β и γ .
- с:** Алгебра Ли $\mathcal{G}$ есть прямая сумма коммутирующих компактных простых и $U(1)$ подалгебр $\mathcal{H}_m$.

Мы докажем эквивалентность утверждений **а**, **б** и **с**, показав, что **а** подразумевает **б**, **б** подразумевает **с** и **с** подразумевает **а**. Попутно мы покажем также, что если эти условия выполнены, то можно выбрать генераторы алгебры $\mathcal{G}$ в виде t_{ma} , где m нумерует простую или $U(1)$ подалгебру $\mathcal{H}_m$, к которой принадлежит t_{ma} , а индекс a нумерует отдельные генераторы в этой подалгебре, причем матрица $g_{ma,nb}$, удовлетворяющая условию (15.A.1), принимает вид

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2} \delta_{mn} \delta_{ab}, \quad (15.A.2)$$

где g_m^{-2} — произвольная действительная положительная константа. Во-первых, предположим выполнение **а**, т. е. существование действительной симметричной положительно определенной матрицы $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющей условию инвариантности (15.A.1). Тогда можно определить новые генераторы

$$\tilde{t}_{\alpha} \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\beta} t_{\beta}, \quad (15.A.3)$$

причем существование действительной обратной матрицы квадратного корня $g^{-1/2}$ гарантируется положительной определенностью $g_{\alpha\beta}$. Коммутаторы новых генераторов имеют вид

$$[\tilde{t}_\alpha, \tilde{t}_\beta] = i\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}\tilde{t}_\gamma, \quad (15.A.4)$$

где

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\alpha'}(g^{-1/2})_{\beta\beta'}(g^{+1/2})_{\gamma\gamma'}C^{\gamma'}_{\alpha\beta'}. \quad (15.A.5)$$

(В таком базисе удобно не проводить различия между верхними и нижними индексами α, β , и т. д. и писать $\tilde{C}_{\alpha\beta}$ вместо $\tilde{C}^{\gamma}_{\alpha\beta}$.) Тогда из формулы (15.A.1) вытекает, что $\tilde{C}_{\alpha\gamma\delta}$ антисимметричны по α и γ , а также по γ и δ , а следовательно, полностью антисимметрична, что доказывает **b**.

Далее, предположим, что выполнено **b**, т. е. существует базис алгебры Ли, в котором структурные константы полностью антисимметричны. В этом базисе матрицы $(\tilde{t}^A_\alpha)_{\beta\gamma} \equiv -i\tilde{C}_{\beta\gamma\alpha}$ присоединенного представления являются мнимыми и антисимметричными, а следовательно, эрмитовыми. Тогда согласно общей теореме об эрмитовых матрицах*, генераторы $\tilde{t}^A_\alpha$ либо неприводимы, либо полностью приводимы.

Под неприводимым множеством $N \times N$ матриц $\tilde{t}^A_\alpha$ подразумевается множество, для которого не существует подпространства размерности меньшей, чем N , остающегося инвариантным под действием всех $\tilde{t}^A_\alpha$. Иными словами, не существует множества менее чем N ненулевых векторов $(u_r)_\beta$, для которых при каждом α и r $(\tilde{t}^A_\alpha)_{\beta\gamma}(u_r)_\gamma$ является линейной комбинацией векторов $(u_s)_\beta$. Так как матрицы $(\tilde{t}^A_\alpha)_{\beta\gamma}$ в этом базисе пропорциональны структурным

* Если множество матриц H_α не является неприводимым, то, по определению, должно существовать множество векторов u_n , на которые натянуто подпространство (отличное от всего пространства), остающееся инвариантным под действием H_α . Это означает, что для всех α и n выполнено $H_\alpha u_n = \sum_m (C_\alpha)_{mn} u_m$. В этом случае мы можем выбрать базис, состоящий из векторов u_n и векторов v_k , на которые натянуто пространство, ортогональное всем u_n . Если H_α эрмитовы, тогда $(u_n, H_\alpha v_k) = \sum_m (C_\alpha)_{mn}^* (u_m, v_k) = 0$, так что пространство, натянутое на v_k , также инвариантно под действием H_α : $H_\alpha v_k = \sum_l (D_\alpha)_{lk} v_l$. В таком базисе матрицы H_α одновременно приводятся к блочно-диагональной форме:

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} C_\alpha & 0 \\ 0 & D_\alpha \end{pmatrix}.$$

Продолжая тем же способом, можно полностью привести H_α к блочно-диагональной форме с неприводимыми матрицами в блоках.

константам, это эквивалентно утверждению, что не существует множества линейных комбинаций $\tilde{\mathcal{T}}_r \equiv (u_r)_\gamma \tilde{t}^A_\gamma$, замкнутого относительно коммутирования со всеми $\tilde{t}^A_\alpha$, т. е. такого множества, для которого для любых α и r $[\tilde{t}^A_\alpha, \tilde{\mathcal{T}}_r]$ есть линейная комбинация $\tilde{\mathcal{T}}_s$. Такое множество матриц $\tilde{\mathcal{T}}_r$ было бы множеством генераторов инвариантной подалгебры полной алгебры Ли. Отсутствие такого множества означает, что алгебра Ли проста.

Полностью приводимым множеством матриц называют такое множество, которое при подходящем выборе базиса может быть записано в виде блочно-диагональных суперматриц

$$(\tilde{t}^A_\alpha)_{ma,nb} = [t^{A(m)}_\alpha]_{ab} \delta_{mn}, \quad (15.A.6)$$

где подматрицы $t^{A(m)}_\alpha$ либо неприводимы, либо равны нулю*. Выбирая тот же базис для самой алгебры Ли, получим, что структурные константы равны

$$\tilde{C}_{lc,ma,nb} = i(\tilde{t}^A_{lc})_{ma,nb} = i(t^{A(m)}_{lc})_{ab} \delta_{mn}. \quad (15.A.7)$$

Но поскольку это выражение полностью антисимметрично и пропорционально δ_{mn} , оно должно быть также пропорционально δ_{ln} и δ_{lm} :

$$\tilde{C}_{lc,ma,nb} = \delta_{ln} \delta_{lm} C_{cab}^{(l)}. \quad (15.A.8)$$

Иными словами, для любого представления $t^{(m)}_a \equiv t_{ma}$ алгебры Ли в этом базисе имеем

$$[t^{(m)}_a, t^{(n)}_b] = i\delta_{mn} C_{cab}^{(m)} t^{(m)}_c, \quad (15.A.9)$$

где $C_{cab}^{(m)}$ полностью антисимметрична по индексам a, b, c . Когда мы говорим, что алгебра Ли есть *прямая сумма* подалгебр $t^{(m)}$, мы имеем в виду, что можно построить базис, в котором генераторы распадаются на множества $t^{(m)}$, причем коммутаторы генераторов друг с другом из одного множества выражаются через линейные

* Здесь m и n отмечают блоки по главной диагонали, а a и b отмечают строки и столбцы внутри этих блоков. Кроме того, по m нет суммирования, и область значений индексов a, b и т. д. в общем случае зависит от m .

комбинации генераторов того же множества, а все члены одного множества коммутируют со всеми членами любого другого множества. Для каждого t множество матриц присоединенного представления $t^{(m)A}$ либо неприводимо, либо равно нулю, что соответствует подалгебре, которая либо проста, либо состоит из так называемых $U(1)$ генераторов, коммутирующих со всеми генераторами алгебры в целом.

Таким образом, мы показали, что наиболее общая алгебра Ли с полностью антисимметричными действительными структурными константами является прямой суммой одной или более простых и/или $U(1)$ алгебр Ли. Более того, простые алгебры компактны, в том смысле, что каждая матрица $-C_{acd}^{(m)}C_{bdc}^{(m)}$ положительно определена, так как для любого действительного вектора u_a выражение $-C_{acd}^{(m)}C_{bdc}^{(m)}u_a u_b = \sum_{cd} [\sum_a u_a C_{acd}^{(m)}]^2$ есть сумма положительных величин, которая не может обращаться в нуль за исключением случая $u_a = 0$, поскольку при $u_a \neq 0$ из условия $\sum_a u_a C_{acd}^{(m)} = 0$ следовало бы, что сама $\sum_a u_a t_a^{(m)}$ есть инвариантная подалгебра, в противоречии с тем, что $t_a^{(m)}$ образует простую алгебру Ли. Этим завершается доказательство **с**.

Наконец, предположим, что верно **с**, т. е. нам дана алгебра Ли, являющаяся прямой суммой множества простых или $U(1)$ алгебр Ли. Это означает, что в некотором базисе $t_a^{(m)} = \mathcal{I}_{ma,\alpha} t_\alpha$ с действительной несингулярной матрицей $\mathcal{I}$

$$[t_a^{(m)}, t_b^{(n)}] = i\delta_{nm} C^{(m)c}_{ab} t_c^{(m)},$$

где каждая подалгебра $t^{(m)}$ либо проста, либо коммутирует со всеми остальными. Предположим далее, что простые подалгебры компактны, в том смысле, что матрицы

$$g_{ab}^{(m)} \equiv -C^{(m)c}_{ad} C^{(m)d}_{bc} \quad (15.A.10)$$

положительно определены. Чтобы построить удовлетворяющую (15.A.1) действительную положительно определенную матрицу g_{ab} в базисе генераторов $t_{ma} = t_a^{(m)}$, выберем

$$g_{ma,nb} \equiv g_{ab}^{(m)} \delta_{mn}, \quad (15.A.11)$$

где $g^{(m)}_{ab}$ выбирается как матрица (15.A.10), когда $t^{(m)}$ – простая подалгебра, и выбирается как произвольная действительная симметричная положительно определенная матрица, если $t^{(m)}$ есть прямая сумма одного или нескольких $U(1)$ подалгебр. Матрица (15.A.11) очевидно действительна, симметрична и положительно определена, поскольку этими свойствами обладает каждая из $g^{(m)}_{ab}$. Чтобы проверить требование (15.A.1), вспомним тождество Якоби для структурных констант:

$$C^{(m)c}_{ad}C^{(m)d}_{be} + C^{(m)c}_{bd}C^{(m)d}_{ea} + C^{(m)c}_{ed}C^{(m)d}_{ab} = 0 \quad (15.A.12)$$

и свернем его с $C^{(m)e}_{fc}$. После переименования индексов суммирования в третьем слагаемом так, что $c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c$, и использования (15.A.10), можем записать результат для простых подалгебр:

$$g^{(m)}_{df}C^{(m)d}_{ab} = C^{(m)c}_{ad}C^{(m)d}_{be}C^{(m)e}_{cf} - C^{(m)c}_{fd}C^{(m)d}_{be}C^{(m)e}_{ca}.$$

Важно то, что из этого выражения следует антисимметрия левой части по индексам a и f :

$$g^{(m)}_{df}C^{(m)d}_{ab} = -g^{(m)}_{da}C^{(m)d}_{fb}. \quad (15.A.13)$$

Тот же результат тривиально следует для $U(1)$ подалгебр, когда структурные константы просто равны нулю. Условие симметрии (15.A.1) немедленно вытекает из (15.A.13), что завершает доказательство **a**. Этим завершается и доказательство эквивалентности утверждений **a**, **b** и **c**.

Вернемся к матрице $g_{\alpha\beta}$. При полностью антисимметричных структурных константах условие инвариантности (15.2.4) можно выразить как утверждение, что эта матрица коммутирует со всеми матрицами присоединенного представления алгебры Ли:

$$[g, t^A_\gamma] = 0. \quad (15.A.14)$$

Мы видели, что все $(t^A_\gamma)_{\alpha\beta}$ можно представить в блочно-диагональной форме с неприводимыми (или нулевыми) подматрицами на главной диагонали. Хорошо известная теорема²⁵ утверждает, что тогда $g_{\alpha\beta}$ должна также быть блочно-диагональной, с блоками того же размера и в той же позиции, что и в t^A_γ , и с подматрицами в каж-

дом блоке, пропорциональными единичной матрице. (Если две подматрицы в t^A_γ эквивалентны, в том смысле, что они могут быть связаны преобразованием подобия, может оказаться необходимым сделать подходящее изменение базиса, чтобы привести подматрицы в $g_{\alpha\beta}$ к виду, пропорциональному единичным матрицам.) Тогда в обозначениях (15.A.11) метрика задается выражением (15.A.2).

Приложение В. Каталог Картана

Мы приводим без доказательства полный каталог простых алгебр Ли, полученный в окончательной форме Э. Картаном²⁶. Эти алгебры будут представлены здесь в их «компактной» форме, т. е. с генераторами, которые могут быть точно представлены конечномерными эрмитовыми матрицами. Алгебры Ли будут помечаться нижним индексом $n \geq 1$, указывающим на их ранг — число независимых коммутирующих линейных комбинаций генераторов.

A_n . Это алгебра специальной унитарной группы $SU(n+1)$ всех унитарных ($U^\dagger = U^{-1}$), унимодулярных ($\text{Det}U = 1$) $(n+1)$ -мерных матриц. Любая такая матрица, бесконечно близкая к единице, может быть представлена в виде

$$U = I + iH,$$

где бесконечно малая матрица H удовлетворяет условиям

$$H^\dagger = H, \quad \text{Tr } H = 0,$$

так что A_n есть алгебра Ли всех эрмитовых бесследовых $(n+1)$ -мерных матриц. Любое множество коммутирующих эрмитовых матриц можно одновременно диагонализировать, и максимальное число независимых диагональных бесследовых $(n+1)$ -мерных матриц равно n , так что это есть ранг A_n . Любая эрмитова $(n+1)$ -мерная матрица определяется $(n+1)^2$ независимыми действительными параметрами $(n+1)$ действительных чисел на главной диагонали и $n(n+1)/2$ комплексных чисел над главной диагональю, равных комплексно сопряженным им числам под ней); один из этих параметров исключается условием бесследовости, так что размерность A_n есть

$$d(A_n) = (n+1)^2 - 1 = n(n+2).$$

Все алгебры A_n просты.

B_n . Это алгебра унитарной ортогональной группы $O(2n+1)$, состоящей из всех унитарных ($\rho^\dagger = \rho^{-1}$) и ортогональных ($\rho^T = \rho^{-1}$), следовательно, действительных, $(2n+1)$ -мерных матриц. (Ограничение унитарными матрицами иногда указывается в названии группы $UO(2n+1)$.) Любая такая матрица ρ , бесконечно близкая к единице, может быть записана в виде

$$\rho = I + iA,$$

где A — бесконечно малая матрица, удовлетворяющая условиям

$$A^* = -A = A^T.$$

(Не составит разницы, если мы ограничимся подгруппой $SO(2n+1)$, для которой O подчинено дополнительному условию $\text{Det } \rho = 1$, так как любая близкая к единичной матрица ρ все равно будет иметь $\text{Det } \rho = 1$.) Любое множество коммутирующих мнимых антисимметричных $(2n+1)$ -мерных матриц может быть (с помощью обычного ортогонального преобразования) приведено к виду суперматрицы

$$\begin{bmatrix} a_1 \sigma_2 & & & 0 \\ & a_2 \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \sigma_2 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

где σ_2 — обычная 2×2 матрица

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

а коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ действительны. Отсюда очевидно, что ранг B_n равен n . Мнимая антисимметричная матрица полностью определяется мнимыми числами над действительной диагональю, так что ее размерность

$$d(B_n) = \frac{(2n+1)(2n)}{2} = n(2n+1).$$

Все алгебры B_n просты.

Существует альтернативное определение $O(N)$, которое поможет понять мотивы возникновения следующего большого множества простых алгебр Ли. Вместо того, чтобы определять $O(N)$ как группу N -мерных действительных матриц, удовлетворяющих условию ортогональности $\rho^T \rho = I$, можно с тем же успехом определить ее как группу N -мерных действительных матриц $\mathcal{M}$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{M}^T \mathcal{R} \mathcal{M} = \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$ — произвольная положительно определенная действительная симметричная матрица. Это следует из того, что любая такая матрица $\mathcal{P}$ может быть представлена как $\mathcal{P} = \mathcal{R}^T \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ — некоторая действительная несингулярная матрица, и поэтому существует преобразование подобия, переводящее любую матрицу $\mathcal{M}$, удовлетворяющую указанному выше условию, в действительную ортогональную матрицу $\mathcal{R} \mathcal{M} \mathcal{R}^{-1}$. Следовательно, можно, не изменяя группы, считать, что $\mathcal{P}$ — различные действительные симметричные положительно определенные матрицы.

C_n . Это алгебра унитарной симплектической группы $USp(2n)$, т. е. группы унитарных матриц $\mathcal{M}$, оставляющих инвариантной антисимметричную несингулярную матрицу $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{M}^T \mathcal{A} \mathcal{M} = \mathcal{A},$$

(Заметим, что для d -мерных матриц $\text{Det } \mathcal{A} = \text{Det } \mathcal{A}^T = (-1)^d \text{Det } \mathcal{A}$, так что если d нечетно, $\text{Det } \mathcal{A}$ должен равняться нулю. Таким образом, $USp(d)$ существует только при четных d .) Любая такая антисимметричная несингулярная (возможно, комплексная) матрица $\mathcal{A}$ может быть записана в стандартной форме

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}^T \mathcal{A}_0 \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ — унитарная матрица, а $\mathcal{A}_0$ — суперматрица

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Альтернативно можно взять A_0 как блочно-диагональную суперматрицу с матрицами σ_1 по главной диагонали.) Следовательно, $USp(2n)$ можно описать как группу унитарных матриц $\mathcal{U}$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{U}^T A_0 \mathcal{U} = A_0,$$

так как при унитарном преобразовании всякая такая матрица $\mathcal{U}$ может быть преобразована в унитарную матрицу $\mathcal{U} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{U} \mathcal{R}$, удовлетворяющую предыдущему условию $\mathcal{U}^T \mathcal{A} \mathcal{U} = \mathcal{A}$. Всякая такая матрица $\mathcal{U}$, бесконечно близкая к единице, может быть записана в виде

$$\mathcal{U} = I + i\mathcal{H},$$

где $\mathcal{H}$ — бесконечно малая матрица, удовлетворяющая условиям

$$\mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}^T A_0 + A_0 \mathcal{H} = 0.$$

Самая общая $2n$ -мерная матрица $\mathcal{H}$, удовлетворяющая таким условиям, может быть записана в виде суперматрицы

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^* & -\mathcal{A}^* \end{bmatrix},$$

где n -мерные комплексные подматрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ удовлетворяют условиям

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}^T = \mathcal{B}.$$

Максимальный набор коммутирующих генераторов включает диагональные $\mathcal{A}$ и нулевые $\mathcal{B}$, так что он имеет вид

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & & & \\ & & & -a_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -a_n \end{bmatrix}$$

где $a_1, \dots, a_n$ действительны. Отсюда очевидно, что ранг C_n равен n . Размерность C_n равна числу n^2 независимых действительных параметров у эрмитовой матрицы A плюс число $2n(n+1)/2$ независимых действительных параметров у комплексной симметричной матрицы B

$$d(C_n) = n^2 + 2 \times n(n+1) / 2 = n(2n+1).$$

Все алгебры C_n просты.

D_n . Это алгебра унитарной ортогональной группы $O(2n)$, состоящей из всех унитарных ортогональных $2n$ -мерных матриц. Обсуждение B_n можно перенести на D_n , с той разницей, что здесь любой набор коммутирующих генераторов можно привести к виду

$$\begin{bmatrix} a_1 \sigma_2 & & & \\ & a_2 \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \sigma_2 \end{bmatrix}$$

так что ранг остается равным n . Кроме того, размерность здесь определяется формулой

$$d(D_n) = \frac{(2n)(2n-1)}{2} = n(2n-1).$$

Все алгебры D_n просты, за исключением D_1 , которая является абелевой алгеброй с единственным генератором, и D_2 , которая равна прямой сумме $B_1 + B_1$.

Исключительные алгебры Ли. В дополнение к перечисленным выше классическим алгебрам Ли существует всего лишь пять исключительных алгебр. Это алгебры исключительных групп G_2 ($d = 14$), F_4 ($d = 52$), E_6 ($d = 78$), E_7 ($d = 133$), E_8 ($d = 248$).

Не все классические алгебры Ли действительно различны. Имеется ровно четыре изоморфизма:

$$A_1 = B_1 = C_1, \quad C_2 = B_2, \quad A_3 = D_3.$$

Это соответствует изоморфизмам среди соответствующих данным алгебрам групп Ли. Однако, изоморфизмы типа $B_1 = A_1$, $B_2 = C_2$ и $D_3 = A_3$ не означают, что $SO(3)$ изоморфна $SU(2)$, $SO(5)$ изоморфна $USp(4)$ или $SO(6)$ изоморфна $SU(4)$. На самом деле $SU(2)$, $USp(4)$ и $SU(4)$ являются односвязными *накрывающими группами* для $SO(3)$, $SO(5)$ и $SO(6)$. (Накрывающие группы обсуждались в гл. 2.) Тем не менее изоморфизмы алгебр Ли позволяют особенно просто построить двузначные фундаментальные спинорные представления $SO(3)$, $SO(5)$ и $SO(6)$, которые являются определяющими * представлениями $SU(2)$, $USp(4)$ и $SU(4)$, соответственно. Кроме того, $SO(4)$ изоморфна $SO(3) \times SO(3)$, так что ее двузначное спинорное представление есть в точности определяющее представление группы $SU(2) \times SU(2)$. Для $d \geq 7$ двузначные спинорные представления $SO(d)$ должны строиться другими методами. Простейшая техника использует алгебры Клиффорда, обсуждавшиеся в разделе 5.4.

Задачи

1. Выведите тождества Бьянки $D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0$.
2. Пусть в неабелевой калибровочной теории мы используем обобщенную кулоновскую калибровку, выбирая фиксирующую калибровку функцию в виде $f_\alpha = \nabla \cdot \mathbf{A}_\alpha$. Выведите выражение для лагранжиана гостов. Какой вид имеет пропагатор гостов? (Выберите $B[f] = \exp(-i \int d^4x f_\alpha f_\alpha / 2\xi)$.)
3. Пусть в электродинамике мы используем фиксирующую калибровку функцию $f = \partial_\mu A^\mu + s A_\mu A^\mu$, где s — произвольная постоянная. Выведите выражение для лагранжиана гостов. (Выберите $B[f] = \exp(-i \int d^4x f_\alpha f_\alpha / 2\xi)$.) Какой вид имеет пропагатор гостов?

* Автор использует здесь термин «defining representation», буквально — «определяющее представление». По-видимому, имеется в виду, что в терминах инвариантных квадратичных форм именно на этих представлениях определяются сами группы. — *Прим. ред.*

4. Покажите, что не существует простой алгебры Ли, у которой ровно четыре генератора.
5. Покажите, что если поле $\psi_l(x)$, принадлежащее представлению калибровочной группы с матрицами генераторов t_α , изменяется вдоль пути $x^\mu = x^\mu(\tau)$, согласно дифференциальному уравнению $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = it_\alpha \psi(\tau) A_{\alpha\mu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$ (где $\psi_l(x)$ и $A_{\alpha\mu}(x)$ — классические c -числовые поля), то изменение ψ вдоль любого *малого* замкнутого пути P вокруг точки X^μ пропорционально $t_\alpha \psi(X) F_{\alpha\mu\nu}(X) \oint_P x^\mu(\tau) \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} d\tau$. Найдите коэффициент пропорциональности. Используя этот результат, покажите, что если $F_{\alpha\mu\nu}(x)$ везде обращается в нуль, то с помощью калибровочного преобразования возможно обратить в нуль $A_{\alpha\mu}(x)$ по крайней мере в любой конечной области. (Указание. Следуйте рассуждениям, аналогичным используемым в электродинамике или общей теории относительности и приведенным в ⁶.)
6. Применяя метод функциональных интегралов к произвольной неабелевой калибровочной теории, вычислите пропагатор калибровочного поля $A_{\alpha\mu}(x)$, если фиксирующая калибровку функция выбрана в виде $f_\alpha = n_\mu A^\mu_\alpha$, где n_μ — произвольные постоянные. (Выберите $B[f] = \exp(-i \int d^4x f_\alpha f_\alpha / 2\xi)$) Какой вид имеет лагранжиан гостов? Какой вид имеет пропагатор гостов? Чему равна вершина взаимодействия гостов?
7. Пусть мы выбрали в качестве основополагающего физического принципа не калибровочную, а БРСТ инвариантность. Выведите самое общее выражение для лагранжиана, построенного из сумм произведений полей и их производных размерностью (масса) ^{d} с $d \leq 4$, в который входят поля $A_{\alpha\mu}$, ω_α , ω^*_α , h_α и их производные, и который инвариантен (с точностью до полных производных) относительно преобразований Лоренца, фазовых преобразований, связанных с гостовским числом ($\omega_\alpha \rightarrow e^{i\theta} \omega_\alpha$, $\omega^*_\alpha \rightarrow e^{-i\theta} \omega^*_\alpha$), глобальных калибровочных преобразований (ϵ постоянна) и преобразований БРСТ.

8. Покажите, что антискобка удовлетворяет условию симметрии (15.9.15) и тождеству Якоби (15.9.21).
9. Покажите, что если функционал O удовлетворяет условию $(O, S) = i\Delta S$, а действие S удовлетворяет квантовому мастер-уравнению, то квантовое среднее $\langle O \rangle$ не зависит от фиксирующего калибровку функционала Ψ .

Список литературы

1. Yang, C.N. and Mills, R.J., *Phys. Rev.*, **96**, 191 (1954). О. Клейн близко подошел к формулировке $SU(2)$ теории Янга–Миллса в докладе на конференции 1938 г. в Варшаве, опубликованном в сб.: *New Theories in Physics* (International Institute of Intellectual cooperation, Paris, 1939). Критическое обсуждение теории Клейна см. в докладе: Gross, D.J., «Oscar Klein and Gauge Theory», 1994 Oscar Klein symposium at Stockholm, Princeton preprint PUPT-1508.
2. Utiyama, R., *Phys. Rev.*, **101**, 1597 (1956).
3. Feynman, R.P., *Acta Physica Polonica*, **24**, 697 (1963).
4. Faddeev, L.D. and Popov, V.N., *Phys. Lett.*, **25B**, 29 (1967).
5. de Witt, B., *Phys. Rev.*, **162**, 1195, 1239 (1967).
6. Доказательство легко получается адаптацией стандартного доказательства аналогичного результата в общей теории относительности: для существования координатного преобразования к плоской метрике в конечной односвязной области необходимо и достаточно обращения в нуль тензора кривизны Римана–Кристоффеля. См., например, монографию: Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972), Sections 6.3 and 6.4 (есть русский перевод: Вейнберг С., *Гравитация и космология*. М., Мир, 1972; разделы 6.3 и 6.4).
7. Доказательство того, что из $\mathbf{a}$ (при $g_{ab} = \delta_{ab}$) следует $\mathbf{b}$, а из $\mathbf{b}$

следует **c**, дано в работе: Gell-Mann, M. and Glashow, S.L., *Ann. Phys.* (NY), **15**, 437 (1961).

8. См., например: S. Weinberg, *ibid.*, Section 7.3.
9. Gribov, V., *Nucl. Phys.*, **B139**, 1 (1978). См. также: Jackiw, R., Muzinich, I., and Rebbi, C., *Phys. Rev.*, **D17**, 1576 (1978); Jackiw, R., in: *New Frontiers in High Energy Physics*, eds. B. Kursunoglu, A. Perlmutter, and L. Scott (Plenum, New York, 1978); Christ, N. and Lee, T.D., *Phys. Rev.*, **D22**, 939 (1980); Jackiw, R., in: *Current Algebra and Anomalies* (World Scientific, Singapore, 1985), footnote 50.
10. Becchi, C., Rouet, A., and Stora, R., *Comm. Math. Phys.*, **42**, 127 (1975); in: *Renormalization Theory*, eds. G. Velo and A.S. Wightman (Reidel, Dordrecht, 1976); *Ann. Phys.*, **98**, 287 (1976).
11. Tyutin, I.V., Lebedev Institute preprint №39 (1975).
- 11a. Nakanishi, N., *Progr. Theor. Phys.*, **35**, 1111 (1966); Lautrup, B., *Mat. Fys. Medd. Kon. Dan. Vid.-Sel. Medd.*, **35**, 29 (1967).
12. Автор этих рассуждений мне неизвестен. Я узнал их от Дж. Польчинского.
13. Gupta, S.N., *Proc. Phys. Soc.*, **63**, 681 (1950); **64**, 850 (1951); Bleuler, K., *Helv. Phys. Acta*, **3**, 567 (1950); Bleuler, K. and Heitler, W., *Progr. Theor. Phys.*, **5**, 600 (1950).
- 13a. Curci, G. and Ferrari, R., *Nuovo Cimento*, **35**, 273 (1976); Kugo, R. and Ojima, I., *Progr. Theor. Phys.*, **60**, 1869 (1978); *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **63**, 1 (1979). См. также ^{11a} для случая электродинамики.
14. Thierry-Mieg, J., *J. Math. Phys.*, **21**, 2834 (1980); Stora, R., in: *Progress in Gauge Theories*. Proc. of Cargese Symp. 1983, eds. G. 't Hooft, A. Jaffe et. al. (Plenum, New York, 1984), p. 543; Bonora, L. and Cotta-Ramusino, P., *Commun. Math. Phys.*, **87**, 589 (1983); Manes, J., Stora, R., and Zumino, B., *Commun. Math. Phys.*, **102**, 157 (1985); Schwarz, A.S., *Commun. Math. Phys.*, **155**, 249

(1993); Lavrov, P.M., Moshhin, P.Yu., and Reshetnyak, A.A., Tomsk preprint hep-th/9507104; Lavrov, P.M., Tomsk preprint hep-th/9507105.

15. Siegel, W., *Phys. Lett.*, **93B**, 170 (1980); Kimura, T., *Progr. Theor. Phys.*, **64**, 357 (1980); **65**, 338 (1982).
16. Barnich, G., Brandt, F., and Henneaux, M., *Commun. Math. Phys.*, **174**, 57 (1995), Section 14.
17. Curci, G. and Ferrari, R., *Nuovo Cimento*, **32A**, 151 (1976); Ojima, I., *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **64**, 625 (1980); Baulieu, L. and Thierry-Mieg, J., *Nucl. Phys.*, **B197**, 477 (1982).
18. Анти-БРСТ преобразование было расширено до случая произвольных локальных симметрий в работе: Alvarez-Gaume, L. and Baulieu, L., *Nucl. Phys.*, **B212**, 255 (1983). Оно индуцируется оператором

$$\begin{aligned} \bar{s} = \omega^{*A} \delta_A \varphi^r \frac{\delta_L}{\delta \varphi^r} - \frac{1}{2} \omega^{*B} \omega^{*C} f^A{}_{BC} \frac{\delta}{\delta \omega^{*A}} - \omega^{*B} h^C f^A{}_{BC} \frac{\delta}{\delta h^A} \\ + \left[-f^A{}_{BC} \omega^{*B} \omega^{*C} + h^A \right] \frac{\delta}{\delta \omega^A}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что это преобразование нильпотентно: $\bar{s}^2 = 0$. Кроме того, БРСТ и антиБРСТ преобразования антикоммутируют. Более того, существует (неопубликованная) теорема о коомологии для антиБРСТ преобразований: наиболее общий функционал I от полей φ^r , ω^A , ω^{*A} и h^A , удовлетворяющий условию антиБРСТ инвариантности $\bar{s}I = 0$ и обладающий нулевым духовым числом, имеет вид:

$$I[\varphi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\varphi] + \bar{s}\bar{\Psi}[\varphi, \omega, \omega^*, h].$$

(Для доказательства используйте оператор Ходжа $\bar{t} = \omega^A \delta / \delta h^A$ вместо t .) Анти-БРСТ симметрия может помочь при перечислении возможных слагаемых в лагранжианах и функциях Грина, но мне неизвестен ни один случай, когда без нее нельзя было бы обойтись.

19. Batalin, I.A. and Vilkovisky, G.A., *Phys. Lett.*, **B102**, 27 (1981); *Nucl. Phys.*, **B234**, 106 (1984); *J. Math. Phys.*, **26**, 172 (1985). См. также: Воронов, Б. Л. и Тютин, И. В., *Теор. Математ. Физика*, **50**, 218, 628 (1982). Живо написанный обзор: Gomis, J., Paris, J., and Samuel, S., *Phys. Rep.*, **259**, 1 (1995).
20. Fradkin, E.S. and Vilkovisky, G.A., *Phys. Lett.*, **B55**, 224 (1975); CERN Report TH2332 (1977); Batalin, I.A. and Vilkovisky, G.A., *Phys. Lett.*, **B69**, 309 (1977); Fradkin, E.S. and Fradkina T.E., *Phys. Lett.*, **B72**, 334 (1977). См. также: Henneaux, M. and Teitelboim, C., *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, Princeton, 1992).
21. Batalin, I.A. and Tyutin, I.V., *Phys. Lett.*, **B356**, 373 (1995).
22. Zinn-Justin, J., in: *Trends in Elementary Particle Theory. International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn*, 1974 (Springer Verlag, Berlin, 1975), p. 2.
23. Freedman, D.Z., van Nieuwenhuizen, P., and Ferrara, S., *Phys. Rev.*, **D13**, 3214 (1976); Kallosh, R.E., *Nucl. Phys.*, **B141**, 141 (1978); de Witt, B. and van Holten, J.W., *Phys. Lett.*, **B79**, 389 (1979); van Nieuwenhuizen, P., *Phys. Rep.*, **68**, 189 (1981).
24. Henneaux, M. and Teitelboim, C., [20], Section 18.1.4.
25. Wigner, E.P., *Group Theory* (Academic Press, New York, 1959), pp. 76-80 (есть рус. пер.: Ю. Вигнер. *Теория групп*. М., ИИЛ, 1961).
26. Ссылка на оригинальную работу: Cartan, E., *Sur la Structure des Groupes de Transformations Finis et Continue* (Paris, 1894). Можно порекомендовать, например, учебник: Gilmore, R., *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (Wiley, New York, 1974).

Методы внешнего поля

Часто полезно рассматривать квантовые теории поля в присутствии классического внешнего поля. Одна из причин — в том, что во многих физических ситуациях такое внешнее поле действительно присутствует, например, классическое электромагнитное или гравитационное поле или скалярное поле с ненулевым вакуумным средним. (Как мы увидим в гл. 19, такие скалярные поля могут играть важную роль при спонтанном нарушении симметрий лагранжиана.) Но даже в том случае, когда в задаче нет реального внешнего поля, ряд вычислений сильно упрощается, если рассматривать физические амплитуды в присутствии фиктивного внешнего поля. В этой главе мы покажем, что можно учесть все многопетлевые эффекты, суммируя «древесные» диаграммы, вершины и пропагаторы которых берутся из *квантового эффективного действия*, которое есть не что иное, как одночастично неприводимая связанная амплитуда перехода вакуум–вакуум в присутствии внешнего поля. В следующей главе будет видно, что такой подход чрезвычайно удобен как для завершения начатого в гл. 15 доказательства перенормируемости неабелевых калибровочных теорий, так и для расчета констант перенормировки заряда, необходимых для установления фундаментального свойства асимптотической свободы в квантовой хромодинамике.

16.1. Квантовое эффективное действие

Рассмотрим квантовую теорию с действием $I[\phi]$ и предположим, что мы «включили» совокупность классических токов $J_r(x)$,

связанных с полями $\Phi^r(x)$ теории. Полная амплитуда перехода вакуум–вакуум в присутствии этих токов имеет вид:

$$Z[J] \equiv \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_J \quad (16.1.1)$$

$$= \int \left[\prod_{s,y} d\phi^s(y) \right] \exp \left(iI[\phi] + i \int d^4x \phi^r(x) J_r(x) + \text{слагаемые с } \epsilon \right)$$

(Поля $\Phi^r(x)$ не обязаны быть только скалярными. Они могут быть даже фермионными, хотя до конца раздела 16.4 мы не будем следить за возникающими в этом случае знаками.) Фейнмановские правила для расчета $Z[J]$ такие же, как для расчета амплитуды перехода вакуум–вакуум $Z[0]$ в отсутствии внешнего тока, с той разницей, что теперь фейнмановские диаграммы содержат вершины нового типа, к которым подсоединена одна линия поля Φ^r . Такая вершина, помеченная координатой x , вносит множитель «взаимодействия» $iJ_r(x)$ в подынтегральное выражение фейнмановской амплитуды в координатном пространстве. Эквивалентно, можно сказать, что в разложении $Z[J]$ по степеням J коэффициент при слагаемом, пропорциональном $iJ_r(x)iJ_s(y)\dots$ есть в точности сумма диаграмм с внешними линиями (включая пропагаторы), соответствующими полям $\Phi^r(x)$, $\Phi^s(y)$ и т. д. В частности, первая производная определяет среднее по вакууму от квантово-механического оператора $\Phi^r(x)$, соответствующего полю $\Phi^r(x)$:

$$\left[\frac{\delta}{\delta J_r(y)} Z[J] \right]_{J=0} = i \int \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \phi^r(y) \exp(iI[\phi] + \text{слагаемые с } \epsilon)$$

$$= i \langle \text{VAC, out} | \Phi^r(x) | \text{VAC, in} \rangle_{J=0}. \quad (16.1.2)$$

Иногда приходится иметь дело с функционалами $Z[J]$, определенными формулой (16.1.1), где $\Phi^r(x)$ — не элементарные поля (т. е. поля, входящие в действие), а произведения таких полей. Когда $\Phi^r(x)$ есть произведение N элементарных полей, к новым вершинам в фейнмановских правилах для $Z[J]$ подсоединяются N линий. Некоторые из результатов этой главы (включая формулу (16.1.2)) применимы и для такого случая, но когда будут рассматриваться фейнмановские диаграммы, мы молчаливо будем предполагать, что поля $\Phi^r(x)$ элементарны.

Итак, $Z[J]$ определяется суммой *всех* амплитуд перехода вакуум–вакуум в присутствии тока J , включая как связные, так и несвязные диаграммы, но при этом не считая различными те диаграммы, которые отличаются только перестановкой вершин* в той же самой или в разных связных поддиаграммах. Произвольная диаграмма, состоящая из N связных компонент, будет вносить в $Z[J]$ слагаемое, равное произведению вкладов этих компонент, деленное на число $N!$ перестановок вершин, которые только переставляют все вершины в одной несвязной компоненте со всеми вершинами в другой**. Поэтому сумма всех диаграмм равна

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (iW[J])^N = \exp(iW[J]), \quad (16.1.3)$$

где $iW[J]$ — сумма всех *связных* амплитуд перехода вакуум–вакуум, опять же не считая различными те диаграммы, которые отличаются только перестановкой вершин.

По многим причинам полезно сделать еще один шаг, и вместо $W(J)$ иметь дело с суммой всех связных *одночастично неприводимых* (1PI) диаграмм. (Одночастично неприводимая диаграмма не может быть сделана несвязной путем разрезания какой угодно одной внутренней линии.) Можно следующим образом получить формальное выражение для этой суммы. Во-первых, определим $\phi_J^r(x)$ как среднее по вакууму от оператора $\Phi^r(x)$ в присутствии тока J :

$$\phi_J^r(x) = \frac{\langle \text{VAC, out} | \Phi^r(x) | \text{VAC, in} \rangle_J}{\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_J} = - \frac{i}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J_r(x)} Z[J] \quad (16.1.4)$$

или, в терминах суммы связных диаграмм:

* Здесь и ниже имеются в виду только вершины, порождаемые током J , позднее автор называет их J -вершинами. — *Прим. ред.*

** Вклад фейнмановской диаграммы с N связными компонентами, содержащими $n_1, n_2, \dots, n_N$ вершин, пропорционален множителю $1/(n_1 + \dots + n_N)!$, возникающему от дайсоновского разложения, и множителю $(n_1 + \dots + n_N)!/N!$, равному числу перестановок этих вершин, если считать одинаковыми те перестановки, которые только переставляют все вершины в одной компоненте со всеми вершинами в другой.

$$\varphi_J^r(x) = \frac{\delta}{\delta J_r(x)} W[J]. \quad (16.1.5)$$

Эту формулу можно обратить. Определим $J_{\varphi^r}(x)$ как ток, для которого выражение (16.1.4) принимает заданное значение $\varphi^r(x)$:

$$\varphi_J^r(x) = \varphi^r(x), \text{ если } J_r(x) = J_{\varphi^r}(x).$$

Квантовое эффективное действие¹ $\Gamma[\varphi]$ определяется (как функционал φ , а не J) преобразованием Лежандра:

$$\Gamma[\varphi] \equiv - \int d^4x \varphi^r(x) J_{\varphi^r}(x) + W[J_\varphi]. \quad (16.1.6)$$

Вскоре мы покажем, что $\Gamma[\varphi]$ есть сумма всех связанных одночастично неприводимых диаграмм в присутствии тока J_φ . Однако сначала взглянем на физическое значение этой величины с другой стороны.

Заметим, что вариационная производная $\Gamma[\varphi]$ равна

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi^r(y)} &= - \int d^4x \varphi^r(x) \frac{\delta J_{\varphi^r}(x)}{\delta \varphi^s(y)} - J_{\varphi^s}(y) \\ &\quad + \int d^4x \left[\frac{\delta W[J]}{\delta J_r(x)} \right]_{J=J_\varphi} \frac{\delta J_{\varphi^r}(x)}{\delta \varphi^s(y)} \end{aligned}$$

или, используя (16.1.5),

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi^s(y)} = -J_{\varphi^s}(y). \quad (16.1.7)$$

Следовательно, $\Gamma[\varphi]$ есть «эффективное действие» в том смысле, что возможные значения *внешних полей* $\varphi^s(y)$ в *отсутствие* тока J задаются стационарными «точками» Γ :

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi^s(y)} = 0 \text{ для } J = 0. \quad (16.1.8)$$

Это можно сравнить с *классическими уравнениями поля*, определяющимися требованием стационарности исходного классичес-

кого действия $I[\phi]$. Поэтому (16.1.8) можно рассматривать как уравнение движения для внешнего поля ϕ с учетом квантовых поправок.

Величина $\Gamma[\phi]$ не только позволяет получить уравнения поля с учетом квантовых поправок. Эта величина является также эффективным действием в том смысле, что $iW[J]$ можно вычислить как сумму связанных *древесных* диаграмм для амплитуды перехода вакуум–вакуум с вершинами, вычисляемыми так, как будто действием является не $I[\phi]$, а $G[\phi]$. Древесными называются диаграммы, которые становятся несвязными при разрезании любой внутренней линии. При использовании $G[\phi]$ вместо $I[\phi]$ учитываются все эффекты петлевых диаграмм.

Чтобы убедиться в этом ², рассмотрим величину $W_G[J, g]$, которая получится вместо $W[J]$, если использовать действие $g^{-1}\Gamma[\phi]$ вместо $I[\phi]$:

$$\exp\{iW_G[J, g]\} \equiv \int \prod_{n,x} d\phi^n(x) \exp\left\{ig^{-1}\left[\Gamma[\phi] + \int d^4x \phi^n(x) J_n(x)\right] + \text{слагаемые с } \varepsilon\right\}, \quad (16.1.9)$$

с произвольной константой g . Пропагатором в данном случае является величина, обратная коэффициенту в квадратичном по ϕ слагаемом действия $g^{-1}G[\phi]$, и поэтому пропорционален g , в то время, как все вершины дают вклады, пропорциональные $1/g$, так что диаграмма с V вершинами (включая те, которые порождаются током J) и I внутренними линиями (включая те, которые присоединены к J -вершинам) пропорциональна g^{I-V} . Для любой связной диаграммы число петель равно $L = I - V + 1$, так что L -петлевое слагаемое в $W_G[J, g]$ зависит от g следующим образом *:

$$(W_G[J, g])_{L \text{ петель}} \propto g^{L-1}. \quad (16.1.10)$$

Эквивалентно, можно записать (по крайней мере формально):

* По этой причине параметр g в формуле (16.1.9) называют параметром разложения по петлям или петлевым параметром, а также параметром квазиклассического разложения, поскольку он входит так же, как входит постоянная Планка $\hbar$ (см. ниже примечание автора в разделе 17.2). — *Прим. ред.*

$$W_\Gamma[J, g] = \sum_{L=0}^{\infty} g^{L-1} W_\Gamma^{(L)}[J], \quad (16.1.11)$$

где (как можно увидеть, положив $g = 1$) величина $W_\Gamma^{(L)}[J]$ есть L -петлевой вклад в связную вакуумную амплитуду $W[J, 1]$, которую мы получили бы, если бы использовали $\Gamma[\phi]$ (без множителя g) вместо действия $I[\phi]$.

Нас особо интересует сумма *древесных* диаграмм, т. е. тех, которые не содержат петель, вычисленная с использованием вершин и пропагаторов, полученных так, как будто действием является не $I[\phi]$, а $\Gamma[\phi]$. В теперешних обозначениях это $W_\Gamma^{(0)}[J]$. Чтобы выделить слагаемое с $L = 0$ в (16.1.11), рассмотрим предел $g \rightarrow 0$. В этом пределе функциональный интеграл (16.1.9) определяется доминирующим вкладом точки стационарной фазы:

$$\exp\{iW_\Gamma[J, g]\} \propto \exp\left\{ig^{-1}\left[\Gamma[\phi] + \int d^4x \phi_J^r(x)J_r(x)\right]\right\}, \quad (16.1.12)$$

где поле ϕ_J , которое по определению является полем, порожденным током J , есть стационарная точка показателя экспоненты в том смысле, что

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^r(x)}\right|_{\phi=\phi_J} = -J_r(x). \quad (16.1.13)$$

Множитель пропорциональности в (16.1.12) в общем случае является функционалом от J , но степенным рядом по g , начинающимся со слагаемых порядка g^0 . Поэтому, беря логарифм от обеих частей и выделяя слагаемые порядка g^{-1} , получаем:

$$W_\Gamma^{(0)}[J] = \Gamma[\phi_J] + \int d^4x \phi_J^r(x)J_r(x). \quad (16.1.14)$$

Полагая $\phi = \phi_J$ в (16.1.6), видим, что правая часть выражения (16.1.14) в точности равна $W[J]$:

$$W_\Gamma^{(0)}[J] = W[J]. \quad (16.1.15)$$

Повторим, это означает, что $W[J]$ можно вычислить, используя $\Gamma[\phi]$ вместо $I[\phi]$ (это отмечает индекс Γ) и удерживая только древесные (0-петлевые) диаграммы:

$$iW[J] = \int \left[\prod_{\substack{n,x \\ \text{связные} \\ \text{древесные}}} d\varphi^r(x) \right] \exp \left\{ \Gamma[\varphi] + i \sum_r \int \varphi^r(x) J_r(x) d^4x \right\}. \quad (16.1.16)$$

Далее, всякая связная диаграмма для $iW[J]$ может рассматриваться как древесная, вершины которой содержат одночастично неприводимые поддиаграммы. Следовательно, для того, чтобы выражение (16.1.16) было правильным, $i\Gamma[\varphi]$ должно быть суммой всех одночастично неприводимых связных диаграмм с произвольным числом внешних линий, причем каждая внешняя линия соответствует множителю φ , а не пропагатору или волновой функции. По этой причине коэффициенты в разложении $\Gamma[\varphi]$ по степеням полей и их производных в окрестности некоторого фиксированного поля φ_0 можно рассматривать как перенормированные константы связи с «точкой» перенормировки, определенной полем φ_0 , а не каким-то набором импульсов.

Эквивалентно, $i\Gamma[\varphi_0]$ для некоторого фиксированного поля $\varphi_0^r(x)$ можно выразить как сумму одночастично неприводимых диаграмм для амплитуды перехода вакуум–вакуум, вычисленной со сдвинутым действием $I[\varphi + \varphi_0]$:

$$i\Gamma[\varphi_0] = \int_{1PI} \left[\prod_{n,x} d\varphi^r(x) \right] \exp \{ iI[\varphi + \varphi_0] \}. \quad (16.1.17)$$

Это верно потому, что каждое место, где φ_0 возникает в любой из вершин или пропагаторов внутри одночастично неприводимых диаграмм в (16.1.17), есть также и то место, где можно подсоединить внешнюю линию поля φ . (Ограничение одночастично неприводимыми диаграммами играет существенную роль в (16.1.17). без этого ограничения можно было бы сдвинуть переменную интегрирования и получить интеграл, который был бы явно не зависящим от φ_0 .) Вместо (16.1.17) часто удобно писать

$$\exp[i\Gamma[\varphi_0]] = \int_{1PI} \left[\prod_{n,x} d\varphi^r(x) \right] \exp \{ iI[\varphi + \varphi_0] \}. \quad (16.1.18)$$

где вычисляется функциональный интеграл, включающий все диаграммы (связные или нет), каждая связная компонента которых является одночастично неприводимой.

* * *

Этот формализм обеспечивает простой способ суммирования древесных диаграмм. В качестве примера рассмотрим связь между полной двухточечной функцией $\Delta^{rx,sy}$ и ее одночастично неприводимой частью $\Pi_{rx,sy}$. Из выражений (16.1.5) и (16.1.7) находим:

$$\Delta^{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_r(x) \delta J_s(y)} = \frac{\delta \phi_J^r(x)}{\delta J_s(y)}, \quad (16.1.19)$$

$$\Pi_{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi^r(x) \delta \phi^s(y)} = -\frac{\delta J_{\phi^r}(x)}{\delta \phi^s(y)}. \quad (16.1.20)$$

Отсюда немедленно вытекает, что «матрицы» Δ и Π связаны соотношением:

$$\Delta = -\Pi^{-1}. \quad (16.1.21)$$

Это есть аналог знакомого соотношения (10.3.15) между пропагаторами и собственнoэнергетическими частями, с дополнительным слагаемым $q^2 + m^2$ в знаменателе (10.3.15), представляющим слагаемое нулевого порядка в одночастично неприводимой двухточечной функции.

16.2. Вычисление эффективного потенциала

Чтобы увидеть, как на практике работает описанный в предыдущем разделе механизм, рассмотрим простой пример — перенормируемую теорию одного действительного скалярного поля $\phi(x)$ с действием

$$I[\phi] = -\int d^4x \left[\lambda + \frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{24} g \phi^4 \right]. \quad (16.2.1)$$

(Мы здесь включили в лагранжиан «космологическую постоянную» $-\lambda$ по причинам, которые станут ясными в дальнейшем.) Предполо-

жим для простоты, что мы хотим вычислить $\Gamma[\varphi_0]$ для независимого от координат поля φ_0 . Тогда каждое слагаемое в $\Gamma[\varphi_0]$ содержит множитель, равный объему пространства-времени

$$\gamma_4 = \int d^4x = \delta^4(p-p)(2\pi)^4, \quad (16.2.2)$$

возникающий из дельта-функции закона сохранения импульса. Поэтому при постоянном φ_0 можно записать

$$\Gamma[\varphi_0] = -\gamma_4 V(\varphi_0), \quad (16.2.3)$$

где $V(\varphi)$ — обычная функция, которую называют *эффективным потенциалом*. В этом разделе мы вычислим эффективный потенциал в однопетлевом приближении. Впервые это было сделано Коулменом и Ю. Вайнбергом³ при изучении проблемы спонтанного нарушения симметрии, которая будет предметом обсуждения в гл. 19 и 21. Полученные результаты они использовали в одном из первых приложений ренормализационной группы, которое мы опишем в разделе 18.2.

Сдвигая φ на φ_0 , получим выражение для действия*:

$$\begin{aligned} I[\varphi + \varphi_0] = & -\gamma_4 \left[\lambda + \frac{1}{2} m^2 \varphi_0^2 + \frac{1}{24} g \varphi_0^4 \right] - [m^2 \varphi_0 + \frac{1}{6} g \varphi_0^3] \int d^4x \varphi \\ & - \int d^4x \left[\partial_\rho \varphi \partial^\rho \varphi + \frac{1}{2} \mu^2(\varphi_0) \varphi^2 \right] - \int d^4x \left[\frac{1}{6} g \varphi_0 \varphi^3 + \frac{1}{24} g \varphi^4 \right], \end{aligned} \quad (16.2.4)$$

где μ^2 — зависящая от поля масса

$$\mu^2(\varphi_0) = m^2 + \frac{1}{2} g \varphi_0^2. \quad (16.2.5)$$

Заметим, что помимо слагаемых, имеющих ту же структуру, что и в исходном действии, возникли новые взаимодействия, пропорциональные φ (они не влияют на одночастично неприводимые диаграммы) и φ^3 .

* При $m^2 < 0$ существуют ограничения на применимость теории возмущений, которые обсуждаются в следующем разделе.



Рис. 16-1. Древесные, одно- и двухпетлевые диаграммы для квантового эффективного действия в теории нейтрального скалярного поля ϕ с взаимодействием ϕ^4

На рис. 16.1 показаны фейнмановские диаграммы для $\Gamma[\phi_0]$ вплоть до двухпетлевого порядка. Слагаемое без петель в амплитуде перехода вакуум–вакуум дается просто постоянным слагаемым в $I[\phi + \phi_0]$:

$$i\Gamma^{(0 \text{ петель})}[\phi_0] = -i\gamma_4 \left(\lambda + \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{g}{24} \phi_0^4 \right). \quad (16.2.6)$$

Однопетлевое слагаемое определяется выражением

$$\begin{aligned} \exp(i\Gamma^{(1 \text{ петля})}[\phi_0]) = \int \prod_x d\phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \int d^4x \left[\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} \mu^2(\phi_0) \phi^2 \right] \right. \\ \left. + \text{слагаемые с } \varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (16.2.7)$$

В гл. 9 мы научились вычислять эти интегралы. Результат дается выражением (9.A.18):

$$i\Gamma^{(1 \text{ петля})}[\phi_0] = \ln \text{Det} \left(\frac{iK}{\pi} \right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{iK}{\pi} \right), \quad (16.2.8)$$

где теперь

$$K_{x,y} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial y_\lambda} + \mu^2(\phi_0) - i\varepsilon \right] \delta^4(x-y). \quad (16.2.9)$$

Как обычно, для вычисления таких следов полезно диагонализировать «матрицу» K , перейдя в импульсное пространство:

$$\begin{aligned}
K_{p,q} &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2} e^{-ip \cdot x} \frac{d^4y}{(2\pi)^2} e^{iq \cdot y} K_{x,y} \\
&= (p^2 + \mu^2(\varphi_0) - i\varepsilon) \delta^4(p - q).
\end{aligned} \tag{16.2.10}$$

Логарифм этой диагональной матрицы есть тоже диагональная матрица с логарифмами на главной диагонали:

$$\left[\ln \left(\frac{iK}{\pi} \right) \right]_{p,q} = \ln \left[\frac{i}{\pi} (p^2 + \mu^2(\varphi_0) - i\varepsilon) \right] \delta^4(p - q). \tag{16.2.11}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
i\Gamma^{(1 \text{ петля})}[\varphi_0] &= -\frac{1}{2} \int d^4p \left[\ln \left(\frac{iK}{\pi} \right) \right]_{p,q} \\
&= -\frac{\gamma_4}{2(2\pi)^4} \int d^4p \ln \left[\frac{i}{\pi} (p^2 + \mu^2(\varphi_0) - i\varepsilon) \right].
\end{aligned} \tag{16.2.12}$$

Объединяя выражения (16.2.6) и (16.2.12), находим эффективный потенциал в однопетлевом приближении:

$$V(\varphi_0) = \lambda + \frac{1}{2} m^2 \varphi_0^2 + \frac{1}{24} g \varphi_0^4 + \mathcal{J}(\mu^2(\varphi_0)), \tag{16.2.13}$$

где

$$\mathcal{J}(\mu^2) \equiv \frac{-i}{2(2\pi)^4} \int d^4p \ln \left[\frac{i}{\pi} (p^2 + \mu^2 - i\varepsilon) \right]. \tag{16.2.14}$$

Видно, что эта формула для эффективного потенциала содержит, к сожалению, ультрафиолетовые расходимости. Однако, к счастью, они естественным образом поглощаются перенормировкой параметров теории. Хотя интеграл (16.2.14) расходится, простой подсчет индекса расходимости показывает, что его можно сделать сходящимся, трижды продифференцировав по μ^2 :

$$\mathcal{J}'''(\mu^2) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p (p^2 + \mu^2 - i\varepsilon)^{-3}.$$

И опять слагаемое $-i\epsilon$ показывает, что следует поворачивать контур в плоскости p^0 против часовой стрелки, так что $p^0 = i p_4$, где p_4 изменяется от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\mathcal{J}'''(\mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{2\pi^2 k^3 dk}{(k^2 + \mu^2)^3} = \frac{1}{32\pi^2 \mu^2}.$$

Трижды интегрируя, находим

$$\mathcal{J}(\mu^2) = \frac{\mu^4 \ln \mu^2}{64\pi^2} + A + B\mu^2 + C\mu^4.$$

Постоянные A , B , C не определяются данным методом вычислений, что едва ли является серьезной трудностью, поскольку очевидно, что они все равно бесконечны. Мы устраняем эти константы, определяя «перенормированные» значения λ , m^2 и g следующим образом:

$$\lambda_R \equiv \lambda + A + Bm^2 + Cm^4,$$

$$m_R^2 \equiv m^2 + gB + 2gm^2C,$$

$$g_R \equiv g + 6g^2C.$$

Окончательный результат для потенциала в однопетлевом приближении имеет вид

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2} m_R^2 \phi_0^2 + \frac{g_R}{24} \phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0) \ln \mu^2(\phi_0)}{64\pi^2}, \quad (16.2.15)$$

где $\mu(\phi_0)$ — зависящая от поля масса, определенная выражением (16.2.5). В данном порядке ее можно вычислять *, заменяя m и g на m_R и g_R

$$\mu^2(\phi) = m_R^2 + \frac{1}{2} g_R \phi^2.$$

* Имеется в виду данный (первый) порядок разложения по петлям, т.е. по петлевому параметру, который выше также обозначен буквой g (см. (16.1.12)). — Прим. ред.

Аналогичные результаты верны в случае, когда теория содержит комплексное фермионное поле со спином $1/2$, взаимодействующее со скалярным полем ϕ . Например, если гамильтониан этого взаимодействия имеет простой вид $G\phi\bar{\psi}\psi$, то масса $M(\phi_0)$ фермиона в присутствии постоянного скалярного фонового поля ϕ_0 имеет вид:

$$M(\phi_0) = M(0) + G\phi_0.$$

Легко видеть, что потенциал (16.2.1) в этом случае получает добавочное слагаемое

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2} m_R^2 \phi_0^2 + \frac{g_R}{24} \phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0) \ln \mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} - \frac{M^4(\phi_0) \ln M^2(\phi_0)}{32\pi^2}. \quad (16.2.16)$$

Численный коэффициент в новом слагаемом вдвое больше того, который стоит перед слагаемым $\mu^4 \ln \mu^2$ в (16.2.15), что связано с двумя спиновыми состояниями фермиона, описываемого полем ψ , а знак этого коэффициента противоположен по той причине, что (как показано в гл. 9) фермионные функциональные интегралы от гауссианов пропорциональны детерминанту матричного коэффициента в экспоненте, а бозонные интегралы — обратной величине этих детерминантов.

16.3. Энергетическая интерпретация

Важное значение имеет интерпретация действия $\Gamma[\phi]$ и потенциала $V[\phi]$ с помощью понятий энергии и плотности энергии, соответственно.⁴ Чтобы увидеть это, предположим, что мы включаем ток $J^n(\mathbf{x}, t)$, который плавно растет от нуля при $t = -\infty$ до конечного значения $J^n(\mathbf{x})$, которое не изменяется в течение долгого времени T , после чего вновь плавно уменьшается до нуля при $t = +\infty$. Влияние такого возмущения заключается в превращении вакуума в состояние с определенной энергией $E[J]$ (функционал от $J^n(\mathbf{x})$), которое сохраняется в течение времени T , после чего опять возвращается в состояние вакуума. Однако, хотя *аут-вакуум* — то же самое физическое состояние, что и *ин-вакуум*,

векторы состояний отличаются на фазу $\exp(-iE[J]T)$, накопившуюся за время T :

$$\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_J = \exp(-iE[J]T). \quad (16.3.1)$$

Сравнивая с выражениями (16.1.1) и (16.1.3), находим:

$$W[J] = -E[J]T. \quad (16.3.2)$$

Чтобы увидеть связь между этой энергией и эффективным действием, предположим, что мы ищем состояние Ω_Φ , которое минимизирует среднее значение энергии

$$\langle H \rangle_\Omega = \frac{(\Omega, H\Omega)}{(\Omega, \Omega)}, \quad (16.3.3)$$

подчиненное условию, что квантовые поля $\Phi_n(\mathbf{x}, t)$ имеют не зависящее от времени среднее значение $\Phi_n(\mathbf{x})$:

$$\frac{(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x}, t)\Omega)}{(\Omega, \Omega)} = \Phi_n(\mathbf{x}), \quad (16.3.4)$$

Кроме того, удобно наложить на Ω условие нормировки:

$$(\Omega, \Omega) = 1. \quad (16.3.5)$$

Чтобы минимизировать среднее значение (16.3.3), удовлетворяющее ограничениям (16.3.4) и (16.3.5), используем метод множителей Лагранжа и будем искать минимум величины

$$(\Omega, H\Omega) - \alpha(\Omega, \Omega) - \int d^3x \beta^n(\mathbf{x})(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x})\Omega) \quad (16.3.6)$$

без ограничений на Ω . Имеем:

$$H\Omega = \alpha\Omega + \int d^3x \beta^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x}). \quad (16.3.7)$$

Как α , так и $\beta^n(\mathbf{x})$ следует выбрать так, чтобы удовлетворялись ограничения (16.3.4) и (16.3.5), поэтому эти величины функционально зависят от заданного среднего значения $\Phi_n(\mathbf{x})$.

Далее, мы сказали, что в присутствии тока $\mathcal{J}^n(\mathbf{x})$ гамильтониан $H - \int d^3x \mathcal{J}^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x})$ имеет собственное значение $E[\mathcal{J}]$:

$$\left[H - \int d^3x \mathcal{J}^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x}) \right] \Psi_{\mathcal{J}} = E[\mathcal{J}] \Psi_{\mathcal{J}} \quad (16.3.8)$$

с нормированным собственным вектором $\Psi_{\mathcal{J}}$. Кроме того, поскольку плавное включение тока переводит вакуум в данное собственное состояние с определенной энергией, можно предположить, что $E[\mathcal{J}]$ есть низшее энергетическое состояние в присутствии этого тока. Таким образом, соотношения (16.3.4), (16.3.5) и (16.3.7) удовлетворяются следующими величинами:

$$\Omega = \Psi_{\mathcal{J}_\Phi}, \quad (16.3.9)$$

$$\alpha = E[\mathcal{J}_\Phi], \quad (16.3.10)$$

$$\beta^n(\mathbf{x}) = \mathcal{J}_\Phi^n(\mathbf{x}), \quad (16.3.11)$$

где $\mathcal{J}_\Phi(\mathbf{x})$ — ток, для которого среднее значение $\Phi(\mathbf{x})$ в состоянии $\Psi_{\mathcal{J}}$ равно $\Phi(\mathbf{x})$.

Полагая в (16.3.8) $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\Phi$ и беря скалярное произведение с $\Psi_{\mathcal{J}}$, находим минимальную энергию состояний, в которых поля Φ_n удовлетворяют условию, что их средние значения равны Φ_n :

$$\langle H \rangle_\Omega = E[\mathcal{J}_\Phi] + \int d^3x \mathcal{J}_\Phi^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x}). \quad (16.3.12)$$

Вспоминая (16.3.2) и предполагаемый вид $\mathcal{J}(x)$, получаем:

$$\langle H \rangle_\Omega = \frac{1}{T} \left[-W[\mathcal{J}_\Phi] + \int d^4x \mathcal{J}_\Phi^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x}) \right] = -\frac{1}{T} \Gamma[\Phi]. \quad (16.3.13)$$

Как отмечалось в предыдущем разделе, если поле $\Phi(x)$ имеет постоянное значение Φ в большом пространственно-временном объеме $\tau_4 = \tau_3 T$, эффективное действие можно записать, введя эффективный потенциал $V(\Phi)$:

$$\Gamma[\Phi] = -\tau_3 T V(\Phi). \quad (16.3.14)$$

В этом случае из (16.3.13) следует, что плотность энергии равна

$$\langle H \rangle_{\Omega} / \tau_3 = V(\varphi). \quad (16.3.15)$$

Это и есть главный результат: *величина $V(\varphi)$ есть минимум среднего значения плотности энергии для всех состояний, удовлетворяющих условию, что средние значения скалярных полей Φ_n равны φ_n* . Одно из следствий этого утверждения заключается в том, что в отсутствие внешних токов вакуумное состояние переходит в равновесное состояние, в котором потенциал $V(\varphi)$ не только стационарен (что требуется уравнениями поля (16.1.8)), но и *минимален*.

Полученный результат помогает решить проблему интерпретации квантового эффективного потенциала. Евклидова версия формализма функциональных интегралов (описанная в Приложении А к главе 23) делает очевидным, что двухточечная функция Δ положительна (в матричном смысле), так что в силу (16.1.2) это же верно для $-\Pi = \Delta^{-1}$. С учетом (16.2.3) из этого следует, что эффективный потенциал $V(\varphi)$ одного скалярного поля должен иметь положительную (или нулевую) вторую производную по φ . Более общее утверждение гласит, что эффективный потенциал должен быть *выпуклым*.⁵

$$V(\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2) \leq \lambda V(\varphi_1) + (1-\lambda)V(\varphi_2) \text{ при } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Однако исследование соотношения (16.2.13) показывает, что при $m^2 < 0$ и $g > 0$ в древесном приближении эффективный потенциал скалярной теории поля с действием (16.2.1) имеет *отрицательную* вторую производную, если φ находится между двумя минимумами эффективного потенциала в точках $\pm\sqrt{6|m^2|/g}$. Это противоречие возникает из-за того, что вывод теории возмущений неявно предполагает существование стабильного вакуума, но когда $V''(\varphi) < 0$, поле φ имеет значение $\tilde{\varphi}$, в котором $V(\tilde{\varphi}) - \int \tilde{\varphi}$ имеет не минимум, а *максимум*, и это означает, что вакуумное состояние в присутствии тока J_φ неустойчиво.

Так что же является истинным эффективным потенциалом для такой скалярной теории, когда $m^2 < 0$, а φ находится между двумя минимумами потенциала? Результат этого раздела сводится к тому, что мы должны найти состояние с минимальной энергией, в кото-

ром среднее значение оператора Φ равно ϕ . До тех пор, пока ϕ находится между двумя минимумами потенциала, можно придать Φ среднее значение ϕ , выбрав состояние как подходящую линейную комбинацию двух состояний, в которых ϕ находится в точках минимумов $\phi \simeq \pm \sqrt{6|m^2|/g}$. Энергия этого состояния равна энергии в минимумах, так что такое состояние действительно минимизирует энергию. (По причинам, объясненным в разделе 19.1, интерференционные слагаемые исчезают в пределе бесконечного объема.) Таким образом, эффективный потенциал между двумя минимумами потенциала есть константа, удовлетворяющая требованию неотрицательности второй производной. Те же рассуждения показывают, что в более общих теориях, в которых потенциал имеет два локальных минимума с разной энергией, потенциал между этими минимумами линеен⁶.

16.4. Симметрии эффективного действия

В некоторых случаях симметрии действия $I[\phi]$ автоматически являются симметриями эффективного действия $\Gamma[\phi]$. так, в разобранный в разделе 16.2 примере действие (16.2.1) симметрично относительно дискретного преобразования $\phi \rightarrow -\phi$. Из определения величин $Z[\phi]$ и $W[\phi]$ следует, что они четны относительно соответствующего отражения $J \rightarrow -J$. Тогда из соотношения (16.1.5) следует, что $\phi_{-J} = -\phi_J$, и поэтому $J_{-\phi} = -J_\phi$, так что согласно формуле (16.1.6) эффективное действие $\Gamma[\phi]$ является четным относительно замены $\phi \rightarrow -\phi$. Это подтверждается результатом однопетлевых вычислений (16.2.15). В частном случае $M(0) = 0$ вклад фермионных петель в (16.2.16) также обладает симметрией относительно $\phi \rightarrow -\phi$, так как в этом случае действие инвариантно относительно комбинированного преобразования $\phi \rightarrow -\phi$, $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$.

При доказательстве перенормируемости теории мы столкнемся с трудностями, если только нам не удастся показать, что симметрии исходного классического действия остаются в силе и для эффективного действия. В приведенном выше примере, если $I[\phi]$ считалось четным по ϕ , а в $\Gamma[\phi]$ это оказалось не так, то коэффициенты при слагаемых в Γ , пропорциональные $\int d^4x \phi$ и $\int d^4x \phi^3$, будут расходящимися, однако симметрия действия не позволит ввести контрчлены для поглощения этих бесконечностей.

С учетом этих рассуждений рассмотрим важный класс симметрий, порождаемых бесконечно малыми преобразованиями

$$\chi^n(x) \rightarrow \chi^n(x) + \varepsilon F^n[x; \chi], \quad (16.4.1)$$

где F^n — функция от x^μ , функционально зависящая от χ^n . (Например, $F^n[x; \chi]$ может быть обычной функцией χ^n и их производных в точке x .) Мы теперь используем символ χ^n вместо φ^r для обозначения разных типов полей, чтобы подчеркнуть, что они включают не только обычные калибровочные поля и поля материи (которые в следующей главе будут обозначаться $\varphi^r(x)$), но и все другие поля, возникающие в действии с фиксированной калибровкой, включая поля духов. Повторим, что $\chi^n(x)$ могут быть полями любого типа, а не только скалярами.

Предположим, что как действие, так и мера инвариантны относительно преобразования симметрии (16.4.1):

$$I[\chi + \varepsilon F] = I[\chi], \quad (16.4.2)$$

$$\prod_{n,x} d(\chi^n(x) + \varepsilon F^n[x; \chi]) = \prod_{n,x} d\chi^n(x). \quad (16.4.3)$$

(В действительности достаточно, чтобы только произведение $(\prod_{n,x} d\chi^n(x)) \exp(iI)$ было инвариантным, но если это верно, обычно выполняются и соотношения (16.4.2) и (16.4.3).)

Заменяя переменные интегрирования в (16.4.1) на $\chi^n(x) + \varepsilon F^n[x; \chi]$, имеем

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \left[\prod_{n,x} d(\chi^n(x) + \varepsilon F^n[x; \chi]) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ iI[\chi + \varepsilon F] + i \int d^4x (\chi^n(x) + \varepsilon F^n[x; \chi]) J_n(x) \right\} \\ &= \int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right] \exp \left\{ iI[\chi] + i \int d^4x (\chi^n(x) + \varepsilon F^n[x; \chi]) J_n(x) \right\} \\ &= Z[J] + i\varepsilon \int \left(\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right) \int F^n[y; \chi] J_n(y) d^4y, \\ &\quad \times \exp \left\{ iI[\chi] + i \int d^4x \chi^n(x) J_n(x) \right\}, \end{aligned} \quad 1$$

откуда

$$\int d^4y \langle F^n(y) \rangle_J J_n(y) = 0, \quad (16.4.4)$$

где $\langle \rangle_J$ означает квантовое среднее в присутствии тока $J_n(x)$,

$$Z[J] \langle F^n(y) \rangle_J \equiv \int \left(\prod_{n,x} d\chi^n(x) \right) F^n[y; \chi] \times \exp \{ iI[\chi] + i \int d^4x \chi^n(x) J_n(x) \},$$

нормированное так, что $\langle 1 \rangle_J = 1$. Вспомним, что $J_n(y)$ выражается через эффективное действие соотношением (16.1.7):

$$J_{n,\chi}(y) = - \frac{\delta \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)}.$$

Поэтому (16.4.4) можно записать в виде

$$0 = \int d^4y \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)}. \quad (16.4.6)$$

Иными словами, $\Gamma[\chi]$ инвариантно относительно инфинитезимального преобразования

$$\chi^n(y) \rightarrow \chi^n(y) + \varepsilon \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi}. \quad (16.4.7)$$

Подобные условия симметрии известны под названием *тождеств Славнова–Тейлора*⁷.

Та ли это симметрия, с которой мы начинали? Это так для одного очень важного класса инфинитезимальных преобразований симметрии, которые *линейны*. Для таких симметрий F имеет вид:

$$F^n[x; \chi] = s^n(x) + \int t^n_m(x; y) \chi^m(y) d^4y. \quad (16.4.8)$$

(Чаще всего $s^n(x)$ обращается в нуль, а $t^n_m(x)$ есть постоянная матрица, умноженная на $d^4(x - y)$.) Для любого линейного F имеем

$$\langle F^n(x) \rangle_J = s^n(x) + \int t^n_m(x; y) \langle \chi^m(y) \rangle_J d^4y.$$

Но для любого фиксированного χ величина J_χ определена как значение тока J , при котором $\langle \chi^m(y) \rangle_J$ становится равным $\chi^m(y)$, так что

$$\langle F^n(x) \rangle_{J_\chi} = s^n(x) + \int t^n_m(x; y) \chi^m(y) d^4y = F^n[x; \chi]. \quad (16.4.9)$$

Следовательно из (16.4.6) вытекает, что $\Gamma[\chi]$ должно быть инвариантным относительно всех функциональных линейных преобразований $\chi^n \rightarrow \chi^n + \epsilon F^n$, оставляющих инвариантными $I[\chi]$ и меру.

Иногда приходится иметь дело с нелинейными преобразованиями симметрий. Важным примером является БРСТ преобразование, обсуждавшееся в разделе 15.7. Для нелинейных преобразований преобразование симметрии (16.4.7), относительно которого инвариантно эффективное действие, в общем случае не совпадает с тем исходным преобразованием симметрии (16.4.1), которое оставляет инвариантным исходное действие, так как среднее от нелинейного функционала полей в общем случае не совпадает с тем же функционалом от средних полей. Действительно, форма $\langle F \rangle_{J_\chi}$ как функционала χ зависит в общем случае от динамики системы и обычно нелокальна. В следующей главе мы преодолеем это осложнение, используя метод антискобок.

* * *

До сих пор мы молчаливо предполагали, что все поля χ^n и соответствующие функции преобразования F^n и токи J_n являются бозонными. Теперь следует обратить внимание на знаковые множители, возникающие в случае, когда некоторые из указанных величин — фермионные, как, в частности, имеет место для суперсимметрии или БРСТ преобразований, где ϵ — фермион, а χ^n и F^n имеют противоположные статистики. Если токи располагаются в действии справа от полей, как в выражениях (16.1.1) и (16.4.5), то формулы (16.1.5) и (16.1.7) примут вид

$$\frac{\delta_R W[J]}{\delta J_m(y)} = \chi_J^m(y), \quad (16.4.10)$$

$$\frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^m(y)} = -J_{\chi, m}(y), \quad (16.4.11)$$

где нижние индексы R и L указывают, что производная действует справа или слева. В результате тождество Славнова–Тейлора (16.4.6) можно записать в виде

$$0 = \int d^4y \langle F^n(x) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)}. \quad (16.4.12)$$

Задачи

1. Рассмотрите теорию действительного псевдоскалярного поля $\phi(x)$ и комплексного дираковского поля $\psi(x)$ массами M и m , соответственно, с взаимодействием вида $g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$. В однопетлевом приближении вычислите эффективный потенциал для $\phi = \text{constant}$, $\psi = 0$.
2. Выведите общие формулы для $\delta^3 W[J] / \delta J_n(x) \delta J_m(y) \delta J_l(z)$ и $\delta^4 W[J] / \delta J_n(x) \delta J_m(y) \delta J_l(z) \delta J_k(w)$ через вариационные производные $\Gamma[\phi]$ по ϕ . Покажите, какие фейнмановские диаграммы соответствуют каждому слагаемому в этих формулах.
3. В однопетлевом приближении вычислите эффективный потенциал для теории нейтрального скалярного поля ϕ с лагранжианом взаимодействия $g\phi^3/6$ в шести пространственно-временных измерениях.
4. Пусть действие $I[\phi]$ инвариантно относительно конечного линейного преобразования $\phi_n(x) \rightarrow \sum_m M_{nm} \phi_m(x)$. Относительно какого преобразования токов инвариантна в этом случае величина $W[J]$? Используя этот результат, найдите свойство симметрии $\Gamma[\phi]$.

Список литературы

1. Эффективное действие $\Gamma[\varphi]$ было введено в работе: Goldstone, J., Salam, A., and Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **127**, 965 (1962), где эта величина была определена по теории возмущений как сумма одночастично неприводимых связных диаграмм. Непертурбативное определение (16.1.6) впервые было независимо дано в работах: B. De Witt, in: *Relativity, Groups and Topology. — Lectures Delivered at Les Houches during the 1963 Session of the Summer School of Theoretical Physics*, C. De Witt and B. De Witt, eds. (Gordon and Breach, New York, 1964); Jona-Lasinio, J., *Nuovo Cimento*, **34**, 1790 (1964).
2. Coleman, S., *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985), pp. 135-136.
3. Coleman, S. and Weinberg, E., *Phys. Rev.*, **D7**, 1888 (1973).
4. Symanzik, K., *Commun. Math. Phys.*, **16**, 48 (1970); Coleman, S., *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985), pp. 139-142.
5. Symanzik, K., *ibid.*; Iliopoulos, J., Itzykson, C., and Martin, A., *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 165 (1975).
6. Fujimoto, Y., O’Raifeartaigh, L., and Parravicini, G., *Nucl. Phys.*, **B212**, 268 (1983); Haymaker, R.W. and Perez-Mercader, J., *Phys. Rev.*, **D27**, 1948 (1983); Bender, C.M. and Cooper, F., *Nucl. Phys.*, **B224**, 403 (1983); Hindmarsh, M. and Johnston, D., *J. Math. Phys.*, **A19**, 141 (1986); Branchina, V., Castorina, P., and Zappala, D., *Phys. Rev.*, **D41**, 1948 (1990); Cahill, K., *Phys. Rev.*, **D52**, 4704 (1995).
7. Славнов, А.А., Теор. Математ. Физика, **10**, 152 (1972); Taylor, J.C., *Nucl. Phys.*, **B33**, 436 (1971).

Перенормировка калибровочных теорий

Вернемся к рассмотрению калибровочных теорий и воспользуемся описанным в предыдущей главе формализмом внешнего поля для изучения перенормируемости таких теорий и проведения важных вычислений.

17.1. Уравнение Зинн-Жюстена

В данном разделе мы используем описанную в разделе 15.7 БРСТ симметрию для того, чтобы продемонстрировать фундаментальное свойство квантового эффективного действия, впервые обнаруженное Зинн-Жюстеном¹. Согласно общим правилам, описанным в разделе 16.4, БРСТ инвариантность действия $I[\chi]$ накладывает на эффективное действие $\Gamma[\chi]$ условие

$$\int d^4x \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(x)} = 0, \quad (17.1.1)$$

где изменение $\chi^n(x)$ в результате БРСТ преобразования с инфинитезимальным фермионным параметром θ равно:

$$\delta_\theta \chi^n(x) = \theta \Delta^n(x), \quad (17.1.2)$$

а $\langle \dots \rangle$ означает вакуумное среднее, вычисляемое в присутствии тока J_χ , так что вакуумное среднее операторных полей $X^n(x)$ равно числовым функциям $\chi^n(x)$. Возникающая сумма по n берется по всем полям в БРСТ формализме, т. е. по ω_α , ω_α^* , h_α , а также по калиб-

ровочным полям и полям материи, которые в разделе 15.8 были коллективно обозначены Φ^r . Поскольку $\Delta^n(x)$ квадратична по полям, когда χ^n — поле материи, калибровочное поле или ω_α , из соотношения (17.1.1) в общем случае *не следует*, что эффективное действие инвариантно относительно того же БРСТ преобразования, что и само действие.

Чтобы справиться с этим осложнением, воспользуемся приемом, который полезен при рассмотрении любого типа нильпотентных преобразований симметрии. Во-первых, введем набор с-числовых внешних полей $K_n(x)$ и определим новое эффективное действие

$$\Gamma[\chi, K] \equiv W[J_{\chi, K}, K] - \int d^4x \chi^n(x) J_{\chi, K n}(x), \quad (17.1.3)$$

где связанная амплитуда перехода вакуум-вакуум W вычисляется здесь с помощью действия в фиксированной калибровке* $I + \int d^4x \Delta^n K_n$:

$$e^{iW[J, K]} \equiv \int \left[\prod_{n, x} d\chi^n(x) \right] \exp \left(iI + i \int d^4x \Delta^n K_n + i \int d^4x \chi^n J_n \right) \quad (17.1.4)$$

а $J_{\chi, K}$ — ток, требуемый для того, чтобы придать полям средние значения χ в присутствии внешних полей K :

$$\left. \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta J_n(x)} \right|_{J=J_{\chi, K}} \equiv \chi^n(x). \quad (17.1.5)$$

(Поля K_n должны иметь ту же фермионную или бозонную статистику, что и Δ^n , которая противоположна статистике χ^n .) Так как БРСТ преобразование нильпотентно, величины $\Delta^n(x)$ БРСТ инвариантны, поэтому по аналогии с тем, как это было сделано в разделе 16.4, можно показать, что новое эффективное действие $\Gamma[\chi, K]$ удовлетворяет условию БРСТ инвариантности:

* Здесь I есть действие I_{NEW} , модифицированное так, как описано в разделе 15.7, и зависящее от полей гостов и антигостов ω_α и ω_α^* и вспомогательных полей h_α . С этого момента мы отбрасываем пометку NEW.

$$\int d^4x \langle \Delta^n(x) \rangle_{J, K} \frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} = 0, \quad (17.1.6)$$

где $\langle \dots \rangle_{J, K}$ означает среднее по вакууму, вычисленное в присутствии тока J и внешних полей K :

$$\begin{aligned} \langle \phi[\chi] \rangle_{J, K} &= \\ &= \frac{\int [\Pi_{n,x} d\chi^n(x)] \phi[\chi] \exp(iI + i \int d^4x \Delta^n K_n + i \int d^4x \chi^n J_n)}{\int [\Pi_{n,x} d\chi^n(x)] \exp(iI + i \int d^4x \Delta^n K_n + i \int d^4x \chi^n J_n)}. \end{aligned} \quad (17.1.7)$$

Удобно выразить среднее от Δ^n как вариационную производную эффективного действия. Беря правую вариационную производную от (17.1.3) по K , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} &= \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta K_n(x)} \Big|_{J=J_{\chi, K}} + \int d^4y \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta J_m(y)} \Big|_{J=J_{\chi, K}} \frac{\delta_R J_{\chi, K m}(y)}{\delta K_n(x)} - \\ &- \int d^4y \chi^m(y) \frac{\delta_R J_{\chi, K m}(y)}{\delta K_n(x)}. \end{aligned}$$

Используя (17.1.5), видим, что два последних слагаемых сокращаются, и с учетом определений (17.1.4) и (17.1.7) приходим к желаемому соотношению

$$\frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} = \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta K_n(x)} \Big|_{J=J_{\chi, K}} = \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_{\chi, K}, K}. \quad (17.1.8)$$

Условие БРСТ симметрии (17.1.6) может быть теперь переписано как простое условие, содержащее только эффективное действие:

$$\int d^4x \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} \frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} = 0. \quad (17.1.9)$$

Это условие называется *уравнением Зинн-Жюстена*. Как было отмечено после формулы (15.9.3), взаимная перестановка полей и антиполей (или в данном случае χ^n и K_n) приводит лишь к изменению знака в левой части (17.1.9), так что его можно записать как

$$(\Gamma, \Gamma) = 0, \quad (17.1.10)$$

где роль антиполей к полям χ^n в анτισкобке играют K_n :

$$(F, G) \equiv \int d^4x \frac{\delta_R F[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} \frac{\delta_L G[\chi, K]}{\delta K_n(x)} - \int d^4x \frac{\delta_R F[\chi, K]}{\delta K_n(x)} \frac{\delta_L G[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)}. \quad (17.1.11)$$

Формально это уравнение совпадает с мастер-уравнением Баталина–Вилковыского, которое мы обсуждали в разделе 15.9, но здесь оно возникает как условие на квантовое эффективное действие $\Gamma[\chi, K]$, а не на фундаментальное действие $S[\chi, \chi^\dagger]$. Мы используем уравнение Зинн–Жюстена (17.1.10) в двух следующих разделах для того, чтобы показать, как перенормировать калибровочные теории, и в разделе 22.6 — для изучения аномалий в этих теориях.

17.2. Перенормировка. Непосредственный анализ

Простейшие неабелевы калибровочные теории перенормируемы в дайсоновском смысле, т. е. все операторы в лагранжиане имеют массовую размерность, равную четырем или меньше. Как мы видели в гл. 12, это гарантирует, что расходимости в квантовом эффективном действии возникают только в слагаемых, которые могут быть сокращены введением контрчленов во взаимодействие с размерностью четыре или меньше. Но перенормируемость включает и другие требования. Вид лагранжиана ограничен условиями калибровочной инвариантности и другими симметриями. Для того, чтобы теория была перенормируемой, необходимо, чтобы бесконечности в квантовом эффективном действии удовлетворяли тем же условиям с точностью до возможной перенормировки полей.²

Эффективное действие $\Gamma[\chi, K]$ — сложный функционал χ и K , и условие симметрии (17.1.9) накладывает на него весьма сложные ограничения. К счастью, для расходящихся слагаемых в Γ дела обстоят значительно проще. Запишем действие $S[\chi, K] \equiv I[\chi] + \int d^4x \Delta^n K_n$ как сумму слагаемого $S_R[\chi, K]$, в котором массы и константы связи равны своим перенормированным значениям, и поправки $S_\infty[\chi, K]$, содержащие контрчлены, с помощью которых мы собираемся сократить расходимости петлевых диаграмм. Как S_R , так и S_∞ следует выбрать так, чтобы они обладали симметриями исходного

действия $S[\chi, K]$. Вопрос состоит в том, обладают ли бесконечные части высших поправок к Γ обладать теми же самыми симметриями, так, чтобы их можно было сократить контрчленами в S_∞ .

Величину Γ можно разложить в ряд слагаемых Γ_N , возникающих из диаграмм ровно с N петлями, и слагаемых от диаграмм с $N-M$ петлями ($1 \leq M \leq N$), включая различные контрчлены в $S_\infty[\chi, K]$, которые будут использоваться для сокращения бесконечностей в диаграммах с полным числом петель, равным M :

$$\Gamma[\chi, K] = \sum_{N=0}^{\infty} \Gamma_N[\chi, K]. \quad (17.2.1)$$

Тогда для каждого N условие симметрии (17.1.10) принимает вид *

$$\sum_{N'=0}^{\infty} (\Gamma_{N'}, \Gamma_{N-N'}) = 0. \quad (17.2.2)$$

В сумме (17.2.1) ведущее слагаемое равно $\Gamma_0[\chi, K] = S_R[\chi, K]$, и оно, естественно, конечно. Предположим, что для всех $M \leq N-1$ все расходимости, возникающие из M -петлевых диаграмм, сократились контрчленами в S_∞ . Тогда в условии (17.2.2) бесконечности могут возникнуть только в слагаемых с $N' = 0$ и $N' = N$, которые равны друг другу, откуда следует, что расходящаяся часть $\Gamma_{N,\infty}$ из Γ_N подчинена условию

$$(S_R, \Gamma_{N,\infty}) = 0. \quad (17.2.3)$$

Это — принцип симметрии, порождаемый действием S_R , аналогичный тому, который описывается формулами (15.9.16) и (15.9.17). Заметим,

* Такие рекуррентные (порядок за порядком) соотношения можно формально вывести, повторяя рассуждения из раздела 16.1. Если заменить действие S_R на $g^{-1}S_R$, то вклад связной L -петлевой диаграммы с I внутренними линиями и V вершинами умножается на $g^{V-I} = g^{L-1}$. Если связанные с N -петлевыми диаграммами контрчлены в S_∞ также снабдить множителями g^N , то Γ_L будет значением слагаемого в Γ порядка g^{L-1} при $g = 1$. Условие (17.2.2) следует тогда из требования, чтобы равенство (17.1.10) было верным в каждом порядке по g . В системе единиц СГС действие имеет ту же размерность, что и $\hbar$, поэтому в функциональном интеграле оно входит вместе с множителем $1/\hbar$, и для подсчета числа петель можно использовать $\hbar$ вместо g .

в частности, что преобразование $X \mapsto (S_R, X)$ действует не только на поля χ^n , но и на внешние поля K_n .

До этого момента мы не использовали ни одного из специальных свойств перенормируемой теории Янга–Миллса. Заметим, однако, что согласно общим правилам подсчета индекса расходимости в перенормируемой теории, где все бесконечности сокращаются в поддиаграммах Γ_N , бесконечная часть $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ из $\Gamma_N[\chi, K]$ может быть только суммой произведений полей (включая K) и их производных массовой размерностью четыре или меньше. Наконец, рассуждения из раздела 16.4 показывают, что $\Gamma[\chi, K]$ и, следовательно, $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ инвариантны относительно *линейно* реализованных преобразований симметрии, относительно которых инвариантно действие. (Как объясняется ниже, такими преобразованиями являются: преобразования Лоренца, *глобальные* калибровочные преобразования, трансляции антигостов и фазовые преобразования гостов, отвечающие сохранению гостовского числа. Конечно, вспомогательным полям K_n нужно приписать определенные свойства относительно этих преобразований симметрии.) Эти условия вместе с (17.2.3) достаточны для того, чтобы знать все необходимое о структуре $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$.

Чтобы применить эти условия, требуется знать размерности внешних полей K_n . Если поле χ^n имеет массовую размерность d_n , то Δ^n имеет размерность $d_n + 1$ (это можно увидеть из анализа правил БРСТ преобразования (15.7.7)–(15.7.11)), и для того, чтобы $\int d^4x K_n \Delta^n$ был безразмерен, поле K_n должно иметь размерность $3 - d_n$. Все поля $A^{\alpha i}$, ω^α , $\omega^{*\alpha}$ имеют размерности $d_n = +1$, так что соответствующие K_n имеют размерность $+2$. (Мы не вводим никакого внешнего поля, соответствующего h^α , так как это поле БРСТ инвариантно.) Все поля материи ψ_l спина $1/2$ имеют размерность $3/2$, так что соответствующие K_n должны иметь ту же размерность $3/2$. Соответственно величина типа $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ размерности четыре может быть не более чем квадратична по любому из полей K_n . Кроме того, слагаемые второго порядка по K_n не могут содержать никаких других полей, за исключением слагаемого второго порядка по полям K_n , отвечающим полям материи спина $1/2$, которое может включать не более одного дополнительного поля размерности единица.

Теперь можно использовать сохранение гостовского числа, чтобы показать, что на самом деле $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ вообще не содержит слагаемых второго порядка по K_n . Для доказательства нам потребуется

знать гостовские квантовые числа полей K_n . Если поле χ^n имеет гостовское квантовое число γ_n , то это число для Δ^n равно $\gamma_n + 1$, поэтому полям K_n следует приписать гостовское квантовое число $-\gamma_n - 1$. Для полей $A^{\alpha,\mu}$, ψ^l , ω^α и $\omega^{*\alpha}$ соответствующие числа равны 0, 0, +1 и -1, так что отвечающие им внешние поля K_n имеют духовые числа -1, -1, -2 и 0. Это исключает наличие в $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ любых слагаемых второго порядка по K_n , если не считать одного возможного исключения для слагаемого второго порядка по внешним полям K_α^* , отвечающего полям $\omega^{*\alpha}$ (но не содержащего никаких других полей). Однако и эти слагаемые запрещены по другой причине. БРСТ преобразование полей $\omega^{*\alpha}$ линейно по полям, причем

$$\Delta^{\alpha*} = -h^\alpha, \quad (17.2.4)$$

так что в данном случае

$$\frac{\delta_L \Gamma_{N,\infty}[\chi, K]}{\delta K_\alpha^*} = \langle \Delta^{\alpha*} \rangle_{J_\chi, K} = -h^\alpha$$

не зависит от K_α^* . Отсюда следует, что $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ линейно по $K^{\alpha,*}$ и зависит от этих полей только через слагаемое $- \int d^4x K_\alpha^* h^\alpha$. (Поля K_α^* и h^α — бозонные, так что их порядок несуществен.) В частности, при $N > 0$ величины $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ не зависят от $K^{\alpha,*}$.

Мы видим, что величина $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ самое большее линейна по всем K_n . Запишем это в виде

$$\Gamma_{N,\infty}[\chi, K] = \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0] + \int d^4x \mathcal{I}_N^n[\chi; x] K_n(x). \quad (17.2.5)$$

Напомним также зависимость S_R от K :

$$S_R[\chi, K] = S_R[\chi] + \int d^4x \Delta^n[\chi; x] K_n(x).$$

Поэтому слагаемые нулевого и первого порядка по K в (17.2.2) дают *

* Вторые слагаемые в (17.2.6) и (17.2.7) приводятся к указанному виду, если вспомнить, что χ^n и K_n имеют противоположную статистику, и поэтому для любых бозонных функционалов A и B

$$\frac{\delta_R A}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L B}{\delta K_n} = - \frac{\delta_L A}{\delta \chi^n} \frac{\delta_R B}{\delta K_n} = - \frac{\delta_R B}{\delta K_n} \frac{\delta_L A}{\delta \chi^n}.$$

$$\int d^4x \left[\Delta^n[\chi; x] \frac{\delta_L \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0]}{\delta \chi^n(x)} + \mathcal{G}_N^n[\chi; x] \frac{\delta_L S_R[\chi]}{\delta \chi^n(x)} \right] = 0, \quad (17.2.6)$$

и

$$\int d^4x \left[\Delta^n(\chi; x) \frac{\delta_L \mathcal{G}_N^m(\chi; y)}{\delta \chi^n(x)} + \mathcal{G}_N^n(\chi; x) \frac{\delta_L \Delta^m(\chi; y)}{\delta \chi^n(x)} \right] = 0, \quad (17.2.7)$$

соответственно. Смысл этих соотношений станет, может быть, яснее, если ввести величины

$$\Gamma_N^{(\varepsilon)}[\chi] \equiv S_R[\chi] + \varepsilon \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0], \quad (17.2.8)$$

и

$$\Delta_N^{(\varepsilon)n}(x) \equiv \Delta^n(x) + \varepsilon \mathcal{G}_N^n(x), \quad (17.2.9)$$

с бесконечно малым ε . Тогда из соотношения (17.2.6) с учетом БРСТ инвариантности S_R следует, что $\Gamma_N^{(\varepsilon)}[\chi]$ инвариантна относительно преобразования

$$\chi^n(x) \rightarrow \chi^n(x) + \theta \Delta_N^{(\varepsilon)n}(x), \quad (17.2.10)$$

а из соотношения (17.2.7) вместе с нильпотентностью исходного преобразования БРСТ следует, что это преобразование *нильпотентно*.

Теперь следует понять, какова возможная форма такого нильпотентного преобразования. Как уже отмечалось, $\Gamma_{N,\infty}$ содержит только слагаемые размерности четыре или меньше, так что $\mathcal{G}_N^n$ и, следовательно, $\Delta_N^{(\varepsilon)n}(x)$ имеют массовую размерность, не превышающую размерность функции $\Delta^n(x)$ в исходном БРСТ преобразовании. Кроме того, $\mathcal{G}_N^n$, а отсюда и $\Delta_N^{(\varepsilon)n}(x)$ должны иметь такие же свойства относительно лоренцовских преобразований и такие же гостовские квантовые числа, как и $\Delta^n(x)$. Поэтому самый общий вид преобразования (17.2.10) таков:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi + i\theta \omega^\alpha T_\alpha \psi, \\ A_{\alpha\mu} &\rightarrow A_{\alpha\mu} + \theta [B_{\alpha\beta} \partial_\mu \omega_\beta + D_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma], \end{aligned}$$

$$\omega_\alpha \rightarrow \omega_\alpha - \frac{1}{2} \theta E_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \omega_\gamma,$$

где T_α — некоторая матрица, действующая на спинорные поля, а $B_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta\gamma}$ и $E_{\alpha\beta\gamma}$ — константы, причем $E_{\alpha\beta\gamma}$ антисимметрична по β и γ . Кроме того, преобразования ω_α^* и h_α линейны и поэтому не изменяются:

$$\omega_\alpha^* \rightarrow \omega_\alpha^* - \theta h_\alpha, \quad h_\alpha \rightarrow h_\alpha.$$

Наложим теперь условие нильпотентности. Наиболее важное требование заключается в том, что $E_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \omega_\gamma$ должно быть инвариантным. Это приводит к требованию, что $E_{\alpha\beta\gamma} E_{\beta\delta\epsilon} \omega_\delta \omega_\epsilon \omega_\gamma$ должно обращаться в нуль, так что полностью антисимметричная по δ, ϵ, γ часть $E_{\alpha\beta\gamma} E_{\beta\delta\epsilon}$ также равна нулю:

$$E_{\alpha\beta\gamma} E_{\beta\delta\epsilon} + E_{\alpha\beta\epsilon} E_{\beta\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\delta} E_{\beta\epsilon\gamma} = 0.$$

Но такое соотношение означает, что $E_{\alpha\beta\gamma}$ есть структурная константа некоторой алгебры Ли $\mathcal{L}$. Так как при $\epsilon \rightarrow 0$ $E_{\alpha\beta\gamma}$ переходит в структурную константу $C_{\alpha\beta\gamma}$ исходной калибровочной алгебры Ли $\mathcal{A}$, алгебры $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ должны совпадать, и структурная константа $E_{\alpha\beta\gamma}$ может отличаться от исходной $C_{\alpha\beta\gamma}$ лишь множителем *:

$$E_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{K} C_{\alpha\beta\gamma}.$$

(Это верно для простых калибровочных групп; в общем случае для каждой простой подгруппы должен быть свой множитель $\mathcal{K}$.)

Обратимся теперь к условию, что преобразование (17.2.10) должно быть нильпотентным при действии на калибровочные поля. Требование, чтобы $B_{\alpha\beta} \partial_\mu \omega_\beta + D_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma$ было инвариантным приводит к уравнениям

$$D_{\alpha\beta\gamma} D_{\beta\delta\epsilon} - D_{\alpha\beta\epsilon} D_{\beta\delta\gamma} = E_{\beta\epsilon\gamma} D_{\alpha\delta\beta} = \mathcal{K} C_{\beta\epsilon\gamma} D_{\alpha\delta\beta}$$

и

* Требование глобальной калибровочной инвариантности исключает возможность любого нетривиального преобразования подобия в соотношении, связывающем $E_{\alpha\beta\gamma}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}$

$$B_{\alpha\beta}E_{\beta\gamma\delta} = D_{\alpha\beta\delta}B_{\beta\gamma}.$$

Первое уравнение имеет единственное решение *

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{K}C_{\alpha\beta\gamma}.$$

Из второго уравнения вытекает, что матрица $B_{\alpha\beta}$ коммутирует с присоединенным представлением калибровочной группы, и поэтому (поскольку мы выбрали структурные константы полностью антисимметричными) должна быть пропорциональна кронекеровскому дельта-символу с коэффициентом, который мы обозначим $\mathcal{K}\mathcal{A}$:

$$B_{\alpha\beta} = \mathcal{K}\mathcal{A}\delta_{\alpha\beta}.$$

Наконец, условие, что преобразование (17.2.10) нильпотентно при действии на фермионные поля (если таковые имеются), требует инвариантности $\omega^\alpha T_\alpha \psi$. Отсюда

$$[T_\beta, T_\gamma] = iE_{\alpha\beta\gamma}T_\alpha,$$

так что T_α отличается только множителем $\mathcal{K}$ от генератора t_α исходного лагранжиана:

$$T_\alpha = \mathcal{K}t_\alpha.$$

Таким образом, мы показали, что, не считая появления новых констант $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$, преобразование (17.2.10) совпадает с исходным БРСТ преобразованием:

$$\psi \rightarrow \psi + i\mathcal{K}\theta\omega^\alpha t_\alpha \psi, \quad (17.2.11)$$

$$A_{\alpha\mu} \rightarrow A_{\alpha\mu} + \mathcal{K}\theta\left[\mathcal{A}\partial_\mu\omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma\right], \quad (17.2.12)$$

* Матрица $(D_\gamma)_{\alpha\beta} \equiv D_{\gamma\alpha\beta}/\mathcal{K}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям калибровочной алгебры Ли $[D_\gamma, D_\epsilon] = C_{\beta\epsilon\gamma}D_\beta$. Однако единственное представление простой алгебры Ли $\mathcal{A}$ с той же размерностью и теми же трансформационными свойствами, как и присоединенное представление, есть само присоединенное представление.

$$\omega_\alpha \rightarrow \omega_\alpha - \frac{1}{2} \xi \theta C_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \omega_\gamma, \quad (17.2.13)$$

$$\omega_\alpha^* \rightarrow \omega_\alpha^* - \theta h_\alpha, \quad (17.2.14)$$

$$h_\alpha \rightarrow h_\alpha. \quad (17.2.15)$$

Теперь мы должны использовать эту симметрию для ограничения структуры исправленного действия (17.2.8). Так как оно содержит только исходное перенормированное действие и бесконечный вклад от n -петлевых поправок, это действие должно быть интегралом от лагранжиана

$$\Gamma_N^{(\epsilon)} = \int d^4x \mathcal{L}_N^{(\epsilon)}, \quad (17.2.16)$$

где $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ — локальная функция полей и их производных размерностью (в степенях массы) не выше 4. Кроме того, как было показано в разделе 16.4, $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ должно быть инвариантно относительно всех симметрий исходного лагранжиана, которые *линейно* действуют на поля. Чтобы установить эти симметрии, вспомним, что в обобщенной ξ -калибровке «новый» лагранжиан в (15.7.6) принимает вид, получающийся заменой слагаемого $-(\partial_\mu A_\alpha^\mu)(\partial_\nu A_\alpha^\nu) / 2\xi$ в (15.6.16) на слагаемые $h_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2}\xi h_\alpha h_\alpha$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NEW}} = \mathcal{L}_M - \frac{1}{4} F_\alpha^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} - \partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\alpha \\ + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\alpha^*) A_\gamma^\mu \omega_\beta + h_\alpha \partial_\mu A_\alpha^\mu + \frac{1}{2} \xi h_\alpha h_\alpha. \end{aligned} \quad (17.2.17)$$

Исследование этой формулы обнаруживает следующие линейные симметрии.

1. Лоренцовская инвариантность.

2. Глобальная калибровочная инвариантность, т. е. инвариантность относительно преобразований

$$\delta\psi_l(x) = i\varepsilon^\alpha (t_\alpha)_l^m \psi_m(x), \quad (17.2.18)$$

$$\delta A^\beta_\mu(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \varepsilon^\alpha A^\gamma_\mu(x), \quad (17.2.19)$$

$$\delta \omega_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \varepsilon^\alpha \omega_\gamma(x), \quad (17.2.20)$$

$$\delta \omega^*_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \varepsilon^\alpha \omega^*_\gamma(x), \quad (17.2.21)$$

$$\delta h_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha} \varepsilon^\alpha h_\gamma(x) \quad (17.2.22)$$

с постоянными параметрами ε^α .

3. Антигостовская трансляционная инвариантность, т. е. инвариантность относительно преобразования

$$\omega^*_\alpha(x) \rightarrow \omega^*_\alpha(x) + c_\alpha, \quad (17.2.23)$$

с произвольными постоянными параметрами c_α .

4. Сохранение гостовского числа, т. е. числа, равного +1 для ω_α , -1 для ω^*_α и 0 для всех остальных полей.

Продолжим теперь исследование возможной структуры наиболее общего лагранжиана, который перенормируем в том смысле, что содержит только слагаемые с размерностью +4 или меньше, обладает указанными линейно действующими симметриями и инвариантен относительно модифицированных БРСТ преобразований (17.2.11)–(17.2.15).

Из (17.2.17) можно сделать вывод, что поля A^μ_α , ω_α , ω^*_α и h_α имеют массовые размерности +1, +1, +1 и +2, соответственно. Заметим также, что из сохранения гостовского числа вытекает, что ω и ω^* возникают парами, а из антигостовской трансляционной инвариантности следует, что ω^* должно входить только под знаком производной. Каждая пара полей ω и $\partial_\mu \omega^*$ добавляет +3 в размерность, так что требование перенормируемости исключает любое слагаемое с более чем одной такой парой. Но если эта пара одна, то может входить еще не более чем одна производная или одно дополнительное калибровочное поле. С учетом лоренц-инвариантности единственными разрешенными перенормируемыми взаимодействиями, включающими поля гостов, являются линейные комбинации слагаемых вида $\partial_\mu \omega^*_\alpha \partial^\mu \omega_\beta$ или $\partial_\mu \omega^*_\alpha A^\mu_\gamma \omega_\beta$.

Далее, рассмотрим слагаемые, содержащие поле h_α и, возможно, другие поля, кроме ω и ω^* . Размерность этого поля равна +2, так что требования перенормируемости и лоренц-инвариантности позволяют этому полю появиться только * в произведении либо с другим полем h_β , либо с величинами $\partial_\mu A_\beta^\mu$ или $A_\beta^\mu A_{\mu\gamma}$.

Наконец, лагранжиан будет содержать перенормируемые слагаемые, включающие только поля материи и калибровочные поля. Назовем сумму этих слагаемых $\mathcal{L}_{\Psi A}$. Собирая все результаты и используя глобальную калибровочную инвариантность, находим, что самое общее перенормируемое взаимодействие, допускаемое предполагаемыми симметриями (не считая БРСТ инвариантности), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N^{(\epsilon)} = \mathcal{L}_{\Psi A} + \frac{1}{2} \xi' h_\alpha h_\alpha + c h_\alpha \partial_\mu A_\alpha^\mu - e_{\alpha\beta\gamma} h_\alpha A_\beta^\mu A_{\mu\gamma} \\ - Z_\omega (\partial_\mu \omega_\alpha^*) (\partial_\mu \omega_\alpha) - d_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\alpha^*) \omega_\beta A_\gamma^\mu, \end{aligned} \quad (17.2.24)$$

где ξ' , Z_ω , c , $d_{\alpha\beta\gamma}$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$ — неизвестные константы, на которые нет никаких ограничений, кроме очевидных свойств симметрии вроде глобальной калибровочной инвариантности или равенства $e_{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta}$. (Как отмечалось выше, мы для простоты предполагаем, что калибровочная группа проста, но расширение на прямую сумму простых и $U(1)$ калибровочных групп тривиально. Например, вместо одного слагаемого, пропорционального $h_\alpha h_\alpha$, появится сумма таких слагаемых, по одному на каждую простую подгруппу калибровочной группы.)

Теперь наложим требование БРСТ инвариантности. Сокращение в $\delta \mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ слагаемых, пропорциональных $\theta \partial_\mu h_\alpha \partial^\mu \omega_\alpha$, показывает, что

$$c = Z_\omega / \chi \cdot \mathcal{F}. \quad (17.2.25)$$

Сокращение в $\delta \mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ слагаемых, пропорциональных $\theta \partial_\mu h_\alpha \omega_\beta A_\gamma^\mu$ (или $\theta \partial_\mu \omega_\alpha^* \omega_\beta \partial^\mu \omega_\alpha$) требует выполнения равенства

$$d_{\alpha\beta\gamma} = -(Z_\omega / \chi) C_{\alpha\beta\gamma}. \quad (17.2.26)$$

* В теории со скалярными полями могут содержаться перенормируемые слагаемые с h_α , умноженным на одно или два скалярных поля. Такие слагаемые не причиняют беспокойства, но для краткости они здесь не будут рассматриваться.

После этого слагаемые в $\delta\mathcal{G}_N^{(\varepsilon)}$, пропорциональные $\theta\partial_\mu\omega_\alpha^*\omega_\beta\omega_\gamma A_\delta^\mu$ автоматически сокращаются в силу тождества Якоби для структурных констант. Сокращение в $\delta\mathcal{G}_N^{(\varepsilon)}$ слагаемых, пропорциональных $\theta h_\alpha\partial_\mu\omega_\beta A_\gamma^\mu$ (или $\theta h_\alpha A_\mu^\mu A_{\gamma\mu}\omega_\delta$), приводит к равенству

$$e_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (17.2.27)$$

Наконец, действие бесконечно малого преобразования (17.2.10) на поля материи и калибровочные поля совпадает с локальным калибровочным преобразованием с калибровочными параметрами $\varepsilon_\alpha = \varkappa \cdot \mathbb{F} \theta\omega_\alpha$ и константами связи, перенормированными множителем $1/\cdot\mathbb{F}$ (т. е. с заменой t_α и $C_{\alpha\beta\gamma}$ на $\tilde{t}_\alpha \equiv t_\alpha / \cdot\mathbb{F}$ и $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma} / \cdot\mathbb{F}$), так что сокращение в $\delta\mathcal{G}_N^{(\varepsilon)}$ слагаемых, содержащих только один множитель ω_α и не содержащих множителей h_α или ω_α^* , эквивалентно утверждению, что лагранжиан $\mathcal{L}_{\Psi A}$ этих полей *калибровочно-инвариантен* с перенормированной константой связи. Мы приходим к выводу, что самый общий перенормируемый лагранжиан, допускаемый теми принципами симметрии, которые мы предположили, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_N^{(\varepsilon)} = & -Z_A \tilde{F}_\alpha^{\mu\nu} \tilde{F}_{\alpha\mu\nu} - Z_\Psi \bar{\Psi} \gamma^\mu [\partial_\mu - i\tilde{t}_\alpha A_{\alpha\mu}] \Psi + \frac{1}{2} \xi' h_\alpha h_\alpha \\ & + (Z_\omega / \cdot\mathbb{F} \varkappa) h_\alpha \partial_\mu A_\alpha^\mu - Z_\omega (\partial_\mu \omega_\alpha^*) (\partial_\mu \omega_\alpha) + Z_\omega^* \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\alpha^*) \omega_\beta A_\gamma^\mu, \end{aligned} \quad (17.2.28)$$

где тильда в $\tilde{F}_\alpha^{\mu\nu}$ указывает на то, что напряженность поля следует вычислять с перенормированной структурной константой $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma} / \cdot\mathbb{F}$. Но ведь помимо появления нескольких новых постоянных коэффициентов, это тот же самый лагранжиан, от которого мы стартовали. Новые константы в этом лагранжиане (включая калибровочную константу связи) можно свободно сдвигать, подбирая слагаемые N -го порядка в соответствующих константах исходного неперенормированного лагранжиана. В частности, можно так подобрать эти слагаемые, чтобы сделать $\Gamma_N^{(\varepsilon)} = S_R$, и в этом случае $\Gamma_{N,\infty} = 0$, что и завершает доказательство.

* * *

В приведенном выше доказательстве существенно использовалась случайная инвариантность лагранжиана (17.2.17) в фиксированной калибровке относительно антигостовского преобразования трансляции (17.2.23). Такой симметрии не будет для фиксирующих калибровку функционалов, отличающихся от $f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha$ и не являющихся пространственно-временными производными. Часто цитируемый пример, в котором сохраняется лоренц-инвариантность и глобальная калибровочная инвариантность, это $f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha + a_{\alpha\beta\gamma} A^\mu_\beta A_{\mu\gamma}$, где $a_{\alpha\beta\gamma}$ — постоянная матрица, симметричная по β и γ , преобразующаяся как тензор при глобальных калибровочных преобразованиях. (Подобные постоянные тензоры существуют для всех $SU(N)$ групп с $N \geq 3$.) Другой, более важный пример — фиксирующий калибровку фоновый функционал, который мы рассмотрим в разделе 17.4.

Отсутствие антигостовской трансляционной инвариантности не влияет на вывод, что $\mathcal{G}_N^{(\varepsilon)}$ является лоренц-инвариантной и глобально калибровочно-инвариантной локальной функцией полей и их производных размерности не более 4, которая инвариантна относительно перенормированного преобразования БРСТ (17.2.11)–(17.2.15). Но в отсутствие антигостовской трансляционной инвариантности в $\mathcal{G}_N^{(\varepsilon)}$ появляются новые слагаемые, удовлетворяющие перечисленным выше условиям. Так как преобразование (17.2.11)–(17.2.15) нильпотентно, можно строить такие слагаемые в виде $s'F$, если преобразование (17.2.11)–(17.2.15) записать в виде $\chi^n \rightarrow \chi^n + \theta s' \chi^n$, а F — произвольная лоренц-инвариантная и глобально калибровочно инвариантная функция с гостовским числом -1 . Одно из таких слагаемых имеет вид

$$a_{\alpha\beta\gamma} s'(\omega_\alpha^* A_{\beta\mu} A_\gamma^\mu) = -a_{\alpha\beta\gamma} \left[h_\alpha A_{\beta\mu} A_\gamma^\mu + 2\mathcal{K} \omega_\alpha^* (\mathcal{K} \partial_\mu \omega_\beta + C_{\beta\delta\epsilon} A_{\delta\mu} \omega_\epsilon) A_\gamma^\mu \right].$$

Оно не причиняет хлопот, поскольку является просто перенормированным вариантом обычных гостовских и фиксирующих калибровку слагаемых, возникающих от слагаемых $a_{\alpha\beta\gamma} A^\mu_\beta A_{\mu\gamma}$ в фиксирующем калибровку функционале f_α . Однако есть еще одно возможное слагаемое вида

$$b_{\alpha\beta\gamma} s'(\omega_\alpha^* \omega_\beta^* \omega_\gamma) = -b_{\alpha\beta\gamma} \left[2h_\alpha \omega_\beta^* \omega_\gamma + \frac{1}{2} \mathcal{K} C_{\gamma\delta\epsilon} \omega_\alpha^* \omega_\beta^* \omega_\delta \omega_\epsilon \right],$$

где $b_{\alpha\beta\gamma}$ — константа, антисимметричная по α и β и преобразующаяся как тензор относительно глобальных калибровочных преобра-

зований. (Такие тензоры существуют для любой группы Ли. Например, можно взять $b_{\alpha\beta\gamma}$ пропорциональной $C_{\alpha\beta\gamma}$.) Однако метод Фаддеева–Попова–де Витта не может привести к появлению четырехгостовских взаимодействий в лагранжиане, так что не существует подходящих контрчленов, способных поглотить ультрафиолетовые расходимости от такого слагаемого. Это не только техническая проблема при доказательстве перенормируемости. Для фиксирующих калибровку функционалов типа $f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha + a_{\alpha\beta\gamma} A^\mu_\beta A_\mu_\gamma$ однопетлевые диаграммы действительно приводят к расходимостям в четырехгостовских амплитудах, которые не сокращаются контрчленами в лагранжиане Фаддеева–Попова–де Витта.

Представляется, что единственным решением этой проблемы, помимо того, чтобы избегать фиксирующих калибровку функционалов, отличных от $f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha$, является то, которое упомянуто в разделе 15.7. Следует отказаться от подхода Фаддеева–Попова–де Витта и вместо этого рассматривать с самого начала действие как самую общую перенормируемую функцию от полей материи, калибровочных, гостовских и вспомогательных полей, инвариантную относительно БРСТ симметрии и других симметрий теории. Согласно рассуждениям раздела 15.8, действие можно записать в виде $I_0 + s\Psi$, где I_0 свободно от гостов, а S -матрица не зависит от Ψ , поэтому можно оправдать эту процедуру, квантуя калибровочную теорию в аксиальной калибровке, где госты отщепляются от остальных частиц, и выбирая затем Ψ по своему желанию. В частности, можно включить в действие слагаемые $s(\omega^* \omega^* \omega)$, которые могут служить контрчленами к расходимостям в четырехгостовских вершинах.

17.3. Перенормировка: произвольные калибровочные теории *

Приведенное в предыдущем разделе доказательство перенормируемости неабелевых калибровочных теорий основано на «прямолинейном» анализе возможных слагаемых в действии, имеющих размерность 4 или меньше. Но, как мы видели в гл. 12, это ограничение на размерность слагаемых в действии может в лучшем слу-

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

чае рассматриваться как хорошее приближение. Успешные перенормируемые квантовые теории поля, использующиеся для описания сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий, почти наверняка являются эффективными теориями поля, включающими слагаемые с размерностью $d > 4$. Такие слагаемые обычно не наблюдаются, так как они подавлены $4 - d$ степенями некоторой очень большой массы, вероятно, порядка $10^{16} - 10^{18}$ ГэВ. Гравитация также может быть описана эффективной теорией поля, лагранжиан которой содержит не только слагаемое Эйнштейна–Гильберта $-\sqrt{g}R / 16\pi G$, но и все скаляры, построенные из четырех и более производных гравитационного поля. Мы должны показать, что калибровочные теории такого рода, которые неперенормируемы по индексу, тем не менее, перенормируемы в современном смысле, т. е. ультрафиолетовые расходимости управляются калибровочными симметриями так, что для сокращения каждой бесконечности может быть найден соответствующий контрчлен^{3*}.

Для доказательства вернемся к действию $S[\chi, \chi^\dagger]$, введенному в разделе 15.9 и рассматриваемому как функция независимых полей χ^n (включающих поля материи и калибровочные поля Φ^r , поля духов ω^A , а также неминимальные поля ω^{A*} и h^A) вместе с соответствующими антиполями $\chi_n^\dagger$. В теориях типа Янга–Миллса или квантовой гравитации, которые основаны на замкнутой калибровочной алгебре со структурными константами f_{AB}^C , такое действие должно иметь вид

$$S = I[\Phi] + \omega^A f_A^r[\Phi] \Phi_r^\dagger + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f_{AB}^C[\Phi] \omega_C^\dagger - h^A \omega_A^{*\dagger}, \quad (17.3.1)$$

где $I[\Phi]$ инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований $\Phi^r \rightarrow \Phi^r + \epsilon^A f_A^r[\Phi]$. (Как и в разделе 15.9, индек-

* Содержание последнего предложения уточняется ниже: в предположении, что действие перенормированной теории удовлетворяет квантовому мастер-уравнению, необходимо показать, что перенормировка сводится к перенормировке констант связи (включая массовые параметры) и антиканоническому преобразованию полей и антиполей. Коротко говоря, перенормировка есть «замена переменных». Необходимо также добавить, что излагаемая процедура перенормировки предполагает наличие калибровочно-инвариантной регуляризации. — *Прим. ред.*

сы r , A и т. д. включают пространственно-временные координаты, по которым производится интегрирование при суммировании по индексам.)

Мы не будем ограничиваться действиями такого вида, но предположим, что локальные симметрии теории формулировались в виде требования, что действие должно подчиняться некоторым «структурным ограничениям» на зависимость от антиполей, одним из примеров которых может служить (17.3.1). Предполагается, что структурные ограничения линейны в том смысле, что если они справедливы для $S + \mathcal{P}_1$ и $S + \mathcal{P}_2$, то при любых постоянных a_1, a_2 они верны и для $S + a_1\mathcal{P}_1 + a_2\mathcal{P}_2$. Кроме того, потребуем выполнения квантового мастер-уравнения (15.9.35)

$$(S, S) - 2i\hbar\Delta S = 0, \quad (17.3.2)$$

с ΔS , определенным формулой (15.9.34). Петлевой параметр $\hbar$, смысл которого объясняется в предыдущем разделе, явным образом входит в виде множителя.

Действие представляется в виде степенного ряда по $\hbar$:

$$S = S_R + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots, \quad (17.3.3)$$

где S_R — действие того же общего вида, что и S , но с заменой всех констант связи на их конечные перенормированные значения, а S_N — набор бесконечных контрчленов. Предполагается, что действие S удовлетворяет квантовому мастер-уравнению (17.3.2) во всех порядках по $\hbar$, так что S_R удовлетворяет классическому мастер-уравнению

$$(S_R, S_R) = 0, \quad (17.3.4)$$

а контрчлены удовлетворяют уравнению

$$(S_R, S_N) = -\frac{1}{2} \sum_{M=1}^{N-1} (S_M, S_{N-M}) + i\Delta S_{N-1}. \quad (17.3.5)$$

Наличие контрчленов S_N само по себе недостаточно для сокращения ультрафиолетовых расходимостей в петлевых диаграммах. Как обобщение обычной перенормировки полей мы должны также

ввести набор перенормированных полей и антиполей, определенных через исходные поля и антиполя с помощью произвольного антиканонического преобразования. Инфинитезимальное антиканоническое преобразование можно определить формулой (15.9.26) через инфинитезимальный производящий функционал δF , так что последовательность антиканонических преобразований $G(t) \rightarrow G(t + \delta t) = G(t) + (F(t)\delta t, G(t))$ (где $G(t)$ — любой функционал от полей и антиполей, а $F(t)$ — производящий функционал) приводит к конечному каноническому преобразованию $G \rightarrow \tilde{G} \equiv G(1)$, причем

$$\frac{d}{dt} G(t) = (F(t), G(t)), \quad G(0) = G. \quad (17.3.6)$$

Если $F(t)$ задано в виде степенного ряда

$$F(t) = gtF_1 + \hbar^2 t^2 F_2 + \dots, \quad (17.3.7)$$

тогда формулы (17.3.3), (17.3.6) и (17.3.7) приводят к преобразованному действию

$$\begin{aligned} \tilde{S} = S_R + \hbar[S_1 + (F_1, S_R)] \\ + \hbar^2 \left[S_2 + (F_1, S_1) + (F_2, S_R) + \frac{1}{2}(F_1, (F_1, S_R)) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (17.3.8)$$

Вопрос заключается в том, можем ли мы использовать эту свободу для такого выбора F_N и S_N , чтобы сократить все бесконечности, возникающие от петлевых диаграмм.

Как уже отмечалось, первое слагаемое S_R в (17.3.3) автоматически конечно. Предположим, что сократив бесконечности с помощью S_M и F_M при $M < N$ возможно устранить все бесконечности в слагаемых порядка $\hbar^M$ в квантовом эффективном действии Γ_M для $M < N$. Как было показано в предыдущем разделе, уравнение Зинн-Жюстена (получающееся в данном случае, если положить $\chi_n^\pm = K_n + \delta\Psi/\delta\chi^n$) утверждает, что тогда бесконечная часть $\Gamma_{N,\infty}$ слагаемого в квантовом эффективном действии порядка $\hbar^N$ удовлетворяет условию

$$(S_R, \Gamma_{N,\infty}) = 0. \quad (17.3.9)$$

Полевые и антиполевые переменные χ^n и $\chi_n^\dagger$ связаны с переменными χ^n и K_n антиканоническим преобразованием, сохраняющим все антискобки, так что антискобка в (17.3.9) может быть вычислена через χ^n и $\chi_n^\dagger$ вместо χ^n и K_n .

Условие (17.3.5), которому удовлетворяет контрчлен S_N , не эквивалентно условию (17.3.9), которому удовлетворяет $\Gamma_{N,\infty}$. Однако, если задать любое S_N^0 , удовлетворяющее уравнению (17.3.5), можно найти целый класс других решений

$$S_N = S_N^0 + S'_N, \quad (17.3.10)$$

где S'_N произвольно, если не считать условия, что $S_R + S'_N$, как и $S_R + S_N^0$, удовлетворяет тем же условиям симметрии, что и S_R , и

$$(S_R, S'_N) = 0, \quad (17.3.11)$$

чтобы не нарушить уравнения (17.3.5). Поэтому бесконечная часть в квантовом эффективном действии N -ого порядка может быть записана в виде:

$$\Gamma_{N,\infty} = S'_{N,\infty} + (F_{N,\infty}, S_R) + X_{N,\infty}, \quad (17.3.12)$$

где X_N включает слагаемые от петлевых диаграмм, а также от слагаемого S_N^0 и различных слагаемых в Γ , включающих S_M и F_M для $M < N$. Например, при $N = 2$ из формулы (17.3.8) имеем:

$$\begin{aligned} X_2 = & S_2^0 + 2(F_1, S_1) + (F_1, (F_1, S_R)) \\ & + \text{двухпетлевые вклады, содержащие только } S_R \\ & + \text{однопетлевые вклады, содержащие } S_R, S_1 \text{ и } F_1. \end{aligned}$$

Единственное, что нужно знать о величине X_N для наших целей, это то, что она не включает S'_N или F_N и инвариантна относительно любой линейно реализованной глобальной симметрии S_R .

Далее, поскольку $(S_R, S_R) = 0$, операция $F \mapsto (S_R, F)$ нильпотентна: для любых F

$$(S_R, (S_R, F)) = 0. \quad (17.3.13)$$

Поэтому из (17.3.9) и (17.3.11)–(17.3.13) следует, что

$$(S_R, X_{N,\infty}) = 0. \quad (17.3.14)$$

Любое слагаемое в $X_{N,\infty}$, имеющее вид (S_R, Y) , можно сократить в соотношении (17.3.12), выбрав $F_{N,\infty}$ равным Y . Таким образом пространство возможных оставшихся бесконечных слагаемых в $X_{N,\infty}$, которые должны быть сокращены контрчленом $S'_{N,\infty}$, состоит из тех функционалов X , которые удовлетворяют условию $(S_R, X) = 0$, причем эквивалентными считаются функционалы, отличающиеся на слагаемые вида (S_R, Y) . Иными словами, бесконечности в G_N , которые должны быть сокращены контрчленами S'_N , принадлежат когомологии отображения $X \mapsto (S_R, X)$.

Возможный вид контрчлена S'_N ограничен требованием, что $S_R + S'_N$ должна удовлетворять любому из структурных ограничений, наложенных на действие S . Таким образом мы сможем завершить доказательство перенормируемости, если удастся показать, что когомология отображения $X \mapsto (S_R, X)$ состоит только из функционалов, удовлетворяющих этому структурному ограничению.

В случае квантовой гравитации, взаимодействующей с полем Янга–Миллса с полупростой калибровочной симметрией, все симметрии теории обеспечиваются структурным ограничением (17.3.1). В этом случае существует теорема⁴, утверждающая, что когомология отображения $X \mapsto (S_R, X)$ (на пространстве локальных функционалов с гостовским числом нуль, а не на пространстве функций, зависящих от пространственно-временных координат) состоит* из функционалов $A[\Phi]$, инвариантных относительно калибровочного преобразования $\Phi^r \rightarrow \Phi^r + e^A F^r_A[\Phi]$ со структурными константами f^C_{AB} . Любая бесконечность N -го порядка такого типа может быть сокращена контрчленом S'_N того же типа. Таким образом, хотя эти теории и не перенормируемы по индексу, они перенормируемы в том смысле, что все бесконечности можно устранить выбором параметров в исходном голом действии $I[\Phi]$ и подходящей перенормировкой полей и антиполей.

В других теориях когомология отображения $X \mapsto (S_R, X)$ содержит дополнительные слагаемые. Это не обязательно требует

* Строго говоря, это верно только, если потребовать, чтобы постоянные коэффициенты в S не принимали специальных значений, при которых S было бы инвариантно относительно более широкой группы локальных симметрий. Например, это исключает случай $S = 0$.

ослабления структурных ограничений, так как дополнительные слагаемые в когомологии могут и не соответствовать реальным ультрафиолетовым расходимостям. Например в калибровочных теориях с множителями $U(1)$ когомология содержит слагаемые⁴, отвечающие переопределению действия $U(1)$ калибровочной симметрии на различные поля. Если оно окажется бесконечным, нам потребуется ослабить структурные ограничения, оставив произвольной нормировку функций преобразования $f_A^*[φ]$ в (17.3.1). Но такая бесконечность запрещена теми же теоремами о мягких фотонах, которые утверждают, что отношения $U(1)$ констант связи с различными полями (типа отношений зарядов разных лептонов в КЭД) не затрагиваются радиационными поправками (см. раздел 10.4). Если дополнительные слагаемые в когомологии содержат ультрафиолетовые расходимости, необходимо ослабить наложенные на S структурные ограничения, с тем, чтобы для каждой возможной ультрафиолетовой расходимости возник свой контрчлен. Неизвестно, всегда ли это возможно. Если это не так, то следует отбросить некоторые теории из-за наличия в них неустранимых ультрафиолетовых расходимостей.

17.4. Калибровка фонового поля *

Обратимся теперь к методу вычислений, явно сохраняющему тип калибровочной инвариантности и поэтому особенно удобному, прежде всего, в однопетлевых вычислениях. Рассмотрим эффективное действие $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ как функционал^{**} классических внешних полей материи, калибровочных, гостовских и антигостовских полей $\psi_l(x)$, $A_{\alpha}(x)$, $\omega_{\alpha}(x)$, $\omega^*_{\alpha}(x)$. Даже несмотря на то, что госты и антигосты никогда не появляются в начальном или конечном состоянии, мы рассматриваем фоновые поля гостов и антигостов наряду с полями материи и калибровочными полями с целью разобраться с частями диаграмм, имеющими внешние гостовские или антигостовские линии.

* В русскоязычной литературе чаще используется термин «фоновая калибровка». — *Прим. ред.*

** Мы возвращаемся к частному выбору фиксирующего калибровку функционала $B[φ]$ в виде гауссиана (15.7.4) и интегрируем по вспомогательному полю h_{α} , так что в модифицированном лагранжиане это фиксирующее калибровку слагаемое имеет вид $-f_{\alpha}f_{\alpha}/2\xi$.

Как описано в разделе 16.1, эффективное действие $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ есть сумма связанных одночастично неприводимых диаграмм для амплитуды перехода вакуум–вакуум, вычисленных в теории, в которой квантовые поля $A', \psi', \omega', \omega^{*'}$, по которым производится интегрирование, заменены в действии на сдвинутые поля $A + A', \psi + \psi', \omega + \omega', \omega^* + \omega^{*'}$, причем интегрирование по штрихованным полям производится при фиксированных нештрихованных полях. Мы имеем широкие возможности выбора фиксирующей калибровку функции $f_\alpha(x)$. Вместо прежнего выбора $f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha$ (или $\partial_\mu[A'^\mu_\alpha + A^\mu_\alpha]$) можно взять⁵

$$f_\alpha = \partial_\mu A'^\mu_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A'^\mu_\gamma. \quad (17.4.1)$$

Причина такого выбора в том, что фиксирующее калибровку слагаемое $f_\alpha f_\alpha$ становится инвариантным относительно калибровочного преобразования, при котором фоновое поле A^μ_α преобразуется как калибровочное поле, а квантовое поле A'^μ_α преобразуется однородно, как обычное поле материи, принадлежащее присоединенному представлению калибровочной группы:

$$\delta A^\mu_\alpha = \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A^\mu_\gamma, \quad (17.4.2)$$

$$\delta A'^\mu_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A'^\mu_\gamma. \quad (17.4.3)$$

Трансформационные свойства функции f_α легче всего увидеть, записав ее как новый тип ковариантной производной:

$$f_\alpha \equiv \overline{D}_\mu A'^\mu_\alpha, \quad (17.4.4)$$

где для любого поля Φ_α в присоединенном представлении

$$\overline{D}_\mu \Phi_\alpha \equiv \partial_\mu \Phi_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \Phi_\gamma. \quad (17.4.5)$$

Мы видим, что под действием преобразования (17.4.2), (17.4.3) функция (17.4.1) преобразуется в точности как A'_α :

$$\delta f_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta f_\gamma, \quad (17.4.6)$$

так что член $f_\alpha f_\alpha$ в модифицированном лагранжиане инвариантен:

$$\delta(f_\alpha f_\alpha) = -C_{\alpha\beta\gamma} f_\alpha \varepsilon_\beta f_\gamma = 0. \quad (17.4.7)$$

Кроме того, исходный лагранжиан $\mathcal{L}$ зависит от A и A' только через сумму $A + A'$, которая под действием комбинированного преобразования (17.4.2), (17.4.3) подвергается обычному калибровочному преобразованию

$$\delta(A_\alpha^\mu + A_\alpha'^\mu) = \partial^\mu \varepsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\beta (A_\gamma^\mu + A_\gamma'^\mu). \quad (17.4.8)$$

Если определить преобразования фонового поля и квантового поля материи в виде

$$\delta\psi = it_\alpha \varepsilon_\alpha \psi, \quad (17.4.9)$$

$$\delta\psi' = it_\alpha \varepsilon_\alpha \psi', \quad (17.4.10)$$

то

$$\delta(\psi + \psi') = it_\alpha \varepsilon_\alpha (\psi + \psi'). \quad (17.4.11)$$

Исходный лагранжиан $\mathcal{L}$ инвариантен относительно исходных калибровочных преобразований (17.4.8), (17.4.11) и зависит только от $A + A'$ и $\psi + \psi'$, так что он инвариантен также относительно новых формальных преобразований (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9) и (17.4.10).

Полезно сделать эту инвариантность более явной, записав $\mathcal{L}$ через фоновую ковариантную производную $\overline{D}_\mu$. В общем случае имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu [A_{\alpha\nu} + A'_{\alpha\nu}] - \partial_\nu [A_{\alpha\mu} + A'_{\alpha\mu}] + C_{\alpha\beta\gamma} [A_{\beta\mu} + A'_{\beta\mu}] [A_{\gamma\mu} + A'_{\gamma\mu}] \right)^2 \\ &\quad + \mathcal{L}_M(\psi + \psi', \partial_\mu(\psi + \psi') - it_\alpha (A_{\alpha\mu} + A'_{\alpha\mu})(\psi + \psi')) \\ &= -\frac{1}{4} \left(F_{\alpha\mu\nu} + \overline{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \overline{D}_\nu A'_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} \right)^2 \\ &\quad + \mathcal{L}_M(\psi + \psi', \overline{D}_\mu(\psi + \psi') - it_\alpha A'_{\alpha\mu}(\psi + \psi')), \end{aligned}$$

где, как и в (17.4.5),

$$\overline{D}_\mu A'_{\alpha\nu} \equiv \partial_\mu A'_{\alpha\nu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu}, \quad (17.4.13)$$

$$\overline{D}_\mu \psi \equiv \partial_\mu \psi - it_\alpha A_{\alpha\mu} \psi, \quad (17.4.14)$$

а $F_{\alpha\mu\nu}$ — напряженность фонового поля:

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}. \quad (17.4.15)$$

(Символ квадрата в первом слагаемом в $\mathcal{L}$ подразумевает очевидные свертки по индексам.) Ясно, что $\mathcal{L}$ инвариантен относительно новых преобразований (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9) и (17.4.10), так как он включает $A_{\alpha\mu}$ только в напряженности поля $F_{\alpha\mu\nu}$ и фоновой ковариантной производной $\bar{D}_\mu$ полей «материи» $A'_{\alpha\mu}$, ψ' и ψ .

Следует четко отличать это новое преобразование от истинного калибровочного преобразования. Последнее может не оказывать никакого действия на A или ψ , которые являются просто заданными классическими фоновыми полями, и индуцировать обычное калибровочное преобразование полей $A + A'$, $\psi + \psi'$, так что

$$\delta_{\text{TRUE}} A_\alpha^\mu = 0, \quad (17.4.16)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{TRUE}} A_\alpha'^\mu &= \partial^\mu \varepsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\beta (A_\gamma^\mu + A_\gamma'^\mu) \\ &= \bar{D}^\mu \varepsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\beta A_\gamma'^\mu, \end{aligned} \quad (17.4.17)$$

и

$$\delta_{\text{TRUE}} \psi = 0, \quad (17.4.18)$$

$$\delta_{\text{TRUE}} \psi' = it_\alpha \varepsilon_\alpha (\psi + \psi'). \quad (17.4.19)$$

Конечно, с точки зрения действия на $A + A'$ и $\psi + \psi'$ это то же самое, что и формальные преобразования (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9) и (17.4.10), поэтому такие преобразования также оставляют лагранжиан инвариантным. Однако при нашем новом выборе f_α (17.4.1) слагаемое $f_\alpha f_\alpha$ зависит *не только* от $A + A'$ и *неинвариантно* относительно (17.4.16) и (17.4.17). Вместо этого

$$\delta_{\text{TRUE}} f_\alpha = \bar{D}_\mu (\bar{D}^\mu \varepsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\beta A_\gamma'^\mu C_{\alpha\beta\gamma}) \quad (17.4.20)$$

где $\bar{D}_\mu$ дается формулой (17.4.5).

Рассмотрим, наконец, лагранжиан гостов в этой новой калибровке. Величина (15.7.3) в действии для гостов в общем случае дается просто заменой в $\delta_{\text{TRUE}} f_\alpha$ величины ε_α на гостовское поле $\omega_\alpha + \omega'_\alpha$:

$$\Delta_\alpha = \overline{D}_\mu \left[\overline{D}^\mu (\omega_\alpha + \omega'_\alpha) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_\beta + \omega'_\beta) A'_\gamma{}^\mu \right], \quad (17.4.21)$$

Поэтому лагранжиан гостов в (15.6.2) имеет вид

$$L_{\text{GH}} = (\omega_\alpha^* + \omega_\alpha'^*) \overline{D}_\mu \left[\overline{D}^\mu (\omega_\alpha + \omega'_\alpha) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_\beta + \omega'_\beta) A'_\gamma{}^\mu \right], \quad (17.4.22)$$

или, интегрируя по частям,

$$L_{\text{GH}} = - \left(\overline{D}_\mu (\omega_\alpha^* + \omega_\alpha'^*) \right) \left(\overline{D}^\mu (\omega_\alpha + \omega'_\alpha) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_\beta + \omega'_\beta) A'_\gamma{}^\mu \right). \quad (17.4.23)$$

Это выражение явно инвариантно относительно объединенных преобразований (17.4.2), (17.4.3), дополненных преобразованиями полей ω и ω' :

$$\delta \omega_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\beta \omega_\gamma, \quad (17.4.24)$$

$$\delta \omega'_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\beta \omega'_\gamma, \quad (17.4.25)$$

и аналогично

$$\delta \omega_\alpha^* = -C_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\beta \omega_\gamma^*, \quad (17.4.26)$$

$$\delta \omega_\alpha'^* = -C_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\beta \omega_\gamma'^*. \quad (17.4.27)$$

Мы видим, что формально объединенные преобразования (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10) и (17.4.24)–(17.4.27) оставляют инвариантным полный лагранжиан в модифицированном действии (15.6.4):

$$L_{\text{MOD}} = L - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha + L_{\text{GH}}. \quad (17.4.28)$$

Интегрирование по A' , ψ' , ω' и ω'^* производится с мерой, которая предполагается инвариантной относительно простых матричных преобразований (17.4.3), (17.4.10), (17.4.25) и (17.4.27), поэтому эффективное действие $G[A, \psi, \omega, \omega^*]$ инвариантно относительно оставшихся преобразований (17.4.2), (17.4.9), (17.4.24) и (17.4.26). Иными словами, оно калибровочно инвариантно в том же смысле, что и исходное действие $I[A, \psi, \omega, \omega']$.

Эта формальная калибровочная инвариантность накладывает сильные ограничения на бесконечности, которые могут возникнуть в эффективном действии. Ультрафиолетовые расходимости в Γ

появляются в коэффициентах у слагаемых, массовая размерность которых равна $d \leq 4$, но здесь эти слагаемые инвариантны относительно фоновых калибровочных преобразований (17.4.2), (17.4.9), (17.4.24) и (17.4.26). Например, в калибровочной теории, основанной на простой калибровочной группе, с фермионами спина $1/2$, принадлежащими неприводимому представлению этой группы, единственно возможные слагаемые имеют вид:

$$\Gamma_\infty = \int d^4x \mathcal{L}_\infty, \quad (17.4.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\infty = & -\frac{1}{4} L_A F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu} - L_\Psi \bar{\Psi} \gamma^\mu \bar{D}_\mu \Psi \\ & - m L_m \bar{\Psi} \Psi - L_\omega (\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*) (\bar{D}^\mu \omega_\alpha), \end{aligned} \quad (17.4.30)$$

где $F_{\alpha\mu\nu}$, $\bar{D}_\mu \Psi$, $\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*$ и $\bar{D}^\mu \omega_\alpha$ построены полностью из фоновых полей*:

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}, \quad (17.4.31)$$

$$\bar{D}_\mu \Psi \equiv \partial_\mu \Psi - it_\alpha A_{\alpha\mu} \Psi, \quad (17.4.32)$$

$$\bar{D}_\mu \omega_\alpha \equiv \partial_\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma, \quad (17.4.33)$$

$$\bar{D}_\mu \omega_\alpha^* \equiv \partial_\mu \omega_\alpha^* + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma^*. \quad (17.4.34)$$

На основании размерного анализа можно ожидать, что константы L_A , L_Ψ , L_μ и L_ω будут логарифмически расходящимися.

Чтобы справиться с этими расходимостями, заметим, что лагранжиан (17. 4. 12) содержит чисто классический кусок

$$\mathcal{L}_{\text{CLASS}} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu} - \bar{\Psi} (\gamma^\mu \bar{D}_\mu + m) \Psi - (\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*) (\bar{D}^\mu \omega_\alpha), \quad (17.4.35)$$

* Условие простоты калибровочной группы обеспечивает единственность кинетического слагаемого для полей A и ω , которое пропорционально $F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu}$ и $\bar{D}_\mu \omega_\alpha^* \bar{D}^\mu \omega_\alpha$, соответственно. В то же время, условие, что Ψ преобразуется неприводимо, обеспечивает единственность кинетического и массового слагаемого для Ψ . Ценой небольшого усложнения обозначений нетрудно рассмотреть и более общий случай. Кроме того, мы неявно используем сохранение гостовского числа.

получающийся отбрасыванием всех слагаемых в $\mathcal{L}_{\text{MOD}}$, содержащих квантовые поля A' , ψ' , ω' , ω'^* . Определяем перенормированные поля

$$A_{\alpha\mu}^R \equiv \sqrt{1 + L_A} A_{\alpha\mu}, \quad (17.4.36)$$

$$\psi_l^R \equiv \sqrt{1 + L_\psi} \psi_l, \quad (17.4.37)$$

$$\omega_\alpha^R \equiv \sqrt{1 + L_\omega} \omega_\alpha, \quad (17.4.38)$$

$$\omega_\alpha^{R*} \equiv \sqrt{1 + L_\omega} \omega_\alpha^*, \quad (17.4.39)$$

так что сумма слагаемых (17.4.30) и (17.4.35) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CLASS}} + \mathcal{L}_{\text{GH}} = & -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu}^R F_\alpha^{R\mu\nu} - \bar{\psi}^R \gamma^\mu D_\mu^R \psi^R \\ & - m^R \bar{\psi}^R \psi^R - (D_\mu^R \omega_\alpha^{*R})(D^{\mu R} \omega_\alpha^R), \end{aligned} \quad (17.4.40)$$

где m^R — перенормированная масса

$$m^R \equiv m(1 + L_m) / (1 + L_\psi), \quad (17.4.41)$$

и

$$F_{\alpha\mu\nu}^R \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu}^R - \partial_\nu A_{\alpha\mu}^R + C_{\alpha\beta\gamma}^R A_{\beta\mu}^R A_{\gamma\nu}^R, \quad (17.4.42)$$

$$D_\mu^R \psi^R \equiv \partial_\mu \psi^R - i t_\alpha^R A_{\alpha\mu}^R \psi^R, \quad (17.4.43)$$

$$D_\mu^R \omega_\alpha^R \equiv \partial_\mu \omega_\alpha^R + C_{\alpha\beta\gamma}^R A_{\beta\mu}^R \omega_\gamma^R, \quad (17.4.44)$$

$$D_\mu^R \omega_\alpha^{*R} \equiv \partial_\mu \omega_\alpha^{*R} + C_{\alpha\beta\gamma}^R A_{\beta\mu}^R \omega_\gamma^{*R}. \quad (17.4.45)$$

Здесь перенормированные структурные константы и генераторы группы равны:

$$C_{\alpha\beta\gamma}^R \equiv (1 + L_A)^{-1/2} C_{\alpha\beta\gamma}, \quad (17.4.46)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma}^R \equiv (1 + L_A)^{-1/2} C_{\alpha\beta\gamma}, \quad (17.4.47)$$

Поскольку мы предполагали, что алгебра Ли проста, структурная константа $C_{\alpha\beta\gamma}$ и генератор группы t_α фиксированы групповой структурой за исключением единственного общего множителя, равного неперенормированной калибровочной константе связи g . Таким образом, из формул (17.4.46) и (17.4.47) следует, что калибровочная константа связи g^R в S^R и t^R перенормируется по правилу:

$$g^R = g(1 + L_A)^{-1/2}. \quad (17.4.48)$$

Этот результат показывает практическую ценность калибровки фонового поля. В произвольной калибровке мы бы имели независимые константы перенормировки для калибровочного поля и калибровочной константы связи и должны были бы вычислить две разные амплитуды (например, поляризацию вакуума и вершинную функцию с тремя калибровочными полями), чтобы получить возможность их отсортировать. В фоновой калибровке калибровочная инвариантность по отношению к этому полю связывает эти две перенормировки благодаря требованию, чтобы бесконечные слагаемые в эффективном лагранжиане включали напряженность поля в исходном виде (17.4.31). В результате можно вычислить константу перенормировки заряда, рассматривая лишь одну амплитуду калибровочного поля.

17.5. Однопетлевое вычисление в калибровке фонового поля

В качестве примера мы хотим вычислить в однопетлевом приближении константу перенормировки для калибровочной константы связи в произвольной неабелевой калибровочной теории. Как мы увидим в следующей главе, это послужит существенным первоначальным вкладом в вычисления физических процессов при высоких энергиях методом так называемой «ренормализационной группы». Полученные здесь результаты будут использованы для демонстрации свойства асимптотической свободы неабелевых калибровочных теорий.

Используемый здесь метод содержит элементы новизны. Обычно рассматривают эффективное действие в зависящем от пространственно-временных координат фоновом калибровочном поле и вычисляют слагаемые, квадратичные по этому полю, извлекая затем множитель $(q_\mu A_{\alpha\nu} - q_\nu A_{\alpha\mu})^2$ (где q — 4-импульс калибровочного поля), и только после этого изолируют логарифмическую расходимость,

полагая $q = 0$ в коэффициенте при этом множителе. Мы вместо этого будем следовать по значительно более простому пути, выбрав с самого начала калибровочное поле не зависящим от пространственно-временных координат. В этом случае квадратичные и кубические по калибровочному полю слагаемые в эффективном действии, конечно, обращаются в нуль, но остается неисчезающее четвертичное ультрафиолетово расходящееся слагаемое, которое можно использовать для вычисления константы перенормировки $(1 + L_A)^{-1/2}$ для константы связи. При таком способе расчетов однопетлевое вычисление превращается в задачу простой алгебры матриц. Заметим, что описанная процедура может использоваться только в калибровке фонового поля. В других случаях независимые логарифмические расходимости возникали бы в квадратичных и четвертичных по калибровочному полю слагаемых эффективного действия.

С учетом сказанного перейдем к вычислению однопетлевого эффективного действия в фоновом поле, для которого $A_{\alpha\mu}$ постоянно, а $\psi = \omega = \omega^* = 0$. Для такого фонового поля полный модифицированный лагранжиан имеет вид *

$$L_{\text{MOD}} = L + L_f + L_{\text{GH}}, \quad (17.5.1)$$

$$L = -\frac{1}{4} \left(F_{\alpha\mu\nu} + \bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} \right)^2 - \bar{\psi}' (\bar{D} - it_\alpha A'_\alpha + m) \psi', \quad (17.5.2)$$

$$\mathcal{L}_f \equiv -\frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha = -\frac{1}{2\xi} (\bar{D}_\mu A'_\alpha{}^\mu)^2, \quad (17.5.3)$$

$$L_{\text{GH}} = -(\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*)(\bar{D}^\mu \omega'_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \omega'_\beta A'_\gamma{}^\mu). \quad (17.5.4)$$

Однопетлевые диаграммы для амплитуд перехода вакуум–вакуум вычисляется из той части действия, которая квадратична по квантовым полям A' , ψ' , ω' , $\omega^{*'}$, по которым производится интегрирование. Удерживая только эти квадратичные слагаемые, имеем:

* См. формулы (17.4.12), (17.4.4) и (17.4.23). Мы здесь рассматриваем специальный случай, когда поля материи образуют мультиплет фермионов спина 1/2. Квадрирование $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_f$ подразумевает очевидные свертки по индексам.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QUAD}} = & -\frac{1}{4} \left(\bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu} \right)^2 - \frac{1}{2} F_\alpha^{\mu\nu} C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} \\ & - \bar{\Psi}'(\bar{D} + m)\Psi' - \frac{1}{2\xi} \left(\bar{D}_\mu A'_\alpha{}^\mu \right)^2 - (\bar{D}_\mu \omega'_\alpha{}^*)(\bar{D}^\mu \omega'_\alpha). \end{aligned} \quad (17.5.5)$$

Соответствующее действие можно представить в виде общей квадратичной формы:

$$\begin{aligned} I_{\text{QUAD}} \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QUAD}} = & -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A'_\alpha{}^\mu(x) A'_\beta{}^\nu(y) D_{x\alpha\mu, y\beta\nu}^A \\ & - \int d^4x d^4y \bar{\Psi}'_k(x) \Psi'_l(y) D_{xk, yl}^\Psi - \int d^4x d^4y \omega'_\alpha{}^*(x) \omega'_\beta(y) D_{x\alpha, y\beta}^\omega, \end{aligned} \quad (17.5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{x\alpha\mu, y\beta\nu}^A & \equiv \eta_{\mu\nu} \left(-\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + C_{\gamma\delta\alpha} A_\delta^\lambda(x) \right) \left(-\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\lambda}(y) \right) \delta^4(x-y) \\ & - \left(-\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta\nu}(x) \right) \left(-\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\mu} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\mu}(y) \right) \delta^4(x-y) \\ & + F_{\mu\nu}(x) C_{\gamma\alpha\beta} \delta^4(x-y) \\ & + \frac{1}{\xi} \left(-\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta\mu}(x) \right) \left(-\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\nu} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\nu}(y) \right) \delta^4(x-y), \end{aligned} \quad (17.5.7)$$

$$\mathcal{D}_{xk, yl}^\Psi \equiv \left(-\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} - it_\alpha A_\alpha(y) + m \right)_{kl} \delta^4(x-y), \quad (17.5.8)$$

$$\mathcal{D}_{x\alpha, y\beta}^\omega \equiv - \left(-\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta\lambda}(x) \right) \left(-\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y_\lambda} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon}^\lambda(y) \right) \delta^4(x-y).$$

(Знаки «минус» перед $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$ исчезают после интегрирования по частям.)

Однопетлевой вклад в эффективное действие дается (как в разделе 16.2) выражением:

$$\begin{aligned}
\exp(i\Gamma^{(1\text{LOOP})}[A]) &\propto \int_{\text{1PI}} (\Pi dA') (\Pi d\psi') (\Pi d\bar{\psi}') (\Pi d\omega') (\Pi d\omega'^*) \\
&\times \exp(iI_{\text{QUAD}}[A', \psi', \bar{\psi}', \omega', \omega'^*; A]) \\
&\propto (\text{Det} D^A)^{-1/2} (\text{Det} D^\Psi)^{+1} (\text{Det} D^\omega)^{+1}.
\end{aligned} \tag{17.5.10}$$

(Показатели степени $-1/2$ и -1 возникают потому, что A' — действительное бозонное поле, а ψ' , $\bar{\psi}'$, ω' и ω'^* — различные фермионные поля.) В общем случае вычисление подобных детерминантов — далеко не простая задача. Однако она сильно упрощается для случая постоянных внешних полей, когда все $\mathcal{D}$ можно диагонализировать, перейдя в импульсное пространство.

Поэтому рассмотрим случай постоянного фонового поля $A_{\text{фн}}$. В неабелевых калибровочных теориях такое постоянное поле *невозможно* устранить калибровочным преобразованием, что видно по ненулевым значениям различных калибровочно ковариантных полей:

$$F_{\alpha\mu\nu} = C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}, \tag{17.5.11}$$

$$D_\lambda F_{\delta\mu\nu} = C_{\delta\epsilon\alpha} C_{\alpha\beta\gamma} A_{\epsilon\lambda} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}, \tag{17.5.12}$$

и т. д. Лоренцовская и калибровочная инвариантности указывают, как выразить слагаемое в $\Gamma[A]$ данной размерности в виде интеграла от конечного числа локальных функций от $F_{\alpha\mu\nu}$, $D_\lambda F_{\alpha\mu}$ и т. д. Коэффициенты при слагаемых в этом выражении можно найти, сравнив вклад этих слагаемых в $\Gamma[A]$ при постоянном фоновом поле $A_{\text{фн}}$ с результатами разложения по теории возмущений.

С помощью обычного нормированного фурье-преобразования перейдем для каждой из «матриц» $\mathcal{D}^A$, $\mathcal{D}^\Psi$ и $\mathcal{D}^\omega$ к импульсному представлению:

$$\mathcal{D}_{q\dots,p\dots} = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2} e^{-iq\cdot x} \int \frac{d^4y}{(2\pi)^2} e^{ip\cdot y} \mathcal{D}_{x\dots,y\dots} \tag{17.5.13}$$

При постоянном A имеем:

$$\mathcal{D}_{q\dots,p\dots} = \delta^4(p-q) \cdot \mathcal{D}_{\dots\dots\dots}(q), \tag{17.5.14}$$

где ... означает дискретные индексы, а $\mathcal{M}$ — конечные зависящие от q матрицы

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\mu,\beta\nu}^A(q) = & \eta_{\mu\nu} \left(-iq_\lambda \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda} C_{\gamma\delta\alpha} \right) \left(iq^\lambda \delta_{\gamma\beta} + A_\epsilon^\lambda C_{\gamma\epsilon\beta} \right) \\ & - \left(-iq_\nu \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\nu} C_{\gamma\delta\alpha} \right) \left(iq_\mu \delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\mu} C_{\gamma\epsilon\beta} \right) \\ & + F_{\mu\nu} C_{\gamma\alpha\beta} \\ & + \left(-iq_\mu \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\mu} C_{\gamma\delta\alpha} \right) \left(iq_\nu \delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\nu} C_{\gamma\epsilon\beta} \right) / \xi \\ & + \text{слагаемые с } \epsilon, \end{aligned} \quad (17.5.15)$$

$$\mathcal{M}_{kl}^\Psi(q) = (iq - it_\alpha A_\alpha + m)_{kl} + \text{слагаемые с } \epsilon, \quad (17.5.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\beta}^\omega(q) = & \left(-iq_\lambda \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda} C_{\gamma\delta\alpha} \right) \left(iq^\lambda \delta_{\gamma\beta} + A_\epsilon^\lambda C_{\gamma\epsilon\beta} \right) \\ & + \text{слагаемые с } \epsilon, \end{aligned} \quad (17.5.17)$$

с $F_{\alpha\mu\nu}$, определенными соотношением (17.5.11). Тогда из (17.5.10) имеем

$$\begin{aligned} i\Gamma^{(1\text{LOOP})}[A] = & -\frac{1}{2} \ln \text{Det} D^A + \ln \text{Det} D^\Psi + \ln \text{Det} D^\omega \\ = & -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln D^A + \text{Tr} \ln D^\Psi + \text{Tr} \ln D^\omega \\ = & \delta^4(p-p) \int d^4q \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \ln M^A(q) + \text{tr} \ln M^\Psi(q) + \text{tr} \ln M^\omega(q) \right]. \end{aligned} \quad (17.5.18)$$

В последней строке (17.5.18) мы обозначили следы символом tr , а не Tr (и будем делать это в оставшейся части раздела), для того, чтобы подчеркнуть, что это обычные следы конечных матриц, а не интегральных операторов.

Так как нашей целью является вычисление бесконечного множителя L_A , стоящего перед слагаемыми FF в эффективном действии, выделим в (17.5.18) слагаемое четвертой степени по фоновому полю A . Для этого удобно разбить каждую матрицу $\mathcal{M}$ на слагаемые $\mathcal{M}_n$, содержащие $n = 0, 1, 2$ степеней A :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2. \quad (17.5.19)$$

После этого с помощью элементарной алгебры нетрудно показать, что слагаемое в (17.5.18) четвертого порядка по $A_{\alpha\mu}$ имеет вид:

$$[\text{tr} \ln \mathcal{U}]_{A^4} = \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2} [\mathcal{U}_0^{-1} \mathcal{U}_2]^2 + [\mathcal{U}_0^{-1} \mathcal{U}_1]^2 \mathcal{U}_0^{-1} \mathcal{U}_2 - \frac{1}{4} [\mathcal{U}_0^{-1} \mathcal{U}_1]^4 \right\}. \quad (17.5.20)$$

(Чтобы убедиться в этом, вставьте в (17.5.19) множители ε и ε^2 перед $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, соответственно, затем продифференцируйте $\text{tr} \ln \mathcal{U}$ четыре раза по ε , разделите на $4!$ и положите $\varepsilon = 0$.) Множители $\mathcal{U}_0^{-1}$ — обычные пропагаторы. При $\xi = 1$ они равны

$$[\mathcal{U}_0^A(q)]_{\alpha\mu, \beta\nu}^{-1} = \delta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} (q^2 - i\varepsilon)^{-1}, \quad (17.5.21)$$

$$[\mathcal{U}_0^\Psi(q)]_{kl}^{-1} = [i\not{q} + m]_{kl}^{-1}, \quad (17.5.22)$$

$$[\mathcal{U}_0^\omega(q)]_{\alpha\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta} (q^2 - i\varepsilon)^{-1}. \quad (17.5.23)$$

Действительно, три слагаемых в (17.5.20) в точности соответствуют трем фейнмановским диаграммам рис. 17.1. Данный метод вычисле-

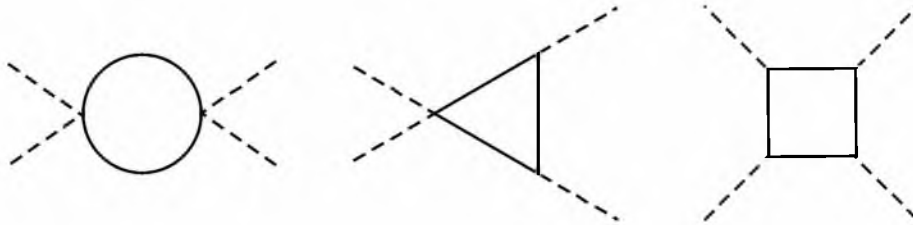


Рис. 17.1. Однопетлевые фейнмановские диаграммы для четвертичного по постоянному фоновому полю A^μ_α слагаемого в квантовом эффективном действии. Сплошные линии представляют внутренние линии калибровочных, гостовских и материальных полей, пунктирные линии изображают множители A^μ_α . Эти три диаграммы соответствуют трем слагаемым в (17.5.20)

ний избавляет нас от необходимости думать о знаках и комбинаторных множителях.

Для петли калибровочного поля из формулы (17.5.15) при $\xi = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}_1^A(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu} &= -2\eta_{\mu\nu}q^\lambda [\mathcal{I}_\lambda]_{\alpha\beta}, \\ [\mathcal{M}_2^A(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu} &= [\eta_{\mu\nu}\mathcal{I}_\lambda\mathcal{I}^\lambda - \mathcal{I}_\nu\mathcal{I}_\mu - \mathcal{I}_\mu\mathcal{I}_\nu]_{\alpha\beta} + F_{\mu\nu}C_{\gamma\alpha\beta}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{I}_\lambda$ — матрица

$$[\mathcal{I}_\lambda]_{\alpha\beta} \equiv -iC_{\alpha\beta\gamma}A_{\gamma\lambda},$$

для которой

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_\lambda, \mathcal{I}_\rho]_{\alpha\beta} &= -C_{\alpha\delta\gamma}C_{\delta\beta\epsilon}(A_{\gamma\lambda}A_{\epsilon\rho} - A_{\gamma\rho}A_{\epsilon\lambda}) \\ &= -(C_{\alpha\delta\gamma}C_{\delta\beta\epsilon} + C_{\alpha\delta\epsilon}C_{\delta\beta\gamma})A_{\gamma\lambda}A_{\epsilon\rho} \\ &= +C_{\alpha\delta\beta}C_{\delta\epsilon\gamma}A_{\gamma\lambda}A_{\epsilon\rho} = C_{\alpha\delta\beta}F_{\delta\rho\lambda}. \end{aligned}$$

Интегралы имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \int d^4q q^\mu q^\nu f(q^2) &= \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu} \int d^4q q^2 f(q^2), \\ \int d^4q q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma f(q^2) &= \frac{1}{24}[\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}] \int d^4q q^2 f(q^2). \end{aligned}$$

При $\xi = 1$ находим:

$$\begin{aligned} \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \cdot \mathcal{M}_2^A(q)]^2 \right\} &= 4\mathcal{I} \operatorname{tr} [\mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}_\lambda \mathcal{I}^\eta \mathcal{I}_\eta] \\ &\quad + 4\mathcal{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\delta}^{\mu\nu}, \\ \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \cdot \mathcal{M}_1^A(q)]^2 \cdot \mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \cdot \mathcal{M}_2^A(q) \right\} &= 4\mathcal{I} \operatorname{tr} [\mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}_\lambda \mathcal{I}^\eta \mathcal{I}_\eta], \\ \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \cdot \mathcal{M}_1^A(q)]^4 \right\} &= \frac{8}{3}\mathcal{I} [2\mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}_\lambda \mathcal{I}^\eta \mathcal{I}_\eta + \mathcal{I}^\lambda \mathcal{I}^\eta \mathcal{I}_\lambda \mathcal{I}_\eta], \end{aligned}$$

где $\mathcal{J}$ — расходящийся интеграл

$$\mathcal{J} \equiv \int d^4 q [q^2 - i\varepsilon]^{-2}, \quad (17.5.24)$$

важное значение которого обсуждается ниже. Подставляя все выражения назад в (17.5.20), имеем

$$\begin{aligned} \int d^4 q [\text{tr} \ln \mathcal{M}^A(q)]_{A^4} &= \frac{2}{3} \mathcal{J} \text{tr} [\not{\epsilon}^\lambda \not{\epsilon}_\lambda \not{\epsilon}^\eta \not{\epsilon}_\eta - \not{\epsilon}^\lambda \not{\epsilon}^\eta \not{\epsilon}_\lambda \not{\epsilon}_\eta] \\ &\quad - 2 \mathcal{J} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Оба слагаемых имеют на самом деле одну и ту же форму, так что, объединяя их, получаем:

$$\int d^4 q [\text{tr} \ln \mathcal{M}^A(q)]_{A^4} = -\frac{5}{3} \mathcal{J} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}. \quad (17.5.25)$$

Переходя к гостовской петле, видим из (17.5.17), что

$$[\mathcal{M}_1^\omega(q)]_{\alpha\beta} = -2[\not{\epsilon}^\lambda]_{\alpha\beta} q_\lambda, \quad (17.5.26)$$

$$[\mathcal{M}_2^\omega(q)]_{\alpha\beta} = [\not{\epsilon}^\lambda \not{\epsilon}_\lambda]_{\alpha\beta}. \quad (17.5.27)$$

Тогда

$$\int d^4 q \text{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_2^\omega(q)]^2 \right\} = \mathcal{J} \text{tr} [\not{\epsilon}^\lambda \not{\epsilon}_\lambda \not{\epsilon}^\eta \not{\epsilon}_\eta],$$

$$\int d^4 q \text{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_1^\omega(q)]^2 \mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_2^\omega(q) \right\} = \mathcal{J} \text{tr} [\not{\epsilon}^\lambda \not{\epsilon}_\lambda \not{\epsilon}^\eta \not{\epsilon}_\eta],$$

$$\int d^4 q \text{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_1^\omega(q)]^4 \right\} = \frac{2}{3} \mathcal{J} [2 \not{\epsilon}^\lambda \not{\epsilon}_\lambda \not{\epsilon}^\eta \not{\epsilon}_\eta + \not{\epsilon}^\lambda \not{\epsilon}^\eta \not{\epsilon}_\lambda \not{\epsilon}_\eta].$$

Таким образом, для гостовской петли интеграл от величины (17.5.20) имеет вид

$$\begin{aligned} \int d^4 q [\text{Tr} \ln \mathcal{M}^\omega(q)]_{A^4} &= \frac{1}{6} \mathcal{J} \text{Tr} [\not{\epsilon}^\lambda \not{\epsilon}_\lambda \not{\epsilon}^\eta \not{\epsilon}_\eta - \not{\epsilon}^\lambda \not{\epsilon}^\eta \not{\epsilon}_\lambda \not{\epsilon}_\eta] \\ &= \frac{1}{12} \mathcal{J} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (17.5.28)$$

Наконец, вершины в петле полей материи равны:

$$[\mathcal{M}_1^\Psi(q)]_{kl} = -i(t_\alpha A_\alpha)_{kl}, \quad [\mathcal{M}_2^\Psi(q)]_{kl} = 0,$$

так что в (17.5.20) есть только одно слагаемое

$$\int d^4q [\text{Tr} \ln M^\Psi(q)]_{A^4} = -\frac{1}{4} \int d^4q \text{Tr} \left\{ [(i\mathcal{Q} + m)^{-1} t_\alpha A_\alpha]^4 \right\}.$$

Нас интересует ультрафиолетово расходящаяся часть этого интеграла, так что мы можем отбросить массу (несущественную при больших q^ν) и записать:

$$\begin{aligned} \int d^4q [\text{Tr} \ln M^\Psi(q)]_{A^4} &= -\frac{1}{4} \text{Tr} \{ t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta \} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_{\gamma\rho} A_{\delta\sigma} \\ &\quad \times \int d^4q \frac{\text{Tr} \{ \mathcal{Q} \gamma^\mu \mathcal{Q} \gamma^\nu \mathcal{Q} \gamma^\rho \mathcal{Q} \gamma^\sigma \}}{(q^2 - i\varepsilon)^4} \\ &= -\frac{1}{96} \text{Tr} \{ t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta \} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_{\gamma\rho} A_{\delta\sigma} \\ &\quad \times \text{Tr} \{ 2\gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma_\eta \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma + \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma \}, \end{aligned} \quad (17.5.29)$$

где $\mathcal{J}$ — тот же расходящийся интеграл, что и в (17.5.24). Для вычисления следов дираковских матриц используем антикоммутиационные соотношения для этих матриц. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ 2\gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma_\eta \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma + \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma \} &= \\ &= 8\text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} - 4\text{Tr} \{ \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} - 4\text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \} \\ &= -64\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + 32\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + 32\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}. \end{aligned}$$

Формула (17.5.29) принимает вид

$$\begin{aligned} \int d^4q [\text{Tr} \ln \mathcal{M}^\Psi(q)]_{A^4} &= \frac{1}{3} \mathcal{J} \text{Tr} \{ [t_\alpha, t_\beta] [t_\gamma, t_\delta] \} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_\gamma^\mu A_\delta^\nu \\ &= -\frac{1}{3} \mathcal{J} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu} \text{Tr} \{ t_\gamma t_\delta \}. \end{aligned} \quad (17.5.30)$$

Подставляя выражения (17.5.25), (17.5.28) и (17.5.30) в формулу (17.5.18), получаем наконец

$$\Gamma_{A^4}^{(1\text{LOOP})} = \frac{-i!}{(2\pi)^4} \int d^4x F_{\gamma\mu\nu} F_{\delta}^{\mu\nu} \left[\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{12} \right) C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} - \frac{1}{3} \text{Tr}\{t_{\gamma} t_{\delta}\} \right], \quad (17.5.31)$$

где мы представили импульсную дельта-функцию в (17.5.14) как

$$\delta^4(p - p) = (2\pi)^{-4} \int d^4x \cdot 1. \quad (17.5.32)$$

Важно, что результат оказался зависящим от $A_{\alpha\mu}$ только через напряженность поля (17.5.11), как и требует фоновая калибровочная инвариантность.

Используем теперь (впервые в данном разделе) наше предположение о простоте калибровочной группы и неприводимости мультиплета полей материи. В этом случае

$$C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} = g^2 C_1 \delta_{\gamma\delta}, \quad (17.5.33)$$

$$\text{Tr}\{t_{\gamma} t_{\delta}\} = g^2 C_2 \delta_{\gamma\delta}, \quad (17.5.34)$$

где g — общая калибровочная константа связи, входящая в качестве множителя в $C_{\alpha\beta\gamma}$ и t_{γ} , а C_1 и C_2 — числовые постоянные, характеризующие калибровочную группу и представление этой группы, которому принадлежит мультиплет полей материи. Например, в первоначальной теории Янга–Миллса калибровочной группой является $SU(2)$ (или эквивалентно $SO(3)$), и структурные константы имеют вид

$$C_{\gamma\alpha\beta} = g\epsilon_{\alpha\beta\gamma},$$

где α, β, γ принимают значения 1, 2, 3. Сравнивая с (17.5.33), видим, что в этом случае

$$C_1 = 2.$$

Кроме того, в этой теории поля материи образуют дублет, и t_{α} равно константе $g/2$, умноженной на обычные матрицы Паули σ_{α} , так что

$$C_2 = 1/2.$$

В более общем случае для группы $SU(N)$ с n_f фермионами в фундаментальном представлении и при обычной нормировке генераторов имеем *

$$C_1 = N, \quad C_2 = n_f/2. \quad (17.5.35)$$

Возвращаясь к общему случаю, получаем из (17.5.33) и (17.5.34):

$$\Gamma_{A^4}^{(1\text{LOOP})} = \frac{-i!}{(2\pi)^4} \int d^4x F_{\gamma\mu\nu} F_{\delta}^{\mu\nu} \left[\frac{11}{3} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right]. \quad (17.5.36)$$

Это означает, что бесконечная константа L_A в (17.4.30) равна

$$L_A = \frac{4ig^2 \mathcal{J}}{(2\pi)^4} \left(\frac{11}{3} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right). \quad (17.5.37)$$

Осталось сказать несколько слов об интерпретации расходящегося интеграла $\mathcal{J}$. Во-первых, прежде чем пробовать интегрировать по три-импульсу $\mathbf{q}$, мы можем повернуть контур интегрирования по q^0 в (17.5.24) в сторону мнимой оси. Как обычно, добавка $-i\epsilon$ в знаменателе заставляет нас делать этот поворот против часовой стрелки, так что $q^0 = iq^4$, где q^4 изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда интеграл принимает вид

$$\mathcal{J} = i \int_0^\infty \frac{2\pi^2 q^3 dq}{q^4}, \quad (17.5.38)$$

где q — величина евклидова 4-вектора (q^1, q^2, q^3, q^4).

Чтобы двигаться дальше, очевидно, нужен какой-то метод регуляризации интеграла. Простейший способ обращения с ультрафиолетовыми расходимостями заключается в обрезании интеграла по q выше некоторого масштаба Λ . Однако необходимо и обрезание снизу, связанное с инфракрасной расходимостью. Оно определяется физи-

* Для группы $SU(3)$ генераторы t_a равны $g/2$, умноженной на матрицы Гелл-Манна λ_α , использующиеся в разделе 19.7, так что $C_{\alpha\beta\gamma} = (g/2)f_{\alpha\beta\gamma}$

кой ситуации. Если импульсы четырех векторных частиц не равны нулю, то по внутренним линиям диаграммы течет определенный импульс, так что инфракрасное обрезание происходит на масштабе μ этих импульсов. Аналогично, если вычислить четвертую вариационную производную $\Gamma[A]$ по A не при $A = 0$, а при некотором конечном значении, то пропагаторы внутренних линий не взорвутся при нулевых импульсах, и инфракрасное обрезание будет иметь место на масштабе $\mu \sim gA$. В любом случае $\mathcal{J}$ принимает вид

$$\mathcal{J} = 2\pi^2 i \int_{\mu}^{\Lambda} \frac{dq}{q} = 2\pi^2 i \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \quad (17.5.39)$$

и поэтому

$$L_A = -\frac{g^2}{2\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(g^4). \quad (17.5.40)$$

Тогда из (17.4.48) находим перенормированную константу

$$g_R = g \left[1 + \frac{g^2}{4\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^4) \right]. \quad (17.5.41)$$

Обратим внимание на следующее. В то время как в квантовой электродинамике обсуждавшиеся в разделе 11.2 радиационные поправки уменьшают физическую константу связи g_R по сравнению с голой константой g , в неабелевых калибровочных теориях они увеличивают физическую константу по сравнению с голой, если только фермионный мультиплет не слишком велик, и $C_2 < 11C_1/4$. Важность этого обстоятельства будет рассмотрена в гл. 18.

Альтернативно, можно рассматривать ультрафиолетовую расходимость методами размерной регуляризации, обсуждавшимися в разделе 11.2. Тогда вместо (17.5.39) можно записать

$$\mathcal{J} = i \int_0^{\infty} \frac{2\pi^2 q^{d-1} dq}{(q^2 + \mu^2)^2}. \quad (17.5.42)$$

где d — комплексная размерность, которая устремляется к 4 в конце вычислений, а μ — инфракрасное обрезание порядка внешних

импульсов (или фоновых полей, умноженных на g). Пока d комплексно с $\text{Re } d < 0$ и $\mu^2 > 0$, интеграл имеет конечное значение

$$\mathcal{I} = -i\pi^2 \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \mu^{d-4} \pi / \sin \left[\left(\frac{d}{2} - 2 \right) \pi \right].$$

Аналитически продолжая к $d \rightarrow 4$, имеем

$$\mathcal{I} \rightarrow -2i\pi^2 \left[\frac{1}{d-4} + \ln \mu + \dots \right], \quad (17.5.43)$$

где многоточие означает не зависящие от μ слагаемые. В результате

$$L_A = \frac{g^2}{2\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \left(\frac{1}{d-4} + \ln \mu + \dots \right) + O(g^4)$$

и поэтому

$$g_R = g \left[1 - \frac{g^2}{2\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \left(\frac{1}{d-4} + \ln \mu + \dots \right) + O(g^4) \right]. \quad (17.5.44)$$

Заметим, что в данном случае ультрафиолетовые расходимости имеют другую форму, но зависимость от инфракрасного обрезания μ такая же. Формула (17.5.44) будет важной отправной точкой обсуждения асимптотической свободы в разделе 18.7.

Задачи

1. Проведите доказательство перенормируемости, данное в разделе 17.2, включив в лагранжиан элементарные скалярные поля.
2. Проведите квантование неабелевой калибровочной теории в калибровке фоновых полей, используя обсуждавшийся в конце раздела 17.2 метод БРСТ квантования.
3. Выведите соотношение (17.5.44) между перенормированной и неперенормированной константами связи, вычислив квадра-

тичные по зависящему от пространственно-временных координат калибровочному полю слагаемые в $\Gamma^{(1)}$ петля).

4. Вычислите в однопетлевом приближении соотношение между перенормированной и неперенормированной константами связи в калибровочной теории, содержащей элементарные скалярные поля.

Список литературы

1. Zinn-Justin, J., in *Trends in Elementary Particle Theory — International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974* (Springer Verlag, Berlin, 1975).
2. До открытия симметрии БРСТ доказательства перенормируемости непосредственно базировались на тождествах Славнова–Тейлора для калибровочных преобразований. См. работы: Lee, B.W. and Zinn-Justin, J., *Phys. Rev.*, **D5**, 3121, 3137 (1972); *Phys. Rev.*, **D7**, 1049 (1972); 't Hooft, G. and Veltman M., *Nucl. Phys.*, **B50**, 318 (1972); Lee, B.W., *Phys. Rev.*, **D9**, 933 (1974). Первое доказательство перенормируемости, основанное на симметрии БРСТ дано в работе: Becchi, C., Rouet, A., and Stora, R., *Commun. Math. Phys.*, **42**, 127 (1975); in *Renormalization Theory — Proceedings of the International School of Mathematical Physics at Erice, August 1975*, eds. G. Velo and A.S. Wightman (D.Reidel, Dordrecht, 1976), pp. 269–297, 299–343. Приведенное здесь доказательство следует общей линии работы Зинн–Жюстена [1]; см. также: Lee, B.W., in *Methods in Field Theory*, eds. R. Balian and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1976), pp. 79–139.
3. Точка зрения и изложение вопроса базируется на работе: Gomis, J. and Weinberg, S., *Nucl. Phys.*, **B469**, 475 (1996). Более раннее использование тех же методов см. в работах: Voronov, B.L. and Tyutin, I.V., *Theor. Math. Phys.*, **50**, 218 (1982); **52**, 628 (1982); Voronov, B.L., Lavrov, P.M., and Tyutin, I.V., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **36**, 292 (1982); Lavrov, P.M. and Tyutin, I.V., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **41**, 1049 (1985); Anselmi, D., *Class. and Quant. Grav.*, **11**, 2181

- (1994); **12**, 319 (1995); Harada, M., Kugo, T., and Yamawaki, K., *Progr. Theor. Phys.*, **91**, 801 (1994).
4. Barnich, G. and Henneaux, M., *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1588 (1994); Barnich, G., Brandt, F., and Henneaux, M., *Phys. Rev.*, **51**, R143 (1995); *Commun. Math. Phys.*, **174**, 57, 93 (1995); *Nucl. Phys.*, **B455**, 357 (1995).
5. Калибровка фонового поля была введена в работе: de Witt, B., *Phys. Rev.*, **162**, 1195, 1239 (1967). Исследование многопетлевых эффектов см. в работах: 't Hooft, G., in *Functional and Probabilistic Methods in Quantum Field Theory: Proc. of the 12th Karpacz Winter School of Theoretical Physics* (Acta Univ. Bratislavensis, no. 38, 1975); de Witt, B., in *Quantum Gravity II*, eds. C. Isham, R. Penrose, and D. Sciama (Oxford Univ. Press, Oxford, 1982); Abbott, L.F., *Nucl. Phys.*, **B185**, 189 (1981).

Методы ренормгруппы

Метод ренормализационной группы был первоначально предложен Гелл-Манном и Лоу¹ как средство борьбы с крахом теории возмущений при очень высоких энергиях в квантовой электродинамике. Было обнаружено, что вклад n -петлевого приближения в амплитуду, содержащую импульсы порядка q , например, в амплитуду поляризации вакуума $\Pi_{\mu\nu}(q)$, содержит n множителей $\ln(q^2/m_e^2)$, а также множитель α^n , так что когда $\alpha \ln(q^2/m_e^2)$ велико, теория возмущений становится неприменимой даже при малой величине постоянной тонкой структуры α . Даже в безмассовой теории, например, в неабелевой калибровочной теории, мы должны вводить некоторую шкалу μ , чтобы задать точку перенормировки, в которой определяются перенормированные константы связи, и в этом случае мы сталкиваемся с логарифмами $\ln(E/\mu)$, так что, несмотря на малость константы связи, теория возмущений может нарушаться при $E \gg \mu$ или $E \ll \mu$.

К счастью, существует модифицированная версия теории возмущений, которую часто можно применить в подобных случаях. Ключевая идея этого подхода состоит во введении констант связи g_μ , определенных при скользящей перенормировочной шкале μ , т. е. шкале, которая никаким фиксированным образом не связана с массами частиц. Затем, выбирая μ того же порядка величины, что и типичная для рассматриваемого процесса энергия E , можно обезвредить множители $\ln(E/\mu)$. После этого можно продолжать вычисления по теории возмущений до тех пор, пока g_μ остается малой. В частности, задав константы связи, определенные в точке μ , можно с помощью теории возмущений вычислить физические амплитуды при энергии $\mu + d\mu$ и использовать их для

вычисления констант связи, определенных в перенормированной точке $\mu + d\mu$. Интегрируя возникающее дифференциальное уравнение, можно затем связать константы связи в интересующей нас точке с константами, определенными в исходной точке. (Первоначально название «ренормализационная группа»* возникло потому, что здесь рассматриваются уравнения, описывающие изменения вида теории в результате переопределения перенормированных констант связи. На самом деле, все это не имеет никакого отношения к теории групп.) Метод ренормгруппы позволяет также качественно проследить за асимптотическим поведением при очень больших или (в безмассовых теориях) очень малых энергиях, даже когда константы связи на интересующем нас масштабе слишком велики, чтобы можно было применять теорию возмущений.

Хотя метод ренормгруппы первоначально возник в связи с изменениями в рецепте определения перенормированных констант связи, он приобрел более широкий смысл. Когда мы заменяем голые константы и поля на перенормированные, определенные через матричные элементы, вычисленные при характерной энергетической шкале μ , интегралы по виртуальным импульсам эффективно обрезаются на масштабах энергий и импульсов порядка μ . Таким образом, если мы изменяем μ , мы фактически изменяем масштабы тех степеней свободы, которые учитываются в наших вычислениях.

Урок, вытекающий из рассмотрения ренормгруппы, состоящий в том, что для устранения больших логарифмов следует выбрать μ порядка типичной энергии E в изучаемом процессе, есть частный случай более общего принципа, утверждающего, что для вычислений при заданной энергии следует сначала избавиться от степеней свободы при значительно больших энергиях.

Есть много других способов достичь этого. Как мы видели в разделе 12.4, в том подходе к ренормализационной группе, который связан с пионерскими работами Вильсона², вводится явное *конечное* обрезание, сопровождаемое таким изменением параметров теории, при котором физические величины остаются независимыми от обрезания. Такой подход требует введения бесконечного числа типов взаимодействий, которые допускаются симметриями теории, и поэтому не слишком удобен при рассмотрении реально

* В русскоязычной литературе часто используется термин *ренормгруппа*, который мы и будем далее употреблять. — Прим. пер.

перенормируемых теорий типа квантовой электродинамики (хотя, как обсуждалось в разделе 12.3, сегодня квантовая электродинамика рассматривается лишь как очень хорошее приближение к неперенормируемой теории, в которой взаимодействия высшей размерности подавлены отрицательными степенями какой-то очень большой массы). Если обрезание совершается при квантовании калибровочной теории на конечной пространственно-временной решетке, вильсоновский подход имеет то преимущество, что можно делать вычисления, сохраняя явную калибровочную инвариантность (объем калибровочной группы равен объему группы глобальной симметрии, умноженному на число граней решетки), однако недостатком является отсутствие явной инвариантности относительно преобразований вращения или Лоренца. В любом случае, какой бы подход не использовался для устранения степеней свободы при высоких энергиях, сохраняется значительная часть формализма ренормгруппы.

18.1. Откуда берутся большие логарифмы?

Посмотрим сначала, как могут возникнуть большие логарифмы при очень больших энергиях.

Рассмотрим физическую амплитуду, сечение или любой другой вероятностный параметр $\Gamma(E, x, g, m)$, зависящей от общего масштаба энергий E , от различных углов и отношений энергий, коллективно обозначенных x , от различных безразмерных констант связи, коллективно обозначенных g , и различных масс, коллективно обозначенных m . Если Γ имеет размерность [масса] ^{D} (например, для сечения $D = -2$), то на основании простого размерного анализа имеем:

$$\Gamma(E, x, g, m) = E^D \Gamma\left(1, x, g, \frac{m}{E}\right). \quad (18.1.1)$$

Можно ожидать, что в пределе $E \rightarrow \infty$ такая амплитуда будет вести себя как простая степень:

$$\Gamma(E, x, g, m) \rightarrow E^D \Gamma(1, x, g, 0).$$

Но оказывается, что это не так. При расчетах по теории возмущений обнаруживается, что множитель E^D сопровождается степенями $\ln(E/m)$, искажающими простое степенное поведение.

Ясно, что степени $\ln(E/m)$ могут возникнуть при $E \rightarrow \infty$ и фиксированном m , только если амплитуда G при *фиксированной энергии* E становится сингулярной при $m \rightarrow 0$. Существуют два класса подобных массовых сингулярностей, одна из которых легко устраняется путем вычисления амплитуды или вероятности правильного типа, а другая требует изменения процедуры перенормировки.

Сингулярности при нулевой массе первого типа возникают в результате слияния полюсов пропагаторов на массовых оболочках соответствующих частиц. Например, предположим, что фейнмановская диаграмма содержит входящую линию с полным 4-импульсом p^μ , прикрепленную в вершине к внутренним линиям частиц с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. Согласно выводам гл. 10, соответствующая диаграмма будет иметь разрез, идущий вдоль отрицательной действительной оси p^2 от точки $p^2 = -(m_1 + \dots + m_n)^2$ до $-\infty$. Это не приводит к сингулярностям, если внешняя линия соответствует стабильной частице массой $M < m_1 + \dots + m_n$, так как точка $p^2 = -M^2$ находится вне разреза. Однако, когда все $M, m_1, \dots, m_n$ стремятся к нулю, значение $-p^2$ на массовой оболочке и точка ветвления на конце разреза сближаются, сливаясь при $p^2 = 0$ и приводя к возникновению сингулярности.

Отсюда следует, что можно избежать инфракрасных расходимостей при $m = 0$, просто оставаясь вне массовой оболочки, например, устремляя p^2 для всех внешних линий к $+\infty$ вместе со всеми энергетическими переменными. После этого можно использовать дисперсионные соотношения или какую-то другую технику аналитического продолжения, и использовать результаты поведения фейнмановских амплитуд в таком пределе для того, чтобы что-то узнать об элементах S -матрицы. Часто такое продолжение оказывается ненужным, так как нас интересуют не элементы S -матрицы на массовой оболочке, а матричные элементы токов, несущие импульсы q , не связанные с какими-то массами. Например, функция поляризации вакуума $\pi(q^2)$, определенная в разделе 10.5, свободна от сингулярностей при нулевых массах первого типа везде, кроме области $q^2 < 0$.

Другой подход к устранению массовых сингулярностей первого типа связан с наблюдением, что обычно сингулярности при

нулевой массе возникают при попытках вычислить сечение, которое не измеримо в пределе $m \rightarrow 0$. Например, в квантовой электродинамике сечение любого процесса, включающего определенное количество электронов и фотонов, становится инфракрасно расходящимся в пределе $m_e \rightarrow 0$, даже если мы просуммируем по неограниченному числу мягких фотонов, поскольку в таком пределе невозможно отличить электрон от струи электронов, позитронов и фотонов с полным зарядом $-e$, все частицы в которой летят в том же направлении и с той же скоростью. Как показано в гл. 13, подобные инфракрасные расходимости можно излечить, рассматривая только подходящим образом проинтегрированные сечения, которые *будут измеримыми* при $m_e \rightarrow \infty$. Так, вместо того, чтобы пытаться вычислить сечение конкретного процесса комптоновского рассеяния, следует вычислять сечение рассеяния струи с полным зарядом $-e$ на другой струе с нулевым полным зарядом с образованием двух других таких струй и мягких фотонов. Подобные инклюзивные вероятности или сечения, остающиеся конечными при обращении в нуль всех масс, называются «инфракрасно безопасными».

На этом наши проблемы не кончаются. Даже если удастся избежать инфракрасных расходимостей, проинтегрировав сечения или оставаясь вне массовой оболочки, результирующие проинтегрированные сечения или амплитуды вне массовой оболочки содержат при энергиях E массовые сингулярности второго типа, приводящие к множителям $\ln(E/m)$, нарушающим вытекающее из размерного анализа наивное степенное поведение. Причина коренится в том, что перенормированные константы связи по соглашению определяются через амплитуды, которые инфракрасно расходятся в пределе всех нулевых масс.

Рассмотрим, например, теорию действительного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{24} g \phi^4. \quad (18.1.2)$$

В однопетлевом приближении инвариантная амплитуда упругого рассеяния для процесса рассеяния скалярных частиц с начальными импульсами p_1, p_2 и конечными импульсами p'_1, p'_2 дается выражением (12.2.24):

$$A = g - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)} \right) - 3 \right\} + O(g^3), \quad (18.1.3)$$

где s, t, u — мандельштамовские переменные

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 - p_1')^2, \quad u = -(p_1 - p_2')^2,$$

а Λ — ультрафиолетовое обрезание. До тех пор, пока s, t, u удерживаются вне положительной действительной оси и, в частности, когда все они устремляются к $-\infty$ (что нарушает условие нахождения на массовой поверхности $s + t + u = 4m^2$), амплитуда не содержит сингулярностей при нулевой массе. Конечно, амплитуда зависит от обрезания Λ и от m , так что даже если сингулярности при нулевой массе отсутствуют, мы не получим результат $A \rightarrow \text{const}$, который получился бы из наивных размерных соображений в пределе $s, t, u \rightarrow -\infty$. Зависимость от обрезания можно упрятать в перенормировку. Мы заменяем голую константу g на перенормированную константу g_R , определенную как значение A в какой-то удобной точке перенормировки. Например, можно взять

$$g_R \equiv A(s = t = u = 0) = g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right) + O(g^3). \quad (18.1.4)$$

Тогда (18.1.3) принимает вид

$$A = g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(1 - \frac{sx(1-x)}{m^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{tx(1-x)}{m^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{ux(1-x)}{m^2} \right) \right\} + O(g_R^3), \quad (18.1.5)$$

(Во втором слагаемом можно свободно заменить g^2 на g_R^2 , так как разность всего лишь порядка g^3). Это выражение свободно от ультрафиолетовых расхождений, но имеет сингулярность при $m = 0$, даже, если все s, t, u удерживаются отрицательными. Следовательно, при $s, t, u \rightarrow -\infty$ мы снова приходим к асимптотическому поведению, противоречащему ожиданиям, основанным на наивном подсчете степеней:

$$A \rightarrow g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{-t}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{-u}{m^2}\right) - 6 \right\} \quad (18.1.6)$$

(Практически то же самое происходит и при любом другом «естественном» определении перенормированной константы. Например, можно определить g_R при значении A в симметричной точке на массовой оболочке $s = t = u = 4m^2/3$, что приведет к такому же асимптотическому поведению, что и (18.1.6), с той разницей, что постоянная -6 заменится на другую числовую постоянную.) Ясно, что сингулярность при нулевой массе, с которой мы сталкиваемся при выражении A через g_R , полностью возникает от слагаемого $\ln m^2$ в выражении (18.1.4) для перенормированной константы g_R через голую константу связи g .

В дополнение к рассмотренным существуют другие сингулярности при нулевой массе, возникающие при вычислении матричных элементов операторов (например, фейнмановских амплитуд вне массовой поверхности), а не интегралов от сечений. Такие сингулярности возникают из-за необходимости перенормировать не только константы связи, но и эти операторы. Например, предположим, что в скалярной теории поля с лагранжианом (18.1.2) мы хотим вычислить матричный элемент $\langle \beta | \phi(p) | \alpha \rangle$ оператора

$$\phi(p) \equiv \int d^4x e^{-ip \cdot x} \phi^2(x). \quad (18.1.7)$$

На языке фейнмановских диаграмм это соответствует включению вершины, в которой сходятся две внутренние линии ϕ и через которую протекает полный 4-импульс p в диаграммы перехода $\alpha \rightarrow \beta$ (см. рис. 18.1). Ультрафиолетовые расхождения возникают от класса диаграмм, в которых эта новая вершина является частью поддиаграммы, связанной с остальной частью диаграммы ровно двумя ϕ -линиями (рис. 18.2). Из размерного ана-

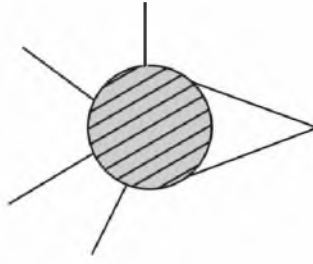


Рис. 18-1. Фейнмановские диаграммы в импульсном представлении для матричного элемента оператора $\int d^4x \exp(-ip \cdot x) \phi^2(x)$ в теории элементарного скалярного поля $\phi(x)$. Заштрихованный диск представляет сумму диаграмм с указанными внешними линиями. Помимо пары внешних линий, входящих в вершину ϕ^2 другие внешние линии, прикрепленные к диску, представляют те частицы в начальном или конечном состоянии, для перехода между которыми вычисляется матричный элемент

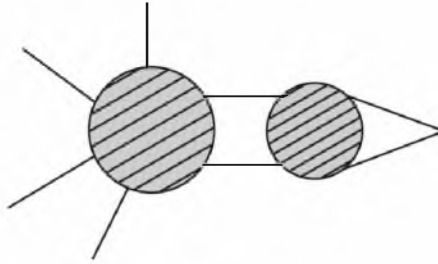


Рис. 18-2. Класс фейнмановских диаграмм для матричного элемента оператора $\int d^4x \exp(-ip \cdot x) \phi^2(x)$, в котором возникает ультрафиолетовая расходимость. Обозначения те же, что на рис. 18-1

лиза следует, что если поддиаграмма связана с остальной частью диаграммы более чем двумя линиями ϕ , она будет сходиться, так как взаимодействие ϕ^2 имеет размерность $+2$, и поэтому поддиаграмма, в которой эта вершина связана с остальной частью $n > 2$ линиями, имеет размерность $4 - 2 - n < 0$. Расходящаяся часть поддиаграммы есть просто логарифмически расходящаяся константа, поэтому матричные элементы ϕ^2 могут быть сделаны конечными* умножением ϕ^2 на подходящую расходящуюся кон-

* В этом рассуждении предполагалось, что любые расходимости, возникающие из поддиаграмм, содержащих вершину ϕ^2 , прикрепленную к остальной части поддиаграммы ровно двумя линиями ϕ , устранены аналогичным образом.



Рис. 18-3. Расходящаяся часть диаграммы рис. 18-2 в однопетлевом приближении

станту Z_{Φ^2} . В порядке g^2 соответствующая поддиаграмма определяется диаграммами рис. 18.3 и вносит в матричный элемент $\mathcal{O}(p)$ расходящийся множитель

$$F(p) = 1 + \frac{1}{2} \left[-i(2\pi)^4 g \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right]^2 \int \frac{d^4 k}{[k^2 + m^2 - i\epsilon][(p-k)^2 + m^2 - i\epsilon]}. \quad (18.1.8)$$

Комбинируя знаменатели, поворачивая контур интегрирования по k^0 и совершая ультрафиолетовое обрезание Λ , находим при $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$F(p) = 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + p^2 x(1-x)} \right) - 1 \right] + O(g^2). \quad (18.1.9)$$

Здесь нет сингулярности при нулевой массе (до тех пор, пока p^2 удерживается положительным), но, конечно, есть зависимость от обрезания. Такая логарифмическая расходящность устраняется определением перенормированного оператора Φ^2 :

$$(\Phi^2)_R = N^{(\Phi^2)} \Phi^2 \quad (18.1.10)$$

где $N^{(\Phi^2)}$ выбрано так, что $N^{(\Phi^2)} F(p)$ имеет определенное конечное значение в некоторой заданной точке перенормировки. Например, можно определить перенормированный оператор Φ^2 так, что

$$N^{(\Phi^2)} F(0) = 1, \quad (18.1.11)$$

В этом случае

$$N^{(\Phi^2)} = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right) + O(g^2). \quad (18.1.12)$$

Тогда матричные элементы перенормированного оператора $(\Phi^2)_R$ содержат множитель

$$F_R(p) \equiv N^{(\Phi^2)} F(p) = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(1 + \frac{p^2 x(1-x)}{m^2} \right) + O(g^2). \quad (18.1.13)$$

Он конечен при всех $p^2 > 0$ и $m^2 > 0$, но содержит теперь инфракрасную сингулярность при $m \rightarrow 0$, соответствующую большим логарифмам в асимптотическом поведении при $p^2 \rightarrow +\infty$. Конечно, чтобы устранить обрезание в вычислениях в высших порядках, нужно было бы вводить перенормированную константу связи и перенормированный оператор Φ^2 , так что логарифмы возникли от обоих источников.

Аналогичные перенормировочные множители нужны не только для $\Phi^2(x)$, но для операторов любого типа. В частности, взятие матричного элемента одного из элементарных полей Ψ теории приводит к ультрафиолетовым расходимостям, возникающим от радиационных поправок к соответствующему пропагатору. Как мы видели в гл. 12, эти бесконечности могут быть сокращены, если перейти к перенормированному полю Ψ_R :

$$\Psi_R = N^{(\Psi)} \Psi, \quad (18.1.14)$$

где $N^{(\Psi)}$ выбрано так, чтобы матричный элемент между одночастичным состоянием и вакуумом имел тот же вид, что и принятым образом нормированное поле в отсутствии взаимодействия. Связь с обычной константой перенормировки Z перенормированной теории дается выражением

$$Z^{(\Psi)} = |N^{(\Psi)}|^{-2}. \quad (18.1.15)$$

Например, вспомним полученные ранее результаты для перенормировки фотонного поля в спинорной квантовой электроди-

намике.* В этом случае перенормированное электромагнитное поле A_R^μ принято записывать через «голое» поле A_B^μ в виде:

$$A_R^\mu = Z_3^{-1/2} A_B^\mu,$$

где Z_3 определяется формулой (11.2.21):

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + O(e^4). \quad (18.1.16)$$

Здесь имеется сингулярность при нулевой массе, которая будет оказывать влияние на асимптотическое поведение матричных элементов перенормированного фотонного поля. В частности, выражение (11.2.22) дает собственнo-энергетическую функцию перенормированного электромагнитного поля:

$$\pi(q^2) = \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left[1 + \frac{q^2 x(1-x)}{m^2}\right] + O(e_R^4). \quad (18.1.17)$$

Она имеет особенность при $m = 0$ и, следовательно, большие логарифмы в асимптотике при $q^2 \rightarrow +\infty$:

$$\pi_R(q^2) \rightarrow \frac{e^2}{2\pi^2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{q^2}{m^2} - \frac{5}{18} \right] + O(e^4). \quad (18.1.18)$$

Особым свойством электродинамики является то, что множитель Z_3 , возникающий в перенормировке электромагнитного поля, возникает и в перенормировке электрического заряда:

$$e_R = Z_3^{1/2} e_{\text{голый}}, \quad (18.1.19)$$

но в общем случае это не так. Впервые техника ренормгруппы была применена в квантовой электродинамике, но рассматривае-

* В использованной выше в качестве примера скалярной теории поля с взаимодействием ϕ^4 слагаемые низшего порядка в $N^{(\phi)}$ возникают от двухпетлевых диаграмм, поэтому для иллюстрации вычисления множителей N использовать эту теорию неудобно.

мая здесь скалярная теория поля дает более типичную иллюстрацию этих методов с отдельной перенормировкой полей и констант связи.

18.2. Скользящий масштаб

В предыдущем разделе было показано, что происхождение больших логарифмов, возникающих при высоких энергиях в должным образом проинтегрированных сечениях или фейнмановских амплитудах вне массовой поверхности, можно проследить вплоть до рецепта, используемого для перенормировки констант связи и операторов. Центральной идеей метода ренормализационной группы является изменение этого рецепта.

Предположим, мы нашли какой-то способ определения нового типа перенормированной константы связи $g(\mu)$, зависящей от скользящего энергетического масштаба μ , но (по крайней мере, при $\mu \gg m$) не зависящей от масштаба m всех масс в теории. Тогда подходящим образом проинтегрированные сечения или другие инфракрасно безопасные вероятностные параметры можно выразить не через g_R , а через g_μ и μ . На основании анализа размерностей можно записать такие функции как

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\right). \quad (18.2.1)$$

(Наши обозначения совпадают с обозначениями в разделе 18.1. В частности, x означает совокупность безразмерных углов, отношений энергий и т. п., от которых может зависеть Γ .) Так как μ — совершенно произвольный перенормировочный масштаб, можно выбрать $\mu = E$, и в этом случае (18.2.1) примет вид

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, 1\right). \quad (18.2.2)$$

Теперь это выражение не содержит сингулярностей при нулевой массе, так как при $m \ll E$ константа g_E не зависит от m . Таким образом, больших логарифмов не возникает, и можно использовать теорию возмущений для вычисления Γ через g_E до тех пор, пока сама константа g_E остается достаточно малой. В частности, в лю-

бом конечном порядке теории возмущений Γ имеет при $E \gg m$ асимптотическое поведение

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) \rightarrow E^D \Gamma(1, x, g_E, 0, 1). \quad (18.2.3)$$

(Непертурбативные поправки рассматриваются в разделе 18.4.)

Остается вычислить g_E . Например, в скалярной теории поля с лагранжианом (18.1.2) можно определить g_μ через значение амплитуды рассеяния в точке перенормировки $s = t = u = -\mu^2$:

$$\begin{aligned} g_\mu &\equiv A(s = t = u = -\mu^2) \\ &= g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \right) - 1 \right] + O(g^3) \end{aligned} \quad (18.2.4)$$

или через обычную перенормированную константу связи (18.1.4):

$$g_\mu = g_R + \frac{3g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2} \right) + O(g_R^3). \quad (18.2.5)$$

Однако эта формула применима только в том случае, когда поправочное слагаемое меньше g_R , иначе говоря, только если $|g_R \ln(\mu/m)| \ll 1$. Если бы при $\mu \simeq E$ дело обстояло именно так, нам не были бы нужны методы ренормгруппы, и вполне хватало бы обычной теории возмущений.

Вместо того, чтобы непосредственно использовать при больших μ формулы типа (18.2.5), мы должны действовать поэтапно. Сначала нужно вычислить g_μ через g_R , пока отношение μ/m не слишком превышает единицу, затем $g_{\mu'}$ можно вычислить через g_μ , пока отношение μ'/μ не слишком превышает единицу, и так далее вплоть до g_E . Вместо того, чтобы делать это дискретными шагами, можно перейти к непрерывному описанию. На основании размерного анализа соотношение между $g_{\mu'}$ и g_μ принимает вид

$$g_{\mu'} = G(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu). \quad (18.2.6)$$

Дифференцируя по μ' и полагая $\mu' = \mu$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right), \quad (18.2.7)$$

где

$$\beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial z} G(g_\mu, z, m/\mu) \right]_{z=1}. \quad (18.2.8)$$

Здесь нет сингулярностей при нулевой массе, так что при $\mu \gg m$ дифференциальное уравнение приобретает простой вид

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta(g_\mu, 0) \equiv \beta(g_\mu), \quad (18.2.9)$$

Это уравнение часто называют *уравнением Каллана–Симанчика*¹. Мы должны вычислить g_E , интегрируя дифференциальное уравнение (18.2.9) с начальным значением g_M при некотором масштабе $\mu = M$, который на практике выбирается достаточно большим, так что при $\mu \geq M$ можно пренебречь массами m по сравнению с μ , и в то же время достаточно малым, чтобы большие логарифмы $\ln(M/m)$ не помешали использовать теорию возмущений для вычисления g_M через обычную перенормированную константу связи g_R . Решение можно формально записать в виде

$$\ln(E/M) = \int_{g_M}^{g_E} \frac{dg}{\beta(g)} \quad (18.2.10)$$

до тех пор, пока $\beta(g)$ не обращается в нуль на интервале между g_M и g_E .

Результаты предыдущего раздела не основаны на теории возмущений, однако обычно без нее невозможно обойтись при вычислении функций Γ и β . В качестве примера предположим, что мы вычисляем $g_{\mu'}$ в скалярной теории поля с взаимодействием $g\Phi^4/24$, совершая перенормировку путем выражения g не через g_R , а через g_μ . Повторяя вычисления, приведшие к (18.2.5), получаем

$$g_{\mu'} = g_\mu - \frac{3g_\mu^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln\left(\frac{m^2 + \mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu'^2 x(1-x)}\right) + O(g_\mu^3).$$

Тогда из формулы (18.2.8) имеем

$$\beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) = +\frac{3g_\mu^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + O(g_\mu^3). \quad (18.2.11)$$

При $\mu \gg m$

$$\beta(g_\mu) = \frac{3g_\mu^2}{16\pi^2} + O(g_\mu^3). \quad (18.2.12)$$

В следующем порядке при $\mu \gg m$ бета-функция равна³

$$\beta(g_\mu) = g_\mu \left[3 \left(\frac{g_\mu^2}{16\pi^2} \right) - \frac{17}{3} \left(\frac{g_\mu^2}{16\pi^2} \right)^2 + \dots \right].$$

Если нам достаточно только однопетлевое приближение, вычисление $\beta(g)$ можно выполнить еще проще. Чтобы избежать больших радиационных поправок в матричных элементах при энергиях порядка m , следует записать голую константу g через конечную перенормированную константу g_μ в виде

$$g = g_\mu + B(g_\mu) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \dots. \quad (18.2.13)$$

Например, из формулы (18.1.3) можно немедленно увидеть, что коэффициент в g при слагаемых с $\ln \Lambda$ равен

$$B(g) = -\frac{3}{2} [-i(2\pi)^4 g^2] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right]^2 2\pi^2 i = \frac{3g^2}{16\pi^2}. \quad (18.2.14)$$

Неперенормированная константа, конечно, не зависит от μ , так что в низшем порядке

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu - B(g_\mu) = 0$$

и в этом же порядке

$$\beta(g) = B(g). \quad (18.2.15)$$

При $B(g)$ из (18.2.14) это согласуется с нашим предыдущим результатом (18.2.12) для $\beta(g)$ в скалярной теории ϕ^4 .

Вместо того, чтобы использовать простое ультрафиолетовое обрезание, которое может вступать в противоречие с калибровочной инвариантностью, часто удобнее иметь дело с ультрафиолетовыми расходимостями в методе размерной регуляризации. При размерности пространства-времени $d < 4$ мы получаем вместо $\ln(\Lambda/\mu)$ сходящийся интеграл

$$\int_{\mu}^{\infty} k^{d-4} \frac{dk}{k} = \frac{\mu^{d-4}}{4-d} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \left[\frac{1}{4-d} - \ln \mu \right].$$

Вместо устранения зависимости от обрезания путем переписывания неперенормированной константы как в формуле (18.2.13), пишем:

$$g = g_{\mu} + B(g_{\mu}) \left[\frac{1}{4-d} - \ln \mu \right]$$

с той же функцией $B(g_{\mu})$, как и ранее. Таким образом, для того, чтобы вычислить $\beta(g_{\mu})$, нам следует всего лишь извлечь коэффициент при сингулярном множителе $1/(4-d)$ в перенормированной константе. Это рассуждение распространяется в разделе 18.6 на все порядки теории возмущений.

До тех пор, пока в скалярной теории поля с лагранжианом (18.1.2) g_{μ} достаточно мала, решения уравнений (18.2.9) и (18.2.12) можно хорошо аппроксимировать выражением

$$g_{\mu} = -\frac{16\pi}{3 \ln(\mu/M)}, \quad (18.2.17)$$

где M — постоянная интегрирования. Это выражение иллюстрирует общее свойство вычислений методом ренормгруппы, заключающееся в том, что безразмерные константы связи типа g_R заменяются параметрами типа M , имеющими размерность массы. Значение M можно связать с g_R , сравнив решение (18.2.17) с поведением константы связи при значениях m , которые достаточно велики, чтобы

использовать приближение, основанное на неравенстве $\mu \gg m$, но в то же время достаточно малы, чтобы $|g_R \ln(\mu/m)| \ll 1$, когда из (18.2.5) получаем

$$g_\mu \simeq g_R + \frac{3g_R^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{m}\right). \quad (18.2.18)$$

Таким способом находим

$$M \simeq m \exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_R}\right), \quad (18.2.19)$$

так что формулу (18.2.17) можно записать в более удобном виде

$$g_\mu = g_R \left[1 - \frac{3g_R}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{m} \right]^{-1}. \quad (18.2.20)$$

Повторимся, что это выражение справедливо при малых g_μ , даже если $|g_R \ln(\mu/m)|$ порядка единицы, так что оно представляет существенное улучшение результата теории возмущений (18.2.18). Конечно, условие малости g_μ нарушится, когда $g_R \ln(\mu/m)$ окажется достаточно близко к критическому значению $16\pi^2/3$. Но из (18.2.20) следует, по крайней мере, недвусмысленное предсказание, что константа g_E становится достаточно большой, чтобы нарушить применимость теории возмущений при некоторой энергии E ниже критического значения (18.2.19).

Если вместо проинтегрированных сечений вычисляются матричные элементы операторов вне массовой поверхности, следует принимать во внимание множители N , возникающие в определении перенормированных операторов с конечными матричными элементами. В предыдущем разделе мы видели, что если определить N -множители обычным образом (скажем, так, чтобы поправочные слагаемые, возникающие от расходящихся поддиаграмм, сокращались, если оператор несет нулевой 4-импульс или поле находится на массовой поверхности), то формула для этих множителей содержит сингулярности при нулевой массе, как в (18.1.12) или (18.1.16), что приводит к большим логарифмам при энергиях $E \gg m$. Способ лечения состоит в том, чтобы определить константы перенормировки $N_\mu^{(d)}$ при скользящем масштабе μ , так, чтобы поправочный множитель в матричных элементах перенормированного оператора

$$\mathcal{O}_\mu = N_\mu^{(\mathcal{O})} \mathcal{O}, \quad (18.2.21)$$

возникающий за счет расходящихся поддиаграмм, содержащих оператор $\mathcal{O}$, сокращался в точке перенормировки, характеризующейся 4-импульсами порядка μ . Если M_R — матричный элемент обычным образом перенормированных операторов, а M — матричный элемент, в котором операторы перенормированы так, как в (18.2.21), тогда для любого μ

$$M_R = \left[\prod_{\mathcal{O}} \left(\frac{N^{(\mathcal{O})}}{N_\mu^{(\mathcal{O})}} \right) \right] M(E, x, g_\mu, m, \mu). \quad (18.2.22)$$

Считая, что M имеет размерность D , можно опять воспользоваться размерным анализом и, положив $\mu = E$, записать это выражение в виде

$$M_R = E^D \left[\prod_{\mathcal{O}} \left(\frac{N^{(\mathcal{O})}}{N_E^{(\mathcal{O})}} \right) \right] M(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1). \quad (18.2.23)$$

Таким образом, чтобы установить поведение амплитуды вне массовой поверхности M_R при больших энергиях, следует знать, как изменяется N_μ при изменении масштаба перенормировки μ .

Для двух заданных масштабов μ и μ' матричные элементы перенормированных операторов $N_\mu^{(\mathcal{O})}$ и $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}$ конечны, так что отношение $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}/N_\mu^{(\mathcal{O})}$ не должно зависеть от обрезания. На основании размерных соображений это отношение должно иметь вид

$$\frac{N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}}{N_\mu^{(\mathcal{O})}} = G^{(\mathcal{O})}(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu). \quad (18.2.24)$$

Дифференцируя по μ' и полагая $\mu' = \mu$, получаем

$$\mu \frac{d}{d\mu} N_\mu^{(\mathcal{O})} = \gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu) N_\mu^{(\mathcal{O})}, \quad (18.2.25)$$

где

$$\gamma^{(\ell)}(g_\mu, m/\mu) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial z} G^{(\ell)}(g_\mu, z, m/\mu) \right]_{z=1}. \quad (18.2.26)$$

Решение уравнения имеет вид

$$N_E^{(\ell)} \propto \exp \left[\int^E \gamma^{(\ell)} \left(g_\mu, \frac{m}{\mu} \right) \frac{d\mu}{\mu} \right]. \quad (18.2.27)$$

Этот результат полезен, т. к. введение скользящей шкалы предотвращает появление сингулярностей при нулевой массе у величин $N_\mu^{(\ell)}$ и $N_{\mu'}^{(\ell)}$, а следовательно, у $G^{(\ell)}$ и $\gamma^{(\ell)}$. Отсюда, пока константа g_μ мала, не возникает больших логарифмов, препятствующих использованию теории возмущений для вычисления $\gamma^{(\ell)}$. Кроме того, при $\mu \gg m$ величина $\gamma^{(\ell)}(g_\mu, m/\mu)$ имеет гладкий предел

$$\gamma^{(\ell)}(g_\mu) \equiv \gamma^{(\ell)}(g_\mu, 0). \quad (18.2.28)$$

В качестве примера рассмотрим оператор $\ell = \phi^2$ в скалярной теории поля с взаимодействием $g\phi^4/24$. Вместо того, чтобы перенормировать его условием, что поправочный множитель (18.1.9) сокращается при $p^2 = 0$, потребуем его сокращения при скользящем масштабе $p^2 = m^2$, введя новый перенормированный ϕ^2 -оператор $N_\mu^{(\phi^2)}\phi^2$, где

$$\begin{aligned} N_\mu^{(\phi^2)} &\equiv F^{(\phi^2)}(\mu^2)^{-1} \\ &= 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \right) - 1 \right] + O(g^2). \end{aligned}$$

Тогда функция (18.2.24) для этого оператора равна

$$\begin{aligned} G^{(\phi^2)} \left(g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu} \right) &\equiv \frac{N_{\mu'}^{(\phi^2)}}{N_\mu^{(\phi^2)}} \\ &= 1 + \frac{g_\mu}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{m^2 + \mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu'^2 x(1-x)} \right) - 1 \right] + O(g_\mu^2). \end{aligned}$$

(Здесь можно использовать g_μ вместо g или $g_{\mu'}$, так как различие этих констант влияет только на слагаемые порядка g_μ^2 или выше.) Тогда из (18.2.26) имеем

$$\gamma^{(\Phi^2)}\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) = -\frac{g_\mu}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} dx + O(g_\mu^2)$$

или при $\mu \gg m$

$$\gamma^{(\Phi^2)}(g_\mu) = -\frac{g_\mu}{16\pi^2} + O(g_\mu^2). \quad (18.2.29)$$

Другой хороший пример — множитель N , связанный с перенормировкой электромагнитного поля в квантовой электродинамике. Напомним, что фотонный пропагатор может быть сделан конечным для всех импульсов, если вычислять его для перенормированных электромагнитных полей, или, эквивалентно, умножив пропагатор перенормированных полей на Z_3^{-1} :

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = Z_3^{-1} \Delta_{\rho\sigma}(q). \quad (18.2.30)$$

Из формулы (10.5.17) следует, что этот перенормированный пропагатор можно записать как

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = \frac{\eta_{\rho\sigma}}{[q^2 - i\epsilon][1 - \pi(q^2)]} + \text{слагаемые с } q_\rho q_\sigma. \quad (18.2.31)$$

Предположим, что вместо этого мы определим перенормированное поле $N_\mu^{(A)} A^\rho$, пропагатор которого содержит слагаемое, пропорциональное $\eta_{\rho\sigma}/[q^2 - i\epsilon]$, с коэффициентом, равным единице при сколь угодно малом масштабе перенормировки $q^2 = \mu^2$. Ясно, что для этого нужно взять

$$N_\mu^{(A)} = Z_3^{-1/2} [1 - \pi(\mu^2)]^{1/2}. \quad (18.2.32)$$

Используя (11.2.22), находим, что функция (18.2.24) равна

$$G^{(A)}(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu) = \left[\frac{1 - \pi(\mu'^2)}{1 - \pi(\mu^2)} \right] = \quad (18.2.33)$$

$$= 1 - \frac{e_\mu^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[\frac{m^2 + \mu'^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \right] + O(e_\mu^4)$$

так что из (18.2.26) получаем

$$\gamma^{(A)}(e_\mu, m/\mu) = -\frac{e_\mu^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2 \mu^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + O(e_\mu^4). \quad (18.2.34)$$

Как и было обещано, это выражение имеет гладкий предел при $\mu \gg m$:

$$\gamma^{(A)}(e_\mu) \equiv \gamma^{(A)}(e_\mu, 0) = -\frac{e_\mu^2}{12\pi^2} + O(e_\mu^4). \quad (18.2.35)$$

Уже отмечалось, что электродинамика представляет особый случай, т. к. константа перенормировки $Z_3^{-1/2}$ в определении перенормированного электромагнитного поля в точности равна обратной величине константы, используемой для определения перенормированного электрического заряда электрона: $e_R = Z_3^{1/2}e$. Поэтому естественное определение перенормированного электрического заряда имеет вид

$$e_\mu = N_\mu^{(A)-1} e = Z_3^{-1/2} N_\mu^{(A)-1} e_R, \quad (18.2.36)$$

так что произведение e_μ на перенормированное при шкале μ поле $N_\mu^{(A)} A^\rho$ не зависит от μ . Из (18.2.25) следует, что функция $\beta(e)$, определяющая согласно (18.2.9) зависимость e_μ от μ , имеет при $\mu \gg m$ значение

$$\beta(e) = -e\gamma^{(A)}(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + O(e^5). \quad (18.2.37)$$

Используя выполненные ранее вычисления^{3а} слагаемого четвертого порядка для функции поляризации вакуума $\pi(q^2)$, Гелл-Манн и Лоу сумели также получить слагаемое следующего порядка по e в $\beta(e)$:

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7). \quad (18.2.38)$$

Иными словами, электрический заряд при скользящем масштабе μ удовлетворяет уравнению ренормализационной группы

$$\mu \frac{d}{d\mu} e_\mu = \frac{e_\mu^3}{12\pi^2} + \frac{e_\mu^5}{64\pi^2} + O(e_\mu^7). \quad (18.2.39)$$

При малых e_μ отсюда следует, что e_μ *возрастает* с ростом μ .

Требуется также начальное условие. Оно задается известным значением перенормированного заряда $e_R = Z_3^{1/2}e$, для которого $\alpha \equiv e_R^2/4\pi = 1/137,036\dots$. Из формул (18.2.32) и (18.2.36) имеем

$$\begin{aligned} \frac{e_R}{e_\mu} &= Z_3^{1/2} N_\mu^{(A)} = \sqrt{1 - \pi(\mu^2)} \\ &= 1 - \frac{e_R^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m_e^2} \right] + O(e_R^4). \end{aligned} \quad (18.2.40)$$

Этот результат нужно согласовать с решением уравнения (18.2.39) при таком значении μ , которое достаточно велико, чтобы не нарушалось приближение $\mu \gg m_e$ в (18.2.39), но в то же время достаточно мало, чтобы логарифм в (18.2.40) оставался все еще малым по сравнению с $4\pi^2/e_R^2$ и тем самым подтверждалась правомочность использования теории возмущений. (Например, можно взять μ порядка 100 МэВ.) Для таких значений μ из формулы (18.2.40) следует:

$$e_\mu \simeq e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2} \left[\ln \frac{\mu}{m_e} - \frac{5}{6} \right]. \quad (18.2.41)$$

С другой стороны, решение уравнения (18.2.39) для малых e_μ имеет вид (удерживаем только старшее слагаемое справа):

$$e_\mu = \left[\text{constant} - \frac{\ln \mu}{6\pi^2} \right]^{-1/2}. \quad (18.2.42)$$

Сравнивая (18.2.41) и (18.2.42), находим решение

$$e_\mu = e_R \left[1 - \frac{e_R^2}{6\pi^2} \left(\ln \left(\frac{\mu}{m_e} \right) - \frac{5}{6} \right) \right]^{-1/2}. \quad (18.2.43)$$

В противоположность (18.2.41) выражение (18.2.43) верно до тех пор, пока мала величина $e_\mu^2/6\pi^2$, независимо от того, мала или велика величина $(e_R^2/6\pi^2)\ln(\mu/m_e)$.

Например, мы уже видели в разделе 11.3, что главную поправку четвертого порядка к магнитному моменту мюона можно получить, умножив поправку второго порядка (швингеровскую поправку) (11.3.16) на функцию поляризации вакуума $\pi(k^2)$ при $k^2 \approx m_\mu^2$. Но согласно (18.2.40) это (в данном порядке) — то же самое, что использовать в швингеровской поправке вместо α величину $e_{m_\mu}^2/4\pi$.

Другой пример. В экспериментах на электрон-позитронных коллайдерах высоких энергий, таких как LEP в ЦЕРНе или SLC в Стан-фордском центре линейного ускорителя SLAC сейчас изучают физические процессы при энергиях порядка массы Z^0 частицы, т. е. 91 ГэВ. Из формулы (18.2.43) следует, что при этих энергиях радиационные поправки к чистой квантовой электродинамике следует вычислять, используя значение постоянной тонкой структуры, равное не $1/137,036$, а величине

$$\frac{e^2(91 \text{ ГэВ})}{4\pi} = \frac{\alpha}{1 - 2(11.25)\alpha/3\pi} = \frac{1}{134,6}. \quad (18.2.44)$$

Это верно для теории, в которой единственными заряженными частицами массой меньше m_Z являются электроны. В реальности таких сортов частиц много, так что эффективная постоянная тонкой структуры⁴ при m_Z равна $(128,87 \pm 0,12)^{-1}$.

* * *

Скользящая шкала, при которой вычисляются константы связи в теории, может быть не только значением импульса внешней линии, но и значением внешнего поля. В одной из ранних работ по приложениям методов ренормализационной группы Коулмен

и Ю. Вайнберг^{4а} рассмотрели эффективный потенциал $V(\phi)$ для независящего от координат пространства-времени внешнего скалярного поля ϕ . В простом случае, когда поле взаимодействует только с самим собой, в однопетлевом приближении полученный ими результат дается формулой (16.2.15). Особый интерес представляет рас-

смотрение этого потенциала в случае, когда перенормированная масса m_R обращается в нуль и мы должны в однопетлевом приближении положить в последнем слагаемом $\mu^2(\phi)$ равным $g_R\phi^2/2$, так что (16.2.15) теперь имеет вид (при слегка иначе определенной константе g):

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g}{24}\phi^4 + \frac{g^2\phi^4 \ln \phi^2}{256\pi^2}. \quad (18.2.45)$$

На первый взгляд кажется, что при $g > 0$ потенциал при очень малых ϕ становится меньше, чем λ_R , так что точка $\phi = 0$ является не локальным минимумом, а локальным максимумом. Однако при столь малых значениях ϕ третье слагаемое больше второго, и теория возмущений очевидно не вызывает доверия. Кроме того, нам хотелось бы показать, что g должна быть положительной, чтобы потенциал был ограничен снизу при больших полях, однако из (18.2.45) следует, что сколь бы малой ни была константа g , существует достаточно большое ϕ , при котором теория возмущений становится неприменимой, и, следовательно, выражению (18.2.45) нельзя доверять при выяснении вопроса об ограниченности потенциала снизу при больших полях.

Можно поступить значительно лучше, используя константу связи, определенную при скользящей шкале m для напряженности поля. Предположим, что константа g_μ определена условием

$$V(\mu) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24}\mu^4. \quad (18.2.46)$$

Если бы мы использовали g_μ с самого начала как параметр связи, тогда вместо (18.2.45) мы получили бы выражение

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24}\phi^4 + \frac{g_\mu^2\phi^4}{256\pi^2} \ln\left(\frac{\phi^2}{\mu^2}\right), \quad (18.2.47)$$

очевидно согласующееся с (18.2.46)*.

* Выражение (18.2.47) отличается от того, которое мы получили бы из (18.2.45), просто используя (18.2.46), чтобы выразить g через g_μ . Все отличие в том, что последнее слагаемое пропорционально не g^2 , а g_μ^2 . Разница — более высокого порядка по g , но она может стать существенной,

Уравнение ренормгруппы для g_μ можно получить из условия, что этот эффективный потенциал не зависит от μ *:

$$\mu \frac{dg_\mu}{d\mu} = \frac{3g_\mu^2}{16\pi^2}. \quad (18.2.48)$$

(Слагаемые, содержащие производную от g_μ^2 , здесь опущены, так как они — более высокого порядка по g_μ , и ими можно пренебрегать до тех пор, пока g_μ достаточно мала.) Не случайно, что полученное уравнение имеет тот же вид, что уравнение ренормализационной группы (18.2.9), (18.2.12), где μ — перенормировочный импульс, т. к. мы покажем в следующем разделе, что два первых слагаемых в уравнении ренормгруппы всегда не зависят от способа определения скользящей шкалы. Решение этого уравнения дается выражением (18.2.17), в общем случае, с другой константой интегрирования M . Отсюда, полагая $\mu = \Phi$ в (18.2.17), имеем

$$V(\Phi) = \lambda_R - \frac{32\pi^2\Phi^4}{3 \ln(\Phi^2/M^2)}, \quad (18.2.49)$$

$$g_\Phi = -\frac{32\pi^2}{3 \ln(\Phi^2/M^2)}. \quad (18.2.50)$$

если $V(\Phi)$ вычисляется при значениях Φ , сильно отличающихся от m , когда большие логарифмы могут компенсировать степени константы связи. Если с самого начала использовать в качестве параметра связи g_μ и взять μ порядка Φ , то подобных логарифмов не возникает, и приближение (18.2.47) справедливо до тех пор, пока g_μ остается малой.

* Чтобы устранить всю зависимость от обрезания, поле Φ нужно записать через перенормированное поле $\Phi_\mu = N_\mu^\Phi \Phi$, что порождает зависимость $V(\Phi_\mu)$ от μ , возникающую из зависимости от μ константы перенормировки N_μ^Φ . Здесь это игнорируется, так как в теории скалярного поля с взаимодействием $\propto \Phi^4$ диаграммы низшего порядка, дающие вклад в зависимость N_μ^Φ от μ , содержат две петли, и в том порядке, в котором мы делаем здесь вычисления, можно положить $N_\mu^\Phi = 1$.

Этот результат следует использовать с осторожностью, так как он справедлив только при малых значениях константы связи g_μ . Проблема не только в том, что (18.2.49) теряет применимость при ϕ , близким к M . Мы не можем также проинтегрировать уравнение ренормгруппы через сингулярность $\phi = M$, так что знание g_ϕ с одной стороны от этой сингулярности ничего не говорит нам о поведении g_ϕ с другой стороны.

Если оказалось, что g_ϕ имеет малое *положительное* значение при некотором ϕ_0 , тогда из (18.2.50) мы знаем, что $M > |\phi_0|$, так что g_ϕ остается малой величиной, и формула (18.2.49) верна при $|\phi| < |\phi_0|$. Это показывает, что точка $\phi = 0$ является локальным минимумом $V(\phi)$, в противоположность тому, что мы могли бы предположить на основании (18.2.45). Это означает, что вакуум, который инвариантен относительно преобразования симметрии $\phi \rightarrow -\phi$, в этой модели стабилен, если не принимать во внимание возможность квантово-механического просачивания сквозь барьер.

С другой стороны, мы не знаем, является ли выражение (18.2.49) справедливым для достаточно больших по сравнению с M значений $|\phi|$. Константа может оказаться слишком большой для того, чтобы использовать теорию возмущений для всех $|\phi| > M$, и даже если при некотором $|\phi| > M$ она становится малой, потенциал при таком ϕ может определяться выражением (18.2.49) с масштабом перенормировки $M' > \phi$, порождая вторую сингулярность. Таким образом, в этом случае мы не можем сделать вывод, что $V(\phi) \rightarrow \infty$ при $|\phi| \rightarrow \infty$.

Аналогично, если оказалось, что g_ϕ имеет малое *отрицательное* значение при некотором ϕ_0 , тогда мы знаем, что $M < |\phi_0|$, так что g_ϕ остается малой, и выражение (18.2.49) верно при $|\phi| > |\phi_0|$. В этом случае мы ничего не можем сказать о поведении потенциала при $|\phi| < M$, но можем использовать (18.2.49), чтобы увидеть, что $V(\phi) \rightarrow \infty$ при $|\phi| \rightarrow \infty$, исключая возможность существования любого стабильного вакуума. Так как здесь рассматривается предел $|\phi| \rightarrow \infty$, этот вывод верен также для скалярных полей с массой $m > 0$ при условии, что $m \ll |\phi_0|$. Именно поэтому необходимо предполагать, что константа взаимодействия ϕ^4 (перенормированная при любом масштабе, много большем массы скаляра) положительна.

18.3. Варианты асимптотического поведения

Методы ренормализационной группы позволяют глубже понять встречающиеся в квантовых теориях поля возможные типы асимптотического поведения даже в тех случаях, когда бегущая константа связи g_μ недостаточно мала, чтобы можно было применять теорию возмущений. Мы будем различать четыре возможных типа поведения g_μ при $\mu \rightarrow \infty$, соответствующих четырем разным формам функции $\beta(g)$ в теориях с единственной константой связи. В следующем разделе мы рассмотрим случай теорий с несколькими независимыми константами.

Напомним, прежде всего, результаты о виде $\beta(g)$, установленные в двух примерах, рассмотренных в предыдущем разделе. Одним из примеров была скалярная теория поля с взаимодействием $g\phi^4/24$, для которой при малых g бета-функция имеет вид

$$\beta(g) = \frac{3g^2}{16\pi^2} - \frac{18}{3} \frac{g^3}{(16\pi^2)^2} + O(g^4). \quad (18.3.1)$$

Другой пример — квантовая электродинамика. Вместо того, чтобы выписывать бета-функцию в виде (18.2.38), подчеркнем схожесть этой теории и скалярной теории поля, записав

$$g \equiv e^2, \quad (18.3.2)$$

где теперь $\beta(g_\mu)$ понимается как $\mu dg_\mu/d\mu$, так что при малых g

$$\begin{aligned} \beta(g) &= 2e \left[\frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7) \right] \\ &= \frac{g^2}{6\pi^2} + \frac{g^3}{32\pi^2} + O(g^4). \end{aligned} \quad (18.3.3)$$

Заметим, что в обоих случаях физически разрешенные константы связи уменьшаются в области $g \geq 0$, где $\beta(g) \geq 0$ при малых g . В электродинамике это происходит просто потому, что действительность лагранжиана требует, чтобы заряд e был действительным. Как мы видели в конце предыдущего раздела, в скалярной теории поля необходимо выполнение условия $g > 0$, для того,

чтобы существовало стабильное вакуумное состояние. Однако есть другие примеры, когда $\beta(g) \leq 0$ при $g \geq 0$. Например, можно рассмотреть скалярную теорию поля с гамильтонианом взаимодействия $-g\phi^4/24$ с положительной константой g . Такая теория может быть нефизической, но до тех пор, пока мы придерживаемся теории возмущений, нас не будут беспокоить проблемы стабильности. Из уравнения (18.2.9) следует, что если переопределить $g \rightarrow -g$, бета-функция изменяется следующим образом: $\beta(g) \rightarrow -\beta(-g)$, так что, пользуясь предыдущим результатом, что $\beta(g) = 3g^2/16\pi^2 + O(g^3)$ в случае взаимодействия $g\phi^4/24$, имеем в случае гамильтониана взаимодействия $-g\phi^4/24$:

$$\beta(g) = -3g^2/16\pi^2 + O(g^3). \quad (18.3.4)$$

Существенно большее отношение к физике имеют рассмотренные в разделе 18.7. неабелевы калибровочные теории с не слишком большим числом спинорных полей, в которых $\beta \leq 0$ при малых положительных калибровочных константах связи. Ниже мы всегда будем определять константу g так, что $g \geq 0$, но будем рассматривать случаи, когда $\beta(g)$ положительна или отрицательна при малых g . Обратимся к списку возможностей (рис. 18.4).

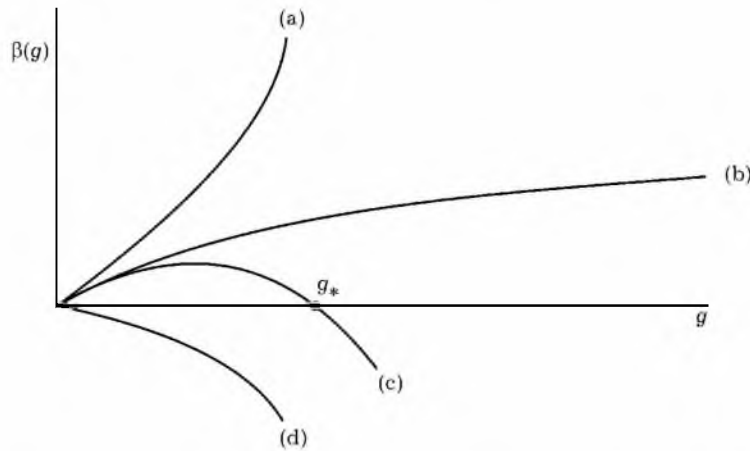


Рис. 18.4. Схематическое представление четырех возможных типов функции $\beta(g)$. Для таких $\beta(g)$ бегущая константа связи g_μ : а) стремится к бесконечности при конечном значении μ ; б) возрастает с ростом μ ; в) достигает конечного предела g_* при $\mu \rightarrow \infty$; г) стремится к нулю при $\mu \rightarrow \infty$

а. Сингулярность при конечной энергии

Предположим, что $\beta(g) > 0$ при малых положительных g (как в выражениях (18.3.1) и (18.3.3)) и что $\beta(g)$ остается положительной и продолжает достаточно быстро возрастать с ростом g , так что сходится интеграл

$$\int \frac{dg}{\beta(g)} < \infty. \quad (18.3.5)$$

Тогда g_μ будет непрерывно удаляться от $g_\mu = 0$, и из (18.2.10) видно, что g_E должна стать бесконечной при *конечном* значении E :

$$E_\infty = \mu \exp \left(\int_{g_\mu}^{\infty} \frac{dg}{\beta(g)} \right), \quad (18.3.6)$$

где μ — произвольная шкала перенормировки с $\mu \gg m$. В предыдущем разделе мы видели пример этого явления. Если принять, что формула низшего порядка $\beta(g) = 3g^2/6\pi^2$ для бета-функции в скалярной теории поля точна для всех значений g , тогда бегущая константа (18.2.17) становится бесконечной при энергии (18.2.19). Аналогично, если считать точной формулу низшего порядка $\beta(g) = g^2/6\pi^2$ (здесь $g \equiv e^2$) для бета-функции спинорной квантовой электродинамики, тогда g_E и e_E станут бесконечными при энергии (18.3.6), равной

$$E_\infty = \mu \exp(6\pi^2/g_\mu). \quad (18.3.7)$$

Используя (18.2.43), можно выразить ее через обычный перенормированный заряд:

$$E_\infty \simeq m_e \exp \left(\frac{6\pi^2}{e_R^2} + \frac{5}{6} + O(e_R^2) \right) = e^{646,6} m_e. \quad (18.3.8)$$

Конечно, приближение, в котором $\beta(g) = g^2/6\pi^2$, теряет силу до того, как достигается эта энергия, поэтому с уверенностью можно сказать лишь то, что заряд e_E станет достаточно большим, чтобы нарушить теорию возмущений при некоторой энергии E , меньшей E_∞ .

б. Непрерывный рост

Предположим теперь, что в какой-то теории $\beta(g)$ остается положительно определенной при $g \rightarrow \infty$, но при этом достаточно медленно растет (или убывает), так что $\int^\infty dg/\beta(g)$ расходится. Тогда константа связи g_E продолжает возрастать при $E \rightarrow \infty$, но становится бесконечной только в пределе $E = \infty$. Более того, ведущее слагаемое в асимптотическом поведении g_E при $E \rightarrow \infty$ не зависит от обычным образом перенормированной константы. Например, если $\beta(g)$ ведет себя при больших g как βg^k , $\beta > 0$ и $k < 1$, то решение уравнения (18.2.9) имеет вид

$$g_E = \left[1 + (1-k)b g_\mu^{k-1} \ln \frac{E}{\mu} \right]^{1/(1-k)} g_\mu. \quad (18.3.9)$$

Если g_μ мала при каком-то μ (скажем, порядка m), тогда рост g_E замечен только при энергиях, экспоненциально больших по сравнению с этим μ . Однако в пределе ультравысоких энергий константа связи растет по закону

$$g_E \rightarrow [(1-k)b \ln E]^{1/(1-k)}, \quad (18.3.10)$$

причем предельное поведение не зависит от g_μ !

в. Фиксированная точка при конечном значении константы

Предположим далее, что $\beta(g)$ остается положительно определенной при $0 < g < g_*$, но обращается в нуль при $g = g_*$ и затем становится отрицательной. Тогда из уравнения (18.2.9) следует, что с ростом μ константа g_μ будет возрастать при $g_\mu < g_*$ и уменьшаться при $g_\mu > g_*$, достигая в обоих случаях фиксированной точки g_* при $\mu \rightarrow \infty$. Если при $g = g_*$ нуль $\beta(g)$ — простой, то в окрестности этой точки при $g \rightarrow g_*$

$$\beta(g) \rightarrow a(g_* - g) \quad \text{для } g \rightarrow g_* \quad (18.3.11)$$

с $a > 0$. Тогда решение уравнения (18.2.9) имеет вид

$$g_* - g_\mu \propto \mu^{-a}. \quad (18.3.12)$$

(Описанное выше поведение типа б можно рассматривать как частный случай, когда фиксированная точка g_* находится на беско-

нечности.) Кроме того для произвольного оператора O можно ожидать плавного поведения $\gamma(g)$ в окрестности g_* :

$$\gamma(g) = \gamma(g_*) + c(g_* - g) + O((g_* - g)^2). \quad (18.3.13)$$

(Мы опустили здесь метку θ у g и с.) Отсюда в матричных элементах этого (и возможно других) оператора мы сталкиваемся с появлением множителя (см. (18.2.27))

$$N_E^{-1} \propto \exp \left[- \int^E \gamma(g_\mu) \frac{d\mu}{\mu} \right] \propto E^{-\gamma(g_*)} [1 + O(E^{-a})]. \quad (18.3.14)$$

Произведение множителей $E^{-\gamma(g_*)}$ можно объединить с множителем E^D в (18.2.23), так что в результате весь матричный элемент ведет себя как

$$M_R \propto E^{D_*} \quad (18.3.15)$$

где размерность D_* вычисляется путем добавления к реальной размерности каждого оператора, возникающего в матричном элементе, еще и «аномальной размерности» $-\gamma(g_*)$.

г. Асимптотическая свобода

В обсуждавшихся до сих пор примерах $\beta(g)$ была положительной при малых g , так что с ростом μ константа g_μ уходила от точки $g = 0$. Предположим, что в какой-то теории $\beta(g)$ отрицательна при малых положительных g . Тогда

$$\beta(g) \rightarrow -bg^n, \quad (18.3.16)$$

при $\beta > 0$. Здесь n — порядок тех диаграмм низшего порядка, которые вносят вклад в $\beta(g)$, так что это всегда целое число, большее единицы. (В рассматриваемых здесь в качестве примера теориях $n = 2$.) Решение уравнения (18.2.9) имеет вид

$$g_E = g_\mu \left[1 + b(n-1)g_\mu^{n-1} \ln \frac{E}{\mu} \right]^{-1/(n-1)}. \quad (18.3.17)$$

При $E \rightarrow \infty$ существует не зависящий от g_μ предел

$$g_E \rightarrow [b(n-1) \ln E]^{-1/(n-1)}. \quad (18.3.18)$$

Так как при $E \rightarrow \infty$ это приводит к нулевому значению g_E , можно в этом пределе доверять теории возмущений, если только g_E при некотором конечном E находится внутри области в окрестности $g = 0$, где g и $\beta(g)$ имеют противоположные знаки. Аномальные размерности $\gamma^{(\ell)}$ различных операторов $\mathcal{O}$ ведут себя в пределе слабой связи как

$$\gamma(g) \rightarrow cg^m, \quad (18.3.19)$$

где m — порядок диаграмм низшего порядка, дающих вклад в перенормировку оператора, а c — положительная или отрицательная действительная константа. Отсюда асимптотическое поведение при высоких энергиях того множителя, который вводится в матричные элементы перенормировкой этого оператора, имеет вид

$$\begin{aligned} N_E^{-1} &\propto \exp \left[- \int^E \gamma(g_\mu) \frac{d\mu}{\mu} \right] \\ &\rightarrow \exp \left[-c \int^E [b(n-1) \ln \mu]^{-m/(n-1)} \frac{d\mu}{\mu} \right] \\ &\propto \exp \left[- \frac{c[b(n-1)]^{-m/(n-1)}}{(1-m)(n-1)} (\ln E)^{1-m/(n-1)} \right], \end{aligned} \quad (18.3.20)$$

за исключением случая $m = n - 1$, когда

$$N_E^{-1} \propto (\ln E)^{-c/b(n-1)}. \quad (18.3.21)$$

Мы видим, что в случае асимптотической свободы не возникает поправок к тем эффективным размерностям, которые определяют степени энергии, возникающие в асимптотическом поведении матричного элемента, а вместо этого асимптотика модифицируется степенями $\ln E$.

В качестве игрушечной модели, в которой имеется асимптотическая свобода, можно рассмотреть скалярную теорию поля с гамильтонианом $-g\phi^2/24$ и положительным g .

В данном случае параметры выражения (18.3.16) определяются из (18.3.4):

$$b = 3/16\pi^2, \quad n = 2, \quad (18.3.22)$$

так что из (18.3.17) при $E \rightarrow \infty$ имеем

$$g_E \rightarrow \left[\frac{3 \ln E}{16\pi^2} \right]^{-1}. \quad (18.3.23)$$

Кроме того, оператор ϕ^2 в этой теории имеет аномальную размерность, определяемую выражением (18.2.29) в виде

$$\gamma(g) = -\frac{g}{16\pi^2} + O(g^2). \quad (18.3.24)$$

Следовательно применимо соотношение (18.3.19), в котором

$$c = -1/16\pi^2, \quad m = 1. \quad (18.3.25)$$

Поэтому каждый оператор ϕ^2 в матричном элементе вносит множитель, определяемый выражением (18.3.21):

$$N_E^{-1} \propto (\ln E)^{1/3}. \quad (18.3.26)$$

Само скалярное поле в этой теории имеет $\gamma(g) \propto g^2$, и т. к. $m = 2$, то каждый ϕ -оператор в матричном элементе вносит множитель, который согласно (18.3.20) равен

$$N_E^{-1} \propto 1 + O\left(\frac{1}{\ln E}\right). \quad (18.3.27)$$

Мы встретимся с другим, более физичным, примером асимптотической свободы при рассмотрении квантовой хромодинамики в разделе 18.7.

Во всех случаях, когда g_E можно рассматривать при бесконечно большой энергии E , поведение константы в этом пределе оказывается не зависящим от перенормированной константы g_R . Однако это не обязательно означает, что теория не содержит

произвольных безразмерных параметров. Чтобы описать то, как g_E достигает своего предела при $E \rightarrow \infty$, всегда нужно задать свободный параметр λ с размерностью энергии. В случае б формула (18.3.10) может быть записана в виде

$$g_E \rightarrow [(1-k)b \ln(E/\lambda)]^{1/(1-k)}.$$

В случае в формулу (18.3.12) можно записать как

$$g_E \rightarrow g_* \left[1 - \left(\frac{\lambda}{E} \right)^b \right].$$

Наконец, в случае г формула (18.3.18) принимает вид

$$g_E \rightarrow [b(n-1) \ln(E/\lambda)]^{1/(n-1)}.$$

В общем случае такие теории содержат свободный безразмерный параметр — отношение λ к массе m . Константы связи типа e_R , перенормированные в масштабе, который связан с μ , можно записать как функции отношения m/λ . Только в том случае, когда все массы в теории обращаются в нуль, можно говорить о том, что в теории нет свободных безразмерных параметров.

Из четырех описанных здесь типов асимптотического поведения типы а и б приводят к явно нефизическому поведению бегущей константы связи g_E , которая становится бесконечной либо при конечной энергии (случай а), либо при $E \rightarrow \infty$ (случай б). Само по себе это еще не главная катастрофа, так как нужно посмотреть, как определена константа связи. Например, если g_μ плавно спадает от конечного значения g_μ при $\mu = m$ до нуля при $\mu \rightarrow \infty$, и мы определяем новую константу связи $\tilde{g}_\mu \equiv g_\mu / [1 - g_\mu / g_{2m}]$, тогда $\tilde{g}_\mu$ при $\mu = 2m$ становится бесконечной. Но это просто артефакт такого конкретного выбора константы связи. Однако обычным образом перенормированные константы g_μ как в теории скалярного поля ϕ^4 , так и в квантовой электродинамике, были определены здесь через значения матричных элементов при энергиях порядка μ . В частности, в скалярной теории ϕ^4 константа g_μ определена как инвариантная фейнмановская амплитуда A скаляр-скалярного рассеяния в точке $s = t = u = \mu^2$, причем A предполагается ана-

литической функцией. Кроме того, $g_\mu = e_\mu^2$ в спинорной электродинамике дается выражением

$$e_\mu^2 / e_R^2 = Z_3 / N_\mu^{(A)2} = [1 - \pi(\mu^2)]^{-1}. \quad (18.3.28)$$

Поэтому бесконечное значение e_μ^2 в точке μ_∞ будет порождать полюс или другую особенность в перенормированном фотонном пропагаторе при положительном значении $p^2 = \mu_\infty^2$, где пропагатор предполагается аналитичным. Таким образом, если g_μ определено так, как выше, то тип асимптотического поведения, описываемый случаем *a*, физически *исключается*.

Как же тогда ведут себя различные квантовые теории поля? Много лет тому назад Ландау^{4a} показал, что в квантовой электродинамике возрастающие степени $\ln(E/M)$, возникающие в каждом порядке теории возмущений, должны складываться и порождать особенности (так называемые «духи Ландау») при конечных значениях E . На современном языке можно сказать, что Ландау открыл возможность *a*, но не привел ни одного аргумента против случаев *b* или *c*.

Тем не менее сейчас широко распространена точка зрения, что те квантовые теории взаимодействующих полей, которые не являются асимптотически свободными, например, квантовая электродинамика или скалярная теория поля с взаимодействием ϕ^4 , являются математически непоследовательными. В квантовой электродинамике есть некоторые аргументы, отвергающие случай *c*, т. е. существование конечной фиксированной точки e_* . Такая точка могла бы существовать^{4c}, если бы непертурбативные эффекты изменяли качественные свойства разложения операторного произведения (предмет рассмотрения в гл. 20) или если бы существовала непертурбативная перенормировка треугольной аномалии (гл. 22). Но даже если случай *c* действительно исключается в квантовой электродинамике, все еще остается возможность *b* существования фиксированной точки при бесконечном значении константы связи.

Большая часть свидетельств о непоследовательности асимптотически несвободных взаимодействующих квантовых теорий поля возникает при изучении скалярной теории поля в четырех пространственно-временных измерениях с взаимодействием ϕ^4 ,

квантованной на конечной пространственно-временной решетке. Существуют строгие теоремы^{4d}, доказывающие, что эта теория (с произвольной зависимостью ее параметров от постоянной решетки) не переходит в пределе нулевой постоянной решетки в непрерывную теорию с взаимодействием, если только теория не асимптотически свободна, что, конечно, противоречит тому, что обнаруживается в теории возмущений для такой теории.

Этот аргумент также кажется неубедительным. Верно, что если бы существовала последовательная асимптотически несвободная непрерывная скалярная теория поля, то можно было бы построить решеточную теорию, проинтегрировав по значениям скалярного поля во всех точках, кроме тех, которые принадлежат узлам пространственно-временной решетки. *Но это была бы не та решеточная теория, которая рассматривается в упомянутых теоремах.* Это была бы решеточная теория с любым возможным взаимодействием, допускаемым принципами симметрии, т. е. содержащая не только слагаемое с ϕ^4 , но и слагаемые, пропорциональные ϕ^6 , $\phi^3 \square \phi$ и т. д., с коэффициентами, зависимость которых от обрезания (обратной величины постоянной решетки) управлялась бы уравнениями ренормгруппы Вильсона, обсуждавшимися в разделе 12.4. Никто не доказал никаких утверждений о существовании непрерывного предела такой теории.

Если действительно верно, что не существует теории взаимодействующего непрерывного скалярного поля в пределе нулевой постоянной решетки, тогда мы должны столкнуться с затруднениями при попытке решить уравнения ренормгруппы Вильсона, которые в случае слабых перенормированных взаимодействий должны быть заданы при очень малых постоянных решетки. Если не рассматривать очень малые расстояния, такая теория должна выглядеть как взаимодействующая непрерывная теория поля. Перенормированная константа связи в этой приближенно непрерывной теории предположительно имеет особенность при конечной энергии, как в случае *a* выше, так что и такая теория терпит крах на малых расстояниях. (Однако при больших константах нет прямой связи между видом уравнений ренормгруппы Вильсона и Гелл-Манна–Лоу, так что существование особенности у голых констант при конечной постоянной решетки необязательно влечет за собой наличие особенностей у перенормированных констант связи при конечном масштабе перенормировки.)

Теории такого рода часто называют *тривиальными*, либо потому, что при разных предположениях о голых константах в теории, квантованной на решетке, оказывается, что непрерывный предел является свободной теорией поля, либо потому, что единственный способ сделать непрерывную теорию типа *a* физически приемлемой при всех энергиях заключается в том, чтобы принять решение $g_\mu = 0$ уравнений ренормгруппы (18.2.9).

Даже если теория поля тривиальна в любом из указанных смыслов, нет никаких оснований не включать ее как часть реалистической теории физических явлений. Существование возражений по поводу решения вильсоновских уравнений ренормгруппы для теории поля при очень малых значениях постоянной решетки не существенно, если в реальном мире существуют другие поля, которые необходимо учитывать на столь малых расстояниях. Аналогично, тот факт, что данная квантовая теория поля имеет нефизические особенности при какой-то большой энергии E_∞ , не является физической проблемой, если обсуждаемая теория есть всего лишь низкоэнергетическое приближение более широкой теории, верное только при энергиях, много меньших E_∞ . В частности, задолго до того, как мы достигнем энергий порядка (18.3.8), где можно ожидать, что квантовая электродинамика становится сингулярной, уже необходимо учитывать даже гравитацию, и никто не знает, как вычислить при таких энергиях эффекты, связанные с сильными гравитационными взаимодействиями.

Несмотря на эти разочаровывающие замечания, возможно, что для того, чтобы избежать нефизических особенностей, все наши отдельные квантовые теории поля вроде спинорной квантовой электродинамики в конце концов будут включены в асимптотически свободную теорию. К счастью, вопрос о том, является ли теория асимптотически свободной для некоторого конечного интервала значений констант связи, может быть установлен путем вычислений в рамках теории возмущений: если $\beta(g)$ отрицательна при $g \rightarrow 0+$, то теория асимптотически свободна для всех перенормированных констант связи g_μ в интервале от нуля до первого корня функции $\beta(g)$.

* * *

В связи с этим полезно заметить, что хотя детальный вид $\beta(g)$ зависит от калибровки и от точного способа определения

бегущей константы, первые два слагаемых в разложении $\beta(g)$ в ряд не зависят от этих обстоятельств. Предположим, что имеются два определения g_μ и $\tilde{g}_\mu$ бегущей константы, возможно, использующие разные определения перенормировочного масштаба μ или разные калибровки. Так как g_μ и $\tilde{g}_\mu$ безразмерны и не зависят от обрезания, то при $\mu \gg m$ константа $\tilde{g}_\mu$ не может зависеть от чего-либо, кроме как от константы g_μ :

$$\tilde{g}_\mu = \tilde{g}(g_\mu).$$

Тогда

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}_\mu) \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}_\mu = \frac{d\tilde{g}(g_\mu)}{dg_\mu} \beta(g_\mu)$$

и поэтому

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}) = \frac{d\tilde{g}(g)}{dg} \beta(g). \quad (18.3.29)$$

До тех пор, пока мы придерживаемся одного и того же определения перенормированной константы, все перенормированные константы в низшем порядке равны друг другу, так что разложение в ряд $\tilde{g}$ по g можно записать в виде

$$\tilde{g}(g) = g + ag^2 + O(g^3)$$

или эквивалентно

$$g = \tilde{g} - a\tilde{g}^2 + O(\tilde{g}^3).$$

Производная равна

$$\frac{d\tilde{g}}{dg} = 1 + 2ag + O(g^2) = 1 + 2a\tilde{g} + O(\tilde{g}^2).$$

Кроме того, для рассматриваемых здесь констант (включая $g = e^2$) разложение $\beta(g)$ в ряд имеет вид

$$\beta(g) = bg^2 + b'g^3 + O(g^4)$$

или, если выразить через $\tilde{g}$,

$$\beta(\tilde{g}) = b\tilde{g}^2 + (b' - 2ab)\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4).$$

Тогда из (18.3.29) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}(\tilde{g}) &= [1 + 2a\tilde{g} + O(\tilde{g}^2)] [b\tilde{g}^2 + (b' - 2ab)\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4)] \\ &= b\tilde{g}^2 + b'\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4).\end{aligned}$$

Видно, что первые два слагаемых в степенном разложении $\tilde{\beta}$ по $\tilde{g}$ имеют те же коэффициенты, что и в разложении β по g . Однако это заведомо не так для слагаемых более высокого порядка. На самом деле всегда можно так выбрать функцию $\tilde{g}(g)$, чтобы все слагаемые в $\tilde{\beta}(\tilde{g})$ более высокого порядка по $\tilde{g}$, чем третий, обращались в нуль, так что асимптотическое поведение $\tilde{g}_E$ при $E \rightarrow \infty$ описывается двумя первыми слагаемыми в ряде теории возмущений для $\beta(g)$. Однако в этом мало пользы, так как для определения того, как g зависит от $\tilde{g}$, необходимо провести вычисления во всех порядках, а без этого мы не можем воспользоваться нашим знанием асимптотического поведения $\tilde{g}$, чтобы узнать что-то об асимптотическом поведении g или физических величин.

Те же рассуждения, которые привели к (18.3.30), показывают, что *при слабой связи* вильсоновское уравнение ренормализационной группы для голой константы как функции постоянной решетки при обратной постоянной решетки, большей чем массы частиц, совпадает с уравнением ренормгруппы Гелл-Манна–Лоу для перенормированной константы связи как функции масштаба перенормировки в случае, когда масштаб больше масс частиц. Следовательно, если непрерывная теория асимптотически свободна, не возникает препятствий при переходе к непрерывному пределу для теории, квантованной на решетке.

18.4. Эффекты нескольких констант связи и массы

До сих пор мы рассматривали теории, содержащие только одну безразмерную константу связи g . Нетрудно обобщить формализм на случай нескольких таких констант g^l . Для каждой g^l имеется уравнение ренормгруппы, которое при $\mu \gg m$ принимает вид

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^l(\mu) = \beta^l(g(\mu)) \quad (18.4.1)$$

где каждая β^l зависит в общем случае от всех g . В таком случае появляется много новых возможностей асимптотического поведения $g^l(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$. В данной теории могут появиться определенные траектории в g -пространстве, которые уходят на бесконечность при конечных или бесконечных значениях μ , другие траектории, которые достигают фиксированных точек, и, наконец, траектории, достигающие замкнутых кривых, известных под названием «предельных циклов». Чтобы почувствовать некоторые из этих возможностей, рассмотрим поведение $g^l(\mu)$ вблизи фиксированной точки.

Уравнение (18.4.1) имеет решение в виде фиксированной точки $g^l(\mu) = g^{l*}$, если

$$\beta^l(g^*) = 0. \quad (18.4.2)$$

В окрестности этой точки (18.4.1) принимает вид:

$$\mu \frac{d}{d\mu} [g^l(\mu) - g^{l*}] = \sum_k M^l_k [g^k(\mu) - g^{k*}], \quad (18.4.3)$$

где M — матрица

$$M^l_k \equiv \left[\frac{\partial \beta^l(g)}{\partial g^k} \right]_{g=g^*}. \quad (18.4.4)$$

Решение можно разложить по собственным векторам этой матрицы:

$$g^l(\mu) = g^{l*} + \sum_m c_m V_m^l \mu^{\lambda_m}, \quad (18.4.5)$$

где V_m — собственный вектор M с собственным значением λ_m (нормированный любым удобным образом):

$$\sum_k M^l_k V_m^k = \lambda_m V_m^l, \quad (18.4.6)$$

а c_m — набор коэффициентов разложения.* (В этом разделе мы не соблюдаем соглашение о суммировании по индексам.)

Из выражения (18.4.5) следует, что константа связи стремится к фиксированной точке при $\mu \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $c_m = 0$ для всех собственных векторов с $\lambda_m > 0$. (Для простоты предполагаем, что ни одно из собственных значений не равно нулю.) Тогда в общем случае траектории притягиваются к фиксированной точке, лежащей на N_- -мерной поверхности, где N_- — число отрицательных собственных значений M . Касательные к этой поверхности в точке g_* являются собственными векторами с отрицательными собственными значениями. Траектории, не лежащие на этой поверхности, могут близко подходить к фиксированной точке, но в конце концов отталкиваются от нее, преимущественно в направлении собственных векторов с наибольшими собственными значениями. Конечно, если все собственные значения отрицательны, то вокруг фиксированной точки существует конечная область, внутри которой все траектории сходятся к этой точке.

Очевидно, что собственные значения λ_m важны для понимания асимптотического поведения траекторий, достигающих фиксированной точки, поэтому полезно заметить, что эти собственные значения не зависят от определения констант связи. Предположим, что мы вводим новый набор констант $\tilde{g}^l$, определенных как функции g . Они удовлетворяют уравнениям ренормгруппы

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}^l(\mu) = \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^l(g)}{\partial g^m} \Big|_{g=g(\mu)} \beta^m(g) \equiv \tilde{\beta}^l(\tilde{g}(\mu)),$$

так что

$$\beta^l(\tilde{g}) = \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^l(g)}{\partial g^m} \beta^m(g). \quad (18.4.7)$$

* Мы предполагаем, что собственные значения V_m образуют полный набор. Это не всегда так, но это — общий случай. Собственные векторы конечной матрицы M образуют полный набор, если все корни секулярного уравнения $\text{Det}(M - \lambda I) = 0$ различны. Матрица, собственные векторы которой не образуют полного набора, может рассматриваться как предельный случай матрицы с полным набором собственных векторов, когда некоторые из этих векторов становятся вырожденными.

(Это означает, что β преобразуется как контравариантный вектор в пространстве констант связи.) Дифференцируя, имеем:

$$\sum_m \frac{\partial \tilde{\beta}^l(\tilde{g})}{\partial \tilde{g}^m} \frac{\partial \tilde{g}^m}{\partial g^k} = \sum_m \frac{\partial^2 \tilde{g}^l}{\partial g^m \partial g^k} \beta^m(g) + \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^l}{\partial g^m} \frac{\partial \beta^m(g)}{\partial g^k}.$$

В фиксированной точке g_* первое слагаемое справа обращается в нуль, так что получаем матричное уравнение

$$\tilde{M}S = SM, \quad (18.4.8)$$

где

$$\tilde{M}^l_k \equiv \left[\frac{\partial \tilde{\beta}^l}{\partial \tilde{g}^k} \right]_{\tilde{g}=\tilde{g}(g_*)}, \quad (18.4.9)$$

$$S^l_k \equiv \left[\frac{\partial \tilde{g}^l}{\partial g^k} \right]_{g=g_*}. \quad (18.4.10)$$

До тех пор, пока преобразование $g \rightarrow \tilde{g}$ несингулярно, соотношение (18.4.8) является преобразованием подобия, поэтому M и $\tilde{M}$ имеют одни и те же собственные значения λ_m .

Формализм ренормгруппы можно применять не только к перенормируемым, но и к неперенормируемым теориям. Как мы пояснили в разделе 12.3, по аналогии с перенормируемыми теориями расходимости в неперенормируемых теориях устраняются подходящей перенормировкой констант связи и масс. Единственная разница заключается в том, что в неперенормируемых теориях следует предполагать, что лагранжиан содержит все взаимодействия, разрешенные симметриями теории. Если g_B^l — неперенормируемая константа связи, умножающаяся в лагранжиане на оператор размерностью D_l (т. е. на произведение полей и их пространственно-временных производных, размерность которых в степенях массы или энергии равна D_l), то размерность g_B^l будет равна $\Delta_l = 4 - D_l$. После этого можно выразить голые константы через набор безразмерных перенормированных констант $g^l(\mu)$ и обрезание Λ с помощью соотношений общего вида

$$g_B^l \equiv \mu^{\Delta_l} \left[g^l(\mu) + \sum_{k,m} b_{km}^l g^k(\mu) \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) + O(g(\mu)^3) \right], \quad (18.4.11)$$

где безразмерные численные коэффициенты β_{km}^l и аналогичные коэффициенты в слагаемых более высокого порядка выбраны так, чтобы сократить зависимость физических величин от обрезания. (В ряде теорий старшее слагаемое может быть трилинейно по константам связи или иметь даже еще более высокий порядок; те изменения, которые следует произвести в этом случае, очевидны.) Из требования, чтобы g_B не зависела от обрезания, получаем уравнение ренормализационной группы (18.4.1), в котором

$$\beta^l(g) = -\Delta_l g^l - \sum_{k,m} b_{km}^l g^k g^m + O(g^3). \quad (18.4.12)$$

Взаимодействия с $D_l > 4$ или $\Delta_l < 0$ являются неперенормируемыми, так что пока все $g^l(\mu)$ остаются достаточно малыми, мы ожидаем, что для перенормированных констант неперенормируемых взаимодействий функции β^l положительны и, следовательно, растут с ростом μ , однако никто не знает, что случится, когда константы станут настолько большими, что нарушится применимость теории возмущений.

Однако, как объясняется в следующем разделе, даже в теориях с бесконечным числом независимых параметров обычно имеются неподвижные точки g_* , в которых число N_- отрицательных собственных значений матрицы (18.4.6) конечно, как и в случае нулевой связи. (В частности, часто $N_- = 1$.) Когда $N_- \neq 0$, неподвижная точка находится на N_- -мерной критической поверхности, состоящей из траекторий, притягивающихся в неподвижную точку при $\mu \rightarrow \infty$. Хотя неперенормируемая теория с параметрами связи, находящимися на такой критической поверхности, и не является асимптотически свободной, говорят, что она асимптотически безопасна,⁵ поскольку перенормированные константы остаются конечными при больших значениях μ . Условие асимптотической безопасности в такой теории, обычно ассоциирующееся с принципом перенормируемости, играет роль при устранении всех, кроме конечного числа, свободных параметров — координат критической поверхности.

В перенормируемой теории все физические величины делаются независимыми от обрезания путем подбора зависимости от обрезания *конечного* числа голых констант. Эти константы можно выразить через равное число зависящих от μ перенормированных констант, а условие, что голые константы являются μ -независимыми, приводит к уравнениям ренормгруппы, связывающим только перенормированные константы. Если придерживаться более широкой точки зрения, допускающей не только перенормируемые, но и неперенормируемые связи, то перенормируемая теория соответствует конечномерной инвариантной поверхности в бесконечномерном пространстве всех перенормируемых и неперенормируемых теорий. Иными словами, это поверхность, на которой все $\beta^l(g)$ в любой точке g касательны к поверхности в этой точке.

До сих пор в этом разделе мы молчаливо предполагали, что $\mu \gg m$, и что поэтому можно пренебречь зависимостью β^l от m/μ . Однако такое предположение необязательно. Мы можем, если хотим, рассматривать массу как еще один параметр связи⁶. Это означает, что все перенормированные константы можно определить, как и выше, через различные функции Грина с импульсами вне массовой поверхности порядка μ , но вычисленными при нулевых значениях всех голых масс. Безразмерные перенормированные массовые параметры для дираковских полей ψ или скалярных полей ϕ можно определить следующим образом:

$$m_\psi(\mu) \equiv N^{(\bar{\psi}\psi)}(\Lambda/\mu)^{-1} m_{\psi, \text{голая}}(\Lambda) / \mu, \quad (18.4.13)$$

$$m_\phi^2(\mu) \equiv N^{(\phi^2)}(\Lambda/\mu)^{-1} m_{\phi, \text{голая}}^2(\Lambda) / \mu, \quad (18.4.14)$$

где $N^{(O)}(\Lambda/\mu)$ — безразмерные константы, которые после умножения на соответствующие операторы O сокращают расходимости в матричных элементах этих операторов, также вычисленных при нулевых значениях голых масс. (См. раздел 18.1.) Эти новые перенормированные массы и константы не имеют непосредственного физического смысла, но через них можно выразить истинные физические массы и все физические матричные элементы. Такие матричные элементы принимают вид сумм матричных элементов для нулевых голых масс с любым числом вставок перенормированных массовых операторов $N^{(\phi^2)}\phi^2$ и $N^{(\bar{\psi}\psi)}\bar{\psi}\psi$, умноженных на соответствующие перенормированные массовые параметры.

В такой схеме перенормировок бета-функции для различных констант очевидно не зависят от масс, а бета-функции для массовых параметров пропорциональны этим параметрам с коэффициентами, зависящими от всех констант. Используя формулу (18.2.25), имеем

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_\psi(\mu) = \left[-1 - \gamma_{\bar{\psi}\psi}(g_\mu) \right] m_\psi(\mu), \quad (18.4.15)$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_\phi^2(\mu) = \left[-2 - \gamma_{\phi^2}(g_\mu) \right] m_\phi^2(\mu). \quad (18.4.16)$$

Например, в разделе 18.2 мы отмечали, что в скалярной теории поля с лагранжианом (18.1.2) массовый оператор ϕ^2 имеет при $m = 0$ аномальную размерность (18.2.29), так что здесь

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_\phi^2(\mu) = \left[-2 + \frac{g_\mu^2}{16\pi^2} + O(g_\mu^2) \right] m_\phi^2(\mu). \quad (18.4.17)$$

Кроме того, из выражения (11.4.3) видно, что влияние высших поправок на пропагатор электрона заключается в замене массы электрона на $m_e - \Sigma^*(p, m_e)$, так что влияние этих же поправок на матричные элементы оператора $\bar{\psi}_e \psi_e$ между одноэлектронными состояниями с 4-импульсом p^μ заключается в умножении их на множитель

$$F(p) = 1 - \left(\frac{\partial \Sigma^*(p, m_e)}{\partial m_e} \right)_{m_e=0}.$$

Поэтому константа перенормировки $N^{(\bar{\psi}\psi)}$ для оператора $\bar{\psi}_e \psi_e$ равна $F^{-1}(p)$, вычисленной при p^2 , равному какому-нибудь масштабу перенормировки, например, μ^2 . Согласно (11.4.8) в однопетлевом приближении имеем

$$N^{(\bar{\psi}\psi)} = 1 + \left(\frac{\partial \Sigma_{1 \text{ петля}}^*(p, m_e)}{\partial m_e} \right)_{m_e=0, p^2=\mu^2} = \quad (18.4.18)$$

$$= 1 - \frac{4\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \ln \left[1 + \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) (1-x) \right] \rightarrow 1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) - 1 \right],$$

где Λ — ультрафиолетовое обрезание (обозначавшееся в (11.4.8) как μ) причем мы перешли к пределу $\Lambda \gg \mu$. Поэтому аномальная размерность оператора $\bar{\Psi}_e \Psi_e$ дается выражением (18.2.25) в виде

$$\gamma^{(\bar{\Psi}\Psi)} = \mu \frac{d}{d\mu} \ln N^{(\bar{\Psi}\Psi)} = \frac{e_\mu^2}{2\pi^2} + O(e_\mu^4), \quad (18.4.19)$$

так что (18.4.15) принимает вид:

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_e(\mu) = \left[-1 - \frac{e_\mu^2}{2\pi^2} + O(e_\mu^4) \right] m_e(\mu). \quad (18.4.20)$$

Та же формула верна и в общих калибровочных теориях с заменой e^2 на значение $\sum_\alpha (t_\alpha)^2$ для конкретного рассматриваемого фермиона.

Конечно, существенная разница между $\mu(\mu)$ и другими перенормированными параметрами теории заключается в том, что голые массы имеют положительную размерность, так что пока константы остаются малыми, все $m(\mu)$ уменьшаются по величине. Наше предыдущее предположение, что при $\mu \rightarrow \infty$ массами можно пренебречь, подтверждается, если на самом деле $m(\mu)$ обращается при $\mu \rightarrow \infty$ в нуль. Однако, единственный известный случай, где имеет место такое поведение, — это асимптотически свободные теории, в которых все константы действительно остаются малыми при $\mu \rightarrow \infty$. Во всех остальных случаях такое предположение является просто догадкой, основанной на фактах.

18.5. Критические явления*

Для ряда приложений представляет интерес предел не больших, а малых энергий или волновых чисел. При изучении этого

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

предела можно повторить рассуждения раздела 18.2, если не считать того, что теперь рассматривается предел $\mu \rightarrow 0$, а не $\mu \rightarrow \infty$. Проще всего изучать этот предел, когда в теории нет масс, как, например, в случае квантовой электродинамики с симметрией относительно киральных преобразований $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$, запрещающей наличие ненулевой массы у электрона. В этом частном случае у единственного перенормируемого взаимодействия $e A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$, а также у всех неперенормируемых взаимодействий функции $\beta^l > 0$ при достаточно малых константах связи, так что все траектории, по крайней мере, в конечной области вокруг начала координат, притягиваются при $\mu \rightarrow 0$ к точке $g^l = 0$. Те же рассуждения применимы даже к теориям с очень малыми ненулевыми массами, если эти массы включены в число параметров связи, как описано в предыдущем разделе. Для массового параметра коэффициент Δ в (18.4.12) положителен, так что в этом случае траектории никогда не могут достичь точки $g = 0$, однако могут достаточно близко подойти к ней при малых массах.

Конечно, даже если допустить, что некоторые степени свободы вроде электронного поля могут иметь нулевую или очень малую массу, в реальном мире существует множество других степеней свободы, массы которых не малы. Рассуждения, основанные на ренормализационной группе, следует применять не к истинной теории, описывающей все эти тяжелые степени свободы, а к «эффективной» теории поля, в которой явно проявляются только безмассовые или почти безмассовые степени свободы, а взаимодействия включают эффекты, связанные с внутренними линиями тяжелых частиц. (В гл. 19 мы расскажем подробнее об эффективных теориях поля.)

Предел малых волновых чисел представляет особый интерес при изучении критических явлений, таких, как корреляции дальнего порядка вблизи точки фазового перехода второго рода (гладкого фазового перехода без скрытой теплоты) в конденсированных средах. Поскольку нас интересует предел $\mu \rightarrow 0$, важными становятся те собственные векторы матрицы (18.4.4), для которых собственные значения $\lambda < 0$. Эти собственные векторы называют *релевантными*. Собственные векторы с $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$ называют, соответственно, *маргинальными* и *нерелевантными*.

Предположим, что существует нетривиальная неподвижная точка g_* ровно с одним отрицательным собственным значени-

ем λ_0 , возможно, приближенно соответствующим массовому оператору. Множество траекторий $g^l(\mu)$, притягивающихся к этой неподвижной точке при $\mu \rightarrow 0$, образует критическую поверхность с коразмерностью единица, иными словами, поверхность, определенную единственным условием на константы связи, заключающемся в том, что при $g \rightarrow g_*$ касательные $g^l - g_*^l$ не имеют компонент в направлении собственного вектора с отрицательными собственными значениями. Когда физические значения констант при любом фиксированном характерном масштабе достигают этой поверхности, происходит фазовый переход. Так как критическая поверхность имеет коразмерность, равную единице, фазовый переход можно получить путем настройки любого из тех параметров, от которых зависят константы связи, например, давления или температуры. Как отмечалось в предыдущем разделе, из того факта, что фазовые переходы такого типа имеют место у широкого круга веществ, следует, что наличие неподвижных точек, для которых матрица (18.4.4) имеет единственное отрицательное собственное значение, является вполне обычной ситуацией.

Конкретнее, когда температура T достигает критического значения T_c , мы ожидаем, что коэффициент c_0 при растущем слагаемом в (18.4.5) становится пропорциональным разности $T - T_c$, поскольку нет никаких причин, по которым он должен быть сингулярным или обращаться в нуль быстрее. Таким образом, при $\mu \rightarrow 0$ и затем при $T \rightarrow T_c$ константы связи ведут себя как

$$g^l(\mu) \rightarrow (T - T_c) V_0^l \mu^{\lambda_0}, \quad (18.5.1)$$

где λ_0 — единственное отрицательное собственное значение при g_* , а V_0^l — соответствующий собственный вектор*.

Применяя ренормгрупповые рассуждения к волновым числам вместо энергий, получим, что N -точечная функция (N -ая частная производная эффективного действия по полю ϕ размер-

* Другие вклады в константы связи будут вести себя как $(T - T_0)^0 \mu^{\lambda_1}$ с $\lambda_1 > 0$. Отсюда, выражение (18.5.1) справедливо, если разность $T - T_0$ стремится к нулю медленнее $\mu^{\lambda_1 - \lambda_0}$.

ностью [волновое число] $^{D_\Phi}$) при малом характерном масштабе κ волнового числа имеет вид *

$$\Gamma_N(\kappa) \rightarrow \kappa^{d-N(D_\Phi+\gamma_\Phi(g_*))} F_N((T-T_c)\kappa^{\lambda_0}), \quad (18.5.2)$$

где $g_\Phi(g)$ — аномальная размерность, связанная с полем Φ , а d — размерность пространства-времени, или, в классической статистической механике, размерность пространства. Удобно переписать это соотношение в эквивалентной форме:

$$\Gamma_N(\kappa) \rightarrow (T-T_c)^{-[d-N(D_\Phi+\gamma_\Phi(g_*))]/\lambda_0} G_N(\kappa(T-T_c)^{1/\lambda_0}). \quad (18.5.3)$$

Отсюда, с одной стороны, видно, что корреляционная длина ξ (характерная длина, определяющая масштаб, на котором изменяется фурье-образ Γ_N) растет при $T \rightarrow T_c$ как

$$\xi \propto (T-T_c)^{-\nu} \quad (18.5.4)$$

где ν — определенный обычным образом положительный «критический показатель», который определяется из (18.5.3) как

$$\nu = -1/\lambda_0. \quad (18.5.5)$$

Кроме того, эффективное действие для нулевого поля Γ_0 (или свободная энергия в статистической физике) не должно зависеть от κ , т. к. оно соответствует диаграммам без внешних линий. Отсюда при $T \rightarrow T_c$ выражение (18.5.3) принимает вид

$$\Gamma_0 - F_0 \propto (T-T_c)^{\nu d}, \quad (18.5.6)$$

где константа F_0 — эффективное действие или свободная энергия, связанные с тяжелыми степенями свободы, по которым произведено интегрирование. Таким образом, степень ν определяет также поведение той части свободной энергии, которая неаналитична по температуре при T вблизи T_c .

* Функция F_N зависит также от безразмерных углов и отношений волновых чисел. Заметим, что «наивная» размерность Γ_N равна $d - ND_\Phi$, т. к. выражение $\delta^4(\Sigma \kappa) \Gamma$ должно быть безразмерным.

В 1972 г. Вильсон и Фишер⁷ использовали разложение по степеням $d - 4$ как для того, чтобы показать, что теория скалярного поля действительно описывается указанным способом, так и для того, чтобы приближенно вычислить критические показатели типа ν . Рассмотрим теорию с одной-единственной «легкой» степенью свободы — скалярным полем ϕ , например, намагниченностью в ферромагнетике, и симметрией относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$, исключающей нечетные по ϕ взаимодействия. В дополнение к «массовому» слагаемому $-g_2\phi^2/2$ лагранжиан эффективной теории поля будет содержать взаимодействия $-g_4\phi^4/4!$, $-g_6\phi^6/6!$ и т. д. Размерность поля ϕ в степенях волнового числа равна $(d - 2)/2$ (так, чтобы $\int d^d x (\nabla\phi)^2$ был безразмерным), так что размерности констант g_2 , g_4 , g_6 и т. д. равны $+2$, $4 - d$, $6 - 2d$, и т. д. Для неподвижной точки при нулевой связи в трех измерениях имеются две релевантные константы g_2 и g_4 , но этот вывод изменяется при учете взаимодействий в нетривиальных фиксированных точках. Рассмотрим поверхность в пространстве констант связи, на которой только g_2 и g_4 отличны от нуля, и выберем малые значения g_4 .* Из выражения (18.2.12) имеем $\beta(g_4) = 3g_4^2/16\pi^2 + O(g_4^3)$ при $d = 4$, а из (18.4.12) следует, что в $d = 4 - \varepsilon$ измерениях следует добавить к этому слагаемое $-\varepsilon g_4$, так что

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_4(\mu) = -\varepsilon g_4(\mu) + \frac{3g_4^2(\mu)}{16\pi^2} + O(g_4^3(\mu)). \quad (18.5.7)$$

Кроме того, из (18.4.170) получаем

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_2(\mu) = \left[-2 + \frac{g_4(\mu)}{16\pi^2} + O(g_4(\mu)) \right] g_2(\mu). \quad (18.5.8)$$

Следовательно при малом ε имеется нетривиальная неподвижная точка при

$$g_{4*} = \frac{16\pi^2\varepsilon}{3}, \quad g_{2*} = 0. \quad (18.5.9)$$

* При $3 \leq d \leq 4$ это единственные перенормируемые константы, так что при таких d такая поверхность является инвариантной. Обратим внимание на то, что мы здесь не включили в число констант коэффициент при $(\nabla\phi)^2$, т. е. это лишняя константа в том смысле, о котором шла речь в разделе 7.7.

В этой неподвижной точке матрица (18.4.4) диагональна, и ее собственные значения равны

$$\lambda_4 = M^4_4 = -\epsilon + \frac{3g_{4*}}{8\pi^2} + O(g_{4*}^2) = +\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (18.5.10)$$

$$\lambda_2 = M^2_2 = -2 + \frac{g_{4*}}{16\pi^2} + O(g_{4*}^2) = -2 + \frac{\epsilon}{3} + O(\epsilon^2). \quad (18.5.11)$$

Из формулы (18.5.10) видно, что константа g_4 на самом деле нерелевантна, так что в данном случае есть только одна релевантная константа, сигнализирующая о наличии фазового перехода второго рода. Из (18.5.11) следует, что аномальный показатель (18.5.5) равен

$$\nu = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2). \quad (18.5.12)$$

При физическом значении $\epsilon = 1$ первые два слагаемые дают $\nu \simeq 0,58$. Трехпетлевые вычисления^{7a} приводят к следующему выражению для критического показателя:

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \frac{7\epsilon^2}{162} - 0.01904\epsilon^3, \quad (18.5.13)$$

что при $\epsilon = 1$ дает $\nu = 0,61$.

В представленном вычислении не делалось никаких предположений об изучаемой системе кроме того, что существует фазовый переход второго рода, в окрестности которого единственной длинноволновой степенью свободы является одно скалярное поле. Такое описание удовлетворяет целый ряд различных физических систем, например, спонтанное появление намагниченности (в данном случае представленной как ϕ) в ферромагнитных и антиферромагнитных материалах, а также фазовые переходы второго рода между жидкостями и газами и в бинарных жидкостях. Поэтому во всех этих системах ожидается одно и то же значение ν . Это подтверждается экспериментом, дающим значение⁸ $\nu = 0,63 \pm 0,04$ в хорошем согласии с трехпетлевым результатом (18.5.13) и в удовлетворительном согласии даже с однопетлевым вычислением (18.5.12).

Тот факт, что разложение по степеням l так хорошо работает, остается пока что счастливым, но загадочным обстоятельством.

Обобщая, говорят, что все системы, описываемые одним и тем же набором длинноволновых степеней свободы в окрестности своих фазовых переходов второго рода, принадлежат к одному классу универсальности. В данном классе универсальности все критические показатели для всех систем одинаковы.

18.6. Минимальное вычитание

В разделе 11.2 мы видели, что размерная регуляризация особенно удобна для расчета радиационных поправок в квантовой электродинамике, так как этот метод не нарушает законов сохранения, связанных с калибровочной инвариантностью. По тем же причинам оказывается, что размерная регуляризация позволяет дать очень удобное альтернативное определение скользящей шкалы ренормгруппы в произвольных калибровочных теориях⁹.

При вычислениях, использующих размерную регуляризацию, ультрафиолетовые расходимости возникают как полюсы в физических амплитудах при размерности пространства-времени d , стремящейся к физическому значению $d = 4$. (См., например, (11.2.13).) Чтобы сократить эти полюсы, голые константы связи $g_B^l(d)$ (включая массы) сами должны иметь такие полюсы с вычетами, фиксированными условием, что физические амплитуды должны быть регулярны при $d \rightarrow 4$. В общем случае эти голые константы обладают ненулевыми размерностями $\Delta_l(d)$, зависящими от размерности пространства-времени d , поэтому удобно рассматривать безразмерную величину $g_B^l(d)\mu^{-\Delta_l(d)}$, где μ — скользящий масштаб размерностью энергии или массы. Голую константу с измененным масштабом можно выразить в виде суммы слагаемых, пропорциональных положительным степеням ν величины $1/(d-4)$ с коэффициентами β_ν , фиксированными требованием сокращения особенностей при $d \rightarrow 4$ в физических амплитудах, и остальных слагаемых, аналитичных по d при $d = 4$. Этот остаток отождествляется с безразмерной перенормированной константой связи $g^l(\mu, d)$, так что

$$g_B^l(d)\mu^{-\Delta_l(d)} = g^l(\mu, d) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (d-4)^{-\nu} b_\nu^l(g(\mu, d)). \quad (18.6.1)$$

Мы имеем право задать любую зависимость голых констант от d , если только при этом сокращаются сингулярности при $d = 4$ в физических амплитудах. Такую неоднозначность можно устранить, потребовав, чтобы $g^l(\mu, d)$ была аналитичной по d не только при $d = 4$, но при всех d .

Чтобы выписать то уравнение ренормализационной группы, которому удовлетворяет $g^l(\mu, d)$, продифференцируем сначала (18.6.1) по μ :

$$-\Delta^l(d) \left[g^l + \sum_{v=1}^{\infty} (d-4)^{-v} b_v^l(g) \right] = \beta^l(g, d) + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_m b_{vm}^l(g) \beta^m(g, d) (d-4)^{-v} \quad (18.6.2)$$

где

$$b_{vm}^l(g) \equiv \frac{\partial}{\partial g^m} b_v^l(g) \quad (18.6.3)$$

и, как и ранее,

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^l(\mu, d) = \beta^l(g(\mu, d), d). \quad (18.6.4)$$

Заметим, что β^l есть функция всех $g^m(\mu, d)$ и d , но не может отдельно зависеть от μ , поскольку после включения значений масс с измененным масштабом в число безразмерных параметров не остается других размерных параметров, кроме μ .

Как мы видели, размерности $\Delta_l(d)$ являются всегда линейными функциями d , и мы запишем это в виде

$$\Delta_l(d) = \Delta_l + \rho_l(d-4). \quad (18.6.5)$$

Перепишем левую часть (18.6.2) как

$$-\rho_l g^l(d-4) - [\Delta_l g^l + b_1^l(g) \rho^l] - \sum_{v=1}^{\infty} (d-4)^{-v} [\rho_l b_{v+1}^l(g) + \Delta_l b_v^l(g)].$$

Самая высокая степень d в аналитической части этого выражения — первая, и это же должно быть верно для правой части (18.6.2). Поэтому $\beta(g, d)$ должна быть линейной по d :

$$\beta^l(g, d) = \beta^l(g) + (d-4) \alpha^l(g). \quad (18.6.6)$$

Приравнивая слагаемые первого и нулевого порядка в (18.6.2), находим:

$$\alpha^l(g) = -\rho_l g^l \quad (18.6.7)$$

и, что более важно,

$$\beta^l(g) = -\Delta_l g^l - b_1^l(g) \rho_l + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_m b_{1m}^l(g) \rho_m g^m. \quad (18.6.8)$$

Примечательно, что бета-функция зависит только от коэффициентов простого полюса в голых константах. На самом деле, эти коэффициенты определяют также и коэффициенты всех полюсов более высокого порядка. Приравнивая полюсные слагаемые слева и справа в (18.6.2), приходим к рекуррентному соотношению:

$$\rho_l b_{v+1}^l(g) - \sum_m \rho_m g^m b_{v+1m}^l(g) = -\Delta_l b_v^l(g) - \sum_m b_{vm}^l(g) \beta^m(g). \quad (18.6.9)$$

Например, чтобы выражение $\int d^d x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ было безразмерным, любое калибровочное поле A^μ должно иметь размерность (в степенях массы), равную $(d-2)/2$, и так как $g_B A^\mu$ должно иметь ту же размерность, что и ∂/∂^μ , константа g_B должна иметь размерность $(4-d)/2$. Таким образом, для калибровочных констант $\Delta = 0$ и $\rho = -1/2$, и для калибровочной теории с единственной константой связи из формулы (18.6.8) находим:

$$\beta(g) = \frac{1}{2} [b_1(g) - g b_1'(g)]. \quad (18.6.10)$$

В частности, формула (11.2.20) показывает, что в квантовой электродинамике в однопетлевом порядке голый электрический заряд имеет полюс при $d \rightarrow 4$, причем

$$e_B = Z_3^{-1/2} e \rightarrow e - \frac{e^3}{12\pi^2} \frac{1}{d-4}. \quad (18.6.11)$$

Полагая $\beta_1(e) = -e^3/(12\pi^2)$ в формуле (18.6.10), находим:

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} \quad (18.6.12)$$

в согласии с предыдущим результатом (18.2.37).

Принято говорить, что константы связи $g^l(\mu)$, введенные в этом разделе, определены в схеме *минимального вычитания*. Существует и несколько иная и чуть более удобная схема. Простые полюсы $(d-4)^{-1}$ типично возникают от функций $(4\pi)^{d/2-2}\Gamma(2-d/2)$ (как в формуле (11.2.13)), и при $d \rightarrow 4$ эти функции имеют предел

$$(4\pi)^{2-d/2}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{2-d/2} - \gamma + \ln 4\pi, \quad (18.6.13)$$

где $\gamma = 0,5772157$ — постоянная Эйлера. Поэтому удобно везде в (18.6.1) совершить замену

$$\frac{1}{d-4} \rightarrow \frac{1}{d-4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln 4\pi. \quad (18.6.14)$$

Если выбран такой рецепт определения констант, говорят что они определены в схеме *модифицированного минимального вычитания*.

Одним из примечательных свойств определения констант в схеме минимального (или модифицированного минимального) вычитания является то, что поскольку ни в одном вычислении никогда не возникают множители ультрафиолетового обрезания, петлевые диаграммы имеют при $d = 4$ только полюсы, отвечающие логарифмическим, а не линейным, квадратичным и т. д. ультрафиолетовым расходимостям. Отсюда функция вычета $\beta_1^l(g)$ может содержать слагаемое порядка $g^a g^b g^c \dots$ только, если при $d = 4$ размерность g_V^l равна полной размерности констант g_V^a , g_V^b , g_V^c и т. д.:

$$\Delta_l = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c + \dots \quad (18.6.15)$$

Тогда из (18.6.8) следует, что это же верно для $\beta^l(g)$. В частности, в теории без суперперенормируемых констант (типа калибровочной теории с безмассовыми спинорами и без скаляров, например квантовой электродинамики с нулевой массой электрона) для всех констант $\Delta_l \leq 0$, так что *уравнения ренормгруппы для перенормируемых констант (с $\Delta_l = 0$) не изменяются при наличии любых неперенормируемых взаимодействий*⁵. Кроме того, в такой теории бета-функции для неперенормируемых констант являются полиномами конечного порядка по неперенормируемым константам,

причем каждый коэффициент в каждом полиноме определяется бесконечным рядом по степеням перенормируемой константы. Например, в теории фотонов и безмассовых электронов (предполагая инвариантность относительно P и преобразования $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$) не существует неперенормируемых взаимодействий размерностью $+5$ и есть ряд взаимодействий размерностью $+6$ (четырёхфермионные взаимодействия, а также чисто фотонные взаимодействия $F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}$) с константами f_i размерностью -2 . Бета-функция для f_i имеет вид $\sum_j \beta_{ij}(e) f_j$ с коэффициентами $\beta_{ij}(e)$, определяемыми степенным рядом по e .

18.7. Квантовая хромодинамика

Квантовая хромодинамика — современная теория сильных взаимодействий. Это неабелева калибровочная теория, основанная на калибровочной группе $SU(3)$. В дополнение к калибровочным полям в квантовую хромодинамику входят поля частиц спин $1/2$, известных как *кварки*. Существует шесть сортов (или «ароматов») кварков: u , s , t зарядом $2e/3$ и d , s , b зарядом $-e/3$. Кварки каждого аромата существуют в трех «цветовых» разновидностях, образующих фундаментальное представление **3** калибровочной группы $SU(3)$ *. Барионы типа протонов и нейтронов можно приближенно рассматривать как бесцветные связанные состояния трех кварков, полностью антисимметричные по цветам кварков, а мезоны типа ρ -мезона приближенно являются бесцветными связанными состояниями кварков и антикварков ¹¹.

В приближении, когда массами кварков можно пренебречь по сравнению с рассматриваемыми энергиями, обращение выражения (17.5.44) показывает, что голая константа связи в производной калибровочной теории имеет полюс, когда пространственно-временная размерность $d \rightarrow 4$, причем вычет в нем равен

* До того, как была предложена окончательная формулировка квантовой хромодинамики, ряд авторов высказывал гипотезу о существовании трех разновидностей кварков каждого аромата. Это делалось как с целью получить согласие с вероятностями распадов типа $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, так и для того, чтобы ввести новую степень свободы, что позволило бы объяснить симметрию волновой функции кварков-фермионов в барионе по спиновым и пространственным координатам, а также по аромату ¹¹.

$$g_B \rightarrow \left[\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^5) \right] \frac{1}{d-4},$$

где C_1 и C_2 определены формулами (17.5.33) и (17.5.34). Иными словами, в обозначениях предыдущего раздела

$$b_1(g) = \frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^5). \quad (18.7.1)$$

Подставляя это в (18.6.10), получаем:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^5). \quad (18.7.2)$$

В $SU(3)$ теории с n_f безмассовыми кварками в фундаментальном представлении $\mathbf{3}$ группы $SU(3)$ из формулы (17.5.35) находим:

$$C_1 = 3, \quad C_2 = n_f/2. \quad (18.7.3)$$

Так как кварки здесь считаются безмассовыми, эта формула может быть применима только в эффективной теории поля, полученной путем интегрирования по всем кваркам, которые тяжелее типичной рассматриваемой энергии E . Таким образом, n_f — число ароматов кварков массами, много меньшими E . С учетом этого замечания, из формул (18.7.2) и (18.7.3) вытекает, что

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{1}{6} n_f \right) + O(g^5). \quad (18.7.4)$$

Мы убеждаемся, что если только число сортов кварков массами меньше рассматриваемого масштаба энергий не превышает 16, теория асимптотически свободна. Поскольку на самом деле, по-видимому, имеется всего шесть сортов кварков разных масс, теория сильных взаимодействий, основанная на калибровочной группе $SU(3)$, является асимптотически свободной.

Именно открытие асимптотической свободы в неабелевых калибровочных теориях такого типа, совершенное в 1973 году Гроссом и Вильчеком¹² и Политцером¹³, убедило физиков-тео-

ретики в том, что найдена правильная теория сильных взаимодействий. Вычисления этих ученых сразу же объяснили загадочный результат знаменитого эксперимента 1968 года в SLAC по глубоконеупругому электрон-нуклонному рассеянию, из которого следовало, что сильные взаимодействия при больших энергиях становятся слабее*. (Мы подробнее обсудим этот эксперимент в разделе 20.6.) Однако историческое значение открытия асимптотической свободы в теориях Янга–Миллса заключается не только в том, что оно позволило объяснить старый экспериментальный результат, но и в том, что впервые, по крайней мере, при больших энергиях, открылись перспективы разумных вычислений по теории возмущений процессов сильного взаимодействия.

Вскоре обнаружилось, что асимптотическая свобода имеет, по крайней мере, еще одно применение. На первых порах после открытия асимптотической свободы было широко распространено мнение, что калибровочные бозоны в реалистичных янг-миллсовских теориях сильных взаимодействий должны быть достаточно тяжелыми, чтобы можно было объяснить, почему эти сильновзаимодействующие бозоны не были давно открыты. Следуя прецеденту с теорией слабых и электромагнитных взаимодействий (обсуждение этой теории см. в гл. 21), считалось, что массы калибровочных бозонов возникают за счет спонтанного нарушения цветовой $SU(3)$ калибровочной симметрии, обусловленного вакуумными средними скалярных полей в нетривиальном представлении этой группы. Однако такие сильновзаимодействующие скаляры должны давать положительные вклады в $\beta(g)$, что может разрушить асимптотическую свободу. Хуже того, в тео-

* Зи¹⁷ и, возможно, другие теоретики уже понимали, что этот экспериментальный результат можно объяснить в рамках теории с бета-функцией, которая становится отрицательной при малых положительных константах связи, однако вычисления $\beta(g)$ во всех перенормируемых теориях поля за исключением неабелевых калибровочных теорий приводили к $\beta(g) > 0$. С другой стороны, в 1972 году 'т Хоофт развил технику вычислений для расчета $\beta(g)$ в янг-миллсовских теориях и объявил в июне 1972 года на конференции по калибровочным теориям в Марселе¹⁶, что $\beta(g) < 0$, однако, занимаясь другими делами, он задержался с публикацией этого результата и разработкой его приложений, так что результат не привлек особого внимания.

рии с сильновзаимодействующими скалярными полями радиационные поправки, включающие слабые взаимодействия, повлекли бы сильные нарушения разных симметрий типа инвариантности относительно зарядового сопряжения и сохранения аромата, которые, как мы увидим далее, без этих скаляров не нарушались бы¹⁷. Поэтому было высказано предложение отбросить сильновзаимодействующие скаляры и принять, что глюоны — $SU(3)$ калибровочные бозоны — имеют нулевую массу¹⁸. Конечно, уменьшение константы сильного взаимодействия при больших энергиях или на малых расстояниях означает ее рост при низких энергиях или на больших расстояниях. Было высказано предположение, что это свойство может объяснить, почему на эксперименте не обнаруживаются безмассовые кварки и глюоны. Согласно этой гипотезе, в изолированном состоянии могут существовать только бесцветные частицы типа барионов и мезонов¹⁹. К сожалению, это утверждение все еще остается гипотезой и не превратилось в теорему, однако по прошествии двадцати лет мало кто сомневается в ее справедливости.

Даже несмотря на то, что кварки не могут материализоваться как свободные частицы, они в определенном смысле наблюдаются как струи, рождающиеся в процессах соударений при больших энергиях. Например, при аннигиляции электронов и позитронов конечное состояние во многих случаях имеет вид двух узких адронных струй, причем угловое распределение по углу θ между импульсами начального лептона и направлениями струй (в с.ц.м.) имеет вид $1 + \cos^2\theta$, как и следует из расчета электрон-позитронной аннигиляции в конечные кварк-антикварковые состояния на основе древесной диаграммы²⁰. Это можно понять²¹ и с помощью общего анализа инфракрасных расходимостей, сделанного в разделе 13.4. При ультравысоких энергиях следует ожидать, что вероятность физических процессов определяется вкладом низшего порядка теории возмущений, если этот вклад «инфракрасно безопасен», т. е. не становится инфракрасно расходящимся, когда все массы устремляются к нулю. Полная вероятность электрон-позитронной аннигиляции в адроны является инфракрасно безопасной, так как мы суммируем по всем адронным конечным состояниям. (Электромагнитными эффектами высших порядков мы здесь пренебрегаем.) Поэтому можно использовать теорию возмущений, откуда сразу же следует, что отношение R

этой вероятности к вероятности процесса $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ равно $R = 3\sum_q Q_q^2$, где сумма берется по всем кварковым ароматам, Q_q — заряд кварков в единицах e , а множитель 3 — число цветов. (Например, в широком интервале энергий между $m_b \approx 4,5$ ГэВ и $m_t \approx 180$ ГэВ величина $R \approx 3[2(2/3)^2 + 3(-1/3)^2] = 11/3$.) С другой стороны, вероятность электрон-позитронной аннигиляции в какое-то определенное состояние кварков и глюонов не является инфракрасно безопасной, поэтому ее вообще нельзя вычислить по теории возмущений. На самом деле, она просто равна нулю. Между этими двумя крайними значениями находится вероятность электрон-позитронной аннигиляции в некоторое число струй, несущих определенный полный импульс и заряд, совместно с множеством не входящих в струи ненаблюдаемых адронов с ограниченной полной энергией. Как обсуждалось в разделе 13.4, эта вероятность инфракрасно безопасна. Поэтому ее можно вычислить при высоких энергиях в древесном приближении теории возмущений, отождествляя струи (в этом порядке теории возмущений) с конечными кварками, антикварками и глюонами. Можно даже рассчитать вероятность трехструйных событий, возникающих от древесных диаграмм, в которых глюон испускается конечным кварком или антикварком, и использовать сравнение результатов расчетов с экспериментом для определения величины $\alpha_s(\mu)$ ²². Но теорию возмущений нельзя использовать для предсказания распределения импульсов внутри струи, поскольку такое дифференциальное сечение не является инфракрасно безопасным. Аналогичные замечания касаются рождения струй в глубоконеупругих лептон-адронных соударениях, которые мы обсудим в разделе 20.6, однако анализ усложняется наличием адронов в начальном состоянии.

Следуя тем же рассуждениям, что и в разделе 12.5, можно записать наиболее общий перенормируемый лагранжиан квантовой хромодинамики без скалярных полей в виде:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha}^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} - \sum_n \bar{\psi}_n [\not{\partial} - ig A_{\alpha} t_{\alpha} + m_n] \psi_n, \quad (18.7.5)$$

где A_{α}^{μ} — цветовой калибровочный вектор-потенциал, $F_{\alpha}^{\mu\nu}$ — цветовой калибровочно-ковариантный тензор напряженности поля, g — константа сильного взаимодействия, t_{α} — полный набор генераторов цветовой SU(3) симметрии в представлении **3** (т. е. набор

3×3 матриц со столбцами и строками, помеченными тремя цветами кварков), нормированных условием $\text{Tr}(t_\alpha t_\beta) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}$, индекс n нумерует ароматы кварков, цветовые индексы кварков опущены. Как это было показано для электродинамики в разделе 12.5, данный лагранжиан обладает важными дополнительными симметриями: он сохраняет пространственную четность*, зарядовую четность и число кварков каждого аромата (минус число соответствующих антикварков), в том числе, давно известное квантовое число «странность», подсчитывающее число s -кварков. Таким образом, квантовая хромодинамика немедленно объясняет загадочный факт, что сильные взаимодействия обладают различными симметриями, не являющимися симметриями всех взаимодействий. Из этих рассуждений становится ясно также, почему в этой теории, как мы указывали выше, слабые взаимодействия не вносят сильных нарушений четности, зарядовой четности, странности и т. д. Поскольку все перенормируемые взаимодействия кварков и глюонов сохраняют эти симметрии, то при энергиях E , много меньших масс m_W частиц-переносчиков слабых взаимодействий, они могут быть нарушены только неперенормируемыми слагаемыми в лагранжиане эффективной теории поля, например, взаимодействиями вида $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$, которые, как обсуждалось в разделе 12.3, будут подавлены отрицательными степенями m_W , а также константами слабых взаимодействий.

Конечно, не исключено, что кварки и глюоны обладают новым типом *сильного* взаимодействия на шкале энергий Λ' , много большей чем характерная для квантовой хромодинамики шкала Λ . Например, как обсуждается в разделе 22.5, кварки могут быть связанными состояниями взаимодействующих с калибровочными полями более фундаментальных фермионов, причем асимптотически свободные константы связи становятся сильными при энергиях порядка Λ' и запирают эти фермионы внутри кварков. В этом случае эффективная плотность лагранжиана для кварков при энергиях $E \ll \Lambda'$ будет содержать неперенормируемые взаимодействия типа $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$, которые подавлены только степенями E/Λ' . Эти взаимо-

* Хотя это и не было известно в 1973 году, мы увидим в разделе 23.6, что непертурбативные эффекты могут нарушать четность в квантовой хромодинамике. Предлагались различные способы избежать сильного нарушения четности, однако до сих пор неясно, какой из них правилен.

действия могут проявиться не только в малых нарушениях симметрий типа сохранения четности или аромата кварков при обычных энергиях, но и в отклонениях²³ от количественных предсказаний квантовой хромодинамики при энергиях, стремящихся к Λ' .

Рассмотрим более детально поведение константы связи квантовой хромодинамики. В низшем порядке уравнение ренормализационной группы согласно (18.7.4) имеет вид:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{1}{6} n_f \right). \quad (18.7.6)$$

Его решение имеет вид

$$\alpha_s(\mu) \equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln(\mu^2/\Lambda^2)}, \quad (18.7.7)$$

где Λ — постоянная интегрирования. Эта формула выявляет характерное свойство теорий безмассовых (или, как для кварков, почти безмассовых) частиц. В таких теориях одна из безразмерных констант связи в лагранжиане заменяется на свободный размерный параметр. В выражении (18.7.7) не содержится свободных безразмерных параметров, но есть один свободный параметр размерностью массы — постоянная интегрирования Λ .

Такие расчеты были осуществлены вплоть до трехпетлевого порядка. В этом порядке уравнения ренормализационной группы имеют вид²⁴

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = -\beta_0 \frac{g^3(\mu)}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5(\mu)}{128\pi^4} - \beta_2 \frac{g^7(\mu)}{8192\pi^6}, \quad (18.7.8)$$

где β_n — численные коэффициенты:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f, \quad (18.7.9)$$

$$\beta_1 = 51 - \frac{19}{3} n_f, \quad (18.7.10)$$

$$\beta_2 = 2857 - \frac{5033}{9} n_f - \frac{325}{27} n_f^2. \quad (18.7.11)$$

Решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu) &\equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi} \\ &= \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \left[1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln[\ln(\mu^2/\Lambda^2)]}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\beta_1^2}{\beta_0^4 \ln^2(\mu^2/\Lambda^2)} \left(\left(\ln[\ln(\mu^2/\Lambda^2)] - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{8\beta_2\beta_0}{\beta_1^2} - \frac{5}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (18.7.12)$$

Следует напомнить, что в приведенных формулах n_f — число ароматов кварков с массами, меньшими рассматриваемых энергий. В каждой области энергий между двумя последовательными кварковыми массами имеем разные значения n_f и разные Λ , выбранные так, чтобы сделать $g(\mu)$ непрерывной при каждой массе кварка. В частности, в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию электронов типичные энергии превышают только первые четыре массы кварков (u, d, s, c), так что в данном случае следует выбрать $n_f = 4$. С другой стороны, эксперименты на электрон-позитронных коллайдерах типа PEP, PETRA, TRISTAN и LEP проводятся при энергиях, намного превышающих массу пятого кварка b , так что в этих экспериментах следует выбирать $n_f = 5$. Но эти результаты можно выразить через те, которые получены при $n_f = 4$, подгонкой решений уравнений ренормгруппы к значению массы b -кварка.

Таким способом найдено²⁵ (используя при вычислении β_2 рецепт модифицированного минимального вычитания), что константа сильного взаимодействия, экстраполированная к точке $m_Z = 91,2$ ГэВ, равна $\alpha_s(m_Z) \in g_s^2(m_Z)/4\pi = 0,118 \pm 0,006$, что соответствует $L \gg 250$ МэВ при энергиях μ в интервале $m_b \ll \mu \ll m_t$, когда $n_f = 5$. Более современное исследование²⁶ рождения адронов в e^+e^- -аннигиляции в области Z -резонанса позволило непосредственно измерить значение $\alpha_s(m_Z) = 0,1200 \pm 0,0025$ с теоретической неопределенностью $\pm 0,0078$, что соответствует $\Lambda = 253_{-96}^{+130}$ МэВ.

18.8. Исправленная теория возмущений*

Потрясшая основы работа¹ Гелл-Манна и Лоу в значительной степени была посвящена проблеме «исправления» теории возмущений, т. е. использованию идей ренормгруппы и результатов теории возмущений в данном порядке для того, чтобы что-то сказать о следующем порядке теории возмущений. Чтобы пояснить это, вернемся к изученному Гелл-Манном и Лоу частному случаю — поляризации вакуума в квантовой электродинамике.

Напомним, что перенормированный электрический заряд e_μ при скользящем масштабе μ определяется выражением (18.2.36) через голый заряд e_B в виде

$$e_\mu = N_\mu^{(A)-1} e_B, \quad (18.8.1)$$

где $N_\mu^{(A)}$ — постоянная, которая после включения в неперенормированное электромагнитное поле дает поле, перенормированное на шкале μ (см. выражение (18.2.21)). Поэтому можно определить перенормированный (и, следовательно, не зависящий от обрезания) полный фотонный пропагатор $\Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu)$ через полный пропагатор $\Delta'_{B\rho\sigma}(q, e_B)$ неперенормированного поля как

$$\Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu) = N_\mu^{(A)2} \Delta'_{B\rho\sigma}(q, e_B) \quad (18.8.2)$$

так что при этом функция $e_\mu^2 \Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu)$ не зависит ни от μ , поскольку она равна $e_B^2 \Delta'_{B\rho\sigma}(q, e_B)$, ни от обрезания, поскольку e_μ и $\Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu)$ — перенормированные величины. (Мы неявно показываем здесь зависимость от обрезания.) Однако из лоренц-инвариантности и размерного анализа следует, что эта функция должна иметь вид

$$e_\mu^2 \Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu) = \frac{\eta_{\rho\sigma} d(q^2/\mu^2, e_\mu)}{q^2} + \text{слагаемые с } q_\rho q_\sigma. \quad (18.8.3)$$

Так как (18.8.3) не зависит от μ , можно положить $\mu = \sqrt{q^2} \equiv q$, так что

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

$$d(q^2/\mu^2, e_\mu) = d(1, e_q). \quad (18.8.4)$$

Посмотрим теперь, что может это выражение сказать нам о структуре ряда теории возмущений для $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$. Бета-функция для e имеет разложение

$$\beta(e) = b_1 e^3 + b_2 e^5 + b_3 e^7 + \dots \quad (18.8.5)$$

Тогда уравнение ренормгруппы для e_μ имеет решение в виде степенного ряда

$$\begin{aligned} e_q^2 = e_\mu^2 &- b_1 e_\mu^4 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - b_2 e_\mu^6 \ln \frac{q^2}{\mu^2} \\ &- \left(\frac{b_1 b_2}{2} \ln^2 \frac{q^2}{\mu^2} + b_3 \ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) e_\mu^8 + \dots. \end{aligned} \quad (18.8.6)$$

Если при этом разложить и d :

$$d(1, e) = e^2 + d_1 e^4 + d_2 e^6 + d_3 e^8 + \dots, \quad (18.8.7)$$

то

$$\begin{aligned} d(q^2/\mu^2, e_\mu) = d(1, e_q) = e_\mu^2 &- \left(b_1 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_1 \right) e_\mu^4 - \left(b_2 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_2 \right) e_\mu^6 \\ &- \left(\frac{b_1 b_2}{2} \ln^2 \frac{q^2}{\mu^2} + (b_3 - b_1 d_2) \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_3 \right) e_\mu^8 + \dots. \end{aligned} \quad (18.8.8)$$

Заметим, что главные степени $\ln(q^2/\mu^2)$ в каждом порядке для $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ равны, соответственно, 0, 1, 1, 2, 3, ... Кроме того, если мы вычислим $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ в порядке e_μ^6 , и определим, тем самым, b_1 и b_2 , то немедленно сможем выписать коэффициент при старшем логарифме в порядке e_μ^8 в виде $-\frac{1}{2}b_1 b_2$. Каждый из этих результатов очень трудно вывести без использования метода ренормгруппы.

Задачи

1. Рассмотрите $SU(N)$ калибровочную теорию со скалярным полем в фундаментальном представлении $SU(N)$. Вычислите бета-функцию для константы связи в однопетлевом приближении, включая вклад скалярной петли. (Совет: используйте калибровку фонового поля с постоянным фоновым полем.)
2. Пусть бета-функция $\beta(g)$ для теории с положительной константой связи g имеет простой нуль при $g = g_*$, где $\beta(g) \rightarrow a(g_* - g)$ с $a > 0$. Каково асимптотическое поведение поправки к старшему слагаемому $\propto E^{-\gamma'(g_*)}$ в множителе N_E^{d-1} , связанным с включением оператора O в среднее по вакууму.
3. Покажите, что в теории с $\beta(g) = bg^2 + b'g^3 + b''g^4 + \dots$ можно путем переопределения константы связи придать коэффициенту b'' любое значение.
4. Вычислите эффективный электрический заряд, который следует использовать при изучении процессов при энергии 100 ГэВ, учтя при этом все известные заряженные кварки и лептоны с массами меньше 100 ГэВ.
5. Рассчитайте асимптотическое поведение электронного пропагатора в квантовой электродинамике при большом значении 4-импульса. (Можно воспользоваться однопетлевым значением Z_2 , вычисленным ранее, например, в разделе 11.4.)
6. Вычислите аномальную размерность ν в первом порядке разложения по степеням $\epsilon = 4 - d$ для $O(N)$ -инвариантной теории скалярных полей $\phi_n(x)$ с $n = 1, \dots, N$, принадлежащих векторному представлению $O(N)$, с взаимодействием $\frac{1}{4}g(\sum_n \phi_n^2)^2$.

Список литературы

1. Gell-Mann, M. and Low, F.E., Phys. Rev., 95, 1300 (1954). Несколько ранее вопрос о свободе выбора определения перенормированных констант связи обсуждался в работе: Stueckelberg,

- E.G.C. and Peterman, A., *Helv. Phys. Acta*, **26**, 499 (1953) (именно в этой работе был введен неудачный термин «ренормализационная группа»), но без объяснения связи с вычислениями физических процессов при очень больших или очень малых энергиях. После работы Гелл-Манна и Лоу методы ренормгруппы были развиты в монографии: Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. *Введение в теорию квантованных полей* (М., Физматлит, 1957), гл. VIII и ссылки в ней. Интерес к методам ренормгруппы в физике частиц оживился в 1970 г. в работах: Callan, C.G., *Phys. Rev.*, **D2**, 1541 (1970); Symanzik, K., *Commun. Math. Phys.*, **18**, 227 (1970); Callan, C.G., Coleman, S., and Jackiw, R., *Ann. Phys.* (New York), **59**, 42 (1970).
2. Wilson, K.G., *Phys. Rev.*, **B4**, 3174, 3184 (1971); *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 773 (1975).
3. Collins, J.C., *Phys. Rev.*, D10, 1213 (1974).
- 3a. Jost, J. and Luttinger, J.M., *Helv. Phys. Acta*, 23, 201 (1950).
4. Это значение цитируется в таблицах *Particle Data Group* в 1994 году. Обзор более поздних расчетов см. в работе: Altarelli, G., CERN preprint CERN-TH-95/203. Более новое значение $\alpha^{-1}(m_Z)$ находится в интервале от 128,89 до 129,08.
- 4a. Coleman, S. and Weinberg, E., *Phys. Rev.*, **D7**, 1888 (1973).
- 4b. Landau, L.D., in *Niels Bohr and the Development of Physics* (Pergamon Press, New York, 1955) и цитированные там более ранние работы.
- 4c. Adler, S.L., Callan, C.G., Gross, D.J., and Jackiw, R., *Phys. Rev.*, **D6**, 2982 (1972); Baker, M. and Johnson, K., *Physica*, **96A**, 120 (1979).
- 4d. Дискуссии и ссылки см.: Glimm, J. and Jaffe, A., *Quantum Physics — A Functional Integral Point of View* (Springer Verlag, New York, 1987), Section 21.6; Fernandez, R., Froelich, J., and Sokal, A.D., *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory* (Springer Verlag, Berlin, 1992), ch. 15.

5. Weinberg, S., in General Relativity, S.W.Hawking and W. Israel, eds. (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979), p. 790.
6. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D8**, 3497 (1973).
7. Первое вычисление сделано в работе: Wilson, K.G. and Fischer, M.E., *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 240 (1972); Wilson, K.G., *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 548 (1972). Обзоры см.: Wilson, K.G. and Kogut, J., *Phys. Rep.*, **12C**, No. 2 (1974); Fischer, M.E., *Rev. Mod. Phys.*, **46**, 597 (1974); Brézin, E., LeGuillou, J.C., and Zinn-Justin, J., in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, eds. C. Domb and M.S. Green (Academic Press, London, 1975).
8. См., например: Chaikin, P.M. and Lubensky, T.C., *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995), p. 231.
- 8a. Brézin, E., LeGuillou, J.C., Zinn-Justin, J., and Nickel, B.G., *Phys. Lett.*, **44A**, 227 (1973); Wilson, K.G. and Kogut, J., [7].
9. 't Hooft, G., *Nucl. Phys.*, **B61**, 455 (1973); *Nucl. Phys.*, **B82**, 444 (1973). Приведенный здесь вывод является несколько упрощенной версией вывода 'т Хофта.
10. Greenberg, O.W., *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 598 (1964); Han, M.Y. and Nambu, Y., *Phys. Rev.*, **139**, B1006 (1965); Bardeen, W.A., Fritzsche, H., and Gell-Mann, M., in *Scale and Conformal Invariance in Hadron Physics*, ed. by R. Gatto (Wiley, New York, 1973).
11. Gell-Mann, M., *Phys. Lett.*, **8**, 214 (1964); Zweig, G., CERN preprint TH401 (1964).
12. Gross, D.J. and Wilczek, F., *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1343 (1973).
13. Politzer, H.D., *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1346 (1973).
14. Bloom, E.D. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 930 (1969); Breidenbach, M. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 933 (1969); Friedman, J.L. and Kendall, H.W., *Ann. Rev. Nuclear Science*, **22**, 203 (1972).

15. Zee, A., unpublished.
16. 't Hooft, G., unpublished.
17. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D8**, 605 (1973).
18. Gross, D.J. and Wilczek, F., *Phys. Rev.*, **D8**, 3633 (1973); Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 494 (1973).
19. Аналогичные идеи были высказаны еще до открытия асимптотической свободы в работе: Fritzsche, H., Gell-Mann, M., and Leutwyler, H., *Phys. Lett.*, **47B**, 365 (1973).
20. Hanson, G. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1609 (1975); Schwitters, R.F., in *Proc. of the Int. Conf. on Lepton and Photon Interactions at High Energy at Stanford*, 1975, ed. W.T. Kirk (SLAC, Stanford, 1975), p. 5; Hanson, G., SLAC Report SLAC-PUB-1814 (1976).
21. Sterman, G. and Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 1436 (1977).
22. Ellis, J., Gaillard, M.K., and Ross, G.G., *Nucl. Phys.*, **B111**, 253 (1976).
23. Eichten, E., Lane, K., and Peskin, M., *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 811 (1983).
24. См. обзор: Hinchliffe, I., in *Review of Particle Properties*, *Phys. Rev.*, **D50**, 1177 (1994), Sec. 25.
25. Altarelli, G., in *Proc. of the Rencontres de Hanoi*, CERN preprint CERN-PPE/94-71 (1994).
26. Abe, K. et al. (SLD collaboration), *Phys. Rev.*, **D51**, 962 (1995). Обработка более ранних данных по распаду Z^0 в адроны, выполненная М. Шифманом (Minnesota preprint hep-ph/9501222 (1995)), давала значение $\alpha_s(m_Z) = 0,125 \pm 0,005$, соответствующее $\Lambda \approx 500$ МэВ.

Спонтанно нарушенные глобальные симметрии

Многие достижения физики в нашем веке были основаны на принципах симметрии, прежде всего, на пространственно-временных симметриях эйнштейновской частной теории относительности 1905 года, а также на внутренних симметриях, например, на открытой в 1930-е годы приближенной $SU(2)$ изоспиновой симметрии. Поэтому, когда в 1960-е годы было обнаружено, что число внутренних симметрий больше, чем это можно было бы предположить на основании изучения спектра элементарных частиц, это стало волнующим открытием. Существуют точные или приближенные симметрии исходной теории, которые являются «спонтанно нарушенными», т. е. они не реализуются как преобразования симметрии физических состояний теории, в частности, не оставляют инвариантным вакуумное состояние. Прорывом стало открытие нарушенной приближенной глобальной $SU(2) \times SU(2)$ симметрии сильных взаимодействий, о чем подробно будет говориться в разделе 19.3. Вскоре последовало открытие точной, но спонтанно нарушенной локальной $SU(2) \times U(1)$ симметрии слабых и электромагнитных взаимодействий, которую мы рассмотрим вместе с более общими локальными симметриями в гл. 21. Однако в данной главе мы начнем с общего обсуждения нарушенных глобальных симметрий, а затем перейдем к физическим примерам.

19.1. Вырожденные вакуумы

Не нужно далеко ходить за примерами спонтанного нарушения симметрии. Рассмотрим стул. Уравнения, которым подчиняется поведение атомов стула, являются симметричными относительно

вращений, однако решение этих уравнений — реальный стул — имеет определенную ориентацию в пространстве. Ниже мы будем рассматривать не столько нарушения симметрий *телами* типа стула, сколько нарушение симметрии основного состояния любой реалистичной квантовой теории поля, т. е. вакуума.

Спонтанное нарушение симметрии в теории поля всегда связано с вырождением вакуумных состояний. Рассмотрим, например, преобразование симметрии действия и меры, используемой при интегрировании, которое линейно действует на множество скалярных полей $\phi_n(x)$:

$$\phi_n(x) \rightarrow \phi'_n(x) = \sum_m L_{nm} \phi_m(x). \quad (19.1.1)$$

(Поля ϕ_n не обязаны быть элементарными полями, а могут быть составными объектами типа $\bar{\psi} \Gamma_n \psi$.) Как мы видели в разделе 16.4, квантовое эффективное действие $\Gamma[\phi]$ будет обладать той же симметрией,

$$\Gamma[\phi] = \Gamma[L\phi]. \quad (19.1.2)$$

В состоянии вакуума среднее значение $\phi(x)$ должно соответствовать минимуму энергии вакуума $-\Gamma[\phi]$, достигающемуся, например, при $\phi(x) = \bar{\phi}$ ($\bar{\phi}$ — постоянная). Однако, если $L\bar{\phi} \neq \bar{\phi}$, то вакуум не единственен: $-\Gamma[\phi]$ имеет одинаковое значение как в точке $\bar{\phi}$, так и в точке $\phi = L\bar{\phi}$. В простейшем частном случае, когда преобразование симметрии (19.1.1) является отражением $\phi \rightarrow -\phi$, если $-\Gamma[\phi]$ имеет минимум при ненулевом значении $\bar{\phi}$ поля ϕ , то на самом деле имеются два минимума при значениях $\bar{\phi}$ и $-\bar{\phi}$, причем каждый соответствует состоянию нарушенной симметрии.

Мы еще не готовы заключить, что в этих случаях симметрия нарушается, поскольку еще не исключили возможность, что истинный вакуум является линейной суперпозицией вакуумных состояний с разными средними значениями ϕ_m , не нарушающей предполагаемой симметрии. Например, в теории с симметрией относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$, даже если $\Gamma[\phi]$ имеет минимум при некотором ненулевом значении $\bar{\phi}$ поля ϕ , откуда мы знаем, что истинный вакуум является одним из состояний $|\text{VAC}, \pm\rangle$, в котором ϕ имеет средние значения $\bar{\phi}$ и $-\bar{\phi}$, а не какой-то линейной комбинацией типа $|\text{VAC}, +\rangle + |\text{VAC}, -\rangle$, сохраняющей

симметрию относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$? Исходная симметрия относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$ означает, что вакуумные матричные элементы гамильтониана равны

$$\langle \text{VAC}, + | H | \text{VAC}, + \rangle = \langle \text{VAC}, - | H | \text{VAC}, - \rangle \equiv a$$

(с действительным a) и

$$\langle \text{VAC}, + | H | \text{VAC}, - \rangle = \langle \text{VAC}, - | H | \text{VAC}, + \rangle \equiv b$$

(с действительным b), так что собственные состояния гамильтониана равны $|\text{VAC}, +\rangle \pm |\text{VAC}, -\rangle$, а энергии этих состояний равны $a \pm |b|$. Такие собственные состояния с данной энергией инвариантны (или инвариантны с точностью до знака) относительно преобразования симметрии $\phi \rightarrow -\phi$. На самом деле, нечто подобное имеет место и для стульев. Квантово-механическое основное состояние изолированного стула является на самом деле инвариантным относительно вращений. Это состояние с нулевыми значениями квантовых чисел углового момента, не имеющее по этой причине определенной ориентации в пространстве.

Спонтанное нарушение симметрии в действительности возникает только для идеализированных бесконечно больших систем. Нарушение симметрии для стула возникает из-за того, что у него имеется макроскопический момент инерции I , и основное состояние стула является частью пирамиды вращательных возбужденных состояний, энергии которых отделены друг от друга крохотными интервалами порядка $\hbar^2/I$. Поэтому вектор состояния стула становится необычайно чувствительным к внешним возмущениям. Даже очень слабые внешние поля сдвигают энергию стула на величину, намного превышающую разность энергий между вращательными уровнями. В результате, наложение любого вращательно несимметричного внешнего поля приведет к тому, что основное или любое другое состояние стула с определенными квантовыми числами углового момента очень быстро приобретет компоненты с другими квантовыми числами момента. Сравнительно стабильные относительно малых внешних возмущений состояния стула — не те, которые имеют определенные значения квантовых чисел углового момента, а те, которые обладают определенной ориентацией, и в которых нарушена вращательная симметрия исходной теории.

Для вакуума возможность спонтанного нарушения симметрии также связана с большими размерами системы, в частности, с большим пространственным объемом. В предыдущем примере симметрии относительно отражений недиагональный матричный элемент b гамильтониана включает интегрирование по полевым конфигурациям, которые туннелируют от минимума при $\phi = \bar{\phi}$ к минимуму при $\phi = -\bar{\phi}$, так что этот матричный элемент меньше, чем диагональный матричный элемент a , на коэффициент проницаемости барьера, который в случае пространственного объема V имеет вид $\exp(-CV)$, где C — положительная константа*, зависящая от микроскопических параметров теории.

Таким образом, два собственных состояния энергии $|VAC, +\rangle \pm |VAC, -\rangle$ существенно вырождены для любого макроскопического объема и поэтому сильно перемешиваются любым возмущением, являющимся нечетным функционалом от ϕ . Даже если такое возмущение H' очень мало, его диагональные элементы $\langle VAC, \pm | H' | VAC, \pm \rangle$ будут отличаться существенно сильнее, чем экспоненциально подавленные недиагональные элементы как H , так и возмущения. Следовательно, вакуумные собственные состояния возмущенного гамильтониана будут очень близки к одному из состояний с нарушенной симметрией $|VAC, \pm\rangle$, которые диагонализуют возмущение, а не к инвариантным состояниям $|VAC, +\rangle \pm |VAC, -\rangle$. В случае очень малых возмущений какое же из состояний $|VAC, \pm\rangle$ является истинным вакуумом? Это зависит от возмущения, но поскольку два состояния связаны преобразованием симметрии исходного гамильтонианом, такая зависимость несущественна; если возмущение достаточно мало, ни один наблюдатель не сможет обнаружить разницу.

В случае пространства бесконечного объема обращение в нуль матричных элементов между вакуумными состояниями с разными средними значениями поля является точным утверждением¹. В случае бесконечного объема произвольное вакуумное состояние $|v\rangle$ можно определить как состояние с нулевым импульсом

* Например, по аналогии с классической задачей волновой механики о прохождении сквозь барьер, для лагранжиана вида $-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$ имеем $C = \int_{-\bar{\phi}}^{+\bar{\phi}} \sqrt{2V(\phi)} d\phi$. Мы не станем заниматься вычислением недиагонального матричного элемента b , поскольку вскоре покажем в общем виде, что он обращается в нуль в случае бесконечного объема.

$$\mathbf{P}|v\rangle = 0, \quad (19.1.3)$$

для которого это собственное значение импульса *дискретно*. (Таким образом, исключаются одночастичные или многочастичные состояния, для которых нулевое собственное значение импульса всегда есть часть континуума значений импульса в пространстве с бесконечным объемом.) В общем случае возможно существование нескольких подобных состояний. Обычно их можно разложить в дискретное множество, так что наши обозначения будут рассматривать эти состояния как дискретные. Они выбираются ортонормированными:

$$\langle u | v \rangle = \delta_{uv}. \quad (19.1.4)$$

Любой матричный элемент произведения локальных эрмитовых операторов при равных временах, взятый между этими состояниями, можно выразить как сумму по состояниям:

$$\begin{aligned} \langle u | A(\mathbf{x})B(0) | v \rangle &= \sum_w \langle u | A(0) | w \rangle \langle w | B(0) | v \rangle \\ &+ \int d^3p \sum_N \langle u | A(0) | N, \mathbf{p} \rangle \langle N, \mathbf{p} | B(0) | v \rangle e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (19.1.5)$$

где $|N, \mathbf{p}\rangle$ — множество ортонормированных состояний континуума с определенным трехмерным импульсом $\mathbf{p}$, которое вместе с $|b\rangle$ покрывает все физическое гильбертово пространство. (Здесь N может включать как непрерывные, так и дискретные метки. Кроме того, мы опускаем временные аргументы.) Предположим без доказательства, что поскольку $|N, \mathbf{p}\rangle$ принадлежат непрерывному спектру оператора импульса $\mathbf{P}$, зависимость матричных элементов от $\mathbf{p}$ достаточно гладкая (т.е. интегрируемая по Лебегу), и можно использовать теорему Римана–Лебега², так что интеграл по $\mathbf{p}$ обращается в нуль при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Тогда в этом пределе имеем:

$$\langle u | A(\mathbf{x})B(0) | v \rangle \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sum_w \langle u | A(0) | w \rangle \langle w | B(0) | v \rangle. \quad (19.1.6)$$

Аналогично,

$$\langle u | B(0)A(\mathbf{x}) | v \rangle \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sum_w \langle u | B(0) | w \rangle \langle w | A(0) | v \rangle. \quad (19.1.7)$$

Однако из соображений причинности следует, что коммутатор при равных временах $[A(\mathbf{x}), B(0)]$ обращается в нуль при $\mathbf{x} \neq 0$ (см. раздел 5.1), так что матричные элементы (19.1.6) и (19.1.7) равны и поэтому эрмитовы матрицы $\langle u|A(0)|v\rangle, \langle u|B(0)|v\rangle$ и т. д. должны все коммутировать друг с другом. Отсюда следует, что все они могут быть одновременно диагонализированы. Переходя, если нужно, к этому базису, имеем для каждого эрмитового локального оператора $A(\mathbf{x})$ теории:

$$\langle u|A(0)|v\rangle = \delta_{uv}a_v, \quad (19.1.8)$$

где a_v — действительное число, равное среднему значению A в состоянии $|v\rangle$. Итак, в случае бесконечного объема любой гамильтониан, построенный из локальных операторов, будет иметь нулевые матричные элементы между разными вакуумами $|v\rangle$. В отсутствие недиагональных слагаемых в гамильтониане любые два состояния $|v\rangle$, связанные преобразованием симметрии, будут вырожденными. Нарушающее симметрию возмущение, построенное из таких локальных операторов, будет в том же базисе диагональным, и поэтому будет приводить к основному состоянию, которое является одним из $|v\rangle$, а не их линейной комбинацией.

Радует и то, что вакуумные состояния $|v\rangle$, которые стабильны относительно малых зависящих от поля возмущений, являются также теми вакуумными состояниями, для которых выполняется условие кластерного разложения (см. гл. 4). Этот принцип требует, что для физического вакуумного состояния $|\text{VAC}\rangle$

$$\langle \text{VAC}|A(\mathbf{x})B(0)|\text{VAC}\rangle \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \langle \text{VAC}|A(\mathbf{x})|\text{VAC}\rangle \langle \text{VAC}|B(0)|\text{VAC}\rangle. \quad (19.1.9)$$

Это условие удовлетворяется, если взять вакуумное состояние $|\text{VAC}\rangle$ как любое из состояний $|v\rangle$ в базисе, определенном выражением (19.1.8), но не как произвольную линейную комбинацию нескольких $|v\rangle$.

19.2. Голдстоуновские бозоны

Перейдем теперь к случаю спонтанно нарушенной *непрерывной* симметрии. В этом случае существует теорема, что (с одним

важным исключением, которое рассматривается в гл. 21) спектр физических частиц должен содержать по одной частице нулевой массы и нулевого спина для каждой нарушенной симметрии. Такие частицы, известные как голдстоуновские бозоны (или бозоны Намбу–Голдстоуна), впервые были рассмотрены в конкретных моделях Голдстоуном³ и Намбу⁴, а два общих доказательства их существования были представлены Голдстоуном, Саламом и мной⁵. В данном разделе мы приведем оба доказательства, а затем перейдем к рассмотрению свойств голдстоуновских бозонов.

Предположим, что действие и мера инвариантны относительно преобразований непрерывной симметрии, при которых набор эрмитовых скалярных полей $\phi_n(x)$ (элементарных или составных) подвергается линейным бесконечно малым преобразованиям

$$\phi_n(x) \rightarrow \phi_n(x) + i\varepsilon \sum_m t_{nm} \phi_m(x), \quad (19.2.1)$$

где it_{nm} — конечная действительная матрица. Тогда, как мы показали в разделе 16.4, эффективное действие также инвариантно относительно этого преобразования:

$$\sum_{n,m} \int \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_n(x)} t_{nm} \phi_m(x) d^4x = 0. \quad (19.2.2)$$

Ограничимся рассмотрением случая трансляционно-инвариантной теории с постоянными полями ϕ_n . Как было показано в разделе 16.2, в этом случае эффективное действие имеет вид

$$\Gamma[\phi] = -\int V(\phi), \quad (19.2.3)$$

где $\mathcal{V}$ — пространственно-временной объем, а $V(\phi)$ принято называть *эффективным потенциалом*. Теперь формула (19.2.2) может быть записана в виде:

$$\sum_{n,m} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n} t_{nm} \phi_m = 0. \quad (19.2.4)$$

Будем использовать это требование симметрии в виде, получающимся еще одним дифференцированием по ϕ_i :

$$\sum_n \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi_n} t_{nl} + \sum_{n,m} \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_l} t_{nm} \varphi_m = 0. \quad (19.2.5)$$

Рассмотрим случай, когда φ_n принимает значение в минимуме $V(\varphi)$, т.е. значение, равное среднему по вакууму $\bar{\varphi}_n$. Так как $V(\varphi)$ стационарно в своем минимуме, первое слагаемое в (19.2.5) обращается в нуль, так что

$$\sum_{n,m} \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_l} \Big|_{\varphi=\bar{\varphi}} t_{nm} \bar{\varphi}_m = 0. \quad (19.2.6)$$

Из общих результатов раздела 16.1 следует, что вторая производная в (19.2.6) есть просто сумма всех связанных одностично неприводимых фейнмановских диаграмм в импульсном представлении с внешними линиями, помеченными индексами n и l и несущими нулевой 4-импульс. В конце раздела 16.1 показано, что эта производная связана с обратным пропагатором в импульсном пространстве равенством

$$\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_l} = \Delta_{nl}^{-1}(0), \quad (19.2.7)$$

так что из (19.2.6) следует

$$\sum_{n,m} \Delta_{nl}^{-1}(0) t_{nm} \bar{\varphi}_m = 0. \quad (19.2.8)$$

Таким образом, если симметрия нарушена, так что $\sum_m t_{nm} \bar{\varphi}_m$ не равно нулю, тогда эта величина есть собственный вектор $\Delta_{nl}^{-1}(0)$ с нулевым собственным значением. Из существования такого собственного вектора вытекает, что $D_{nl}(q)$ имеет полюс в точке $q^2 = 0$. Порядок вычета в полюсе при $q^2 = 0$ равен размерности пространства векторов $t\bar{\varphi}$, где t пробегает по значениям всех генераторов непрерывных симметрий теории. Грубо говоря, на каждую независимую нарушенную симметрию приходится один безмассовый бозон.

В классическом примере нарушенной симметрии лагранжиан включает набор N действительных скалярных полей φ_n и имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_n \partial_\mu \Phi_n \partial^\mu \Phi_n - \frac{\mu^2}{2} \sum_n \Phi_n \Phi_n - \frac{g}{4} \left(\sum_n \Phi_n \Phi_n \right)^2. \quad (19.2.9)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований группы $O(N)$, состоящей из вращений N -вектора с компонентами Φ_n . Для постоянных полей эффективный потенциал в древесном приближении равен просто взятым с обратным знаком слагаемым без производных в лагранжиане:

$$V(\Phi) \simeq \frac{\mu^2}{2} \sum_n \Phi_n \Phi_n + \frac{g}{4} \left(\sum_n \Phi_n \Phi_n \right)^2. \quad (19.2.10)$$

Как обычно, мы предполагаем, что g существенно положительна. (В противном случае, если и существует минимум $V(\Phi)$, он лежит вне области применимости теории возмущений.) Если μ^2 также положительно, минимум $V(\Phi)$ находится в точке $\Phi = 0$, инвариантной относительно $O(N)$. С другой стороны, при $\mu^2 < 0$ минимум находится в точках $\bar{\Phi}_n$, в которых

$$\sum_n \bar{\Phi}_n \bar{\Phi}_n = -\mu^2/g. \quad (19.2.11)$$

Массовая матрица в древесном приближении имеет тогда вид

$$\begin{aligned} M_{nm}^2 &= \left. \frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \Phi_n \partial \Phi_m} \right|_{\Phi=\bar{\Phi}} \\ &= \mu^2 \delta_{nm} + g \delta_{nm} \sum_l \bar{\Phi}_l \bar{\Phi}_l + 2g \bar{\Phi}_n \bar{\Phi}_m \\ &= 2g \bar{\Phi}_n \bar{\Phi}_m. \end{aligned} \quad (19.2.12)$$

Она имеет один собственный вектор Φ_n с ненулевым собственным значением

$$m^2 = 2g \sum_n \bar{\Phi}_n \bar{\Phi}_n = 2|\mu^2|, \quad (19.2.13)$$

и $N - 1$ собственных векторов, перпендикулярных вектору $\bar{\Phi}$ с нулевым собственным значением. Причина появления только $N - 1$

голдстоуновских бозонов заключается в том, что $O(N)$ нарушается до $O(N-1)$ (подгруппа $O(N)$, оставляющая инвариантным $\bar{\Phi}$), и поэтому число независимых нарушенных симметрий равно размерности $O(N)$ минус размерность $O(N-1)$, т. е.

$$\frac{1}{2}N(N-1) - \frac{1}{2}(N-1)(N-2) = N-1. \quad (19.2.14)$$

Приведем еще одно доказательство существования голдстоуновских бозонов, не использующее формализма эффективного действия. Как мы видели в гл. 7, любая непрерывная симметрия действия влечет за собой существование сохраняющегося тока J^μ :

$$\frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0, \quad (19.2.15)$$

с зарядом Q , индуцирующим связанное с этим преобразование симметрии:

$$Q = \int d^3x J^0(\mathbf{x}, 0), \quad (19.2.16)$$

$$[Q, \phi_n(x)] = -\sum_m t_{nm} \phi_m(x). \quad (19.2.17)$$

Спонтанное нарушение симметрии не влияет на операторные соотношения типа (19.2.15)–(19.2.17), а проявляется в свойствах физических состояний. Рассмотрим теперь среднее по вакууму коммутатора тока и поля. Суммируя по промежуточным состояниям, находим

$$\left\langle [J^\lambda(y), \phi_n(x)] \right\rangle_{\text{VAC}} = (2\pi)^{-3} \int d^4p \left[\rho_n^\lambda(p) e^{ip \cdot (y-x)} - \tilde{\rho}_n^\lambda(p) e^{-ip \cdot (y-x)} \right], \quad (19.2.18)$$

где, после использования трансляционной инвариантности,

$$(2\pi)^{-3} i \rho_n^\lambda(p) = \sum_N \langle \text{VAC} | J^\lambda(0) | N \rangle \langle N | \phi_n(0) | \text{VAC} \rangle \delta^4(p - p_N), \quad (19.2.19)$$

$$(2\pi)^{-3} i \tilde{\rho}_n^\lambda(p) = \sum_N \langle \text{VAC} | \phi_n(0) | N \rangle \langle N | J^\lambda(0) | \text{VAC} \rangle \delta^4(p - p_N). \quad (19.2.20)$$

Обычно J^λ , так же, как и Φ_n , считаются эрмитовыми операторами, и в этом случае (19.2.19) и (19.2.20) являются комплексно сопряженными друг другу величинами,

$$\rho_n^\lambda(p) = -\tilde{\rho}_n^{\lambda*}(p), \quad (19.2.21)$$

Однако далее мы не будем этого предполагать.

В силу лоренц-инвариантности ρ и $\tilde{\rho}$ должны иметь вид:

$$\rho_n^\lambda(p) = p^\lambda \rho_n(-p^2) \theta(p^0), \quad (19.2.22)$$

$$\tilde{\rho}_n^\lambda(p) = p^\lambda \tilde{\rho}_n(-p^2) \theta(p^0). \quad (19.2.23)$$

(Множитель $\theta(p^0)$, равный +1 при $p^0 > 0$ и нулю в остальных случаях, возникает как следствие того, что p_N есть 4-импульс физического состояния.) Отсюда

$$\begin{aligned} \langle [J^\lambda(y), \Phi_n(x)] \rangle_{\text{VAC}} = \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 [\rho_n(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2) \\ + \tilde{\rho}_n(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2)], \end{aligned} \quad (19.2.24)$$

где Δ_+ — знакомая функция

$$\Delta_+(z; \mu^2) = (2\pi)^{-3} \int d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 + \mu^2) e^{ip \cdot z}. \quad (19.2.25)$$

Как отмечалось в гл. 5, в силу лоренцевской инвариантности $\Delta_+(z; \mu^2)$ может зависеть только от z , μ^2 и $\theta(z^0)$, а при $z^2 > 0$ — только от z^2 и μ^2 . Поэтому $\Delta_+(x-y; \mu^2)$ и $\Delta_+(y-x; \mu^2)$ равны при пространственно-подобных $x-y$, и в таком случае

$$\langle [J^\lambda(y), \Phi_n(x)] \rangle_{\text{VAC}} = \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 [\rho_n(\mu^2) + \tilde{\rho}_n(\mu^2)] \Delta_+(y-x; \mu^2). \quad (19.2.26)$$

Однако при пространственноподобных $x-y$ все коммутаторы должны обращаться в нуль, так что

$$\rho_n(\mu^2) = -\tilde{\rho}_n(\mu^2), \quad (19.2.27)$$

и поэтому из (19.2.24) при произвольных x и y следует:

$$\left\langle [J^\lambda(y), \Phi_n(x)] \right\rangle_{\text{VAC}} = \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 \rho_n(\mu^2) [\Delta_+(y-x; \mu^2) - \Delta_+(x-y; \mu^2)]. \quad (19.2.28)$$

В тех случаях, когда верно соотношение (19.2.21), из (19.2.27) следует также, что $\rho_n(p)$ действительна.

Используем теперь то, что $J^\lambda(x)$ сохраняется. Беря производную $\partial/\partial y^\lambda$ от обеих частей (19.2.28) и используя известное уравнение

$$(\square_y - \mu^2)\Delta_+(y-x; \mu^2) = 0, \quad (19.2.29)$$

находим, что для всех x и y

$$0 = \int d\mu^2 \mu^2 \rho_n(\mu^2) [\Delta_+(y-x; \mu^2) - \Delta_+(x-y; \mu^2)], \quad (19.2.30)$$

и поэтому (т. к. $D_+(x-y)$ не является четной при времениподобных или светоподобных $x-y$)

$$\mu^2 \rho_n(\mu^2) = 0. \quad (19.2.31)$$

В обчной ситуации мы должны сделать вывод, что $\rho_n(\mu^2)$ обращается в нуль для всех μ^2 . Однако в случае нарушенной симметрии это невозможно. Положим $\lambda = 0$ и $x^0 = y^0 = t$ в формуле (12.2.28):

$$\begin{aligned} \left\langle [J^0(\mathbf{y}, t), \Phi_n(\mathbf{x}, t)] \right\rangle_{\text{VAC}} &= 2i(2\pi)^{-3} \int d\mu^2 \rho_n(\mu^2) \\ &\quad \times \int d^4 p \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mu^2} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})} \delta(p^2 + \mu^2) \\ &= i\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \int d\mu^2 \rho_n(\mu^2). \end{aligned}$$

Интегрируя и используя (19.2.16), (19.2.17), получаем

$$-\sum_m t_{nm} \langle \Phi_m \rangle_{\text{VAC}} = i \int d\mu^2 \rho_n(\mu^2). \quad (19.2.32)$$

Соотношения (19.2.31) и (19.2.32) могут быть согласованы друг с другом только при условии:

$$\rho_n(\mu^2) = i\delta(\mu^2) \sum_m t_{nm} \langle \Phi_m(0) \rangle_{\text{VAC}}. \quad (19.2.33)$$

(Для эрмитовых полей ϕ_n эта величина действительна, поскольку в этом случае в силу (19.2.1) требуется, чтобы t_{nm} были мнимыми.) Итак, до тех пор, пока симметрия нарушена, $\rho_n(\mu^2)$ не может обращаться в нуль, а является величиной, пропорциональной $\delta(\mu^2)$. Такое выражение, очевидно, может возникнуть только в теории, включающей безмассовые частицы, поскольку в противном случае спектр квадратов энергий в системе центра масс $-p_N^2$ не может простирается до нуля. Кроме того, дельта-функция $\delta(\mu^2)$ может возникнуть только от одночастичных состояний нулевой массы. Желательно, чтобы многочастичные состояния давали вклад в непрерывный спектр, простирающийся до $\mu^2 = 0$. Состояние $\phi_n(0)|\text{VAC}\rangle$ инвариантно относительно вращений, так что $\langle N|\phi_n(0)|N\rangle$ должно обращаться в нуль для любого состояния N ненулевой спирали. Кроме того, $\langle \text{VAC}|J^0|N\rangle$ обращается в нуль для любого состояния N , имеющего отличные от J^0 внутреннюю четность или (ненарушенные) внутренние квантовые числа. Мы приходим к выводу, что *нарушенная симметрия с $t_{nm}\langle\phi_n(0)\rangle_{\text{VAC}} \neq 0$ требует существования безмассовой частицы со спином нуль и теми же четностью и внутренними квантовыми числами, что и J^0* . Это и есть наши голдстоуновские бозоны.

Приведенные рассуждения становятся неверными, когда спонтанно нарушенная симметрия является не глобальной, а локальной. Мы можем выбрать лоренц-инвариантную калибровку типа калибровки Ландау с $\partial_\mu A^\mu = 0$, но в ней, как показано в разделе 15.7, нарушаются предположения о положительности в квантовой механике. Если же мы предпочтем калибровку типа аксиальной с $A_3^\mu = 0$, в ней применимы обычные правила квантовой механики, но теряется явная лоренц-инвариантность. Как мы увидим в гл. 21, это исключение является не просто технической деталью: спонтанно нарушенные локальные симметрии не приводят к существованию голдстоуновских бозонов.

Полезно более детально рассмотреть вопрос о том, каким образом коэффициент при дельта-функции в $\rho_n(\mu^2)$ связан со свойствами голдстоуновского бозона. Для бозона B со спином нуль и 4-импульсом q^μ из лоренц-инвариантности вытекает, что матричный элемент тока между вакуумным и одночастичным состояниями имеет вид

$$\langle \text{VAC}|J^\lambda(x)|B\rangle = i \frac{F p_B^\lambda e^{ip_B \cdot x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}}, \quad (19.2.34)$$

где $\mathbf{p}_B$ — импульс B , $p_B^0 = |\mathbf{p}_B|$, а F — постоянный коэффициент с размерностью энергии. (Это согласуется с сохранением тока, поскольку $p_{B\lambda} p_B^\lambda = 0$.) Кроме того, матричный элемент скалярного поля $\Phi_n(y)$ между одночастичным состоянием и вакуумом имеет вид:

$$\langle B | \Phi_n(y) | 0 \rangle = \frac{Z_n e^{-i p_B \cdot y}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2 p_B^0}}, \quad (19.2.35)$$

где Z_n — безразмерная константа. Тогда из соотношений (19.2.34) и (19.2.35) имеем

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-3} i p_n(-p^2) p^\lambda \theta(p^0) &\equiv \int d^3 p_B \langle \text{VAC} | J^\lambda(0) | B \rangle \langle B | \Phi_n(0) | 0 \rangle \delta^4(p - p_B) \\ &= \delta(p^0 - |\mathbf{p}|) (2\pi)^{-3} (2p^0)^{-1} p^\lambda F Z_n \\ &= \theta(p^0) \delta(-p^2) (2\pi)^{-3} i F Z_n, \end{aligned}$$

так что

$$\rho_n(\mu^2) = F Z_n \delta(\mu^2). \quad (19.2.36)$$

Сравнивая с (19.2.33), получаем:

$$i F Z_n = - \sum_m t_{nm} \langle \Phi_m(0) \rangle_{\text{VAC}}. \quad (19.2.37)$$

В более общем случае, у нас может быть несколько нарушенных симметрий с генераторами t_a и токами J_a^μ , которые можно считать независимыми в том смысле, что ни одна из линейных комбинаций t_a не является ненарушенной. Для каждой из таких симметрий имеется голдстоуновский бозон $|B_a\rangle$, так что можно определить Z_{an} и F_{ab} формулами:

$$\langle \text{VAC} | J_a^\lambda(x) | B_b \rangle = i \frac{F_{ab} p_B^\lambda e^{i p_B \cdot x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2 p_B^0}}, \quad (19.2.38)$$

$$\langle B_a | \Phi_n(y) | 0 \rangle = \frac{Z_{an} e^{-i p_B \cdot y}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2 p_B^0}}, \quad (19.2.39)$$

Соотношение (19.2.37) применимо для каждого a , так что

$$i \sum_b F_{ab} Z_{bn} = - \sum_m [t_a]_{nm} \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{VAC}}. \quad (19.2.40)$$

Например, в обсуждавшемся выше случае $O(N)$ можно так подобрать базис, чтобы вакуумное среднее было направлено вдоль первой оси:

$$\bar{\phi}_m \equiv \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{VAC}} = v \delta_{m1}. \quad (19.2.41)$$

Тогда $N - 1$ генераторов нарушенной симметрии t_a ($a = 2, \dots, N$) могут быть определены как бесконечно малые вращения в плоскости $1-a$. При удобном выборе нормировки ненулевые элементы этих генераторов равны

$$[t_a]_{1a} = -[t_a]_{a1} = i \quad (19.2.42)$$

(нет суммирования по a). Из ненарушенной $O(N - 1)$ симметрии, относительно которой $N - 1$ голдстоуновских бозонов преобразуются по векторному представлению, вытекает, что

$$F_{ab} = \delta_{ab} F, \quad Z_{a1} = 0, \quad Z_{ab} = Z \delta_{ab}. \quad (19.2.43)$$

Тогда из (19.2.40) следует, что

$$FZ = v. \quad (19.2.44)$$

Согласно общепринятому рецепту перенормировки поля $Z = 1$, так что $F = v$. Следовательно F есть мера величины нарушения симметрии. Как мы сейчас увидим, величина $1/F$ определяет силу взаимодействия голдстоуновских бозонов друг с другом и с другими частицами.

Нарушенная симметрия говорит нам о голдстоуновских бозонах значительно больше того, что у них нулевая масса. Эта симметрия сильно ограничивает взаимодействия таких бозонов при низкой энергии. Чтобы увидеть это в простейшем случае, рассмотрим матричный элемент тока $J^\mu(x)$, связанного с нарушенной симметрией, между произвольными состояниями α и β :

$$\langle \beta | J^\mu(x) | \alpha \rangle = e^{iq \cdot x} \langle \beta | J^\mu(0) | \alpha \rangle, \quad (19.2.45)$$

где

$$q^\mu \equiv p_\alpha^\mu - p_\beta^\mu. \quad (19.2.46)$$

Мы знаем, что $J^\mu(x)$ имеет ненулевой матричный элемент между вакуумом и состоянием одного голдстоуновского бозона $|B, \mathbf{q}\rangle$, определяющийся выражением (19.2.34). Из обычных правил полологии (см. гл. 10) следует, что матричный элемент (19.2.45) имеет полюс при $q^2 \rightarrow 0$, причем *

$$\langle \beta | J^\mu(0) | \alpha \rangle \rightarrow \frac{iFq^\mu}{q^2} M_{\beta\alpha}, \quad (19.2.47)$$

где $i(2\pi)^4 \delta^4(p_\alpha - p_\beta - q) M_{\alpha\beta} / (2\pi)^{3/2} (2q^0)^{1/2}$ — матричный элемент S -матрицы для испускания голдстоуновского бозона 4-импульсом q в переходе $\alpha \rightarrow \beta$. Запишем поэтому

$$\langle \beta | J^\mu(0) | \alpha \rangle \equiv N_{\beta\alpha}^\mu + \frac{iFq^\mu}{q^2} M_{\beta\alpha}, \quad (19.2.48)$$

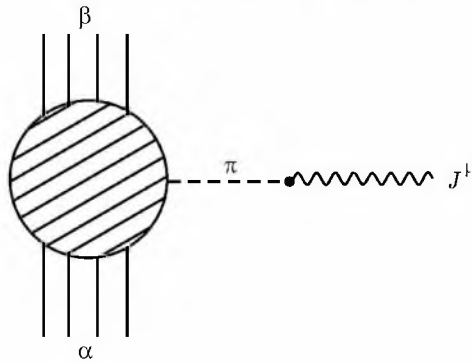


Рис. 19.1. Фейнмановские диаграммы для полюсных слагаемых в матричном элементе тока симметрии $J^\mu(x)$ между произвольными состояниями α и β , обязанные внутренней линии голдстоуновского бозона, обозначенной π .

* Если голдстоуновский бозон соответствует элементарному полю, соотношение (19.2.47) можно получить рассмотрением класса диаграмм, приведенных на рис. 19.1. Множитель $i(2\pi)^4$ в матричном элементе S -матрицы для процесса $\alpha \rightarrow \beta + B$ сокращается с множителем $-i(2\pi)^4$ в пропагаторе B . Из общих правил полологии следует, что то же верно и в случае, когда голдстоуновский бозон — составная частица.

где $N_{\beta\alpha}^\mu$ включает неполюсные вклады в матричный элемент тока. Из (19.2.45) видно, что закон сохранения $\partial_\mu J^\mu = 0$ тока J^μ требует, чтобы (19.2.48) обратилось в нуль после свертки с q^μ , поэтому

$$M_{\beta\alpha} - \frac{i}{F} q_\mu N_{\beta\alpha}^\mu. \quad (19.2.49)$$

Отсюда немедленно вытекает, что если $N_{\beta\alpha}^\mu$ не имеет полюса при $q \rightarrow 0$, матричный элемент $M_{\beta\alpha}$ испускания голдстоуновского бозона в переходе $\alpha \rightarrow \beta$ обращается в нуль при $q \rightarrow 0$. Это явление называется «адлеровским нулем»⁶.

На самом деле $N_{\beta\alpha}^\mu$ довольно часто *имеет* полюс при $q = 0$. Это происходит потому, что вершина для тока $J^\mu(x)$ может быть прикреплена к внешней линии в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ (см. рис. 19.2). Например, если 4-импульс q^μ уносится током ϑ^m , подключенным к линии выходящей или входящей частицы 4-импульсом p и массой m , тогда внутренняя линия, соединяющая эту вершину с остальной частью диаграммы, импееет 4-импульс $p^\mu + q^\mu$ или $p^\mu - q^\mu$, соответственно, и отвечающий ей пропагатор будет давать поэтому вклад в $N_{\beta\alpha}^\mu$ вида

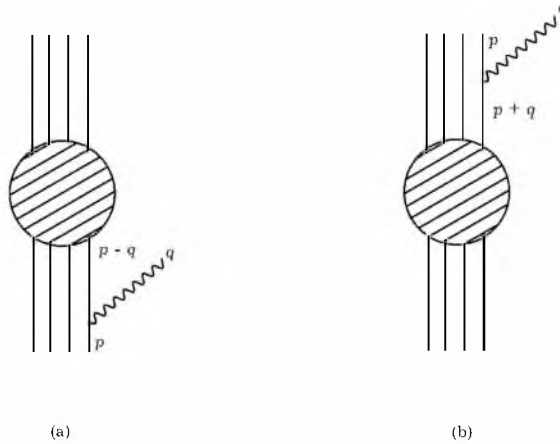


Рис. 19.2. Фейнмановские диаграммы для полюсных слагаемых в матричном элементе тока симметрии $J^\mu(x)$ между произвольными состояниями α и β , обязанные внутренним линиям, находящимся вблизи массовой поверхности. Сплошные линии отвечают «жестким» внешним частицам, волнистые линии отмечают включения тока $J^\mu(x)$, заштрихованная область отвечает сумме диаграмм с указанными внешними линиями



где

$$g_{a_1 \dots a_N} = \sum_{b_1 \dots b_N} F_{a_1 b_1}^{-1} \dots F_{a_N b_N}^{-1} (it_{b_1} \bar{\varphi})_{n_1} \dots (it_{b_N} \bar{\varphi})_{n_N} \frac{\partial^N V(\varphi)}{\partial \varphi_{n_1} \dots \partial \varphi_{n_N}} \Big|_{\varphi = \bar{\varphi}} \quad (19.2.54)$$

В точке $\varphi = \bar{\varphi}$ из выражения (19.2.4) следует, что сумма всех диаграмм—«головастики» для одной линии голдстоуновского бозона, переходящей в вакуум, обращается в нуль, а из выражения (19.2.6) следует, что в нуль обращаются и амплитуды перехода голдстоуновских бозонов при нулевом импульсе в любые другие скаляры. Чтобы выйти за рамки этих результатов, можно продолжать дифференцировать по скалярным полям. Например, производная (19.2.5) для любого генератора симметрии t дает

$$\sum_n \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_m} t_{nl} + \sum_n \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_l} t_{nm} + \sum_{n,k} \frac{\partial^3 V(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_m \partial \varphi_l} t_{nk} \varphi_k = 0. \quad (19.2.55)$$

Выбирая t как один из генераторов нарушенной симметрии t_a , полагая $\varphi = \bar{\varphi}$, сворачивая с $(t_b \bar{\varphi})_m (t_c \bar{\varphi})_l$ и используя (19.2.6), получаем:

$$\sum_{nml} \frac{\partial^3 V(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_m \partial \varphi_l} \Big|_{\varphi = \bar{\varphi}} (t_a \bar{\varphi})_n (t_b \bar{\varphi})_m (t_c \bar{\varphi})_l = 0, \quad (19.2.56)$$

так что сумма всех диаграмм с тремя внешними линиями голдстоуновских бозонов с нулевым импульсом обращается в нуль. В частности, это означает, что в произвольных процессах в ведущем порядке по малым энергиям голдстоуновских бозонов эти низкоэнергетические бозоны не испускаются с внешних линий таких же бозонов с малой энергией.

19.3. Спонтанно нарушенные приближенные симметрии

В предыдущем разделе мы рассматривали точные симметрии действия, которые не оставляют инвариантным вакуум, и потому носят название спонтанно нарушенных симметрий. Рассмотрим теперь, что произойдет в результате добавления к действию такой

теории малых нарушающих симметрию слагаемых. Подобные спонтанно нарушенные приближенные симметрии играют важную роль в теории сильных взаимодействий и в ряде областей физики конденсированного вещества. Как мы увидим, спонтанное нарушение приближенной симметрии приводит не к появлению безмассовых голдстоуновских бозонов, а к появлению бесспиновых частиц малой массы, часто называемых *псевдоголдстоуновскими бозонами*⁷.

Продолжим рассмотрение трансляционно инвариантных теорий, для которых эффективное действие выражается, как в (19.2.8), через эффективный потенциал $V(\varphi)$, зависящий от набора независимых от пространственно-временных координат средних значений скалярного поля φ_n . Для действия, подчиняющегося некоторому набору приближенных непрерывных симметрий с генераторами t_α , можно записать эффективный потенциал в виде

$$V(\varphi) = V_0(\varphi) + V_1(\varphi), \quad (19.3.1)$$

где $V(\varphi)$ удовлетворяет условию инвариантности *

$$\sum_{nm} \frac{\partial V_0(\varphi)}{\partial \varphi_n} (t_\alpha)_{nm} \varphi_m, \quad (19.3.2)$$

а $V_1(\varphi)$ — малая поправка за счет нарушения симметрии действия.

Предположим, что это возмущение сдвигает минимум потенциала от значения φ_0 , отвечающего минимуму $V_0(\varphi)$, к значению $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где φ_1 — малая добавка первого порядка по нарушающему симметрию возмущению. Условие равновесия для вакуума имеют тогда вид

$$\left. \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi_n} \right|_{\varphi=\varphi_0+\varphi_1} = 0. \quad (19.3.3)$$

Слагаемое нулевого порядка слева равно $[\partial V_0(\varphi) / \partial \varphi_n]_{\varphi=\varphi_0}$, и обращается в нуль, т. к. φ_0 определено как минимум $V_0(\varphi)$. Следовательно должны обращаться в нуль и слагаемые первого порядка, так что

* Мы обозначаем генераторы произвольной симметрии t_α , t_β и т. д., в противоположность независимым генераторам нарушенной симметрии, для которых индекс a принимает значения a , b , и т. д.

$$\sum_m \frac{\partial^2 V_0(\Phi)}{\partial \Phi_n \partial \Phi_m} \Big|_{\Phi=\Phi_0} \Phi_{1m} + \frac{\partial V_1(\Phi)}{\partial \Phi_n} \Big|_{\Phi=\Phi_0} = 0. \quad (19.3.4)$$

В этом случае выполняется и соотношение (19.2.6), если заменить V на инвариантное слагаемое V_0 , а Φ — на Φ_0 :

$$\sum_{nl} \frac{\partial^2 V_0(\Phi)}{\partial \Phi_n \partial \Phi_m} \Big|_{\Phi=\Phi_0} (t_\alpha)_{nl} \Phi_{0l} = 0. \quad (19.3.5)$$

Отсюда, умножая (19.3.4) на $(t_\alpha \Phi_0)_n$ и суммируя по n , получаем

$$\sum_n (t_\alpha \Phi_0)_n \frac{\partial V_1(\Phi)}{\partial \Phi_n} \Big|_{\Phi=\Phi_0} = 0. \quad (19.3.6)$$

Вспоминая интерпретацию $V(\Phi)$ как производящей функции одно-частично неприводимых диаграмм и замечая, что в отсутствии возмущения V_1 голдстоуновскими компонентами Φ_n являются те, которые направлены по $t_\alpha \Phi_0$ (см. (19.2.33)), видим, что левая часть (19.3.6) пропорциональна сумме всех диаграмм-«головастиков», в которых псевдоголдстоуновские бозоны переходят в вакуум. Таким образом, можно перефразировать содержание формулы (19.3.6) как условие, что в первом порядке по V_1 у псевдоголдстоуновских бозонов отсутствуют головастики.

Мораль этих вычислений заключается в том, что если мы не стартуем со средних по вакууму нулевого порядка, удовлетворяющих (19.3.6), то даже малое возмущение приводит к большому изменению Φ , что обесценивает разложение Φ в окрестности Φ_0 . К счастью, для компактных групп Ли всегда возможно выбрать Φ_0 так, чтобы удовлетворялось соотношение (19.3.6). Чтобы увидеть это, заметим, что из инвариантности потенциала $V_0(\Phi)$ относительно группы действительных линейных преобразований $\Phi \rightarrow L\Phi$ вытекает, что если Φ_* — один минимум потенциала, то им является и $L\Phi_*$. В случае непрерывных групп преобразований всегда можно параметризовать их как $L(\theta)$, так что

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^\alpha} L^{-1}(\theta) = iN_{ab}(\theta)t_\beta, \quad (19.3.7)$$

где $N_{\alpha\beta}$ — несингулярная матрица, зависящая от групповых параметров θ_a . (Напомним, что в действительном представлении действительными являются it_α , а не t_α .) Рассмотрим теперь функцию $V_1(L(\theta)\varphi_*)$. Для компактной группы, когда θ принимает значения внутри группового объема, $L(\theta)\varphi_*$ покрывает компактное многообразие, и до тех пор, пока $V_1(\varphi)$ непрерывен, он должен иметь минимум на любой такой компактной поверхности, скажем, в точке $L(\theta_*)\varphi_*$. Производная от $V_1(L(\theta)\varphi_*)$ по θ_α равна

$$\frac{\partial V_1(L(\theta)\varphi_*)}{\partial \theta_\alpha} = \sum_n \left. \frac{\partial V_1(\varphi)}{\partial \varphi_n} \right|_{\varphi=L(\theta)\varphi_*} N_{\alpha\beta}(\theta)(it_\beta L(\theta)\varphi_*)_n. \quad (19.3.8)$$

Она должна обращаться в нуль в минимуме θ_* , и так как $N_{\alpha\beta}$ несингулярна, отсюда вытекает, что

$$0 = \sum_n \left. \frac{\partial V_1(\varphi)}{\partial \varphi_n} \right|_{\varphi=L(\theta_*)\varphi_*} N_{\alpha\beta}(\theta_*)(it_\beta L(\theta_*)\varphi_*)_n. \quad (19.3.9)$$

Но это означает, что если выбрать $\varphi_0 = L(\theta_*)\varphi_*$, то (19.3.6) выполняется.

Соотношение (19.3.6) называется *условием подстройки вакуума*⁸, поскольку в общем случае оно обладает свойством принудительно превращать направление нарушения симметрии вакуумом в некое подстраивание под нарушающие симметрию слагаемые в гамильтониане. Например, рассмотрим обсуждавшийся в предыдущем разделе случай $SO(N)$, спонтанно нарушенной до $SO(N-1)$. При отсутствии любого нарушающего симметрию возмущения нет способов указать, *какая* из подгрупп $SO(N-1)$ осталась ненарушенной. Если динамика теории приводит к основному состоянию, инвариантному относительно подгруппы $SO(N-1)$ группы $SO(N)$, оставляющей инвариантным какой-то N -вектор φ_{0n} , то, совершив $SO(N)$ вращение, можно найти основное состояние, инвариантное относительно преобразований подгруппы $SO(N-1)$, оставляющих инвариантным любой другой N -вектор. Если добавить возмущение, преобразующееся относительно $SO(N)$ как, скажем, компонента $\sum_n u_n \varphi_n$ N -вектора φ_n (не обязательно состоящего из элементарных скаляров), то гамильтониан будет

инвариантен относительно конкретной подгруппы $SO(N-1)$ группы $SO(N)$, состоящей из вращений, оставляющих инвариантным вектор u . Без условия подстройки вакуума можно было бы думать, что оставшаяся точная симметрия есть $SO(N-2)$, состоящая из тех вращений, которые оставляют инвариантными как u , так и вектор Φ_0 , характеризующий симметрию вакуума. Однако, если $V_1(\Phi) = \sum_n u_n \Phi_n$, то из условия (19.3.6) следует, что в истинном вакууме $\sum_n (t_\alpha \Phi_0)_n u_n = 0$ для всех $SO(N)$ генераторов t_α . Эти генераторы образуют базис пространства всех антисимметричных матриц $N \times N$, так что условие требует, что Φ_0 должно быть направлено так же, как u , и в результате ненарушенной является не $SO(N-2)$, а $SO(N-1)$ симметрия.

В соответствии с общими результатами раздела 16.1, массовая матрица M_{ab} псевдоголдстоуновских бозонов в первом порядке равна

$$M_{ab}^2 = \sum_{nm} Z_{an} Z_{bm} \left. \frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \Phi_m \partial \Phi_n} \right|_{\Phi=\Phi_0+\Phi_1}, \quad (19.3.10)$$

где Z_{an} — константа перенормировки поля, определенная равенством (19.2.39). Так как массовая матрица (19.3.10) в нулевом порядке равна нулю, слагаемые первого порядка приводят к выражению

$$M_{ab}^2 = \sum_{nm} Z_{an} Z_{bm} \left[\left. \frac{\partial^3 V_0(\Phi)}{\partial \Phi_l \partial \Phi_m \partial \Phi_n} \right|_{\Phi=\Phi_0} \Phi_{1l} + \left. \frac{\partial^2 V_1(\Phi)}{\partial \Phi_m \partial \Phi_n} \right|_{\Phi=\Phi_0} \right], \quad (19.3.11)$$

где Z_{an} определяется здесь в нулевом приближении к (19.2.40):

$$Z_{an} = \sum_b F_{ab}^{-1} (it_b \Phi_0)_n. \quad (19.3.12)$$

Чтобы вычислить массовую матрицу (19.3.11), примем, что t в (19.2.55) есть один из генераторов t_a нарушенной симметрии, положим $\Phi = \Phi_0$ и свернем с $(t_b \Phi_0)_m \Phi_{1l}$:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{nml} \left. \frac{\partial^3 V_0(\Phi)}{\partial \Phi_l \partial \Phi_m \partial \Phi_n} \right|_{\Phi=\Phi_0} \Phi_{1l} (t_a \Phi_0)_n (t_b \Phi_0)_m \\ & + \sum_{nm} \left. \frac{\partial^2 V_0(\Phi)}{\partial \Phi_m \partial \Phi_n} \right|_{\Phi=\Phi_0} (t_a \Phi_1)_n (t_b \Phi_0)_m + \sum_{nl} \left. \frac{\partial^2 V_0(\Phi)}{\partial \Phi_n \partial \Phi_l} \right|_{\Phi=\Phi_0} (t_a t_b \Phi_0)_n \Phi_{1l}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части обращается в нуль в силу (19.2.6), а третье слагаемое можно переписать с помощью (19.3.4), так что в результате

$$0 = \sum_{nml} \frac{\partial^3 V_0(\varphi)}{\partial \varphi_l \partial \varphi_m \partial \varphi_n} \Big|_{\varphi=\varphi_0} \varphi_{1l} (t_a \varphi_0)_n (t_b \varphi_0)_m = \frac{\partial V_1(\varphi)}{\partial \varphi_n} \Big|_{\varphi=\varphi_0} (t_a t_b \varphi_0)_n. \quad (19.3.13)$$

Подставляя это в (19.3.11), получаем формулу для массовой матрицы псевдоголдстоуновского бозона, выраженную через V_1 :

$$M_{cd}^2 = - \sum_{ab} F_{ca}^{-1} F_{db}^{-1} \left[(t_a \varphi_0)_n (t_b \varphi_0)_m \frac{\partial^2 V_1(\varphi)}{\partial \varphi_m \partial \varphi_n} \Big|_{\varphi=\varphi_0} + (t_a t_b \varphi_0)_n \frac{\partial V_1(\varphi)}{\partial \varphi_n} \Big|_{\varphi=\varphi_0} \right]. \quad (19.3.14)$$

Чтобы такая массовая матрица имела смысл, ей бы лучше быть положительной. Чтобы увидеть, что так оно и есть, удобно переписать этот результат через производные по групповому параметру θ_a . Дифференцируя (19.3.8) по θ_β , полагая $\theta_\alpha = \theta_*$, пользуясь (19.3.9) и равенством $\varphi_0 = L(\theta_*)\varphi_*$, находим

$$M_{ab}^2 = \sum_{cd\alpha\beta} N_{a\alpha}^{-1}(\theta_*) N_{b\beta}^{-1}(\theta_*) F_{ac}^{-1} F_{bd}^{-1} \frac{\partial^2 V_1(L(\theta)\varphi_*)}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} \Big|_{\theta=\theta_*}. \quad (19.3.15)$$

Матрица справа положительна, так как θ_* — минимум функции $V_1(L(\theta)\varphi_*)$.

Существует несколько более знакомый вариант этой формулы, записанный через средние по вакууму от двойного коммутатора генераторов симметрии с нарушающим симметрию возмущением. Пусть нарушающее симметрию возмущение H_1 в гамильтониане является линейной комбинацией

$$H_1 = \sum_n u_n \Phi_n \quad (19.3.16)$$

операторов Φ_n (необязательно элементарных скалярных полей), образующих представление группы симметрии с генераторами t_α в том смысле, что

$$[T_\alpha, \Phi_n] = -(t_\alpha)_{nm} \Phi_m, \quad (19.3.17)$$

где T_α — квантово-механические генераторы группы симметрии. Согласно результатам раздела 16.3, нарушающая симметрию часть потенциала равна

$$V_1(\Phi) = \langle H_1 \rangle_{\langle \Phi \rangle = \Phi} = \sum_n u_n \Phi_n, \quad (19.3.18)$$

где нижний индекс в среднем выражении указывает, что среднее значение берется в состоянии минимальной энергии, в котором Φ_n имеет среднее значение Φ_n . Условие подстройки вакуума (19.3.6) имеет тогда вид:

$$0 = \sum_n u_n (t_\alpha \Phi_0)_n,$$

или, пользуясь (19.3.17),

$$0 = \langle [T_\alpha, H_1] \rangle_0, \quad (19.3.19)$$

где теперь нижний индекс 0 указывает, что среднее значение берется в вакуумном состоянии, где Φ_n имеет среднее значение Φ_{0n} . Кроме того, из (19.3.14) массовая матрица в этом случае равна

$$M_{cd}^2 = - \sum_{ab} F_{ca}^{-1} F_{db}^{-1} \sum_n u_n (t_a t_b \Phi_0)_n,$$

так что, используя (19.3.17), получаем:

$$M_{cd}^2 = - \sum_{ab} F_{ca}^{-1} F_{db}^{-1} \langle [T_a, [T_b, H_1]] \rangle_0. \quad (19.3.20)$$

Это выражение симметрично по c и d . Чтобы убедиться в этом, заметим, что тождество Якоби и групповые коммутационные соотношения можно использовать для того, чтобы записать разность (19.3.20) и такого же выражения с переставленными c и d как линейную комбинацию слагаемых $\langle [T_\alpha, H_1] \rangle_0$, которая обращается в нуль в силу условия подстройки вакуума (19.3.19). Массовая матрица (19.3.20) также положительна, поскольку точка $\theta = 0$ находится в минимуме энергии вакуума $\langle \exp(-i\theta_a T_a) H_1 \exp(i\theta_a T_a) \rangle_0$ для повернутых вакуумных состояний $\exp(i\theta_a T_a)|0\rangle$.

19.4. Пионы как голдстоуновские бозоны

Классическим примером нарушенной симметрии в физике элементарных частиц является приближенная симметрия сильных взаимодействий, известная под названием киральной $SU(2) \times SU(2)$ симметрии. Как принято сейчас считать, эта симметрия возникает из-за того, что имеются два кварковых поля u и d , обладающие сравнительно малыми массами. (Оценка дана в разделе 19.7.) В приближении, когда массы u и d равны нулю, лагранжиан (18.7.5) квантовой хромодинамики имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\bar{u}\gamma^\mu D_\mu u - \bar{d}\gamma^\mu D_\mu d - \dots, \quad (19.4.1)$$

где D_μ — цветовая калибровочно-ковариантная производная (см. выражение (15.1.10)), а многоточие относится к слагаемым, содержащим только глюонные поля и/или другие сорта кварков кроме u и d . Лагранжиан инвариантен относительно преобразований

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \exp(i\bar{\theta}^V \cdot \vec{t} + i\gamma_5 \bar{\theta}^A \cdot \vec{t}) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (19.4.2)$$

где $\vec{t}$ — 3-вектор* изоспиновых матриц

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а $\bar{\theta}^V$ и $\bar{\theta}^A$ — независимые действительные 3-векторы**. Такая алгебра Ли может быть представлена как произведение двух ком-

* Мы используем знаки стрелок над 3-векторами в изотопическом пространстве, чтобы отличать эти векторы от обычных 3-векторов, которые будут, как и ранее, обозначаться полужирными буквами.

** Лагранжиан (19.4.1) обладает этой симметрией, так как $\overline{\gamma_5 \psi \gamma^\mu} = -\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu = +\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5$. Кроме этого, он обладает еще двумя непрерывными внутренними симметриями. Одна из них — сохранение барионного числа, т.е. инвариантность относительно общего фазового преобразования кварковых полей u и d . Эта симметрия не нарушена и коммутирует с другими симметриями, поэтому она не влияет на обсуждающиеся в данном разделе вопросы. Еще одна симметрия — инвариантность относительно умножения кваркового дублета на $\exp(i\alpha\gamma_5)$. Как обсуждается в разделе 23.5, эта $U(1)$ симметрия изначально сильно нарушена непертурбативными эффектами, связанными с инстантонами.

мутирующих $SU(2)$ подалгебр, действующих соответственно только на левые и правые компоненты кварковых полей, с генераторами

$$\bar{t}_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\bar{t}, \quad \bar{t}_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\bar{t}, \quad (19.4.3)$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[t_{Li}, t_{Lj}] = i\varepsilon_{ijk}t_{Lk}, \quad (19.4.4)$$

$$[t_{Ri}, t_{Rj}] = i\varepsilon_{ijk}t_{Rk}, \quad (19.4.5)$$

$$[t_{Li}, t_{Rj}] = 0. \quad (19.4.6)$$

Таким образом, лежащая в основе группа симметрии является прямым произведением $SU(2) \times SU(2)$. Есть и другая очевидная $SU(2)$ подгруппа, состоящая из обычных изоспиновых преобразований с $\bar{\theta}^A = 0$ и генераторами

$$\bar{t} = \bar{t}_L + \bar{t}_R. \quad (19.4.7)$$

Алгебра $SU(2) \times SU(2)$ может быть записана через $\bar{t}$ и другой триплет генераторов

$$\bar{x} = \bar{t}_L - \bar{t}_R = \gamma_5 \bar{t} \quad (19.4.8)$$

с коммутационными соотношениями

$$[t_i, t_j] = i\varepsilon_{ijk}t_k, \quad (19.4.9)$$

$$[t_i, x_j] = i\varepsilon_{ijk}x_k, \quad (19.4.10)$$

$$[x_i, x_j] = i\varepsilon_{ijk}t_k. \quad (19.4.11)$$

Мы увидим далее, что $SU(2) \times SU(2)$ симметрия спонтанно нарушается, в то время как ее подгруппа изотопического спина с генераторами $\bar{t}$ остается ненарушенной (хотя и приближенной) симметрией.

Следуя методу Нетер (см., например, раздел 7.3), можно вывести из лагранжиана (19.4.1) выражения для сохраняющихся векторного и аксиального токов:

$$\bar{V}^\mu = i\bar{q}\gamma^\mu \bar{t}q, \quad \bar{A}^\mu = i\bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \bar{t}q, \quad (19.4.12)$$

$$\partial_\mu \bar{V}^\mu = \partial_\mu \bar{A}^\mu = 0, \quad (19.4.13)$$

где q — кварковый дублет

$$q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (19.4.14)$$

Связанные с этими токами заряды являются генераторами, соответственно, изоспиновой и остающейся симметрии

$$\bar{T} = \int d^3x \bar{V}^0, \quad (19.4.15)$$

$$\bar{X} = \int d^3x \bar{A}^0. \quad (19.4.16)$$

Токи (19.4.12) нормированы так, чтобы квантовые операторы $\bar{T}$ и $\bar{X}$ удовлетворяли тем же коммутационным соотношениям, что и матрицы $\bar{t}$ и $\bar{x}$:

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k, \quad (19.4.17)$$

$$[T_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} X_k, \quad (19.4.18)$$

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k. \quad (19.4.19)$$

Действуя на кварковые поля, эти операторы порождают преобразование (19.4.2) в том смысле, что

$$[\bar{T}, q] = -\bar{t}q, \quad (19.4.20)$$

$$[\bar{X}, q] = -\bar{x}q. \quad (19.4.21)$$

Если бы эта симметрия была точной и ненарушенной, то любое одночастичное адронное состояние $|h\rangle$ было бы вырождено с другим состоянием $\bar{X}|h\rangle$ с противоположной четностью и тем же спином, барионным числом и странностью.* В адронном спектре не наблюдается такого удвоения по четности, так что мы

* Один способ удовлетворить этому условию — иметь адрон нулевой массы с двумя состояниями $|\pm\rangle$ со спиральностями $\pm\frac{1}{2}$ и равными спином, барионным числом и странностью. Тогда состояния $|+\rangle + |-\rangle$ и $|+\rangle - |-\rangle$ будут

вынуждены заключить, что если киральная симметрия $SU(2) \times SU(2)$ является хоть сколько-нибудь хорошим приближением, то она должна быть спонтанно нарушена до своей $SU(2)$ подгруппы изотопического спина. В этом случае оператор $\bar{X}$ переводит одноадронное состояние $|h\rangle$ в адрон h и безмассовый псевдоскалярный голдстоуновский бозон, так что необходимость удвоения по четности в адронном спектре отпадает.

Вопрос о том, действительно ли в квантовой хромодинамике реализуется подобный путь нарушения симметрии, связан со всеми сложностями динамики сильных взаимодействий. Как мы увидим в разделе 19.9, существуют общие основания полагать, что в квантовой хромодинамике изоспиновая $SU(2)$ симметрия спонтанно не нарушается, но значительно труднее показать, что киральная часть симметрии $SU(2) \times SU(2)$ действительно спонтанно нарушена. (Однако, в соответствии с рассуждениями раздела 22.5, $SU(3) \times SU(3)$ симметрия квантовой хромодинамики с *тремя* безмассовыми кварковыми ароматами должна быть спонтанно нарушена.) Одним из прорывных достижений 1960-х годов было осознание того факта, что и не требуется детально понимать механизм нарушения киральной симметрии. Наиболее интересные следствия этого нарушения можно получить, просто *предположив*, что $SU(2) \times SU(2)$ спонтанно нарушается до $SU(2)$.

Кварки u и d имеют хоть и малые, но ненулевые массы, так что $SU(2) \times SU(2)$ симметрия не точна. Нарушенная *приближенная* киральная симметрия влечет существование приближенно безмассового голдстоуновского бозона с теми же квантовыми числами, что и генератор нарушенной симметрии $\bar{X}$: этот бозон должен быть состоянием с отрицательной четностью, нулевым спином, единичным изоспином и нулевыми барионным числом и странностью. На самом деле, легчайшим из всех адронов является пион, имеющий в точности те же квантовые числа, так что мы приходим к отождествлению пиона с голдстоуновским бозоном, связанным со спонтанным

иметь противоположную четность. Неверно полагать, что ненарушенная киральная симметрия обязательно требует, чтобы масса нуклона была нулевой. Для этого нужны дополнительные предположения о матричных элементах аксиально-векторного тока. Однако, как мы увидим в разделе 22.5, точная ненарушенная киральная симметрия на самом деле требует, чтобы *некоторые* барионы были безмассовыми.

нарушением приближенной киральной симметрии. Как мы увидим ниже, линейной комбинации m_u и m_d пропорциональна скорее не масса пиона m_π , а квадрат массы m_π^2 , причем отношение $m_\pi^2 / m_N^2 \simeq 0,022$ очень мало, так что следствия, полученные из спонтанно нарушенной $SU(2) \times SU(2)$ симметрии, должны быть достаточно точны.

При использовании следствий киральной симметрии для пионных взаимодействий очень полезно заметить, что хотя киральная симметрия сильных взаимодействий ни в какой мере не зависит от существования слабых взаимодействий, именно токи симметрии $\bar{V}^\mu$ и $\bar{A}^\mu$ входят в сохраняющие странность полулептонные слабые взаимодействия типа ядерного β -распада. Как мы увидим в разделе 21.3, стандартная модель электрослабых взаимодействий требует, чтобы эффективный лагранжиан таких взаимодействий при низких энергиях имел вид:

$$\mathcal{L}_{\text{сл}} = -\frac{iG_{\text{сл}}}{\sqrt{2}} (V_+^\lambda + A_+^\lambda) \sum_l \bar{l} \gamma_\lambda (+\gamma_5) \nu_l + \text{э.с.} \quad (19.4.22)$$

где l нумерует перенормированные поля трех заряженных лептонов e, μ, τ , ν_l отвечает перенормированным полям соответствующих нейтрино, а $V_\pm^\lambda$ и $A_\pm^\lambda$ — меняющие заряд токи

$$V_\pm^\lambda = V_1^\lambda \pm iV_2^\lambda, \quad A_\pm^\lambda = A_1^\lambda \pm iA_2^\lambda. \quad (19.4.23)$$

Константа $G_{\text{сл}}$ может быть измерена из вероятностей бета-переходов между состояниями с нулевым спином внутри одного изотопического мультиплета, например, в распадах $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ и $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^* + e^+ + \nu_e$. Передаваемый импульс в этих переходах очень мал, так что в силу сохранения четности (в сильных взаимодействиях) и инвариантности относительно вращений в элементы S -матрицы для этих распадов входят только матричные элементы оператора $\int d^3x V_-^0 = T_1 - iT_2$ между состояниями из данного изоспинового мультиплета, которые равны известным коэффициентам Клебша–Гордана. Таким образом, зная вероятности таких ‘0–0’

*Константа $G_{\text{сл}}$ связана с привычной константой Ферми G_F и углом Кабиббо θ_C соотношением $G_{\text{сл}} = G_F \cos \theta_C$ (см. раздел 21.3).

процессов, можно рассчитать значение⁹ константы в (19.4.22): $G_{\text{сл}} \simeq 1,14959(38) \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$. С другой стороны, в процессе распада пиона $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ единственный матричный элемент тока, который нам нужен, это матричный элемент A_-^λ между однопионным состоянием и вакуумом:

$$\langle \text{VAC} | A_i^\mu(x) | \pi_j \rangle = \frac{iF_\pi \delta_{ij} p_\pi^\mu e^{ip_\pi \cdot x}}{2(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0}}, \quad (19.4.24)$$

который полностью известен, если не считать множителя F_π . Вероятность распада пиона оказывается равной

$$\Gamma(\pi \rightarrow \mu + \nu) = \frac{G_{\text{сл}}^2 F_\pi^2 m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{16\pi m_\pi^3}. \quad (19.4.25)$$

Из приведенного выше значения $G_{\text{сл}}$ и известной вероятности распада $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, равной $\Gamma = (2,6033(24) \times 10^{-8} \text{ с})^{-1}$ получаем, что *

$$F_\pi \simeq 184 \text{ МэВ}. \quad (19.4.26)$$

Рассмотрим теперь матричный элемент $\bar{A}^\mu$ между однопуклонными состояниями. Он интересен и сам по себе, кроме того, как обсуждалось в разделе 19.2, он содержит информацию, необходимую для вычисления процессов испускания пионов низких энергий при столкновении с нуклонами. Следуя тем же рассуждениям, которые использовались в разделе 10.6 для электромагнитного тока, находим, что лоренцовская инвариантность и сохранение четности требуют, чтобы матричный элемент имел вид **

* Обычно вводят константу распада пиона f_π , которая выражается через используемую здесь константу F_π по-разному как F_π , $F_\pi/\sqrt{2}$ или $F_\pi/2$.

** Свойства зарядового сопряжения токов $A_\pm^\mu$ в стандартной модели таковы, что коэффициент $h(q^2)$ обращается в нуль. Возможно, что в слабых токах существуют слагаемые «второго рода»¹⁰ с противоположными свойствами зарядового сопряжения, приводящие к ненулевому значению $h(q^2)$, однако никаких свидетельств наличия таких слагаемых нет. Как мы увидим, удержание слагаемого с $h(q^2)$ не влияет на следствия, получаемые из киральной симметрии.

$$\begin{aligned} \langle p | A_+^\mu(x) | n \rangle &= (2\pi)^{-3} e^{iq \cdot x} \\ &\times \bar{u}_p \left[-i\gamma^\mu \gamma_5 f(q^2) + q^\mu \gamma_5 g(q^2) + i q_\nu [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma_5 h(q^2) \right] u_n, \end{aligned} \quad (19.4.27)$$

где $q \equiv p_n - p_p$. В приближении точной $SU(2) \times SU(2)$ симметрии из сохранения тока следует, что

$$q_\mu \langle p | A_+^\mu(x) | n \rangle = 0. \quad (19.4.28)$$

Используя основные уравнения для дираковских спиноров u_p и u_n

$$\bar{u}_p (i\not{p}_p + m_N) = (i\not{p}_n + m_N) u_n = 0,$$

видим, что

$$q_\mu \bar{u}_p [-i\gamma^\mu \gamma_5] u_n = -2m_N \bar{u}_p \gamma_5 u_n$$

так что из (19.4.28) вытекает равенство

$$2m_N f(q^2) = q^2 g(q^2). \quad (19.4.29)$$

Если $g(q^2)$ не имеет сингулярности при $q^2 = 0$, тогда из (19.4.29) следует, что либо $m_N = 0$, что очевидно не так, либо $f(0) = 0$, что также неверно. На самом деле, величина $f(0)$ измеряется в низкоэнергетических ядерных бета-распадах типа распада нейтрона, где эту константу обычно обозначают g_A . Измеренное значение этой константы

$$f(0) \equiv g_A = 1,2573(28). \quad (19.4.30)$$

Из того факта, что ни m_N , ни $f(0) = g_A$ не малы, вытекает, что в пределе точной $SU(2) \times SU(2)$ симметрии $g(q^2)$ должна иметь полюс при $q^2 \rightarrow 0$:

$$g(q^2) \rightarrow \frac{2m_N g_A}{q^2}. \quad (19.4.31)$$

Такой полюс естественно обеспечивается безмассовым пионом, наличие которого требуется спонтанным нарушением точной $SU(2) \times SU(2)$ симметрии. Предположим, что пион связан с однонуклонным состоянием так, как будто лагранжиан взаимодействия име-

ет вид $-2iG_{\pi N}\bar{\pi}\bar{N}\gamma_5\bar{t}N^*$. Из соотношения (19.4.24) вытекает, что матричный элемент тока между однопионным состоянием и вакуумом такой же, как если бы в $\bar{A}^\mu(x)$ содержалось слагаемое вида $F_\pi\partial^\mu\bar{\pi}/2$. Поэтому в пределе $q^2 \rightarrow 0$ матричный элемент (19.4.27) имеет полюс:

$$\langle p|A_+^\mu(x)|n\rangle \rightarrow \left[\frac{e^{iq\cdot x}}{(2\pi)^3}\right]\left[i(2\pi)^4 2G_{\pi N}\bar{u}_p(i\gamma_5)u_n\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4 q^2}\right]\left[\frac{iq^\mu F_\pi}{2}\right].$$

Сравнивая с (19.4.27), видим, что за счет однопионного обмена у функции $g(q^2)$ возникает полюс

$$g(q^2) \rightarrow \frac{G_{\pi N}F_\pi}{q^2} \quad (19.4.32)$$

при $q^2 \rightarrow 0$. Объединяя выражения (19.4.31) и (19.4.32), находим

$$G_{\pi N} = \frac{2m_N g_A}{F_\pi}. \quad (19.4.33)$$

Это знаменитое соотношение Голдбергера–Треймана¹¹. Оно неплохо выполняется: если взять $m_N = (m_p + m_n)/2 = 938,9$ МэВ, $g_A = 1,257$ и $F_\pi \simeq 184$ МэВ, то $G_{\pi N} \simeq 12,7$, в хорошем согласии с полученным разными способами значением^{**} $G_{\pi N} = 13,5$ (в том числе, с учетом однопионного полюса в нуклон-ядерном рассеянии и однонуклонного полюса в пион-нуклонном рассеянии).

В реальном мире пион не является безмассовым, а симметрия $SU(2) \times SU(2)$ не точна (даже перед спонтанным нарушением). Это обстоятельство можно проанализировать с помощью общего формализма, изложенного в предыдущем разделе. Из лагранжиана (19.4.1) следует нарушающее симметрию слагаемое в гамильтониане:

$$H_1 = m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d = (m_u + m_d)\Phi_4^+ + (m_u - m_d)\Phi_3^-, \quad (19.4.34)$$

* Это общепринятое определение псевдоскалярной пион-нуклонной константы взаимодействия $G_{\pi N}$. Множитель 2 вводится здесь для сокращения множителя $1/2$ в изоспиновых матрицах.

** Приводимое в учебниках¹² значение равно $G_{\pi N}^2/4\pi = 14,3$ или $G_{\pi N} = 13,4$. Недавно в результате очень точного изучения¹³ нейтрон-протонного рассеяния с перезарядкой при энергии 162 МэВ получено значение $G_{\pi N}^2/4\pi = 14,6 \pm 0,3$ или $G_{\pi N} = 13,5$.

где

$$\Phi_4^+ \equiv \frac{1}{2}(\bar{u}u + \bar{d}d), \quad \Phi_3^- = \frac{1}{2}(\bar{u}u - \bar{d}d). \quad (19.4.35)$$

Операторы Φ_4^+ и Φ_3^- являются пространственными скалярами и, как подразумевают используемые обозначения, преобразуются относительно $SU(2) \times SU(2)$ как компоненты независимых киральных 4-векторов $\Phi_\alpha^\pm$:

$$\bar{\Phi}^+ = i\bar{q}\gamma_5\bar{t}q, \quad \Phi_4^+ = \frac{1}{2}\bar{q}q, \quad (19.4.36)$$

$$\bar{\Phi}^- = \bar{q}\bar{t}q, \quad \Phi_4^- = -\frac{1}{2}i\bar{q}\gamma_5q. \quad (19.4.37)$$

Это киральные 4-векторы в том смысле, что

$$[\bar{T}, \Phi_n^\pm] = -\sum_m (\bar{\mathcal{T}})_{nm} \Phi_m^\pm, \quad (19.4.38)$$

$$[\bar{X}, \Phi_n^\pm] = -\sum_m (\bar{\mathcal{X}})_{nm} \Phi_m^\pm, \quad (19.4.39)$$

где $\bar{\mathcal{T}}$ и $\bar{\mathcal{X}}$ — эрмитовы 4×4 матрицы, реализующие 4-векторное представление алгебры $SU(2) \times SU(2) \subset SO(4)$:

$$(\mathcal{T}_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc}, \quad (\mathcal{T}_a)_{b4} = (\mathcal{T}_a)_{4b} = (\mathcal{T}_a)_{44} = 0, \quad (19.4.40)$$

$$(\mathcal{X}_a)_{b4} = -(\mathcal{X}_a)_{4b} = -i\delta_{ab}, \quad (\mathcal{X}_c)_{ab} = (\mathcal{X}_c)_{44} = 0. \quad (19.4.41)$$

Такие обозначения позволяют легко увидеть, что условия подстройки вакуума для генераторов T_1 , T_2 , X_1 , X_2 и X_3 , соответственно, имеют вид

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi_2^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^+ \rangle_0 = \langle \Phi_2^+ \rangle_0 \\ &= (m_u + m_d) \langle \Phi_3^+ \rangle_0 + (m_d - m_u) \langle \Phi_4^- \rangle_0. \end{aligned} \quad (19.4.42)$$

Мы предполагали, что при нулевых массах u - и d -кварков симметрия $SU(2) \times SU(2)$ спонтанно нарушается так, чтобы сохранить ненарушенной $SU(2)$ симметрию, генерируемую опера-

торами $\bar{T}$, а также четность. В этом случае $\langle \Phi_n^+ \rangle_0$ указывает в 4-направлении, а $\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0$, так что условия (19.4.42) выполняются. Однако, если $m_u = m_d = 0$, можно найти другие нарушающие симметрию решения с другими определениями четности, подвергнув данное решение произвольному преобразованию $SU(2) \times SU(2)$. Следовательно при нулевых массах u - и d -кварков нет способа определить, в каком направлении должен указывать $\langle \Phi_n^+ \rangle_0 = 0$, или какая подгруппа $SU(2)$ из $SU(2) \times SU(2)$ остается ненарушенной, хотя во всех случаях $\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0$. Из условия подстройки вакуума (19.4.42) вытекает, что в случае, когда симметрия внутренне нарушается возмущением (19.4.34) и спонтанно нарушается так, что $\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0$, вакуум должен «вытянуться в линию» таким образом, что $\langle \Phi_n^+ \rangle_0 = 0$ указывает в 4-направлении, и ненарушенной $SU(2)$ симметрией является обычный изоспин.

Этот формализм можно использовать для вычисления массы пиона. Из (19.4.39)–(19.4.41) находим:

$$[X_a, [X_b, \Phi_4^+]] = \delta_{ab} \Phi_4^+, [X_a, [X_b, \Phi_3^-]] = \Phi_a^- \delta_{b3}. \quad (19.4.43)$$

Кроме того, из изоспиновой инвариантности вытекает, что параметр нарушения симметрии F_{ab} , введенный в разделе 19.2, пропорционален δ_{ab} , причем коэффициент пропорциональности равен согласно (19.4.24) просто $F_\pi/2$, так что

$$F_{ab} = \delta_{ab} F_\pi / 2. \quad (19.4.44)$$

Поэтому из (19.3.20) следует, что пионная массовая матрица имеет вид

$$m_{ab}^2 = \delta_{ab} m_\pi^2, \quad (19.4.45)$$

где

$$m_\pi^2 = 4(m_u + m_d) \langle \Phi_4^+ \rangle_0 / F_\pi^2. \quad (19.4.46)$$

Поразительно, что массы заряженных и нейтрального пионов оказались равными, хотя мы и не делали никаких предположений об отношении масс m_u и m_d . Ниже мы увидим, что это отношение не близко к единице. Изоспин является хорошим квантовым числом не потому, что массы u - и d -кварков почти равны, а потому, что они *малы*. Кроме того, как и обещано, мы видим, что массам кварков

пропорционален *квадрат* массы пиона, так что массы кварков должны быть довольно малы. (Оценку см. в разделе 19.7.) Наблюдаемая разность масс пионов возникает не из-за разности масс кварков u и d , а из электромагнетизма. Действительно, пионный мультиплет — единственный изоспиновый мультиплет, разность масс внутри которого была успешно рассчитана только на основе однофотонного обмена ¹⁴.

Конечно, даже с учетом масс кварков выражение (19.4.24) можно использовать для определения F_π . Дивергенция этого выражения равна

$$\langle \text{VAC} | \partial_\mu A_i^\mu(x) | \pi_j \rangle = \frac{F_\pi \delta_{ij} m_\pi^2 e^{ip_\pi \cdot x}}{2(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0}}. \quad (19.4.47)$$

Вместо того, чтобы предполагать обращение в нуль $\partial_\mu \bar{A}^\mu$, мы можем теперь предположить, что это выражение мало, порядка m_π^2 , за исключением ситуации, когда пионный полюс компенсирует малость m_π^2 . Согласно (19.4.47) поведение матричных элементов $\partial_\mu \bar{A}^\mu$ в окрестности однопионного полюса такое же, как если бы $\partial_\mu \bar{A}^\mu$ равнялось $F_\pi m_\pi^2$, умноженному на должным образом перенормированное пионное поле. Например, однонуклонный матричный элемент $\partial_\mu A_+^\mu$ должен равняться

$$\langle p | \partial_\mu A_+^\mu(0) | n \rangle \simeq \frac{F_\pi m_\pi^2}{2} \left[\frac{-i}{(2\pi)^4 (q^2 + m_\pi^2)} \right] \left[i(2\pi)^4 2G_{\pi N} \bar{u}_p (-i\gamma_5) u_n \right], \quad (19.4.48)$$

так что в терминах формфакторов в (19.4.27) имеем

$$q^2 g(q^2) - 2m_N f(q^2) \simeq - \frac{G_{\pi N} F_\pi m_\pi^2}{q^2 + m_\pi^2}. \quad (19.4.49)$$

Ожидается, что это выражение справедливо при q^2 порядка m_π^2 , а не только в пределе $q^2 \rightarrow -m_\pi^2$, т. к. пионный полюс доминирует в матричных элементах $\partial_\mu A^\mu$ для всех таких малых q^2 . Кроме того, при таких q^2 мы вместо (19.4.32) имеем

$$g(q^2) \simeq \frac{G_{\pi N} F_\pi}{q^2 + m_\pi^2}. \quad (19.4.50)$$

Из (19.4.49) и (19.4.50) находим, что при q^2 порядка m_π^2

$$f(q^2) \simeq G_{\pi N} F_\pi / 2m_N. \quad (19.4.51)$$

Неудивительно, что эта функция практически постоянна в области q^2 от нуля до величины порядка m_π^2 , т. к. в ней нет однопионного полюса и нет ничего другого, что могло бы привести к существенному изменению в столь малой области q^2 . Это постоянное значение приближенно равно $f(0) \equiv g_A$, таким образом, (19.4.51) опять приводит к соотношению Голдбергера–Треймана.

Теперь можно использовать результаты раздела 19.2, чтобы вычислить амплитуду испускания одиночного пиона малой энергии в произвольном процессе $\alpha \rightarrow \beta$. Мы нашли, что амплитуда должна вычисляться на основе фейнмановских диаграмм, в которых пион испускается только с внешних линий в процессе, а выражение (19.2.49) показывает, что эти вклады должны вычисляться так, как будто взаимодействие пионного поля имеет вид $\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{A}_N / F_\pi$, где индекс N указывает, что в матричных элементах аксиального тока нужно отбросить слагаемое с однопионным полюсом. Из (19.4.27) (с учетом изоспиновой инвариантности) заключаем, что для мягких пионов, испускаемых с нуклонной линии, это взаимодействие эффективно равно

$$\frac{-ig_A}{F_\pi} \partial_\mu \vec{\pi} \bar{N} \gamma^\mu \gamma_5 \vec{t} N.$$

Используя уравнение Дирака для свободных частиц, можно видеть, что для нуклонов на массовой оболочке (т. е. в одонуклонных полюсах на рис. 19.2) это эквивалентно псевдоскалярному взаимодействию $-2im_N g_A \vec{\pi} \cdot \bar{N} \gamma_5 \vec{t} N / F_\pi$. Это еще одна демонстрация соотношения Голдбергера–Треймана (19.4.33).

* * *

Наше рассмотрение в данном разделе не следовало параллельно историческому развитию этих идей. На самом деле, ход исторического развития был хронологически почти в точности противоположным той линии рассуждений, которая здесь изложена. Нарушенные симметрии вошли в физику частиц вместе с соотно-

шением Голдбергера–Треймана (19.4.33), которое было выведено в 1957 году на основе динамического расчета распада пиона. Для того, чтобы объяснить удивительный успех этого весьма приближенного вычисления, ряд теоретиков¹⁵ предложил идею «частичного сохранения аксиального тока» (ЧСАТ), заключающуюся в том, что хотя аксиальный ток и не сохраняется (что следует хотя бы из того факта, что пионы распадаются), его дивергенция $\partial_\mu A_\pm^\mu$ пропорциональна пионному полю. Само по себе это предположение бессмысленно — мы видели в гл. 10, что любое поле с неисчезающим матричным элементом между вакуумным и однопионным состояниями может рассматриваться как пионное поле. Хотя это и не было ясно в те времена, на самом деле, предположение заключалось в том, что дивергенция аксиального тока мала, порядка m_π^2 , за исключением области, где матричный элемент велик за счет пионного полюса. Проблема в значительной степени прояснилась в работе Намбу 1960 года¹⁶, который отметил, что аксиальный ток можно рассматривать как точно сохраняющийся в пределе нулевой массы пиона, и в этом случае соотношение Голдбергера–Треймана можно вывести так, как мы это сделали выше. В этой и последующей работе с Иона-Лазинио¹⁷ Намбу заметил, что появление безмассового или почти безмассового пиона есть симптом нарушения точной или приближенной симметрии. В работах с другими сотрудниками¹⁸ Намбу показал также, как вычислять вероятности испускания одиночного мягкого пиона в разных процессах. Затем Голдстоун³ заметил, что нарушенные симметрии всегда сопровождаются безмассовыми бозонами. Это было доказано в 1962 году Голдстоуном, Саламом и мной⁵ с помощью рассуждений, приведенных в разделе 19.2.

Ни одна из этих ранних работ о пионах как голдстоуновских бозонах не зависела от конкретных предположений о природе группы нарушенной симметрии. Например, это могло бы быть прямое произведение трех коммутирующих групп $U(1)$, генераторы которых образуют вектор изотопического спина, или некомпактная группа $SO(3,1)$, для которой в коммутационных соотношениях (19.4.19) справа возникает знак «минус». Природа группы нарушенной симметрии стала важной только в связи с рассмотрением процессов с участием более одного пиона, начавшегося с правила сумм Адлера–Вайсбергера в 1965 году¹⁹, успех которого показал, что нарушенной группой действительно является $SU(2) \times SU(2)$. (Такие про-

цессы обсуждаются в следующем разделе.) Установление группы симметрии $SU(2) \times SU(2)$ привело к смещению акцентов²⁰ в сторону приложений этой симметрии в физике сильных взаимодействий и отходу от ранних усилий²¹, сосредоточенных на самих токах.

Вся эта работа проводилась в отсутствие конкретной теории сильных взаимодействий. Одна из причин быстрого признания в 1973 году квантовой хромодинамики как правильной теории сильных взаимодействий заключалась в том, что эта теория объяснила $SU(2) \times SU(2)$ симметрию как простое следствие малости масс u - и d -кварков.

19.5. Эффективные теории поля: пионы и нуклоны

В разделе 19.2 мы узнали, как рассчитывать амплитуду испускания одиночного голдстоуновского бозона B низкой энергии в переходе $\alpha \rightarrow \beta + B$, применяя условие сохранения тока к матричному элементу тока симметрии между состояниями α и β . В этом вычислении мы совершенно не использовали какую-либо информацию о деталях нарушенной группы симметрии; все, что нам требовалось, это сохранение тока. Новые детали возникают, если мы хотим вычислить матричный элемент испускания и/или поглощения *двух* голдстоуновских бозонов, например, в процессе рассеяния голдстоуновских бозонов. В этом случае следует применить условие сохранения тока к матричному элементу вида

$$\langle \beta | T \{ J_1^{\lambda_1}(x_1), J_2^{\lambda_2}(x_2) \} | \alpha \rangle,$$

где состояния α и β содержат и другие частицы помимо двух участвующих в реакции голдстоуновских бозонов. Но когда мы действуем оператором дивергенции $\partial/\partial x_1^{\lambda_1}$ на этот матричный элемент, мы сталкиваемся с ненулевым вкладом от производной функций $\theta(x_1^0 - x_2^0)$ и $\theta(x_2^0 - x_1^0)$, возникающим в определении хронологически упорядоченного произведения $T\{\dots\}$. Этот вклад равен матричному элементу коммутатора $\delta(x_1^0 - x_2^0)[J_1^0(x_1), J_2^{\lambda_2}(x_2)]$ при равных временах, значение которого зависит от коммутационных соотношений групповой алгебры. Указанное обстоятельство делает особо интересными такие процессы с участием многих голдстоуновских бозонов, так как их можно использовать для

экспериментального изучения природы группы нарушенной симметрии таким способом, который невозможен для процессов с участием только одного голдстоуновского бозона. Из-за возникновения подобных коммутаторов токов такой подход стал известен как метод *алгебры токов*²¹.

Этот метод был использован в ранних вычислениях амплитуд с многими голдстоуновскими бозонами.²² К сожалению, такие вычисления весьма громоздки, особенно, когда участвуют три и более голдстоуновских бозона. Кроме того, трудно было понять, как обращаться с симметриями типа киральной симметрии квантовой хромодинамики, которые не точны. По этой причине была предложена²³ другая, более физическая техника вычислений, основанная на использовании эффективных лагранжианов. Суть ее в том, что амплитуды голдстоуновских бозонов просто вычисляются по теории возмущений с помощью некоторого лагранжиана для голдстоуновских бозонов и других частиц в состояниях α и β , удовлетворяющего требованиям предполагаемой нарушенной симметрии.

Первоначально проверка метода эффективного лагранжиана основывалась на алгебре токов. Используя ее, можно установить, что амплитуда испускания совокупности голдстоуновских бозонов малой энергии в процессе $\alpha \rightarrow \beta + B_1 + B_2 + \dots$ фиксирована, если только известны коммутационные соотношения при равных временах для токов, связанных с нарушенными симметриями, а также матричные элементы процесса $\alpha \rightarrow \beta$ и матричные элементы токов между различными одночастичными состояниями. Мы знаем, что лагранжиан, подчиняющийся нарушенной симметрии, позволяет с помощью нетеровской техники построить сохраняющиеся токи с соответствующими одновременными коммутаторами, поэтому, если просто рассчитать амплитуды испускания голдстоуновских бозонов малой энергии с помощью такого лагранжиана и подставить правильные значения $M_{\beta\alpha}$ и одночастичные матричные элементы токов, должен получиться тот же самый ответ, что с помощью алгебры токов. В случае, когда взаимодействуют только голдстоуновские бозоны друг с другом, состояния α и β можно считать вакуумными, и нам не требуется никакая дополнительная информация, кроме значения матричного элемента F между состоянием голдстоуновского бозона и вакуумом.

В первом примере подобных расчетов²³ исходным был лагранжиан σ -модели.²⁴ Если ограничиться сейчас только бозонным секто-

ром этой модели, то ее лагранжиан является тем же $SO(4)$ -инвариантом, который рассматривался в качестве примера в разделе 19.2,

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_n \partial^\mu \Phi_n - \frac{M^2}{2} \Phi_n \Phi_n - \frac{\lambda}{4} (\Phi_n \Phi_n)^2, \quad (19.5.1)$$

где суммирование по n идет по значениям 1, 2, 3, 4, а $\bar{\Phi}$ — изовекторное псевдоскалярное поле и Φ_4 — изоскалярное скалярное поле.

Проблема, с которой немедленно сталкиваются при рассмотрении любого типа эффективных лагранжианов, заключается в том, что с целью использовать их для расчета амплитуд рассеяния мы должны либо включить все фейнмановские диаграммы всех порядков теории возмущений, либо найти какие-то основания для отбрасывания диаграмм высших порядков. Для лагранжианов типа (19.5.1), в которых нарушенная симметрия реализуется через линейные преобразования различных полей, такие основания не обнаруживаются. К счастью, любой такой лагранжиан можно переписать в виде, позволяющем использовать фейнмановские диаграммы для построения разложения амплитуды рассеяния в ряд по степеням энергий голдстоуновских бозонов. Чтобы осуществить это, совершим в каждой точке пространства-времени преобразование симметрии, устраняющее поля, отвечающие голдстоуновским бозонам теории. Степени свободы, соответствующие голдстоуновским бозонам, вновь возникают в преобразованной теории как параметры преобразования симметрии. Однако, поскольку лагранжиан инвариантен относительно не зависящих от пространственно-временных точек преобразований симметрии, в нем не может содержаться какая-либо зависимость от новых полей голдстоуновских бозонов, если они постоянны, и таким образом каждое слагаемое в лагранжиане, содержащее эти новые поля, должно содержать еще как минимум одну пространственно-временную производную поля. При расчете элементов S -матрицы для реакций с голдстоуновскими бозонами, эти производные вносят степени энергии голдстоуновского бозона. Как будет видно, такой лагранжиан можно использовать для построения разложения элементов S -матрицы в ряд по степеням этих энергий.

Так, чтобы переписать лагранжиан (19.5.1) в удобном виде, запишем 4-вектор Φ_n как киральное вращение R , действующее на 4-вектор $\{0, 0, 0, \sigma\}$, первые три компоненты которого (голдстоуновская часть Φ_n) равны нулю:

$$\varphi_n(x) = R_{n4}(x)\sigma(x), \quad (19.5.2)$$

где $R_{nm}(x)$ — ортогональная матрица,

$$R^T(x)R(x) = 1, \quad (19.5.3)$$

так что

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_n \varphi_n(x)^2}. \quad (19.5.4)$$

Тогда лагранжиан (19.5.1) принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 (R_{n4} \partial_\mu \sigma + \sigma \partial_\mu R_{n4})^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4, \quad (19.5.5)$$

Поскольку R — ортогональная матрица, слагаемое $\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma$ не зависит от R , и перекрестное слагаемое исчезает:

$$\sum_n R_{n4}^2 = 1, \quad \sum_n R_{n4} \partial_\mu R_{n4} = \frac{1}{2} \partial_\mu \sum_n R_{n4}^2 = 0,$$

так что

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{n=1}^4 \partial^\mu R_{n4} \partial_\mu R_{n4} - \frac{1}{2} \mu^2 \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4. \quad (19.5.6)$$

Если μ^2 отрицательно, то σ имеет ненулевое вакуумное среднее, которое в низшем порядке определяется положением минимума суммы последних двух слагаемых в точке $\sigma = |\mu|/\sqrt{\lambda}$.

Вместо старых переменных φ_n вводим теперь новые переменные $\sigma = |\mu|/\sqrt{\lambda}$, а также любые другие переменные, необходимые для параметризации вращения R . Например, эти параметры можно выбрать просто равными самим R_{a4} (где $a, b, \dots$ с этого момента являются изоспиновыми индексами, принимающими значения 1, 2, 3), а R_{44} определяется условием ортогональности R . Другая параметризация приводит к более простым окончательным результатам и была исторически первой параметризацией, использованной для этих целей. Определим

$$\zeta_a \equiv \frac{\varphi_a}{\varphi_4 + \sigma} \quad (19.5.7)$$

и выберем

$$R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1+\bar{\zeta}^2} = -R_{4a}, \quad R_{44} = \frac{1-\bar{\zeta}^2}{1+\bar{\zeta}^2}, \quad R_{ab} = \delta_{ab} - \frac{2\zeta_a\zeta_b}{1+\bar{\zeta}^2}, \quad (19.5.8)$$

так что

$$\frac{\Phi_a}{\sigma} = R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1+\bar{\zeta}^2}, \quad \frac{\Phi_4}{\sigma} = R_{44} = \frac{1-\bar{\zeta}^2}{1+\bar{\zeta}^2}. \quad (19.5.9)$$

Тогда лагранжиан (19.5.6) принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - 2\sigma^2 \bar{D}_\mu \cdot \bar{D}^\mu - \frac{1}{2} \kappa^2 \sigma^2 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4, \quad (19.5.10)$$

где

$$\bar{D}_\mu \equiv \frac{\partial_\mu \bar{\zeta}}{1+\bar{\zeta}^2}. \quad (19.5.11)$$

Какая бы параметризация не использовалась, ясно, что поля $\bar{\zeta}$ описывают частицы нулевой массы, все взаимодействия которых включают производные полей. Эти поля (с точностью до нормировки) и являются новыми пионными полями.

Несмотря на внешний вид, этот лагранжиан все еще инвариантен относительно $SO(4)$ симметрии, но только реализованной нелинейно. Относительно изоспинового преобразования с инфинитезимальным параметром $\bar{\theta}$ поле $\bar{\zeta}$ просто поворачивается как обычный изовектор, а σ является изоскаляром:

$$\delta \bar{\zeta} = \bar{\theta} \times \bar{\zeta}, \quad \delta \sigma = 0, \quad (19.5.12)$$

так что лагранжиан (19.5.10) явно изоинвариантен. С другой стороны, относительно преобразований нарушенной симметрии, параметризованных инфинитезимальным вектором $\bar{\epsilon}$, исходные поля преобразуются по формулам

$$\delta \bar{\Phi} = 2\bar{\epsilon} \Phi_4, \quad \delta \Phi_4 = -2\bar{\epsilon} \cdot \bar{\Phi}. \quad (19.5.13)$$

Тогда из (19.5.7) находим, что

$$\delta \vec{\zeta} = \vec{\epsilon}(1 - \vec{\zeta}^2) + 2\vec{\zeta}(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\zeta}), \quad \delta \sigma = 0. \quad (19.5.14)$$

Лагранжиан (19.5.10) инвариантен относительно преобразования нарушенной симметрии (19.5.14), так как $\vec{D}_\mu$ подвергается линейному (хотя и зависящему от поля) изоспиновому вращению²⁵

$$\delta \vec{D}_\mu = 2(\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}) \times \vec{D}_\mu, \quad (19.5.15)$$

а (19.5.10) инвариантен относительно изоспиновых преобразований. Учитывая закон преобразования (19.5.15), величину $\vec{D}_\mu$ часто называют *ковариантной производной* пионного поля.

Законы преобразования (19.5.12) и (19.5.14) определяют так называемую *нелинейную реализацию* группы $SU(2) \times SU(2)$ ²⁵. Общая теория нелинейных реализаций групп Ли излагается в следующем разделе. Мы покажем, что с точностью до переопределений поля законы преобразования (19.5.12) и (19.5.14) представляют собой самую общую реализацию группы $SU(2) \times SU(2)$, при которой изоспиновая подгруппа $SU(2)$ реализуется линейно по $\vec{\zeta}$.

Мы видим, что каждое взаимодействие новых пионных полей сопровождается появлением пространственно-временной производной, так что эффективная константа связи при малых энергиях пионов мала. (Мы уточним ниже это замечание.) Поэтому при достаточно малых энергиях пионов можно использовать этот лагранжиан в древесном приближении для воспроизводства теорем о мягких пионах в методе алгебры токов. Для этой цели необходимо всего лишь, чтобы лагранжиан был $SO(4)$ -инвариантным. Но, так как поле σ является $SO(4)$ -скаляром, оно не играет роли для сохранения $SO(4)$ -инвариантности лагранжиана и может быть просто отброшено*. Конечно, такая процедура изменяет физическое содержание теории, но не меняет амплитуд, определяющихся теоремами о мягких пионах. Лагранжиан (19.5.10) упрощается и принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{F^2}{2} \vec{D}_\mu \vec{D}^\mu = -\frac{F^2}{2} \frac{\partial_\mu \vec{\zeta} \partial^\mu \vec{\zeta}}{(1 + \vec{\zeta}^2)^2}, \quad (19.5.16)$$

* Альтернативно можно перейти к пределу, когда M и λ стремятся к бесконечности, но среднее значение σ удерживается постоянным.

где $F = 2\langle\sigma\rangle = 2|.\pi|/\sqrt{\lambda}$. (Как мы вскоре увидим, величина F совпадает с обсуждавшейся в предыдущем разделе константой F_π .) Для многих целей более удобно иметь дело с нормированным по общепринятому соглашению пионным полем

$$\bar{\pi} \equiv F\tilde{\zeta}, \quad (19.5.17)$$

и тогда лагранжиан (19.5.16) равен

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial_\mu \bar{\pi} \partial^\mu \bar{\pi}}{(1 + \bar{\pi}^2/F^2)^2}. \quad (19.5.18)$$

Множитель $1/F$ действует как параметр связи, сопровождающий взаимодействие каждого дополнительного пиона. Формула (19.5.18) описывает, как часто говорят, «нелинейную σ -модель» для частного случая симметрии $SU(2) \times SU(2)$, спонтанно нарушенной до симметрии $SU(2)$.

Важно отметить, что при выводе (19.5.18) было совершенно не обязательно начинать с «линейной σ -модели» с лагранжианом (19.5.1). На самом деле, нам не нужно отталкиваться от какой бы то ни было конкретной теории. Выражение (19.5.18) можно использовать просто потому, что оно инвариантно относительно $SU(4)$ преобразования (19.5.12), (19.5.14). В этом случае алгебра токов говорит нам, что для получения правильных результатов для амплитуд пионных процессов при низких энергиях больше ничего и не требуется.

Через несколько лет после введения эффективных лагранжианов для мягких пионов появилось другое подтверждение техники эффективной теории поля²⁶, которая не опирается на алгебру токов и позволяет производить расчеты, не ограниченные пределом исчезающе малых энергий голдстоуновских бозонов. Эта техника основана на наблюдении (формально еще не облеченном в ранг теоремы), что, вычисляя физическую амплитуду с помощью фейнмановских диаграмм, используя самый общий лагранжиан, включающий соответствующие степени свободы и удовлетворяющий предполагаемым симметриям теории, мы просто конструируем самую общую амплитуду, совместимую с общими принципами теории относительности, квантовой механики и предполагаемыми

симметриями. Такая точка зрения была основой содержания всего первого тома этой книги. В данном контексте «соответствующие» степени свободы — это сами голдстоуновские бозоны, а также частицы в состояниях α и β и любые другие состояния частиц, которые могут быть получены из α и β путем взаимодействия с голдстоуновскими бозонами низких энергий. Принимая это подтверждение эффективных теорий поля, мы освобождаемся от необходимости бороться с усложнениями, связанными с алгеброй токов. Что более важно, современный подход, основанный на эффективной теории поля, приводит к результатам, выводящим за пределы крайне низких энергий, и позволяет систематически изучать нарушение любой внутренней симметрии.

Согласно этому подходу, для вычисления амплитуд взаимодействия пионов в любом желаемом порядке по энергиям пионов, следует использовать самый общий лагранжиан, включающий пионное поле ζ , преобразующееся по правилам (19.5.12) и (19.5.14):

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\frac{F^2}{2} \bar{D}_\mu \bar{D}^\mu - \frac{c_4}{4} (\bar{D}_\mu \bar{D}^\mu)^2 - \frac{c'_4}{4} (\bar{D}_\mu \cdot \bar{D}_\nu)(\bar{D}^\mu \cdot \bar{D}^\nu) - \dots \quad (19.5.19)$$

Слагаемые, отмеченные многоточием, содержат слагаемые с более высокими степенями ковариантной производной $\bar{D}_\mu$ или более высокие ковариантные производные, общая структура которых описана в следующем разделе. Коэффициенты c_4 и c'_4 безразмерны, а коэффициенты во всех слагаемых более высокого порядка имеют размерность обратных степеней массы.

Рассмотрим общий процесс, включающий произвольное число начальных и конечных пионов. Мы предполагаем, что все их энергии и импульсы не превышают величины порядка Q , которая мала по сравнению с типичной шкалой квантовой хромодинамики (скажем, массой нуклона или ρ -мезона). Даже несмотря на то, что лагранжианы типа (19.5.19) неперенормируемы в обычном смысле, мы знаем из результатов раздела 12.3, что такие лагранжианы могут приводить к конечным результатам, если только они содержат все возможные слагаемые, разрешенные симметриями, так как в этом случае найдется контрчлен, сокращающий каждую бесконечность. Если определить перенормированные значения констант F^2 , c_4 , c'_4 , ..., задав значения различных амплитуд рассеяния голдстоуновских бозонов при энергиях порядка Q , то интегралы по импульсам во вкладах фейн-

мановских диаграмм будут определяться вкладками от виртуальных импульсов также порядка Q (поскольку перенормировка делает эти интегралы конечными, а в теории нет никакого другого подходящего эффективного обрезания). Поэтому мы можем строить теорию возмущений как разложение в ряд по степеням Q .

Каждая производная и поэтому каждый оператор $\bar{D}_\mu$ в каждой вершине взаимодействия вносит одну степень Q в порядок величины диаграммы; каждый пропагатор пиона вносит множитель Q^{-2} ; каждый дифференциал объема интегрирования d^4q , связанный с петлями в диаграмме, вносит множитель Q^4 . Таким образом, произвольная связная диаграмма имеет порядок Q^v , где

$$v = \sum_i V_i d_i - 2I + 4L. \quad (19.5.20)$$

Здесь d_i — число производных во взаимодействии типа i , V_i — число вершин взаимодействия типа i в диаграмме, I — число внутренних пионных линий и L — число петель. Эти величины связаны известным топологическим тождеством (4.4.7):

$$L = I - \sum_i V_i + 1, \quad (19.5.21)$$

так что можно устранить I и записать

$$v = \sum_i V_i (d_i - 2) + 2L + 2. \quad (19.5.22)$$

Главное в этом выражении то, что каждое слагаемое положительно: любое взаимодействие в (19.5.19) содержит как минимум две производные и, конечно, $L \geq 0$. Поэтому старшее слагаемое в любом процессе имеет порядок Q^2 и возникает исключительно от *древесных* диаграмм (т. е. диаграмм с $L = 0$), построенных только с помощью слагаемого в (19.5.19), содержащего две производные (т. е. $V_i = 0$ при $d_i \neq 2$):

$$\mathcal{G}_2 = -\frac{F^2}{2} \bar{D}_\mu \bar{D}^\mu = -\frac{1}{2} \frac{\partial_\mu \bar{\pi} \partial^\mu \bar{\pi}}{(1 + \bar{\pi}^2/F^2)^2}. \quad (19.5.23)$$

Например, инвариантная амплитуда M , возникающая в элементе S -матрицы для пион-пионного рассеяния

$$S = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) M(2\pi)^{-6} (16E_A E_B E_C E_D)^{-1/2} \quad (19.5.24)$$

дается в этом порядке выражением:

$$M_{abcd}^{(v=2)} = 4F^{-2} [\delta_{ab} \delta_{cd} (-p_A \cdot p_B - p_C \cdot p_D) + \delta_{ac} \delta_{bd} (p_A \cdot p_C + p_B \cdot p_D) + \delta_{ad} \delta_{bc} (p_A \cdot p_D + p_B \cdot p_C)], \quad (19.5.25)$$

где a, b, c, d — изовекторные индексы пионов A, B, C, D , соответственно. (Чуть ниже в этом разделе мы обсудим влияние конечной массы пиона.) Использование (19.5.25) в качестве главного слагаемого не зависит от каких-либо предположений о малости константы связи λ в исходном лагранжиане (19.5.1), и даже от справедливости этой формулы для лагранжиана, а зависит только от предположения о малости типичной энергии пиона Q .

Следующее слагаемое в амплитуде для любой реакции с участием голдстоуновских бозонов будет порядка Q^4 и возникает оно как от однопетлевых диаграмм, связанных только с лагранжианом (19.5.16), а также от древесных диаграмм, построенных только из взаимодействия в (19.5.16), с добавлением одиночной вершины, возникающей из слагаемых с $d = 4$ в (19.5.19):

$$M_{abcd}^{(v=4)} = \frac{\delta_{ab} \delta_{cd}}{F^4} \left[-\frac{1}{2\pi^2} s^2 \ln(-s^2) - \frac{1}{12\pi^2} (u^2 - s^2 + 3t^2) \ln(-t) - \frac{1}{12\pi^2} (t^2 - s^2 + 3u^2) \ln(-u) + \frac{1}{3\pi^2} (s^2 + t^2 + u^2) \ln \Lambda^2 - \frac{1}{2} c_4 s - \frac{1}{4} c'_4 (t^2 + u^2) \right] + \text{перекрестные слагаемые}, \quad (19.5.26)$$

где «перекрестные слагаемые» означают слагаемые, получающиеся перестановками $B \leftrightarrow C$ и $B \leftrightarrow D$, а s, t, u — мандельштамовские переменные

$$s = -(p_A + p_B)^2, \quad t = -(p_A - p_C)^2, \quad u = -(p_A - p_D)^2.$$

Зависимость этого результата от обрезания Λ может быть устранена переопределением констант c_4 и c'_4 . Перенормированные константы равны

$$c_{4R} = c_4 - \frac{2}{3\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right), \quad (19.5.27)$$

$$c'_{4R} = c'_4 - \frac{4}{3\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right), \quad (19.5.28)$$

где μ — произвольный масштаб перенормировки порядка Q , введенный для того, чтобы сделать логарифмы хорошо определенными. Выраженная через эти перенормированные константы, амплитуда (19. 5. 26) принимает вид

$$\begin{aligned} M_{abcd}^{(v=4)} = \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{F^4} & \left[-\frac{1}{2\pi^2} s^2 \ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right) - \frac{1}{12\pi^2} (u^2 - s^2 + 3t^2) \ln\left(\frac{-t}{\mu^2}\right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{12\pi^2} (t^2 - s^2 + 3u^2) \ln\left(\frac{-u}{\mu^2}\right) - \frac{1}{2} c_4 s - \frac{1}{4} c'_4 (t^2 + u^2) \right] \quad (19.5.29) \\ & + \text{перекрестные слагаемые,} \end{aligned}$$

Подобные вычисления можно провести в любом порядке по Q , и всегда получается, что в каждом порядке мы сталкиваемся с конечным числом новых констант, перенормировка которых позволяет устранить зависимость физических амплитуд от обрезания. Заметим, что отношение старших слагаемых с $v = 2$ и поправок с $v = 4$ порядка $Q^2/8\pi^2 F^2$, так что похоже, что разложение можно считать полезным до тех пор, пока энергии всех пионов много меньше величины порядка $2\pi F$.

Приведенное разложение по теории возмущений можно использовать также для установления связи вездесущего параметра F с измеряемой амплитудой распада пиона F_π . С учетом правила преобразования (19.5.14) для ζ , аксиальный ток имеет вид:

$$\vec{\varepsilon} \cdot \vec{A}^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \vec{\zeta})} \cdot \delta \vec{\zeta}$$

и поэтому

$$\vec{A}^\mu = -(1 - \vec{\zeta}^2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \vec{\zeta})} - 2\vec{\zeta} \cdot \vec{\zeta} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \vec{\zeta})} \right). \quad (19.5.30)$$

(Ток $\bar{A}^\mu$ является нетеровским током симметрии, порожденной преобразованием $2\vec{x}$, что на нуклонном дублете представляется генератором $2\gamma_5 \vec{t} = \gamma_5 \vec{\tau}$.) После интегрирования по всем другим полям и использования (19.5.17) для того, чтобы выразить ζ через канонически нормированное пионное поле $\bar{\pi}$, находим:

$$\bar{A}^\mu = F \left[\partial^\mu \bar{\pi} \frac{(1 - \bar{\pi}^2 / F^2)}{(1 + \bar{\pi}^2 / F^2)} + \frac{2\bar{\pi}(\bar{\pi} \cdot \partial^\mu \bar{\pi})}{F^2(1 + \bar{\pi}^2 / F^2)^2} \right] + \dots \quad (19.5.31)$$

Используя для вычисления $\langle \text{VAC} | \bar{A}^\mu | \pi \rangle$ разложение теории возмущений по степеням энергии пиона, видим, что в низшем порядке амплитуда распада пиона равна

$$F_\pi = F. \quad (19.5.32)$$

Кроме того, из лоренц-инвариантности и соотношения (19.5.22) следует, что поправки высших порядков должны быть пропорциональны степеням отношения p_π^2 / F_π^2 , которое обращается в нуль для безмассового пиона, так что соотношение (19.5.32) действительно точное в пределе $m_\pi \rightarrow 0$. Поэтому можно думать, что наше разложение по теории возмущений пригодно до энергий пионов, меньших чем величина порядка $2\pi F_\pi = 1200$ МэВ.

Чтобы провести сравнение с экспериментом, мы должны учесть, что масса пиона не равна нулю. На массовой оболочке невозможна ситуация, чтобы временная компонента 4-импульса пиона была бы меньше m_π , так что при подсчете степеней типичной энергии и импульса пиона Q следует считать, что m_π порядка Q . Однако в предыдущем разделе мы видели, что m_π^2 пропорционально линейной комбинации масс кварков, так что формула (19.5.22) для порядка Q^V данной фейнмановской диаграммы должна быть переписана в виде

$$v = \sum_i V_i (d_i + 2m_i - 2) + 2L + 2, \quad (19.5.33)$$

где m_i — число множителей, равных кварковым массам, во взаимодействии типа i .

Взаимодействия, включающие массы кварков, можно различить по их свойствам преобразования относительно $SU(2) \times SU(2)$

или, эквивалентно, относительно $SO(4)$. Выражение (19.4.34) показывает, что слагаемые первого порядка по массам кварков преобразуются как линейные комбинации двух скаляров — четвертой компоненты кирального 4-вектора Φ_n^+ с коэффициентом $(m_u + m_d)$ и третьей компоненты другого кирального 4-вектора Φ_n^- с коэффициентом $(m_u - m_d)$. Следовательно, слагаемые $\Delta\mathcal{L}^+$ и $\Delta\mathcal{L}^-$ в эффективном лагранжиане первого порядка по $m_u + m_d$ и $m_u - m_d$ должны иметь относительно кирального преобразования свойства четвертой и третьей компонент киральных 4-векторов, соответственно, и, конечно, быть лоренцовскими скалярами. Одним очевидным кандидатом на киральный 4-вектор, четвертая компонента которого — скаляр, является Φ_n , с которого мы начинали этот раздел. Согласно (19.5.9), его четвертая компонента равна просто $\sigma(1 - \bar{\zeta}^2) / (1 + \bar{\zeta}^2)$. Множитель σ можно опустить, так как это киральный скаляр, не влияющий поэтому на свойства кирального преобразования оставшегося выражения. Можно зафиксировать нормировку этого слагаемого, потребовав, чтобы коэффициент при $\bar{\pi}^2 = F_\pi^2 \bar{\zeta}^2$ был бы равен $-m_\pi^2/2$, так что с точностью до аддитивной постоянной

$$\Delta\mathcal{L}^+ = -\frac{m_\pi^2 F_\pi^2}{2} \frac{\bar{\zeta}^2}{1 + \bar{\zeta}^2} = -\frac{m_\pi^2}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{1 + \bar{\pi}^2 / F_\pi^2}. \quad (19.5.34)$$

В следующем разделе мы увидим, что это единственная скалярная функция пионного поля без производных, преобразующаяся как четвертая компонента кирального 4-вектора. С другой стороны, не существует скалярной функции пионного поля без производных, преобразующейся как третья компонента кирального 4-вектора, так как, если бы такая функция была третьей компонентой кирального 4-вектора, она должна была бы быть нечетной по пионному полю и, следовательно, должна была бы быть не скаляром, а псевдоскаляром. Таким образом, (19.5.34) есть единственное взаимодействие с $d_i = 0$ и $m_i = 1$. Поразительно, что нарушающая изоспиновую симметрию разность масс u - и d -кварков не только не влияет на массы пиона, как это мы видели в предыдущем разделе, но и не влияет также на любое многопионное взаимодействие без производных.

Теперь мы способны провести реалистичный расчет главных $v = 2$ слагаемых в амплитуде пион-пионного рассеяния. Согласно (19.5.33), эти слагаемые возникают только из древесных диаграмм,

построенных, исходя из $d = 2$, $m = 0$ пионного взаимодействия в (19.5.33) или из $d = 0$, $m = 1$ пионного взаимодействия в (19.5.34). В этом порядке инвариантная амплитуда M , определенная выражением (19.5.24), равна

$$M_{abcd}^{(v=2)} = 4F_\pi^{-2} [\delta_{ab}\delta_{cd}(s - m_\pi^2) + \delta_{ac}\delta_{bd}(t - m_\pi^2) + \delta_{ad}\delta_{bc}(u - m_\pi^2)]. \quad (19.5.35)$$

В частности, на пороге $s = 4m_\pi^2$, $t = u = 0$, так что

$$\begin{aligned} M_{abcd}^{(v=2)}(\text{порог}) &= 4m_\pi^2 F_\pi^{-2} [3\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}] \\ &= 4m_\pi^2 F_\pi^{-2} [7M_{ab,cd}^{(0)} - 2M_{ab,cd}^{(2)}], \end{aligned} \quad (19.5.36)$$

где $M^{(0)}$ и $M^{(2)}$ — соответствующие тензоры, представляющие двухпионные состояния с изоспином $T = 0$ и $T = 2$:

$$M_{ab,cd}^{(0)} = \frac{1}{3} \delta_{ab}\delta_{cd}, \quad (19.5.37)$$

$$M_{ab,cd}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc} - \frac{2}{3} \delta_{ab}\delta_{cd} \right), \quad (19.5.38)$$

нормированные так, что $\text{Tr} M^{(T)} = 2T + 1$. Этот результат обычно записывают с помощью длин рассеяния. Согласно разделам 3.6 и 3.7, длина рассеяния a_T для двух пионов в состоянии с изоспином T равна²⁷ произведению $1/32\pi m_\pi$ на коэффициент при $M^{(T)}$ в выражении (19.5.36):

$$a_0 = \frac{7m_\pi}{8\pi F_\pi^2} = 0,16m_\pi^{-1}, \quad a_2 = -\frac{m_\pi}{4\pi F_\pi^2} = -0,046m_\pi^{-1}.$$

Длины рассеяния пионов трудно измерять, однако тщательное изучение процессов типа $\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N$ и $K \rightarrow \pi + \pi + e + \nu$ дало следующие значения²⁸: $a_0 = (0,26 \pm 0,05)m_\pi^{-1}$, $a_2 = (-0,028 \pm 0,012)m_\pi^{-1}$, что согласуется с приведенными теоретическими значениями. Похоже, что учет поправок высших порядков по $m_\pi/2\pi F_\pi$ улучшает согласие.

Этот формализм можно распространить на описание взаимодействий пионов с нуклонами или другими частицами. Проще всего

предположить, что мы добавляем слагаемое, содержащее нуклонное дублетное поле N , в тот лагранжиан, с которого мы начинали:

$$\mathcal{L}_N = -\bar{N}(\not{\partial} + g[\varphi_4 + 2i\vec{t} \cdot \vec{\varphi}\gamma_5])N, \quad (19.5.39)$$

где $\vec{t}$ — изоспиновый матричный вектор для изоспина 1/2 (т. е. паулиевский спинор $\vec{\tau}$, деленный на 2). Этот лагранжиан инвариантен относительно киральных $SU(2) \times SU(2)$ преобразований с

$$\delta\vec{\varphi} = 2\vec{\epsilon}\varphi_4, \quad \delta\varphi_4 = -2\vec{\epsilon} \cdot \vec{\varphi}, \quad (19.5.40)$$

$$\delta N = -2i\gamma_5\vec{\epsilon} \cdot \vec{t}N. \quad (19.5.41)$$

При устранении пионных связей без производных следует выразить нуклонное поле N как $SO(4)$ вращение R в представлении (19.5.41), действующее на новое нуклонное поле $\tilde{N}$:

$$N \equiv \frac{(1 - 2i\gamma_5\vec{t} \cdot \vec{\zeta})}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \tilde{N}, \quad (19.5.42)$$

где $\vec{\zeta}$ опять дается выражением (19.5.7). После этого преобразования слагаемое без производных в (19.5.39) зависит теперь только от $\tilde{N}$ и σ :

$$\bar{N}[\varphi_4 + 2i\vec{t} \cdot \vec{\varphi}\gamma_5]N = \sigma\tilde{N}\tilde{N}.$$

С другой стороны, слагаемое с производными содержит производные от матрицы в (19.5.41), что приводит к нуклонному лагранжиану

$$\mathcal{L}_N = -\tilde{N} \left[\not{\partial} + g\sigma + 2i \frac{\vec{t} \cdot (\vec{\zeta} \times \not{\partial}\vec{\zeta})}{1 + \zeta^2} + 2i\gamma_5\vec{t} \cdot \not{\vec{D}} \right] \tilde{N}, \quad (19.5.43)$$

или в записи через канонически нормированное пионное поле (19.5.17):

$$\mathcal{L}_N = -\tilde{N} \left[\not{\partial} + g\sigma + \frac{2i\vec{t} \cdot (\vec{\pi} \times \not{\partial}\vec{\pi})}{F_\pi^2[1 + \vec{\pi}^2 / F_\pi^2]} + \frac{2i\gamma_5\vec{t} \cdot \not{\partial}\vec{\pi}}{F_\pi[1 + \vec{\pi}^2 / F_\pi^2]} \right] \tilde{N}. \quad (19.5.44)$$

Так как σ имеет ненулевое вакуумное среднее, видим, что нуклон обладает ненулевой массой. Это запрещено, если бы симметрия относительно преобразования (19.5.40), (19.5.41) была ненарушенной.

Лагранжиан (19.5.44) по построению кирально инвариантен. Это можно увидеть и непосредственно, используя установленные ранее свойства киральных преобразований σ и $\bar{\pi}$ и замечая также, что под действием кирального преобразования (19.5.40), (19.5.41) новое нуклонное поле, определенное выражением (19.5.42), преобразуется как

$$\delta \tilde{N} = 2i\vec{t} \cdot [\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}] \tilde{N}, \quad (19.5.45)$$

Иначе говоря, под действием кирального преобразования $\tilde{N}$ подвергается тому же изоспиновому вращению (19.5.15), что и величина $\vec{D}_\mu$, но, конечно, в представлении с $T = 1/2$. Параметр изоспинового вращения $\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}$ зависит от пространственно-временной точки, поэтому свойство кирального преобразования у производных $\tilde{N}$ другое. Однако можно непосредственно проверить, что комбинация первого и третьего слагаемых в (19.5.43) ведет себя как кирально инвариантная производная, т. е.

$$\delta \mathcal{D}_\mu \tilde{N} = 2i\vec{t} \cdot [\vec{\zeta} \times \vec{\epsilon}] \mathcal{D}_\mu \tilde{N}, \quad (19.5.46)$$

где

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{N} \equiv \left[\partial_\mu + 2i \frac{\vec{t} \cdot (\vec{\zeta} \times \partial_\mu \vec{\zeta})}{1 + \vec{\zeta}^2} \right] \tilde{N}. \quad (19.5.47)$$

Таким образом, лагранжиан (19.5.43) (а, следовательно, (19.5.44)) очевидным образом кирально инвариантен, так как он изоспиново инвариантен и построен исключительно из тех величин $\tilde{N}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{N}$, σ и $\vec{D}_\mu$, которые преобразуются по отношению к киральному преобразованию с помощью одного и того же изоспинового вращения.

Вид того конкретного лагранжиана, с которого мы начинаем, опять несуществен. Как и в случае чисто пионной теории, рассмотренной выше, важной является киральная инвариантность лагранжиана. Для этого лагранжиан должен сохранять изоспин и быть построенным только из величин $\tilde{N}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{N}$ и $\vec{D}_\mu$ (вместе с их высшими производными). Наиболее общий кирально инвариантный лагранжиан, билинейный по новому нуклонному полю и содержащий не более одной производной, имеет поэтому вид

$$\mathcal{L}_{N,0} = -\bar{N} \left[\not{D} + m_N + 2ig_A \gamma_5 \vec{t} \cdot \vec{D} \right] N, \quad (19.5.48)$$

или в записи через пионное поле (19.5.17):

$$\mathcal{L}_N = -\bar{N} \left[\not{D} + m_N + \frac{2i\vec{t} \cdot (\vec{\pi} \times \partial \vec{\pi})}{F_\pi^2 [1 + \vec{\pi}^2 / F_\pi^2]} + \frac{2ig_A \gamma_5 \vec{t} \cdot \partial \vec{\pi}}{F_\pi [1 + \vec{\pi}^2 / F_\pi^2]} \right] N. \quad (19.5.49)$$

Заметим, что мы включили произвольную константу g_A в последнее слагаемое (19.5.48), так как это слагаемое само по себе кирально симметрично, и киральная симметрия не может определять коэффициент при нем. (В противоположность этому коэффициент при третьем слагаемом в (19.5.43) фиксирован условием, что это слагаемое вместе с первым образуют киральный инвариант.) Образуя дополнительное слагаемое в аксиальном токе, возникающее из нуклонного лагранжиана (19.5.48), можно проверить, что введенная здесь константа g_A действительно является аксиальной константой в бета-распаде. Альтернативно, интегрируя по частям и используя уравнение Дирака, находим, что пион-нуклонное взаимодействие $-2ig_A \bar{N} \gamma_5 \vec{t} \cdot (\partial \vec{\pi}) N / F_\pi$ эквивалентно на массовой оболочке нуклона взаимодействию $-4im_N g_A \bar{N} \gamma_5 \vec{t} \cdot \vec{\pi} N / F_\pi$, соответствующему пион-нуклонной константе связи

$$G_{\pi N} = 2m_N g_A / F_\pi,$$

что совпадает с соотношением Голдбергера–Треймана (19.4.33).

Кстати, если бы мы использовали в этом вычислении лагранжиан (19.5.44), мы получили бы соотношение Голдбергера–Треймана с $g_A = 1$. Однако этот результат есть на самом деле артефакт конкретного вида (19.5.39) того взаимодействия, с которого мы начинали. Мы могли бы включить неперенормируемое слагаемое со связью с производной *

* Левые и правые компоненты нуклонного дублета преобразуются по представлениям $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$ группы $SU(2) \times SU(2)$, соответственно. Билинейная форма $\bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 N$ является, таким образом, суммой слагаемых, квадратичных по членам $(\frac{1}{2}, 0)$ или $(0, \frac{1}{2})$, т. е. она преобразуется как прямая сумма представлений $(1, 0)$, $(0, 0)$ и $(0, 1)$. В выражении (19.5.50) мы связали слагаемые $(1, 0) + (0, 1)$ в $\bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 N$ с антисимметричным тензором, образованным из $SU(2) \times SU(2)$ 4-векторов Φ_n и $\partial_\mu \Phi_n$. Конечно, можно непосредственно проверить инвариантность этого выражения относительно преобразований (19.5.40), (19.5.41).

$$\mathcal{L}'_N = ig' \bar{N} \left[(\vec{t} \cdot \vec{\Phi} \vec{\partial} \Phi_4 - \Phi_4 \vec{t} \cdot \vec{\partial} \cdot \vec{\Phi}) \gamma_5 + \vec{t} \cdot (\vec{\Phi} \times \vec{\partial} \vec{\Phi}) \right] N. \quad (19.5.50)$$

Непосредственно можно убедиться, что в записи через преобразованные поля σ , $\tilde{N}$ и ζ это выражение принимает вид

$$\mathcal{L}'_N = -8i\sigma^2 g' \tilde{N} \vec{t} \cdot \vec{D} \gamma_5 \tilde{N}.$$

Поскольку σ имеет ненулевое вакуумное среднее, возникает вклад в пион-нуклонную константу связи и в g_A , пропорциональный g' . Отсюда значение $g_A = 1$ не диктуется самой нарушенной $SU(2) \times SU(2)$ симметрией; включив взаимодействие (19.5.50) и подобрав g' , можно придать g_A любое значение.

Рассмотрим теперь, как использовать этот лагранжиан для расчета амплитуд реакций, включающих как пионы, так и нуклоны. Мы должны уделить особое внимание нуклонным пропагаторам, так как нуклон никогда не может быть «мягкой» частицей, как пион. Входящая в диаграмму нуклонная линия с 4-импульсом p порядка m_N на массовой оболочке, которая затем в результате взаимодействия с мягкими пионами поглощает суммарный 4-импульс q , компоненты которого много меньше m_N , будет иметь пропагатор

$$\frac{-i(p+q) + m_N}{(p+q)^2 + m_N^2} \xrightarrow{q \rightarrow 0} \frac{-ip + m_N}{2p \cdot q}. \quad (19.5.51)$$

(Отброшенные слагаемые можно учесть, если включить в нуклонный лагранжиан слагаемые с высшими производными.) Предположим снова, что все 4-импульсы внешних пионов имеют компоненты порядка не выше Q , и определим все перенормированные константы связи в точках перенормировки порядка Q , так что интегралы сходятся таким образом, что внутренние пионные линии также имеют 4-импульсы Q . Тогда выражение (19.5.51) показывает, что внутренние нуклонные линии дают вклад порядка $1/Q$. Произвольная фейнмановская диаграмма такого процесса будет вносить вклад в инвариантную амплитуду порядка Q^V , где теперь

$$V = \sum_i V_i (d_i + 2m_i) - 2I_\pi - I_N + 4L. \quad (19.5.52)$$

Здесь V_i — число вершин, связанных с взаимодействием типа i , d_i — число производных в каждом таком взаимодействии, m_i —

число множителей с массами кварков в каждом взаимодействии, I_π и I_N — числа внутренних пионных и нуклонных линий, соответственно, а L — число петель в диаграмме. Используем знакомые топологические соотношения для связных диаграмм:

$$L = I_\pi + I_N - \sum_i V_i + 1 \quad (19.5.53)$$

и

$$2I_N + E_N = \sum_i V_i n_i, \quad (19.5.54)$$

где n_i — число нуклонных полей во взаимодействии типа i , а E_N — число внешних нуклонных линий. После исключения I_N и I_π получаем

$$v = \sum_i V_i \left(d_i + 2m_i + \frac{n_i}{2} - 2 \right) + 2L - E_N + 2. \quad (19.5.55)$$

Здесь важно отметить, что коэффициент $d_i + 2m_i + \frac{1}{2}n_i - 2$ в первом слагаемом всегда положителен или равен нулю. Мы видели ранее, что для чисто пионных взаимодействий с $n_i = 0$ сумма $d_i + 2m_i \geq 2$, а изучение выражения (19.5.49) показывает, что для пион-нуклонных взаимодействий с $n_i = 2$ и $m_i = 0$ величина $d_i \geq 1$. Ясно, что всякое взаимодействие с $n_i = 2$ и $m_i \geq 1$ или $n_i \geq 4$ имеет $d_i \geq 2$. Отсюда при $Q \ll 2\pi F_\pi$ старшими являются вклады древесных диаграмм (у которых $L = 0$), для которых все взаимодействия имеют

$$d_i + 2m_i + \frac{n_i}{2} - 2 = 0$$

Взаимодействия, удовлетворяющие этому условию, — как раз те, которые явно выписаны в лагранжианах (19.5.23), (19.5.34) и (19.5.49), плюс возможные взаимодействия с $d_i = 0$ и $n_i = 4$

$$(\bar{N}\Gamma_\alpha \tilde{N})(\bar{N}\Gamma^\alpha \tilde{N}), \quad (19.5.56)$$

где Γ_a и Γ^a — любые матрицы в спинном и изоспинном пространстве, которые приводят к четырехфермионным взаимодействиям, инвариантным относительно преобразований Лоренца, пространственной инверсии и изотопического спина. Эти последние взаимодействия важны для многонуклонных процессов²⁹, которые мы здесь рассматривать не будем.

Применим теперь данный метод к пион-нуклонному рассеянию. Для энергий пионов порядка m_π амплитуда пион-нуклонного рассеяния дается диаграммами Фейнмана рис. 19.3, каждая из которых дает вклад порядка m_π в инвариантную амплитуду. Однако на пороге главный вклад возникает от диаграммы на рис. 19.3, в, а остальные вклады подавлены дополнительным множителем m_π/m_N . Это происходит потому, что на пороге в системе покоя 4-импульсы налетающего и вылетающего пионов q, q' и 4-импульсы нуклонов p, p' имеют вид

$$q = q' = (0, 0, 0, m_\pi) = \left(\frac{m_\pi}{m_N} \right) p = \left(\frac{m_\pi}{m_N} \right) p'. \quad (19.5.57)$$

Поэтому вклад в инвариантную амплитуду на пороге от диаграмм рис. 19.3, а или 19.3, б пропорционален выражению

$$\begin{aligned} & \bar{u} \gamma_5 q \frac{(-i(p \pm q) + m_N)}{(p \pm q)^2 + m_N^2} \gamma_5 q u \\ &= \frac{m_\pi^2 \bar{u} \gamma_5 (-i p (1 \pm m_\pi/m_N) + m_N) \gamma_5 u}{(\mp 2m_\pi m_N - m_\pi^2)} \\ &= \frac{\mp m_\pi}{2m_N \pm m_\pi} \bar{u} (i p (1 \pm m_\pi/m_N) + m_N) u = \frac{m_\pi^2}{2m_N \pm m_\pi}, \end{aligned}$$

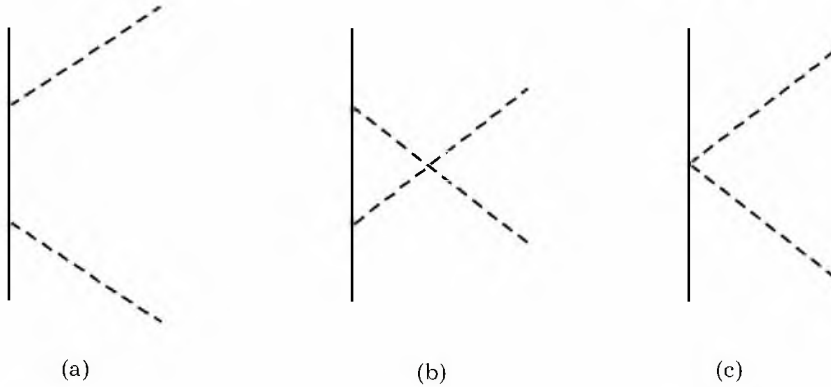


Рис. 19.3. Фейнмановские диаграммы, используемые вместе с эффективным киральным лагранжианом для вычисления рассеяния мягких пионов на нуклонах. Пунктирные линии — пионы, сплошные линии — нуклоны

где u — дираковский спинор, нормированный условием $\bar{u}u = 1$. Напротив, диаграмма на рис. 19.3, в дает вклад в M порядка m_π . Эту амплитуду можно записать как 2×2 матрицу по нуклонным изоспиновым индексам:

$$M_{ba} = \frac{-2i}{F_\pi^2} t_c \varepsilon_{abc} \bar{u}(-iq - iq')u,$$

где q' и q — конечный и начальный 4-импульсы пионов, b и a — соответствующие изовекторные индексы. Используя (19.5.57) и уравнение Дирака в импульсном представлении $i(\not{p} + m_N)u = 0$, получаем

$$M_{ba} = \frac{-4im_\pi}{F_\pi^2} t_c \varepsilon_{abc} = \frac{-4m_\pi}{F_\pi^2} \vec{t} \cdot [\vec{t}^{(\pi)}]_{ba}, \quad (19.5.58)$$

где $[t_c^{(\pi)}]_{ba} \equiv -i\varepsilon_{bac}$ — пионная изовекторная матрица. Матрица $\vec{t} \cdot \vec{t}^{(\pi)}$ имеет в состояниях с полным изоспином T собственные значения, равные $\frac{1}{2}[T(T+1) - 2 - \frac{3}{4}]$, так что в двух изоспиновых состояниях с $T = \frac{1}{2}$ и $T = \frac{3}{2}$ инвариантные амплитуды равны³⁰

$$M_{1/2} = 4m_\pi/F_\pi^2, \quad M_{3/2} = -2m_\pi/F_\pi^2.$$

Обычно эти результаты выражаются через длины рассеяния, которые определяются как инвариантные амплитуды, деленные на $4\pi(1 + m_\pi/m_N)$:

$$a_{1/2} = \frac{m_\pi}{\pi F_\pi^2(1 + m_\pi/m_N)} = 0,15m_\pi^{-1}, \quad (19.5.59)$$

$$a_{3/2} = -\frac{m_\pi}{2\pi F_\pi^2(1 + m_\pi/m_N)} = -0,075m_\pi^{-1}. \quad (19.5.60)$$

Эти выражения находятся в разумном согласии с экспериментальными значениями¹² $a_{1/2} = (0,173 \pm 0,003)m_\pi^{-1}$ и $a_{3/2} = (-0,101 \pm 0,004)m_\pi^{-1}$. (Предполагается, что результаты (19.5.59) и (19.5.60) должны быть справедливы только в низшем порядке по отношению m_π/m_N , но мы удерживаем множитель $1 + m_\pi/m_N$, так как он возникает просто от определения длин рассеяния.)

Поправки к длинам рассеяния следующего порядка по m_π возникают из разных источников. Прежде всего, это диаграммы

борновского приближения рис. 19.3, а, б, которые номинально старшего порядка, но, как мы видели, подавлены на пороге дополнительным множителем m_π/m_N . Есть дополнительные древесные диаграммы, содержащие вершину с двумя производными. Особый интерес представляют древесные диаграммы, содержащие вершины без производных, которые возникают от нарушающего симметрию взаимодействия, пропорционального m_π^2 . Свойства киральных и пространственно-временных преобразований этих взаимодействий должны совпадать со свойствами операторов в (19.4.34), которые являются четвертой и третьей компонентами двух различных киральных 4-векторов Φ_n^+ и Φ_n^- . Есть два очевидных кандидата в такие операторы, являющиеся билинейными формами по нуклонным полям: Φ_4^+ -слагаемое

$$\bar{N}N = \left(\frac{1 - \bar{\zeta}^2}{1 + \bar{\zeta}^2} \right) \bar{N}\tilde{N} - 4i \left(\frac{\bar{\zeta}}{1 + \bar{\zeta}^2} \right) \cdot \bar{N}\gamma_5 \tilde{t}\tilde{N}$$

и Φ_3^- -слагаемое

$$\bar{N}t_3N = \bar{N}t_3\tilde{N} - 2 \left(\frac{\zeta_3}{1 + \bar{\zeta}^2} \right) \bar{N}\tilde{t} \cdot \bar{\zeta}\tilde{N} - i \left(\frac{\zeta_3}{1 + \bar{\zeta}^2} \right) \bar{N}\gamma_5\tilde{N}.$$

Киральные симметрии действуют на $\tilde{N}$ как обычные изоспиновые вращения, так что они не могут смешивать скалярные и псевдоскалярные нуклонные билинейные формы. Следовательно реально существуют два независимых Φ_4^+ оператора

$$\left(\frac{1 - \bar{\zeta}^2}{1 + \bar{\zeta}^2} \right) \bar{N}\tilde{N} \quad (19.5.61)$$

и

$$i \left(\frac{\bar{\zeta}}{1 + \bar{\zeta}^2} \right) \cdot \bar{N}\gamma_5 \tilde{t}\tilde{N} \quad (19.5.62)$$

и два независимых Φ_4^- оператора

$$\bar{N}t_3\tilde{N} - 2\left(\frac{\zeta_3}{1+\bar{\zeta}^2}\right)\bar{N}\vec{t}\cdot\vec{\zeta}\tilde{N} \quad (19.5.63)$$

и

$$i\left(\frac{\zeta_3}{1+\bar{\zeta}^2}\right)\bar{N}\gamma_5\tilde{N}. \quad (19.5.64)$$

В следующем разделе мы покажем, что это единственные операторы со свойствами преобразований слагаемых в (19.4.34), которые билинейны по нуклонным полям. Операторы (19.5.62) и (19.5.64) очевидно обеспечивают сохраняющие и нарушающие изоспин поправки к формуле Голдбергера–Треймана для пион-нуклонной константы связи. Два других оператора (19.5.61) и (19.5.63) непосредственно дают вклад как в массу нуклона, так и в пион-нуклонное рассеяние при низких энергиях. Из их вкладов в массу нуклона мы видим, что эти последние слагаемые входят в эффективный лагранжиан в форме (с заменой ζ на стандартно нормированное пионное поле):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\text{эфф}} = & -\frac{\delta m_p + \delta m_n}{2}\left(\frac{1 - \bar{\pi}^2/F_\pi^2}{1 + \bar{\pi}^2/F_\pi^2}\right)\bar{N}\tilde{N} \\ & - (\delta m_p - \delta m_n)\left[\bar{N}t_3\tilde{N} - \frac{2}{F_\pi^2}\left(\frac{\pi_3}{1 + \bar{\pi}^2/F_\pi^2}\right)\bar{N}\vec{t}\cdot\vec{\pi}\tilde{N}\right], \end{aligned} \quad (19.5.65)$$

где δm_p и δm_n — вклады слагаемых с кварковыми массами (19.4.34) в массы протона и нейтрона. Это дает вклад в амплитуду пион-нуклонного рассеяния (снова записанную как матрица в изоспиновом пространстве нуклона)

$$\delta M_{ba} = \frac{2[\delta m_p + \delta m_n]}{F_\pi^2}\delta_{ab} + \frac{2[\delta m_p - \delta m_n]}{F_\pi^2}(t_a\delta_{3b} + t_b\delta_{3a}). \quad (19.5.66)$$

Первое слагаемое в (19.5.65) часто называют « σ -членом». Второе слагаемое — нарушающая изоспин поправка к σ -члену, проявляющаяся только в процессах с участием нейтральных пионов типа процессов с перезарядкой $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$ и $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$. Хотя

и невозможно непосредственно измерить сдвиги масс нуклонов $\delta m_{p,n}$, мы увидим в разделе 19.7, что $SU(3)$ симметрия позволяет вычислить их разность из разности масс гиперонов. Это дает $\delta m_p - \delta m_n = -2,5$ МэВ. К сожалению, мы до сих пор не имеем надежной теоретической оценки коэффициента $\delta m_p + \delta m_n$ в первом слагаемом в (19.5.65).

Выражение (19.3.34) показывает, что в квантовой хромодинамике коэффициенты $\delta m_p + \delta m_n$ и $\delta m_p - \delta m_n$ в (19.5.66) пропорциональны соответственно $m_u + m_d$ и $m_u - m_d$. В разделе 19.7 мы увидим, что m_u и m_d совершенно не вырождены, так что эти коэффициенты примерно того же порядка величины; нарушающие изоспин поправки к σ -члену не многим меньше, чем сам σ -член. Мы опять видим, что причиной того, что сохранение изоспина является столь хорошим приближением в адронной физике, является совсем не то, что массы u - и d -кварков почти равны, а просто то, что они малы.

Использование лагранжианов типа (19.5.19) или (19.5.49) является одним из примеров применения метода *эффективных теорий поля*, уже введенного в разделе 12.3. Аналогичная техника использовалась для рассмотрения мезонных и баронных взаимодействий, включающих странные частицы (см. раздел 19.7), взаимодействий кварков и лептонов при энергиях ниже шкалы нарушения электро-слабой симметрии (см. раздел 21.3), и даже для рассмотрения сверхпроводимости (см. раздел 21.6). Во всех этих случаях эффективные теории поля позволяют наиболее удобным способом рассматривать следствия симметрий и исходных общих принципов квантовой теории поля.

* * *

Комбинация низкоэнергетических теорем, следующих из нарушенных симметрий, с дисперсионными соотношениями позволяет получить полезные правила сумм. Покажем, как это происходит в случае киральной симметрии, если пренебречь малыми массами кварков u и d и массой пиона. Рассмотрим рассеяние вперед безмассового пиона с изовекторным индексом a и 4-импульсом q на нуклоне с 4-импульсом p , в результате которого возникает пион с изовекторным индексом b . Амплитуда рассеяния M , определенная формулой $S_{fi} = -2\pi i \delta^4(P_f - P_i) M_{fi}$, в первом порядке по q определяется фейнмановскими диаграммами рис. 19.3:

$$\begin{aligned}
-2i\pi M = & \frac{1}{(2\pi)^6(2q^0)} \\
& \times \bar{u} \left[\left(-i \frac{(2\pi)^4 2g_A \gamma_5 t_b q}{F_\pi} \right) \left(\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(p+q) + m_N}{(p+q)^2 + M^2} \right) \left(i \frac{(2\pi)^4 2g_A \gamma_5 t_a q}{F_\pi} \right) \right. \\
& + \left(i \frac{(2\pi)^4 2g_A \gamma_5 t_a q}{F_\pi} \right) \left(\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(p-q) + m_N}{(p-q)^2 + M^2} \right) \left(-i \frac{(2\pi)^4 2g_A \gamma_5 t_b q}{F_\pi} \right) \\
& \left. - 4i \frac{t_c \varepsilon_{abc} q}{F_\pi^2} \right] u. \quad (19.5.67)
\end{aligned}$$

В этом порядке по q можно приближенно записать нуклонный пропагатор в первых двух слагаемых в квадратных скобках в виде

$$\frac{-i(p \pm q) + m_N}{(p \pm q)^2 + M^2} \approx \frac{-ip + m_N}{\pm 2p \cdot q}.$$

Выражение (19.5.67) можно дополнительно упростить, используя соотношения $q q = q^2 = 0$, $\bar{u} \gamma^\mu u = -p \cdot q / m_N$ и $[t_a, t_b] = i \varepsilon_{abc} t_c$. Кроме того, в лабораторной системе (которая при малых q совпадает с системой центра масс) имеем $p \cdot q = -m_N \omega$, где $\omega \equiv q^0$ — энергия пиона в системе покоя нуклона. Наконец, стандартно нормированная амплитуда рассеяния вперед (квадрат модуля которой равен дифференциальному сечению рассеяния вперед) дается выражением (3.6.9) как $f \equiv -4\pi^2 \omega M$. Собирая все эти результаты, получаем, что амплитуда рассеяния вперед пиона с энергией ω дается в случае $\omega \ll m_N$ выражением:

$$f_{ba}(\omega) \rightarrow -i \frac{\omega}{\pi F_\pi^2} (1 - g_A^2) \varepsilon_{abc} t_c. \quad (19.5.68)$$

В частности, для π^+ -протонного рассеяния следует свернуть (19.5.68) с $v_b^* v_a$, где $\vec{v}$ — нормированный изовектор $(1, i, 0) / \sqrt{2}$, и положить $t_3 = +\frac{1}{2}$. Тогда амплитуда π^+ -протонного рассеяния вперед при низких энергиях равна:

$$f_{\pi^+ p}(\omega) \rightarrow -\frac{\omega}{2\pi F_\pi^2} (1 - g_A^2). \quad (19.5.69)$$

Далее, дисперсионное соотношение для рассеяния вперед безмассового π^+ на протоне дается выражением (10.8.24) (с вычитательным полиномом $P(E) \propto E$) в виде:

$$f_{\pi^+p}(\omega) = R + \frac{i\omega}{4\pi} \sigma_{\pi^+p}(\omega) + \frac{\omega}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{\sigma_{\pi^+p}(E)}{E - \omega} - \frac{\sigma_{\pi^-p}(E)}{E + \omega} \right] dE, \quad (19.5.70)$$

где R — возможная вычитательная константа, а ω и E — энергии пионов в системе покоя протона. Сравнение этого дисперсионного соотношения с низкоэнергетическим пределом (19.5.69) показывает, что $R = 0$ и что

$$g_A^2 = 1 + \frac{F_\pi^2}{2\pi} \int_0^\infty \left[\sigma_{\pi^+p}(E) - \sigma_{\pi^-p}(E) \right] \frac{dE}{E}. \quad (19.5.71)$$

Это знаменитое *правило сумм Адлера–Вайсбергера*¹⁹ для случая точной киральной симметрии и $m_\pi = 0$. Аналогичное правило сумм можно вывести для рассеяния пионов на любом барионе или мезоне, в том числе, на самом пионе^{30a}.

19.6. Эффективные теории поля: произвольные нарушенные симметрии

Описанная в предыдущем разделе техника построения эффективных лагранжианов для случая $SU(2) \times SU(2)$ симметрии, нарушенной до $SU(2)$, была вскоре обобщена³¹ на случай произвольной группы G , нарушенной до произвольной подгруппы H . Рассмотрим квантовую теорию поля, лагранжиан которой инвариантен относительно произвольной компактной группы Ли G обычных линейных, не зависящих от пространственно-временных точек преобразований g полей $\psi_n(x)$:

$$\psi_n(x) \rightarrow \sum_m g_{nm} \psi_m(x). \quad (19.6.1)$$

Мы предполагаем, что эта группа симметрии спонтанно нарушается до какой-то подгруппы $H \subset G$ преобразований симметрии,

оставляющих инвариантными все вакуумные средние: для $h \in H$

$$\sum_m h_{nm} \langle \psi_m(x) \rangle_{\text{VAC}} = \langle \psi_n(x) \rangle_{\text{VAC}}. \quad (19.6.2)$$

(Не все из ψ должны быть скалярами, но, конечно, только у скаляров будут отличные от нуля вакуумные средние.) В примере, приведенном в начале предыдущего раздела, группой G была группа $SO(4)$, поля ψ_n реализовали 4-векторное представление этой группы, а их вакуумные средние нарушали $SO(4)$ до подгруппы вращений $H = SO(3)$, которые оставляли инвариантной четвертую ось. В общем случае поля ψ_n могут реализовать не только неприводимое, но и приводимое представление G , как это было в том случае, когда мы ввели нуклонные поля в предыдущем разделе.

Представим далее произвольную «точку» ψ_n в полевом пространстве как преобразование G , действующее на поля $\tilde{\psi}_n$, из которых исключена безмассовая голдстоуновская мода:

$$\psi_n(x) = \sum_m \gamma_{nm} \tilde{\psi}_m(x). \quad (19.6.3)$$

Например, в предыдущем разделе γ было $SO(4)$ вращением, которое мы называли R , а условие, которому удовлетворяли $\tilde{\psi}_n$, заключалось в том, что первые три компоненты 4-вектора должны обращаться в нуль.

Чтобы сформулировать это условие в более общем виде, предположим, что мы имеем дело с вещественным представлением G . (В данном случае не происходит потери общности, т. к. мы не настаиваем на неприводимости представления, так что, если исходить из множества полей, образующих комплексное представление G , можно всегда взять ψ_n равными действительным и мнимым частям этих комплексных полей.) Как показано в разделе 19.2, безмассовые собственные векторы массовой матрицы являются просто независимыми линейными комбинациями векторов $\sum_m [t_\alpha]_{nm} \langle \psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}}$, где t_α — генераторы G . (Вещественность представления означает, что it_α действительны, а тот факт, что группа G компактна, означает, что представление можно выбрать унитарным, а, следовательно, ортогональным, так что генераторы t_α мнимые и антисимметричные.) Тогда условие, что $\tilde{\psi}_n$ не содержит голдстоуновских мод, можно сформулировать в виде

$$\sum_{nm} \tilde{\Psi}_n(x) [t^\alpha]_{nm} \langle \Psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}} = 0. \quad (19.6.4)$$

Число независимых условий равно разности размерностей группы G и той подгруппы H , генераторы которой обращают в нуль $\langle \Psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}}$. Как и в предыдущем разделе, те голдстоуновские бозоны, поля которых устраняются указанным образом, вновь появляются в $\dim(G) - \dim(H)$ полях, необходимых для параметризации преобразования $\gamma_{nm}(x)$. В общем случае, поля $\tilde{\Psi}_n$ включают все тяжелые поля в теории, в том числе те (типа нуклонов в предыдущем разделе), которые имеют иные по сравнению с голдстоуновскими бозонами свойства относительно пространственно-временных симметрий.

Необходимо показать, что мы всегда можем выбрать преобразование $\gamma_{nm}(x)$ так, чтобы удовлетворить условию (19.6.4). Для этого рассмотрим величину

$$V_\Psi(g) \equiv \sum_{nm} \Psi_n g_{nm} \langle \Psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}}, \quad (19.6.5)$$

где g пробегает по всей группе G в вещественном ортогональном представлении, реализованным полями Ψ_n . Очевидно, что эта величина есть непрерывная действительная функция g , и поскольку группа компактна, $V_\Psi(g)$ к тому же является ограниченной функцией g . В каждой пространственно-временной точке x величина $V_{\Psi(x)}(g)$ достигает поэтому максимального значения для какого-то элемента группы, который мы назовем $\gamma(x)$. При $g = \gamma(x)$ функция $V_{\Psi(x)}(g)$ должна быть стационарной по отношению к произвольным вариациям g . Но любой бесконечно малый сдвиг элемента группы g можно всегда записать как линейную комбинацию

$$\delta g = i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} g t^{\alpha},$$

с действительными инфинитезимальными коэффициентами ϵ_{α} , которые могут зависеть от g . Следовательно, условие, что $V_{\Psi(x)}(g)$ стационарно по отношению к вариациям δg при $g = \gamma(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= \delta V_{\Psi(x)}(\gamma(x)) = i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \sum_{nml} \Psi_n(x) \gamma_{nl}(x) t_{lm}^{\alpha} \langle \Psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}} \\ &= i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \sum_{nml} \left[\gamma^{-1}(x) \right]_{ln}^{\alpha} \Psi_n(x) t_{lm}^{\alpha} \langle \Psi_m(0) \rangle_{\text{VAC}}. \end{aligned}$$

Это должно выполняться для всех вариаций, следовательно, для всех ε_α , поэтому видно, что (19.6.4) удовлетворяется при $\tilde{\Psi}(x) = \gamma^{-1}(x)\Psi(x)$ как и было показано. В чисто бозонной теории с лагранжианом (19.4.1) $\tilde{\Psi}_n$ было 4-векторным полем $(0,0,0,\sigma)$. Этот вектор указывает в направлении вакуумного среднего $\langle\Psi_n\rangle$, но так бывает не всегда.

Кстати, имея дело с комплексными полями, нет необходимости формулировать условие на $\tilde{\Psi}(x)$ явно, исходя из его действительной и мнимой частей. Если множество полей $\chi(x)$ преобразуется по какому-то комплексному представлению группы G с эрмитовыми генераторами T^α , то в действительном представлении

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \text{Re } \chi(x) \\ \text{Im } \chi(x) \end{pmatrix}$$

генераторы равны

$$it^\alpha = \begin{pmatrix} -\text{Im } T^\alpha & -\text{Re } T^\alpha \\ \text{Re } T^\alpha & -\text{Im } T^\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда условие (19.6.4) можно непосредственно записать через T^α и $\chi(x)$ в виде

$$\text{Im}(\tilde{\chi}(x)^\dagger T^\alpha \langle\chi(0)\rangle_{\text{VAC}}) = 0.$$

Поскольку предполагается, что лагранжиан всего лишь инвариантен относительно независимых от пространственно-временных координат преобразований G , оказывается, что после преобразования (19.6.3) он становится зависящим от $\chi(x)$ и от $\tilde{\Psi}(x)$, хотя всегда в каждом зависящем от γ слагаемом есть по меньшей мере одна производная. Как отмечалось, зависящие от пространственно-временных координат параметры, необходимые для конкретизации $\chi(x)$, играют роль полей голдстоуновских бозонов. Теперь нам следует рассмотреть, как параметризовать $\chi(x)$.

С самого начала следует заметить, что выбор γ в (19.6.3) в общем случае неоднозначен. Так как $\langle\Psi_n(0)\rangle_{\text{VAC}}$ инвариантно относительно H в смысле выражения (19.6.2), величина $V_\Psi(g)$, определенная соотношением (19.6.5), инвариантна относительно правого умножения g на любой элемент h ненарушенной подгруппы H :

$$V_\Psi(g) = V_\Psi(gh) \text{ для } h \in H. \quad (19.6.6)$$

Отсюда следует, что если γ доставляет максимум $V_\psi(\gamma)$, то это же верно для gh , так что условие (19.6.4) удовлетворяется как для $\tilde{\psi} = h^{-1}\gamma^{-1}\psi$, так и для $\tilde{\psi} = \gamma^{-1}\psi$. Поэтому величина γ определена пока что с точностью до правого умножения на элемент H . (Так, в рассмотренном в предыдущем разделе примере четырехмерное вращение R можно было умножить справа на любое вращение, действующее только на первые три компоненты 4-векторов.) Можно рассматривать два элемента группы γ_1 и γ_2 как эквивалентные, если $\gamma_1 = \gamma_2 h$, где $h \in H$. Это действительно соотношение эквивалентности, поскольку оно рефлексивно (если γ_1 эквивалентно γ_2 , то γ_2 эквивалентно γ_1), симметрично (γ эквивалентно самому себе) и транзитивно (если γ_1 эквивалентно γ_2 , а γ_2 эквивалентно γ_3 , то γ_1 эквивалентно γ_3). Поэтому элементы группы G можно рассортировать по несвязным «классам эквивалентности», каждый из которых состоит из элементов γ , отличающихся только правым умножением на элемент H . Такие классы эквивалентности называют *правыми смежными классами* G по H . Нас интересует параметризация пространства правых смежных классов (обозначаемого G/H).

Для этого достаточно только выбрать по одному элементу группы, представляющему каждый правый смежный класс. В случае рассмотренной в предыдущем разделе $SO(4)$ симметрии, нарушенной до $SO(3)$, удобно выбрать эти представительные элементы как вращения, параметризованные 3-вектором $\vec{\xi}$. Возможен и другой выбор, пригодный для любой компактной группы G , нарушенной до любой подгруппы H . Приспособим вначале наши обозначения генераторов группы G к тому, по какому пути нарушается симметрия. Назовем t_i полный набор независимых генераторов H . Согласно (19.6.2) эти генераторы удовлетворяют условию

$$\sum_m (t_i)_{nm} \langle \psi_m \rangle_{\text{VAC}} = 0. \quad (19.6.7)$$

Так как H — подгруппа, генераторы t_i образуют подалгебру

$$[t_i, t_j] = i \sum_k C_{ijk} t_k. \quad (19.6.8)$$

Обозначим x_a *другие* независимые генераторы G в любом базисе с полностью антисимметричными структурными константами. (Для

компактных групп такой базис всегда существует; см. раздел 15.2.) Так как x_a не входит в правую часть (19.6.8), все структурные константы C_{ija} равны нулю, а из полной антисимметрии этих констант следует, что $C_{iaj} = 0$, так что

$$[t_i, x_a] = i \sum_b C_{iab} x_b. \quad (19.6.9)$$

Однако не обязательно, чтобы коммутаторы x друг с другом были линейными комбинациями t ; это зависит от природы G и H , а также от того, как H погружена в G . (Когда C_{abc} равны нулю, пространство смежных классов G/H называется *симметрическим пространством*.) В общем случае можно записать

$$[x_a, x_b] = i \sum_i C_{abi} t_i + i \sum_c C_{abc} x_c. \quad (19.6.10)$$

Любой набор генераторов с коммутационными соотношениями вида (19.6.8)–(19.6.10) называется *разложением Картана* алгебры Ли. Примером может служить киральная $SU(2) \times SU(2)$ алгебра Ли (19.4.9)–(19.4.11), для которой C_{abc} действительно равны нулю.

Поскольку t_i и x_a исчерпывают алгебру Ли группы G , любой конечный элемент G можно представить в виде:

$$g = \exp \left[i \sum_a \xi_a x_a \right] \exp \left[i \sum_i \theta_i t_i \right], \quad (19.6.11)$$

где ξ_a и θ_i – набор действительных параметров. Но преобразование $\gamma(x)$ в (19.6.3) определено пока что с точностью до правого умножения на элемент H , так что можно стандартизировать наше определение γ , взяв его в виде

$$\gamma(x) = \exp \left[i \sum_a \xi_a(x) x_a \right]. \quad (19.6.12)$$

Параметры $\xi_a(x)$ можно отождествить (с точностью до нормировки) с полями голдстоуновских бозонов.

Ниже будем просто предполагать, что представительные элементы были выбраны из каждого правого смежного класса и выражены как непрерывные функции $\gamma(\xi)$ некоторых параметров ξ_a . Явным примером такого выбора может служить выражение (19.6.12), но мы не станем ограничивать себя именно этой параметризацией.

Предположим теперь, что с помощью (19.6.3) мы заменили все поля $\psi(\xi)$ в лагранжиане на $\gamma(x)\tilde{\psi}(x)$. Производные полей равны

$$\partial_\mu \psi(x) = \gamma(x) \left[\partial_\mu \tilde{\psi}(x) + (\gamma^{-1}(x) \partial_\mu \gamma(x)) \tilde{\psi}(x) \right]. \quad (19.6.13)$$

Поэтому, когда мы выражаем лагранжиан не через ψ , а через $\tilde{\psi}$, поля голдстоуновских бозонов входят через зависимость от $\gamma^{-1}(\xi) \partial_\mu \gamma(\xi)$ от $\xi_a(x)$ и его производных.

Любая вариация элемента группы типа $\gamma(\xi)$ может быть записана как произведение группового элемента на линейную комбинацию генераторов группы. В нашем случае можно записать это в виде

$$\gamma^{-1}(x) \partial_\mu \gamma(x) = i \sum_a x_a D_{a\mu}(x) + i \sum_i t_i E_{i\mu}(x), \quad (19.6.14)$$

где $D_{a\mu}$ и $E_{i\mu}$ имеют вид:

$$D_{a\mu}(x) = \sum_b D_{ab}(\xi(x)) \partial_\mu \xi_b(x), \quad (19.6.15)$$

$$E_{i\mu}(x) = \sum_b E_{ib}(\xi(x)) \partial_\mu \xi_b(x). \quad (19.6.16)$$

Следовательно, поля голдстоуновских бозонов войдут в лагранжиан в результате появления в нем величин $D_{a\mu}(x)$ и $E_{i\mu}(x)$ (и их производных). Заметим, что в случае точных нарушенных симметрий каждое взаимодействие ξ должно включать по крайней мере одну производную, так что в лагранжиане не могут возникнуть массовые слагаемые $m_{ab}^2 \xi_a \xi_b$, а все взаимодействия обращаются в нуль при обращении в нуль 4-импульса любого голдстоуновского бозона.

Даже если мы не знаем деталей лежащего в основе лагранжиана, можно много узнать о том, как величины $D_{a\mu}$ и $E_{i\mu}$ возникают в преобразованном лагранжиане, изучая их свойства преобразований. Под действием произвольного элемента g группы G исходное поле ψ преобразуется по (19.6.1):

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = g\psi(x) = g\gamma(\xi(x))\tilde{\psi}(x). \quad (19.6.17)$$

Далее, $g\gamma(\xi)$ есть элемент G , так что он должен принадлежать тому же правому смежному классу, что и некоторый элемент $\gamma(\xi')$, и поэтому может быть записан в виде

$$g\gamma(\xi(x)) = \gamma(\xi'(x))h(\xi(x), g), \quad (19.6.18)$$

где h – некоторый элемент ненарушенной подгруппы H . Подставляя это в (19.6.17), находим, что $\psi'(\xi)$ имеет вид (19.6.3):

$$\psi'(x) = \gamma(\xi'(x))\tilde{\psi}'(x), \quad (19.6.19)$$

где $\xi'(x)$ определено равенством (19.6.18) и

$$\tilde{\psi}'(x) \equiv h(\xi(x), g)\tilde{\psi}(x). \quad (19.6.20)$$

В примере, приведенном в начале предыдущего раздела, $\tilde{\psi}$ состояло из единственного изоскаляра σ , и поскольку этот изоскаляр был инвариантен относительно ненарушенной подгруппы изоспина, он был также и кирально-инвариантен. Переходя к более общему случаю, мы видим теперь, что $\tilde{\psi}(x)$ не обязательно инвариантно относительно произвольных преобразований G , а что его G -преобразование зависит только от преобразования относительно ненарушенной группы H . Это было явно видно в предыдущем разделе, когда мы ввели нуклонные поля; относительно произвольного бесконечно малого преобразования нарушенной киральной симметрии поля $\tilde{N}$ преобразуются с помощью зависящего от полей изоспинового вращения (19.5.45).

Задаваемые формулами (19.6.18) и (19.6.20) законы преобразования $\xi \rightarrow \xi'$ и $\tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi}'$ никак не связаны с конкретными свойствами линейных G -преобразований исходных полей ψ_n . Действительно, чтобы вывести эти законы преобразования, нам не нужно начинать с лагранжиана, инвариантного относительно линейных G -преобразований. Если задан любой набор полей, на которых линейно или нелинейно действует группа G , а подгруппа H оставляет инвариантным одно конкретное множество значений полей (их вакуумные средние), мы всегда можем выразить эти поля (по крайней мере, в конечной окрестности конкретных значений полей) через множество величин ξ_a и $\tilde{\psi}_n(x)$, которые преобразуются относительно G согласно стандартной реализации $\xi_a \rightarrow \xi'_a$, $\tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi}'$, определенной

формулами (19.6.18) и (19.6.20). Существенная единственность этой реализации была впервые доказана²⁵ для $SU(2) \times SU(2)$, нарушенной до $SU(2)$, а затем для произвольной группы Ли, нарушенной до любой подгруппы.³¹ Чтобы проще объяснить это, заметим, что для каждого набора полей, преобразующихся по нелинейной реализации произвольной компактной группы Ли G , всегда возможно определить функции этих полей (и, возможно, дополнительных полей *), которые преобразуются линейно по отношению к G .³² Отталкиваясь от этой линейной реализации, можно с помощью рассуждений, приведенных в этом разделе, построить поля ξ и $@$ с законами преобразования (19.6.18) и (19.6.20).

Хотя для произвольных $g \in G$ преобразования $\xi(x)$ и $@$ сложны, они становятся значительно проще, когда g сам является элементом h ненарушенной подгруппы H . Общепринято и всегда возможно выбирать поля голдстоуновских бозонов $\xi_a(x)$ так, чтобы они преобразовывались по некоторому *линейному* представлению $\mathcal{D}_{ab}(h)$ ненарушенной подгруппы H :

$$h\gamma(\xi)h^{-1} = \gamma(\mathcal{D}(h)\xi). \quad (19.6.21)$$

Например, в параметризации пространства смежных классов $SO(4)/SO(3)$, использованной в предыдущем разделе, поля голдстоуновских бозонов ξ_a образовывали изоспиновый 3-вектор. При более общей параметризации, основанной на (19.6.12), коммутационные соотношения (19.6.9) показывают, что x_a линейно преобразуются относительно H :

$$hx_b h^{-1} = \sum_a \mathcal{D}_{ab}(h)x_a, \quad (19.6.22)$$

откуда немедленно следует (19.6.21). Сравнивая (19.6.21) с (19.6.18), видим, что при $g = h \in H$

$$\xi'_a(x) = \sum_a \mathcal{D}_{ab}(h)\xi_b(x), \quad (19.6.23)$$

* Например, полярные и азимутальные углы θ и ψ доставляют нелинейную реализацию $SO(3)$; добавляя еще одну переменную r , можно построить величины x_1, x_2, x_3 , линейно преобразующиеся относительно $SO(3)$.

$$\tilde{\Psi}'_n(x) = \sum_m h_{nm} \tilde{\Psi}_m(x). \quad (19.6.24)$$

Иными словами, ξ_a и $\tilde{\Psi}_n$ преобразуются относительно H по представлениям $\mathcal{D}_{ab}(h)$ и h_{nm} , соответственно.

Теперь следует рассмотреть вопрос, как построить наиболее общий лагранжиан, инвариантный относительно преобразований (19.6.18) и (19.6.20). Преобразование $\xi \rightarrow \xi'$ для произвольного $g \in G$ нелинейно и довольно сложно, и оно исключает появление $\xi_a(x)$ в лагранжиане везде, кроме величин типа $D_{a\mu}(x)$ и $E_{i\mu}(x)$. К счастью, эти величины подчиняются очень простым законам преобразования. Продифференцируем (19.6.18) по x^μ и умножим слева на обратную величину. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\xi(x)) \partial_\mu \gamma(\xi(x)) &= [g\gamma(\xi(x))]^{-1} \partial_\mu [g\gamma(\xi(x))] \\ &= h^{-1}(\xi(x), g) \gamma^{-1}(\xi'(x)) \partial_\mu [\gamma(\xi'(x)) h(\xi(x), g)] \\ &= h^{-1}(\xi(x), g) [\gamma^{-1}(\xi'(x)) \partial_\mu \gamma(\xi'(x))] h(\xi(x), g) \\ &\quad + h^{-1}(\xi(x), g) \partial_\mu h(\xi(x), g), \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\xi'(x)) \partial_\mu \gamma(\xi'(x)) &= h(\xi(x), g) [\gamma^{-1}(\xi(x), g) \partial_\mu \gamma(\xi(x), g)] h^{-1}(\xi(x), g) \\ &\quad - [\partial_\mu h(\xi(x), g)] h^{-1}(\xi(x), g). \end{aligned} \quad (19.6.25)$$

Выражение (19.6.12) задает величину $\gamma^{-1} \partial_\mu \gamma$ как линейную комбинацию величин ξ и t . Кроме того, второе слагаемое справа в формуле (19.6.25) есть линейная комбинация только величин t . Поскольку все x_a и t_i независимы, коэффициенты при каждом генераторе с обеих сторон равенства (19.6.25) должны быть равны друг другу:

$$\sum_a x_a D'_{a\mu} = h(\xi, g) \left(\sum_a x_a D_{a\mu} \right) h^{-1}(\xi, g), \quad (19.6.26)$$

$$\sum_i t_i E'_{i\mu} = h(\xi, g) \left(\sum_i t_i E_{i\mu} \right) h^{-1}(\xi, g) + i [\partial_\mu h(\xi, g)] h^{-1}(\xi, g), \quad (19.6.27)$$

или подробнее:

$$D_{a\mu}^*(x) = \sum_b \mathcal{D}_{ab}(h(\xi(x), g)) D_{b\mu}(x),$$

$$E_{i\mu}'(x) = \sum_j \mathcal{E}_{ij}(h(\xi(x), g)) E_{j\mu}(x) - \sum_b \mathcal{H}_{ib}(h(\xi(x), g)) \partial_\mu \xi_b(x), \quad (19.6.28)$$

где $D_{a\mu}$ и $E_{i\mu}$ определены выражениями (19.6.15) и (19.6.16),

$$[\partial_\mu h(\xi(x), g)] h^{-1}(\xi(x), g) = i \sum_{ib} \mathcal{H}_{ib}(\xi(x)) t_i \partial_\mu \xi_b(x),$$

$$h t_j h^{-1} = \sum_i \mathcal{E}_{ij}(h) t_i,$$

а $\mathcal{D}_{ab}$ определено выражением (19.6.22). Мы видим, что величины $D_{a\mu}(x)$ являются «ковариантными производными» полей голдстоуновских бозонов, преобразующимися под действием произвольного элемента $g \in G$ во многом аналогично полям $\tilde{\Psi}$: и те, и другие подвергаются преобразованию $h(\xi(x), g)$ из H , хотя и в разных представлениях. Например, в $SO(4)$ -теории из предыдущего раздела ковариантной производной пионного поля $\tilde{\xi}$ была величина $\partial_\mu \tilde{\xi} / (1 + \tilde{\xi}^2)$, которая преобразуется под действием инфинитезимального кирального преобразования как под действием изоспинового вращения (19.5.15).

С другой стороны, $E_{j\mu}(x)$ преобразуется неоднородно, очень похоже на калибровочное поле. Дополнительное слагаемое в (19.6.28) позволяет сократить неоднородное слагаемое в производных $\tilde{\Psi}$. Дифференцируя (19.6.20), получаем:

$$\partial_\mu \tilde{\Psi}'(x) = h(\xi(x), g) \left[\partial_\mu \tilde{\Psi}(x) + h^{-1}(\xi(x), g) \partial_\mu h(\xi(x), g) \tilde{\Psi}(x) \right].$$

Комбинируя это выражение с (19.6.27), находим:

$$\left(\mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}(x) \right)' = h(\xi(x), g) \mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}(x), \quad (19.6.29)$$

где $\mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}$ — ковариантная производная полей тяжелых частиц:

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}(x) \equiv \partial_\mu \tilde{\Psi}(x) + i \sum_i t_i E_{i\mu}(x) \tilde{\Psi}(x). \quad (19.6.30)$$

(Выражение (19.5.47) представляет собой пример такой ковариантной производной в случае $SO(4)$, нарушенной до $SO(3)$.) Таким образом, всякий лагранжиан, инвариантный относительно

ненарушенной подгруппы H и построенный из $\tilde{\Psi}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}$ и $D_{a\mu}$, будет инвариантным и относительно полной группы G .

Сейчас мы не обсуждаем перенормируемость, поэтому можно рассмотреть также величины, включающие более одной пространственно-временной производной. Одной из этих величин является комбинация $\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}$, полученная простым повторением операции (19.6.30):

$$\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}(x) = \left[\partial_\nu + i \sum_j t_j E_{j\nu} \right] \left[\partial_\mu + i \sum_i t_i E_{i\mu} \right] \tilde{\Psi}. \quad (19.6.31)$$

Она преобразуется как $\mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}$:

$$(\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi})' = h(\xi, g) \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}. \quad (19.6.32)$$

Другую ковариантную величину можно построить, взяв ковариантную производную от ковариантной производной поля голдстоуновского бозона (19.6.15), которая определяется аналогично (19.6.30), но с заменой t_i на соответствующую матрицу в представлении H , реализуемом величинами x_a :

$$\mathcal{D}_\nu D_{a\mu} = \partial_\nu D_{a\mu} + \sum_b C_{iab} E_{i\nu} D_{b\mu}, \quad (19.6.33)$$

которая преобразуется так же, как $D_{a\mu}$:

$$(\mathcal{D}_\nu D_{a\mu})' = \sum_b \mathcal{D}_{ab}(h, g) \mathcal{D}_\nu D_{b\mu}. \quad (19.6.34)$$

Кроме того, антисимметризуя производную $E_{i\mu}$, можно исключить неоднородное слагаемое в (19.6.27). Это приводит к «кривизне»

$$R_{i\mu\nu} \equiv \partial_\nu E_{i\mu} - \partial_\mu E_{i\nu} - i \sum_{j,k} C_{ijk} E_{j\mu} E_{k\nu}. \quad (19.6.35)$$

Мы не получили ничего нового; легко видеть, что антисимметричная ковариантная производная поля «материи» $\tilde{\Psi}$ пропорциональна этой кривизне:

$$[\mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_\mu] \tilde{\Psi} = \sum_i t_i R_{i\mu\nu} \tilde{\Psi}. \quad (19.6.36)$$

Конечно, можно продолжать этот процесс и строить другие производные, беря ковариантные производные все более высокого порядка от $\mathcal{I}_\mu \tilde{\Psi}$ и $D_{a\mu}$.

Полезно заметить, что можно раз навсегда вычислить величины $D_{a\mu}$ и $E_{i\mu}$ для заданных групп G и H и заданной параметризации факторпространства G/H , причем они не зависят от предполагаемых трансформационных полей ψ_n или конкретных матриц x_a , t_i , используемых для представления алгебры Ли группы нарушенной симметрии. Например, в экспоненциальной параметризации (19.6.12) несколько первых слагаемых в разложении этих ковариантов в ряд легко вычисляются с помощью (19.6.12) и (19.6.14):

$$\begin{aligned} D_{a\mu} = & \partial_\mu \xi_a + \frac{1}{2} \sum_{bc} C_{abc} \xi_b \partial_\mu \xi_c \\ & + \frac{1}{6} \sum_{bcd} \left[\sum_e C_{cde} C_{bea} + \sum_i C_{cdi} C_{bia} \right] \xi_b \xi_c \partial_\mu \xi_d \\ & + O(\xi^3 \partial_\mu \xi), \end{aligned} \quad (19.6.37)$$

$$\begin{aligned} E_{i\mu} = & \frac{1}{2} \sum_{ab} C_{abi} \xi_a \partial_\mu \xi_b + \frac{1}{6} \sum_{abcd} C_{acd} C_{bdi} \xi_a \xi_b \partial_\mu \xi_c \\ & + O(\xi^3 \partial_\mu \xi). \end{aligned} \quad (19.6.38)$$

Все, что необходимо знать для построения самого общего лагранжиана, содержащего поля ξ_a голдстоуновских бозонов и набор полей тяжелых частиц, это последовательность спонтанного нарушения симметрии от G к H и закон преобразования полей тяжелых частиц относительно H , но не G : лагранжиан берется в виде самой общей H -инвариантной функции $\tilde{\Psi}$, $\mathcal{I}_\mu \tilde{\Psi}$, $D_{a\mu}$ и высших ковариантных производных.

Рассмотрим теперь случай, когда симметрия относительно G не только спонтанно нарушается, но с самого начала даже не точна. Предположим, что в исходном лагранжиане имеется слагаемое $\Delta\mathcal{L}$, которое *неинвариантно* относительно группы G линейных преобразований $\Psi \rightarrow g\Psi$, но преобразуется как линейная комбинация компонент некоторого (приводимого или неприводимого) представления группы G . Иначе говоря, берем

$$\Delta\mathcal{P} = \sum_A c_A \mathcal{O}_A, \quad (19.6.39)$$

где $\mathcal{O}_A$ преобразуется относительно G по некоторому представлению $D[g]_{AB}$:

$$\mathcal{O}_A \rightarrow \sum_B D[g]_{AB} \mathcal{O}_B. \quad (19.6.40)$$

Если теперь заменить поля ψ набором ξ_a , $\tilde{\psi}$, это слагаемое в лагранжиане все равно будет иметь вид (19.6.39), но выражение (19.6.40) теперь запишется как

$$\mathcal{O}_A[f_a(\xi, g), D[h(\xi, g)]\tilde{\psi}] = \sum_B D[g]_{AB} \mathcal{O}_B[\xi, \tilde{\psi}], \quad (19.6.41)$$

где $f_a(\xi, g)$ есть результат применения преобразования g к ξ_a , определенный выражением (19.6.18):

$$g\gamma(\xi) = \gamma(f(\xi, g))h(\xi, g). \quad (19.6.42)$$

Как будет видно, легко найти наборы операторов, удовлетворяющих (19.6.41), так что решение единственно с точностью до задания определенных H -инвариантных функций $\tilde{\psi}$.

Во-первых, рассмотрим случай $\xi_a = 0$ и $\gamma = \gamma(\xi')$. В этом случае $g\gamma(\xi) = \gamma(\xi')$, так что

$$f_a(0, \gamma(\xi')) = \xi'_a, \quad h(0, \gamma(\xi')) = 1.$$

Подставляя эти равенства в формулу (19.6.41), находим (опуская штрихи):

$$\mathcal{O}_A[\xi_a, \tilde{\psi}] = \sum_B D[\gamma(\xi)]_{AB} \mathcal{O}_B[0, \tilde{\psi}]. \quad (19.6.43)$$

Этим определяются операторы $\mathcal{O}_A[\xi_a, \tilde{\psi}]$ для всех ξ_a , если мы знаем их для $\xi_a = 0$.

Пусть теперь $\xi_a = 0$ и g — элемент h подгруппы ненарушенной симметрии H . В этом случае $g\gamma(\xi) = h$, так что

$$f_a(0, h) = 0, \quad h(0, h) = h.$$

Подставляя эти выражения в формулу (19.6.41), находим

$$\mathcal{O}_A[0, h\tilde{\Psi}] = \sum_B D[h]_{AB} \mathcal{O}_B[0, \tilde{\Psi}]. \quad (19.6.44)$$

Иными словами, при $\xi = 0$ оператор $\mathcal{O}_A$ должен преобразовываться относительно линейных преобразований H так же, как было получено в представлении (19.6.40) группы G . (Однако в этом утверждении нет ничего, что фиксировало бы нормировку различных неприводимых представлений H , найденных в представлении G (19.6.40); некоторые из них могут даже вообще отсутствовать.)

Наконец, заметим, что любой набор операторов $\mathcal{O}$, удовлетворяющих (19.6.44), позволяет с помощью соотношения (19.6.43) построить операторы, удовлетворяющие общим правилам (19.6.40) преобразований под действием группы G . Используя формулы (19.6.43) и (19.6.44), получаем, что левая часть выражения (19.6.41) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_A[f_a(\xi, g), h(\xi, g)\tilde{\Psi}] &= \sum_B D[\gamma(f(\xi, g))]_{AB} \mathcal{O}_B[0, h(\xi, g)\tilde{\Psi}] \\ &= \sum_{BC} D[\gamma(f(\xi, g))]_{AB} D[h(\xi, g)]_{BC} \mathcal{O}_C[0, \tilde{\Psi}] \\ &= \sum_B D[\gamma(f(\xi, g))h(\xi, g)]_{AB} \mathcal{O}_B[0, \tilde{\Psi}] \\ &= \sum_B D[g\gamma(\xi)]_{AB} \mathcal{O}_B[0, \tilde{\Psi}] \\ &= \sum_B D[g]_{AB} \mathcal{O}_B[\xi, \tilde{\Psi}], \end{aligned}$$

как и следовало показать.

В качестве примера рассмотрим группу $SO(4)$, спонтанно нарушенную до $SO(3)$, и предположим, что мы хотим построить преобразующиеся по 4-векторному представлению $SO(4)$ операторы из поля голдстоуновского бозона $\tilde{\zeta}(x)$ и других полей $\tilde{\Psi}(x)$. Согласно формуле (19.6.43), эти операторы должны иметь вид

$$\mathcal{O}_n[\tilde{\zeta}, \tilde{\Psi}] = R_{nm}(\tilde{\zeta}) \mathcal{O}_m[0, \tilde{\Psi}],$$

где R — некоторое $SO(4)$ вращение, определенное формулами (19.5.8) и (19.5.9):

$$R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1 + \bar{\zeta}^2}, \quad R_{44} = \frac{1 - \bar{\zeta}^2}{1 + \bar{\zeta}^2}.$$

Условие, что R — ортогональная матрица, удовлетворяется, если выбрать другие ее компоненты как

$$R_{ab} = \delta_{ab} - \frac{2\zeta_a \bar{\zeta}_b}{1 + \bar{\zeta}^2}, \quad R_{4a} = -\frac{2\zeta_a}{1 + \bar{\zeta}^2}.$$

Следовательно любые скалярные (в противоположность псевдоскалярным) операторы, преобразующиеся как четвертая и третья компоненты киральных 4-векторов, должны входить в эффективный лагранжиан в виде

$$\Phi_4^+[\bar{\zeta}, \bar{\psi}] = -\left(\frac{2\bar{\zeta}}{1 + \bar{\zeta}^2}\right) \cdot \bar{\Phi}^+[0, \bar{\psi}] + \left(\frac{1 - \bar{\zeta}^2}{1 + \bar{\zeta}^2}\right) \cdot \Phi_4^+[0, \bar{\psi}],$$

$$\Phi_3^+[\bar{\zeta}, \bar{\psi}] = \Phi_3^+[0, \bar{\psi}] - \left(\frac{2\zeta_3}{1 + \bar{\zeta}^2}\right) \bar{\zeta} \cdot \bar{\Phi}^+[0, \bar{\psi}] + \left(\frac{2\zeta_3}{1 + \bar{\zeta}^2}\right) \Phi_4^+[0, \bar{\psi}].$$

Единственным условием на операторы $\bar{\Phi}^+[0, \bar{\psi}]$, $\Phi_4^+[0, \bar{\psi}]$, $\bar{\Phi}^-[0, \bar{\psi}]$ и $\Phi_4^-[0, \bar{\psi}]$ является то, что они должны преобразовываться под действием лоренцовских и изоспиновых преобразований соответственно как псевдоскалярный изовектор, скалярный изоскаляр, скалярный изовектор и псевдоскалярный изовектор, но они никак не должны быть связаны друг с другом. Для процессов с участием только пионов мы используем эффективный лагранжиан, который не содержит никаких полей кроме пионного поля ζ , так что все операторы $\bar{\Phi}^+[0, \bar{\psi}]$, $\bar{\Phi}^-[0, \bar{\psi}]$ и $\Phi_4^-[0, \bar{\psi}]$ должны обращаться в нуль, а $\Phi_4^+[0, \bar{\psi}]$ является просто числовой константой. Как и было обещано в предыдущем разделе, мы видим, что единственный оператор без производных в эффективном лагранжиане, нарушающий киральную симметрию, пропорционален $(1 - \bar{\zeta}^2)/(1 + \bar{\zeta}^2)$, а следовательно оператору (19.5.34). Для того, чтобы включить нарушающие симметрию операторы, билинейные по нуклонному полю, следует учесть сохранение четности и изоспина, так что получаем:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}^+[0, \bar{\Psi}] &\propto \bar{N} \gamma_5 \bar{t} \tilde{N}, \quad \Phi_4^+[0, \bar{\Psi}] \propto \bar{N} \tilde{N}, \\ \bar{\Phi}^-[0, \bar{\Psi}] &\propto \bar{N} \bar{t} \tilde{N}, \quad \Phi_4^-[0, \bar{\Psi}] \propto \bar{N} \gamma_5 \tilde{N}.\end{aligned}$$

Таким образом, как и было заявлено в предыдущем разделе, единственными билинейными по нуклонным полям и нарушающими симметрию слагаемыми без производных являются выражения вида (19.5.61)–(19.5.64).

Феноменологический лагранжиан можно использовать для вычисления амплитуд процессов с участием медленных частиц. Это делается во многом аналогично тому, как в предыдущем разделе рассматривалась киральная теория пионов и нуклонов. При подсчете степеней характерного малого импульса Q внутренние линии голдстоуновских бозонов всегда вносят множители порядка Q^{-2} . Кроме того, внутренняя линия каждой из описываемых полями $\bar{\Psi}$ тяжелых частиц (любого спина), поглотившая от поля голдстоуновского бозона суммарный 4-импульс q , будет иметь пропагатор

$$\frac{N(p+q)}{(p+q)^2 + M^2} \rightarrow \frac{N(p)}{2p \cdot q}$$

(где N — некоторый полином, зависящий от спина и типа частиц, а M — масса частицы), так что он вносит множитель порядка Q^{-1} . Те же рассуждения, которые привели к формуле (19.5.55), приводят в данном случае к числу степеней Q в заданной фейнмановской диаграмме

$$v = \sum_i V_i (d_i + h_i/2 - 2) + 2L - E_h + 2, \quad (19.6.45)$$

где V_i — число вершин типа i , d_i — число производных (в случае приближенных нарушенных симметрий — число производных или масс голдстоуновских бозонов) в вершине типа i , h_i — число линий тяжелых частиц, сходящихся в вершине типа i , L — число петель, E_h — число внешних линий тяжелых частиц. В общем случае для всех взаимодействий, разрешенных киральными симметриями, коэффициент $d_i + h_i/2 - 2$ неотрицателен. Для взаимодействий только между голдстоуновскими бозонами всегда $d_i \geq 2$, так как подобные взаимодействия должны быть либо по меньшей мере билинейными по ковариантным произ-

водным (19.6.15), либо пропорциональными нарушающим симметрию параметрам (типа масс кварков в предыдущем разделе), которые имеют порядок квадрата массы голдстоуновских бозонов. Взаимодействия между голдстоуновскими бозонами и тяжелыми частицами должны включать ковариантные производные (19.6.15) или (19.6.30), поэтому для них $d_i \geq 1$, а также $h_i \geq 2$. Единственные взаимодействия, для которых $d_i + h_i/2 < 2$, трилинейны по тяжелым частицам, и мы их исключаем, поскольку рассматриваем только диаграммы, в которых все тяжелые адроны остаются нерелятивистскими. Если для всех взаимодействий $d_i + h_i/2 \geq 2$, то ведущими диаграммами будут те, которые построены только по взаимодействиям с $d_i + h_i/2 = 2$ и не содержат петель. Опять же, поправки возникают за счет взаимодействий с большим числом производных и/или большим числом полей тяжелых частиц и/или одной или более петлями.

Если нет нарушения внутренней симметрии, часть лагранжиана, включающая только поля голдстоуновских бозонов, содержит единственное слагаемое с $d_i = 2$:

$$\mathcal{L}_{GB} = -\frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}^2 D_{a\mu} D_b^\mu, \quad (19.6.46)$$

где F_{ab}^2 — некоторая действительная положительно определенная матрица. Для случая (19.6.12) и большого класса других параметризаций факторпространств, $\gamma(\xi)$ при $\xi_a \rightarrow 0$ стремится к $1 + i\xi_a x_a$, так что выражение (19.6.14) показывает, что линейное слагаемое в $D_{a\mu}$ равно просто $\partial_\mu \xi_a$. Тогда канонически нормированные поля голдстоуновских бозонов π_a , для которых кинематический лагранжиан имеет вид $-\frac{1}{2} \sum_a \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a$, равны

$$\pi_a = \sum_b F_{ab} \xi_b. \quad (19.6.47)$$

В $SO(4)$ теории из предыдущего раздела генераторы x_a и поля ξ_a преобразуются по неприводимому представлению ненарушенной подгруппы $H = SO(3)$, так что в этом случае $F_{ab}^2 = F_\pi^2 d_{ab}$, где F_π — единственная константа, характеризующая энергетический масштаб спонтанного нарушения симметрии. В общем случае можно (не изменяя структурные константы) выбрать генераторы так, что F_{ab}^2 диагональна, причем все диагональные элементы равны друг

другу внутри каждого неприводимого представления H , но в остальном независимы.

* * *

Мы показали, как построить теории полей голдстоуновских бозонов, беря за исходные поля, принадлежащие линейным представлениям нарушенной группы симметрии, например, $SU(2) \times SU(2)$ 4-вектор $\Phi_n(x)$, с которого мы начинали в разделе 19.5. При очень низких энергиях существенными степенями свободы являются только голдстоуновские бозоны, так что в общем случае можно отбросить неголдстоуновские части поля, например, поле $\sigma(x)$, определяемое выражением (19.5.4). Но бывают обстоятельства, при которых необходимо вернуться к полным линейным представлениям группы нарушенной симметрии, лишь одной частью которых являются поля голдстоуновских бозонов.

Это случается, когда в результате изменения температуры или включения какого-то внешнего поля система подводится близко к фазовому переходу второго рода, в котором она гладко переходит от нарушенной к ненарушенной симметрии. С одной стороны такого перехода симметрия нарушена, так что имеются безмассовые голдстоуновские бозоны и различные другие массивные возбуждения, в общем случае не образующие полных мультиплетов, реализующих линейные представления группы нарушенной симметрии. С другой стороны перехода симметрия не нарушена, так что имеются полные линейные мультиплеты, в общем случае не безмассовые. Если переход непрерывен, то очень близко к фазовому переходу голдстоуновский бозон должен составлять часть полного линейного мультиплета почти безмассовых возбуждений. Если исключить случайности или другие симметрии, этот мультиплет будет образовывать *неприводимое* представление группы нарушенной симметрии. Этот неприводимый мультиплет полей, которые становятся безмассовыми только в точке фазового перехода, носит название *параметра порядка*.

Такое определение параметра порядка точнее обычного. Часто говорят о нем как о любом наборе полей, чьи средние по вакууму нарушают симметрию, но это слишком смутное определение — не существует одного набора полей, чьи средние по вакууму могут считаться ответственными за нарушение симмет-

рии. Например, $SU(2) \times SU(2)$ симметрия квантовой хромодинамики с безмассовыми u и d кварками нарушается средним по вакууму от $\bar{u}u + \bar{d}d$, являющейся четвертой компонентой кирального 4-вектора, однако четвертые и более высокие степени кварковых полей также имеют неисчезающие вакуумные средние, принадлежащие другим представлениям $SU(2) \times SU(2)$. Напротив, при гладком фазовом переходе, в котором $SU(2) \times SU(2)$ становится ненарушенной, голдстоуновский бозон становится членом единственного безмассового представления $SU(2) \times SU(2)$, что позволяет однозначно определить параметр порядка.

Установление правильных параметров порядка очень важно как для вычисления обсуждавшихся в разделе 18.5 критических показателей, так и при рассмотрении конфигураций типа вихревых нитей или магнитных монополей, имеющих, как мы покажем в разделах 21.6 и 23.3, сингулярность, в которой восстанавливается нарушенная симметрия. Часто предполагается, что параметр порядка для киральной $SU(2) \times SU(2)$ симметрии квантовой хромодинамики является киральным 4-вектором, однако доказательство этого неизвестно ^{32a}.

19.7. Эффективные теории поля: $SU(3) \times SU(3)$

В начале 1960-х гг. Гелл-Манн³³ и Нееман³⁴ расширили приближенную изоспиновую $SU(2)$ симметрию ядерной физики до еще менее точной $SU(3)$ симметрии, которая объединяла известные барионы и мезоны в различные неприводимые представления: октет $1/2^+$ барионов p , n , Λ^0 , $\Sigma^{\pm,0}$, $\Xi^{\pm,0}$; октет 0^- мезонов $K^{\pm,0}$, $\pi^{\pm,0}$, η^0 , $\bar{K}^{\mp,0}$; октет 1^- мезонов $K^{*\pm,0}$, $\rho^{\pm,0}$, ω^0 , $\bar{K}^{*\mp,0}$; декуплет $3/2^+$ барионов $\Delta^{++,+,-}$, $\Sigma^{*+,\pm,-}$, $\Xi^{*0,\pm,-}$, Ω^- . (Частицы η и Ω к тому времени не были открыты.) После успехов киральной $SU(2) \times SU(2)$ симметрии, достигнутых в середине 1960-х гг., возникло естественное предположение, что сильные взаимодействия удовлетворяют также приближенной $SU(3) \times SU(3)$ симметрии, которая по аналогии с $SU(2) \times SU(2)$ спонтанно нарушается до своей диагональной подгруппы — группы $SU(3)$ Гелл-Манна и Неемана. Затем, после появления квантовой хромодинамики, стало ясно, что эта симметрия возникает потому, что существуют не два, а три сравнительно легких кварка — u , d и третий кварк s , имеющий, как и

d , заряд $-1/3$. В этом случае $SU(3) \times SU(3)$ симметрия состоит из независимых $SU(3)$ преобразований (аналогичных преобразованиям (19.4.2)) левых и правых компонент полей u -, d -, s -кварков:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \exp \left[i \sum_a (\theta_a^V \lambda_a + \theta_a^A \lambda_a \gamma_5) \right] \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad (19.7.1)$$

где λ_a — полный набор бесследовых эрмитовых матриц:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (19.7.2)$$

нормированных так, что $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$. Таким образом, генераторы $SU(3) \times SU(3)$ представлены на кварковых полях генераторами $t_a = \lambda_a$ ненарушенной $SU(3)$ симметрии и генераторами нарушенной симметрии $x_a = \lambda_a \gamma_5$.

Чтобы определить поля голдстоуновских бозонов и выяснить их трансформационные свойства, заметим, что в представлении, реализуемом кварковыми полями, любое $SU(3) \times SU(3)$ преобразование можно записать как произведение $\exp(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a \lambda_a)$ на преобразование $\exp(i \sum_a \theta_a \lambda_a)$, относящееся к ненарушенной $SU(3)$ подгруппе группы $SU(3) \times SU(3)$. (Знак «минус», сопровождающий ξ , включен для удобства последующего сравнения компонент этого поля с введенными в разделе 19.5 пионными полями.) Таким образом, в этом представлении каждый правый смежный класс $SU(3) \times SU(3) / SU(3)$ представлен матрицей вида $\gamma(\xi) = \exp(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a \lambda_a)$, которая в нем содержится, и, с точностью до нормировки, параметры ξ_a этих правых смежных классов можно взять за наши поля голдстоуновских

бозонов. Согласно (19.6.18) закон преобразования этих полей определяется формулой

$$\begin{aligned} & \exp\left[i\sum_a(\theta_a^V\lambda_a + \theta_a^A\lambda_a\gamma_5)\right] \exp\left(-i\gamma_5\sum_a\xi_a(x)\lambda_a\right) \\ &= \exp\left(-i\gamma_5\sum_a\xi'_a(x)\lambda_a\right) \exp\left(i\sum_a\theta_a(x)\lambda_a\right), \end{aligned} \quad (19.7.3)$$

где $\theta_a(x)$ — некоторые функции θ^V , θ^A и $\xi(x)$. Кроме того, согласно (19.6.3) свободные от голдстоуновских бозонов кварковые поля определяются здесь как

$$q(x) \equiv \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\gamma_5\sum_a\xi_a(x)\lambda_a\right) \tilde{q}(x) \quad (19.7.4)$$

причем их закон преобразования определяется формулой (19.6.24):

$$\tilde{q}'(x) = \exp\left(i\sum_a\theta_a(x)\lambda_a\right) \tilde{q}(x). \quad (19.7.5)$$

Можно было бы продолжить эти рассуждения и ввести ковариантные производные (19.6.15) и (19.6.30), чтобы с их помощью построить кирально-инвариантный лагранжиан, однако в случае киральных симметрий возможен более простой подход.

Заметим, что те части выражения (19.7.3), которые пропорциональны $(1 + \gamma_5)$ и $(1 - \gamma_5)$, имеют вид

$$\begin{aligned} & \exp\left(i\sum_a\theta_a^L\lambda_a\right) \exp\left(-i\sum_a\xi_a(x)\lambda_a\right) \\ &= \exp\left(-i\sum_a\xi'_a(x)\lambda_a\right) \exp\left(i\sum_a\theta_a(x)\lambda_a\right), \end{aligned} \quad (19.7.6)$$

$$\begin{aligned} & \exp\left(i\sum_a\theta_a^R\lambda_a\right) \exp\left(i\sum_a\xi_a(x)\lambda_a\right) \\ &= \exp\left(i\sum_a\xi'_a(x)\lambda_a\right) \exp\left(i\sum_a\theta_a(x)\lambda_a\right), \end{aligned} \quad (19.7.7)$$

где

$$\theta_a^L \equiv \theta_a^V + \theta_a^A, \quad \theta_a^R \equiv \theta_a^V - \theta_a^A.$$

Умножая (19.7.7) справа на обратный оператор к (19.7.6), получаем простой закон преобразования

$$U'(x) = \exp\left(i \sum_a \lambda_a \theta_a^R\right) U(x) \exp\left(-i \sum_a \lambda_a \theta_a^L\right), \quad (19.7.8)$$

где $U(x)$ — унитарная унимодулярная матрица

$$U(x) \equiv \exp\left(2i \sum_a \xi_a(x) \lambda_a\right). \quad (19.7.9)$$

Иными словами, $U(x)$ преобразуется по $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3})$ представлению $SU(3) \times SU(3)$. Это все еще нелинейная реализация $SU(3) \times SU(3)$, так как компоненты $U(x)$ не независимы: они подчиняются нелинейным ограничениям $U^\dagger U = 1$ и $\text{Det} U = 1$.

Единственное $SU(3) \times SU(3)$ -инвариантное слагаемое второго порядка по пространственно-временным производным в лагранжиане голдстоуновских бозонов имеет вид

$$\mathcal{L}_{2\text{производ}} = -\frac{1}{16} F^2 \text{Tr}\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\}, \quad (19.7.10)$$

где F^2 — требующая определения положительная константа. Можно выразить ξ_a через обычным образом нормированные поля псевдоскалярных мезонов, записав

$$\sum_a \lambda_a \xi_a = \frac{\sqrt{2}}{F} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 & K^0 \\ \bar{K}^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \eta^0 \end{bmatrix} \equiv \frac{\sqrt{2} B}{F}, \quad (19.7.11)$$

так что кинематическое слагаемое в выражении (19.7.10) имеет обычный вид

$$\mathcal{L}_{\text{кин}} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 - \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- - \partial_\mu K^+ \partial^\mu \bar{K}^- - \partial_\mu K^0 \partial^\mu \bar{K}^0 - \frac{1}{2}\partial_\mu \eta^0 \partial^\mu \eta^0.$$

Чтобы определить константу F , заметим, сравнивая (19.7.4) с (19.5.42), что для бесконечно малого ξ компоненты ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 — такие же, как введенные в разделе 19.5 поля голдстоуновских бозонов ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 . Затем, сравнивая (19.7.11) с (19.5.17) и (19.5.32), найдем, что константа F , определенная соотношением (19.7.10), совпадает с введенной в разделе 19.4 константой $F_\pi = 184$ МэВ.

Симметрия $SU(3) \times SU(3)$ квантовой хромодинамики нарушается кварковым массовым слагаемым, которое в записи через определенное формулой (19.7.4) кварковое поле имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{масс}} = -\bar{q} M_q q = -\bar{q} e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} M_q e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi} \tilde{q}, \quad (19.7.12)$$

где

$$M_q = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix}. \quad (19.7.13)$$

Выражение (19.7.12) содержит чисто бозонную часть, полученную путем замены кварковой билинейной формы на ее вакуумное среднее, определяемое ненарушенной $SU(3)$ симметрией и симметрией относительно инверсии как *

$$\langle \bar{q}_n \gamma_5 \tilde{q}_m \rangle_0 = 0, \quad \langle \bar{q}_n \tilde{q}_m \rangle_0 = -v \delta_{nm}. \quad (19.7.14)$$

Тогда массовое слагаемое голдстоуновских бозонов в лагранжиане имеет вид

* Тот факт, что законы сохранения четности, заряда и странности, верные для вакуума, не нарушаются также и кварковой массовой матрицей, есть следствие обсуждавшегося в разделе 19.3 условия подстройки вакуума. Аналогично, если кварковые поля определены так, что массы всех кварков положительны, тогда при $v > 0$ знак «минус» в соотношении (19.7.3) требуется условием, что истинный вакуум должен быть не максимумом, а минимумом энергии вакуума для вакуумных состояний, повернутых преобразованиями $SU(3) \times SU(3)$, ибо, как мы увидим, это обеспечивает положительность масс октета псевдоголдстоуновских бозонов.

$$\begin{aligned}
-\frac{v}{F_\pi^2} \text{Tr}\{B, \{B, M_q\}\} = & -\frac{v}{F_\pi^2} \left[4m_u \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 \right)^2 + 4(m_u + m_d) \pi^+ \pi^- \right. \\
& + 4(m_u + m_s) K^+ \bar{K}^- + 4m_d \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 \right)^2 \\
& \left. + 4(m_d + m_s) K^0 \bar{K}^0 + \frac{8}{3} m_s (\eta^0)^2 \right]. \quad (19.7.15)
\end{aligned}$$

Отсюда можно извлечь, что ³⁵

$$\begin{aligned}
m_{\pi^+}^2 &= m_{\pi^0}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2} [m_u + m_d], \\
m_{K^+}^2 &= \frac{4v}{F_\pi^2} [m_u + m_s], \\
m_{K^0}^2 &= \frac{4v}{F_\pi^2} [m_d + m_s], \\
m_{\eta^0}^2 &= \frac{4v}{F_\pi^2} \left[\frac{4m_s + m_d + m_u}{3} \right], \quad (19.7.16)
\end{aligned}$$

и, кроме того, смешивающее π^0 и η^0 слагаемое

$$m_{\eta\pi} = \frac{4v}{\sqrt{3}F_\pi^2} [m_u - m_d]. \quad (19.7.17)$$

Те же результаты можно получить и операторными методами. Теорема Нетер позволяет построить генераторы T_a и X_a , для которых

$$[T_a, q] = -\lambda_a q, \quad [X_a, q] = -\gamma_5 \lambda_a q. \quad (19.7.18)$$

Поля голдстоуновских бозонов можно записать в действительном базисе как π_a , причем $\pi^\pm = (\pi_1 \pm i\pi_2)/\sqrt{2}$, $\pi^0 = p_3$, $K^\pm = (\pi_4 \pm i\pi_5)/\sqrt{2}$, $K^0 = (\pi_6 + i\pi_7)/\sqrt{2}$, $\bar{K}^0 = (\pi_6 - i\pi_7)/\sqrt{2}$ и $\eta^0 = \pi_8$. Выживающая после спонтанного нарушения $SU(3)$ симметрия позволяет утверждать, что матрица F для этих бозонов принимает вид $F_{ab} = F_\pi \delta_{ab}$. Кроме

того, $SU(3) \times SU(3)$ симметрия нарушается изнутри массовым слагаемым в гамильтониане $H_1 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s = \bar{q}M_q q$, где M_q — кварковая массовая матрица (19.7.13). Массовая матрица псевдоголдстоуновских бозонов задается формулой (19.3.20) в виде

$$M_{ab}^2 = -F_\pi^{-2} \langle \bar{q} \{ \lambda_a, \{ \lambda_b, M_q \} \} q \rangle_0. \quad (19.7.19)$$

Так как это выражение — уже первого порядка по массам кварков, в этом порядке можно использовать ненарушенные $SU(3)$ соотношения, и получить, как и ранее, результаты (19.7.16) и (19.7.17).

Массы каонного дублета $m_{K^+} = 493,65$ МэВ и $m_{K^0} = 497,7$ МэВ довольно близки и много больше, чем масса пиона, так что из (19.7.16) вытекает, что m_u и m_d должны быть значительно меньше, чем m_s . При вычислении величин, чувствительных к m_u и m_d , типа разности масс каонов или масс пионов, следует также принимать во внимание другую малую поправку, обусловленную электромагнитным взаимодействием. Электромагнитный ток равен $J^0 = ie\bar{q}\gamma^\mu Qq$, где Q — диагональная матрица с элементами $2/3, -1/3, -1/3$. Коммутаторы тока с генераторами $SU(3) \times SU(3)$ равны:

$$[T_a, J^\mu] = -ie \frac{1}{2} \bar{q} \gamma^\mu [Q, \lambda_a] q, \quad [X_a, J^\mu] = -ie \frac{1}{2} \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 [Q, \lambda_a] q.$$

Видно, что J^μ коммутирует с X_3, X_6, X_7 и X_8 , а также с T_3, T_6, T_7 и T_8 , так что электромагнитная часть гамильтониана инвариантна относительно подгруппы $SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$ с этими генераторами. Поэтому в пределе нулевых масс кварков *электромагнитные эффекты не придают массы нейтральным псевдоголдстоуновским бозонам* ³⁶ $\pi^0, K^0, \bar{K}^0$ и η^0 , связанным со спонтанным нарушением симметрий с генераторами X_3, X_6, X_7 и X_8 . Кроме того, в пределе нулевых масс кварков существует ненарушенная симметрия $SU(2)$ с генераторами T_6, T_7 и $\sqrt{3}T_8 - T_3$, относительно которой K^+ и π^+ преобразуются как дублет, так что при нулевых массах кварков *электромагнитные поправки к массам K^+ и π^+ равны* ³⁶. Поскольку все кварковые массовые слагаемые и электромагнитные поправки малы, разумно рассматривать эти эффекты как дополнительные поправки к эффективному кварковому гамильтониану. Тогда с учетом электромагнитного взаимодействия массовая формула (19.7.16) должна быть поправлена и принимает вид ³⁷

$$\begin{aligned}
m_{K^\pm}^2 &= 4v(m_u + m_s) / F_\pi^2 + \Delta, \\
m_{K^0}^2 &= m_{\bar{K}^0}^2 = 4v(m_d + m_s) / F_\pi^2, \\
m_{\pi^\pm}^2 &= 4v(m_d + m_u) / F_\pi^2 + \Delta, \\
m_{\pi^0}^2 &= 4v(m_d + m_u) / F_\pi^2, \\
m_\eta^2 &= 4v(m_u + m_d + 4m_s) / 3F_\pi^2,
\end{aligned} \tag{19.7.20}$$

где Δ — общая электромагнитная поправка для квадратов масс $K^\pm$ и $\pi^\pm$.

Эти формулы накладывают одно линейное соотношение на пять масс псевдоголдстоуновских бозонов, представляющее вариант соотношения Гелл-Манна–Окубо*:

$$3m_\eta^2 + 2m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 = 2m_{K^+}^2 + 2m_{K^0}^2. \tag{19.7.21}$$

Если взять из эксперимента значения масс каона и пиона, то это соотношение предсказывает массу η , равную 566 МэВ, в то время как экспериментальное значение равно 547 МэВ. Малое различие обычно приписывается смешиванию состояния η с более тяжелой псевдоскалярной частицей η' массой 958 МэВ.

* Это соотношение было первоначально получено³⁸ на основе порождаемой генераторами T_a приближенной $SU(3)$ симметрии Гелл-Манна и Немана в пренебрежении разностями масс внутри изотопических мультиплетов. Из этого вывода невозможно установить, нужно ли применять полученное соотношение к самим массам псевдоскалярных мезонов, или, как здесь, к их квадратам. Если записать соотношение для самих масс, согласие с экспериментом будет не слишком хорошим: масса η получается равной 613 МэВ. То обстоятельство, что соотношение Гелл-Манна–Окубо хорошо выполняется не для масс мезонов, а для квадратов их масс, подтверждает интерпретацию этих частиц как голдстоуновских бозонов спонтанно нарушенной приближенной $SU(3) \times SU(3)$ симметрии. Гелл-Манн и Окубо использовали также порождаемую генераторами T_a приближенную $SU(3)$ симметрию для вывода соотношений между массами других частиц, например (пренебрегая нарушающими изоспин эффектами), соотношения $2m_N + 2m_\Xi = 3m_\Lambda + m_\Sigma$ между массами частиц легчайшего барионного октета. У таких мультиплетов средняя масса настолько больше разностей масс частиц внутри мультиплета, что не имеет значения, применяется ли соотношение для самих масс, или для их квадратов.

Из массовых формул (19.7.20) можно вывести формулы для отношения масс кварков через массы пионов и каонов³⁷:

$$\frac{m_d}{m_s} = \frac{m_{K^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2}, \quad \frac{m_u}{m_s} = \frac{2m_{\pi^0}^2 - m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2}. \quad (19.7.22)$$

Подставляя значения $m_{\pi^+} = 139,57$ МэВ, $m_{\pi^0} = 134,974$ МэВ, $m_{K^+} = 493,65$ МэВ и $m_{K^0} = 497,7$ МэВ, находим отношения $m_d/m_s = 0,050$ и $m_u/m_s = 0,027$. Таким образом, отношение масс d и u кварков ближе к 2, чем к 1. (Расчет^{38a}, проведенный в 1996 году с использованием других осколков информации, а также масс псевдоскалярных мезонов, дал значения: $m_d/m_s = 0,053 \pm 0,002$ и $m_u/m_s = 0,029 \pm 0,003$.)

Ни одно из этих соотношений не позволяет установить массы отдельных кварков. На самом деле, эти массы определены не слишком хорошо до тех пор, пока мы не определим рецепт перенормировки для билинейных форм кварков. Часто это предписание оформляется так, что m_s равно разности масс между отличающимися на единицу странности изомультиплетами внутри некоторого $SU(3)$ мультиплета. Например, легчайший октет векторных мезонов состоит из: изотопического дублета K^* массой 892 МэВ, интерпретируемого как связанное состояние антикварка $\bar{s}$ и кварков u или d ; отвечающего ему антидублета, состоящего из s и $\bar{u}$ или $\bar{d}$; мезонов ρ с $T = 1$ массой 770 МэВ и ω с $T = 0$ массой 783 МэВ, интерпретируемых как связанные состояния $\bar{u}$ или $\bar{d}$ и u или d . Если мы хотим приписать разницу между массой K^* и средней массой ρ и ω относительно большой массе s -кварка, то следует отнормировать билинейную форму кварков так, чтобы $m_s - \frac{1}{2}(m_u + m_d) = m_{K^*} - \frac{1}{2}(m_\rho + m_\omega) = 120$ МэВ, откуда $m_s = 125$ МэВ. С учетом полученных выше отношений масс кварков получаем $m_d = 6,0$ МэВ и $m_u = 3,3$ МэВ. Однако эти оценки значений масс намного менее достоверны, чем значения отношений масс (19.7.22). Часто значение m_s оценивается^{38b} равным не 125, а 180 МэВ.

Массовое слагаемое (19.7.12) включает мезон-мезонные взаимодействия. Используя соотношения (19.7.14), (19.7.11) и (19.7.9), можно записать чисто бозонную часть этого слагаемого в лагранжиане в виде

$$\mathcal{L}_{\text{масс, бозон}} = \frac{1}{2} v \text{Tr} \{ M_q (U^\dagger + U) \}. \quad (19.7.23)$$

Вид этого слагаемого можно вывести из основанных на симметрии общих соображений, которые позволяют также найти разрешенные слагаемые более высокого порядка по M_q . Предположим, что мы включаем внешнее 3×3 поле χ , и заменяем массовое слагаемое (19.7.12) в основополагающем лагранжиане квантовой электродинамики на слагаемое с взаимодействием χ с кварками

$$\mathcal{L}_\chi = -\bar{q} \left[\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \chi + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \chi^\dagger \right] q, \quad (19.7.24)$$

Это слагаемое становится таким же, как в (19.7.12), после замен $\chi = \chi^\dagger = M_q$. Смысл этой процедуры в том, что лагранжиан (19.7.24) становится формально инвариантным относительно $SU(3) \times SU(3)$, если потребовать для с выполнения формального закона преобразования

$$\chi \rightarrow \exp \left(i \sum_a \lambda_a \theta_a^R \right) \chi \exp \left(-i \sum_a \lambda_a \theta_a^L \right). \quad (19.7.25)$$

Таким образом, мы можем получить разрешенные бозонные слагаемые, включающие массы кварков, записав самый общий $SU(3) \times SU(3)$ лагранжиан (до определенного заданного порядка по производным и по M_q), содержащий U и χ , и требуя также инвариантности по отношению к преобразованию четности

$$U(\mathbf{x}, t) \leftrightarrow U^\dagger(-\mathbf{x}, t), \quad \chi \leftrightarrow \chi^\dagger, \quad (19.7.26)$$

и производя затем замены

$$\chi = \chi^\dagger = M_q. \quad (19.7.27)$$

Например, взаимодействие $\text{Tr}(U^\dagger \chi + U \chi^\dagger)$ инвариантно относительно преобразований $SU(3) \times SU(3)$ и четности и принимает тот же вид, что и (19.7.23), если придать с значения (19.7.27).

Используя эту технику, Гассер и Лейтвилер³⁹ записали полный эффективный лагранжиан для псевдоскалярного октета

четвертого порядка по импульсам или массам мезонов (считая кварковые массы второго порядка по массам мезонов) в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & L_1 \text{Tr} \{ \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \}^2 + L_2 \text{Tr} \{ \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \} \text{Tr} \{ \partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger \} \\ & + L_3 \text{Tr} \{ \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger \} + L_4 \text{Tr} \{ \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \} \text{Tr} \{ M_q (U + U^\dagger) \} \\ & + L_5 \text{Tr} \{ \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger (M_q U + U^\dagger M_q) \} + L_6 \left[\text{Tr} \{ M_q (U + U^\dagger) \} \right]^2 \\ & + L_7 \left[\text{Tr} \{ (U^\dagger - U) M_q \} \right]^2 + L_8 \text{Tr} \{ (U M_q)^2 + (U^\dagger M_q)^2 \}, \end{aligned} \quad (19.7.28)$$

где $L_1, \dots, L_8$ являются константами, которые следует определять из эксперимента. Полный эффективный лагранжиан до четвертого порядка по массам мезонов и импульсам равен

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4, \quad (19.7.29)$$

где L_2 — сумма слагаемых (19.7.10) и (19.7.23):

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{16} F^2 \text{Tr} \{ \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \} + \frac{1}{2} v \text{Tr} \{ M_q (U^\dagger + U) \}. \quad (19.7.30)$$

Сюда можно включить электрослабые взаимодействия, заменив производные ∂_μ на соответствующие калибровочно-ковариантные производные D_μ и добавив несколько дополнительных слагаемых в $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$.

Следуя тем же, основанным на подсчете степеней аргументов, что и в разделах 19.5 и 19.6, мы должны для вычисления матричных элементов S -матрицы до четвертого порядка по массам мезонов и импульсам включить как древесные диаграммы во всех порядках в $\mathcal{L}_2$ и в первом порядке в $\mathcal{L}_4$, так и однопетлевые диаграммы, построенные только из $\mathcal{L}_2$. Используя этот лагранжиан, Гассер и Лейтвилер и др.⁴⁰ провели тщательное изучение мезонной динамики (и связанных с ней электрослабых взаимодействий).

* * *

Слагаемое с кварковыми массами (19.7.12) естественно оказывает влияние на другие $SU(3)$ мультиплеты. Для любого мультиплета, кроме псевдоскалярного октета, это влияние можно рассматри-

вать как возмущение первого порядка, так что сдвиг массовой матрицы произвольного мультиплета $|i\rangle$ равен

$$\delta m_{ij} = \langle i | \bar{q} M_q \bar{q} | j \rangle \quad (19.7.31)$$

после чего можно использовать⁴¹ $SU(3)$, чтобы связать различные матричные элементы $\langle i | \bar{q}_r \bar{q}_s | j \rangle$. Таким способом можно показать, что

$$\frac{\delta m_p - \delta m_n}{m_u - m_d} = \frac{m_{\Xi} - m_{\Sigma}}{m_s}. \quad (19.7.32)$$

Используя это соотношение вместе с (19.7.22), можно получить вклад кварковых масс в разность масс нуклонов $\delta m_p - \delta m_n \approx -2,5$ МэВ. Этот результат можно подставить в соотношения (19.5.65) и (19.5.66), чтобы вычислить ведущие нарушения изоспиновой симметрии в низкоэнергетических пион-нуклонных взаимодействиях. Конечно, определенная здесь разность $\delta m_p - \delta m_n$ не является полной разностью масс протона и нейтрона, так как в нее вносит кроме того важный вклад испускание и поглощение фотона. Так как нейтрон электрически нейтрален, это электромагнитное слагаемое почти наверняка положительно, в согласии с тем фактом, что наблюдаемая разность масс протона и нейтрона равна $-1,3$ МэВ, так что электромагнетизму следует приписать $+1,2$ МэВ. К сожалению, аккуратное вычисление этой электромагнитной разности масс столкнулось с трудностями.

19.8. Аномальные члены в эффективных теориях поля*

Для того, чтобы применить описанную в трех предыдущих разделах программу эффективной теории поля, необходимо, чтобы действие содержало все возможные слагаемые, разрешенные предполагаемыми симметриями теории. Описанные в этих разделах методы позволяют идентифицировать все *явно* инвариантные слагаемые, либо используя изложенный в разделе 19.6 общий формализм ковариантных производных, либо, в случае киральных симметрий,

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

используя линейно преобразующееся поле, подчиненное нелинейным связям типа $U(x)$ из раздела 19.7. Однако, возможно, что могут быть и другие слагаемые в действии для эффективной теории поля, аномальные в том смысле, что они задаются интегралами от четырехмерных плотностей лагранжианов, *не являющихся* инвариантами, но чья вариация под действием нарушенной симметрии представляет полную пространственно-временную производную, что сохраняет инвариантность соответствующего слагаемого в действии. Как мы увидим в разделе 22.7, такое слагаемое для $SU(3) \times SU(3)$ было открыто Вессом и Зумино⁴² при изучении «аномалий», объясняемых диаграммам с кварковыми петлями. Однако структуру этого слагаемого можно понять, ничего не зная об определяющей ее теории кварков и глюонов.

Простейший способ описать слагаемое Весса–Зумино — расширить размерность пространства-времени до пяти измерений, как это специально было предложено для данного случая Виттеном⁴³. До тех пор, пока мы требуем, чтобы поля в эффективной теории поля стремились к общему пределу при $x^\mu \rightarrow \infty$ по любому направлению, можно считать, что пространство-время имеет топологию сферы S_4 с точкой на бесконечности, включенной как обычная точка. Как отмечалось в разделе 19.6, когда группа G нарушена до подгруппы H , можно считать, что допустимые значения голдстоуновских полей ξ_a в любой пространственно-временной точке определяют точку в пространстве смежных классов G/H (пространство элементов G , в котором отождествлены любые два элемента, отличающиеся умножением справа на элементы H). Поэтому множество функций $\xi_a(x)$ представляет отображение пространственно-временной сферы S_4 на G/H . В зависимости от топологии G/H иногда оказывается возможным гладко продеформировать любую 4-сферу в G/H в точку; иными словами, оказывается возможным расширить любую функцию $\xi_a(x)$ до непрерывной функции $\xi_a(x; s)$, определенной для $0 \leq s \leq 1$, причем $\xi_a(x; 0) = \xi_a(x)$, а $\xi_a(x; 1)$ — любая фиксированная точка исходной сферы (например, $\xi_a = 0$). Если это верно, то математически такое утверждение выражают словами, что гомотопическая группа $\pi_4(G/H)$ тривиальна. (Подробнее о гомотопических группах см. в разделе 23.2.)

Известно, что это имеет место в случае группы $SU(N) \times SU(N)$, спонтанно нарушенной до $SU(N)$, где пространство смежных классов $SU(N) \times SU(N)/SU(N)$ имеет такую же топологию, что и сама

$SU(N)$.* Отсюда в интересном для физики случае, когда $G = SU(3) \times SU(3)$ и $H = SU(3)$, можно расширить поля голдстоуновских бозонов, или, что то же, $U(x)$ (см. 19.7.9) до унитарной унимодулярной матрицы $U(y)$, определенной в пятимерном шаре B_5 с координатами x^μ и s , поверхность которого представляет четырехмерную сферу пространства-времени.

Рассмотрим теперь следующую функцию, образованную с помощью $U(y)$:

$$\omega(y) \equiv -\frac{i}{240\pi^2} \epsilon^{ijklm} \text{Tr} \left\{ U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^i} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^j} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^k} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^l} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^m} \right\}, \quad (19.8.1)$$

где индексы i, j , и т. д. принимают пять значений, отвечающих координатам x^μ и s . (Фаза и численный коэффициент выбраны для удобства дальнейших выкладок.) Это выражение явно инвариантно относительно киральных преобразований (19.7.8). Кроме того, поскольку ϵ^{ijklm} есть тензорная плотность, интеграл от $\omega(y)$ по пятимерному шару явно не зависит (с точностью до знака) от выбора пятимерных координат y^i . Далее, этот интеграл зависит только от значений, которые принимает $U(y)$ на поверхности шара, т. е. в пространстве-времени. Чтобы проверить последнее утверждение, заметим, что когда мы осуществляем бесконечно малую вариацию $dU(y)$ функции $U(y)$ внутри шара, $\omega(y)$ изменяется на производную

$$\delta\omega(y) = -\frac{i}{48\pi^2} \epsilon^{ijklm} \frac{\partial}{\partial y^m} \text{Tr} \left\{ U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^i} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^j} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^k} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^l} U^{-1} \delta U \right\}, \quad (19.8.2)$$

(само вычисление см. в разделе 23.4), так что то изменение $U(y)$, которое не влияет на его значение в пространстве-времени, так же не влияет и на интеграл (19.8.1) по пятимерному шару B_5 , поверхность которого есть пространство-время. Поэтому можно включить этот интеграл как слагаемое в действие

$$I_{WZW}[U] = n \int_{B_5} d^5 y \omega(y), \quad (19.8.3)$$

* Это показывается с помощью замечания, что элементы $U(x)$ группы $SU(N)$ можно использовать для представления правых смежных классов $SU(N)$ в $SU(N) \times SU(N)$.

с коэффициентом n , который пока что остается произвольным.

Это слагаемое можно записать как четырехмерный интеграл от плотности лагранжиана, которая, правда, не является $SU(3) \times SU(3)$ инвариантной. Используя (19.7.9), можно записать главное слагаемое в $\omega(x)$ в пределе малых полей мезонов как

$$\omega(x) \rightarrow \frac{8\sqrt{2}n}{15\pi^2 F_\pi^5} \epsilon^{ijklm} \text{Tr} \left\{ \frac{\partial B}{\partial y^i} \frac{\partial B}{\partial y^j} \frac{\partial B}{\partial y^k} \frac{\partial B}{\partial y^l} \frac{\partial B}{\partial y^m} \right\}, \quad (19.8.4)$$

где B — матрица (19.7.11) полей голдстоуновских бозонов. Тогда из теоремы Гаусса следует, что

$$I_{WZW}[U] = \frac{8\sqrt{2}n}{15\pi^2 F_\pi^5} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int_{S_4} d^4x \text{Tr} \left\{ B \frac{\partial B}{\partial x^\mu} \frac{\partial B}{\partial x^\nu} \frac{\partial B}{\partial x^\rho} \frac{\partial B}{\partial x^\sigma} \right\} + O\left(\frac{B^6}{F_\pi^6}\right). \quad (19.8.5)$$

Хотя это выражение кирально-инвариантно, его нельзя записать как интеграл по пространству-времени от кирально-инвариантной плотности, поскольку любая такая плотность должна быть построена из первых и более высоких ковариантных производных полей голдстоуновских бозонов, и следовательно при разложении по степеням полей голдстоуновских бозонов эта инвариантная плотность должна начинаться со слагаемого, содержащего не само B , а только его производные.

Как заметил Виттен, включение такого слагаемого в эффективное действие решает проблему, которая в противном случае приводила бы к конфликту между $SU(3) \times SU(3)$ эффективной теорией поля и опытом. Так как в эффективных лагранжианах (19.7.28) и (19.7.30) (или в того же типа слагаемых более высокого порядка) нет членов с $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, из сохранения четности вытекает требование, чтобы эти слагаемые были *четными* по полям голдстоуновских бозонов, что исключает процессы типа $K + \bar{K} \rightarrow 3\pi$. Дело не только в том, что не существует симметрии основополагающего лагранжиана квантовой хромодинамики, приводящей к подобному правилу отбора. Существует и прямое экспериментальное свидетельство против него, поскольку, как заметил Виттен, наблюдается распад ϕ -мезона как на $K + \bar{K}$, так и на 3π . Из (19.8.5) следует, что это нежелательное правило отбора устраняется слагаемым Весса–Зумино–Виттена в действии.

Примечательно, что коэффициент при слагаемом Весса–Зумино–Виттена не является свободно настраиваемым параметром. Как показал Виттен ⁴³, это происходит потому, что хотя такое слагаемое не изменяется при гладких деформациях функции $U(y)$ в B_5 , не изменяющих значений $U(x)$ на пространственно-временной границе S_4 , его все же можно изменить путем скачкообразного изменения $U(y)$, оставляющего $U(x)$ неизменным на границе. Можно представлять пятимерный шар B_5 как половину пятимерной сферы S_5 , а пространство-время S_4 как границу между B_5 и другой половиной B_5' . (Представьте, что S_5 аналогична поверхности Земли, тогда пространство-время S_4 аналогично экватору, а B_5 и B_5' – северному и южному полушариям.) Так как S_4 является одновременно границей и другой половины S_5 , можно записать слагаемое Весса–Зумино–Виттена в виде

$$I'_{WZW}[U] = -n \int_{B_5'} d^5 y \omega(y), \quad (19.8.6)$$

включив дополнительный знак «минус», поскольку граница B_5' является 4-сферой с противоположной ориентацией. Требование, чтобы слагаемые (19.8.3) и (19.8.6) были равны для произвольных полей голдстоуновских бозонов, можно удовлетворить, только положив $n = 0$. Однако для того, чтобы на весовой множитель $\exp(iI)$ в функциональных интегралах не влияла разность между слагаемым (19.8.3) и (19.8.6), достаточно лишь потребовать, чтобы эта разность равнялась бы 2π , умноженному на целое число:

$$I_{WZW}[U] - I'_{WZW}[U] = n \int_{B_5} d^5 y \omega(y) = 2\pi \times \text{целое} \div \text{исл.} \quad (19.8.7)$$

С учетом нормировочных множителей, включенных нами в определение (19.8.1) величины $\omega(y)$, интеграл от нее по любой пятимерной сфере оказывается равным 2π ⁴⁴. Отсюда следует, что коэффициент n должен быть целым числом.

В связи с приведенным примером слагаемого Весса–Зумино–Виттена возникает вопрос о том, не могут ли существовать другие аномальные слагаемые в действии, не обязательно связанные с кварковыми петлями, которые также $SU(3) \times SU(3)$ инвариантны, хотя и не являются четырехмерными интегралами от $SU(3) \times SU(3)$ инвариантных лагранжевых плотностей. К счастью, ответ отрицателен. Было показано ⁴⁵, что для произвольной группы G , нарушенной до

произвольной подгруппы H (причем $\pi_4(G/H) = 0$), любое слагаемое $F[\xi]$ в действии для полей голдстоуновских бозонов $\xi_a(x)$ всегда можно записать как интеграл от G -инвариантной 5-формы Ω по пятимерному шару B_5 , границей которого является пространственно-временная 4-сфера S_4 :

$$F[\xi] = \int_{B_5} d^5 y \, \epsilon^{ijklm} \frac{\partial \xi_a}{\partial y^i} \frac{\partial \xi_b}{\partial y^j} \frac{\partial \xi_c}{\partial y^k} \frac{\partial \xi_d}{\partial y^l} \frac{\partial \xi_e}{\partial y^m} \Omega_{abcde}(\xi(y)). \quad (19.8.8)$$

Для того, чтобы это выражение не зависело от конкретного способа, которым $\xi_a(x)$ распространяется внутрь пятимерного шара, необходимо, чтобы форма Ω была точной, в том смысле, что существует внешняя производная от 4-формы

$$\Omega_{abcde}(\xi) = (\partial/\partial \xi_{[a}) \mathcal{P}_{bcde]}(\xi) \quad (19.8.9)$$

(квадратные скобки, как обычно, указывают на антисимметризацию по отношению к индексам внутри скобок), так что

$$F[\xi] = \int_{S_4} d^4 x \, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial \xi_a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_b}{\partial x^\nu} \frac{\partial \xi_c}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi_d}{\partial x^\sigma} \mathcal{P}_{abcd}(\xi). \quad (19.8.10)$$

Отсюда следует, что Ω также и точна, т. е. имеет обращающуюся в нуль внешнюю производную:

$$(\partial/\partial \xi_{[f}) \Omega_{abcde]}(\xi) = 0. \quad (19.8.11)$$

При условии, что 4-форма $\mathcal{P}_{abcd}(\xi)$ также G -инвариантна, функционал (19.8.10) является одним из обычных явно G -инвариантных слагаемых в действии, обсуждавшихся в трех предыдущих разделах. Аномальные слагаемые в действии возникают из-за возможности того, что хотя каждое слагаемое в $\Omega(y)$ G -инвариантно и является внешней производной 4-формы, некоторые слагаемые могут не быть внешними производными от G -инвариантных 4-форм. Следовательно новые слагаемые в действии можно отождествить с замкнутыми G -инвариантными 5-формами, которые независимы в том смысле, что ни одна их действительная линейная комбинация не является внешней производной от G -инвариантной 4-формы. Эти слагаемые

известны в математике как генераторы группы когомологий де Рама $H^5(G/H; \mathbf{R})$. (Групповым умножением здесь является простое сложение.) Группы когомологий де Рама вычислены для многообразий с разной топологией ⁴⁶. В частности, группа когомологий $H^5(SU(N) \times SU(N)/SU(N); \mathbf{R})$ имеет единственный генератор, даваемый выражением (19.8.1). Таким образом, не зная ничего о лежащей в основе теории кварков и глюонов, можно кое-что узнать об аномальных слагаемых в действии для голдстоуновских бозонов, с точностью до значения целого числа n . В разделе 22.7 мы увидим, что в $SU(N_c)$ калибровочных теориях это число равно числу цветов N_c , так что в квантовой хромодинамике $n = 3$.

19.9. Ненарушенные симметрии

Выше мы видели, каким образом можно вывести свойства голдстоуновских бозонов и их низкоэнергетических взаимодействий из предположения, что теория инвариантна (или приближенно инвариантна) относительно группы G , спонтанно нарушенной до подгруппы H . Однако применяя эти методы к случаям, когда G есть $SU(2) \times SU(2)$ или $SU(3) \times SU(3)$, мы должны были обратиться к эксперименту, чтобы установить путь нарушения симметрии от $SU(2) \times SU(2)$ или $SU(3) \times SU(3)$ к их некиральным $SU(2)$ или $SU(3)$ подгруппам. В разделе 22.5 мы покажем, что в квантовой хромодинамике $SU(3) \times SU(3)$ симметрия для безмассовых u -, d - и s -кварков должна быть, на самом деле, спонтанно нарушена, но значительно труднее показать на основе квантовой хромодинамики, что $SU(2) \times SU(2)$ симметрия, при условии, что только u и d не имеют массы, также спонтанно нарушена *. С другой стороны, существуют инту-

* Вайнгартен ⁴⁸ использовал решеточные методы, чтобы показать, что независимо от того, нарушена или нет киральная симметрия, легчайшая частица в квантовой хромодинамике с безмассовыми u - и d -кварками должна иметь квантовые числа пиона. Как мы увидим в разделе 22.5, из существования в квантовой хромодинамике аномалий, обязанных фермионным петлям, вместе с предположением о захвате кварков вытекает, что некоторые адроны не имеют массы, откуда следует, что пион безмассовый. Это является сильным доводом в пользу спонтанного нарушения киральной симметрии.

итивные аргументы в пользу того, что их некиральные подгруппы $SU(2)$ или $SU(3)$ *ненарушены*. Эти аргументы основаны на предположении, известном как *жесткое массовое условие* ⁴⁸, утверждающем, что составные частицы не могут быть безмассовыми, если те частицы, из которых они состоят, массивны. Некиральные симметрии, вроде сохранения изоспина, не нарушаются, если придать кваркам равные массы. Поэтому, если они нарушались бы спонтанно, у нас получились бы безмассовые голдстоуновские бозоны, составленные из массивных кварков, что противоречит условию устойчивости масс. Ниже мы изложим доказательство Вафы и Виттена ⁴⁹, что в калибровочных теориях типа квантовой хромодинамики не могут быть спонтанно нарушены те симметрии, которые не нарушаются введением масс кварков. Этот результат представляет больше чем академический интерес — как мы увидим в разделе 21.4, не исключено, что спонтанное нарушение электрослабых калибровочных симметрий описывается теорией «техницвета», аналогичной квантовой хромодинамике, и при проверке этой идеи важно знать, какие симметрии в этой теории остаются ненарушенными.

Рассмотрим калибровочную теорию типа квантовой хромодинамики с некоторым числом фермионных «ароматов» в одинаковых представлениях калибровочной группы. Если у всех фермионов есть массы, теория будет инвариантной относительно унитарных глобальных некиральных преобразований фермионных ароматов, коммутирующих с массовой матрицей фермионов. Например, если n_1 фермионов вырождены с общей массой m_1 , n_2 фермионов вырождены с некоторой другой массой m_2 и т. д., то такой глобальной группой симметрии будет $U(n_1) \times U(n_2) \times \dots$ (В частном случае, когда нет вырождений, получается глобальная симметрия относительно $U(1) \times U(1) \times \dots$. Примером может служить сохранение барионного числа, странности и т. п. в квантовой хромодинамике.) *Эти симметрии не могут быть спонтанно нарушены.*

Для доказательства рассмотрим общую функцию Грина для r фермионных и антифермионных полей. * В формализме функцио-

* В оригинальной работе Вафа и Виттен ⁴⁹ сначала доказали отсутствие нарушения симметрии в случае $r = 1$ и $x = y$, затем заметили, что отсутствие нарушения симметрии в этом вакуумном среднем не исключает возможности спонтанного нарушения симметрии в других функциях Грина, после чего перешли к другим методам доказательства.

нальных интегралов она имеет вид *

$$\begin{aligned} & \left\langle T \left\{ \Psi_{u_1 k_1}(x_1) \dots \Psi_{u_r k_r}(x_r) \Psi_{v_1 l_1}^\dagger(y_1) \dots \Psi_{v_r l_r}^\dagger(y_r) \right\} \right\rangle_{VAC} \\ &= \frac{1}{Z} \int [dA] [d\psi] [d\psi^\dagger] \Psi_{u_1 k_1}(x_1) \dots \Psi_{u_r k_r}(x_r) \Psi_{v_1 l_1}^\dagger \dots \Psi_{v_r l_r}^\dagger(y_r) \\ & \quad \times \exp(iI_{\text{калибр}}[A] + iI_{\text{Дирак}}[\psi, \psi^\dagger; A]), \end{aligned} \quad (19.9.1)$$

где $k_1, \dots, k_r$ и $l_1, \dots, l_r$ — дираковские спинорные индексы, $u_1, \dots, u_r$ и $v_1, \dots, v_r$ — индексы ароматов, $I_{\text{калибр}}[A]$ — действие для чисто калибровочной теории, $I_{\text{Дирак}}[\psi, \psi^\dagger, A]$ — действие для дираковского поля в присутствии калибровочного поля $A_a^\mu(x)$, а Z — амплитуда перехода вакуум-вакуум:

$$Z \equiv \int [dA] [d\psi] [d\psi^\dagger] \exp(iI_{\text{калибр}}[A] + iI_{\text{Дирак}}[\psi, \psi^\dagger; A]). \quad (19.9.2)$$

Ниже необходимо работать в евклидовом пространстве-времени, где все величины $x^4 = x_4 = ix^0$, $y^4 = y_4 = iy^0$ и $A_a^4 = A_{4a} = iA_{0a}$ действительны. (См. приложение А к гл. 23.) В этом случае дираковское действие равно

$$I_{\text{Дирак}}[\psi, \psi^\dagger; A] = i \int d^3x \int d^4x \psi^\dagger [D + M] \psi, \quad (19.9.3)$$

где M — фермионная массовая матрица, а D — евклидова калибровочно ковариантная производная, свернутая с евклидовыми дираковскими матрицами, равна

$$D = \sum_{i=1}^4 (\partial_i - it^\alpha A_{i\alpha}) \gamma_i, \quad (19.9.4)$$

* Как мы видели в разделе 15.5, и числитель, и знаменатель пропорциональны бесконечному объему калибровочной группы, который сокращается в отношении (19.9.1). Наличие такого бесконечного множителя несколько снижает строгость последующих рассуждений, но если бы мы устранили этот множитель, введя духи, то некоторые шаги ниже, зависящие от положительности действия, породили бы ряд трудностей. Один из способов рассмотрения этой проблемы состоит в замене пространственно-временного континуума конечной решеткой точек. В этом случае калибровочная группа имеет конечный объем, и не требуется ни фиксации калибровки, ни введения духовых полей.

где, как обычно, $\gamma_4 = i\gamma^0$. Поскольку действие квадратично по фермионным полям, можно явно взять интеграл по этим полям:

$$\begin{aligned} & \left\langle T \left\{ \Psi_{u_1 k_1}(x_1) \dots \Psi_{u_r k_r}(x_r) \Psi_{v_1 l_1}^\dagger(y_1) \dots \Psi_{v_r k_r}^\dagger(y_r) \right\} \right\rangle_{VAC} \\ &= \frac{1}{Z} \int [dA] \text{Det}(\mathcal{D} + M) \exp(iI_{\text{калибр}}[A]) \\ & \quad \times \left[(\mathcal{D} + M)_{x_1 u_1 k_1, y_1 v_1 l_1}^{-1} \dots (\mathcal{D} + M)_{x_r u_r k_r, y_r v_r l_r}^{-1} \pm \text{перестановки} \right], \end{aligned} \quad (19.9.5)$$

где « $\pm$ перестановки» означает, что нужно просуммировать по всем $r!$ перестановкам полей Ψ , беря знак «минус» для нечетных перестановок, а

$$Z = \int [dA] \text{Det}(\mathcal{D} + M) \exp(iI_{\text{калибр}}[A]). \quad (19.9.6)$$

Выражение (19.9.5) явно инвариантно относительно любого унитарного преобразования по индексам ароматов, коммутирующего с массовой матрицей M . Не имеет значения, какие непертурбативные эффекты порождаются функциональным интегралом по калибровочным полям и полям духов; эти поля инертны по отношению к обсуждаемым здесь симметриям, так что оставшийся функциональный интеграл в (19.9.5) не может разрушить эти симметрии*. Однако, чтобы это рассуждение было убедительным, следует показать, что выражение (19.9.5) хорошо определено.

Это не просто академический вопрос математической строгости. Как мы видели в разделе 19.1, признаком того, что симметрия спонтанно не нарушена, является не только то, что основное состояние инвариантно относительно преобразований симметрии, но и то, что симметрия основного состояния устойчива относительно малых возмущений. Если нарушить симметрии M , добавив малое возмущение δM , и если при этом выражение (19.9.5) становится сингулярным при $\delta M \rightarrow 0$, тогда множители в δM в нарушающих

* Труднее показать, что в квантовой хромодинамике с массивными кварками спонтанно не нарушаются симметрии P , C и T , поскольку эти симметрии нетривиально действуют на калибровочные поля. Вафа и Виттен⁵⁰ использовали методику из работы⁴⁹, чтобы показать, что в квантовой хромодинамике P спонтанно не нарушается.

симметрию матричных элементах могут сократиться сингулярностями в матричных элементах при $\delta M = 0$. Именно это и происходит в случае киральных симметрий, возникающих в пределе, когда некоторые собственные значения M обращаются в нуль. В этом случае, когда достигается симметричный предел нулевой массы, массовые множители в числителях нарушающих симметрию вакуумных средних сокращаются с массовыми множителями в знаменателях пропагаторов во всех точках, где имеет нулевые собственные значения. По этой причине приводимые рассуждения применимы только к некиральным симметриям в теориях со всеми ненулевыми собственными значениями массовых матриц M .

Чтобы в этом случае установить ограничения на матричный элемент (19.9.5), заметим сначала, что дифференциальный оператор (19.9.4) антиэрмитов, так что до тех пор, пока эрмитова матрица M не имеет нулевых собственных значений, имеет хорошо определенный обратный оператор. Необходимо еще показать, что остающееся интегрирование по калибровочным полям в (19.9.5), включая то, которое содержится в Z , не делает это выражение сингулярным, когда M удовлетворяет условиям симметрии, например, условию, что в случае $U(n)$ симметрии n собственных значений этой матрицы равны. Как будет видно, это обеспечивает то, что при добавлении к инвариантной по отношению к некоторому глобальному преобразованию симметрии фермионной массовой матрице M нарушающего эту симметрию малого слагаемого δM , изменение вакуумного среднего (19.9.4) относительно этого преобразования симметрии обращается в нуль в пределе $\delta M \rightarrow 0$.

Доказательство того, что функции Грина в координатном пространстве (19.9.5) несингулярны, затруднительно, поэтому рассмотрим матричные элементы сглаженных полей

$$\Psi_u[f] \equiv \int d^4x f^{k\dagger}(x) \Psi_{uk}(x), \quad (19.9.7)$$

где $f^k(x)$ — произвольные гладкие квадратично интегрируемые функции. Тогда выражение (19.9.5) принимает вид

$$\left\langle T \left\{ \Psi_{u_1}[f_1] \dots \Psi_{u_r}[f_r] \Psi_{v_1}^\dagger[g_1] \dots \Psi_{v_r}^\dagger[g_r] \right\} \right\rangle_{\text{VAC}} \quad (19.9.8)$$

$$= \frac{1}{Z} \int [dA] \text{Det}(\mathcal{D} + M) \exp(iI_{\text{калибр}}[A]) \\ \times \left[(\mathcal{D} + M)_{f_1 u_1, g_1 v_1}^{-1} \dots (\mathcal{D} + M)_{f_r u_r, g_r v_r}^{-1} \pm \text{перестановки} \right],$$

где

$$(\mathcal{D} + M)_{fu, gv}^{-1} \equiv \int d^4 x \int d^4 y f^{k\dagger}(x) (\mathcal{D} + M)_{xuk, yvl}^{-1} g^l(y). \quad (19.9.9)$$

В этом базисе фермионные пропагаторы для данного калибровочного поля не только хорошо определены, но и равномерно ограничены в $A_a^\mu(x)$ *:

$$\left| (\mathcal{D} + M)_{fu, gv}^{-1} \right| \leq \sum_a \frac{1}{|m_a|}, \quad (19.9.10)$$

где m_a — собственные значения M , и для удобства мы теперь нормируем функции $f_i(x)$ и $g_j(y)$ так, что

$$\int f_i^\dagger(x) f_i(x) d^4 x = \int g_j^\dagger(x) g_j(x) d^4 x = 1. \quad (19.9.11)$$

* Чтобы увидеть это, можно разложить собственные векторы M :

$$M_{uv} c_v^a = m_a c_u^a, \quad c_u^{a*} c_u^b = \delta_{ab}$$

и, применяя прием Вафы и Виттена ⁴⁹, записать (19.9.9) как

$$(\mathcal{D} + M)_{fu, gv}^{-1} = \sum_a c_u^{a*} c_u^b \int d^3 x \int d^4 y f^{k\dagger}(x) (\mathcal{D} + m_a)_{xk, yl}^{-1} g^l(y) \\ = \sum_a \pm c_u^{a*} c_u^b \int_0^\infty \exp(-|m_a| \tau) \int d^3 x \int d^4 y f^{k\dagger}(x) (\exp(\mp \tau \mathcal{D}))_{xk, yl} g^l(y),$$

где $\pm$ — знак m_a . Матрица $c_u^{a*} c_u^a$ и оператор $(\exp(\mp \tau \mathcal{D}))_{xk, yl}$ унитарны, так что

$$\left| c_u^{a*} c_u^b \int d^4 x \int d^4 y f^{k\dagger}(x) (\exp(\mp \tau \mathcal{D}))_{xk, yl} g^l(y) \right|^2 \\ \leq \int d^4 x |f(x)|^2 \int d^4 y |g(y)|^2 = 1.$$

Используя это внутри интеграла, приходим к (19.9.10).

(Условие суммирования здесь не соблюдается.) Кроме того, весовая функция для среднего по калибровочным полям положительна *

$$\begin{aligned} & \text{Det}(\mathcal{D} + M) \exp(iI_{\text{калибр}}[A]) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{4} \int d^3x \int d^4x \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 F_{ij}^2\right) \times \sqrt{\text{Det}[(iD)^2 + M^2]}. \end{aligned} \quad (19.9.12)$$

При положительной весовой функции среднее от любой функции ограничено границей этой функции. Подставляя ограничение (19.9.10) в (19.9.8), находим, что матричный элемент ограничен неравенством

$$\left\langle T\left\{\Psi_{u_1}[f_1] \dots \Psi_{u_r}[f_r] \Psi_{v_1}^\dagger[g_1] \dots \Psi_{v_r}^\dagger[g_r]\right\}\right\rangle_{\text{VAC}} \leq r! \left[\sum_a \frac{1}{|m_a|}\right]^r. \quad (19.9.13)$$

Следовательно, когда нарушающие симметрию члены δM в M стремятся к нулю, не возникает сингулярностей, которые могли бы сократить множители δM . Чтобы увидеть это более явно, можно использовать те же приемы, чтобы показать, что если мы возмущаем M за счет малого нарушающего симметрию слагаемого δM , то слагаемое в (19.9.8) первого порядка по δM ограничено неравенством

$$\begin{aligned} & \left| \delta \left\langle T\left\{\Psi_{u_1}[f_1] \dots \Psi_{u_r}[f_r] \Psi_{v_1}^\dagger[g_1] \dots \Psi_{v_r}^\dagger[g_r]\right\}\right\rangle_{\text{VAC}} \right| \\ & \leq r r! \sum_{ab} \frac{|(\delta M)_{ab}|}{|m_a m_b|} \left[\sum_a \frac{1}{|m_a|}\right]^{r-1}. \end{aligned} \quad (19.9.14)$$

и это обращается в нуль при $\delta M \rightarrow 0$.

В реальном мире ни одна из масс кварков не равна нулю и эти массы не вырождены, поэтому из предыдущих рассуждений сразу же следует, что $U(1)$ симметрии типа сохранения барионного числа, странности и т. д. не нарушаются ни спонтанно, ни внутренне. Что касается других симметрий сильных взаимодей-

** В фермионном детерминанте мы используем то, что

$$\text{Det}(\mathcal{D} + M) = \text{Det} \gamma_5 (\mathcal{D} + M) \gamma_5 = \text{Det}(-\mathcal{D} + M).$$

ствий, здесь проблем больше. Эти симметрии были бы полностью ненарушенными, если бы кварки u , d или u , d , s имели бы равные ненулевые массы, однако, как мы видели в разделе 19.7, эти массы совершенно не вырождены. Изоспиновая и $SU(3)$ симметрии возникают от того, что массы кварков малы, а не равны. Это симметрии остаются ненарушенными, если придать двум или трем кваркам равные массы и сделать эти массы произвольно малыми, так что изоспин и $SU(3)$ будут хорошими симметриями в любом процессе, нечувствительном к малым массам кварков. Однако не все процессы нечувствительны к этим массам, поскольку для двух или трех безмассовых кварков пион или псевдоскалярный мезонный октет, к которому он принадлежит, становятся безмассовыми. В случае изоспина это не составляет проблемы, т. к. мы видели в 19.5, что пионный триплет остается вырожденным в первом порядке по массам кварков, даже если $m_u \neq m_d$. Для $SU(3)$ разности масс кварков порождают в первом порядке разности масс между пионом, каоном и эта-мезоном, так что в процессах, определяющихся одномезонными полюсами, *могут* проявляться большие отклонения от $SU(3)$.

19.10. Проблема $U(1)$

Успех квантовой хромодинамики в объяснении структуры симметрий сильных взаимодействий кажется, на первый взгляд, омраченным одним провалом. Как мы видели в разделе 19.5, нарушенная $SU(2) \times SU(2)$ симметрия сильных взаимодействий является естественным следствием малости масс u - и d -кварков. Однако лагранжиан квантовой хромодинамики с малыми массами u - и d -кварков обладает еще одной киральной симметрией⁵¹, а именно симметрией $U(1)_A$ относительно преобразований

$$u \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)u, \quad d \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)d. \quad (19.10.1)$$

Такая симметрия, если она не нарушена, приводила бы, как $SU(2) \times SU(2)$, к дублированию адронного спектра по четности. Однако такого дублирования не наблюдается. С другой стороны, нарушенная $U(1)_A$ симметрия требовала бы существования изоскалярного 0^- голдстоуновского бозона с массой, сравнимой с массой пиона,

и такой бозон также не наблюдается. Мезон η действительно является изоскалярным 0^- бозоном, но он значительно тяжелее пиона и, как мы видели в разделе 19.7, хорошо интерпретируется как один из голдстоуновских бозонов $SU(3) \times SU(3)$. Если рассматривать как сравнительно легкий не только u - и d -, но и s -кварк, то лагранжиан квантовой хромодинамики будет в дополнение к $SU(3) \times SU(3)$ обладать $U(1)$ киральной симметрией относительно преобразований

$$u \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)u, \quad d \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)d, \quad s \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)s. \quad (19.10.2)$$

Спонтанное нарушение такой симметрии требовало бы существования *двух* изоскалярных 0^- мезонов: один из них η , а другой — с массой, сравнимой с массой пиона.

Это предсказание можно уточнить.⁵² Если включить преобразование (19.10.2) в число спонтанно нарушенных симметрий безмассовой квантовой хромодинамики, то в присутствии масс кварков мы получим слагаемое (19.7.12)

$$\mathcal{G}_{\text{масс}} = -\bar{q}M_q q = -\bar{\tilde{q}}e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi}M_q e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi}\tilde{q}, \quad (19.10.3)$$

где вновь

$$M_q = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix}, \quad (19.10.4)$$

но B включает поле голдстоуновского бозона ζ для нарушенной симметрии (19.10.2):

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & K^0 \\ \bar{K}^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^0 \end{bmatrix} + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta} \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix}. \quad (19.10.5)$$

где F_ζ — неизвестная константа связи $U(1)_A$ голдстоуновского бозона с соответствующим током (множитель $\sqrt{3}$ включен для дальнейшего удобства). Можно снова использовать ненарушенную $SU(3)$ симметрию, чтобы записать среднее по вакууму от кварковой билинейной формы в виде (19.7.14), после чего, разлагая по степеням бозонных полей, мы находим отвечающее массам голдстоуновских бозонов слагаемое в лагранжиане в виде:

$$\begin{aligned}
 -\frac{v}{F_\pi^2} \text{Tr}\{B, \{b, M_q\}\} = & -\frac{v}{F_\pi^2} \left[4m_u \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta} \zeta \right)^2 \right. \\
 & + 4(m_u + m_d) \pi^+ \pi^- + 4(m_u + m_s) K^+ \bar{K}^- \\
 & + 4m_d \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta} \zeta \right)^2 \\
 & \left. + 4(m_d + m_s) K^0 \bar{K}^0 + 4m_s \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \eta^0 + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta} \zeta \right)^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{19.10.6}$$

Массы заряженных и странных мезонов такие же как и ранее, но теперь массовая матрица нейтральных нестранных мезонов имеет вид

$$M_0^2 = 8v \begin{bmatrix} \frac{m_u + m_d}{2F_\pi^2} & \frac{m_u - m_d}{2\sqrt{3}F_\pi^2} & \frac{m_u - m_d}{\sqrt{6}F_\pi F_\zeta} \\ \frac{m_u - m_d}{2\sqrt{3}F_\pi^2} & \frac{m_u + m_d + 4m_s}{6F_\pi^2} & \frac{m_u + m_d - 2m_s}{3\sqrt{2}F_\pi F_\zeta} \\ \frac{m_u - m_d}{\sqrt{6}F_\pi F_\zeta} & \frac{m_u + m_d - 2m_s}{3\sqrt{2}F_\pi F_\zeta} & \frac{m_u + m_d + m_s}{3F_\zeta^2} \end{bmatrix}. \tag{19.10.7}$$

где строки и столбцы указаны в порядке π^0, η^0, ζ .

В пределе, когда m_u и m_d равны нулю, эта матрица имеет два собственных вектора с нулевым собственным значением

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_b = \frac{1}{\sqrt{F_\pi^2 + F_\zeta^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ F_\pi \\ \sqrt{2}F_\zeta \end{pmatrix}. \tag{19.10.8}$$

В таком ортонормированном базисе матрица квадратов масс в первом порядке по m_u и m_d имеет вид

$$m_{aa}^2 \simeq u_a^T M_o^2 u_a = \frac{4v(m_u + m_d)}{F_\pi^2}, \quad (19.10.9)$$

$$m_{bb}^2 \simeq u_b^T M_o^2 u_b = \frac{12v(m_u + m_d)}{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}, \quad (19.10.10)$$

$$m_{ab}^2 = m_{ba}^2 \simeq \frac{\sqrt{3}v(m_u - m_d)}{2F_\pi \sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}}. \quad (19.10.11)$$

Наличие недиагонального члена (19.10.11) приводит к уменьшению произведения собственных значений на пренебрежимо малое отношение $(m_u - m_d)^2 / 64(m_u + m_d)^2$, оставляя, конечно, неизменной сумму собственных значений, так что в хорошем приближении собственные значения даются диагональными элементами (19.10.9) и (19.10.10). Сравнивая (19.10.9) с (19.7.16), видим, что частица, отвечающая собственному вектору u_a , это π^0 . Другая частица, соответствующая u_b , имеет массу

$$m_b \simeq \sqrt{m_{bb}^2} \simeq \frac{\sqrt{3}m_\pi F_\pi}{\sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}} \leq \sqrt{3}m_\pi. \quad (19.10.12)$$

Таким образом, нарушенная $U(1)_A$ симметрия требует вдобавок к самому пиону существования нейтрального псевдоскалярного голдстоуновского бозона массой меньше, чем $\sqrt{3}m_\pi$. Едва ли нужно доказывать, что такой сильновзаимодействующей частицы не существует*. В разделе 23.5 мы увидим, что эта проблема в конце

* Заметим, что, беря $F_\zeta \gg F_\pi$, можно придать дополнительному нейтральному скаляру очень малую массу, но тогда его взаимодействия были бы столь слабы, что он мог бы легко избежать детектирования. Маловероятно, что очень большое отношение F_π к F_ζ могло бы возникнуть в квантовой хромодинамике, но нечто похожее возникает в теориях с дополнительными полевыми переменными, которые были предложены, чтобы избежать нарушения четности инстантонами (см. раздел 23.6).

концов была разрешена открытием непертурбативных эффектов, нарушающих дополнительную симметрию $U(1)_A$.

Задачи

1. Примените общую теорию нарушенных глобальных симметрий к случаю, когда группа симметрии $SO(3)$ (с генераторами t_1, t_2, t_3) спонтанно нарушается до своей $SO(2)$ подгруппы (с генератором t_3). Как преобразуются поля голдстоуновских бозонов относительно бесконечно малых преобразований $SO(3)$? (Используйте экспоненциальную параметризацию пространства смежных классов $SO(3)/SO(2)$.) Вычислите ковариантную производную $D_{a\mu}$ поля голдстоуновских бозонов и общего поля с ненулевым значением q генератора ненарушенной симметрии t_3 . Как выглядит самый общий $SO(3)$ -инвариантный лагранжиан, включающий только голдстоуновские бозоны и не содержащий более двух производных? Используйте этот лагранжиан, чтобы вычислить слагаемые в инвариантной амплитуде упругого рассеяния голдстоуновских бозонов в низшем порядке по их энергии. Как выглядит самый общий $SO(3)$ -инвариантный лагранжиан с двумя неголдстоуновскими полями и не более чем одной производной? Как выглядит самая общая функция, зависящая только от полей голдстоуновских бозонов (без производных) и преобразующаяся как третья компонента 3-вектора $SO(3)$? Добавьте это слагаемое в лагранжиан, выбрав коэффициент так, чтобы голдстоуновский бозон приобрел массу m , и заново рассчитайте амплитуду рассеяния голдстоуновских бозонов в низшем порядке.
2. Рассмотрите теорию с $SU(N)$ глобальной симметрией, спонтанно нарушенную до $SU(N-1)$. Предположим, мы добавляем малое нарушающее симметрию возмущение, принадлежащее фундаментальному представлению N группы $SU(N)$. С учетом подстройки вакуума какая группа симметрии полностью ненарушена? Что можно сказать о случае, когда нарушающее симметрию возмущение принадлежит к присоединенному представлению $SU(N)$?

3. В однопетлевом приближении рассчитайте амплитуду пион-пионного рассеяния с учетом конечной массы пиона.
4. Выведите «правило сумм Адлера», являющееся аналогом правила сумм Адлера–Вайсбергера для случая пион-пионного рассеяния.
5. Вычислите свойства преобразований пионного поля ξ_a относительно преобразований группы $SU(2) \times SU(2)$ в случае, когда смежные классы $SU(2) \times SU(2)/SU(2)$ параметризованы как $\exp(i\xi_a x_a)$.
6. Используйте формулу (19.7.31) и $SU(3)$ симметрию, чтобы вывести соотношение (19.7.32).

Список литературы

1. Coleman, S. *Secret symmetry: an introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields*. In: *Aspects of Symmetry. Selected Erice Lectures of Sidney Coleman* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
2. Titchmarsh, E.C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford University Press, Oxford, 1937), Sec. 1.4.
3. Goldstone, J., *Nuovo Cimento*, **9**, 154 (1961).
4. Nambu, Y., *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 380 (1960).
5. Goldstone, J., Salam, A., and Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **127**, 965 (1962).
6. Adler, S., *Phys. Rev.*, **137**, B1022 (1965).
7. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 1698 (1972).
8. Dashen, R., *Phys. Rev.*, **183**, 1245 (1969). Поправки к этому соотношению см.: Donoghue, J.F., Holstein, B.R., and Wyler,

- D., *Phys. Rev.*, **D47**, 2089 (1993); Bijmens, J., *Phys. Lett.*, **B306**, 343 (1993); Maltman, K. and Kotchan, D., *Mod. Phys. Lett.*, **A5**, 2457 (1990); Urech, R., *Nucl. Phys.*, **B433**, 234 (1995); Baur, R. and Urech, R., Zurich-Karlsruhe preprint ZU-TH 22/95, TTP95-31, hep-ph/9508393 (1995).
9. Обзор см.: Towner, I.S. et al., Chalk River preprint nucl-th/9507005 (1995).
 10. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **112**, 1375 (1958).
 11. Goldberger, M.L. and Treiman, S., *Phys. Rev.*, **111**, 1375 (1958).
 12. Ericson, T. and Weise, W., *Pions and Nuclei* (Clarendon Press, Oxford, 1988).
 13. Ericson, T. et al., CERN preprint CERN-TH/95-50 (1995).
 14. Das, T., Guralnik, G.S., Matur, V.S. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 759 (1967).
 15. Bernstein, J., Fubini, S., Gell-Mann, M., and Thirring, W., *Nuovo Cimento*, **17**, 757 (1960); Gell-Mann, M. and Lévy, M., [24]; Chou, K.-C., *Soviet Physics JETP*, **12**, 492 (1961).
 16. Nambu, Y., *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 380 (1961).
 17. Nambu, Y. and Jona-Lasinio, G., *Phys. Rev.*, **122**, 345 (1961).
 18. Nambu, Y. and Lurie, D., *Phys. Rev.*, **125**, 1429 (1962); Nambu, Y. and Shrauner, E., *Phys. Rev.*, **125**, 1429 (1962).
 19. Adler, S.L., *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 1051 (1965); *Phys. Rev.*, **140**, B736 (1965); Weisberger, W.I., *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 1047 (1965); *Phys. Rev.*, **143**, 1302 (1965). Влияние конечной массы пиона было другим способом учтено в [27] путем комбинации результатов алгебры токов для длин пион-нуклонного рассеяния с правилом сумм для длин рассеяния, выведенным из дисперсионных соотношений для рассеяния вперед в работах: Goldberger,

- M.L., Miyazawa, H., and Oehme, R., *Phys. Rev.*, **99**, 986 (1955); Goldberger, M.L., in *Dispersion Relations and Elementary Particles* (Wiley, New York, 1960), p. 146.
20. Weinberg, S., Current Algebra — Rapporteur's Report, in *Proc. Int. Conf. on High Energy Physics, Vienna, 1968* (CERN, Geneva, 1968), p. 253.
21. Gell-Mann, M., *Physics*, **1**, 63 (1964).
22. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 879 (1966).
23. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 188 (1967).
24. Gell-Mann, M. and Lévy, M., *Nuovo Cimento*, **16**, 705 (1960).
25. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **166**, 1568 (1968).
26. Weinberg, S., *Physica*, **96A**, 327 (1979).
27. Эти длины рассеяния впервые были вычислены с помощью техники алгебры токов в работе: Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 616 (1966).
28. Обзор см.: Donoghue, J.F., Golowich, E., and Holstein, B.R., *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992), sec. VI-4. Измерения сдвига энергии и ширины $1s$ состояния атома p^-p за счет сильного взаимодействия привели к результатам: $a(\pi^-p \rightarrow \pi^-p) = \frac{2}{3}a_{1/2} + \frac{1}{3}a_{3/2} = 0,0885(9)m_\pi^{-1}$ и $a(\pi^-p \rightarrow \pi^0n) = \frac{1}{3}\sqrt{2}(a_3 - a_1) = -0,136(10)m_\pi^{-1}$; Sigg, D. et al., preprint ETHZ-IPP PR-95-4, July 1995.
29. Weinberg, S., *Phys. Lett.*, **B251**, 288 (1990); *Nucl Phys.*, **B363**, 3 (1991); *Phys. Lett.*, **B295**, 114 (1992); Ordóñez, C., and van Kolck, U., *Phys. Lett.*, **B291**, 459 (1992); Ordóñez, C., Ray, L., and van Kolck, U., *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1982 (1994); van Kolck, U., *Phys. Rev.*, **C49**, 2932 (1994); van Kolck, U., Friar, J., and Goldman, T., *Phys. Lett. B* (to be published). Обзор данного подхода к ядерным силам см.: Ordóñez, C., Ray, L., and van Kolck, nucl-th/

- 9511380; Friar, J., *Few-Body Systems Suppl.*, **99**, 1 (1996). Применение этой техники к связанным ядерным процессам см.: Park, T.-S., Min, D.-P., and Rho, M., *Phys. Rep.*, **233**, 341 (1993); Beane, S.R., Lee, C.Y., and van Kolck, U., *Phys. Rev.*, **C52**, 2915 (1995).
- 30.** Weinberg, S., [27]. Длины пион-нуклонного рассеяния были независимо рассчитаны в работе: Tomozawa, Y., *Nuovo Cimento*, **46A**, 707 (1966).
- 30a.** Adler, S.L., *Phys. Rev.*, **140**, B736 (1965).
- 31.** Coleman, S., Wess, J., and Zumino, B., *Phys. Rev.*, **177**, 2239 (1969); Callan, C.G., Coleman, S., Wess, J., and Zumino, B., *Phys. Rev.*, **177**, 2247 (1969).
- 32.** Palais, R.S., *J. Math. Mech.*, **6**, 673 (1957); Mostow, G.D., *Annals of Math.*, **65**, 432 (1957).
- 32a.** Обсуждение других возможностей см.: Weinberg, S., *Physica Scripta*, **21**, 773 (1980).
- 33.** Gell-Mann, M., Cal. Tech. Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (1961), неопубликовано. Эта работа воспроизведена вместе другими статьями по SU(3) симметрии в сборнике: Gell-Mann, M. and Ne'eman, Y., *The Eightfold Way* (Benjamin, New York, 1964).
- 34.** Ne'eman, Y., *Nucl. Phys.*, **26**, 222 (1961).
- 35.** Gell-Mann, M., Oakes, R.J., and Renner, B., *Phys. Rev.*, **175**, 2195 (1968); Glashow, S. and Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 224 (1968).
- 36.** Dashen, R., *Phys. Rev.*, **183**, 1245 (1969). Поправки были рассмотрены в работе: Langacker, P. and Pagels, H., *Phys. Rev.*, **D8**, 4620 (1973). Отсутствие электромагнитных поправок к массе π^0 было доказано в модели работы [17] в статье: Guralnik, G.S., *Nuovo Cimento*, **36**, 1002 (1965).

37. Weinberg, S., contribution to a Festschrift for I.I. Rabi, *Trans. N.Y. Acad. Sci.*, **38**, 185 (1977).
38. Gell-Mann, M. [33]; Okubo, S., *Progr. Theor. Phys.*, **27**, 949 (1962).
- 38a. Leutwyler, H., Bern-CERN preprint CERN-TH/96-44, hep-ph/9602366, to be published (1996).
- 38b. Donoghue, J.F., Golowich, E., and Holstein, B.R., [28].
39. Gasser, J. and Leutwyler, H., *Nucl. Phys.*, **B250**, 465 (1985); см. также: Gasser, J. and Leutwyler, H., *Ann. Phys.*, **158**, 142 (1984).
40. Обзоры см.: Leutwyler, H., in *Proc. XXVI Int. Conf. on High Energy Nuclear Physics*, Dallas, 1992, ed. J. Sanford (American Inst. of Physics, New York, 1993), p. 185; Meissner, U.G., *Rep. Progr. Phys.*, **56**, 903 (1993); Pich, A., Valencia preprint FTUV/95-4, February 1995; Bijnens, J., Ecker, G., and Gasser, J., in *The Daphne Physics Handbook*, Vol. 1, eds. L. Maiani, G. Pancheri, and N. Paver (INFN, Frascati, 1995), ch. 3 and 3.1; Ecker, G., preprint hep-ph/9501357, to be published in *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Vol. 35 (Pergamon Press, Oxford).
41. Coleman, S. and Glashow, S., *Phys. Rev. Lett.*, **6**, 423 (1961); Okubo, S., *Phys. Lett.*, **4**, 14 (1963).
42. Wess, J. and Zumino, B., *Phys. Lett.*, **37B**, 95 (1971).
43. Witten, E., *Nucl. Phys.*, **B223**, 422 (1983).
44. Bott, R. and Seely, R., *Comm. Math. Phys.*, **62**, 235 (1978).
45. D'Hoker, E. and Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D50**, R6050 (1994).
46. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, eds. S. Iyanaga and Y. Kawada (MIT Press, Cambridge, 1980); Greub, W., Halperin, S., and Vanstone, R., *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol. III (Academic Press, New York, 1976); Borel, A., *Ann. Math.*

- (2) **57**, 115 (1953); Borel, A., *Collected Papers*, Vol. I (Springer Verlag, Berlin, 1983).
47. Weingarten, D., *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 1830 (1983).
48. Preskill, J. and Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D24**, 1059 (1981). В этой работе была предложена модифицированная версия более ранних рассуждений 'т Хофта, который рассматривал предел больших масс кварков; см.: 't Hooft, G., in *Recent Developments in Gauge Theories*, eds. G. 't Hooft *et al.* (Plenum, New York, 1980); reprinted in *Dynamical Gauge Symmetry Breaking*, eds. E. Farhi and R. Jackiw (World Scientific, Singapore, 1982), and in G. 't Hooft, *Under the Spell of the Gauge Principle* (World Scientific, Singapore, 1994). См. также раздел 22.5.
49. Vafa, C. and Witten, E., *Nucl. Phys.*, **B234**, 173 (1984); *Commun. Math. Phys.*, **95**, 257 (1984).
50. Vafa, C. and Witten, E., *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 535 (1984).
51. Glashow, S.L., in *Hadrons and Their Interactions*, ed. A. Zichichi (Academic Press, New York, 1968); Glashow, S.L., Jackiw, R., and Shei, S.-S., *Phys. Rev.*, **187**, 1916 (1969); Gell-Mann, M., in *Proc. Third Topical Conf. on Part. Phys.*, eds. W.A. Simonds and S.F. Tuan (Western periodicals, Los Angeles, 1970); in *Elementary Particle Physics* (Springer-Verlag, Bonn, 1972); *Acta Phys. Austriaca Suppl.*, **IX**, 1972 (1972); Fritzsche, H. and Gell-Mann, M., in *Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics*, eds. J.D. Jackson and A. Roberts (Fermi Nat. Acc. Laboratory, Batavia, IL, 1972); *Phys. Lett.*, **47B**, 365 (1973).
52. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D11**, 3583 (1975).

Операторные разложения

Часто нам необходимо знать, как ведет себя амплитуда, если 4-импульс, вносимый одним оператором и уносимый другим, стремится к бесконечности, а 4-импульсы всех остальных внешних линий фиксированы. Например, в разделе 20.6 мы увидим, что полное сечение рассеяния электрона на начальном адроне H с образованием произвольных адронов в конечном состоянии определяется в силу соотношения унитарности линейной комбинацией (с известными коэффициентами) компонент амплитуды

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} \langle H | J^\mu(x) J^\nu(0) | H \rangle$$

где k — 4-импульс, передаваемый от электрона к адронам, а $J^\mu(x)$ — электромагнитный ток. В случае глубоконеупругого рассеяния электронов не запрещено стремление к бесконечности импульса k , вносимого одним оператором тока и уносимого другим. Аналогично, в разделе 20.5 при изучении предела больших импульсов для различных пропагаторов и выводе соответствующих правил сумм для спектральных функций мы столкнемся с вычислением предела при больших импульсах для похожих фурье-образов, с той разницей, что одно из адронных состояний $|H\rangle$ заменится на вакуум.

Если бы произведение операторов типа $J^\mu(x) J^\nu(0)$ было аналитичным по x^μ , то его фурье-образ падал бы экспоненциально при стремлении фурье-переменной k к бесконечности. Ведущие слагаемые в предельном выражении фурье-образа при больших импульсах возникают от сингулярностей произведения операторов при стремлении пространственно-временных аргументов друг к другу.

Изучение таких операторных произведений было начато в 1969 году Вильсоном ¹, поначалу как попытка сформулировать замену обычной квантовой теории поля. Как бывало и раньше (например, с дисперсионными соотношениями или с фейнмановскими диаграммными правилами), попытка обойти квантовую теорию поля привела к важным общим результатам, однако эти результаты лучше всего могут быть поняты как общие свойства квантовой теории поля.

Операторное разложение устанавливается в разделе 20.1. Стандартное доказательство этого разложения в рамках теории возмущений было дано Циммерманном ² в 1970 году. В разделе 20.1 мы предложим непertурбативный и более простой, хотя и менее строгий, вывод, основанный на функциональной формулировке теории поля. В разделе 20.2 изложен другой взгляд на разложение операторных произведений на языке потоков больших импульсов сквозь фейнмановские диаграммы, что позволит дать доказательство этого разложения в рамках теории возмущений.

Ряд свойств операторного разложения делает его особенно полезным для описания следствий теорий типа квантовой хромодинамики. Одно такое свойство, обсуждаемое в разделе 20.3, заключается в том, что функции, описывающие сингулярности в этом разложении, имеют зависимость от импульсов, определяемую ренормгрупповыми разложениями, так что в асимптотически свободных теориях они могут быть вычислены при больших значениях импульсов по теории возмущений. Другое свойство, обсуждаемое в разделе 20.4, заключается в том, что эти функции обладают полной симметрией лежащей в основе теории, и не изменяются в результате возможного спонтанного нарушения симметрии. Приложения рассматриваются в разделах 20.5 и 20.6.

20.1. Разложение: описание и вывод

Вильсон ¹ предположил, что сингулярная при $x \rightarrow y$ часть произведения $A(x)B(x)$ двух операторов дается суммой по другим локальным операторам

$$A(x)B(y) \rightarrow \sum_C F_C^{AB}(x-y)C(y), \quad (20.1.1)$$

где $F_{\mathcal{C}}^{AB}(x-y)$ — сингулярные s -числовые функции. Из размерного анализа следует, что $F_{\mathcal{C}}^{AB}(x-y)$ ведет себя при $x \rightarrow y$ как степень $d_{\mathcal{C}} - d_A - d_B$ разности $x - y$, где $d_{\mathcal{O}}$ — размерность оператора $\mathcal{O}$ в степенях массы или импульса. Поскольку $d_{\mathcal{O}}$ растет при добавлении полей или производных к оператору $\mathcal{O}$, степень сингулярности $F_{\mathcal{C}}^{AB}(x-y)$ для операторов $\mathcal{C}$ растущей сложности уменьшается. Примечательно то, что разложение операторного произведения является *операторным* соотношением; иначе говоря, применяя его к любому матричному элементу $\langle \beta | A(x) B(x) | \alpha \rangle$, мы получаем те же самые функции $F_{\mathcal{C}}^{AB}(x-y)$ для всех состояний $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$.

Именно ослабление сингулярности в (20.1.1) для операторов $\mathcal{C}(y)$ растущей сложности делает разложение полезным для заключений о поведении произведения $A(x)B(y)$ при $x \rightarrow y$. Приведенные выше простые аргументы, основанные на подсчете степеней, модифицируются эффектами перенормировки: разложение (20.1.1) должно быть сформулировано с помощью операторов, перенормированных на некотором масштабе m , после чего m войдет наряду с $x - y$ в коэффициентную функцию $F_{\mathcal{C}}^{AB}(x-y)$. В разделе 20.3 мы увидим, что в асимптотически свободных теориях $F_{\mathcal{C}}^{AB}(x-y)$ на самом деле ведет себя так, как предсказывает размерный анализ, т. е. как степень $d_{\mathcal{C}} - d_A - d_B$ разности $x - y$, только с точностью до степени логарифма $\ln(x-y)^2$. Похоже, что даже в более общих теориях сингулярности, связанные с различными операторами $\mathcal{C}(y)$, будут ослабляться с ростом сложности операторов.

В импульсном пространстве соответствующее утверждение означает, что при $k \rightarrow \infty$

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} A(x) B(0) \rightarrow \sum_{\mathcal{C}} V_{\mathcal{C}}^{AB}(k) C(0) \quad (20.1.2)$$

и соответственно

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} T\{A(x) B(0)\} \rightarrow \sum_{\mathcal{C}} U_{\mathcal{C}}^{AB}(k) C(0), \quad (20.1.3)$$

где $V_{\mathcal{C}}^{AB}(k)$ и $U_{\mathcal{C}}^{AB}(k)$ — функции k^μ , все быстрее падающие при больших k для все более и более сложных членов ряда.

Мы собираемся вывести обобщенную версию вильсоновского разложения, в которой одновременно устремляются к бесконечнос-

ти импульсы, проносимые любым числом операторов. Для этого рассмотрим функции Грина локальных операторов $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, и т. д., аргументы которых стремятся к точке x , а также других локальных операторов $B_1(y_1)$, $B_2(y_2)$, и т. д. с фиксированными аргументами:

$$\langle T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, B_1(y_1), B_2(y_2) \dots\} \rangle_0 \\ \int \left[\prod_{l,z} d\phi_l(z) \right] a_1(x_1) a_2(x_2) \dots b_1(y_1) b_2(y_2) \dots \exp(iI[\phi]), \quad (20.1.4)$$

где строчные буквы a и b указывают на замену полевых операторов в A и B на c -числовые поля ϕ . Окружим теперь точку x шаром $B(R)$ радиусом R , который много больше, чем расстояния между точками x_1 , x_2 и т. д., но много меньше, чем расстояние между x , y_1 , y_2 и т. д. Поскольку действие локально, его можно записать в виде

$$I = \int_{z \in B(R)} d^4z \mathcal{L}(z) + \int_{z \notin B(R)} d^4z \mathcal{L}(z). \quad (20.1.5)$$

После этого выражение (20.1.4) можно привести к виду

$$\langle T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, B_1(y_1), B_2(y_2) \dots\} \rangle_0 \\ = \int \left[\prod_{z \notin B(R), l} d\phi_l(z) \right] b_1(y_1) b_2(y_2) \dots \exp\left(i \int_{z \notin B(R)} d^4z \mathcal{L}(z)\right) \\ \times \int \left[\prod_{z \in B(R), l} d\phi_l(z) \right] a_1(x_1) a_2(x_2) \dots \exp\left(i \int_{z \in B(R)} d^4z \mathcal{L}(z)\right), \quad (20.1.6)$$

где функциональный интеграл по полям внутри шара связан граничным условием, что поля на поверхности шара гладко сшиваются с полями снаружи. Помимо этого граничного условия функциональный интеграл по полям внутри шара совершенно не зависит от поведения поля вне шара, так что интеграл по полям внутри шара можно выразить через значения полей и их производных на его поверхности, что, в свою очередь, можно записать через поля и их производные, экстраполированные снаружи шара во внутреннюю точку x . Если выразить этот интеграл в виде ряда по произведени-

ям * $o(x)$ c -числовых полей и их производных, экстраполированных в точку x , то коэффициенты могут быть только функциями $U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots)$ разностей координат. так как все точки y_1, y_2 и т. д. находятся далеко от шара $B(R)$, исключение этого шара из действия для полей вне шара не оказывает никакого влияния в пределе $R \rightarrow 0$, так что в этом пределе выражение (20.1.6) принимает при x_1, x_2 , и т. д., стремящимся к x , вид:

$$\begin{aligned} & T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, B_1(y_1), B_2(y_2) \dots\}_0 \\ & \rightarrow \int \left[\prod_{l, z} d\phi_l(z) \right] b_1(y_1) b_2(y_2) \dots \exp(i \int \mathcal{L}(z)) \\ & \quad \times \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) o(x) \\ & = \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) \langle T\{O(x), B_1(y_1), B_2(y_2) \dots\} \rangle_0 \end{aligned} \quad (20.1.7)$$

где $O(x)$ — квантово-механический оператор в гейзенберговском представлении, соответствующий $o(x)$. В частности, совершая фурье-преобразование по переменным y и умножая на соответствующие коэффициенты функции, получаем для произвольных состояний $|\alpha\rangle$ и $\langle\beta|$:

$$\langle\beta| T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots\} |\alpha\rangle \rightarrow \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) \langle\beta| O(x) |\alpha\rangle \quad (20.1.8)$$

Поскольку это верно для произвольных состояний, получаем обобщенную версию операторного разложения:

$$T\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots\} \rightarrow \sum_O U_O^{A_1, A_2, \dots}(x_1 - x, x_2 - x, \dots) O(x). \quad (20.1.9)$$

* Для того, чтобы коэффициенты такого ряда были конечны, эти произведения должны быть перенормированы умножением на подходящие бесконечные множители. Это станет яснее при выводе, представленном в следующем разделе.

20.2. Поток импульса *

Рассмотрим теперь простейший пример операторного разложения: асимптотическое поведение $(n+2)$ -точечной фейнмановской амплитуды в теории единственного действительного скалярного поля $\phi(x)$ массой m и плотностью лагранжиана взаимодействия $-g\phi^4/24$, когда большой 4-импульс k втекает по одной линии и вытекает по другой, а импульсы всех остальных внешних линий фиксированы. Мы получим в этом случае доказательство по теории возмущений вида главного члена операторного разложения, но истинной целью будет достижение более глубокого понимания того, каким образом потоки больших импульсов сквозь фейнмановские диаграммы приводят к такому разложению. В приложении к главе обсуждается расширение этих результатов на общий случай.

Определим величину $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$ как сумму всех связных диаграмм n -частичной амплитуды рассеяния, внешние линии которых соответствуют входящим импульсам k , $p-k$, и исходящим импульсам $p_1, \dots, p_n$. (Удобно считать далее, что $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$ включает пропагаторы внешних линий с импульсами k и $p-k$, но не с импульсами $p_1, \dots, p_n$.) Мы хотим показать, что в любом конечном порядке теории возмущений при $k \rightarrow \infty$

$$\Gamma(k; p_1 \dots p_n) \rightarrow U_{\phi^2}(k) F_{\phi^2}(p_1 \dots p_n) + O(k^{-5}), \quad (20.2.1)$$

где $U_{\phi^2}(k)$ есть сумма слагаемых порядка** k^{-4} , не зависящих от $p_1, \dots, p_n$, а $F_{\phi^2}(p_1 \dots p_n)$ — амплитуда, отвечающая диаграмме с n ϕ -линиями и включающая единственную ϕ^2 вершину, умноженная на подходящую константу перенормировки, которая делает эту амплитуду конечной. Поскольку $F_{\phi^2}(p_1 \dots p_n)$ — матричный элемент перенормированного оператора $(\phi^2)_R \equiv Z_{\phi^2} \phi^2(0)$, соотношение (20.2.1)

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

** Повсюду в этой главе, где утверждается, что амплитуда порядка k^4 , следует понимать, что при $k^r = kn^r$, где $k \rightarrow \infty$ и n^r — фиксированный 4-вектор, амплитуда стремится к пределу k^4 , умноженному на сумму степеней $\ln k$.

соответствует утверждению, что старший член в операторном разложении при $k \rightarrow \infty$ имеет вид *

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} T\{\phi_R(x)\phi_R(0)\}_C \rightarrow U_{\phi^2}(k)(\phi^2(0))_R. \quad (20.2.2)$$

При оценке асимптотического поведения фейнмановских амплитуд следует принимать во внимание, что в области интегрирования в импульсном пространстве существуют части, где некоторые внутренние линии переносят импульс того же порядка, что и стремящиеся к бесконечности импульсы внешних линий, а для остальных внутренних линий это не так. Вклад в $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$ от той части области интегрирования, которая соответствует линиям с импульсом k в какой-то поддиаграмме $\mathcal{S}$, имеет асимптотическое поведение порядка $k^{D_{\mathcal{S}}}$, где $D_{\mathcal{S}}$ – индекс поддиаграммы $\mathcal{S}$, вычисленный по правилам раздела 12.1. Если $\mathcal{S}$ имеет m внешних линий, связывающих эту поддиаграмму с остальной частью диаграммы, а также две внешние линии с импульсами k и $p - k$, то из выражения (12.1.8) находим: $D_{\mathcal{S}} = 4 - 2 - m - 4 = -2 - m$. (Слагаемое -4 возникает от двух пропагаторов линий с импульсами k и $p - k$, которые, по нашему определению, включены в $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$). Таким образом, асимптотическое поведение Γ определяется той частью интеграла по импульсному пространству, которая соответствует протеканию большого импульса k либо через всю диаграмму, либо через некоторую ее поддиаграмму, в зависимости от того, у какой из них наименьшее число внешних линий ³.

При $n = 0$ это всегда вся диаграмма; иными словами, доминирующий вклад в интеграл возникает от части области интегрирования, где каждая линия несет импульс порядка k , что приводит к асимптотическому поведению порядка k^{-2} . В этом случае единственным оператором в операторном разложении, дающим вклад в такой матричный элемент, является единичный оператор $C = 1$. При $n > 0$ такое слагаемое отброшено, поскольку в данный момент мы ограничились рассмотрением связанных диаграмм.

При $n = 2$ главный вклад возникает как от всей диаграммы, так и от поддиаграмм, в которых две внешние линии с импульсами

* Индекс C при хронологическом произведении указывает, что мы включили только связанные диаграммы.

k и $p - k$ связаны с двумя другими внешними линиями мостиком, состоящим из двух внутренних линий*, что дает асимптотическое поведение порядка k^{-4} . При $n \geq 4$ главный вклад возникает *только* от поддиаграмм, в которых две внешние линии с импульсами k и $p - k$ связаны с $n > 2$ другими внешними линиями мостиком, состоящим из двух внутренних линий, и это опять приводит к асимптотическому поведению порядка k^{-4} .

Анализ случаев $n = 2$ и $n \geq 4$ осложняется тем, что произвольная диаграмма может содержать несколько двухчастичных мостиков. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Определим $I(k, k', p)$ как сумму вкладов в $\Gamma(k; p_1, p_2)$ всех диаграмм, которые двухчастично неприводимы в том смысле, что две внешние линии с входящими импульсами k и $p - k$ не могут быть отделены от двух внешних линий с импульсами k' и $p - k'$ путем разрезания любой пары внутренних линий. Тогда выражение $\Gamma(k; k', p - k') - I(k, k', p)$ включает вклады диаграмм, которые могут быть разрезаны указанным образом, и поэтому может быть записано в виде (см. рис. 20.1)

$$\Gamma(k; k', p - k') - I(k, k', p) = \int d^4 k'' I(k, k'', p) \Gamma(k''; k', p - k'). \quad (20.2.3)$$

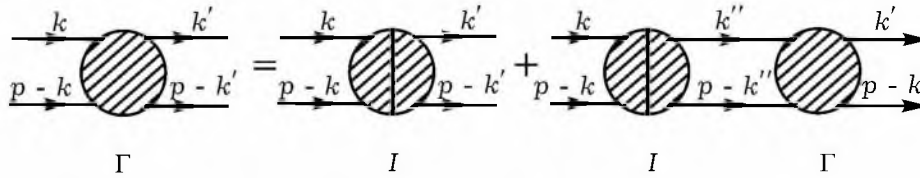


Рис. 20.1. Диаграммное представление интегрального уравнения (20.2.3). Заштрихованные диски, помеченные буквой G , соответствуют сумме всех связанных фейнмановских диаграмм с указанными внешними линиями, а заштрихованные диски с вертикальной чертой, помеченные буквой I , соответствуют сумме всех связанных диаграмм, для которых линии слева не могут быть отделены от линий справа разрезанием любой пары внешних линий.

* Случай $m = 1$ исключается, так как симметрия данной теории относительно преобразования $\phi \rightarrow -\phi$ запрещает диаграммы или поддиаграммы с нечетным числом внешних концов. Случай $m = 0$ исключен, поскольку, по определению, G возникает только из связанных диаграмм.

(Как и $\Gamma(k; k', p - k')$, ядро $I(k, k', p)$ включает пропагаторы для линий с импульсами k и $p - k$, однако, чтобы избежать двойного счета, не включает соответствующих пропагаторов для линий с импульсами k' и $p - k'$). Фейнмановские диаграммы для $I(k, k', p)$ в порядке g^2 показаны на рис. 20.2.

Чтобы оценить поведение правой части уравнения (20.2.3), рассмотрим сначала асимптотическое поведение ядра $I(k, k', p)$ при $k \rightarrow \infty$ и фиксированных k' и p . Оно определяется областью импульсного пространства, в которой все внутренние линии несут импульсы порядка k , что приводит к вкладу порядка k^{-4} , поскольку в любой другой области поддиаграмма, состоящая из внутренних линий, несущих импульсы порядка k , будет иметь более четырех внешних концов и поэтому будет давать вклад, убывающий быстрее, чем k^{-4} . Отсюда следует, что дифференцирование ядра $I(k, k', p)$ по k' или p будет приводить к появлению дополнительного множителя k^{-1} в асимптотическом поведении этого ядра. Следовательно при $k \rightarrow \infty$ и фиксированных k' и p имеем

$$I(k, k', p) \rightarrow I_\infty(k), \quad (20.2.4)$$

где $I_\infty(k)$ — функция только от k порядка k^{-4} .

К сожалению, нельзя просто заменить $I(k, k', p)$ в (20.2.3) на этот асимптотический предел, т. к. каким бы большим не был импульс k , большой вклад в интеграл дают значения k' порядка k . Чтобы справиться с этой проблемой, используем прием, основанный на математической индукции. В низшем порядке $\Gamma(k; k', p - k')$

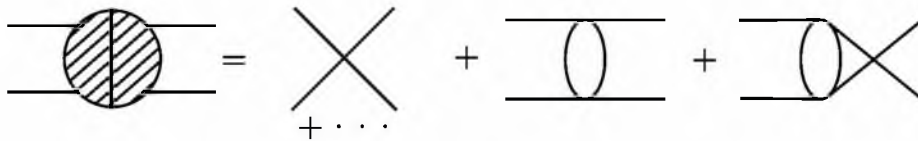


Рис. 20.2. Древесные и однопетлевые диаграммы, дающие вклад в ядро $I(k, k', p)$, в теории скалярного поля с взаимодействием Φ^4 .

дается единственной вершиной с двумя прикрепленными к ней голыми пропагаторами:

$$\Gamma(k; k', p - k') = \frac{ig}{(2\pi)^4(k^2 + m^2)((p - k)^2 + m^2)} \text{ (низший порядок),}$$

В этом случае легко проверить правильность асимптотического поведения вида (20.2.1). Поэтому предположим, что уравнение (20.2.1) при $n = 2$ выполняется вплоть до некоторого заданного порядка N по g , иными словами, вплоть до этого порядка асимптотическое поведение при $k \rightarrow \mu$ имеет вид

$$\Gamma(k; k', p - k') \rightarrow U_{\Phi^2}(k)F_{\Phi^2}(k', p - k') + O(k^{-5}), \quad (20.2.5)$$

и попробуем проверить, что такое же поведение имеет место в следующем порядке. Чтобы исключить вклад в интеграл в (20.2.3) от значений k' порядка k , перепишем (20.2.3) в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(k; k', p - k') &= I(k, k', p) \\ &+ \int d^4k'' I(k, k'', p) \left[\Gamma(k''; k', p - k') - U_{\Phi^2}(k'')F_{\Phi^2}(k', p - k') \right] \\ &+ F_{\Phi^2}(k', p - k') \int d^4k'' I(k, k'', p) U_{\Phi^2}(k''). \end{aligned} \quad (20.2.6)$$

Поскольку $I(k, k', p)$ по крайней мере первого порядка, можно в правой части (20.2.6) использовать формулу (20.2.5). Отсюда во втором слагаемом в правой части область интегрирования, в которой k'' порядка k , дает вклад, обращающийся в нуль как k^{-4+4-5} , и поэтому этой областью можно пренебречь по сравнению с той, где k'' остается конечным, что приводит к сходящемуся интегралу

$$I_{\infty}(k) = \int d^4k'' \left[\Gamma(k''; k', p - k') - U_{\Phi^2}(k'')F_{\Phi^2}(k', p - k') \right].$$

Далее, поскольку главный вклад в $\int d^4k'' I(k, k'', p) U_{\Phi^2}(k'')$ возникает от области интегрирования, где каждая внутренняя линия диаграмм для $I(k, k'', p)$ несет импульс порядка k , то дифференцирование этого интеграла по p уменьшит вклад в асимптотическое поведение на множитель порядка k^{-1} , так что асимптотически в этом интеграле можно заменить $I(k, k', p)$ на $I(k, k') \equiv I(k, k', 0)$. Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ уравнение (20.2.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma(k; k', p - k') &\rightarrow F_{\Phi^2}(k', p - k') \int d^4 k'' I(k, k'') U_{\Phi^2}(k'') \\ &+ I_{\infty}(k) \left\{ 1 + \int d^4 k'' \left[\Gamma(k''; k', p - k') - U_{\Phi^2}(k'') F_{\Phi^2}(k', p - k') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (20.2.7)$$

Определим поэтому $U_{\Phi^2}(k)$ и $F_{\Phi^2}(k', p - k')$ в порядке $N + 1$ по g через эти функции в более низких порядках теории возмущений соотношениями

$$U_{\Phi^2}(k) = C I_{\infty}(k) + \int d^4 k' I(k, k') U_{\Phi^2}(k'), \quad (20.2.8)$$

$$\begin{aligned} F_{\Phi^2}(k', p - k') \\ = C^{-1} \left\{ 1 + \int d^4 k'' \left[\Gamma(k''; k', p - k') - U_{\Phi^2}(k'') F_{\Phi^2}(k', p - k') \right] \right\}, \end{aligned} \quad (20.2.9)$$

где C — константа, которую можно выбрать произвольным образом. С учетом этих определений уравнение (20.2.5) следует из уравнения (20.2.7).

Удобно выбрать константу C так, чтобы $F_{\Phi^2}(k', p - k')$ принимало бы значение, равное единице, в некоторой точке ренормировки $k' = k(\mu)$ и $p = p(\mu)$, где $k(\mu)$ и $p(\mu)$ — стандартные 4-импульсы порядка μ . Тогда

$$C = 1 + \int d^4 k'' \Gamma(k''; k(\mu), p(\mu) - k(\mu)) - \int d^4 k'' U_{\Phi^2}(k''). \quad (20.2.10)$$

Используя (20.2.5), видим, что расходимости в двух интегралах в (20.2.10) сокращаются.

Теперь можно записать уравнение (20.2.9) в виде

$$F_{\Phi^2}(k', p - k') = Z_{\Phi^2} \left\{ 1 + \int d^4 k'' \Gamma(k''; k', p - k') \right\}, \quad (20.2.11)$$

где

$$Z_{\Phi^2} = \left[1 + \int d^4 k'' \Gamma(k''; k(\mu), p(\mu) - k(\mu)) \right]^{-1}. \quad (20.2.12)$$

Можно рассматривать Z_{Φ^2} как константу перенормировки составного оператора Φ^2 , определенного так, что составной оператор $Z_{\Phi^2} \Phi^2$ имеет конечный двухчастичный матричный элемент $F_{\Phi^2}(k, p - k)$, принимающий значение, равное единице, при $k = k(\mu)$ и $p = p(\mu)$.

Вычислять $U_{\varphi^2}(k)$ или $F_{\varphi^2}(k, p-k)$ с помощью формул (20.2.8) и (20.2.11) не очень удобно. Проще вычислить $G(k; k', p-k')$ и затем установить выражения для $U_{\varphi^2}(k)$ или $F_{\varphi^2}(k, p-k)$ путем сравнения с (20.2.5). Умножая функцию (12.2.26) на произведение пропагаторов для линий с импульсами k и $p-k$, видим, что в однопетлевом приближении

$$\begin{aligned} \Gamma(k; k', p-k') &= \left[\frac{-i}{(2\pi)^4(k^2 + m^2)} \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4((p-k)^2 + m^2)} \right] [-i(2\pi)^4 g] \\ &\times \left\{ 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - sx(1-x)} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 - ux(1-x)} \right) + \dots \right] \right\}, \end{aligned} \quad (20.2.13)$$

где s, t и u — мандельштамовские переменные,

$$s = -p^2, \quad t = -(k-k')^2, \quad u = -(p-k-k')^2,$$

μ — масштаб перенормировки, а g — соответствующая перенормированная константа, определенная как значение фейнмановской амплитуды в точке $s = t = u = -4\mu^2/3$. Асимптотическое поведение этой величины имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma(k; k', p-k') &\rightarrow \frac{ig}{(2\pi)^4(k^2)^2} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + p^2 x(1-x)} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + 2 \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + k^2 x(1-x)} \right) + \dots \right] \right\}. \end{aligned} \quad (20.2.14)$$

В порядке g^2 это согласуется с формулой (20.2.5), если принять

$$\begin{aligned} U_{\varphi^2}(k) &= \frac{ig}{(2\pi)^4(k^2)^2} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{g}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + k^2 x(1-x)} \right) + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (20.2.15)$$

$$F_{\Phi^2}(k, p-k) = 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2/3}{m^2 + p^2x(1-x)} \right) + \dots \quad (20.2.16)$$

Мы выбрали здесь такую связь точки перенормировки $k(\mu)$, $p(\mu)$ для оператора Φ^2 с соответствующей точкой перенормировки для константы связи g , что $p(\mu)^2 = 4\mu^2/3$, так что $F_{\Phi^2}(k, p-k) = 1$ при $p^2 = 4\mu^2/3$.

Рассмотрим теперь случай, когда число n внешних линий с фиксированными импульсами более двух. В согласии с предыдущими рассуждениями, в пределе $k \rightarrow \mu$ ведущими диаграммами в $\Gamma(k; p_1, \dots, p_n)$ будут те, в которых две внешние линии, несущие фиксированные импульсы k и $p-k$, могут быть отделены от n внешних линий с фиксированными импульсами путем разрезания пары внутренних линий:

$$\Gamma(k; p_1 \dots p_n) \rightarrow \int d^4k' I(k, k', p) \Gamma(k'; p_1 \dots p_n). \quad (20.2.17)$$

Как и ранее, невозможно просто использовать асимптотический предел для ядра $I(k, k', p)$ в правой части при $k \rightarrow \infty$, поскольку существенный вклад в этот интеграл вносят значения k' порядка k . Преодолеть это затруднение можно, переписав (20.2.17) в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(k; p_1 \dots p_n) \rightarrow & \int d^4k' I(k, k', p) \left[\Gamma(k'; p_1 \dots p_n) - U_{\Phi^2}(k') F_{\Phi^2}(p_1 \dots p_n) \right] \\ & + F_{\Phi^2}(p_1 \dots p_n) \int d^4k' I(k', k, p) U_{\Phi^2}(k'), \end{aligned} \quad (20.2.18)$$

где, по индукции, предполагаем, что вплоть до некоторого заданного порядка N

$$\Gamma(k; p_1 \dots p_n) \rightarrow U_{\Phi^2}(k) F_{\Phi^2}(p_1 \dots p_n), \quad (20.2.19)$$

с поправочными членами порядка $1/k^5$. Теперь с помощью предела (20.2.4) и уравнения (20.2.8) можно переписать (20.2.18) в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(k; p_1 \dots p_n) \rightarrow & I_{\infty}(k) \int d^4k' \left[\Gamma(k'; p_1 \dots p_n) - U_{\Phi^2}(k') F_{\Phi^2}(p_1 \dots p_n) \right] \\ & + F_{\Phi^2}(p_1 \dots p_n) \left[U_{\Phi^2}(k) - C I_{\infty}(k) \right]. \end{aligned}$$

Это согласуется с (20.2.19) в порядке $N + 1$, если принять, что

$$CF_{\Phi^2}(p_1 \dots p_n) = \int d^4 k' [\Gamma(k'; p_1 \dots p_n) - U_{\Phi^2}(k') F_{\Phi^2}(p_1 \dots p_n)]$$

или, используя выражения (20.2.10) и (20.2.12),

$$F_{\Phi^2}(p_1 \dots p_n) = Z_{\Phi^2} \int d^4 k' \Gamma(k'; p_1 \dots p_n). \quad (20.2.20)$$

Полученное выражение просто утверждает, что $F_{\Phi^2}(p_1 \dots p_n)$ есть матричный элемент перенормированного оператора $Z_{\Phi^2} \Phi^2$, так что соотношение (20.2.1) соответствует формуле (20.2.2) для операторного произведения. В частности, как было показано, $U_{\Phi^2}(k)$ — одна и та же коэффициентная функция независимо от того, какие значения принимают n или импульсы $p_1, \dots, p_n$.

Строго говоря, оператор $(\Phi^2)_R$ не является ведущим слагаемым в операторном разложении произведения двух Φ . Существует еще операторная единица, имеющая меньшую размерность, чем $(\Phi^2)_R$, но она была исключена из уравнения (20.2.2), поскольку (как и указывает индекс C) мы отбросили несвязные диаграммы. Как отмечено выше, при $k \rightarrow \infty$ диаграммы для $\Gamma(k)$ при $n = 0$ (и $p^\mu = 0$) доминируют в области интегрирования, где все внутренние линии несут импульсы порядка k , и $U_1(k)$ — вклад от этой области.

Операторы более высокой размерности и более общие теории будут рассмотрены в приложении к этой главе.

20.3. Ренормгрупповые уравнения для коэффициентных функций

Как отмечалось ранее, одно из свойств операторного разложения, делающее его столь полезным, заключается в том, что зависимость коэффициентных функций от импульсов определяется уравнениями ренормгруппы. Это есть следствие того, что коэффициентные функции возникают из предельных значений сумм фейнмановских диаграмм (типа $I_\infty(k)$ в разделе 20.2), в которых все существенные импульсы одновременно устремляются к бесконечности, так что можно, не сталкиваясь с сингулярностями, положить массы равными нулю. Тем не менее, из-за эффектов перенормировки коэффициентные функции в операторном разложении не подчиняются простым законам масштабных преобразований: эти функции

умножаются на зависящие от масштаба константы перенормировки и в них входят перенормированные константы связи, которые сами зависят от масштаба.

Рассмотрим операторное разложение функции Грина $\Gamma_U(k, k', p)$, у которой импульсы множества l входящих линий (в совокупности обозначенные k , причем их сумма равна p) одновременно устремляются к бесконечности, в то время как у множества l' оставшихся исходящих линий импульсы (в совокупности обозначенные k' , причем их сумма равна p) имеют фиксированные значения:

$$\Gamma_U(k, k', p) \rightarrow \sum_{\theta} U_{\theta}^l(k) F_{\theta, l'}(k', p). \quad (20.3.1)$$

Функция $F_{\theta, l'}(k', p)$ есть матричный элемент перенормированного оператора $\theta_R = \sum_{\theta'} Z_{\theta, \theta'} \theta'$, так что коэффициент при ней $U_{\theta}^l(k)$ в произведении полей, соответствующих линиям l , пропорционален $Z_{\theta, \theta'}^{-1}$, а также величине $Z_{l', l}$ — прямому произведению всех перенормировочных матричных множителей у полевых (или составных) операторов множества l . Отсюда

$$\mu \frac{d}{d\mu} U_{\theta}^l = \sum_{l'} \gamma_{ll'} U_{\theta}^{l'} - \sum_{\theta'} U_{\theta'}^l \gamma_{\theta\theta'} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} U_{\theta}^l, \quad (20.3.2)$$

где

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{ll'} = \sum_{l''} \gamma_{ll''} Z_{l''l'}, \quad \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{\theta, \theta'} = \sum_{\theta''} \gamma_{\theta\theta''} Z_{\theta'', \theta'}, \quad (20.3.3)$$

и для простоты мы предположили, что имеется лишь одна перенормируемая константа связи g_{μ} , определенная как значение некоторой фейнмановской амплитуды в точке перенормировки с импульсами порядка μ и удовлетворяющая уравнению $\mu dg_{\mu} / d\mu = \beta(\mu)$. Чтобы иметь возможность использовать анализ размерностей, умножим все операторы на степени μ так, чтобы все они стали безразмерными. Это приведет к тому, что компоненты Z - и g -матриц также станут безразмерными, причем в пределе нулевой константы связи их значения равны

$$\gamma_{ll'} \rightarrow \delta_{ll'} N(l), \quad \gamma_{\theta\theta'} \rightarrow \delta_{\theta\theta'} N(\theta), \quad (20.3.4)$$

где $N(\mathcal{O})$ — размерность оператора $\mathcal{O}$, а $N(l)$ — полная размерность множества полей (равная сумме величин $s + 1$ для каждого поля, где $s = 0$ для скалярного и безмассового калибровочного полей, $s = 1/2$ для дираковских полей и т. д.). Кроме того, из анализа размерностей следует, что при $k^\mu = \kappa n^\mu$, где n^μ — фиксированный вектор, амплитуда может зависеть от κ только через отношение κ/μ , не считая множителя $\kappa^{4-4n(l)}$, возникающего от интегралов, использованных для определения фурье-образа. Тогда решение уравнения (20.3.2) принимает вид

$$U_{\mathcal{O}}^l(\kappa n) = \kappa^{4-4n(l)} \sum_{l', \mathcal{O}'} \left[M \left\{ \exp \left(\int_{\cdot}^{\kappa} \frac{d\mu}{\mu} \gamma(g_\mu) \right) \right\} \right]_{l', \mathcal{O}'} \mathcal{U}_{\mathcal{O}'}^l(g_\kappa, n) \times \left[M \left\{ \exp \left(\int_{\cdot}^{\kappa} \frac{d\mu}{\mu} \gamma(g_\mu) \right) \right\} \right]_{\mathcal{O}' \mathcal{O}}^{-1}, \quad (20.3.5)$$

где M обозначает « μ -упорядоченное» произведение, т. е. перегруппировку каждого члена в разложении экспонент таким образом, чтобы множители располагались в порядке убывания μ слева направо.

Это приводит к особенно простым результатам, когда g_μ стремится при $\mu \rightarrow \infty$ к фиксированной точке g_* . Вклад больших μ в $M\{\int_{\cdot}^{\kappa} \gamma(g_\mu) d\mu/\mu\}$ равен тогда матричному множителю $\kappa^{\gamma(g_*)}$, который в силу μ -упорядочивания возникает *слева*. Поэтому выражение (20.3.5) принимает вид

$$U_{\mathcal{O}}^l(\kappa n) = \kappa^{4-4n(l)} \sum_{l', \mathcal{O}'} \left[\kappa^{\gamma(g_*)} \right]_{l, l'} \mathcal{C}_{l', \mathcal{O}'} \left[\kappa^{-\gamma(g_*)} \right]_{\mathcal{O}', \mathcal{O}}, \quad (20.3.6)$$

где $\mathcal{C}$ — либо константа, либо сумма степеней $\ln \kappa$, в зависимости от скорости приближения g_κ к g_* .

Особый физический интерес вызывает частный случай асимптотически свободных теорий типа квантовой хромодинамики. В этом случае фиксированная точка находится при $g_* = 0$ и, согласно (20.3.4), вблизи этой точки γ -матрицы ведут себя как

$$\gamma(g)_{ll'} \rightarrow N(l)\delta_{ll'} + g^2 c_{ll'}, \quad \gamma(g)_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} \rightarrow N(\mathcal{O}) + g^2 c_{\mathcal{O}\mathcal{O}'}, \quad (20.3.7)$$

Кроме того, если записать уравнение ренормгруппы для константы связи в виде

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu^2 = -\frac{g}{8\pi^2} g_\mu^4, \quad (20.3.8)$$

тогда

$$\int^\kappa \frac{d}{d\mu} g_\mu^2 \rightarrow -\frac{8\pi^2}{b} \ln g_\kappa^2 + \text{const.}$$

Подстановка этого выражения в (20.3.5) приводит к асимптотическому поведению

$$U_\sigma^l(\kappa n) \rightarrow \kappa^{4-4\pi(l)+N(l)+N(\sigma)} \sum_{l',\sigma'} \left[(g_\kappa^2)^{-8\pi^2 c/b} \right]_{ll'} \mathcal{C}_{\sigma'}^{l'} \left[(g_\kappa^2)^{8\pi^2 c/b} \right]_{\sigma',\sigma} \quad (20.3.9)$$

где $\mathcal{C}_{\sigma'}^{l'}$ — постоянная матрица, равная матрице $\mathcal{U}_{\sigma'}^{l'}(0, n)$, умноженной на постоянные множители, не вычисляемые в рамках теории возмущений, поскольку они возникают от тех частей интегралов в (20.3.5), где g_μ не мала. При $\kappa \rightarrow \infty$ константа связи ведет себя как $g_\kappa^2 \rightarrow 8\pi^2 / b \ln \kappa$, так что формулу (20.3.9) можно также записать в виде

$$U_\sigma^l(\kappa n) \rightarrow \kappa^{4-4\pi(l)+N(l)+N(\sigma)} \sum_{l',\sigma'} \left[(\ln \kappa)^{-8\pi^2 c/b} \right]_{ll'} \mathcal{B}_{\sigma'}^{l'} \left[(\ln \kappa)^{8\pi^2 c/b} \right]_{\sigma',\sigma}, \quad (20.3.10)$$

где $\mathcal{B}_{\sigma'}^{l'}$ — другая постоянная матрица. Условие справедливости выражений (20.3.9) и (20.3.10) заключается в том, чтобы $g_\kappa^2 / 8\pi^2 \rightarrow 1$, но $\ln \kappa$ не должен быть настолько велик, чтобы в асимптотическое поведение давал вклад только один собственный вектор s -матрицы. Мы используем выражение (20.3.10) при изучении в разделе 20.6 глубокоэластичного рассеяния.

20.4. Свойства симметрии коэффициентных функций

Полезность операторного разложения в значительной степени усиливается тем фактом, что коэффициентные функции отражают

всю симметрию лежащей в основе теории, даже если эта симметрия частично или полностью спонтанно нарушена⁴. Для доказательства рассмотрим операторное разложение произведения перенормированных операторов $\mathcal{O}_i(x)$, линейно преобразующихся под действием преобразований некоторой симметрии с сохраняющимся током $J^\mu(x)$, в том смысле, что

$$[J^0(\mathbf{x}, t), \mathcal{O}(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sum_j t_{ij} \mathcal{O}_j(\mathbf{y}, t), \quad (20.4.1)$$

где t_{ij} — постоянная матрица. Можно записать операторное разложение как утверждение, что когда $x_1, \dots, x_n$ совместно стремятся к x (а все отношения разностей $x_1 - x, \dots, x_n - x$ фиксированы), то

$$\langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \} | \alpha \rangle \rightarrow \sum_i U_i^{i_1 \dots i_n}(x_1 - x, \dots, x_n - x) \langle \beta | \mathcal{O}_i(x) | \alpha \rangle. \quad (20.4.2)$$

Предположим далее, что симметрия с током J^μ спонтанно нарушена, причем соответствующий голдстоуновский бозон π удовлетворяет соотношению

$$\langle \text{VAC} | J^\mu(0) | \pi \rangle = \frac{F p_\pi^\mu}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0}}. \quad (20.4.3)$$

Тогда, как мы видели в разделе 19.2, матричный элемент операторного произведения между состояниями с дополнительным голдстоуновским бозоном малой энергии равен

$$\begin{aligned} \langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \} | \pi \alpha \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \\ &\times \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle \beta | T \{ \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) J^\mu(x) \} | \alpha \rangle, \end{aligned} \quad (20.4.4)$$

поскольку в интеграле в правой части выражения (20.4.4) выживает только вклад голдстоуновского полюсного члена. Используя выражение (20.4.1) и сохранение тока, можно записать выражение (20.4.4) в виде

$$\begin{aligned} \langle \beta | T \{ \varphi_{i_1}(x_1) \dots \varphi_{i_n}(x_n) \} | \pi \alpha \rangle &= - \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \\ &\times \sum_{r=1}^n \sum_{j_r} t_{i_r j_r} \langle \beta | T \{ \varphi_{i_1}(x_1) \dots \varphi_{j_r}(x_r) \dots \varphi_{i_n}(x_n) \} | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (20.4.5)$$

Применим теперь операторное разложение к обеим частям этой формулы. В пределе, когда все $x_1, \dots, x_n$ совместно стремятся к x , находим:

$$\begin{aligned} \sum_i U_i^{i_1 \dots i_n}(x_1 - x, \dots, x_n - x) \langle \beta | \varphi_i(x) | \alpha \rangle &= - \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \\ &\sum_{r=1}^n \sum_{j_r} \sum_i t_{i_r j_r} U_i^{i_1 \dots j_r \dots i_n}(x_1 - x, \dots, x_n - x) \langle \beta | \varphi_i(x) | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (20.4.6)$$

Как частный случай формулы (20.4.5) имеем

$$\langle \beta | \varphi_i(x) | \pi \alpha \rangle = - \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0} F} \sum_j t_{ij} \langle \beta | \varphi_j(x) | \alpha \rangle. \quad (20.4.7)$$

Поскольку все это верно для произвольных состояний $\langle \beta |$ и $| \alpha \rangle$, коэффициенты при $\langle \beta | \varphi_j | \alpha \rangle$ с обеих сторон равенства (20.4.6) должны быть равны, так что

$$0 = - \sum_i t_{ij} U_i^{i_1 \dots i_n}(x_1 - x, \dots, x_n - x) + \sum_{r=1}^n \sum_{j_r} t_{i_r j_r} U_j^{i_1 \dots j_r \dots i_n}(x_1 - x, \dots, x_n - x). \quad (20.4.8)$$

Это можно переформулировать как условие, что функция $U_i^{i_1 \dots i_n}(x_1 - x, \dots, x_n - x)$ инвариантна относительно преобразований симметрии, порождаемой генератором t , причем действие этой симметрии на нижний индекс контраградиентно действию на верхние индексы в том смысле, что матрица t заменяется на $-t^T$. Это такое же соотношение, какое можно было ожидать, если бы порожденная током J^μ симметрия не была спонтанно нарушена.

20.5. Правила сумм для спектральных функций

Правила сумм для спектральных функций — это ограничения на спектральные функции различных токов⁵. Рассмотрим сначала множество токов J_a^μ , которые совершенно произвольны, не считая того, что они являются лоренцовскими 4-векторами, а затем рассмотрим более частные случаи. Для определения спектральных функций токов используем лоренц-инвариантность и записываем

$$\sum_N \delta^4(p - p_N) \langle \text{VAC} | J_\alpha^\mu(0) | N \rangle \langle \text{VAC} | J_\beta^\nu(0) | N \rangle^* = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \left[(\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2) \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(-p^2) + p^\mu p^\nu \rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2) \right], \quad (20.5.1)$$

по аналогии с формулами (19.2.19)–(19.2.10) или (10.7.4). Совершая фурье-преобразование и используя полноту состояний $|N\rangle$, можно записать это выражение в виде

$$\langle J_\alpha^\mu(x) J_\beta^\nu(0) \rangle_{\text{VAC}} = \int d\mu^2 \left[\eta^{\mu\nu} \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2) - (\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) + \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2) / \mu^2) \partial^\mu \partial^\nu \right] \Delta_+(x; \mu^2), \quad (20.5.2)$$

где $\Delta_+(x; \mu^2)$ — функция, определенная выражением (5.2.7):

$$\Delta_+(x; \mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p^0) \delta(p^2 + \mu^2) e^{ip \cdot x}. \quad (20.5.3)$$

Предполагая, что операторы токов выбраны эрмитовыми, на основании (20.5.1) немедленно приходим к выводу, что $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)$ и $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2)$ являются положительными эрмитовыми матрицами. Кроме того, выбирая пространственноподобные x^μ (для которых функция $D_+(x)$ четна) и используя в (20.5.2) трансляционную инвариантность и причинность, находим, что матрицы $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)$ и $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2)$ симметричны.

Далее, при $x \rightarrow 0$ и $x^2 > 0$ функция $\Delta_+(x; \mu^2)$ ведет себя как

$$\Delta_+(x; \mu^2) \rightarrow \frac{1}{4\pi^2 x^2} + \frac{\mu^2}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\gamma \mu \sqrt{x^2}}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] + O(x^2), \quad (20.5.4)$$

где γ — постоянная Эйлера. Поэтому первые несколько слагаемых в среднем по вакууму разложения $J_\alpha^\mu(x)J_\beta^\nu(0)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \langle J_\alpha^\mu(x)J_\beta^\nu(0) \rangle_{\text{VAC}} \rightarrow & -\frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - \frac{4x_\mu x_\nu}{(x^2)^3} \right] \int d\mu^2 \left(\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) + \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)/\mu^2 \right) \\ & - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\pi^2 x^2} \int d\mu^2 \rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) \mu^2 + \frac{x_\mu x_\nu}{2\pi^2 (x^2)^2} \int d\mu^2 \left(\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) \mu^2 + \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2) \right) \\ & + O(\ln x^2). \end{aligned} \quad (20.5.5)$$

Отсюда, если некоторая линейная комбинация $\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \langle J_\alpha^\mu(x)J_\beta^\nu(0) \rangle_{\text{VAC}}$ двухточечных функций имеет при $x \rightarrow 0$ сингулярность, про которую можно показать, что она слабее чем порядка $1/x^4$, то

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int d\mu^2 \left(\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) + \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2)/\mu^2 \right) = 0, \quad (20.5.6)$$

Если же, кроме того, сингулярность слабее, чем $1/x^2$, то

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int d\mu^2 \rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\mu^2) = 0 \quad (20.5.7)$$

и

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \int d\mu^2 \rho_{\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) \mu^2 = 0. \quad (20.5.8)$$

Выражения (20.5.6), (20.5.7) и (20.5.8) известны, соответственно, как первое, второе и третье *правило сумм для спектральных функций*.

Посмотрим, как все это осуществляется в наиболее интересном случае, когда $J_\alpha^\mu(x)$ — сохраняющиеся токи в теории типа квантовой хромодинамики. Из сохранения токов следует, что свертка выражения (20.5.1) с p_μ обращается в нуль, поэтому $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2)$ должна быть пропорциональна $\delta(-p^2)$ и поэтому автоматически удовлетворяет третьему правилу сумм для спектральных функций (20.5.8) при любых $c_{\alpha\beta}$. Если $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2) \propto \delta(-p^2)$, вклады в выражение (20.5.1) могут возникать только от слагаемых $|B_a\rangle$ в сумме по состояниям, отвечающих единственной безмассовой частице B_a нулевого спина, на практике являющейся голдстоуновским бозоном. Для таких однократных состояний из лоренц-инвариантности следует, что

$$\langle \text{VAC} | J_{\alpha}^{\mu}(0) | B_a \rangle = \frac{iF_{\alpha a} p_B^{\mu}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_B^0}}. \quad (20.5.9)$$

Используя соотношение $\delta(p^0 - |\mathbf{p}|) / 2p^0 = \theta(p^0)\delta(-p^2)$, видим, что

$$\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(-p^2) = \delta(-p^2) \sum_a F_{\alpha a} F_{\beta a}^*. \quad (20.5.10)$$

Напротив, $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(-p^2)$ отлична от нуля только при $-p^2 > 0$.

Более конкретно, рассмотрим перенормируемую асимптотически свободную калибровочную теорию с N безмассовыми (или почти безмассовыми) фермионами спина $1/2$, принадлежащими одному представлению калибровочной группы. Квантовая хромодинамика подходит под это описание в случае $N = 3$, если пренебречь массами u , d , и s -кварков, и в случае $N = 2$, если считать безмассовыми только u и d -кварки. Как мы видели в гл. 19, такая теория обладает глобальной $SU(N)$ и $SU(N)$ симметрией*, под действием преобразований которой левые и правые компоненты полей легких фермионов преобразуются соответственно по представлениям $(N, 1)$ и $(1, N)$, где ' N ' и ' 1 ' соответственно означают определяющее и тождественное представления $SU(N)$.

Токи левой и правой $SU(N)$ симметрий равны

$$J_{La}^{\mu}(x) = -i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(1 + \gamma_5)\lambda_a\psi(x), \quad J_{Ra}^{\mu}(x) = -i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)\lambda_a\psi(x), \quad (20.5.11)$$

где λ_a образуют полный набор эрмитовых бесследовых матриц, действующих на индекс «аромата», отличающий N легких кварков друг от друга (ср. формулы (19.7.2) для случая $N = 3$). Размерность этих токов (в степенях массы) равна $+3$, так что можно ожидать, что (с точностью до логарифмов) коэффициент при операторе O размерно-

* Существует еще симметрия $U(1)$, являющаяся векторной в том смысле, что она действует одинаково на левые и правые компоненты полей легких фермионов. Это соответствует просто сохранению числа легких кварков, так что эта симметрия не будет нас здесь интересовать. Аксиальная $U(1)$ симметрия лагранжиана, действующая по-разному на левые и правые компоненты полей легких фермионов, нарушена квантовыми эффектами, обсуждаемыми в разделе 23.5.

стью $d(\phi)$ в разложении (20.3.6) произведения двух токов будет иметь сингулярность порядка $x^{-6+d(\phi)}$ при стремлении к нулю разности их аргументов x . Отсюда, если разложение линейной комбинации произведения токов содержит единичный оператор, то соответствующая линейная комбинация спектральных функций ведет себя как x^{-6} и поэтому в общем случае не удовлетворяет ни первому, ни второму правилу сумм для спектральных функций. Если оператор наименьшей размерности в вакуумном среднем этого разложения — фермионный билинейный ковариант не более чем с одной производной, тогда соответствующие линейные комбинации спектральных функций ведут себя как x^{-3} или x^{-2} и поэтому удовлетворяют первому правилу сумм для спектральных функций, но, в общем случае, не удовлетворяют второму. Наконец, если оператор наименьшей размерности в вакуумном среднем этого разложения — фермионный билинейный ковариант с двумя и более производными или четырехфермионный ковариант, то сингулярность соответствующей линейной комбинации спектральных функций слабее, чем x^{-2} , и поэтому эта комбинация удовлетворяет как первому, так и второму правилу сумм для спектральных функций.

Для того, чтобы узнать, какие операторы возникают в разложении произведения двух токов, необходимо расклассифицировать представления $SU(N) \times SU(N)$, содержащиеся в произведении, а чтобы установить, имеют ли эти операторы ненулевые вакуумные средние, следует узнать, какие из них инвариантны относительно преобразований спонтанно ненарушенной подгруппы $SU(N) \times SU(N)$. Чтобы дать ответ на эти вопросы, заметим, что токи $J_{La}^\mu(x)$ и $J_{Ra}^\mu(x)$ преобразуются по представлениям $(A, 1)$ и $(1, A)$ группы $SU(N) \times SU(N)$, где A и 1 — присоединенное и тождественное представления группы $SU(N)$.

Кроме того, предположим, что спонтанно ненарушенная подгруппа $SU(N) \times SU(N)$ — это векторная подгруппа $SU(N)_V$ с токами $J_{La}^\mu(x) + J_{Ra}^\mu(x)$, как в случае квантовой хромодинамики и (как мы видели в разделе 19.9) большого числа других теорий. Предположим также, что сохранение четности спонтанно не нарушается. Как следствие существования указанных ненарушенных симметрий имеем:

$$\rho_{La,Lb}^{(1)}(\mu^2) = \rho_{Ra,Rb}^{(1)}(\mu^2) = \delta_{ab} [\rho_V^{(1)}(\mu^2) + \rho_A^{(1)}(\mu^2)] \quad (20.5.12)$$

и

$$\rho_{La,Rb}^{(1)}(\mu^2) = \rho_{Ra,Lb}^{(1)}(\mu^2) = \delta_{ab} [\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2)], \quad (20.5.13)$$

где $\delta_{ab}\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ и $\delta_{ab}\rho_A^{(1)}(\mu^2)$ — спектральные функции, определенные формулой (20.5.2) для токов

$$J_{Va}^\mu = -i\bar{\Psi}\gamma^\mu\lambda_a\Psi, \quad J_{Aa}^\mu = -i\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\lambda_a\Psi \quad (20.5.14)$$

с генераторами λ_a и $\lambda_a\gamma_5$, соответственно. Кроме того,

$$F_{Lab} = -F_{Rab} = \delta_{ab}F, \quad (20.5.15)$$

и формула (20.5.9) имеет в данном случае вид

$$\langle \text{VAC} | J_{Aa}^\mu(0) | B_b \rangle = \frac{iF\delta_{ab}p_B^\mu}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_B^0}}, \quad (20.5.16)$$

так что формула (20.5.10) принимает вид

$$\rho_{La,Lb}^{(0)}(\mu^2) = \rho_{Ra,Rb}^{(0)}(\mu^2) = -\rho_{La,Rb}^{(0)}(\mu^2) = -\rho_{Ra,Lb}^{(0)}(\mu^2) = F^2\delta(\mu^2)\delta_{ab}. \quad (20.5.17)$$

Удобно рассмотреть отдельно произведения токов с одинаковой и разной спиральностями.

Одинаковая спиральность. Произведения $J_{La}^\mu(x)J_{Lb}^\nu(0)$ и $J_{Ra}^\mu(x)J_{Rb}^\nu(0)$ преобразуются соответственно по представлениям $(A \times A, 1)$ и $(1, A \times A)$ группы $SU(N) \times SU(N)$, где A и 1 — присоединенное и тождественное представления, соответственно. Для любой группы произведение $A \times A$ содержит тождественное представление, так что в разложениях этих произведений возникает единичный оператор с одинаковыми коэффициентами, пропорциональными δ_{ab} . Отсюда, только бесследовые части операторного произведения могут удовлетворять правилам сумм для спектральных функций. Но, как мы видели, у спектральных функций нет бесследовых частей, так что спектральные функции произведения операторов с одинаковой спиральностью не могут удовлетворять ни одному правилу сумм.

Разная спиральность. Оба произведения $J_{La}^\mu(x)J_{Rb}^\nu(0)$ и $J_{Ra}^\mu(x)J_{Lb}^\nu(0)$ преобразуются по представлению (A, A) группы $SU(N)$

$\times SU(N)$. Единичный оператор (и операторы типа $F_{\alpha\mu\nu}F_{\alpha}^{\mu\nu}$) являются, конечно, синглетами $SU(N) \times SU(N)$ и поэтому не могут возникать в разложении таких произведений. Фермионные билинейные коварианты без производных типа $\bar{\psi}\psi$ преобразуются по $(\bar{N}, N)$ и $(N, \bar{N})$ представлениям $SU(N) \times SU(N)$, так что они тоже не могут возникать в разложениях произведений токов с разной спиральностью. Единственные калибровочно- и лоренц-инвариантные фермионные билинейные коварианты с одной производной содержат действующий на ψ калибровочно-инвариантный оператор производной $\gamma^{\mu}D_{\mu}$, что дает нуль в силу уравнений поля. Таким образом, рассматриваемые спектральные функции удовлетворяют как первому, так и второму правилу сумм для спектральных функций, принимающими теперь вид

$$\int d\mu^2 [\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2)] / \mu^2 = F^2 \quad (20.5.18)$$

и

$$\int d\mu^2 [\rho_V^{(1)}(\mu^2) - \rho_A^{(1)}(\mu^2)] = 0. \quad (20.5.19)$$

В первой работе по правилам сумм⁵ было высказано предположение, что $SU(2) \times SU(2)$ спектральные функции имеют острые максимумы при определенных значениях μ ; можно было думать, что для $\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ это значение равно $m_{\rho} = 770$ МэВ, для $\rho_A^{(1)}(\mu^2)$ — некоторой неизвестной массе m_A . Иными словами,

$$\rho_V^{(1)}(\mu^2) \cong g_{\rho}^2 \delta(\mu^2 - m_{\rho}^2), \quad \rho_A^{(1)}(\mu^2) \cong g_A^2 \delta(\mu^2 - m_A^2).$$

Тогда формулы (20.5.18) и (20.5.19) принимают вид *

$$\frac{g_{\rho}^2}{m_{\rho}^2} - \frac{g_A^2}{m_A^2} = F_{\pi}^2$$

и

$$g_{\rho}^2 = g_A^2.$$

* Выбирая $SU(2)$ генераторы λ_a равными матрицам Паули, как в (19.7.2), имеем $F = F_{\pi} = 184$ МэВ.

Исключая неизвестную величину g_A , приходим к формуле

$$g_\rho^2 = F_\pi^2 \left(\frac{1}{m_\rho^2} - \frac{1}{m_A^2} \right)^{-1}.$$

Первоначально в 1967 году этот результат был использован совместно с формулой ⁶ $g_\rho^2 = 2F_\pi^2 m_\rho^2$ (обоснование этой формулы было неясным, но она согласовывалась с экспериментальными данными по вероятности распада $\rho \rightarrow e^+ + e^-$) для вывода соотношения

$$m_A = \sqrt{2} m_\rho.$$

Статус гипотетического a_1 резонанса с правильными квантовыми числами для связи с аксиальным током (т. е. $J^P = 1^+$, $T = 1$ и $C(a_1^0) = +1$) и массой в окрестности значения $\sqrt{2} m_\rho$ в течение многих лет оставался неясным. Однако сейчас резонанс с указанными квантовыми числами достаточно хорошо установлен при значении массы $1230 \text{ МэВ} = 1,6 m_\rho$. В наши дни предпочтительнее брать отношение m_A/m_ρ в качестве входного параметра, используя либо значение $\sqrt{2}$, предлагаемое рядом моделей ⁷, либо экспериментальное значение 1,6, и использовать его для предсказания величины g_ρ .

После 1967 года удалось достаточно точно и в широком интервале энергий вычислить не только g_ρ , но и всю векторную спектральную функцию $\rho_V^{(1)}(\mu^2)$ $SU(3) \times SU(3)$ тока в квантовой хромодинамике, используя измеренное сечение процесса $e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow$ адроны и тот факт, что электромагнитный ток есть линейная комбинация $SU(3)$ токов. Аксиальная спектральная функция $\rho_A^{(1)}(\mu^2)$ $SU(3) \times SU(3)$ токов может быть в принципе измерена в процессе $\bar{\nu} + e \rightarrow$ адроны, т. к. заряженные компоненты токов (20.5.14) совпадают с адронными токами, с которыми связаны лептоны. Однако, хотя рассеяние антинейтрино на электроны изучалось экспериментально, малая вероятность этих реакций не позволяет использовать сталкивающиеся пучки, так что электронная мишень находится практически в покое. Чтобы достичь типичных адронных энергий, скажем, 3 ГэВ, в системе центра масс, было бы необходимо иметь нейтрино с энергиями $(3 \text{ ГэВ})^2/2m_e \approx 10 \text{ ТэВ}$ в лабораторной системе. Интенсивные пучки нейтрино столь высоких энергий будут доступны только через много лет, если вообще когда-нибудь.

К счастью, стало возможным изучать спектральные функции в процессе $\tau \rightarrow \nu + \text{адроны}$, однако энергии адронов строго ограничены здесь значением $m_\tau = 1,7$ ГэВ. Возможно также использовать эффективный киральный лагранжиан для вычисления спектральных функций при малых μ^2 , и с помощью квантовой хромодинамики рассчитать разность $\rho_V^{(1)} - \rho_A^{(1)}$ при больших μ^2 , где она довольно мала. Тщательный анализ всех этих возможностей, проведенный в 1993 году Донохью и Головичем⁸, показал, что интегралы от спектральных функций действительно определяются главным образом вкладом резонансов ρ и a_1 и приводят к результатам, согласующимся с первым и вторым правилом сумм для спектральных функций.

20.6. Глубоконеупругое рассеяние

Метод ренормгруппы совместно с операторным разложением нашел наиболее важные применения в анализе глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния. Мы сначала сделаем обзор ранних феноменологических моделей таких реакций, а затем покажем, как операторное разложение подтверждает справедливость этих моделей и позволяет вычислить поправки к ним.

Рассмотрим процесс, в котором электрон 4-импульсом k сталкивается с нуклоном N 4-импульсом p и в результате образуется электрон 4-импульсом k' и, вообще говоря, ненаблюдаемое адронное состояние H , по которому производится суммирование. Для вычисления усредненного по спинам инклюзивного сечения нужно знать величину

$$(m_N/p_N^0)W^{\mu\nu}(q,p) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma,N} \sum_H \delta^4(p_H - p - q) \langle H | J^\mu(0) | N \rangle \langle H | J^\nu(0) | N \rangle^*, \quad (20.6.1)$$

где J^μ — электромагнитный ток (деленный на множитель e), а $q = k - k'$ — импульс, переданный от электронов адронам. Требование лоренц-инвариантности приводит к выводу, что функция $W^{\mu\nu}(q, p)$ должна быть линейной комбинацией величин $p^\mu p^\nu$, $p^\mu q^\nu$, $q^\mu p^\nu$, $q^\mu q^\nu$ и $\eta^{\mu\nu}$ с коэффициентами, которые могут зависеть только от двух независимых скалярных функций q и p : q^2 и $\nu \equiv -q \cdot p/m_N$.

Из закона сохранения тока следует, что $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$, так что функция W должна иметь вид *

$$W^{\mu\nu}(q, p) = -\left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \eta^{\mu\nu}\right) W_1(v, q^2) + \frac{1}{m_N^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu\right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu\right) W_2(v, q^2). \quad (20.6.2)$$

Кроме того, из выражения (20.6.1) видно, что $W^{\mu\nu*} = W^{\nu\mu}$, и поэтому W_1 и W_2 действительны, а также что $W^{\mu\nu}$ — положительно определенная матрица, откуда W_1 и W_2 положительны. В системе покоя нуклона дифференциальное сечение равно

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega dv} = \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} (W_2 + 2W_1 \text{tg}^2(\theta/2)), \quad (20.6.3)$$

где $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ — элемент телесного угла, в который рассеивается электрон, а $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Мотт}}$ — дифференциальное сечение релятивистского упругого рассеяния точечной бесспиновой частицы:

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} = \frac{e^4}{4E_e^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (20.6.4)$$

где $E_e = -k \cdot p/m_N$ — энергия начального электрона в системе покоя нуклона.

Можно ожидать, что при фиксированных значениях величины $-p_H^2 = -q^2 + 2m_N v + m_N^2$ дифференциальное сечение очень быстро падает при $q^2 \rightarrow \infty$, т. к. оно должно быть пропорционально квадрату форм-фактора для перехода от нуклона к любой частице или

* Такой же формализм можно использовать для других глубоконеупругих процессов рассеяния лептонов, например, $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + H$, если не считать того, что из-за несохранения четности в таких процессах возникает дополнительное третье слагаемое в $W^{\mu\nu}(q, p)$, пропорциональное $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$. Для простоты ограничимся рассмотрением глубоконеупругого рассеяния электронов.

резонансу с массой, близкой к $-p_H^2$. Поэтому вызвал удивление тот факт, что через два года после открытия в 1966 году Станфордского центра линейного ускорителя (SLAC) коллаборация SLAC-MIT, возглавлявшаяся Фридманом, Кендаллом и Тейлором⁹ обнаружила, что на самом деле $\nu W_2(q^2, \nu)$ примерно постоянна по q^2 для фиксированных значений $\omega \equiv 2m_N \nu / q^2 > 1$. (Конкретнее, $W_2(q^2, \nu)$ для протона фитировалась под кривую $\nu W_2(q^2, \nu) \simeq 0,35 - 0,004\omega$ для $E_e = 10, 13,5$ и 16 ГэВ и $\theta = 6^\circ$ и 10° . Эти эксперименты были нечувствительны к значению W_1 , поскольку $\tan^2(10^\circ/2) = 7,6 \cdot 10^{-3}$.) Заметим, что в этом пределе $-p_H^2 \rightarrow (\omega - 1)q^2 \rightarrow \infty$, что и объясняет название «глубоконеупругое» рассеяние.

Примерно в то же время Бьоркен¹⁰ с помощью алгебры токов показал, что $W_2(q^2, \nu)$ и $W_1(q^2, \nu)$ удовлетворяют скейлинговым законам: если q^2 и ν одновременно стремятся к бесконечности, то

$$\nu W_2(\nu, q^2) \rightarrow F_2(\omega), \quad W_1(\nu, q^2) \rightarrow F_1(\omega), \quad (20.6.5)$$

где снова $\omega \equiv 2m_N \nu / q^2$. Более интуитивное объяснение происходящего чуть позже дал Фейнман¹¹. Он предположил, что при глубоконеупругом рассеянии на ультрарелятивистском нуклоне импульса $\mathbf{p}$ этот нуклон ведет себя так, как будто он состоит из «партонов» различных типов, отмечаемых индексом i , причем каждый тип партонов с вероятностью $\mathcal{F}_i(x)dx$ обладает импульсом в интервале от $x\mathbf{p}$ до $(x + dx)\mathbf{p}$. Тогда для каждого i

$$\int dx \mathcal{F}_i(x) = 1. \quad (20.6.6)$$

Условие, что полный импульс нуклона равен $\mathbf{p}$, приводит к дополнительному правилу сумм

$$\int_0^1 \sum_i \mathcal{F}_i(x) x dx = 1. \quad (20.6.7)$$

В случае упругого рассеяния электрона (массой которого m_e мы пренебрегаем) на партоне 4-импульса $x\mathbf{p}$ имеем

$$x^2 m_N^2 = -(q + xp)^2 = -q^2 - 2\nu m_N x + x^2 m_N^2, \quad ,$$

так что $\nu = q^2 / 2m_N x$. Поэтому сечение неупругого рассеяния в этой модели равно

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega dv} = \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Мотт}} \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx \left(1 + \frac{q^2}{2m_N^2 x^2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \delta\left(v - \frac{q^2}{2m_N^2 x}\right), \quad (20.6.8)$$

где Q_i — заряд i -го типа партонов в единицах e^* . (Слагаемое с $\operatorname{tg}^2(\theta/2)$ соответствует «дираковскому» партону с магнитным моментом $eQ_i/2m_N x$.) Сравнивая это выражение с (20.6.3), находим:

$$W_2(v, q^2) = \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx \mathcal{F}_i(x) \delta\left(v - \frac{q^2}{2m_N^2 x}\right) = \frac{1}{v\omega} \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad (20.6.9)$$

$$W_1(v, q^2) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx \mathcal{F}_i(x) \frac{q^2}{2m_N^2 x^2} \delta\left(v - \frac{q^2}{2m_N^2 x}\right) = \frac{\omega v}{2m_N} W_2(v, q^2). \quad (20.6.10)$$

Это хорошо согласуется с бьоркеновскими правилами скейлинга (20.6.5), в которых

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\omega} \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (20.6.11)$$

и

$$F_1(\omega) = (\omega/2m_N) F_2(\omega). \quad (20.6.12)$$

Соотношение (20.6.12) первоначально было выведено Калланом и Гроссом¹². Оно согласуется с экспериментом с точностью 10–15%.

Если предположить, что протон и нейтрон состоят соответственно из двух u -кварков и одного d -кварка или одного u -кварка и

* Это выражение можно вывести с помощью формул (8.7.7) и (8.7.38) для комптоновского рассеяния частицы спина 1/2, 4-импульса p и массы μ в произвольной лоренцевской системе. Для этого полезно заметить, что в использованной для вывода этих формул калибровке, в которой начальные и конечные действительные векторы поляризации e_μ и e'_μ удовлетворяют условиям $e^2 = e'^2 = 1$, $e \cdot p = e' \cdot p = e \cdot k = e' \cdot k' = 0$, сумма по поляризациям равна

$$\sum_{e, e'} (e \cdot e')^2 = 2 + \frac{m^4 (k \cdot k')^2}{(k \cdot p)^2 (k' \cdot p)^2} + \frac{2m^2 (k \cdot k')}{(k \cdot p)(k' \cdot p)}.$$

двух d -кварков плюс любое число нейтральных партонов, то с учетом выражений (20.6.11) и (20.6.6) получается правило сумм для W_2 :

$$\int_1^\infty F_2(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = \sum_i Q_i^2 = \begin{cases} 1, & p, \\ 2/3, & n. \end{cases} \quad (20.6.13)$$

Большой вклад в интеграл дают большие значения W , т. е. область, в которой функция F_2 измеряется с трудом. Если мы предположим также, что полный импульс нуклона распределен между тремя кварками в равных долях (и отсутствуют нейтральные партоны), то вместо выражения (20.6.7) получим более сильное соотношение $\int \mathcal{F}_i(x) x dx = 1/3$ для каждого кварка, и тогда с учетом соотношения (20.6.11) получим:

$$\int_1^\infty F_2(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{1}{3} \sum_i Q_i^2 = \begin{cases} 1/3, & p, \\ 2/9, & n. \end{cases}$$

Этот интеграл легче измерить, и оказывается, что результат резко противоречит правилу сумм, откуда можно сделать вывод, что большая доля импульса нуклона переносится нейтральными партонами.

Ничто в описанном выше феноменологическом подходе не зависит от конкретной теории поля. В конечном итоге именно операторное разложение указало метод применения лежащей в основе теории поля к глубоконеупругому рассеянию. В частности, благодаря операторному разложению стало ясно, что для объяснения гипотез о скейлинге (20.6.5) (и вычисления поправок к скейлинговому поведению) необходима асимптотически свободная теория поля. Таковой теорией в конце концов оказалась квантовая хромодинамика.

Чтобы применить операторное разложение к глубоконеупругому рассеянию, совершим сначала фурье-преобразование выражения (20.6.1). Используя трансляционную инвариантность и полноту адронных состояний $|N\rangle$, получим:

$$(m_N/p_N^0) W^{\mu\nu}(q, p) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^4} \sum_{\sigma_N} \int dz e^{-iq \cdot z} \langle N | J^\nu(z) J^\mu(0) | N \rangle. \quad (20.6.14)$$

Поэтому асимптотическое поведение $W^{\mu\nu}(q, p)$ при $q \rightarrow \infty$ связано с сингулярностью операторного произведения при $z \rightarrow 0$.

Вычисление коэффициентных функций в операторных разложениях с помощью фейнмановских диаграмм относится непосредственно не к разложению матричных элементов типа тех, которые возникли в выражении (20.6.14) для $W^{\mu\nu}$, а к матричным элементам двухточечной функции Грина

$$(m_N/p_N^0)T^{\mu\nu}(q, p) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^4} \sum_{\sigma_N} \int dz e^{-iq \cdot z} \langle N | T \{ J^\nu(z) J^\mu(0) \} | N \rangle. \quad (20.6.15)$$

Это можно записать через структурные функции для $T^{\mu\nu}$, определенные по аналогии с (20.6.2):

$$T^{\mu\nu}(q, p) = - \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \eta^{\mu\nu} \right) T_1(v, q^2) + \frac{1}{m_N^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) T_2(v, q^2), \quad (20.6.16)$$

Связь между $T_r(v, q^2)$ и $W_r(v, q^2)$ ($r = 1, 2$) устанавливается¹³ с помощью дисперсионных соотношений* при фиксированном q^2 :

$$T_r(v, q^2) = \frac{1}{2} W_r(-v, q^2) + \frac{1}{2} W_r(v, q^2) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dv' \frac{W_r(-v', q^2) - W_r(v', q^2)}{v' - v}, \quad (20.6.17)$$

где знаменатель в подынтегральном выражении понимается в смысле главного значения. Функции $W_r(v, q^2)$ обращаются в нуль за исключением области $v > q^2/2m_N$, так что дисперсионные соотношения можно переписать в виде

* При $q^2 = 0$ эти соотношения можно вывести точно, как и при выводе дисперсионного соотношения (10.8.16) для фотонного рассеяния вперед. Вывод при фиксированном $q^2 \neq 0$ более сложен.

$$T_r(v, q^2) = \frac{1}{2} W_r(-v, q^2) + \frac{1}{2} W_r(v, q^2) + \frac{1}{2\pi i} \int_{q^2/2m_N}^{\infty} dv' W_r(v', q^2) \left(\frac{1}{v' + v} + \frac{1}{v' - v} \right). \quad (20.6.18)$$

Операторы, дающие вклад в операторное разложение для T_r , можно расклассифицировать в соответствии с неприводимыми представлениями группы Лоренца, которым они принадлежат. Единственные лоренц-ковариантные функции одного 4-вектора p^μ с фиксированным $p^2 = -m_N^2$ пропорциональны симметричным тензорам $p^{\mu_1} \dots p^{\mu_s}$, так что единственными операторами, которые могут давать вклад в усредненное по спинам среднее по нуклонным состояниям, являются симметричные бесследовые тензоры $\mathcal{O}_{si}^{\mu_1 \dots \mu_s}$, где нижний индекс i отличает друг от друга любые операторы с такой тензорной структурой. (По причинам, которые станут ясны ниже, мы используем для различения операторов тот же индекс i , который применялся в партонной модели для обозначения типа партонов.) Матричные элементы этих операторов имеют вид

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma_N} \langle N | \mathcal{O}_{si}^{\mu_1 \dots \mu_s} | N \rangle = (m_N / p_N^0) [p^{\mu_1} \dots p^{\mu_s} - \text{следы}] \langle \mathcal{O}_{si} \rangle, \quad (20.6.19)$$

где $\langle \mathcal{O}_{si} \rangle$ — постоянные коэффициенты. Подобный оператор дает в $T^{\mu\nu}(q, p)$ вклад, пропорциональный с множителям 4-вектора p , и поэтому дает вклад в $T_1(v, q^2)$ и $T_2(v, q^2)$, пропорциональный соответственно v^s и v^{s-2} . (Мы опустили слагаемые, включающие p^2 , поскольку такие слагаемые подавлены множителями μ_N^2/q^2 или $m_N^2/(p \cdot q)$.) Если пренебречь логарифмическими поправками, то в асимптотически свободной теории зависимость коэффициентов от q^2 имеет вид $(q^2)^{(-4+6-d(s,i)-s)/2}$ и $(q^2)^{(-4+6-d(s,i)-s+2)/2}$, соответственно, где $d(s, i)$ — размерность оператора $\mathcal{O}_{si}$ *. Учитывая, что $v \propto q^2 \omega$, получаем, что вклады оператора $\mathcal{O}_{si}$ в структурные функции асимптотически имеют вид

* Степень -4 в показателях возникает от интеграла по z в выражении (20.6.4), а степень $+6$ есть размерность двух операторов электрического тока. Члены $-s/2$ и $-(s-2)/2$ служат для компенсации степеней q^μ , уже имеющихся в v^s и v^{s-2} соответственно.

$$T_{1,si} \propto v^s (q^2)^{(2-d(s,i)-s)/2} \propto \omega^{s-1} (q^2)^{(2-\tau(s,i))/2} \quad (20.6.20)$$

и

$$vT_{2,si} \propto v^{s-1} (q^2)^{(4-d(s,i)-s)/2} \propto \omega^{s-1} (q^2)^{(2-\tau(s,i))/2}, \quad (20.6.21)$$

где $\tau(s, i)$ — «твист» оператора $\mathcal{O}_{si}$, определенный как ¹⁴

$$\tau(s, i) \equiv d(s, i) - s. \quad (20.6.22)$$

Видно, что доминирующие слагаемые в T_1 и vT_2 при $q^2 \rightarrow 0$ при фиксированном W определяются вкладами операторов минимального твиста. Кроме того, из выражения (20.6.18) следует, что в $T_r(v, q^2)$ не содержатся слагаемые нечетной степени по v , так что сюда могут давать вклад только операторы $\mathcal{O}_{si}$ с четным s .

Симметричные бесследовые тензоры ранга s минимальной размерности — это операторы

$$(\mathcal{O}_{sf})_{\mu_1 \dots \mu_s} \equiv (i^{s-2}/s!) \bar{\Psi}_f \gamma_{\{\mu_1} D_{\mu_2}^{\leftrightarrow} \dots D_{\mu_s}^{\leftrightarrow} \Psi_f \quad (20.6.23)$$

и

$$(\mathcal{O}_{s0})_{\mu_1 \dots \mu_s} \equiv (i^{s-2}/2s!) F_{\alpha\nu\{\mu_1} D_{\mu_3}^{\leftrightarrow} \dots D_{\mu_s}^{\leftrightarrow} F_{\alpha\mu_2}^{\nu}, \quad (20.6.24)$$

где f отмечает сорта кварков, D_μ — калибровочно инвариантная производная, а фигурные скобки означают сумму по перестановкам и вычитание следов по заключенным в скобки пространственно-временным индексам. (Символ $\leftrightarrow$ означает полуразность производных, действующих направо и налево. Мы берем разность производных, поскольку их сумма должна исчезать в любом матричном элементе между состояниями с равными 4-импульсами.) Эти операторы имеют размерность $3 + (s-1) = 4 + (s-2) = 2 + s$, так что их твист $\tau = 2$. Таким образом, при $q^2 \rightarrow \infty$ в T_1 и T_2 дает вклад бесконечное число операторов, причем эти вклады зависят от W и только логарифмически от q^2 . Итак, асимптотическая свобода подтверждает бьеркеновский скейлинг, но только с точностью до логарифмических поправок. Удерживая только операторы твиста два, видим (как это и следует из наших обозначений), что для каждого s действительно имеется один оператор для каждого типа партонов, причем i принимает значения, отвечающие квар-

ковым ароматам f (мы объединяем кварки и антикварки), а также значение $i = 0$, отвечающее глюону.

Рассмотрим теперь логарифмические поправки. Асимптотическое поведение коэффициентных функций в асимптотически свободной теории определяется выражением (20.3.9). Как обсуждалось в разделе 10.4, если мы пренебрегаем электромагнитными радиационными поправками, для электромагнитного тока не нужны никакие перенормировочные множители, поскольку эти токи сохраняются. Следовательно матрица c_{ij} в формуле (20.3.9) обращается в нуль. Матрица $c_{\ell, \ell'}$ не имеет элементов, связывающих операторы разного типа по отношению к преобразованиям Лоренца, так что в используемых сейчас обозначениях $c_{si, s' i'} = \delta_{ss'} c_{ii'}(s)$. Таким образом, выражение (20.3.9) принимает вид

$$T_1(v, q^2) \rightarrow \sum_{sij} \omega^s \mathcal{A}_{si} \left[(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \ell_{sj} \rangle, \quad (20.6.25)$$

$$vT_2(v, q^2) \rightarrow \sum_{sij} \omega^{s-1} \mathcal{B}_{si} \left[(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \ell_{sj} \rangle, \quad (20.6.26)$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — константы, возникающие в коэффициентной функции для оператора ℓ_{si} в операторном разложении произведения двух электрических токов, l^2 — конкретное значение q^2 , выбранное для определения коэффициентных функций, b — константа в ренормгрупповом уравнении однопетлевого приближения (20.3.8) для сильной константы связи g_q , $\langle \ell_{si} \rangle$ — постоянный коэффициент в матричных элементах (20.6.19).

Коэффициенты операторного разложения не зависят от конкретного рассматриваемого процесса, и на них не влияет невылетание кварков, так что можно вычислить коэффициенты $\mathcal{A}_{si}$ и $\mathcal{B}_{si}$, рассматривая фиктивный более простой процесс рассеяния электрона на свободном кварке аромата f . Перенормированные операторы ℓ_{si} можно удобно определить так, что однокварковые матричные элементы операторов (20.6.23) и (20.6.24) задаются в древесном приближении:

$$\langle f', \sigma' | O_{sf} | f'', \sigma'' \rangle = \frac{(-1)^s i}{s!} (\bar{u}' \gamma^{(\mu_1} u) p^{\mu_2} \dots p^{\mu_s}) \delta_{ff'} \delta_{ff''}, \quad (20.6.27)$$

$$\langle f', \sigma' | O_{s0} | f'', \sigma'' \rangle = 0. \quad (20.6.28)$$

Усредняя выражение (20.6.27) по $\sigma' = \sigma''$ и сравнивая результат с выражением (20.6.19), получаем:

$$\langle \mathcal{O}_{sf} \rangle_{f'} \frac{m_f}{p^0} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_s} = \delta_{ff'} \frac{(-1)^s i}{2s!} \text{Tr} \left\{ \left(\frac{-ip + m_f}{2p^0} \right) \gamma^{\{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_s\}} \right\},$$

так что (для четных s)

$$\langle \mathcal{O}_{sf} \rangle_{f'} = \delta_{ff'} / m_f \quad (20.6.29)$$

и

$$\langle \mathcal{O}_{s0} \rangle_{f'} = 0. \quad (20.6.30)$$

При таком определении операторов $\mathcal{O}_{si}$, выбирая масштаб импульсов l^2 в точке перенормировки достаточно большим, чтобы функции в операторном разложении можно было вычислить в древесном приближении, можно вывести вид этих функций из формул древесного приближения для сечения электрон–кваркового рассеяния. Проследив вывод выражений (20.6.9) и (20.6.10) в партонной модели, видим, что функции W_r для рассеяния электрона на кварке сорта f определяются в древесном приближении формулами *

$$vW_{2,f} = (m_N/m_f) Q_f^2 \delta(\omega - 1), \quad (20.6.31)$$

$$W_{1,f} = Q_f^2 \delta(\omega - 1) / 2m_f. \quad (20.6.32)$$

Подставляя эти результаты в дисперсионные соотношения (20.6.18), получаем при $\omega \neq 1$

$$T_{1,f} = \frac{Q_f^2}{2\pi i m_f} \frac{m_N}{m_f} \frac{1}{\omega^2 - 1}, \quad (20.6.33)$$

* В выражение (20.6.31) включен множитель (m_N/m_f) , поскольку величина v определена как $-(q \cdot p)/m_N$, а не как $-(q \cdot p)/m_f$, в то время как в (20.6.2) входит W_2/m_N^2 , а не W_2/m_f^2 . Тогда формула (20.6.32) следует из (20.6.10). Величину W можно записать в виде, не зависящем от масс: $W = -2(q \cdot p)/q^2$.

$$vT_{2,f} = \frac{2Q_f^2}{2\pi i} \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1}, \quad (20.6.34)$$

Эти результаты можно непосредственно получить с помощью фейнмановских диаграмм для электрон-кваркового рассеяния. Сравнивая коэффициенты при ω^s в выражениях (20.6.33) и (20.6.34) с соответствующими коэффициентами в выражениях (20.6.25) и (20.6.26) в точке перенормировки $q^2 = l^2$, и пользуясь формулами (20.6.29) и (20.6.30), находим, что

$$\mathcal{A}_{si} = \frac{iQ_i^2}{2\pi}, \quad \mathcal{B}_{si} = \frac{im_N Q_i^2}{\pi}, \quad (20.6.35)$$

где, конечно, заряд глюонов Q_0 взят равным нулю. Повторим, что несмотря на то, что эти значения выведены для электрон-кваркового рассеяния, $\mathcal{A}_{si}$ и $\mathcal{B}_{si}$ являются множителями в операторном разложении двух электрических токов, и поэтому они не зависят от состояния, по которому вычисляется среднее значение этого операторного произведения. Поэтому можно подставить выражение (20.6.35) в формулы (20.6.25) и (20.6.26) и получить:

$$T_1(v, q^2) \rightarrow \frac{i}{2\pi} \sum_{sij} \omega^s Q_i^2 \left[(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle, \quad (20.6.36)$$

$$vT_2(v, q^2) \rightarrow \frac{im_N}{\pi} \sum_{sij} \omega^{s-1} Q_i^2 \left[(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle, \quad (20.6.37)$$

Вернемся, наконец, к структурным функциям $W_r(v, q^2)$. Заметим, что коэффициент при $\omega^s = (2m_N v/q^2)^s$ в $T_r(v, q^2)$ дается выражением (20.6.18) в виде

$$\frac{-2}{2\pi i} \left(\frac{q^2}{2m_N} \right)^s \int_{q^2/2m_N}^{\infty} dv' v'^{-1-s} W_r(v', q^2) = \frac{i}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega \omega^{-1-s} W_r \left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2 \right).$$

Сравнивая с формулами (20.6.36) и (20.6.37), находим:

$$\int_1^{\infty} d\omega \omega^{-1-s} W_1 \left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2 \right) \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_i^2 \left[(g_q^2/g_l^2)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle, \quad (20.6.38)$$

$$\int_1^{\infty} d\omega \omega^{-s} \nu W_2 \left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2 \right) \rightarrow m_N \sum_{ij} Q_i^2 \left[\left(g_q^2 / g_l^2 \right)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle. \quad (20.6.39)$$

Очевидно, что удовлетворяющие этим уравнениям функции W_r можно записать в виде, аналогичном уравнениям (20.6.9) и (20.6.10) партонной модели:

$$W_1 \left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2 \right) \rightarrow \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i(1/\omega, q^2), \quad (20.6.40)$$

$$\nu W_2 \left(\frac{\omega q^2}{2m_N}, q^2 \right) \rightarrow \frac{2m_N}{\omega} \sum_i Q_i^2 \mathcal{F}_i(1/\omega, q^2), \quad (20.6.41)$$

где $\mathcal{F}_i$ — партонная функция распределения, определяемая теперь уравнением моментов

$$\int_0^1 dx x^{s-1} \mathcal{F}_i(x, q^2) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\left(g_q^2 / g_l^2 \right)^{8\pi^2 c(s)/b} \right]_{ij} \langle \mathcal{O}_{sj} \rangle. \quad (20.6.42)$$

В частности, видно, что асимптотическая свобода приводит не только к уточненной версии бьеркеновского скейлинга, но и к соотношению Каллана–Гросса (20.6.12) между W_1 и W_2 .

Альтарелли и Паризи¹⁵ нашли элегантную переформулировку уравнений для моментов (20.6.42), которая стала широко использоваться при изучении глубоконеупругого рассеяния. Заметим, что уравнение (20.6.42) совместно с уравнением ренормгруппы (20.3.8) приводят к дифференциальным уравнениям

$$q^2 \frac{d}{dq^2} \int_0^1 dx x^{s-1} \mathcal{F}_i(x, q^2) = -g_q^2 \sum_j c_{ij}(s) \int_0^1 dx x^{s-1} \mathcal{F}_i(x, q^2). \quad (20.6.43)$$

Эти уравнения совместно с «начальным» условием в точке перенормировки l^2

$$\int_0^1 dx x^{s-1} \mathcal{F}_i(x, l^2) = \frac{1}{2} \langle \rho_{si} \rangle, \quad (20.6.44)$$

имеют единственное решение, поэтому их можно использовать вместо уравнений для моментов. Далее, уравнение (20.6.43) удовлетворяется решением дифференциального уравнения для $\mathcal{F}_i$:

$$q^2 \frac{d}{dq^2} \mathcal{F}_i(x, q^2) = \frac{g_q^2}{4\pi^2} \sum_j \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{ij} \left(\frac{x}{y} \right) \mathcal{F}_j(y, q^2), \quad (20.6.45)$$

где матричная функция $P_{ij}(z)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 z^{s-1} P_{ij}(z) dz = -4\pi^2 c_{ij}(s). \quad (20.6.46)$$

(Множитель $4\pi^2$ выбирается по соглашению.)

Матрица $c_{ij}(s)$ была вычислена в квантовой хромодинамике Джорджи и Политцером¹⁶ и Гроссом и Вильчеком¹⁷. Они предположили, что существует N сортов кварков, которые достаточно легки для того, чтобы их можно было считать безмассовыми, а кварки всех других сортов можно считать очень тяжелыми и провести про них интегрирование, так что этими кварками можно пренебречь во всем за исключением их влияния на величину константы сильного взаимодействия. Результаты, полученные в базисе, определяемом операторами (20.6.23) и (20.6.24), имеют вид

$$c_{00}(s) = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \sum_{t=2}^s \frac{1}{t} \right] + \frac{N}{3} C_2 \right\}, \quad (20.6.47)$$

$$c_{f0}(s) = \frac{1}{\pi^2} C_2 \left[\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right], \quad (20.6.48)$$

$$C_{0f}(s) = \frac{1}{8\pi^2} C_3 \left[\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s(s-1)} \right], \quad (20.6.49)$$

$$c_{ff'}(s) = \frac{1}{8\pi^2} C_3 \left[1 - \frac{2}{s(s+1)} + 4 \sum_{t=2}^s \frac{1}{t} \right] \delta_{ff'}, \quad (20.6.50)$$

где индексы 0 и f обозначают соответственно операторы (20.6.24) и (20.6.23), константы C_1 и C_2 определены формулами (17.5.33) и (17.5.34) (причем след в выражении (17.5.34) берется только по одному сорту кварков), N есть число сортов кварков, а константа C_3 определена (с использованием обозначений раздела 17.4) формулой

$$t_\alpha t_\alpha = C_3 g^2 1. \quad (20.6.51)$$

В реалистическом случае $SU(3)$ калибровочной группы с кварками в ее определяющем представлении **3**, эти константы равны

$$C_1 = 3, C_2 = 1/2, C_3 = 4/3. \quad (20.6.52)$$

Приведенные довольно сложные результаты принимают более простой вид, если выразить их через функции Альтарелли–Паризи. Можно непосредственно убедиться, что условие (20.6.46) удовлетворяется, если

$$P_{ff'} = \delta_{ff'} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+} \right) + 2\delta(1-x) \right], \quad (20.6.53)$$

$$P_{f0} = x^2 - x + \frac{1}{2}, \quad (20.6.54)$$

$$P_{0f} = \frac{4}{3} \left[\frac{2}{x} - 2 + x \right], \quad (20.6.55)$$

$$P_{00} = 6 \left[\frac{1-x}{x} + x(1-x) + \frac{x}{(1-x)_+} + \frac{11}{12} \delta(1-x) \right] - \frac{N}{3} \delta(1-x), \quad (20.6.56)$$

где в интеграле по x от 0 до 1 функция $1/(1-x)_+$ определена равенством

$$\frac{f(x)}{(1-x)_+} \equiv \frac{f(x) - f(1)}{1-x}. \quad (20.6.57)$$

Для каждого s имеется очевидное $(N - 1)$ -кратно вырожденное собственное значение матрицы $c(s)$, равное коэффициенту при δ_{ff} в формуле (20.6.50):

$$c(s, \text{присоед}) = \frac{1}{8\pi^2} C_3 \left[1 - \frac{2}{s(s+1)} + 4 \sum_{t=2}^s \frac{1}{t} \right], \quad (20.6.58)$$

с собственными операторами, дающимися всеми независимыми линейными комбинациями операторов (20.6.23) с коэффициентами a_f , удовлетворяющими условию $\sum_f a_f = 0$, и принадлежащими присоединенному представлению ненарушенной глобальной $SU(N)$ группы симметрии квантовой хромодинамики с N сортами кварков. Вдобавок для каждого s существуют два собственных оператора, принадлежащих синглетному представлению $SU(N)$ и выражающихся линейными комбинациями оператора (20.6.24) и суммы по f операторов (20.6.23). Эти собственные операторы и соответствующие собственные значения можно найти, диагонализуя 2×2 матрицу

$$c(s, \text{синглет}) = \begin{bmatrix} c_{00}(s) & c_{0f}(s)N \\ c_{f0}(s) & c(s, \text{присоед}) \end{bmatrix}. \quad (20.6.59)$$

Для $s = 2$ эта матрица принимает вид

$$c(2, \text{синглет}) = \begin{bmatrix} NC_2/6\pi^2 & NC_3/6\pi^2 \\ C_2/3\pi^2 & C_3/3\pi^2 \end{bmatrix}. \quad (20.6.60)$$

Она имеет одно нулевое собственное значение, соответствующее линейной комбинации $\phi_{20}^{\mu\nu}$ и $\sum_f \phi_{2f}^{\mu\nu}$, равной тензору энергии-импульса, который, как и ток J^μ , не перенормируется. Другое собственное значение матрицы (20.6.60) дается ее следом $NC_2/6\pi^2 + C_3/3\pi^2$. Далее, минимум собственных значений $c_{ij}(s)$ для данного s должен быть по крайней мере не меньше, чем минимум собственных значений $c_{ij}(s')$ для любого $s' < s$, поскольку в противном случае при достаточно больших q^2 интеграл (20.6.42) станет в конце концов больше для s , чем для s' , в противоречии с тем, что этот интеграл является строго убывающей функцией s . Поскольку для $s = 2$ минимальное собственное значение равно нулю, можно заключить, что все другие собственные значения для $s > 2$

положительны. На самом деле, все они положительно определены, поскольку для $s > 2$ нет неперенормированных операторов. Поэтому строгий бьеркеновский скейлинг имеет место только в экстремальном пределе, когда $g_q^2 \rightarrow 0$, и выживает только вклад тензора энергии–импульса. Предсказания о нарушениях бьеркеновского скейлинга были подтверждены экспериментально в результате исчерпывающего анализа глубоконеупругого электрон–нуклонного и мюон–нуклонного рассеяния.

20.7. Ренормалоны *

С момента зарождения квантовой теории поля теоретиков интересовал вопрос, сходятся ли ряды теории возмущений для физических матричных элементов, а если нет, то что можно с этим сделать? В самом начале современного периода развития Дайсон¹⁸ отметил, что число диаграмм n -го порядка теории возмущений типично растет как $n!$, откуда можно сделать вывод, что ряды теории возмущений имеют нулевой радиус сходимости.

Для улучшения сходимости степенных рядов, у которых член n -го порядка растет как $n!$, существует хорошо известная техника, называемая преобразованием Бореля¹⁹, которая позволяет либо сделать ряд сходящимся, либо, по крайней мере, исправить поведение ряда так, что он может быть использован как асимптотическое разложение в более широком интервале значений констант связи. Для данного ряда

$$F(g) = \sum_n f_n g^n \quad (20.7.1)$$

мы рассматриваем связанный с ним ряд

$$B(z) \equiv \sum_n f_n z^n / n!. \quad (20.7.2)$$

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

Если f_n растет не быстрее, чем $n!$, тогда в общем случае $B(z)$ будет иметь по крайней мере конечный радиус сходимости. Вопрос заключается в том, можем ли мы восстановить исходный ряд (20.7.1), зная пересуммированный ряд (20.7.2)? Используя знакомую формулу

$$\int_0^\infty \exp(-z/g) z^n dz = n! g^{n+1},$$

видим, что, по крайней мере, формально

$$gF(g) = \int_0^\infty \exp(-z/g) B(z) dz. \quad (20.7.3)$$

Особенности $B(z)$ в любом месте комплексной плоскости ограничивают радиус сходимости ряда (20.7.2), однако если эти особенности находятся вне положительной действительной оси, такое ограничение не является неразрешимой проблемой. Чтобы вычислить $F(g)$ с помощью (20.7.3), нужно знать значения $B(z)$ только для действительных положительных z , меньших или порядка g , и эти значения можно получить из степенного ряда (20.7.1), если все особенности $B(z)$ в комплексной плоскости находятся от начала координат на расстояниях, много больших g . Даже если модули нескольких полюсов z_1, z_2 и т. д. — порядка или меньше g , можно вычислить $B(z)$ для значений z порядка g , используя степенной ряд для $(z - z_1)(z - z_2) \dots B(z)$, но для этого, правда, мы должны знать, где эти полюсы находятся.

Особенности $B(z)$ на положительной действительной оси значительно неприятнее, поскольку они делают недействительной формулу (20.7.3). Контур интегрирования в этом интеграле можно деформировать так, чтобы обойти особенности на положительной действительной оси, но тогда мы сталкиваемся с неоднозначностью: следует ли проводить контур над или под особенностью?

В этом разделе мы покажем, что некоторые особенности борелевского образа $B(z)$ связаны с решениями классических полевых уравнений, известных как *инстантоны*, в то время как другие особенности, называемые *ренормалонами*, связаны со слагаемыми в операторном разложении. В квантовой хромодинамике именно ренормалонь препятствуют применению преобразования Бореля для суммирования рядов теории возмущений.

Впервые Липатов²⁰ в 1976 г. показал, что некоторые особенности борелевского образа $B(z)$ связаны с существованием классических

решений полевых уравнений. Рассмотрим функцию $F(g)$, определенную евклидовым функциональным интегралом

$$F(g) \equiv \int d[\varphi] \exp(I[\varphi, g]). \quad (20.7.4)$$

(Использование евклидова функционального интегрирования обосновывается в Приложении А к гл. 23.) Коэффициенты в степенном ряде (20.7.1) даются выражением

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2\pi i} \int d[\varphi] \oint dg g^{-n-1} \exp(I[\varphi, g]) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int d[\varphi] \oint dg \exp(I[\varphi, g] - (n+1) \ln g), \end{aligned} \quad (20.7.5)$$

где $\oint$ означает контурный интеграл, взятый по обходному против часовой стрелки замкнутому контуру в комплексной плоскости g , окружающему точку $g = 0$. Для очень больших n разумно предположить, что интеграл определяется точкой φ_n, g_n , где аргумент экспоненты в последней строке формулы (20.7.5) стационарен как по φ , так и по g :

$$\left. \frac{\delta I[\varphi, g_n]}{\delta \varphi(x)} \right|_{\varphi=\varphi_n} = 0, \quad (20.7.6)$$

$$\left. \frac{\partial I[\varphi_n, g]}{\partial g} \right|_{g=g_n} = \frac{n+1}{g_n}. \quad (20.7.7)$$

Например, предположим, что $I[\varphi, g]$ есть действие безмассового скалярного поля

$$I[\varphi, g] = -\frac{1}{2} \int \partial_i \varphi \partial_i \varphi d^4x - \frac{g}{24} \int \varphi^4 d^4x, \quad (20.7.8)$$

где суммирование производится по направлениям евклидовых координат 1, 2, 3, 4. Тогда уравнение поля (20.7.6) принимает вид

$$\square \varphi_n = \frac{1}{6} g_n \varphi_n^3. \quad (20.7.9)$$

Мы увидим, что g_n отрицательно, так что решение есть

$$\Phi_n(x) = (-g)^{-1/2} \chi(x), \quad (20.7.10)$$

где $\chi(x)$ — независящее от g решение уравнения

$$\square \chi = -\frac{1}{6} \chi^3. \quad (20.7.11)$$

Условие (20.7.7) принимает вид

$$-\frac{1}{24} \int d^4x \Phi_n^4 = \frac{n+1}{g_n}$$

или в записи через перемасштабированное поле (20.7.10)

$$g_n = -\frac{1}{24(n+1)} \int d^4x \chi^4. \quad (20.7.12)$$

В этой стационарной точке действие (20.7.8) становится равным

$$\begin{aligned} I[\Phi_n, g_n] &= -\frac{1}{2} \int \partial_i \Phi_n \partial_i \Phi_n d^4x - \frac{g_n}{24} \int \Phi_n^4 d^4x = \\ &= \frac{g_n}{24} \int \Phi_n^4 d^4x = -n - 1. \end{aligned} \quad (20.7.13)$$

Вычисление (20.7.5) в стационарной точке приводит при $n \rightarrow \infty$ * к выражению

$$\begin{aligned} f_n &\approx g_n^{-n-1} \exp(I(\Phi_n, g_n)) = (n+1)^{n+1} \left(-\frac{e}{24} \int \chi^4 d^4x \right)^{-n-1} \\ &\approx n! \left(-\frac{1}{24} \int \chi^4 d^4x \right)^{-n}. \end{aligned} \quad (20.7.14)$$

** Здесь символ « $\approx$ » следует интерпретировать как означающий «асимптотически равно с точностью до постоянных множителей и степеней n ». Эти множители возникают от множителя $\sqrt{12\pi n}$ в формуле Стирлинга для $(n+1)!$, от отношения $(n+1)!$ и $n!$, и от интеграла по флуктуациям g и $\Phi(x)$ вокруг стационарной точки. Поскольку мы не собираемся вычислять множители, возникающие от последнего источника, не имеет смысла удерживать и множители от первых двух источников.

Поэтому ведущей особенностью $B(z)$ является полюс при $z = z_1$, где

$$z_1 = -\frac{1}{24} \int \chi^4 d^4x. \quad (20.7.15)$$

Поскольку это выражение отрицательно, оно не препятствует проведению интегрирования в формуле (20.7.3). Чтобы вычислить положение полюса (20.7.15), заметим, что уравнение поля имеет решение

$$\chi = \frac{4\sqrt{3}a}{r^2 + a^2}, \quad (20.7.16)$$

где $r = (x_i x_i)^{1/2}$ и a — произвольный параметр. Это решение уравнения поля есть элементарный пример «инстантонного» решения, которое будет обсуждаться в разделе 23.5. (Такие решения называются инстантонами, поскольку вместо того, чтобы концентрироваться вдоль мировой линии, они концентрируются в окрестности точки в пространстве-времени, в данном случае — в окрестности начала координат.) К счастью, положение полюса не зависит от a :

$$z_1 = -96\pi^2 a^4 \int_0^\infty \frac{r^2 dr}{(r^2 + a^2)^4} = -16\pi^2. \quad (20.7.17)$$

Мы видим, что ряд теории возмущений для $B(z)$ можно использовать в формуле (20.7.3), если $g \ll 16\pi^2$. Если $g/16\pi^2$ порядка или больше единицы, мы все еще можем вычислить $B(z)$ с помощью ряда теории возмущений для $(z + 16\pi^2)B(z)$.

В разделе 23.5 мы увидим, что в неабелевых калибровочных теориях типа квантовой хромодинамики, существуют инстантонные решения, однако они приводят к сравнительно безобидным особенностям $B(z)$ на отрицательной действительной оси. Реальная проблема в квантовой хромодинамике связана с другим классом особенностей, известных как ренормалоны²¹. Они впервые были обнаружены после того, как стало понятно²², что отдельные диаграммы $2n$ -го порядка, типа показанной на рис. 20.3, могут давать индивидуальные вклады, растущие как $n!$, и поэтому согласно выражению (20.7.2) могут приводить к дополнительным особенностям $B(z)$. (В данном конкретном случае особенность известна как *инфракрасный* ренормалон, поскольку он возникает от виртуальных

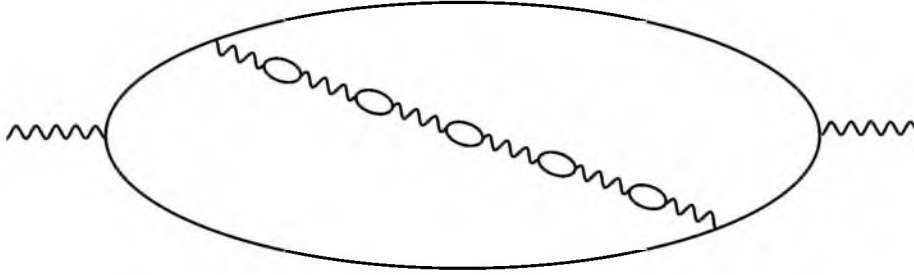


Рис. 20.3. Одна из класса N -петлевых диаграмм, вклад которых растёт как $N!$. Сплошные линии — фермионы, волнистые линии — калибровочные бозоны

импульсов, много меньших тех, которые используются для определения бегущей константы связи g_μ квантовой хромодинамики.) К счастью, для определения положения инфракрасных ренормалонов можно использовать операторное разложение, не обращаясь к отдельным фейнмановским диаграммам.

В качестве простого, но важного примера рассмотрим сумму $\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(q)$ всех вакуумных диаграмм квантовой хромодинамики со вставками 4-векторных токов J_α^μ и J_β^ν , вносящих в диаграмму и уносящих из нее 4-импульс q . (Величина $\Pi^{\mu\nu}(q)$ определяет адронный вклад в электрослабую поляризацию вакуума, а ее мнимая часть связана с сечением аннигиляции e^+e^- и электрон-антинейтрино в адроны.) Как мы видели в разделе 20.5, вклады в эту сумму оператора 1 ведут себя как q^2 (фурье-образ x^{-6}), вклады оператора $F_\alpha^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu}$ ведут себя как q^{-2} , вклады четырехфермионных операторов ведут себя как q^{-4} , и т. д. (Например, вклад оператора $F_\alpha^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu}$ возникает от диаграмм типа рис. 20.3 с текущим по цепочке пузырей импульсом, много меньшим импульса q .) Из размерного анализа следует, что эти зависящие от импульса множители должны сопровождаться вакуумными матричными элементами, пропорциональными Λ^0 , Λ^4 , Λ^6 и т. д. Но если вычислить фейнмановские диаграммы, используя бегущую константу, определенную на масштабе $\mu \gg \Lambda$, где константы связи малы, то согласно формуле (18.7.7)

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp\left(\frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\alpha_s(\mu)}\right), \quad (20.7.18)$$

где n_f — число сортов кварков массы много меньшей, чем μ . Операторы размерности $d > 0$ давали бы вклад в операторное разложение с зависимостью от константы связи

$$\Lambda^d \propto \exp\left(\frac{6\pi d}{(33 - 2n_f)\alpha_s(\mu)}\right) \quad (20.7.19)$$

В квантовой хромодинамике теория возмущений приводит к ряду по степеням $\alpha_s \equiv g^2/4\pi$, а не g , поэтому можно записать формулы (20.7.1) и (20.7.3) через α_s :

$$F(\alpha_s) = \sum_n f_n \alpha_s^n, \quad (20.7.20)$$

$$\alpha_s F(\alpha_s) = \int_0^\infty \exp(-z/\alpha_s) B(z) dz. \quad (20.7.21)$$

Наличие в $\Pi^{\mu\nu}$ слагаемых с зависимостью (20.7.19) от константы связи указывает, что функция $B(z)$ должна иметь особенности (не обязательно полюсы) при

$$z_1 = \frac{6\pi d}{33 - 2n_f}. \quad (20.7.22)$$

Они находятся на положительной действительной оси и делают интеграл (20.7.1) неоднозначным. Таким образом, суммирование по Борелю нельзя использовать при рассмотрении низкоэнергетических эффектов в квантовой хромодинамике.

В том, что диаграммы с малыми виртуальными импульсами препятствуют использованию теории возмущений, конечно, нет ничего нового. Как мы видели в разделе 20.2, весь смысл операторного разложения заключается в том, чтобы отделить части фейнмановских диаграмм, в которых каждая линия несет большой импульс и вклады которых могут быть вычислены по теории возмущений в асимптотически свободных теориях, от тех частей, по которым текут малые импульсы, и вклады которых не могут быть рассчитаны по теории возмущений.

Приложение. Поток импульса: общий случай

В этом приложении мы рассмотрим асимптотическое поведение амплитуды в произвольной перенормируемой квантовой теории поля в ситуации, когда импульсы любого множества из двух или более внешних линий становятся большими, учтя при этом операторы, содержащие произведения произвольного числа полей и их производных с размерностью, ограниченной предельным значением N . Чтобы решить задачу, необходимо ввести более компактные, чем в разделах 20.1. и 20.2, обозначения. Буквы l, l' и т. д. будут обозначать множество внешних линий i определенных сортов, которые либо входят в фейнмановскую диаграмму или ее часть, либо выходят из нее. Буквы k, k' и т. д. будут обозначать множество 4-импульсов k_i этих линий, подчиненных условию, что их сумма равна определенному фиксированному значению p . Амплитуда $\Gamma_U(k, k', p)$ есть сумма всех диаграмм с множеством l входящих линий, несущих 4-импульсы k , и множеством l' выходящих линий, несущих 4-импульсы k' , включая конечные голые пропагаторы для множества линий l , но не l' .

Как следует из теоремы об индексе диаграммы³, упоминавшейся в разделе 12.1, та часть области интегрирования, в которой импульсы порядка k протекают только через поддиаграмму с внешними линиями l и l'' , дает вклад в $\Gamma_U(k, k', p)$ порядка $k^{d(l, l'')}$, где $d(l, l'')$ — (массовая или импульсная) размерность этой поддиаграммы:

$$d(l, l'') = 4 - \sum_{i \in l, l''} (1 + s_i) - \sum_{i \in l} (2 - 2s_i). \quad (20.A.1)$$

(Последнее слагаемое в (20.A.1) возникает из-за пропагаторов для линий из множества l .) Удобно переписать формулу (20.A.1) в виде

$$d(l, l'') = 4 - 4n(l) - N(l') + N(l), \quad (20.A.2)$$

где $n(l)$ — число линий в множестве l , а $N(l)$ — полная размерность полей для этих линий:

$$n(l) \equiv \sum_{i \in l} 1, \quad N(l) \equiv \sum_{i \in l} (s_i + 1). \quad (20.A.3)$$

Здесь s_i — «спин» линии сорта i в смысле, использованном в разделе 12.3: размерность поля сорта i равна $1 + s_i$, а голый пропагатор такого поля ведет себя как k^{-2+2s_i} . (Для скаляров и калибровочных бозонов $s_i = 0$, для частиц спина $1/2$ $s_i = 1/2$.)

Учитывая асимптотическое поведение, связанное с этими поддиаграммами, мы хотим показать, что при $k \rightarrow \infty$ (все компоненты устремляются к бесконечности вместе по общим направлениям) и фиксированных k' и p , асимптотическое поведение $\Gamma_U(k, k', p)$ в каждом порядке теории возмущений имеет вид

$$\Gamma_U(k, k', p) = \sum_{\mathcal{O}}^{(N)} U_{\mathcal{O}}^l(k) F_{\mathcal{O}, l'}(k', p) + o(k^{4-4n(l)+N(l)-N}), \quad (20.A.4)$$

где сумма берется по операторам $\mathcal{O}$ размерности $N(\mathcal{O}) \leq N$, функция $U_{\mathcal{O}}^l$ порядка $k^{4+N(l)-4n(l)-N(\mathcal{O})}$, а $o(k^A)$ означает слагаемые, обращающиеся в нуль быстрее (по крайней мере, на один множитель $1/k$), чем степень k^A .

Чтобы изолировать вклад операторов размерности $\leq N$, определим « N -неприводимую» амплитуду $I_U^N(k, k', p)$ как сумму всех диаграмм для $\Gamma_U(k, k', p)$, в которых линии из множества l не могут быть отделены от линий множества l' путем разрезания любого множества l'' внутренних линий с $N(l'') \leq N$. Поскольку разность $\Gamma - I^N$ содержит диаграммы, которые можно разъединить указанным способом, то эту разность можно записать в виде

$$\Gamma_U(k, k', p) - I_U^N(k, k', p) = \sum_{l''}^{(N)} \int dk'' I_{l, l''}^N(k, k'', p) \Gamma_{l', l''}(k'', k', p), \quad (20.A.5)$$

где $\sum_{l''}^{(N)}$ означает сумму по множествам l'' линий частиц с $N(l'') \leq N$, а $\int dk''$ — интеграл по компонентам 4-импульсов частиц в множестве l'' , подчиненных ограничению, что сумма этих импульсов равна p .

Асимптотическое поведение ядра $I_{l, l''}^N(k, k'', p)$ много проще, чем поведение $\Gamma_U(k, k'', p)$. При $k \rightarrow \infty$ и фиксированных k'' и p оно определяется той частью области интегрирования, где каждая внутренняя линия несет импульс порядка k , что приводит к асимптотическому поведению $k^{d(l, l'')}$, поскольку слагаемые, в которых только некоторая подобласть имеет такие большие импульсы, должны быть связаны с остальной частью диаграммы мостом l''' линий

с $N(l''') > N \geq N(l'')$, что при $k \rightarrow \infty$ дает вклад, меньший по крайней мере в $k^{N(l'')-N-1}$ раз. Таким образом, дифференцирование $I_{l''}^N(k, k'', p)$ по любой компоненте k'' или p уменьшает асимптотическое поведение до порядка $k^{d(l, l'')-1}$. Но d -кратное дифференцирование снижает асимптотическое поведение до степени $k^{d(l, l'')-d}$ только если $d \leq N - N(l'') + 1$, поскольку для высших производных (все они действуют на линии, несущие импульсы k'' или p) возрастает вклад от области интегрирования, где поддиаграмма, несущая импульсы порядка k , связана с остальной частью диаграммы мостом линий l''' полной размерностью большей чем N . Поэтому для того, чтобы учесть вклад операторов, содержащих производные полей, можно записать асимптотическое поведение I^N в виде

$$I_{l''}^N(k, k'', p) = \sum_{v: d_v + N(l'') \leq N} I_{l''v}^N(k) P_{l''v}(k'', p) + o(k^{d(l, l'')-N+N(l'')}), \quad (20.A.6)$$

где $P_{l''v}(k'', p)$ — полный набор однородных полиномов порядка d по $n(l'')$ импульсам k'' и p , а $I_{l''v}^N(k)$ — функции только от k порядка $k^{d(l, l'')-d}$ при $k \rightarrow \infty$.

Нельзя сразу подставить (20.A.6) в (20.A.5), поскольку важные вклады в интеграл по k'' дает область, где некоторые k'' порядка k . Чтобы разобраться с этим, используем математическую индукцию. Предположим, что формула (20.A.4) верна вплоть до некоторого заданного порядка теории возмущений, и подставим ее в правую часть (20.A.5), чтобы вычислить асимптотическое поведение Γ в следующем порядке теории возмущений. Перепишем (20.A.5) в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{l'}(k, k', p) &= I_{l'}^N(k, k', p) \\ &+ \sum_{l''}^{(N)} \int dk'' I_{l''}^N(k, k'', p) \left[\Gamma_{l'l''}(k'', k', p) - \sum_{\theta}^{(N)} U_{\theta}^{l''}(k'') F_{\theta, l''}(k', p) \right] \\ &+ \sum_{\theta}^{(N)} F_{\theta, l'}(k', p) \sum_{l'': N(l'') \leq N} \int dk'' I_{l''}^N(k, k'', p) U_{\theta}^{l''}(k''). \end{aligned} \quad (20.A.7)$$

Согласно (20.A.4), величина в квадратных скобках во втором слагаемом в правой части формулы (20.A.7) обращается в нуль при $k'' \rightarrow \infty$ быстрее, чем $(k'')^{4-4n(l'')+N(l'')-N}$, так что произведение этого

множителя на полином $P_{l''}(k'')$ порядка $v \leq N - N(l'')$ обращается в нуль быстрее, чем $(k'')^{4-4n(l'')}$, что приводит к конечному интегралу по $4(n(l'') - 1)$ независимым компонентам k''^* .

Следовательно можно в этом слагаемом использовать формулу (20.A.6), и в результате

$$\begin{aligned} \Gamma_{ll'}(k, k', p) \rightarrow & \sum_{v: d_v + N(l') \leq N} I_{ll'v}^N(k) P_{l'v}(k', p) \\ & + \sum_{l''}^{(N)} \sum_{v: d_v + N(l'') \leq N} I_{ll'v}^N(k) \int dk'' P_{l'v}(k'', p) \\ & \times \left[\Gamma_{l'l''}(k'', k', p) - \sum_{\theta}^{(N)} U_{\theta}^{l''}(k'') F_{\theta, l'}(k', p) \right] \\ & + \sum_{\theta}^{(N)} F_{\theta, l'}(k', p) \sum_{l''}^{(N)} \int dk'' I_{ll''}^N(k, k'', p) U_{\theta}^{l''}(k''), \end{aligned} \quad (20.A.8)$$

причем поправка меньше, чем выписанные слагаемые, на множитель $1/k$. (Конечно, первое слагаемое в правой части (20.A.8) присутствует только при $N(l') \leq N$.)

Далее, для каждого значения l и v , причем $d_v + N(l) \leq N$, существует такой оператор θ , содержащий произведения полей, отвечающих линиям в l , и d_v производных, что в нулевом порядке теории возмущений вершинная функция с входящим импульсом p , который несет оператор θ , и исходящими импульсами k , уносимыми внешними линиями l , является полиномом $P_{lv}(k, p)$. Тогда соответствующая полная вершинная функция для перенормированного оператора $\theta_R = \sum_{\theta'} Z_{\theta, \theta'} \theta'$ равна

$$F_{\theta, l}(k, p) = \sum_{\theta'} Z_{\theta, \theta'} \left\{ \delta_{l_{\theta'}, l} P_{lv_{\theta'}}(k, p) + \int dk' P_{l_{\theta'} v_{\theta'}}(k', p) \Gamma_{l_{\theta'}, l}(k', k, p) \right\}, \quad (20.A.9)$$

* Здесь не учтена возможность, что даже если подсчет индекса указывает на сходимость интеграла во втором слагаемом в правой части (20.A.7) по области, где все k'' стремятся вместе к бесконечности, при $n(l'') \geq 3$ подинтегрирования могут расходиться. По этой причине приведенные в приложении доводы не являются доказательством операторного разложения, за исключением рассмотренного в разделе 2.2 простого случая, когда импульсы только двух внешних линий устремлялись к бесконечности, и мы искали слагаемые в степенном разложении, связанные с операторами, квадратичными по полям.

где l_θ и v_θ нумеруют сорта полей и пространственно-временных производных в операторе θ . Видно, что формула (20.A.4) выполняется при

$$U_\theta^l(k) = \sum_{\theta'}^{(N)} I_{l\theta'}^N(k) \left[Z_{\theta'\theta}^{-1} - \int dk'' U_{\theta'}^{l_{\theta'}}(k'') P_{\theta'}(k'') \right] + \sum_{l''}^{(N)} \int dk'' I_{ll''}^N(k, k'') U_{\theta}^{l_{\theta''}}(k''), \quad (20.A.10)$$

где мы используем теперь сокращенные обозначения:

$$I_{l\theta}(k) \equiv I_{l v_\theta v_\theta}(k), \quad P_\theta(k) \equiv P_{l v_\theta v_\theta}(k). \quad (20.A.11)$$

(Зависимость $\Gamma_{l_\theta l'}$ от p опущена по тем же причинам, что и в разделе 20.2; сравнимо k'' с k или нет, можно пренебречь p по сравнению с k .) Определим константу перенормировки $Z_{\theta, \theta'}$ так, что в точке перенормировки $k(\mu)$, $p(\mu)$ функция $F_{\theta, l}(k(\mu), p(\mu))$ имеет то же значение $\delta_{l v_\theta} P_\theta(k(\mu), p(\mu))$, которое было бы у нее в отсутствии взаимодействий:

$$\delta_{l v_\theta} P_\theta(k(\mu), p(\mu)) = F_{\theta, l}(k(\mu), p(\mu)) = \sum_{\theta'} Z_{\theta, \theta'} \times \left\{ \delta_{l_{\theta'}, l} P_{l v_{\theta'}}(k(\mu), p(\mu)) + \int dk' P_{l_{\theta'} v_{\theta'}}(k', p(\mu)) \Gamma_{l_{\theta'} l}(k', k(\mu), p(\mu)) \right\}. \quad (20.A.12)$$

Для $\Gamma = 0$ это уравнение имеет единственное решение $Z = 1$ (поскольку полиномы для заданного множества линий предполагаются линейно независимыми), поэтому по соображениям непрерывности уравнение (20.A.12) будет иметь единственное решение для констант связи в некоторой ограниченной области значений. Поэтому уравнение (20.A.10) дает рекурсивное определение коэффициентов функций $U_\theta^l(k)$, входящих в общее операторное разложение (20.A.4).

Задачи

1. Рассмотрите теорию фермионного поля ψ , взаимодействующего со скалярным полем ϕ , причем взаимодействия имеют вид $\bar{\psi}\psi$ и ϕ^4 . Перечислите операторы, входящие в операторное

разложение произведения $\psi(0)\psi(0)$ с коэффициентными функциями, которые (как можно судить на основании теории возмущений) сингулярны и не исчезают при $x \rightarrow 0$. Опишите, как вы стали бы вычислять эти коэффициентные функции в однопетлевом приближении.

2. Рассмотрите квантовую хромодинамику с N безмассовыми кварками, и определите спектральные функции скалярных и псевдоскалярных билинейных ковариантов формулами

$$\begin{aligned} \sum_N \langle \text{VAC} | \bar{\psi}(0) \lambda_\alpha \psi(0) | \text{VAC} \rangle \langle \text{VAC} | \bar{\psi}(0) \lambda_\beta \psi(0) | \text{VAC} \rangle^* \\ = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \rho_{\alpha\beta}^S(-p^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_N \langle \text{VAC} | \bar{\psi}(0) \gamma_5 \lambda_\alpha \psi(0) | \text{VAC} \rangle \langle \text{VAC} | \bar{\psi}(0) \gamma_5 \lambda_\beta \psi(0) | \text{VAC} \rangle^* \\ = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \rho_{\alpha\beta}^P(-p^2), \end{aligned}$$

где l_α — полный набор бесследовых эрмитовых матриц $N \times N$, нормированных так, что $\text{Tr}\{l_\alpha l_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}$. Какие правила сумм для спектральных функций удовлетворяются линейными комбинациями $\rho_{\alpha\beta}^S(\mu^2)$ и $\rho_{\alpha\beta}^P(\mu^2)$?

3. Выведите соотношение (20.6.8) в партонной модели из формул (8.7.7) и (8.7.38) для комптоновского рассеяния.
4. Перечислите калибровочно инвариантные бесследовые тензоры твиста четыре в квантовой хромодинамике.
5. В безмассовой скалярной теории поля с взаимодействием $-g\phi^4/24$ ($g > 0$) определите, где в комплексной плоскости можно ожидать появления у функции (20.7.3) особенностей типа ренормалонов?

Список литературы

1. Wilson, K., *Phys. Rev.* **179**, 1499 (1969).
2. Zimmermann, W., in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics*, eds. S. Deser, H. Pendleton, and M. Grisaru (MIT Press, Cambridge, 1970).
3. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **118**, 838 (1960).
4. Bernard, C., Duncan, A., LoSecco, J., and Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D12**, 792 (1975).
5. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 507 (1967). Общий случай см. [4].
6. Kawarabayashi, K. and Suzuki, M., *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 255 (1966); Riazuddin and Fayyazuddin, *Phys. Rev.*, **147**, 1071 (1966).
7. Ademollo, M., Veneziano, G., and Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **22**, 83 (1969).
8. Donoghue, J.F. and Golowich, E., *Phys. Rev.*, **D49**, 1513 (1994).
9. Этот результат был доложен на Рочестерской конференции 1968 г. в Вене и опубликован в работах: Bloom, E.D. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 930 (1969); Breidenbach, M. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 935 (1969).
10. Bjorken, J.D., *Phys. Rev.*, **179**, 1547 (1969).
11. Feynman, R.P., *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 1415 (1969); *Photon-Hadron Interactions* (Benjamin, New York, 1972).
12. Callan, C.G. and Gross, D.J., *Phys. Rev. Lett.*, **22**, 156 (1969). Следует предупредить читателей, что символ ω в работе Каллана и Гросса в используемых здесь обозначениях есть $2/\omega$.
13. Gross, D.J. and Treiman, S., *Phys. Rev.*, **D4**, 1059 (1971).

14. Christ, N., Hasslacher, B., and Mueller, A.H., *Phys. Rev.*, **D6**, 3543 (1972).
15. Altarelli, G. and Parisi, G., *Nucl. Phys.*, **B126**, 298 (1972).
16. Georgi, H. and Politzer, H.D., *Phys. Rev.*, **D9**, 416 (1974).
17. Gross, D.J. and Wilczek, F., *Phys. Rev.*, **D9**, 980 (1974).
18. Dyson, F.J., *Phys. Rev.*, **85**, 631 (1952).
19. См., например: Hardy, G.H., *Divergent Series* (Oxford University press, Oxford, 1949).
20. Lipatov, L.N., Leningrad Nuclear Physics Institute report, 1976 (unpublished); Proc. of the XVIII Int. Conf. on High Energy Physics at Tbilisi, 1976.
21. 't Hooft, G., in *The Whys of Subnuclear Physics — Proc. of the 1977 Erice Summer School*, ed. by A. Zichichi (Plenum, New York, 1978). Сборник работ по ренормалонам и высоким порядкам теории возмущений см.: *Large Order Behavior of Perturbation Theory*, eds. J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1990). Дальнейшие работы по инфракрасным ренормалонам: Mueller, A.H., *Phys. Lett.*, **B308**, 355 (1993); *Nucl. Phys.*, **B250**, 327 (1995), Duncan, A. and Pernice, S., *Phys. Rev.*, **D51**, 1956 (1995) и цитированные там работы.
22. Lautrup, B., *Phys. Lett.*, **76B**, 109 (1977).

Спонтанно нарушенные калибровочные симметрии

Поначалу казалось, что доказанная в 1961 году теорема ¹ о том, что нарушенная симметрия влечет появление безмассовых голдстоуновских бозонов спина нуль, является серьезным основанием для поиска нарушенных симметрий в природе. Несколькими годами спустя рядом авторов было отмечено уже упоминавшееся в разделе 19.2 исключение из этой теоремы: если нарушенная симметрия не глобальна, а локальна, то голдстоуновские бозоны отсутствуют ². Соответствующие степени свободы проявляются как связанные с нарушенной локальной симметрией состояния векторных частиц нулевой спиральности, приобретающие поэтому массу. Это явление, общеизвестное сейчас как *механизм Хиггса*, не было сначала сразу использовано в какой-то реалистической теории, возможно, потому, что в середине 1960-х годов стало ясно, что пион является голдстоуновским бозоном спонтанно нарушенной приближенной симметрии, и поэтому попыткам избежать появления голдстоуновских бозонов стали уделять меньше внимания. Однако вскоре оказалось, что спонтанно нарушенные локальные симметрии обеспечивают естественную основу для понимания слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц ³.

21.1. Унитарная калибровка

Мы видели в гл. 19, что в теории с глобальной группой симметрии G , которая спонтанно нарушается до подгруппы H , для каждой независимой нарушенной симметрии существует безмассо-

вый «голдстоуновский» бозон в том смысле, что массовая матрица M_{nm}^2 действительных бесспиновых полей $\phi_n(x)$ имеет нулевое собственное значение, отвечающее собственному вектору $\sum_m (t_\alpha)_{nm} v_m$ для каждого независимого генератора t_α нарушенной симметрии группы G . (Мы рассматриваем здесь случай, когда эти голдстоуновские бозоны включены в общее число элементарных бесспиновых частиц, представленных скалярными или псевдоскалярными полями ϕ_n , входящими в лагранжиан; более общий случай будет рассмотрен в разделе 21.4.) Мы видели также, что можно устранить эти голдстоуновские моды, подвергнув поля G -преобразованию $\gamma^{-1}(x)$,

$$\tilde{\phi}_n(x) = \sum_m \gamma_{nm}^{-1}(x) \phi_m(x), \quad (21.1.1)$$

такому, что новые поля ортогональны голдстоуновским направлениям *

$$0 = \sum_{nm} \tilde{\phi}_n(x) (t_\alpha)_{nm} v_m, \quad (21.1.2)$$

где v_n — среднее по вакууму. После такого поворота полей, при котором они удовлетворяют соотношению (21.1.2), поля голдстоуновских бозонов возникают вновь как зависящие от точки пространства-времени параметры в $\gamma(x)$. Смысл этой процедуры заключался в том, что, поскольку лагранжиан был инвариантен относительно преобразования (21.1.1) с постоянными $\gamma(x)$, вся зависимость от $\gamma(x)$ выпадала, за исключением тех слагаемых, где на $\gamma(x)$ действовали производные.

С другой стороны, если лагранжиан инвариантен не только относительно постоянных G -преобразований, но и относительно G -преобразований, зависящих от точки в пространстве-времени, тогда преобразование (21.1.1) является истинной симметрией теории, и вся зависимость от $\gamma(x)$ выпадает из лагранжиана, так что можно везде просто заменить $\phi_n(x)$ на. Это является выбором калибровки, которая фиксируется наложением условия (21.1.2) на, а не наложением условий на сами калибровочные поля. (Например, в электродинамике заряженного скалярного поля $\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2$ можно выбрать калибровку типа лоренцевской или кулоновской, наложив

* Здесь мы работаем с действительным приводимым или неприводимым представлением алгебры симметрии, для которого матрицы t_α действительны. Переход к комплексным представлениям описан ниже.

соответственно условия $\partial_\mu A^\mu = 0$ или $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, но с тем же успехом можно выбрать калибровку, наложив условие на Φ , например, потребовав, чтобы Φ было действительным, или, иначе говоря, повернув 2-вектор $\{\text{Re}\Phi, \text{Im}\Phi\}$ в направлении первой оси.) Калибровка, определенная условием (21.1.2), называется *унитарной калибровкой*^{3а}, т. к. в этой калибровке будет очевидно, что в теории отсутствуют любые степени свободы с отрицательной вероятностью типа времениподобных калибровочных бозонов. Выражаясь более общо, унитарная калибровка делает очевидным меню физических частиц в теории.

Из условия (21.1.2) видно, что в унитарной калибровке нет полей голдстоуновских бозонов. Поскольку теория калибровочно-инвариантна, это означает, что в любой калибровке, какую бы мы не выбрали, отсутствуют физические голдстоуновские бозоны. Что можно сказать о векторных бозонах? Если Φ_n — элементарные канонически нормированные скалярные поля Φ_n , лагранжиан будет содержать слагаемое

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{1}{2} \sum_n \left(\partial_\mu \tilde{\Phi}_n - i \sum_{m,\alpha} t_{nm}^\alpha A_{\alpha\mu} \tilde{\Phi}_m \right)^2. \quad (21.1.3)$$

где t^α принимает значения всех генераторов калибровочной группы G . (С этого момента будем опускать тильды, понимая при этом, что везде в данном разделе мы работаем в унитарной калибровке.) Мы предполагаем, что симметрия G нарушена вакуумным средним v_n поля Φ_n , поэтому, чтобы понять происхождение спектра частиц, определим сдвинутое поле Φ' :

$$\Phi_n \equiv v_n + \Phi'_n. \quad (21.1.4)$$

(Иногда удобно задавать v_n в формулах (21.1.2) и (21.1.4) как среднее по вакууму в древесном приближении. Чтобы породить приемлемую теорию возмущений, необходимо всего лишь, чтобы v_n согласовывалось с истинным средним по вакууму в низшем порядке.) Разлагая выражение (21.1.3) до второго порядка по Φ' и A , имеем

$$\mathcal{L}_{\Phi, \text{QUAD}} = -\frac{1}{2} \sum_n \left(\partial_\mu \Phi'_n - i \sum_{m,\alpha} t_{nm}^\alpha A_{\alpha\mu} v_m \right)^2. \quad (21.1.5)$$

Используя условие (21.1.2), видим, что перекрестное по полям Φ' и A слагаемое обращается в нуль, так что

$$\mathcal{L}_{\Phi, \text{QUAD}} = -\frac{1}{2} \sum_n \partial_\mu \Phi'_n \partial^\mu \Phi'_n - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 A_{\alpha\mu} A_\beta^\mu, \quad (21.1.6)$$

где

$$\mu_{\alpha\beta}^2 \equiv - \sum_{nml} t_{nm}^\alpha t_{nl}^\beta v_m v_l. \quad (21.1.7)$$

Комбинируя это с квадратичными слагаемыми в лагранжиане Янга–Миллса $-\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu}$, видим, что у векторных частиц появилась массовая матрица. В наших обозначениях генераторы t_{nm}^α пропорциональны калибровочным константам связи, поэтому выражение (21.1.7) приводит к массам векторных бозонов, которые также пропорциональны этим константам связи.

Рассмотрим некоторые алгебраические свойства $\mu_{\alpha\beta}^2$. Поскольку матрица t_{nm}^α мнимая и антисимметрична (и поэтому эрмитова), матрица $\mu_{\alpha\beta}^2$ действительна, симметрична и положительна. Кроме того, если какая-то действительная линейная комбинация генераторов $\sum_\alpha c_\alpha t_\alpha$ не нарушена, тогда

$$\sum_{\alpha, m} c_\alpha (t_\alpha)_{nm} v_m = 0, \quad (21.1.8)$$

и в этом случае из (21.1.7) видно, что, как отмечено Кибблом ²,

$$\sum_\beta \mu_{\alpha\beta}^2 c_\beta = 0. \quad (21.1.9)$$

Это означает, что у нас все еще на каждую ненарушенную симметрию есть безмассовый калибровочный бозон. Обратное также верно: из выражения (21.1.7) следует, что для произвольных действительных констант c_α

$$\sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 c_\alpha c_\beta = \sum_n \left(\sum_{\alpha, m} c_\alpha \cdot i t_{nm}^\alpha v_m \right)^2 \geq 0, \quad (21.1.10)$$

и это выражение может обратиться в нуль только, если c_α удовлетворяет условию (21.1.8).

В частности, если имеется всего лишь одна ненарушенная симметрия $\sum_{\alpha} c_{\alpha} t_{\alpha}$, то произвольное калибровочное поле можно записать как

$$A_{\alpha}^{\mu} = c_{\alpha} A^{\mu} + \dots, \quad (21.1.11)$$

где многоточие означает линейную комбинацию калибровочных полей определенной ненулевой массы, а c_{α} — коэффициент при t^{α} в единственном ненарушенном генераторе q ,

$$q = \sum_{\alpha} c_{\alpha} t_{\alpha}, \quad (21.1.12)$$

так что поле A^{μ} будет входить в массовое слагаемое $-\frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 A_{\alpha}^{\mu} A_{\mu\beta}$ с нулевым коэффициентом. Для того, чтобы коэффициент при $-\frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu})^2$ в кинетической части калибровочного лагранжиана $-\frac{1}{4} \sum_{\alpha} (\partial_{\mu} A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} A_{\alpha\mu})^2$ имел каноническое значение 1, нужно также отнормировать коэффициенты c_{α} :

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}^2 = 1. \quad (21.1.13)$$

Заметим, что q — это заряд, с которым связано поле A^{μ} , в том смысле, что

$$\sum_{\alpha} t_{\alpha} A_{\alpha}^{\mu} = q A^{\mu} + \dots, \quad (21.1.14)$$

где многоточие опять обозначает слагаемые, включающие массивные калибровочные поля. Мы используем эти общие результаты в разделе 21.3 при изучении электрослабой теории.

Полученные результаты были выведены здесь для скалярных полей, образующих действительное представление калибровочной группы, но их можно непосредственно преобразовать к виду, годящемуся для комплексных представлений. В разделе 19.6 мы видели, что комплексное скалярное поле $\chi(x)$, преобразующееся по представлению калибровочной группы с эрмитовыми генераторами T_{α} , можно записать как совокупность действительных полей

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \text{Re } \chi(x) \\ \text{Im } \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (21.1.15)$$

реализующих действительное представление калибровочной группы с генераторами

$$it^\alpha = \begin{pmatrix} -\text{Im } T^\alpha & -\text{Re } T^\alpha \\ \text{Re } T^\alpha & -\text{Im } T^\alpha \end{pmatrix}. \quad (21.1.16)$$

Подставляя соотношения (21.1.15) и (21.1.16) в (21.1.7), получаем массовую матрицы векторного бозона в виде

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = \text{Re} \left(\langle \chi \rangle_{\text{VAC}}^\dagger, T_\alpha T_\beta \langle \chi \rangle_{\text{VAC}} \right) = \frac{1}{2} \left(\langle \chi \rangle_{\text{VAC}}^\dagger, \{T_\alpha T_\beta\} \langle \chi \rangle_{\text{VAC}} \right). \quad (21.1.17)$$

Рассмотрим теперь более детально пропагатор векторного поля. Включая в лагранжиан Янга–Миллса квадратичное слагаемое, видим, что часть полного лагранжиана, квадратичная по A , имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \sum_\alpha (\partial_\lambda A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\lambda})^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 A_{\alpha\lambda} A_\beta^\lambda \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} A_\alpha^\nu \mathcal{D}_{\alpha\nu,\beta\lambda}(\partial) A_\beta^\lambda + \text{полные производные}, \end{aligned} \quad (21.1.18)$$

где

$$\mathcal{D}_{\alpha\nu,\beta\lambda}(\partial) = \delta_{\alpha\beta} [\eta_{\nu\lambda} \square - \partial_\nu \partial_\lambda] - \mu_{\alpha\beta}^2 \eta_{\nu\lambda}. \quad (21.1.19)$$

Предположим для простоты что все калибровочные симметрии нарушены, так что не имеет нулевых собственных значений. Согласно описанному в разделе 9.4 общим правилам, пропагатор калибровочного поля в импульсном представлении имеет вид

$$\Delta_{\alpha\nu,\beta\lambda}(k) = -(\mathcal{D}^{-1})_{\alpha\nu,\beta\lambda}(ik) = \left[(k^2 + \mu^2)^{-1} (\eta_{\nu\lambda} + \mu^{-2} k_\nu k_\lambda) \right]_{\alpha\beta}. \quad (21.1.20)$$

Из-за слагаемого с $k_\nu k_\lambda$ асимптотическое поведение пропагатора $\Delta(k) \sim O(k^0)$, и это не позволяет для доказательства перенормируемости использовать обычные рассуждения, основанные на подсчете индекса расходимости. К счастью, как мы увидим в следующем разделе, существует другая калибровка, в которой перенормируемость становится очевидной, но ценой затуманивания вопроса о том, какие частицы содержатся в теории.

* * *

Важно отметить, что хотя в пределе нулевых констант связи голдстоуновские бозоны внезапно вновь возникают в физическом спектре, физические матричные элементы идеально непрерывны в этом пределе. Это происходит потому, что в унитарной калибровке в пределе нулевых калибровочных констант связи калибровочные бозоны отъединяются не полностью. Рассмотрим матричный элемент для процесса рассеяния $A + B \rightarrow C + D$, где A и C принадлежат некоторому представлению калибровочной алгебры, а B и D принадлежат какому-то другому представлению этой алгебры. Элемент S -матрицы для этого процесса содержит вклад от обмена векторным бозоном

$$S_{CD,AB} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) \langle C | J_{N\alpha}^\nu | A \rangle \Delta_{\alpha\nu, \beta\lambda}(k) \langle D | J_{N\alpha}^\lambda | B \rangle, \quad (21.1.21)$$

где $k = p_A - p_C = p_D - p_B$, а $J_{N\alpha}^\nu$ — ток, с которым связаны калибровочные бозоны, где нижний индекс N напоминает, что в данной калибровке мы опускаем в этом токе слагаемое с полюсом голдстоуновского бозона. Такой ток пропорционален калибровочным константам связи, так что единственные слагаемые в (21.1.21), выживающие в пределе нулевых констант связи, содержат матрицу μ^{-2} , которая в этом пределе сингулярна. Поэтому при нулевых константах связи элемент S -матрицы равен

$$S_{CD,AB} \rightarrow i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) k_\nu k_\lambda (\mu^{-2})_{\alpha\beta} \times \langle C | J_{N\alpha}^\nu | A \rangle \frac{1}{k^2} \langle D | J_{N\alpha}^\lambda | B \rangle. \quad (21.1.22)$$

Калибровочные константы связи в токах сократились с такими же константами в матрице μ^2 .

Сравним теперь этот результат со вкладом от обмена голдстоуновским бозоном. При обращающихся в нуль калибровочных константах имеется множество голдстоуновских бозонов B_α , связанных с генератором t_α (для простоты предполагаем, что все калибровочные симметрии спонтанно нарушены), для которых кинематическое слагаемое в лагранжиане имеет вид $-\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_\alpha \partial^\mu \Phi_\beta \sum_n Z_{\alpha n} Z_{\beta n}$ где Z_n — компонента голдстоуновского бозона B_α в бесспиновом поле Φ_n , определенная выражением (19.2.39).

Для того, чтобы поля голдстоуновских бозонов были каноническим образом нормированы, мы должны поэтому иметь

$$\sum_n Z_{\alpha n} Z_{\beta n} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (21.1.23)$$

Согласно формуле (19.2.49), голдстоуновский бозон B_α связан с токами $J_{N\beta}^\nu$ с константой связи $F_{\alpha\beta}^{-1}$, где $F_{\alpha\beta}$ — константа связи голдстоуновского бозона, ассоциированного с генератором t_α , с током, определенная выражением (19.2.38). Таким образом, обмен голдстоуновскими бозонами дает матричный элемент

$$S_{CD,AB} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D) k_\nu k_\lambda F_{\alpha\gamma}^{-1} F_{\beta\gamma}^{-1} \times \langle C | J_{N\alpha}^\nu | A \rangle \frac{1}{k^2} \langle D | J_{N\alpha}^\lambda | B \rangle. \quad (21.1.24)$$

Но из соотношений (19.2.40), (21.1.7) и (21.1.23) получаем массовую матрицу векторного бозона в виде

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = \sum_n F_{\alpha\gamma} Z_{\gamma n} F_{\beta\delta} Z_{\delta n} = F_{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma}, \quad (21.1.25)$$

так что в пределе нулевой калибровочной константы связи матричный элемент с обменом калибровочным бозоном (21.1.22) совпадает с матричным элементом с обменом голдстоуновским бозоном. Это рассуждение можно обратить: требование непрерывности при нулевой калибровочной константе связи можно использовать для вывода формулы для масс калибровочных бозонов даже в случае, когда все другие константы связи велики.

21.2. Перенормируемые ξ -калибровки

В 1971 году 'т Хоофт ⁴ показал, что функциональные интегралы в спонтанно нарушенных калибровочных теориях можно вычислять в калибровке, в которой пропагаторы векторных бозонов при импульсах $k \rightarrow \infty$ обращаются в нуль как k^{-2} , так что такие теории удовлетворяют описанному в разделе 12.2 тесту на перенор-

мируемость методом подсчета степеней. В этом разделе мы опишем более широкий класс перенормируемых калибровок, параметризованных произвольной константой ξ , введенный несколько позднее Фуджикавой, Ли и Санда.⁵

В произвольных калибровках кинематический член (21.1.3) в лагранжиане скалярных полей теории содержит перекрестное слагаемое

$$i \sum_{nm\alpha} \partial_\mu \phi'_n t_{nm}^\alpha A_\alpha^\mu v_m,$$

где v_m — вакуумное среднее поля ϕ_m , а ϕ'_n — сдвинутое поле, определенное формулой (21.1.4). В унитарной калибровке это слагаемое исчезает из-за калибровочного условия (21.1.2). Мы предпочтем здесь другой подход, близкий к тому, который использовался в разделах 15.5 и 15.6. Введем в функциональный интеграл функционал $B[f]$, где

$$B[f] = \exp\left(\frac{-i}{2\xi} \int d^4x \sum_\alpha f_\alpha f_\alpha\right). \quad (21.2.1)$$

Это эквивалентно добавлению в лагранжиан фиксирующего калибровку слагаемого

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha. \quad (21.2.2)$$

Вместо того, чтобы принять $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$, как в разделе 15.5, выберем функцию, которая фиксирует калибровку, в виде

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu - i\xi(t_\alpha)_{nm} \phi'_n v_m, \quad (21.2.3)$$

Эта функция построена так, что упомянутое выше перекрестное слагаемое в (21.1.3) сокращается с перекрестным слагаемым в (21.2.2). Унитарная калибровка становится теперь частным случаем; при $\xi \rightarrow \infty$ фиксирующий калибровку функционал (21.2.1) имеет стремящийся к бесконечности острый максимум при ϕ' , удовлетворяющем калибровочному условию (21.1.2). Другой частный случай соответствует пределу $\xi \rightarrow 0$; в этом случае фиксирующий калибровку

функционал имеет максимум при значении калибровочного поля, удовлетворяющего калибровочному условию Ландау $\partial_\mu A^\mu_\alpha = 0$.

Включим также в лагранжиан полином четвертой степени $-P(\varphi)$, подчиняющийся условию калибровочной инвариантности

$$\frac{\partial P(\varphi)}{\partial \varphi_n} (t_\alpha)_{nm} \varphi_m = 0. \quad (21.2.4)$$

Конечно, мы должны включить в лагранжиан и слагаемое, описывающее калибровочное поле,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} \sum_\alpha F_\alpha^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu}. \quad (21.2.5)$$

Тогда полный лагранжиан калибровочных и скалярных полей имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A,\varphi} &\equiv \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{gf} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_\alpha F_\alpha^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{n\alpha\beta} (t^\alpha \varphi)_n (t^\beta \varphi)_n A^\mu_\alpha A_{\beta\mu} - \frac{1}{2\xi} \sum_\alpha (\partial_\mu A^\mu_\alpha)(\partial_\nu A^\nu_\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_n \partial_\mu \varphi'_n \partial^\mu \varphi'_n + \frac{\xi}{2} \sum_{\alpha nm} (t_\alpha v)_n (t_\alpha v)_m \varphi'_n \varphi'_m \\ &\quad - P(\varphi) + i \sum_{\alpha nm} \partial_\mu \varphi'_n (t_\alpha)_{nm} \varphi'_m A^\mu_\alpha + \text{полные производные}. \end{aligned} \quad (21.2.6)$$

Как мы видели в разделе 15.6, введение фиксирующего калибровку функционала $B[f]$ требует также введения поля гостов $\omega_\alpha(x)$, лагранжиан которого зависит от свойств f_α относительно калибровочных преобразований. Под действием произвольного калибровочного преобразования (с произвольной функцией $\varepsilon_\alpha(x)$)

$$\delta A^\mu_\alpha = -\sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\beta A^\mu_\gamma + \partial^\mu \varepsilon_\alpha, \quad (21.2.7)$$

$$\delta \varphi_n = i \sum_\alpha \varepsilon_\alpha (t_\alpha)_{nm} \varphi_m, \quad (21.2.8)$$

имеем

$$\delta f_\alpha = \square \varepsilon_\alpha - \sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (\varepsilon_\beta A_\gamma^\mu) + \xi \sum_{n\beta} (t_\alpha v)_n \varepsilon_\beta (t_\beta \Phi)_n. \quad (21.2.9)$$

Согласно общим результатам раздела 15.6, это приводит к лагранжиану гостов

$$\mathcal{L}_\omega = \omega_\alpha^* \left[\square \omega_\alpha - \sum_{\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (\omega_\beta A_\gamma^\mu) + \xi \sum_{n\beta} (t_\alpha v)_n \omega_\beta (t_\beta \Phi)_n \right]. \quad (21.2.10)$$

Наконец, если теория включает фермионы спина 1/2, в лагранжиане должно быть произвольное перенормируемое слагаемое

$$\mathcal{L}_\psi = -\bar{\Psi}(\not{\partial} - iA t_\alpha^{(\Psi)} + m_0 + \Gamma_n \Phi_n)\Psi, \quad (21.2.11)$$

где $t_\alpha^{(\Psi)}$ — матричное представление генераторов калибровочной группы для фермионов (включающее множители с константой связи), а m_0 и Γ_n — постоянные матрицы (в общем случае, линейные комбинации слагаемых, пропорциональных дираковским матрицам 1 и γ_5), удовлетворяющие условиям калибровочной инвариантности:

$$[t_\alpha^{(\Psi)}, \gamma_4 m_0] = 0, \quad (21.2.12)$$

$$[t_\alpha^{(\Psi)}, \gamma_4 \Gamma_n] + \sum_m (t_\alpha)_{mn} \gamma_4 \Gamma_m = 0. \quad (21.2.13)$$

(Множитель $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$ возникает от определения $\Psi \equiv \psi^\dagger \gamma_4$. Он существует, только если $t_\alpha^{(\Psi)}$ включает слагаемые, пропорциональные γ_5 .) Доказанная в разделах 15.5 и 15.6 общая теорема гарантирует, что вычисленная по лагранжиану, представленному суммой выражений (21.2.6), (21.2.10) и (21.2.11), S -матрица не зависит от выбора параметра ξ , входящего в фиксирующую калибровку функцию (21.2.3), так что при любом ξ будут получаться те же результаты, что и при выборе $\xi = \infty$, отвечающем унитарной калибровке.

Для вывода выражений для пропагаторов всех этих полей нам нужна квадратичная по полям часть лагранжиана

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{QUAD}} = & -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} (\partial^{\mu} A_{\alpha}^{\nu} - \partial^{\nu} A_{\alpha}^{\mu}) (\partial_{\mu} A_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} A_{\alpha\mu}) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 A_{\alpha}^{\mu} A_{\beta\mu} - \frac{1}{2\xi} \sum_{\alpha} (\partial_{\mu} A_{\alpha}^{\mu}) (\partial_{\nu} A_{\alpha}^{\nu}) \\
& - \frac{1}{2} \sum_n (\partial_{\mu} \phi'_n) (\partial^{\mu} \phi'_n) - \frac{1}{2} \sum_{nm} M_{nm}^2 \phi'_n \phi'_m \\
& - \bar{\Psi} (\not{\partial} + m) \Psi - \partial_{\mu} \omega_{\alpha}^* \partial^{\mu} \omega_{\alpha} - \xi \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 \omega_{\alpha}^* \omega_{\beta} \\
& + \text{полные производные,}
\end{aligned} \tag{21.2.14}$$

где — массовая матрица векторных бозонов (21.1.7):

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = - \sum_n (t_{\alpha} v)_n (t_{\beta} v)_n, \tag{21.2.15}$$

а M_{nm}^2 и m — новые скалярная и фермионная массовые матрицы:

$$\begin{aligned}
M_{nm}^2 &= \left. \frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \right|_{\phi=v} - \frac{\xi}{2} \sum_{\alpha} (t_{\alpha} v)_n (t_{\alpha} v)_m, \\
m &= m_0 + \sum_n \Gamma_n v_n.
\end{aligned} \tag{21.2.16}$$

Как видно из (21.2.14), госты имеют зависящие от калибровки массы, равные $\sqrt{\xi}$, умноженному на соответствующие массы векторных бозонов.

Эти выражения определяют массы частиц в нулевом порядке теории возмущений. В этом порядке среднее по вакууму v_n есть просто положение минимума полиномиального «потенциала» $P(\phi)$:

$$\left. \frac{\partial P(\phi)}{\partial \phi_n} \right|_{\phi=v} = 0. \tag{21.2.17}$$

Кроме того, как мы уже видели в разделе 19.2, из выражений (21.2.4) и (21.2.17) следует, что

$$\sum_m \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi_n \partial \varphi_m} \Big|_{\varphi=v} (t_\alpha v)_m = 0 \quad (21.2.18)$$

для всех α . Отсюда вытекает, что вместо голдстоуновских мод с нулевыми массами матрица квадратов масс скалярных бозонов в формуле (21.2.16) имеет собственные значения, равные $\sqrt{\xi}$, умноженному на ненулевые массы векторных бозонов. Это означает, что если $\mu_{\alpha\beta}^2$ имеет собственный вектор c_β с собственным значением μ^2 , то $\sum_\beta c_\beta t_\beta v$ есть собственный вектор M^2 с собственным значением $\xi\mu^2$:

$$\sum_m M_{nm}^2 \left(\sum_\beta c_\beta t_\beta v \right)_m = \xi \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 c_\beta (t_\alpha v)_n = \xi \mu^2 \left(\sum_\alpha c_\alpha t_\alpha v \right)_n. \quad (21.2.19)$$

Следовательно другие собственные векторы ортогональны ко всем упомянутым, отсюда, ортогональны ко всем $t_\alpha v$, так что эти собственные векторы и соответствующие собственные значения — такие же, как и для матрицы $(\partial^2 P(\varphi) / \partial \varphi_n \partial \varphi_m)_{\varphi=v}$. Видим, что при значении $\xi \rightarrow \infty$, отвечающему унитарной калибровке, голдстоуновские бозоны столь тяжелые, что они выпадают из теории, а массы всех других бозонов — такие же, как обычно.

Пропагаторы вычисляются по обычным правилам: если (после интегрирования по частям) часть лагранжиана, отвечающая свободным частицам, принимает вид $-\zeta^\dagger \mathcal{D}(\partial)\zeta$ для комплексного поля ζ или $-\frac{1}{2}\zeta^T \mathcal{D}(\partial)\zeta$ для действительного скалярного поля ζ , то пропагатор этого поля равен $\mathcal{D}^{-1}(ik)$. Отсюда получаем пропагаторы:

$$A: \Delta_{\alpha\mu,\beta\nu}(k) = \left[\frac{1}{k^2 + \mu^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\xi)k_\mu k_\nu}{k^2 + \mu^2 \xi} \right) \right]_{\alpha\beta}, \quad (21.2.20)$$

$$\varphi: \Delta_{nm}(k) = (k^2 + M^2)_{nm}^{-1} + \xi \sum_{\alpha,\beta} (t_\alpha v)_n (t_\beta v)_m (k^2)^{-1} (k^2 + \xi\mu^2)_{\alpha\beta}^{-1}, \quad (21.2.21)$$

$$\psi: \Delta(k) = [-ik + m] / (k^2 + m^2), \quad (21.2.22)$$

$$\omega: \Delta_{\alpha\beta}(k) = (k^2 + \xi\mu^2)^{-1}_{\alpha\beta}. \quad (21.2.23)$$

Полюсы в (21.2.20) при нефизических значениях квадратов масс, пропорциональных ξ , сокращаются с полюсами при тех же значениях масс в (21.2.21). Заметим, что теперь при конечных ξ все пропагаторы имеют одинаковое асимптотическое поведение, как и в случае ненарушенной симметрии, что и требуется для перенормируемости. В частности, член с $k_\mu k_\nu$ в пропагаторе векторного бозона не создает более никаких проблем для перенормируемости, поскольку он сопровождается дополнительным множителем $(k^2 + \mu^2\xi)^{-1}$. Мы можем даже отбросить этот член, выбрав фейнмановскую калибровку с $\xi = 1$. Только в унитарной калибровке, где $\xi \rightarrow \infty$, этот множитель не может обеспечить необходимое для перенормируемости асимптотическое поведение пропагатора.

Даже при хорошо ведущих себя пропагаторах все еще необходимо показать, что ультрафиолетовые расходимости в этих теориях так ограничены нарушенными калибровочными симметриями, что каждая расходимость может быть сокращена перенормировкой поля или параметра в лагранжиане. Это можно показать с помощью тех же методов, которые использовались в разделах 17.2 и 17.3, но рассматривая средние по вакууму бесспиновых полей не как фиксированные нарушающие симметрии величины, а как внешние поля ^{5a}.

21.3. Электрослабая теория

Спонтанно нарушенные калибровочные теории нашли наиболее важное применение в теории слабых и электромагнитных взаимодействий ⁵. При низких энергиях слабые взаимодействия хорошо описываются эффективным лагранжианом, являющимся суммой произведений векторных (включая сюда и аксиально-векторные) токов (см. формулу (19.4.22)). Отсюда вытекает, что эти взаимодействия могут быть по аналогии с электромагнетизмом описаны определенного типа калибровочной теорией. Для того, чтобы обеспечить раздельное сохранение лептонов электронного и мюонного типов и барионов (или кварков), можно предположить, что известные лептоны электронного и мюонного типов и кварки образуют отдельные представления калибровочной груп-

пы. С учетом этого предположения для структуры калибровочной группы существует всего несколько возможностей.

Рассмотрим сначала лептонные поля электронного типа. Насколько мы знаем, набор этих полей состоит из левых и правых компонент электронного поля e :

$$e_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)e, \quad e_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)e, \quad (21.3.1)$$

и чисто левого поля электронного нейтрино ν_{eL} :

$$\gamma_5 \nu_{eL} = \nu_{eL}. \quad (21.3.2)$$

В любом представлении калибровочной группы поля должны иметь одинаковые свойства по отношению к лоренцовским преобразованиям, поэтому в данном случае представления калибровочной группы разделяются * на левый дублет (ν_{eL}, e_L) и правый синглет e_R . Следовательно, наибольшая возможная группа — это

$$SU(2)_L \times U(1)_L \times U(1)_R,$$

и по отношению к ней поля преобразуются как

$$\delta \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} = i[\bar{\epsilon} \cdot \vec{t} + \epsilon_L t_L + \epsilon_R t_R] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad (21.3.3)$$

где генераторы имеют вид

$$\vec{t} = \frac{g}{4}(1 + \gamma_5) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (21.3.4)$$

$$t_L \propto (1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21.3.5)$$

$$t_R \propto (1 - \gamma_5), \quad (21.3.6)$$

* Если допустить калибровочные взаимодействия, меняющие электронное лептонное число, тогда в представление калибровочной группы можно наряду с ν_{eL} и e_L включить левое поле e_R . На этом был основан ранний $SO(3)$ вариант ⁶ электрослабой теории, который позднее был исключен экспериментом.

с константой g , которая будет выбрана ниже. Удобно вместо t_L и t_R рассматривать генераторы

$$y \equiv g \left[\left(\frac{1 + \gamma_5}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \right], \quad (21.3.7)$$

и

$$n_e \equiv g'' \left[\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \right], \quad (21.3.8)$$

где g' и g'' — константы, которые, как и g , будут определены ниже. Генератор y возникает вместе с t_3 в линейной комбинации, играющей особую роль в физике. Это электрический заряд

$$q = e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{e}{g} t_3 - \frac{e}{g'} y. \quad (21.3.9)$$

Кроме того, n_e — электронное лептонное число. Мы хотим включить в теорию как меняющие заряд слабые взаимодействия (вроде бета-распада), так и электромагнитные взаимодействия, поэтому мы предположим, что существуют калибровочные поля B^μ , связанные с y . Кроме того, мы можем по желанию включить калибровочное поле, связанное с одной оставшейся независимой линейной комбинацией t_L и t_R , которую можно выбрать, например, как электронное лептонное число (21.3.8). Существуют очень жесткие ограничения⁷ на дальнodelствующие силы, которые могли бы порождаться связанным с n_e безмассовым калибровочным полем, поэтому для того, чтобы включить в теорию такое калибровочное поле с константой взаимодействия g'' , сравнимой с константами слабых и электромагнитных взаимодействий, необходимо предположить, что эта калибровочная симметрия спонтанно нарушена.**

** Заметим, что это возможно без нарушения глобального закона сохранения электронного лептонного числа. Нужно лишь предположить, что лагранжиан инвариантен относительно как глобального фазового преобразования, действующего только на поля лептонов электронного типа, так и локального фазового преобразования, действующего на поля лептонов электронного типа и на некоторое не взаимодействующее с лептонами скалярное поле. Среднее по вакууму этого скалярного поля, не нарушая

Однако нет никаких экспериментальных свидетельств слабого взаимодействия, которое порождалось бы такой калибровочной связью (и, наоборот, уже есть множество свидетельств против этого), поэтому мы просто исключим n_e из генераторов калибровочной группы. Тогда калибровочная группа — это ⁸

$$G = SU(2)_L \times U(1) \quad (21.3.10)$$

с генераторами $\bar{t}$, y , которые определяются формулами (21.3.4) и (21.3.7) соответственно. Константы связи g и g' должны быть подобраны так, чтобы связанные с этими генераторами калибровочные поля $\bar{A}^\mu$ и B^μ были каноническим образом нормированы. Наиболее общий калибровочно инвариантный и перенормируемый лагранжиан, включающий только эти калибровочные поля и лептоны электронного типа, имеет поэтому вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_e = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu + g\bar{A}_\mu \times \bar{A}_\nu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \\ & - \bar{l}(\not{\partial} - i\bar{A} \cdot \vec{t}_L - iBy)l. \end{aligned} \quad (21.3.11)$$

(Здесь было использовано то, что структурные константы групп $SU(2)_L$ и $U(1)$ равны соответственно $C_{ijk} = -ig\epsilon_{ijk}$ и нуль.)

Конечно, из четырех калибровочных полей, связанных с $\bar{t}$ и y , только одна линейная комбинация — электромагнитное поле A^μ — действительно безмассовая. Поэтому необходимо предположить, что $SU(2)_L \times U(1)$ спонтанно нарушается до подгруппы $U(1)_{em}$ с генератором, равным заряду (21.3.9). Детали механизма нарушения симметрии будут рассмотрены чуть позже. Однако, каков бы ни был этот механизм, мы знаем, что канонически нормированные векторные поля, соответствующие частицам спина единица и определенной массы, состоят из одного поля зарядом $+e$ и массой m_W

$$W^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1^\mu + iA_2^\mu), \quad (21.3.12)$$

другого поля зарядом $-e$ и той же массой

глобальной симметрии, будет нарушать локальную симметрию, придавая массу связанному с v_e калибровочному бозону.

$$W^{\mu*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1^{\mu} - iA_2^{\mu}), \quad (21.3.13)$$

и двух электрически нейтральных полей массами m_Z и нуль соответственно, которые даются ортонормированными линейными комбинациями полей A_3^{μ} и B^{μ} :

$$Z^{\mu} = \cos \theta A_3^{\mu} + \sin \theta B^{\mu}, \quad (21.3.14)$$

$$A^{\mu} = -\sin \theta A_3^{\mu} + \cos \theta B^{\mu}, \quad (21.3.15)$$

или, эквивалентно,

$$A_3^{\mu} = \cos \theta Z^{\mu} - \sin \theta A^{\mu}, \quad (21.3.16)$$

$$B^{\mu} = \sin \theta Z^{\mu} + \cos \theta A^{\mu}. \quad (21.3.17)$$

Согласно общему результату (21.1.11)–(21.1.12), генератор ненарушенной симметрии, которой в данном случае является электромагнитная калибровочная инвариантность, дается линейной комбинацией генераторов, коэффициенты в которой — те же, что и коэффициенты при соответствующем безмассовом поле в разложении канонически нормированных калибровочных полей, связанных с этими генераторами. Взглянув на формулы (21.3.16) и (21.3.17), видим, что

$$q = -\sin \theta \cdot t_3 + \cos \theta \cdot y. \quad (21.3.18)$$

Сравнивая это выражение с выражением (21.3.9), получаем поэтому

$$g = -\frac{e}{\sin \theta}, \quad g' = -\frac{e}{\cos \theta}. \quad (21.3.19)$$

Введя константы связи g и g' , можно записать теперь полное взаимодействие лептонов с калибровочными бозонами в виде

$$i\mathcal{L}'_e = -\begin{pmatrix} \bar{\nu}_e \\ e \end{pmatrix} \left[\sum_{\alpha} A_{\alpha} t_{\alpha} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} W(t_{1L} - it_{2L}) + \frac{1}{\sqrt{2}} W^*(t_{1L} + it_{2L}) \right. \\
&\quad \left. + Z(t_{3L} \cos \theta + y \sin \theta) + A(-t_{3L} \sin \theta + y \cos \theta) \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{e} W \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \nu_e \right) + \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_e W^* \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) e \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \bar{\nu}_e Z \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \nu_e + \frac{(g^2 - g'^2)}{2\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e} Z \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) e \\
&\quad + g' \bar{e} Z \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) e - e(\bar{e} A e). \tag{21.3.20}
\end{aligned}$$

Чтобы завершить построение теории, мы должны сделать какое-то предположение относительно механизма нарушения симметрии. Мы хотим, чтобы этот механизм придал массы не только $W^\pm$ и Z^0 , но и электрону. Единственный способ, которым это можно сделать в рамках перенормируемой теории со слабой связью, — это задать скалярное поле, связанное без производных с $\bar{l}_R$ и l_L (а также с $\bar{l}_L$ и l_R). Тогда инвариантность относительно $SU(2)_L$ и $U(1)$ требует, чтобы скаляр был бы $SU(2)_L$ дублетом типа l_L , но со сдвинутым значением y , а следовательно, и q . Поэтому предположим наличие «юкавской» связи

$$\mathcal{L}_{\Phi e} = -G_e \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R + \text{з.с.}, \tag{21.3.21}$$

где (ϕ^+, ϕ^0) — дублет, для которого генераторы соответствующего $SU(2) \times U(1)$ представления даются матрицами

$$\vec{t}^{(\Phi)} = \frac{g}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{21.3.22}$$

$$y^{(\Phi)} = -\frac{g'}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21.3.23}$$

так что матрица заряда равна

$$q^{(\Phi)} = \frac{e}{g} t_3^{(\Phi)} - \frac{e}{g'} y^{(\Phi)} = e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21.3.24)$$

Возможно, что в теории имеются и другие скалярные мультиплеты, но пока что предположим, что такой мультиплет единственен.

Необходимо добавить в лагранжиан слагаемые, содержащие скалярное и калибровочное поля. Наиболее общий лагранжиан, совместимый с $SU(2) \times U(1)$ калибровочной инвариантностью, лоренц-инвариантностью и перенормируемостью, имеет вид

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{1}{2} \left| (\partial_\mu - i\bar{A}_\mu \cdot \vec{t}^{(\Phi)} - iB_\mu y^{(\Phi)}) \Phi \right|^2 - \frac{\mu^2}{2} \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (21.3.25)$$

где $\lambda > 0$ и

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}. \quad (21.3.26)$$

При $\mu^2 < 0$ в стационарной точке лагранжиана полученное в древесном приближении среднее по вакууму равно

$$\langle \Phi \rangle^\dagger \langle \Phi \rangle \equiv v^2 = \frac{|\mu^2|}{\lambda}. \quad (21.3.27)$$

Мы всегда можем совершить $SU(2) \times U(1)$ калибровочное преобразование над полями в унитарной калибровке, в которой $\Phi^+ = 0$, а Φ^0 — эрмитово поле с положительным вакуумным средним. (Именно поэтому мы нормировали комплексный дублет Φ так, что в кинетическом члене в (21.3.25) появился необычный множитель $\frac{1}{2}$; единственным физическим скалярным полем является $\text{Re}\Phi^0$, так что в лагранжиан (21.3.25) это поле входит с канонической нормировкой.) Вакуумные средние компонент Φ в унитарной калибровке равны

$$\langle \Phi^+ \rangle = 0, \quad \langle \Phi^0 \rangle = v > 0. \quad (21.3.28)$$

В результате в скалярном лагранжиане (21.3.25) возникают массовые члены векторных мезонов

$$-\frac{1}{2} \left| (\bar{A}_\mu \cdot \vec{t}^{(\Phi)} + B_\mu y^{(\Phi)}) \langle \Phi \rangle \right|^2 = -\frac{1}{2} \left| \left(\frac{g}{2} \bar{A}_\mu \cdot \vec{\tau} - \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 =$$

$$= -\frac{v^2 g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu - \frac{v^2}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu. \quad (21.3.29)$$

Как и ожидалось, масса фотона равна нулю, в то время как $W^\pm$ и Z^0 приобретают массы

$$m_W = \frac{v|g|}{2}, \quad m_Z = \frac{v\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}. \quad (21.3.30)$$

Кроме того, из выражений (21.3.21) и (21.3.28) видно, что электрон приобретает в низшем порядке массу

$$m_e = G_e v. \quad (21.3.31)$$

Изучение реакций между лептонами только электронного типа затруднительно, хотя к настоящему времени уже есть данные о процессе рассеяния $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$. Для получения высокоточных данных нужно рассмотреть реакции, включающие по меньшей мере лептоны мюонного типа, например, хорошо изученный процесс распада мюона $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$. Описанная выше модель тривиально обобщается так, чтобы она включала лептоны мюонного типа, — для этого нужно просто добавить в лагранжиан слагаемые L_μ и $L_{\bar{\mu}}$, аналогичные последним слагаемым в (21.3.11) и (21.3.21), заменив поля e и ν_e на поля мюона μ и мюонного нейтрино ν_μ , а G_e — на $G_\mu(m_\mu/m_e)$. Рассмотрение выражения (21.3.20) и соответствующего слагаемого с заменой e и ν_e на μ и ν_μ показывает, что обмен W между лептонами электронного и мюонного типов при низких энергиях порождает эффективное взаимодействие

$$\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{m_W^2} \left(\bar{e}\gamma^\lambda \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\nu_e\right) \left(\bar{\nu}_\mu \gamma_\lambda \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mu\right) + \text{э.с.} \quad (21.3.32)$$

Это можно сравнить с взаимодействием в эффективной «V–A теории», которая, как известно, хорошо описывает распад мюона:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{e}\gamma^\lambda (1+\gamma_5)\nu_e\right) \left(\bar{\nu}_\mu \gamma_\lambda (1+\gamma_5)\mu\right) + \text{э.с.} \quad (21.3.33)$$

Здесь G_F — обычная фермиевская константа связи, значение которой $G_F = 1,16639(2) \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$ известно из вероятности распада мюона. Сравнивая два выражения, находим:

$$\frac{g^2}{m_W^2} = 4\sqrt{2}G_F. \quad (21.3.34)$$

Это позволяет сразу же определить вакуумное среднее v , определяемое выражением (21.3.30) как

$$v \equiv \frac{2m_W}{g} = \frac{1}{2^{1/4}G_F^{1/2}} = 247 \text{ ГэВ}. \quad (21.3.35)$$

Кроме того, из выражения (21.3.31) видно, что G_e имеет очень малое значение

$$G_e = \frac{0,511 \text{ МэВ}}{247 \text{ ГэВ}} = 2,07 \times 10^{-6} \quad (21.3.36)$$

Из формулы (31.3.30) следует, что $m_Z > m_W$. Не зная хоть что-то относительно g и g' , невозможно определить реальные значения m_Z и m_W . С помощью соотношений (21.3.30) и (21.3.19) можно выразить m_Z и m_W через угол электрослабого смешивания:

$$m_W = \frac{ev}{2|\sin \theta|} = \frac{37,3 \text{ ГэВ}}{|\sin \theta|},$$

$$m_Z = \frac{ev}{2|\sin \theta| |\cos \theta|} = \frac{74,6 \text{ ГэВ}}{|\sin 2\theta|}.$$

В этом заключаются оригинальные результаты, полученные в ³. Конечно, существуют радиационные поправки всех сортов, многие из которых зависят от деталей теории, которые в этом разделе пока что не обсуждались. Но есть одна особенно большая радиационная поправка, которую можно немедленно вычислить, не обладая дальнейшей информацией. Приведенные выше значения m_W и m_Z были вычислены с использованием обычным образом определенного заряда электрона e . Однако, как пояснялось в разделе 18.2, это значение не очень подходит для расчета процессов при энергиях $E \gg m_e$. Вместо этого следует использовать электрический заряд e_μ , определенный при скользящем масштабе μ , сравнимом с интересующими нас энергиями. При μ порядка 90 ГэВ эффективная постоянная тонкой структуры $e_\mu^2/4\pi$ равна примерно 1/129 (и мало чувствительна к точному значению μ), так что приведенные выше значения m_Z и m_W следует умножить на $\sqrt{137/129}$, что дает

$$m_W = \frac{38,4 \text{ ГэВ}}{|\sin \theta|}, \quad (21.3.37)$$

$$m_Z = \frac{76,9 \text{ ГэВ}}{|\sin 2\theta|}. \quad (21.3.38)$$

Каким бы ни было значение θ , эти массы слишком велики для того, чтобы была хоть малейшая надежда обнаружить W или Z в 1960-е или начале 1970-х годов. Вместо этого, экспериментальные свидетельства справедливости электрослабой теории появились в результате открытия предсказанного теорией нового класса слабых взаимодействий — процессов с нейтральными токами, обусловленными обменом Z^0 -бозоном⁹. Первое наблюдение процесса с нейтральным током произошло в 1973 году при детектировании в пузырьковой камере чисто лептонного процесса упругого ν_μ - e рассеяния¹⁰. Хотя эти процессы легко рассматриваются теоретически, частота событий относительно мала, потому что сечение пропорционально квадрату энергии в с. ц. и. *. Потребовались годы на то, чтобы реакции, обусловленные чисто лептонными нейтральными токами, удалось использовать для получения достаточно точного значения параметра $\sin^2 \theta$. К 1994 году изучение чисто лептонных процессов с нейтральными токами типа $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ и $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$ привело к значению $\sin^2 \theta = 0,222 \pm 0,011$, откуда получились значения $m_W = 81,5 \text{ ГэВ}$ и $m_Z = 92,5 \text{ ГэВ}$.

Еще перед открытием нейтральных токов электрослабая теория была распространена на слабые и электромагнитные взаимодействия адронов друг с другом и с лептонами. К середине 1960-х годов стало ясно, что процессы слабого взаимодействия, в которых происходит обмен зарядом между лептонами и адронами, хорошо описывается при низких энергиях эффективным лагранжианом

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \nu_e + \bar{\mu} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \nu_\mu] J^\lambda + \text{э.с.}, \quad (21.3.39)$$

* Сечение пропорционально G_F^2 , поэтому для того, чтобы получить размерность $[\text{энергия}]^{-2}$, сечение должно быть также пропорционально квадрату некоторой энергии. Если энергия в системе центра масс много больше массы электрона, то это единственная энергия, которая может войти в формулу.

где J^λ — адронный ток. В рамках кварковой модели коммутационные свойства и свойства сохранения тока J^λ позволили идентифицировать его с кварковым током

$$J^\lambda = \bar{u}\gamma^\lambda(1 + \gamma_5)d \cos \theta_c + \bar{u}\gamma^\lambda(1 + \gamma_5)s \sin \theta_c. \quad (21.3.40)$$

Здесь u , d , s — поля соответствующих кварков u , d и s , а θ_c — другой угол, называемый углом Кабиббо¹¹. Экспериментальное изучение таких процессов, как $O^{14} \rightarrow N^{14*} + e^+ + \nu_e$ и $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$, подтвердило, что значение G_F очень близко к тому, которое измерено в чисто лептонном процессе $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$, и дало для угла θ_c значение¹² $\sin \theta_c = 0,220 \pm 0,003$. Мы, естественно, заключаем, что кварки образуют другой $SU(2) \times U(1)$ дублет

$$\mathcal{Q} = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{bmatrix}, \quad (21.3.41)$$

а также правые синглеты, причем значения ψ подобраны так, чтобы получались заряды кварков $2e/3$ и $-e/3$. Само по себе это заключение привело бы к серьезной трудности. Z^0 -бозон взаимодействует с кварковым нейтральным током

$$\sum_{\mathcal{Q}} \bar{\mathcal{Q}} \gamma^\mu (t_{3L} \cos \theta + y \sin \theta) \mathcal{Q} = \sum_{\mathcal{Q}} \bar{\mathcal{Q}} \gamma^\mu (t_{3L} \sec \theta + q \tan \theta) \mathcal{Q} \quad (21.3.42)$$

где производится суммирование по всем кварковым дублетам $\mathcal{Q}$ типа (21.3.41). Зарядовая матрица диагональна по сортам кварков, но если кварковый дублет (21.3.41) — единственный, то слагаемое, содержащее матрицу t_{3L} , включало бы перекрестные слагаемые, пропорциональные $\bar{s}\gamma^\mu(1 + \gamma_5)d$ и $\bar{d}\gamma^\mu(1 + \gamma_5)s$, приводящие к эффективным взаимодействиям с обменом Z^0 типа $s + \bar{d} \rightarrow d + \bar{s}$ и $s + \bar{d} \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, интенсивность которых были бы такой же, как у обычных слабых взаимодействий в первом порядке. Подобные эффекты привели бы к вероятностям процессов типа $K^0 - \bar{K}^0$ осцилляций и распада $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, на много порядков величины больших, чем наблюдаемые. Кроме того, даже без слагаемых с нейтральными токами в лагранжиане, однопетлевые диаграммы, включающие взаимодействие (21.3.39) с заряженным током (21.3.40), приводили бы к эффективному взаимодействию $s + \bar{d} \rightarrow d + \bar{s}$, которое было

бы меньше обычного слабого взаимодействия первого порядка только на множитель порядка $\alpha/2\pi$, что приводило бы к все еще слишком большой вероятности $K^0 - \bar{K}^0$ осцилляций. Чтобы преодолеть последнюю трудность, было высказано предположение¹³, что в J^λ входит другое слагаемое, имеющее в современных обозначениях вид

$$\bar{c}\gamma^\lambda(1 + \gamma_5)[-d \sin \theta_c + s \cos \theta_c], \quad (21.3.43)$$

где s — четвертый кварк, имеющий, как и u -кварк, заряд $2e/3$. Добавляя (21.3.43) к (21.3.40), можно записать заряженный ток в виде

$$J^\lambda = (\bar{u} \cos \theta_c - \bar{c} \sin \theta_c)\gamma^\lambda(1 + \gamma_5)d + (\bar{u} \sin \theta_c + \bar{c} \cos \theta_c)\gamma^\lambda(1 + \gamma_5)s.$$

Единственной причиной, по которой взаимодействия W с этим током не сохраняют странность, является то, что s и u имеют разные массы, что приводит к переходам между $u \cos \theta_c - c \sin \theta_c$ и $u \sin \theta_c + c \cos \theta_c$. Но это означает, что петлевые диаграммы для эффективного взаимодействия $s + \bar{d} \rightarrow d + \bar{s}$ подавлены дополнительными множителями m_c^2 / m_W^2 (т. к. $m_u \ll m_c$), и это приводит вероятности $K^0 - \bar{K}^0$ осцилляций к согласию с экспериментом.

Впоследствии было замечено, что эта гипотеза решает и проблему изменяющих странность взаимодействий Z^0 . В рамках $SU(2) \times U(1)$ калибровочной теории комбинация $-d_L \sin \theta_c + s_L \cos \theta_c$ не может быть синглетом, а должна быть частью другого дублета

$$\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} c \\ -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \end{bmatrix}. \quad (21.3.44)$$

Включая этот дублет в слабый нейтральный ток (21.3.42), видим, что несохраняющие странность слагаемые, пропорциональные и, сокращаются, что снимает проблему избыточных вкладов от обмена Z в процессы типа $K^0 - \bar{K}^0$ осцилляций и $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$. Частицы, содержащие s -кварк в $s - \bar{c}$ связанном состоянии, были открыты¹⁴ в 1974 году, что позволило оценить значение массы $m_c \approx 1,5$ ГэВ.*

* Мы не наблюдаем изолированные кварки, поэтому их массы определены неточно. Приведенная здесь масса s -кварка грубо равна половине массы J/ψ частицы, интерпретируемой как связанное состояние $c\bar{c}$. Кварки b и t настолько тяжелы, что их массы можно с очень малой ошибкой определять по массам содержащих эти кварки адронов.

Этим завершилось заполнение двух поколений кварков и лептонов: кварковый дублет (u, d) , смешанный с кварковым дублетом (s, c) , а также два лептонных дублета (ν_e, e) и (ν_μ, μ) .

Первым указанием на существование третьего поколения было открытие третьего заряженного лептона τ ¹⁶. Позднее был открыт пятый тип кварков b ¹⁷ с зарядом $-e/3$ и массой порядка 4,5 ГэВ. Шестой t -кварк с зарядом $2e/3$ стал после этого теоретически необходим, и через долгое время он также был открыт ¹⁸, причем его масса была в 1995 году объявлена равной 181 ± 12 ГэВ ¹⁹. В наши дни адронный ток J^λ в выражении (21.3.39) записывается в виде

$$J^\lambda = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \gamma^\lambda (1 + \gamma_5) V \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}, \quad (21.3.45)$$

где V — не до конца известная 3×3 унитарная матрица Кобаяши–Маскавы ²⁰. В $SU(2) \times U(1)$ калибровочной теории это означает, что имеются три кварковых дублета

$$\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} u \\ V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \end{bmatrix}, \quad (21.3.46)$$

$$\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} c \\ V_{cd}d + V_{cs}s + V_{cb}b \end{bmatrix}, \quad (21.3.47)$$

$$\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{bmatrix} t \\ V_{td}d + V_{ts}s + V_{tb}b \end{bmatrix}. \quad (21.3.48)$$

Важно понять, что для трех кварковых дублетов именно это мы должны естественным образом ожидать по общим соображениям. Наиболее общие перенормируемые $(SU(3) \times SU(2) \times U(1))$ -инвариантные взаимодействия скалярных дублетов Φ_V с кварками должны в общем случае иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi = & - \sum_{ijn} G_{ij}^n \overline{\begin{pmatrix} U_{iL} \\ D_{iL} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_n^0 \\ \Phi_n^- \end{pmatrix} U_{jR} \\ & - \sum_{ijn} H_{ij}^n \overline{\begin{pmatrix} U_{iL} \\ D_{iL} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -\Phi_n^{-+} \\ \Phi_n^{0+} \end{pmatrix} D_{jR} + \text{э.с.}, \end{aligned} \quad (21.3.49)$$

где U_i и D_i ($i = 1, 2, 3$) — три независимых кварковых поля зарядами $2e/3$ и $-e/3$, соответственно, L и R обозначают левые и правые компоненты кварковых полей, а G_{ij}^n и H_{ij}^n — неизвестные константы. Затем вакуумные средние нейтральных скаляров приводят к появлению массового слагаемого для кварков

$$\mathcal{L}_m = -\sum_{ij} \bar{U}_{iL} m_{ij}^U U_{jR} - \sum_{ij} \bar{D}_{iL} m_{ij}^D D_{jR} + \text{э.с.}, \quad (21.3.50)$$

где

$$m_{ij}^U = \sum_n G_{ij}^n \langle \Phi_n^0 \rangle_{\text{VAC}}, \quad m_{ij}^D = \sum_n H_{ij}^n \langle \Phi_n^0 \rangle_{\text{VAC}}^*. \quad (21.3.51)$$

Матрицы m_{ij}^U и m_{ij}^D ничем не ограничены, в частности, могут быть комплексными и недиагональными (в последнем случае в лагранжиане $\mathcal{L}_m$ появляются слагаемые, несохраняющие четность и сорт кварков). Но мы можем ввести новые кварковые поля

$$U'_R = A_R^U U_R, U'_L = A_L^U U_L, D'_R = A_R^D D_R, D'_L = A_L^D D_L,$$

где A — матрицы 3×3 , ограниченные только условием, что они должны быть унитарны, чтобы сохранить вид кинематического слагаемого (19.4.1). Тогда массовое слагаемое (21.3.50), переписанное через штрихованные кварковые поля, сохраняет свой вид, с той разницей, что матрицы m^U и m^D заменяются матрицами

$$m'^U = A_L^U m^U A_R^{U\dagger}, \quad m'^D = A_L^D m^D A_R^{D\dagger}. \quad (21.3.52)$$

Существует общая теорема, что для любой матрицы m всегда возможно выбрать унитарные матрицы A и B так, что матрица AmB действительна и диагональна. (Для доказательства используйте теорему о полярном разложении, чтобы записать $m = HU$, где H — эрмитова, а U — унитарная матрицы, и выберите $A = S^\dagger$ и $B = U^\dagger S$, где S — унитарная матрица, диагонализующая H .) Поэтому мы можем выбрать A так, чтобы m стали действительными и диагональными. В этом случае кварковые поля u, c, t, d, s, b должны отождествляться с компонентами $U'_L + U'_R$ и $D'_L + D'_R$. Теперь можно записать слабые дублеты в виде

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} (A_L^{U-1} U'_L)_i \\ (A_L^{D-1} D'_L)_i \end{pmatrix},$$

но с тем же успехом мы можем взять дублеты как линейные комбинации $A_L^U Q_L$, верхними компонентами которых являются кварки определенной массы с зарядом $2e/3$. Тогда такие дублеты принимают вид (21.3.46)–(21.3.48), причем

$$V = A_L^U A_L^{D-1}. \quad (21.3.53)$$

С 90%-й точностью наилучшие современные (1995 г.) значения абсолютных величин элементов матрицы Кобаяши–Маскавы равны ^{20a}

$$\begin{pmatrix} 0,9745 \div 0,9757 & 0,219 \div 0,224 & 0,002 \div 0,005 \\ 0,218 \div 0,224 & 0,9736 \div 0,9750 & 0,036 \div 0,046 \\ 0,004 \div 0,014 & 0,034 \div 0,046 & 0,9989 \div 0,9993 \end{pmatrix}$$

где строки отмечены индексами u, c, t , а столбцы — индексами d, s, b .

Если бы существовали только два кварковых дублета, образованные из кварков u, d, c и s, b , то можно было бы так выбрать фазы кварковых полей, что все V_{ij} стали бы действительными *, и матрица V стала ортогональной, а дублеты (21.3.46) и (21.3.47) (с опущенным b) приняли бы вид (21.3.41) и (21.3.44), соответственно. В этом случае калибровочные взаимодействия автоматически сохраняли бы T и CP . Большое значение третьего поколения заключается в том, что теперь уже не всегда возможно выбрать кварковые фазы так, чтобы матрица V стала действительной, и поэтому калибровочные взаимодействия могут нарушать сохранение T и CP . Однако по неизвестным причинам элементы V_{ub}, V_{cb}, V_{td} и V_{ts} , связывающие третье поколение с первыми двумя, довольно малы, поэтому физика первых двух поколений кварков мало зависит от наличия третьего поколения, и это более или менее естественным образом объясняет, почему гипотеза Кабиббо (21.3.40) работает так

* Подберите фазы d и s так, чтобы V_{ud} и V_{us} стали действительными. Тогда унитарность требует, чтобы V_{cd} и V_{cs} имели одинаковую фазу, которую можно устранить, подобрав фазу c .

хорошо и почему нарушение Т и СР столь мало. Сохранение Т и СР может быть нарушено взаимодействиями скалярных бозонов, если имеются два или более скалярных дублетов ²⁰⁶; в данном случае нарушение сохранения Т и СР ожидается малым, поскольку скалярные дублеты слабо связаны с легкими кварками. До сих пор неизвестно, какой из этих механизмов ответствен за наблюдаемое нарушение сохранения Т и СР в обсуждавшемся в разделе 3.3 распаде K^0_2 .

В 1973 году, вскоре после обнаружения чисто лептонного процесса $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$, были открыты процессы с нейтральными токами с участием адронов ²¹ типа глубоконеупругого рассеяния нейтрино на нуклоне. Поскольку в данном случае масса мишени намного больше, довольно скоро стало возможным наблюдать большое количество событий и использовать эти наблюдения для подтверждения электрослабой теории и измерения ее параметров. Дополнительная информация о лептон-адронных взаимодействиях с нейтральными токами была получена в результате наблюдения нарушения четности в атомной физике. К 1983 году все прямые измерения $\sin^2 \theta$ стали согласованными и привели к общему значению $\sin^2 \theta = 0,23$, предсказывая, таким образом, массы $m_W = 80,1$ ГэВ и $m_Z = 91,4$ ГэВ. Затем в 1983 году был открыт W -бозон, а вскоре и Z -бозон ²². Сейчас (в 1995 г.) измеренные массы этих частиц равны

$$m_W = 80,140 \pm 0,180 \text{ ГэВ}^{23}, \quad m_Z = 91,1887 \pm 0,0022 \text{ ГэВ}^{24}$$

в удовлетворительном согласии с предсказаниями электрослабой теории.

Очень большая точность измерения массы Z -бозона, достигнутая благодаря настройке энергии e^+e^- соударений в Z -резонансе на ускорителе LEP (Большой электрон-позитронный коллайдер в ЦЕРНе) и SLC (Станфордский линейный коллайдер, США), изменила способ анализа данных по электрослабым взаимодействиям. Вместо того, чтобы сравнивать предсказания масс W и Z с наблюдаемыми значениями, масса Z -бозона выбрана как экспериментальный входной параметр. К этому добавляется константа Ферми $G_F = 1,16639(2) \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$, взятая из вероятности распада мюона (с учетом радиационных поправок порядка α), и постоянная тонкой структуры $\alpha(m_Z) = (128,87 \pm 0,12)^{-1}$, экстраполированная от измерений при низких энергиях так, как описано в разделе 18.2. При

таком подходе параметр $\sin^2 \theta$ становится выводимой величиной; если принять определение (21.3.38), он принимает значение $\sin^2 \theta = 0,2312 \pm 0,003$. При таких входных параметрах электрослабая теория может быть использована для предсказаний других величин типа m_W с достаточной точностью, требующей уже учета электрослабых радиационных поправок²⁵. В однопетлевом приближении радиационные поправки включают массы t -кварка и скалярного («хиггсовского») бозона, так что становится возможной оценка этих масс. Например, еще до открытия t -кварка, согласие между теорией и экспериментом накладывало ограничения на радиационные поправки, откуда получалось, что масса t -кварка находится в интервале 130–300 ГэВ²⁶ в согласии с экспериментально измеренным позднее значением. В 1994 году была предсказана масса W -бозона, равная 80,29 ГэВ с неопределенностью $\pm 0,02$ ГэВ от неопределенностей во входных значениях m_Z , G_F и $\alpha(m_Z)$ и неопределенностью $\pm 0,11$ ГэВ от интервала возможных значений m_t и $m_{\text{Хиггс}}$. В одной из работ 1995 года было сделано заключение, что $m_{\text{Хиггс}} < 225$ ГэВ. Точное измерение m_W , ожидающееся на электрон–позитронном коллайдере LEP-2 в ЦЕРН,е позволит получить полезную оценку $m_{\text{Хиггс}}$.

* * *

Наиболее общий перенормируемый лагранжиан с содержанием полей и $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ калибровочными симметриями электрослабой теории автоматически включает сохранение барионов и лептонов. Это очевидно верно для калибровочных взаимодействий и голых массовых слагаемых, поскольку кварки, антикварки, лептоны и антилептоны все принадлежат определенным представлениям группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Если все скаляры принадлежат к нейтральным по $SU(3)$ $SU(2)$ -дублетам с $U(1)$ квантовым числом $\pm 1/2$, то единственными перенормируемыми взаимодействиями скаляров с фермионами и/или антифермионами являются взаимодействия с кварк-антикварковыми и лептон-антилептонными парами, которые, конечно, сохраняют барионное и лептонное числа. (Во многом аналогично можно убедиться, что заряженные адронные токи, с которыми взаимодействуют лептоны, с необходимостью являются линейными комбинациями токов, связанных со спонтанно нарушенной $SU(3) \times SU(3)$ симметрией, описанной в разделе 19.7. Такое предположе-

ние было без объяснений сделано в оригинальной работе по нарушению этой симметрии.)

Все эти результаты критически зависят от предположения, что стандартная модель перенормируема. Но, как мы не раз подчеркивали, можно ожидать, что перенормируемый лагранжиан стандартной модели будет сопровождаться неперенормируемыми слагаемыми размерности $d > 4$, подавленными $(4 - d)$ степенями некоторой очень большой массы M . Ведущие поправки к предсказаниям перенормируемой стандартной модели возникают от слагаемых с наименьшей возможной размерностью, превышающей 4.

Единственные лоренц-инвариантные слагаемые размерности пять, которые можно построить из фермионных и других полей стандартной модели, в крайнем случае билинейны по фермионным полям и содержат также либо два скаляра, либо один скаляр и одну калибровочно инвариантную производную, либо две калибровочно инвариантные производные (включая их коммутатор — тензор напряженности поля) и никаких скаляров. Цветовая $SU(3)$ инвариантность требует, чтобы фермионные поля в таком взаимодействии возникали либо в виде кварк-антикварковых билинейных комбинаций, либо в виде пары лептонных и/или антилептонных полей, причем все эти операторы сохраняют барионное число. Имеется большое количество подобных слагаемых, но для нарушения сохранения лептонного числа они должны включать произведение двух лептонных полей или им сопряженных полей. Левые лептонные дублеты (l_{Li}^-, ν_i^-) и правые заряженные лептонные синглеты l_{Ri}^- (где $i = e, \mu, \tau$) имеют $U(1)$ квантовые числа $1/2$ и 1 , соответственно, в то время как скалярный дублет (или дублеты) (ϕ^+, ϕ^0) имеет $U(1)$ квантовое число $-1/2$, так что мы можем построить $U(1)$ -инвариантные взаимодействия размерности пять из двух левых лептонных и двух скалярных дублетов. При наличии только одного скалярного дублета имеется всего один такой член, удовлетворяющий $SU(2)$ и лоренц-инвариантности ^{27a}:

$$\sum_{ij} f_{ij} (\overline{l_{Li}^c} \phi^+ - \overline{\nu_i^c} \phi^0) (l_{Lj} \phi^+ - \nu_j \phi^0), \quad (21.3.54)$$

где i и j — индексы лептонных сортов, а c означает зарядово сопряженное поле. При энергиях ниже шкалы электрослабого нарушения это приводит к эффективному взаимодействию

$$\sum_{ij} f_{ij} \overline{\nu_i^c} \nu_j \langle \phi^0 \rangle^2. \quad (21.3.55)$$

Мы ожидаем, что f_{ij} будет порядка $1/M$, возможно, умноженной на малые константы связи, так что отсюда получаем несохраняющие лептонное число массы нейтрино самое большее порядка $^{276} (300 \text{ ГэВ})^2/M$. В разделе 21.5 мы увидим, что значение M ожидается порядка $10^{15}-10^{18} \text{ ГэВ}$, так что можно ожидать массы нейтрино в интервале $10^{-4}-10^{-1} \text{ эВ}$ или менее, если есть дополнительное подавление малыми константами связи. Такие массы слишком малы, чтобы их можно было непосредственно наблюдать, однако нет никаких причин, по которым массовая матрица нейтрино должна быть диагональной, так что массы нейтрино могут быть обнаружены по осцилляциям перехода одного типа нейтрино в другой во время пролета больших расстояний.

Аналогичный анализ показывает, что существуют взаимодействия размерности шесть, нарушающие сохранение как барионного, так и лептонного чисел и содержащие три кварковых и одно лептонное поле ^{27b} . Такие взаимодействия будут иметь константы связи порядка M^{-2} и будут приводить к процессам типа распада протона с вероятностями, пропорциональными M^{-4} .

21.4. Динамически нарушенные локальные симметрии *

До сих пор обсуждение спонтанно нарушенных локальных симметрий проводилось полностью в рамках теории возмущений. Такое ограничение до некоторой степени неизбежно. В то время, как в случае спонтанно нарушенных глобальных симметрий можно доказать строгие теоремы о существовании и взаимодействиях безмассовых голдстоуновских бозонов, спонтанное нарушение локальной симметрии не приводит к каким-либо столь же точным следствиям. Даже существование массивных векторных бозонов не является в действительности общей теоремой; при достаточно большой калибровочной константе связи эти частицы распадаются столь

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

быстро, что они теряют свою индивидуальность как различные резонансы определенного спина $j = 1$.

С другой стороны, если калибровочные константы связи типа e , g или g' достаточно малы, тогда теория со спонтанно нарушенной локальной симметрией должна быть очень близка к теории со спонтанно нарушенной глобальной симметрией, для которой могут быть доказаны строгие теоремы. Поэтому для таких калибровочных теорий можно получить полезные приближенные результаты, *даже если другие некалибровочные константы связи очень велики*. Один пример — стандартная $SU(2) \times U(1)$ электрослабая теория с большой скалярной константой самодействия λ (и следовательно большой массой скаляра; см. выражение (21.3.27)). Более интригующая возможность заключается в том, что нарушение электрослабой симметрии обязано большим силам, связанным с некоторой новой калибровочной группой, действующей на набор новых фермионов. Мы рассмотрим здесь результаты, которые могут быть получены для всех подобных теорий, не делая ссылок на конкретный механизм спонтанного нарушения симметрии ²⁸.

Предположим, что в пределе нулевых калибровочных констант связи наша теория инвариантна относительно некоторой группы G глобальных симметрий, спонтанно нарушенной до подгруппы H . Как обсуждалось в разделе 19.5, в этом случае теория может быть записана через набор голдстоуновских бозонных полей ξ_a , а также других полей материи $\tilde{\psi}$, свойства которых по отношению к G -преобразованиям таковы, что лагранжиан G -инвариантен, если он H -инвариантен и построен только из $\tilde{\psi}$ и ковариантных производных $D_{a\mu}$, $D_\mu \tilde{\psi}$ и т. п., которые даются выражениями (19.6.14), (19.6.30) и т. д.

«Включим» теперь калибровочные константы связи. Калибровочная группа $\mathcal{G}$, конечно, должна быть подгруппой $\mathcal{G} \subset G$ группы G всех симметрий теории, и когда G спонтанно нарушается до H , группа $\mathcal{G}$ должна спонтанно нарушиться до подгруппы $\mathcal{H}$, равной пересечению $\mathcal{G}$ с H . Генераторы $\mathcal{T}_\alpha$ калибровочной группы $\mathcal{G}$ могут быть записаны как линейные комбинации генераторов T_A полной группы G :

$$\mathcal{T}_\alpha = \sum_A e_{\alpha A} T_A, \quad (21.4.1)$$

с коэффициентами $e_{\alpha A}$ — калибровочными константами связи, которые выбираются очень малыми. Индекс A пробегает значения

меток i , а генераторов ненарушенной симметрии t_i и генераторов нарушенной симметрии ξ_a . (Мы считаем, что генераторы T_A нормированы стандартным образом; это означает, что они представлены матрицами с элементами порядка единицы. В частности, в противоположность $\mathcal{T}_\alpha$, структурные константы генераторов ξ_a и t_i не включают констант связи в качестве множителей.)

В базовой теории, в которой G -инвариантность реализуется линейно, вводим связь калибровочных полей $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ с другими полями Ψ , заменяя обычные производные калибровочно-инвариантными производными:

$$\left(\partial_\mu - i \sum_\alpha \mathcal{T}_\alpha \mathcal{A}_{\alpha\mu} \right) \Psi = \left(\partial_\mu - i \sum_A T_A A_{A\mu} \right) \Psi, \quad (21.4.2)$$

где

$$A_{A\mu} \equiv \sum_\alpha e_{\alpha A} \mathcal{A}_{\alpha\mu}. \quad (21.4.3)$$

Результирующая теория инвариантна относительно *формально* локальных преобразований, по отношению к которым поля преобразуются согласно формулам

$$\Psi \rightarrow g\Psi, \quad (21.4.4)$$

$$\sum_A T_A A_{A\mu} \rightarrow g \left(\sum_A T_A A_{A\mu} \right) g^{-1} - i(\partial_\mu g)g^{-1}, \quad (21.4.5)$$

где $g(\xi)$ — произвольный зависящий от пространственно-временных координат элемент группы G . Эта инвариантность чисто формальная, поскольку калибровочные константы в общем случае реально нарушают G , как видно из того, что преобразование (21.4.5) в общем случае не сохраняет форму линейной комбинации (21.4.3). Тем не менее, можно временно забыть о формуле (21.4.3), и рассматривать A_A^μ как не связанное никакими ограничениями классическое внешнее поле, и проанализировать структуру лагранжиана полей материи и их взаимодействия с калибровочными полями, требуя, чтобы этот лагранжиан был инвариантным относительно

локальных преобразований (21.4.4) и (21.4.5). Таким образом мы обеспечим не только то, что лагранжиан будет инвариантным относительно истинной подгруппы G локальной симметрии (а при $e_{\alpha A} \rightarrow 0$ и относительно более широкой группы G глобальной симметрии), но и то, что токи — вариационные производные действия материи по $\mathcal{A}_\alpha^\mu$ — будут правильно преобразовываться по отношению к нарушенной глобальной группе симметрии G . Позднее мы ограничим A_A^μ формой (21.4.3), и будем рассматривать поле $\mathcal{A}_\alpha^\mu$ как квантовое, дописав в лагранжиан этого поля соответствующий кинематический член.

Для того, чтобы воспользоваться следствиями спонтанного нарушения группы инвариантности G до ее подгруппы H , будем действовать как в разделе 19.6. Прежде всего, заменим ψ и A новыми полями $\tilde{\psi}, \tilde{A}$

$$\tilde{\psi} = \gamma^{-1}(\xi)\psi, \quad (21.4.6)$$

$$\tilde{A}_A^\mu = \sum_B D_{AB}(\gamma^{-1}(\xi)) A_B^\mu, \quad (21.4.7)$$

где $\gamma(\xi)$ — стандартное G -преобразование, устраняющее степени свободы голдстоуновских бозонов в поле ψ , а $D(g)$ — реализуемое калибровочными полями представление G :

$$gT_A g^{-1} = \sum_B D_{BA}(g) T_B. \quad (21.4.8)$$

Эти голдстоуновские степени свободы вновь появляются в зависящих от пространственно-временной точки параметрах ξ_a , от которых зависит $\gamma(\xi)$. С помощью тех же вычислений, что и в разделе 19.6, закон преобразования (21.4.4) превращается как для локальных, так и для глобальных преобразований, в закон преобразования

$$\xi^a \rightarrow \xi'^a = f^a(\xi, g), \quad (21.4.9)$$

$$\tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi}' = h(\xi, g)\tilde{\psi}, \quad (21.4.10)$$

где h и f определены соотношением

$$g\gamma(\xi) = \gamma(f(\xi, g))h(\xi, g), \quad (21.4.11)$$

и h принадлежит ненарушенной подгруппе H . Кроме того, нужно вывести закон преобразования для $\tilde{A}_A^\mu$. Напомним, что, согласно правилу (21.4.5), под действием этих локальных преобразований линейные комбинации калибровочных полей в выражении (21.4.2) преобразуются как

$$\sum_A T_A A_{A\mu} \rightarrow \sum_A T_A A'_{A\mu} = g \left[\sum_A T_A A_{A\mu} - ig^{-1} \partial_\mu g \right] g^{-1}.$$

Умножая слева и справа на $\gamma^{-1}(\xi')$ и $\gamma(\xi')$, соответственно, и используя формулы (21.4.7), (21.4.8) и (21.4.11), можно записать это в виде

$$i \sum_A T_A \tilde{A}'_{A\mu} = h(\xi, g) \left[i \sum_A T_A \tilde{A}_{A\mu} + \gamma^{-1}(\xi) [g^{-1} \partial_\mu g] \gamma(\xi) \right] h^{-1}(\xi, g). \quad (21.4.12)$$

Чтобы увидеть, как сокращается неоднородный член $g^{-1} \partial_\mu g$, заметим, что дифференцируя выражение (21.4.11) и умножая слева не обратную ему величину, мы получим

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\xi') \partial_\mu \gamma(\xi') &= h(\xi, g) \gamma^{-1}(\xi) [g^{-1} \partial_\mu g] \gamma(\xi) h^{-1}(\xi, g) \\ &+ h(\xi, g) [\gamma^{-1}(\xi) \partial_\mu \gamma(\xi)] h^{-1}(\xi, g) + h(\xi, g) \partial_\mu h^{-1}(\xi, g). \end{aligned} \quad (21.4.13)$$

Поэтому, чтобы сократить неоднородный член, следует вычесть выражение (21.4.12) из (21.4.13):

$$\begin{aligned} &\gamma^{-1}(\xi') \partial_\mu \gamma(\xi') - i \sum_A T_A \tilde{A}'_{A\mu} \\ &= h(\xi, g) \left[\gamma^{-1}(\xi) \partial_\mu \gamma(\xi) - i \sum_A T_A \tilde{A}_{A\mu} \right] h^{-1}(\xi, g) \\ &\quad - [\partial_\mu h(\xi, g)] h^{-1}(\xi, g). \end{aligned} \quad (21.4.14)$$

Определим поэтому новые калибровочно-ковариантные величины $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ равенством

$$\sum_a i \mathcal{D}_{a\mu} x_a + \sum_i i \varepsilon_{i\mu} t_i \equiv \gamma^{-1}(\xi) \partial_\mu \gamma(\xi) - i \sum_A T_A \tilde{A}_{A\mu} \quad (21.4.15)$$

со свойствами преобразования

$$\mathcal{D}_{a\mu} \rightarrow \mathcal{D}'_{a\mu}, \quad \varepsilon_{i\mu} \rightarrow \varepsilon'_{i\mu} \quad (21.4.16)$$

где

$$\sum_a \mathcal{D}'_{a\mu} x_a = h(\xi, g) \left(\sum_a \mathcal{D}_{a\mu} x_a \right) h^{-1}(\xi, g), \quad (21.4.17)$$

$$\sum_i \varepsilon'_{i\mu} t_i = h(\xi, g) \left(\sum_i \varepsilon_{i\mu} t_i \right) h^{-1}(\xi, g) + i [\partial_\mu h(\xi, g)] h^{-1}(\xi, g), \quad (21.4.18)$$

точно так же, как в выражениях (19.6.26) и (19.6.27). Величину ε можно использовать для построения полностью ковариантных производных полей материи:

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi} = \partial_\mu \tilde{\Psi} + i \sum_i t_i \varepsilon_{i\mu} \tilde{\Psi}, \quad (21.4.19)$$

а также высших производных типа $\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}$. Из-за неоднородного члена в (21.4.12) невозможно сразу ввести $\tilde{A}_{A\mu}$ или ковариантные производные $\tilde{A}_{A\mu}$ типа (21.4.19) в лагранжиан. Однако легко построить «ротор», ковариантно преобразующийся под действием как локальных преобразований $\mathcal{G}$, так и глобальных преобразований G . Именно,

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} \equiv \sum_B D_{AB}(\gamma^{-1}(\xi)) \left(\partial_\mu A_{B\nu} - \partial_\nu A_{B\mu} - \sum_{CD} C_{BCD} A_{C\mu} A_{D\nu} \right). \quad (21.4.20)$$

Под действием формально локальных G -преобразований это выражение преобразуется как

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}'_{A\mu\nu} = \sum_B \mathcal{D}_{AB}(h(\xi, g)) \tilde{F}_{B\mu\nu}. \quad (21.4.21)$$

Поэтому лагранжиан инвариантен относительно формально локальных G -преобразований, если он построен как произвольная функция $\tilde{\Psi}$, $\mathcal{D}_{a\mu}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}$, $\tilde{F}_{A\mu\nu}$ и высших ковариантных производных, удовлетворяющей глобальной H -инвариантности.

Вернемся к реальности и рассмотрим A_A^μ как квантовое поле ограниченной формы (21.4.3). Теперь формулы (21.4.15) и (21.4.20) принимают вид

$$\begin{aligned} & \sum_a i \mathcal{D}_{a\mu} x_a + \sum_i i \epsilon_{i\mu} t_i \\ &= \gamma^{-1} \partial_\mu \gamma(\xi) - i \sum_{AB\alpha} T_A D_{AB}(\gamma^{-1}(\xi)) e_{\alpha B} \mathcal{A}_{\alpha\mu}, \end{aligned} \quad (21.4.22)$$

и

$$\tilde{F}_{A\mu\nu} = \sum_{B\alpha} D_{AB}(\gamma^{-1}(\xi)) e_{\alpha B} \mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}, \quad (21.4.23)$$

где

$$\mathcal{F}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\beta\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\beta\mu} - \sum_{\gamma\delta} \mathcal{C}_{\beta\gamma\delta} \mathcal{A}_{\gamma\mu} \mathcal{A}_{\delta\nu}, \quad (21.4.24)$$

причем $\mathcal{C}_{\beta\gamma\delta}$ — структурные константы калибровочной группы, связанные со структурными константами группы G соотношением

$$\sum_{CD} C_{BCD} e_{\gamma C} e_{\delta D} = \sum_{\beta} \mathcal{C}_{\beta\gamma\delta} e_{\beta B}. \quad (21.4.25)$$

В качестве кинематического члена этого поля мы включаем в лагранжиан обычное янг-миллсовское слагаемое

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha\mu\nu} \mathcal{F}_{\alpha}^{\mu\nu}, \quad (21.4.26)$$

в котором, путем линейных преобразований $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ и, соответственно, e_{aA} , мы подобрали коэффициент при $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu} \mathcal{F}_{\beta}^{\mu\nu}$ равным просто $\delta_{\alpha\beta}$. Линейное слагаемое в $\mathcal{F}_{\alpha\mu\nu}$ равно $\partial_\mu \mathcal{A}_{\alpha\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\alpha\mu}$, так что смысл выражения (21.4.26) — в том, чтобы $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ было канонически нормированным векторным полем. Поэтому эффективный лагранжиан должен выбираться как функция $\tilde{\Psi}$, $\mathcal{D}_\mu \tilde{\Psi}$ и $\mathcal{D}_{a\mu}$, которая инвариантна

относительно глобальных H -преобразований, плюс возможные слагаемые, сохраняющие $\mathcal{G}$, но не G , с коэффициентами, пропорциональными двум или более множителям $e_{\alpha A}$.

Посмотрим теперь, какого типа теорию возмущений можно построить из таких ингредиентов. Мы знаем, что калибровочные бозоны становятся безмассовыми в пределе $e_{\alpha A} \rightarrow 0$, когда они отщепляются от полей материи, испытывающих спонтанное нарушение симметрии. Попробуем поэтому предположить, что их масса при малых $e_{\alpha A}$ — порядка eM , где e — типичное значение $e_{\alpha A}$ (генераторы T_A нормированы так, что структурные константы порядка единицы), а M — шкала энергий, типичная для динамики, приводящей к спонтанному нарушению симметрии. Рассмотрим произвольную фейнмановскую диаграмму, которая включает калибровочные и голдстоуновские бозоны энергии или импульса $Q \lesssim eM$, а все частицы более высокой энергии или импульса и все более тяжелые частицы материи похоронены в поправках к константам связи в эффективной теории поля. Наша теория возмущений будет разложением по степеням e и Q/M . Осуществляя тот же анализ, что и разделах 19.4–19.6, получаем, что полное число степеней e и/или Q/M в любой такой диаграмме равно

$$v = \sum_i V_i (d_i + e_i - 2) + 2L + 2, \quad (21.4.27)$$

где V_i — число вершин типа i , d_i и e_i — число производных и множителей $e_{\alpha A}$, соответственно, во взаимодействии типа i , L — число петель. С учетом ограничения (21.4.3) поле $A_{A\mu}$ или $\tilde{A}_{A\mu}$ вносит один множитель e . Изучение формулы (21.4.15) показывает, что каждая ковариантная производная $\mathcal{D}_{a\mu}$ голдстоуновского бозона вносит +1 в сумму $d_i + e_i$, а из выражений (21.4.19) и (21.4.15) следует, что каждая дополнительная ковариантная производная $\mathcal{D}_{a\mu}$ вносит +1 в $d_i + e_i$. У всех допустимых членов в лагранжиане $d_i + e_i \geq 2$, так что доминирующими будут вклады от древесных диаграмм ($L = 0$), построенных исключительно на основе взаимодействий с $d_i + e_i = 2$. Единственными такими взаимодействиями являются кинематический член голдстоуновского бозона

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}^2 \mathcal{D}_{a\mu} \mathcal{D}_b^\mu, \quad (21.4.28)$$

янг-миллсовское слагаемое (21.4.26) и возможные нарушающие симметрию члены без производных второго порядка по e_{aA} .

Чтобы понять физическое значение поля ξ_a , заметим, что линейное слагаемое в $\mathcal{D}_{a\mu}$ имеет вид

$$(\mathcal{D}_{a\mu})_{\text{LIN}} = \partial_\mu \xi_a - \sum_\alpha e_{a\alpha} \mathcal{J}_{a\mu}. \quad (21.4.29)$$

Как показано в приложении к этой главе, всегда можно выбрать «унитарную калибровку», в которой для всех α

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \xi_a e_{ab} = 0, \quad (21.4.30)$$

в результате чего перекрестное слагаемое в (21.4.28) исчезает. Чтобы прояснить важность этого условия, заметим что в частном случае, когда все нарушенные симметрии являются калибровочными, любое ξ_a можно записать как линейную комбинацию калибровочных генераторов и ненарушенных генераторов:

$$\begin{aligned} x_a &= \sum_\alpha c_{a\alpha} \mathcal{T}_\alpha + \sum_i c_{ai} t_i \\ &= \sum_\alpha c_{a\alpha} \left(\sum_b e_{ab} x_b + \sum_i e_{ai} t_i \right) + \sum_i c_{ai} t_i, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\sum_\alpha c_{a\alpha} e_{ab} = \delta_{ab}.$$

Сворачивая условие (21.4.30) с c_{ab} , видим, что тогда $\xi_a = 0$: в такой калибровке вообще нет голдстоуновских бозонов. В более общем случае условие (21.4.30) оставляет только те голдстоуновские бозоны, которые *не* соответствуют калибровочным симметриям. Некоторые из них связаны с элементами G , нарушающимися калибровочными взаимодействиями и поэтому имеющими массы второго порядка по калибровочным константам связи. Их называют *псевдо-голдстоуновскими* бозонами.

Если выбрать ξ так, чтобы удовлетворялось условие унитарной калибровки (21.4.30), то квадратичная часть лагранжиана (21.4.28) равна просто

$$(\mathcal{G}_\xi)_{\text{QUAD}} = -\frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}^2 \partial_\mu \xi_a \partial^\mu \xi_b - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^2 \mathcal{A}_{\alpha\mu} \mathcal{A}_\beta^\mu, \quad (21.4.31)$$

где

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = \sum_{ab} F_{ab}^2 e_{\alpha a} e_{\beta b}. \quad (21.4.32)$$

Отсюда вытекают два важных вывода. Во-первых, заметим, что ξ_a можно выразить через канонически ортонормированное поле π_a в виде

$$\xi_a = \sum_b F_{ab}^{-1} \pi_b, \quad (21.4.33)$$

где F_{ab} — положительный квадратный корень из положительной матрицы F_{ab}^2 . Это показывает, что F_{ab}^{-1} — множители, аналогичные F_π^{-1} , которые сопровождают испускание и поглощение голдстоуновских бозонов низкой энергии. Во-вторых, поскольку $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ было определено как канонически нормированное векторное поле, из выражения (21.4.31) следует, что $\mu_{\alpha\beta}^2$ — квадрат массовой матрицы векторного бозона. Выражение (21.4.32) является универсальной формой для квадрата массовой матрицы векторного бозона, справедливой до второго порядка по калибровочным константам связи, но при этом во всех порядках по всем остальным взаимодействиям. Используя выражение (21.4.1) в формуле (21.1.7), легко увидеть, что наш предыдущий результат (21.1.7) есть частный случай формулы (21.4.32), в которой

$$F_{ab}^2 = - \sum_{nml} (x_a)_{nm} (x_b)_{nl} v_m v_l.$$

Формулу (21.4.32) можно также понимать на основе соображений непрерывности, обрисованных (в несколько иных обозначениях) в конце раздела 21.1. Она гарантирует, что эффекты обмена калибровочным бозоном, выживающие в пределе нулевой калибровочной константы связи, совпадают с эффектами, которые возникли бы от обмена голдстоуновским бозоном, если бы не было калибровочных констант.

В общем случае мы не можем вычислить матрицы F_{ab}^2 , но мы знаем, что она должна быть инвариантна относительно преобразований ненарушенной подгруппы H , в том смысле, что

$$\sum_d [C_{ibd} F_{dc}^2 + C_{icd} F_{bd}^2] = 0.$$

Это условие позволяет получить полезные ограничения на массы калибровочных бозонов (21.4.32).

В качестве примера рассмотрим случай электрослабой калибровочной группы $SU(2) \times U(1)$, спонтанно нарушенной до группы $U(1)$ электромагнетизма. Три генератора нарушенной симметрии ξ_a можно выбрать три генератора $SU(2)$ (в разделе 21.3 обозначенные t_1, t_2, t_3) без постоянного множителя g , а один генератор ненарушенной симметрии t можно принять равным заряду q с опущенным множителем e . Иными словами, ξ_a и t действуют на лептонные дублеты матрицами

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(1 + \gamma_5) \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$t = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда калибровочные генераторы имеют вид

$$\bar{\mathcal{T}} = g\bar{x}, \quad \mathcal{T}_y = g'(x_3 - t). \quad (21.4.34)$$

Это означает, что ненулевые коэффициенты e_{aa} при ξ_a в калибровочном генераторе $\mathcal{T}_\alpha$ равны

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = g, \quad e_{y3} = g'.$$

Кроме того, поскольку t подвергает 3-вектор вращению вокруг третьей оси, эта ненарушенная симметрия требует, чтобы матрица F_{ab}^2 имела ненулевые компоненты

$$F_{11}^2 = F_{22}^2 \equiv F_C^2, \quad F_{33}^2 \equiv F_N^2.$$

Согласно формуле (21.4.32), квадрат массовой матрицы калибровочных бозонов имеет, таким образом, неисчезающие элементы

$$\begin{aligned}\mu_{11}^2 &= \mu_{22}^2 = g^2 F_C^2, & \mu_{33}^2 &= g^2 F_N^2, \\ \mu_{3y}^2 &= gg' F_N^2, & \mu_{yy}^2 &= g'^2 F_N^2.\end{aligned}$$

Ее собственные значения равны

$$m_W^2 = g^2 F_C^2, \quad m_Z^2 = (g^2 + g'^2) F_N^2, \quad m_A^2 = 0. \quad (21.4.35)$$

Чтобы продвинуться дальше, необходимо соотношение, связывающее F_C и F_N . Оно возникает при условии, что в пределе $g = g' = 0$ теория инвариантна относительно бóльшей, чем $SU(2) \times U(1)$, глобальной группы симметрии G , которая спонтанно нарушается до подгруппы H , включающей трехмерные вращения, относительно которых преобразуется как 3-вектор. Из наличия такой ненарушенной симметрии следовало бы, что пропорционально δ_{ab} , и поэтому

$$F_C = F_N.$$

Всякая подобная симметрия называется «скрытой». Следствием ее является то, что m_Z/m_W выражается через калибровочные константы связи обсуждавшейся в разделе 21.3 успешной формулой

$$\frac{m_Z}{m_W} = \sqrt{1 + \frac{g'^2}{g^2}} = \frac{1}{\sin \theta}. \quad (21.4.36)$$

Например, в отсутствие калибровочных констант связи, лагранжиан (21.3.28) для скалярного дублета ϕ в простейшей версии $SU(2) \times U(1)$ электрослабой теории может быть записан в виде

$$(\mathcal{L}_\phi)_{g=g'=0} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - \frac{\mu^2}{2} \phi_n \phi_n - \frac{\lambda}{4} (\phi_n \phi_n)^2,$$

где

$$\phi_1 \equiv \text{Im } \phi^+, \quad \phi_2 \equiv \text{Re } \phi^+, \quad \phi_3 \equiv \text{Im } \phi^0, \quad \phi_4 \equiv \text{Re } \phi^0.$$

Этот лагранжиан автоматически инвариантен относительно «случайной» $SO(4) \equiv SU(2) \times SU(2)$ глобальной группы симметрии, которая спонтанно нарушается средним по вакууму от $\text{Re}\Phi^0$ до приближенной ненарушенной «скрытой» $SO(3)$ подгруппы²⁹. Результат (21.4.36) остается в силе и при наличии более одного скалярного дублета, поскольку, хотя в общем случае массовый член и член с взаимодействием в скалярном лагранжиане не обладают скрытой симметрией, при выводе соотношения используется только кинематический член, который всегда обладает полной $SO(4)$ симметрией.

Скрытые симметрии можно обнаружить и в других теориях. Рассмотрим, например, теорию без скалярных полей, но с новыми сверхсильными векторными калибровочными взаимодействиями³⁰, называемыми техницветовыми взаимодействиями, которые действуют на новый $SU(2) \times U(1)$ дублет (U_r, D_r) «техникварков» U_r и D_r , где r — индекс техницвета. До тех пор, пока левая и правая компоненты U_r и D_r преобразуются одинаково относительно техницветовой калибровочной группы, лагранжиан в пределе обращающихся в нуль электрослабых констант остается инвариантным относительно группы $SU(2) \times SU(2)$ независимых $SU(2)$ преобразований левых и правых техникварковых дублетов. Согласно рассуждениям раздела 19.9, подгруппа $SU(2)_V$, состоящая из одновременных $SU(2)$ преобразований как левых, так и правых техникварковых дублетов, не будет спонтанно нарушена. Разумно предположить, что техницветовые взаимодействия порождают спонтанное нарушение $SU(2) \times SU(2)$ до $SU(2)_V$, точно так же, как цветные взаимодействия приводят к спонтанному нарушению киральной $SU(2) \times SU(2)$ симметрии квантовой хромодинамики (при равных нулю массах u - и d -кварков) до ее изоспиновой подгруппы. Электрослабый генератор $\vec{J}$ или $\vec{x}$ преобразуется относительно ненарушенной $SU(2)_V$ симметрии как 3-вектор, что опять приводит к соотношению $F_C = F_N$ и последующему успешному предсказанию соотношения между массами W - и Z -бозонов.

Идея техницвета привлекательна, поскольку она предлагает естественный механизм нарушения электрослабой симметрии на характерном масштабе энергий, намного меньшем, чем часто предлагаемый фундаментальный масштаб в физике, величина которого обычно (как в теориях струн) выбирается по порядку величины равной планковской массе или 10^{18} ГэВ. Единственное, что требуется предположить, это существование в области сразу ниже фун-

даментального масштаба ненарушенной калибровочной группы, состоящей из $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ группы сильных и электрослабых взаимодействий, а также техницветовой калибровочной группы, причем со сравнимыми по величине малыми константами связи всех взаимодействий. Если техницветовые калибровочные взаимодействия асимптотически свободны, техницветовая константа связи, точно так же, как цветовая константа КХД, будет медленно расти с уменьшением энергии и станет сильной при энергиях, много меньших фундаментального масштаба. Та энергия, при которой техницветовая константа связи становится большой, будет устанавливать масштаб параметров F_{ab} , входящих в формулу (21.4.32) для масс калибровочных бозонов, и поэтому предположительно должна быть порядка 300 ГэВ. Поскольку с уменьшением энергии константа растет логарифмически, небольшая разница в значении бета-функций для техницвета и цвета без труда может породить разницу в три порядка тех энергетических масштабов, при которых цветовые и техницветовые взаимодействия становятся сильными.

К сожалению, хотя техницвет дает очень привлекательную картину спонтанного нарушения $SU(2) \times U(1)$, он сам по себе не предлагает механизма придания масс кваркам и лептонам. По этой причине предлагалось добавить дополнительные калибровочные взаимодействия «расширенного техницвета» с преобразованиями, связывающими кварки и техникварки³¹. У таких теорий существуют потенциальные проблемы с меняющимися ароматами нейтральными токами слабых взаимодействий. Хотя эти проблемы можно преодолеть, дополнительные усложнения сводят на нет привлекательность модели. Вопрос о том, что лучше — элементарные слабо связанные скаляры или динамическое нарушение симметрии — остается открытым.

21.5. Объединение электрослабых и сильных взаимодействий

В разделе 15.2 мы видели, что для каждой простой или $U(1)$ подгруппы калибровочной группы в калибровочную теорию входит независимая константа связи. Таким образом, электрослабая теория, основанная на калибровочной группе $SU(2) \times U(1)$, содержит две независимые константы g и g' . Для того, чтобы уменьшить

число свободных параметров, было высказано предложение ³² погрузить $SU(2) \times U(1)$ калибровочную группу в простую $SU(3)$ калибровочную группу, что дало бы соотношение $g' = g / \sqrt{3}$, однако это было исключено экспериментом. После разработки квантовой хромодинамики теоретикам пришлось иметь дело с калибровочной группой $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, т. е. с тремя независимыми калибровочными константами связи: константой g_s квантовой хромодинамики и константами g и g' электрослабых взаимодействий. Чтобы свести эти константы к единственному свободному параметру, было предложено погрузить $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ в различные простые группы Ли *: $SU(4) \times SU(4)$ ³³, $SU(5)$ ³⁴ или $SO(10)$ ³⁵. Подобные модели часто называют теориями большого объединения.

К счастью, следствия этих и большого класса других моделей для отношений $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ констант связи не зависят от деталей отдельных моделей ³⁶. Этот класс моделей характеризуется тем, что единственными фермионами, или по крайней мере, единственными фермионами, не нейтральными по отношению к $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, являются наблюдаемые поколения кварков и лептонов. Как показано в разделе 15.2, для любой простой компактной группы Ли существует стандартный выбор генераторов T_α с полностью антисимметричными структурными константами, удовлетворяющими в каждом приводимом или неприводимом представлении D условию нормировки

$$\text{Tr}\{T_\alpha T_\beta\} = N_D \delta_{\alpha\beta}. \quad (21.5.1)$$

Мы предполагаем, что все левые фермионы образуют n_g поколений

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \dots, \\ \overline{e_R} & \overline{\mu_R} & \overline{\tau_R} \dots, \\ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \dots, \\ \overline{u_R} & \overline{c_R} & \overline{t_R} \dots, \\ \overline{d_R} & \overline{s_R} & \overline{b_R} \dots. \end{array}$$

* Группа $SU(4) \times SU(4)$ становится простой после включения оператора дискретной симметрии, меняющего местами две группы $SU(4)$.

$SU(3)$ -генератор $\frac{1}{2}g_s\lambda_3$ имеет собственные значения: $+\frac{1}{2}g_s$ для красных кварковых дублетов и белых антикварковых синглетов; $-\frac{1}{2}g_s$ для белых кварковых дублетов и красных антикварковых синглетов; нуль для всех остальных левых фермионов. Поэтому след от квадрата этого генератора равен

$$\text{Tr}\left(\frac{1}{2}g_s\lambda_3\right)^2 = 4n_g \times \left(\frac{1}{2}g_s\right)^2 + 4n_g \times \left(-\frac{1}{2}g_s\right)^2 = 2n_g g_s^2. \quad (21.5.2)$$

$SU(2)$ -генератор t_3 имеет собственные значения: $\frac{1}{2}g$ для красных, белых и синих кварков зарядом $2/3$ и нейтрино; $-\frac{1}{2}g$ для красных, белых и синих кварков зарядом $-1/3$ и заряженных лептонов; нуль для всех остальных фермионов. Поэтому след от его квадрата равен

$$\text{Tr}(t_3)^2 = (3n_g + n_g) \times \left[\left(\frac{1}{2}g\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}g\right)^2\right] = 2n_g g^2. \quad (21.5.3)$$

Наконец, $U(1)$ -генератор $y = t_3 - q$ имеет собственные значения: $\frac{1}{2}g'$ для нейтрино и заряженных лептонов; $-g'$ для заряженных антилептонов; $-\frac{1}{6}g'$ для кварков; $\frac{2}{3}g'$ для антикварков зарядом $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}g'$ для антикварков зарядом $+\frac{1}{3}$, так что квадрат этого генератора имеет след

$$\begin{aligned} \text{Tr } y^2 &= 2n_g \left(\frac{1}{2}g'\right)^2 + n_g (-g')^2 + 6n_g \left(-\frac{1}{6}g'\right)^2 + 3n_g \left(\frac{2}{3}g'\right)^2 + 3n_g \left(-\frac{1}{3}g'\right)^2 \\ &= \frac{10}{3} n_g g'^2. \end{aligned} \quad (21.5.4)$$

Из соотношения (21.5.1) вытекает, что следы (21.5.2)–(21.5.4) равны друг другу, поэтому в данном классе моделей погружение $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ в простую группу Ли влечет за собой соотношения между константами:

$$g_s^2 = g^2 = \frac{5}{3} g'^2. \quad (21.5.5)$$

Соотношения (21.5.5) находятся в разительном противоречии с наблюдаемыми значениями констант связи. Из полученного отношения $g'^2 / g^2 = 3 / 5$ следует значение электрослабого угла смешива-

ния, для которого $\sin^2 \theta \equiv g'^2 / (g^2 + g'^2) = 3/8$, в то время как экспериментальное значение равно $\sin^2 \theta = 0,231$. Хуже того, сильная константа g_s^2 , конечно, много больше чем g^2 или g'^2 .

Решение этой проблемы ³⁶ состоит в том, что соотношения между константами связи типа (21.5.5) применимы только к константам, измеренным при масштабе энергий, сравнимом с типичной массой M калибровочных бозонов ⁴⁷, которые становятся массивными при спонтанном нарушении простой калибровочной группы до группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Если энергия E , при которой измерены константы связи, много меньше M , то возникнут большие радиационные поправки к значениям констант, пропорциональные $\ln(M/E)$.

Как подчеркивалось в гл. 19, в соотношение, связывающее константы связи, измеренные при близких энергиях μ и $\mu - d\mu$, не входят большие логарифмы, поэтому, интегрируя это соотношение от M на верхнем пределе до E на нижнем, мы можем вычислить константы при энергиях $E \ll M$, не сталкиваясь с большими логарифмами. Чтобы сделать это, необходимо лишь, чтобы константы оставались малыми во всем этом интервале. Для $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ констант с n_g фермионными поколениями из соотношения (18.7.2) следует *:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_s(\mu) = -\frac{g_s^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{3} - \frac{n_g}{3} \right), \quad (21.5.6)$$

* Второе слагаемое в скобках в уравнениях (21.5.6) и (21.5.7) определяется уравнениями (18.7.2) и (18.7.3) как равное $-n_f/6$, где n_f — число фермионов в фундаментальном представлении соответствующих $SU(N)$ калибровочных групп. Однако это было вычислено при предположении, что левые и правые фермионы находятся в одном и том же представлении калибровочной группы. Если подсчитать только левые фермионы (и антифермионы), то второе слагаемое в скобках в (21.5.6) и (21.5.7) должно равняться $-n_f/12$. В случае $SU(3)$ в каждом поколении имеются два левых кварковых и два левых антикварковых триплета, так что $n_f = 4n_g$, в то время, как в случае $SU(2)$ в каждом поколении имеются три левых кварковых дублета и один левый лептонный дублет, так что опять $n_f = 4n_g$. Для $U(1)$ бета-функция равна произведению $g'/24\pi^2$ на сумму квадратов $U(1)$ зарядов для левых фермионов и антифермионов (ср. с (18.2.38)), что согласно (21.5.4) равно $(g'/24\pi^2) \times (10n_g g'^2/3)$.

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2} \left(\frac{11}{6} - \frac{n_g}{3} \right), \quad (21.5.7)$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} g'(\mu) = -\frac{g'^3(\mu)}{4\pi^2} \left(-\frac{5n_g}{9} \right). \quad (21.5.8)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} = \frac{1}{g_s^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{11}{3} - \frac{4n_g}{3} \right) \ln \left(\frac{M}{\mu} \right), \quad (21.5.9)$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{22}{3} - \frac{4n_g}{3} \right) \ln \left(\frac{M}{\mu} \right), \quad (21.5.10)$$

$$\frac{1}{g'^2(\mu)} = \frac{1}{g'^2(M)} - \frac{1}{8\pi^2} \left(-\frac{20n_g}{9} \right) \ln \left(\frac{M}{\mu} \right). \quad (21.5.11)$$

Кроме того, соотношение (21.5.5) можно интерпретировать следующим образом:

$$g_s^2(M) = g^2(M) = \frac{5}{3} g'^2(M). \quad (21.5.12)$$

Поэтому можно исключить константы (21.5.12) и число поколений, вычитая (21.5.10) из (21.5.9), что дает

$$\frac{1}{g_s^2(\mu)} - \frac{1}{g^2(\mu)} = -\frac{11}{24\pi^2} \ln \left(\frac{M}{\mu} \right), \quad (21.5.13)$$

и произведение $3/5$ на (21.5.11) — из (21.5.10), что дает

$$\frac{1}{g^2(\mu)} - \frac{3}{5g'^2(\mu)} = -\frac{11}{12\pi^2} \ln \left(\frac{M}{\mu} \right). \quad (21.5.14)$$

Беря отношение этих двух уравнений, получаем формулу для $\sin^2 \theta \equiv g'^2 / (g^2 + g'^2)$:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{6} + \frac{5e^2(m_Z)}{9g_s^2(m_Z)}. \quad (21.5.15)$$

В этой формуле мы положили μ равным типичной энергии процесса, использованного для измерения $\sin^2 \theta$, т. е. $\mu \approx m_Z$. Это имеет то преимущество, что мы можем использовать уравнения ренормгруппы (21.5.6)–(21.5.8) только в области выше m_Z , где на них не сильно влияет спонтанное нарушение $SU(2) \times U(1)$. Соотношения (21.5.13) и (21.5.14) можно также скомбинировать и получить формулу для шкалы объединения M :

$$\ln \left(\frac{M}{m_Z} \right) = \frac{4\pi^2}{11e^2} \left(1 - \frac{8e^2(m_Z)}{3g_s^2(m_Z)} \right), \quad (21.5.16)$$

где опять, чтобы избежать влияния нарушения электрослабой симметрии на уравнения ренормгруппы, мы положили μ равным m_Z .

В разделе 18.2 мы видели, что значение $e(\mu)$ при $\mu \approx m_Z$ дается выражением $e(m_Z)^2/4\pi = (128,87 \pm 0,12)^{-1}$. Этот заряд определен стандартным образом (по Гелл-Манну и Лоу) через поляризацию вакуума. Имея в виду сравнение с g_s , g' и g , лучше использовать константу, определенную (как в разделе 18.6) в схеме модифицированного минимального вычитания: $e(m_Z)^2/4\pi = (127,9 \pm 0,1)^{-1}$.

Самая большая неопределенность в формулах (21.5.13) и (21.5.14) содержится в значении $g_s^2(m_Z)$. Как обсуждалось в разделе 18.7, извлечение g_s из данных при низких энергиях дает $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0,118 \pm 0,006$, в то время как прямое измерение из вероятности распада Z^0 в адроны дает $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0,120 \pm 0,0025$. Если взять $g_s^2(m_Z)/4\pi = 0,118$ и $e(m_Z)^2/4\pi = 1/128$, то из уравнений (21.5.15) и (21.5.16) получаются $\sin^2 \theta = 0,203$ и $M \approx 1,1 \times 10^{15}$ ГэВ.

Как отмечалось в разделе 21.3, нет оснований ожидать, что барионное и лептонное числа должны сохраняться подавленными неперенормируемыми слагаемыми в эффективном лагранжиане, описывающем физику при обычных энергиях.

Поэтому можно ожидать наличия сохраняющего $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ симметрию четырехфермионного (три кварка и один лептон) взаимодействия с коэффициентом, который по размерным соображениям должен быть порядка $1/M^2$. На основании этих соображений была дана первая оценка времени жизни протона — порядка 10^{32} лет³⁶. Такое несохраняющее барионное и лептонное числа четырехфермионное взаимодействие возникает в моделях типа рассмотренных в работах^{33–35} за счет обмена калибровочными бозонами массами порядка M . Более общее утверждение заключается в том, что если только стандартная модель объясняет, почему естественным образом подавлены процессы с несохранением барионного и лептонного чисел, то исчезают всякие разумные основания для веры в точное сохранение как барионного, так и лептонного чисел.

Мы видели, что предсказание (21.5.15) довольно близко к измеренному значению 0,23 для $\sin^2\theta$, однако точность измерений и вычислений достаточно хороша, чтобы понять, что эти числа не находятся в точном согласии. Для устранения этого расхождения в суперсимметричных теориях возникают новые частицы^{36a}, что дает на порядок большее значение $M \simeq 2 \times 10^{16}$ ГэВ^{36b}. Очень интересно, что это значение M не слишком отличается от энергии 10^{18} ГэВ, при которой сильными становятся гравитационные взаимодействия. Большое значение M влияет также на увеличение времени жизни протона, пропорциональное M^4 .

21.6. Сверхпроводимость *

Сверхпроводимость сильно отличается от явлений в мире элементарных частиц, которые главным образом интересуют нас в этой книге, однако она вполне заслуживает рассмотрения, с одной стороны, как самый первый реалистический пример спонтанно нарушенной калибровочной симметрии, а с другой — как исключительно яркий пример мощи эффективных теорий поля и использования в них топологических соображений.

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

Сверхпроводник — это просто вещество, в котором спонтанно нарушена электромагнитная калибровочная инвариантность *. Для объяснения того, почему и при каких температурах возникает такое нарушение симметрии, требуются детальные динамические теории, но они не нужны для обоснования наиболее поразительных черт явления сверхпроводимости: выталкивания магнитных полей, квантования потока, нулевого сопротивления и появления переменных токов в щели между сверхпроводниками, находящимися под разными напряжениями. Как мы увидим ниже, эти следствия нарушенной калибровочной инвариантности могут быть выведены в духе, несколько напоминающем наше рассмотрение мягких пионов, с опорой исключительно на общие свойства голдстоуновской моды ³⁹.

Действие для любой системы должно быть инвариантным относительно калибровочных преобразований, имеющих в единицах СГС вид

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (21.6.1)$$

$$\psi_n(x) \rightarrow \exp(iq_n \Lambda(x) / \hbar) \psi_n(x), \quad (21.6.2)$$

где $\Lambda(x)$ — произвольная функция, а q_n — электрический заряд, уничтожаемый полем ψ_n . Предполагается, что все заряды являются целыми кратными заряду электрона $-e$, так что эта группа компактна: фазы Λ и $\Lambda + 2\pi\hbar/e$ рассматриваются как тождественные. Предполагается, что эта группа симметрии нарушена в сверхпроводнике ненулевыми средними значениями операторов, несущих заряд $-2e$ (такими, как произведения двух полей электронов), так

* Исторически сложилось так, что большинство экспертов по сверхпроводимости рассуждали иным образом. Было известно, что в первых феноменологических теориях калибровочная инвариантность нарушается, но это обстоятельство рассматривалось скорее как мешающее, а не проливающее свет на проблему. В основополагающей работе Бардина, Купера и Шриффера ³⁷, в которой впервые была предложена микроскопическая теория сверхпроводимости, нарушенная симметрия не упоминалась ни разу. Позднее Андерсон ³⁸ подчеркивал важную роль нарушенной симметрии в сверхпроводниках, но даже сегодня в большинстве учебников сверхпроводимость объясняется с помощью подробных динамических моделей, а нарушенная симметрия упоминается очень редко.

что имеется ненарушенная подгруппа Z_2 , состоящая из калибровочных преобразований с $\Lambda = 0$ и $\Lambda = \pi\hbar/e$.

Мы вводим поле голдстоуновского бозона $\phi(x)$, записывая все заряженные поля как

$$\psi_n(x) = \exp(iq_n\phi(x)/\hbar)\tilde{\psi}_n(x). \quad (21.6.3)$$

Поле $\phi(x)$ параметризует фактор-пространство $U(1)/Z_2$, и, таким образом, задано свойство калибровочного преобразования

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \Lambda(x). \quad (21.6.4)$$

Поскольку $\phi(x)$ параметризует $U(1)/Z_2$, а не $U(1)$, мы должны отождествить $\phi(x)$ и $\phi(x) + \pi\hbar/e$. Все поля калибровочно инвариантны, и после интегрирования по ним лагранжиан становится калибровочно инвариантным функционалом только от полей ϕ и A^μ . Отсюда следует, что функцию Лагранжа голдстоуновского и электромагнитного полей можно записать в виде

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + L_s[A_\mu - \partial_\mu\phi], \quad (21.6.5)$$

где L_s — плохо известный функционал. Электрический ток и плотность заряда равны

$$\mathbf{J}(x) = \frac{\delta L_s}{\delta \mathbf{A}(x)}, \quad (21.6.6)$$

$$J^0(x) = -\frac{\delta L_s}{\delta A^0(x)} = -\frac{\delta L_s}{\delta \phi(x)}, \quad (21.6.7)$$

Уравнения движения поля голдстоуновского бозона имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L_s}{\delta \dot{\phi}(x)} = \frac{\delta L_s}{\delta \phi(x)} = \nabla \cdot \frac{\delta L_s}{\delta \mathbf{A}(x)}, \quad (21.6.8)$$

что, с учетом формул (21.6.6) и (21.6.7), эквивалентно закону сохранения электрического заряда

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} J^0 = 0. \quad (21.6.9)$$

Посмотрим теперь, как этот формализм объясняет примечательные свойства сверхпроводников. В отношении L_s достаточно предположить, что в отсутствии голдстоуновского или внешних электромагнитных полей система стабильна, так что энергия по крайней мере имеет локальный минимум при $A_\mu = \partial_\mu \phi$ с исчезающими вторыми производными по разности $A_\mu - \partial_\mu \phi$.

Одно немедленное следствие состоит в том, что в глубине большого сверхпроводника, где граничные условия несущественны, электромагнитное поле есть чистая калибровка:

$$A_\mu = \partial_\mu \phi, \quad (21.6.10)$$

так что, в частности, магнитное поле должно обращаться в нуль. Это явление известно как *эффект Мейснера*. Можно более количественно пояснить, что мы понимаем под словами «в глубине большого сверхпроводника». Поскольку при выполнении соотношения (21.6.10) энергия минимальна, для малых значений $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ она должна быть порядка $|\mathbf{A} - \nabla\phi|^2 L^3 / \lambda^2$, где λ — некоторая длина, зависящая от природы вещества, а L^3 — объем сверхпроводника. Если в сверхпроводник проникает магнитное поле порядка B , мы должны иметь $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ порядка BL , т. е. затрата энергии на проникновение магнитного поля вглубь сверхпроводника будет порядка $B^2 L^5 / \lambda^2$. С другой стороны, затрата энергии на вытеснение магнитного поля B из объема L^3 по порядку величины равна $B^2 L^3$. Отсюда слабое магнитное поле будет вытеснено из сверхпроводника, если $B^2 L^5 / \lambda^2 \gg B^2 L^3$ или, иными словами, если $L \gg \lambda$. По этой причине λ называют *глубиной проникновения* в сверхпроводник.

На основании тех же энергетических соображений можно утверждать, что для любого сверхпроводящего вещества существует критическое магнитное поле, выше которого сверхпроводимость исчезает. Существование сверхпроводимости при нулевом магнитном поле означает, что энергия в единичном объеме вещества в нормальном состоянии больше, чем в сверхпроводящем, на некоторую величину Δ . Когда сверхпроводник линейными размерами, много большими λ , помещается в магнитное поле B , это поле вытесняется из большей части вещества, на что тратится энергия в единице объема, равная $B^2/2$. Отсюда следует, что веществу энергетически выгодно находиться в сверхпроводящем состоянии, если и только если магнитное поле не превышает критического значения

$$B_c = \sqrt{2\Delta}. \quad (21.6.11)$$

(Это верно для однородных сверхпроводников. Ниже мы увидим, что для сверхпроводников определенного типа возможно сохранить сверхпроводимость почти во всем образце при магнитных полях в конечном интервале значений выше B_c за счет образования узких вихревых нитей с нормальным металлом на их концах.) Магнитное поле $B < B_c$ будет проникать в сверхпроводник на глубину λ , не уничтожая сверхпроводимости в таком слое; действительно, как следует из уравнения поля $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}$, именно в этом поверхностном слое сверхпроводника может течь электрический ток.

Рассмотрим теперь свернутый в кольцо толстый сверхпроводящий провод, толщина которого много больше λ . Можно провести глубоко внутри провода замкнутый контур C , вдоль которого $|\mathbf{A} - \nabla\phi|$ должно обращаться в нуль. Это не означает, что $\mathbf{A}$ или ϕ равны нулю на этом контуре, но мы знаем, что при обходе контура ϕ должно вернуться к эквивалентному значению и поэтому может изменяться только на величину $n\pi\hbar/e$, где n — положительное или отрицательное целое число или нуль. Тогда из теоремы Стокса следует, что магнитный поток сквозь поверхность, натянутую на контур C , подчиняется правилу *квантования потока*

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{x} = \frac{n\pi\hbar}{e}. \quad (21.6.12)$$

Электрический ток, создающий поток магнитного поля (21.6.12), течет в слое толщиной λ под самой поверхностью сверхпроводящей проволоки. Квантование потока показывает, что этот ток не может затухать непрерывно, а может меняться только скачками, при которых поток (21.6.12) уменьшается на целое кратное $\pi\hbar/e$, так что в сверхпроводнике нет сопротивления в обычном смысле.

Отсутствие сопротивления в сверхпроводнике можно показать и в более общем случае, чем замкнутые кольца, рассматривая зависящие от времени эффекты. Заметим, что формулу (21.6.7) можно интерпретировать как утверждение, что $-J^0$ есть канонически сопряженная к ϕ величина. Таким образом, гамильтониан H_s следует рассматривать как функционал ϕ и J^0 , а не ϕ и $\mathbf{J}$, причем зависимость ϕ от времени дается уравнением Гамильтона

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\delta H}{\delta(-J^0(x))}. \quad (21.6.13)$$

Далее, «напряжение» $V(x)$ в любой точке есть просто изменение плотности энергии, приходящееся на изменение плотности заряда в этой точке, так что соотношение (21.6.13) позволяет записать временную зависимость поля голдстоуновского бозона в виде

$$\dot{\phi}(x) = -V(x). \quad (21.6.14)$$

Отсюда вытекает, что кусок сверхпроводящей проволоки, по которому идет постоянный ток, а поля не зависят от времени, должен иметь нулевое падение напряжения между концами, поскольку в противном случае поле $\phi(x)$ имело бы зависящий от времени градиент. Но нулевое падение напряжения при конечном токе и есть то, что мы понимаем под нулевым сопротивлением.

Рассмотрим теперь щель между двумя кусками сверхпроводящего вещества. Из калибровочной инвариантности следует, что при отсутствии любых градиентов вдоль поверхности щели или любого векторного потенциала L_s зависит только от разности $\Delta\phi$ между полями голдстоуновских бозонов в двух сверхпроводниках:

$$L_{\text{контакт}} = \mathcal{A} F(\Delta\phi), \quad (21.6.15)$$

где $\mathcal{A}$ — площадь перехода. Более того, можно сдвинуть ϕ в любом из сверхпроводников на целое кратное $\pi\hbar/e$, не произведя никакого физического эффекта, и поэтому функция F должна быть периодической *:

$$F(\Delta\phi) = F(\Delta\phi + \pi\hbar/e). \quad (21.6.16)$$

Сквозь такую щель течет ток, который можно вычислить, рассматривая переход в присутствии векторного потенциала $\mathbf{A}$. Из калиб-

* Эта функция была вычислена Джозефсоном ⁴⁰, который обнаружил, что она пропорциональна $\cos(2e\Delta\phi/\hbar)$, но это приближенный результат, а свойство периодичности — точное.

ровочной инвариантности следует, что вместо $\Delta\Phi$ функция F должна зависеть от

$$\Delta_A\Phi = \int d\mathbf{x} \cdot (\nabla\Phi - \mathbf{A}) ,$$

причем интеграл берется по линии, соединяющей два сверхпроводника. Тогда из формулы (21.6.6) следует, что плотность тока равна

$$\mathbf{J} = \frac{\delta L_{\text{контакт}}}{\delta \mathbf{A}} = -\hat{\mathbf{n}} F'(\Delta_A\Phi) ,$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор, перпендикулярный щели. Теперь можно избавиться от векторного потенциала и найти ток

$$\mathbf{J} = -\hat{\mathbf{n}} F'(\Delta\Phi) . \quad (21.6.17)$$

Если мы предположим, что оба сверхпроводника поддерживаются при постоянных напряжениях, разность которых равна ΔV , то, согласно (21.6.14), разность полей голдстоуновских бозонов будет зависеть от времени:

$$\Delta\Phi = -t\Delta V + \text{const.} \quad (21.6.18)$$

Подставляя это в формулу (21.6.17) и вспоминая (21.6.16), видим, что ток осциллирует с частотой

$$\nu = \frac{e|\Delta V|}{\pi\hbar} . \quad (21.6.19)$$

Это — *эффект Джозефсона для переменного тока* ⁴⁰. Напряжения и частоты можно измерять с большой точностью, поэтому описанный эффект дает метод очень точного измерения константы $e/\hbar$.

Как отмечено в конце раздела 19.6, описание системы с нарушенной симметрией с помощью только голдстоуновских мод становится неадекватным, когда состояние системы приближается к точке, где нарушенная симметрия становится ненарушенной. При этих обстоятельствах голдстоуновская мода сопровождается другими модами, имеющими почти нулевую частоту в пределе больших длин волн, и образующими вместе с голдстоуновской модой *линейное* представление (обычно неприводимое) группы симметрии, известное как параметр порядка. Правдоподобно предположить, что

однородный сверхпроводник в медленно меняющихся внешних полях описывается *локальным* параметром порядка, поскольку всякая нелокальность должна характеризоваться микроскопическими масштабами длины (типа среднего расстояния между электронами), которые много меньше тех масштабов расстояний, на которых, как предполагается, изменяются электромагнитное и голдстоуновское поля. В случае сверхпроводимости не возникает никаких сомнений относительно природы этого параметра порядка. Единственное нетривиальное неприводимое линейное представление группы $U(1)$ есть действительный 2-вектор Ψ_n , или, эквивалентно, голдстоуновская мода ϕ и поле модуля ρ , где

$$\Psi_1 + i\Psi_2 = \rho \exp(2ie\phi / \hbar) \equiv \Psi. \quad (21.6.20)$$

Коэффициент $i\phi$ в показателе экспоненты должен равняться $2e/\hbar$, для того чтобы калибровочное преобразование с $\Lambda = \pi\hbar/e$ (и без меньших Λ) оставляло бы Ψ_n инвариантным. Для почти однородной независимой от времени системы, находящейся близкой к нарушающему симметрию переходу, параметр порядка мал и медленно изменяется в пространстве, поэтому функцию Лагранжа во внешнем векторном потенциале $\mathbf{A}$ можно приближенно записать в виде (с этого момента используем естественные единицы с $\hbar = 1$)

$$L_s \equiv \int d^3x \left[-\frac{1}{2} (\nabla \Psi_n - 2iet_{nm} \mathbf{A} \Psi_m)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Psi_n \Psi_n - \frac{1}{4} g (\Psi_n \Psi_n)^2 \right], \quad (21.6.21)$$

где t — эрмитовый $U(1)$ генератор

$$t = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

а константу g следует взять положительной, чтобы получить ограниченный гамильтониан. Это — *теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау* ⁴¹. Горьков ⁴² вывел ее из описанной ниже микроскопической теории сверхпроводимости в случае короткодействующего потенциала и температуры, близкой к критической температуре, при которой вещество теряет сверхпроводящие свойства.

Выражение (21.6.21), записанное через ρ и Φ , принимает вид

$$L_s \equiv \int d^3x \left[-2e^2 \rho^2 (\nabla\Phi - \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2} m^2 \rho^2 - \frac{1}{4} g \rho^4 - \frac{1}{4} (\nabla\rho)^2 \right]. \quad (21.6.22)$$

Тогда уравнения поля имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4e^2 \rho^2 (\nabla\Phi - \mathbf{A}), \quad (21.6.23)$$

$$\nabla^2 \rho = -m^2 \rho + g \rho^3 + 4e^2 \rho (\nabla\Phi - \mathbf{A})^2. \quad (21.6.24)$$

Симметрия $U(1)$ нарушается, если эти уравнения удовлетворяются при $\rho \neq 0$. Это выполнено для однородного вещества без внешнего поля, если $m^2 > 0$, и в этом случае ρ принимает значение $\langle \rho \rangle = m / \sqrt{g}$. Глубина проникновения λ была ранее определена как обратный квадратный корень из коэффициента при $-\frac{1}{2}(\nabla\Phi - \mathbf{A})^2$, так что здесь

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{4e^2 \langle \rho \rangle^2}} = \frac{\sqrt{g}}{2em}. \quad (21.6.25)$$

Это расстояние согласно уравнению (21.6.23) характеризует изменения магнитного поля. С другой стороны, изменения модуля ρ характеризуются шкалой расстояний, называемой *корреляционной длиной*, которая, согласно (21.6.24), дается выражением *

$$\xi = \frac{1}{m\sqrt{2}}. \quad (21.6.26)$$

Кроме того, сверхпроводящее состояние с $\rho = \langle \rho \rangle$ имеет энергию в единице объема меньше, чем в нормальном состоянии с $\rho = 0$, на величину

$$\Delta = \frac{1}{2} m^2 \langle \rho \rangle^2 - \frac{1}{4} \langle \rho \rangle^4 = \frac{m^4}{4g}. \quad (21.6.27)$$

* Множитель включен вместе с μ , потому что при $\rho = \langle \rho \rangle$ производная функции $-m^2 \rho + g \rho^3$ в уравнении (21.6.24) равна $2m^2$.

Исключая параметры m и g из формул (21.6.25)–(21.6.27), находим важное приближенное соотношение между наблюдаемыми величинами λ , ξ и Δ :

$$\Delta \cong \frac{1}{8e^2\lambda^2\xi^2}. \quad (21.6.28)$$

Поле модуля становится важным в динамике сверхпроводящих вихревых нитей. Они возникают, когда сверхпроводник определенного типа помещается в достаточно сильное магнитное поле, так, чтобы стало энергетически выгодным проникновение в вещество трубок магнитного потока, называемых вихревыми нитями⁴³. (Условия возникновения вихревых нитей обсуждаются ниже.) Проведя замкнутую кривую $\mathcal{C}$ вокруг трубки на расстоянии, много большем глубины проникновения, где магнитное поле обращается в нуль, и повторяя рассуждения, связанные с формулой (26.6.12), видим, что магнитный поток через поверхность $\mathcal{A}$, натянутую на $\mathcal{C}$, должен быть равным изменению Φ вдоль кривой, а следовательно, равным целому кратному кванта потока π/e , как и для потока через толстое сверхпроводящее кольцо. Когда этот поток не равен нулю, внутри каждой трубки должна быть линия, вдоль которой электромагнитная калибровочная инвариантность не нарушена. Чтобы увидеть это, заметим, что при стягивании кривой $\mathcal{C}$ в область большого магнитного поля условие $\nabla\Phi = \mathbf{A}$ становится неверным, однако изменение Φ вдоль кривой должно остаться целым кратным π/e , и поэтому по соображениям непрерывности не может измениться. Следовательно мы в конце концов столкнемся с нитью (не исключено, что конечной толщины), вдоль которой ρ обращается в нуль, так что Φ становится плохо определенной величиной. (Это элементарный пример топологических рассуждений, которые мы используем далее в гл. 23.) В окрестности этой нити как ρ , так и Φ следует принимать в качестве динамических переменных.

Квантование магнитного потока показывает, что сверхпроводящая вихревая нить с минимальным потоком π/e стабильна. Вихревые нити с большими потоками не могут просто исчезнуть, однако отдельно взятый закон квантования магнитного потока не способен предотвратить разрушение этих нитей с превращением в нити меньшего потока. Богомольный^{43a} показал, что вихревые нити с потоком $n\pi/e$ и $n > 1$ нестабильны по отношению к развалу на n вихревых нитей с потоком π/e , если и только если $\lambda > \xi$.

По этой и другим причинам удобно разделить сверхпроводящие вещества на два класса: *сверхпроводники I рода* (большинство чистых металлов за исключением ниобия), у которых $\xi > \lambda$, и *сверхпроводники II рода* (ниобий и большинство сплавов), у которых $\xi < \lambda$. Соответственно, в электрослабой модели возникает различие между теориями, в которых масса скаляра (аналогичная $1/\xi$) меньше или больше масс W и Z (аналоги $1/\lambda$).

Из определений корреляционной длины ξ и глубины проникновения λ следует, что модулярный параметр возрастает от нуля на центральной оси нити до равновесного значения $\langle \rho \rangle$ на расстоянии порядка корреляционной длины ξ , в то время, как магнитное поле убывает до нуля на расстоянии от центральной линии порядка глубины проникновения λ . Следовательно, в сверхпроводнике I рода с $\xi \gg \lambda$ вихревое решение будет состоять из тонкого внутреннего цилиндра из почти обычного металла, внутри которого магнитное поле падает до нуля, окруженного значительно более толстым внешним цилиндром, внутри которого модулярный параметр возрастает до своего асимптотического значения $\langle \rho \rangle$. Наоборот, вихревое решение в сверхпроводниках II рода с $\lambda \gg \xi$ состоит из тонкого внутреннего цилиндра с постоянным магнитным полем, внутри которого модулярный параметр возрастает до своего асимптотического значения $\langle \rho \rangle$, окруженного более толстым внешним цилиндром из сверхпроводящего вещества, в котором магнитное поле падает до нуля. Вихревые решения существуют для сверхпроводников обоих типов и при любом магнитном поле, но, как мы сейчас увидим, вихревые нити оказываются энергетически выгодными только в сверхпроводниках II рода и в конечном интервале значений магнитного поля.

Поскольку площадь поперечного сечения каждой вихревой нити порядка $\pi\xi^2$, и внутри этого сечения вещество находится в нормальном состоянии или вблизи него, дополнительная энергия в единице объема, необходимая для создания таких вихревых нитей, — порядка $\frac{1}{2}\pi\xi^2\Delta$, где $\frac{1}{2}$ — число нитей на единицу площади. Плотность нитей ограничена условием $\frac{1}{2} < 1/\pi\xi^2$, поскольку в противном случае цилиндры из нормального вещества будут перекрываться, и все вещество можно будет рассматривать как находящееся в нормальном состоянии. Магнитное поле нужно вытеснить из доли вещества $1 - \frac{1}{2}\pi\lambda^2$, если $\frac{1}{2} < 1/\pi\lambda^2$, и из всего вещества, если $\frac{1}{2} > 1/\pi\lambda^2$. Поэтому плотность энергии вихревого

состояния относительно сверхпроводящего состояния в отсутствии магнитного поля равна

$$W_V \approx \kappa \pi \xi^2 \Delta + \frac{1}{2} B^2 \times \begin{cases} 1 - \kappa \pi \lambda^2, & \kappa \leq 1 / \pi \lambda^2, \\ 0, & \kappa \geq 1 / \pi \lambda^2. \end{cases} \quad (21.6.29)$$

(Мы оставили здесь численные множители типа $\frac{1}{2}$ или π , чтобы напомнить читателю происхождение этих выражений, однако не следует воспринимать их буквально.) Для сравнения, плотность энергии нормального металла превышает плотность энергии сверхпроводящего состояния на величину $W_N = +\Delta$, а плотность энергии, требуемая на то, чтобы вытеснить все магнитные поля из сверхпроводника, равна $W_S = B^2/2$. Проверяя, какая из величин W_S , W_N или W_V наименьшая, мы можем решить, какое состояние присутствует в данном магнитном поле.

В сверхпроводниках I рода следует различать случаи, когда магнитные поля меньше или больше критического поля $B_c \equiv \sqrt{2\Delta}$. Вспоминая, что $\kappa < 1/\pi \xi^2$, и $\xi > 1$, имеем $\kappa < 1/\pi \lambda^2$. Так как при $B < B_c$ из формулы (21.6.29) следует, что плотность энергии $W_V > \frac{1}{2} B^2 + \kappa \pi (\xi^2 - \lambda^2) \Delta > W_S$, вихревых нитей может и не быть. Кроме того, при таких полях $W_N > W_S$, так что вещество сверхпроводящее. С другой стороны, при $B > B_c$ из (21.6.29) следует, что $W_V > \Delta [1 + \kappa \pi (\xi^2 - \lambda^2)] > W_N$, т. е. вихревые нити опять отсутствуют. Кроме того, при таких полях $W_S > W_N$, т. е. вещество находится в нормальном состоянии.

В сверхпроводниках II рода следует различать три области значений магнитных полей: $B < B_{c1}$, $B_{c1} < B < B_{c2}$, $B > B_{c2}$, где B_{c1} и B_{c2} — два критических поля порядка

$$B_{c1} \approx \sqrt{2\Delta} \xi / \lambda, \quad B_{c2} \approx \sqrt{2\Delta} \lambda / \xi.$$

Как мы видели, единственные стабильные вихревые нити в сверхпроводниках II рода — это нити с минимальным потоком $\Phi_0 = \pi/e$, так что в магнитном поле B нужно положить число κ вихревых нитей

* Данный выше вывод квантования магнитного потока для изолированной вихревой нити здесь применим не полностью. Как мы увидим, расстояние между вихревыми нитями при $B > B_{c1}$ меньше, чем глубина проникновения λ , поэтому невозможно найти контур $\mathcal{C}$, на котором $\mathbf{A} - \nabla\phi = 0$,

на единицу площади в формуле (21.6.29) равным eB/π . При $B < B_{c1}$ с помощью уравнения (21.6.8) можно показать, что $eB/\pi < 1/\pi\lambda^2$. Поэтому коэффициент при плотности нитей n в (21.6.29) есть положительная величина $\pi\xi^2\Delta - \frac{1}{2}B^2\lambda^2$, так что в этом случае $W_V > W_S$ и при $B < B_{c1}$ вихревых нитей нет. Кроме того, при таких полях $W_N > W_S$, т. е. вещество полностью сверхпроводящее. При $B > B_{c1}$ из (21.6.28) следует, что плотность нитей $n = eB/\pi$ больше, чем $1/\pi\lambda^2$, так что в вихревом состоянии магнитное поле полностью проникает в сверхпроводник, и плотность энергии дается выражениями (21.6.29) и (21.6.28):

$$W_V \approx n\pi\xi^2\Delta = eB\xi^2\Delta \approx (B/B_{c2})W_N \approx (B_{c1}/B)W_S.$$

Отсюда, при $B_{c1} < B < B_{c2}$ имеем $W_V < W_N$ и $W_V < W_S$, так что вещество находится в состоянии вихревых нитей. При $B > B_{c2}$ все еще $W_V < W_S$, но теперь $W_N < W_V$, так что вихревые нити исчезают, и вся сверхпроводимость уничтожается. Способность сверхпроводников II рода с $\lambda \gg \xi$ удерживать намного более сильные магнитные поля, чем критическое поле $B_c \approx \sqrt{\Delta}$, очень важна для технических приложений сверхпроводимости, в частности, для разработки магнитов ускорителей на высокие энергии.

Теория Гинзбурга–Ландау применима только в случае, когда вещество находится вблизи перехода между нормальным и сверхпроводящим состояниями, поэтому применим ее для области в окрестности центра вихревой нити, где ρ падает до нуля. Вблизи центра нити можно пренебречь ее кривизной и предположить наличие цилиндрической симметрии. Выбираем поле $\mathbf{A} = \nabla\phi$ так, чтобы отличной от нуля была только азимутальная компонента:

просто проведя окружность вокруг вихревой нити на расстоянии, много большем λ . Вместо этого необходимо обратиться к соображениям непрерывности (М. Тинкхэм, частное сообщение). Предположим, что мы провели произвольную непрерывную кривую между центрами любых двух вихревых нитей. Как показано ниже, на этой кривой вектор $\mathbf{A} = \nabla\phi$ очень большой вблизи каждой из нитей, но направлен в противоположные стороны на концах кривой. Поэтому есть по крайней мере одна точка на каждой такой кривой, в которой $\mathbf{A} = \nabla\phi = 0$. Поскольку $\mathbf{A} = \nabla\phi$ калибровочно инвариантна, она должна быть непрерывной, следовательно, существует замкнутый контур вокруг каждой вихревой нити, на котором $\mathbf{A} = \nabla\phi = 0$.

$$(\mathbf{A} - \nabla\phi)_\theta = A(r), \quad (21.6.30)$$

поэтому магнитное поле будет иметь только z -компоненту

$$B_z = (\nabla \times (\mathbf{A} - \nabla\phi))_z = A'(r) + A(r) / r, \quad (21.3.31)$$

а ρ будет функцией только от r . Таким образом, структура вихревой нити определяется парой зацепляющихся дифференциальных уравнений

$$A''(r) + r^{-1}A'(r) - r^{-2}A(r) = \frac{\rho^2(r)A(r)}{\lambda^2 \langle \rho \rangle^2}, \quad (21.3.32)$$

$$\rho''(r) + r^{-1}\rho'(r) + \frac{1}{2\xi^2} \left(\rho(r) - \frac{\rho^3(r)}{\langle \rho \rangle^2} \right) = 4e^2 \rho(r) A^2(r). \quad (21.6.33)$$

Если r мало по сравнению как с корреляционной длиной ξ , так и с глубиной проникновения λ , можно пренебречь теми слагаемыми в уравнениях (21.6.32) и (21.6.33), которые пропорциональны $1/\xi^2$ и $1/\lambda^2$, и получить упрощенные уравнения

$$A'' + A' / r - A / r^2 = 0, \quad (21.6.34)$$

$$\rho'' + \rho' / r = 4e^2 A^2 \rho. \quad (21.6.35)$$

Общее решение уравнения (21.6.34) имеет вид

$$A(r) = \frac{Br}{2} + \frac{C}{2er}, \quad (21.6.36)$$

где B — константа, которая, согласно формуле (21.6.31), равна магнитному полю вдоль вихревой нити, а C — действительная постоянная, которая пока что произвольна. Подстановка решения для A в (21.6.35) показывает, что при $r \rightarrow 0$ решение для ρ есть линейная комбинация $r^{|C|}$ и $r^{-|C|}$. Параметр порядка $\text{rexp}(2ie\phi)$ должен быть гладкой функцией координат, поэтому можно сделать вывод, что $|C|$ есть целое положительное число l , и при $r \rightarrow 0$ $\rho \propto r^l$ и $\phi = \pm l\phi/2e + \text{const}$. Заметим, что это решение для ϕ согласуется

с решением (21.6.36) при $C = \pm l$; азимутальная компонента $\nabla\phi$ стремится к значению $\pm l/2er$, в то время как аналитичность требует, чтобы азимутальная компонента $\mathbf{A}$ обращалась в нуль при $r \rightarrow 0$. С помощью несингулярного калибровочного преобразования можно сделать так, чтобы везде $\phi = \pm l\phi/2e$, и, по тем же соображениям, что и при выводе формулы (21.6.12), магнитный поток, который несет отдельная вихревая нить в сверхпроводнике, размеры которого много больше глубины проникновения, равен $\pm\pi l/e$. Мы видим не только то, что, как и ожидалось, параметр порядка обращается в нуль в центре вихревой нити, но устанавливаем, что он стремится к нулю как степень r , где показатель степени равен величине магнитного потока в единицах π/e .

Это решение для ϕ подчиняется условию «квантования», что $\phi(2\pi) - \phi(0)$ есть целое кратное π/e , откуда вытекает квантование магнитного потока. В теории с голдстоуновским бозонным и электромагнитным полями, основанной на лагранжиане (21.6.5), это условие на ϕ должно было «руками» налагаться на решение уравнений поля, в то время, как уравнения Гинзбурга–Ландау «знают» об этом условии, поскольку они основаны на соответствующем выборе параметра порядка.

* * *

Хотя наиболее существенные свойства сверхпроводников можно вывести непосредственно из предположения о спонтанном нарушении электромагнитной калибровочной инвариантности, для понимания того, как и когда это происходит, необходима микроскопическая теория сверхпроводимости. С помощью методов подсчета степеней, похожих на использованные в разделах 19.5 и 21.4, вывод микроскопической теории сверхпроводимости Бардина, Купера и Шриффера³⁷ был переформулирован^{44,44a} на языке эффективной теории поля. Для этого предположим, что мы проинтегрировали по всем степеням свободы, связанными с ионами в сверхпроводнике*, и оставили только эффективное взаимодействие между электронами. Для простоты будем считать, что температура

* Строго говоря, невозможно произвести интегрирование по всем степеням свободы, кроме электронных, поскольку фонон — это голдстоуновский бозон, частота которого обращается в нуль для очень больших длин

равна нулю, и предположим сначала, что нет внешнего поля, так что лагранжиан инвариантен относительно трансляций и операции обращения времени T . Предположим также, что силы не зависят от спинов, так что лагранжиан инвариантен относительно $SU(2)$ преобразований, действующих только на спиновые индексы, однако нам не потребуется предположение об инвариантности относительно вращений, действующих на импульсы. Тогда электроны характеризуются импульсом $\mathbf{p}$ и спиновым индексом $s = \pm 1$ и описываются операторами уничтожения и рождения $a(\mathbf{p}, s, t)$ и $a^\dagger(\mathbf{p}, s, t)$ с лагранжианом вида

$$\begin{aligned}
 L = & - \sum_s \int d^3p a^\dagger(\mathbf{p}, s, t) \left[-i \frac{\partial}{\partial t} + E(\mathbf{p}) \right] a(\mathbf{p}, s, t) \\
 & + \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \\
 & \times a^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1, t) a^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2, t) a(\mathbf{p}_3, s_3, t) a(\mathbf{p}_4, s_4, t) \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \\
 & + \dots,
 \end{aligned} \tag{21.6.37}$$

где многоточие означает слагаемые с шестью и более операторами рождения и уничтожения, а $E(\mathbf{p})$ — энергия электрона за вычетом химического потенциала. Для свободных электронов $E(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m_e - E_F$, где E_F — энергия электронов на поверхности Ферми. Взаимодействия будут неизбежно изменять эту функцию, но естественно предположить, что поскольку для свободных электронов $E(\mathbf{p})$ обращается в нуль при импульсах $\mathbf{p}$, лежащих на сфере $|\mathbf{p}| = \sqrt{2m_e E_F}$, то в присутствии взаимодействий эта функция все же будет обращаться в нуль на некоторой замкнутой ферми-поверхности $\mathcal{S}$.

$$E(\mathbf{p}) = 0 \text{ для } \mathbf{p}, \text{ лежащих на } \mathcal{S}. \tag{21.6.38}$$

По причинам, которые станут ясными, мы проинтегрируем по всем электронам, кроме тех, которые находятся в тонкой обо-

волн, наподобие безмассовой частицы в релятивистских теориях. Однако те эффекты фоновых взаимодействий, которые не могут быть представлены как эффективные электрон-электронные взаимодействия, подавлены множителями с обратными степенями масс ионов.

лочке толщиной κ вокруг поверхности Ферми *. (Ниже нам удастся избавиться от обрезания κ путем введения перенормированного электрон-электронного потенциала.) Оставшиеся степени свободы — это электроны с импульсами вида

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) l, \quad (21.6.39)$$

где $\mathbf{k}$ находится на поверхности Ферми $\mathcal{S}$, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k})$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке $\mathbf{k}$, а $0 \leq l \leq \kappa$. Для таких импульсов

$$E(\mathbf{p}) = v_F(\mathbf{k}) l, \quad (21.6.40)$$

где

$$v_F(\mathbf{k}) \equiv \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) \cdot \left(\nabla_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}) \right)_{\mathbf{p}=\mathbf{k}}. \quad (21.6.41)$$

Электронный пропагатор в пространстве волновых чисел и частот имеет тогда вид

$$\frac{1}{\omega - v_F(\mathbf{k}) l + i\varepsilon}. \quad (21.6.42)$$

Рассмотрим теперь, как зависит от масштаба κ произвольный связный матричный элемент при $\kappa \rightarrow 0$. Для каждой петли имеется интеграл по частотам и пропагатор для каждой внутренней линии, так что интеграл от произведения пропагаторов по всем частотам будет зависеть от l как l^{L-I} , где L — число петель, а I — число внутренних линий. Чтобы подсчитать число интегралов по l , важно заметить, что для произвольных импульсов дельта-функция в слагаемом с взаимодействием в (21.6.37) ограничивает не значения l , а значения $\mathbf{k}$. (Например, если сохранение импульса ограничивает импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ двух электронных линий тем, что полный импульс $\mathbf{P} \neq 0$, то интеграл по $\mathbf{p}_1$ берется по пересечению двух замкнутых оболочек толщиной κ , одна из которых имеет центром

* В случае сил, которые зависят от спинов, имеются две ферми-поверхности, по одной на каждое собственное значение матрицы $E_{s's}(\mathbf{p})$, и мы интегрируем по всем электронам в каждом спиновом собственном состоянии, за исключением тех, которые находятся в тонкой оболочке вокруг соответствующей поверхности Ферми.

$\mathbf{P}$, а другая — нуль. Пересечение этих оболочек есть замкнутое кольцо толщиной κ , так что нужно интегрировать по одной компоненте $\mathbf{k}$, задающей положение вдоль кольца, и двум l , задающим положение внутри сечения кольца.) Следовательно, имеется I интегралов по l , и так как подынтегральное выражение ведет себя как l^{L-1} , матричный элемент будет изменяться как

$$M \propto \kappa^L. \quad (21.6.43)$$

Число петель связано с числом внутренних линий и числом V_i вершин типа i знакомым соотношением

$$L = I - \sum_i V_i + 1. \quad (21.6.44)$$

Кроме того, число внутренних линий связано с числом вершин и числом внешних линий E другим знакомым соотношением

$$2I + E = \sum_i n_i V_i, \quad (21.6.45)$$

где n_i — число электронных операторов во взаимодействии типа i . Исключая I из соотношений (21.6.44) и (21.6.45), получаем

$$L = 1 - \frac{E}{2} + \frac{1}{2} \sum_i V_i (n_i - 2). \quad (21.6.46)$$

Слагаемые в действии с $n_i = 2$ приводят только к изменению функции $E(\mathbf{p})$, и следовательно, к сдвигу поверхности Ферми. Истинные взаимодействия имеют $n_i > 2$, и из соотношений (21.6.43) и (21.6.46) следует, что они приводят к слагаемым в матричном элементе, дающим пренебрежимо малые вклады при $\kappa \rightarrow 0$. На языке раздела 18.5, это означало бы, что все взаимодействия являются несущественными операторами. Вот почему электроны вблизи поверхности Ферми в нормальных металлах ведут себя во многом как свободные частицы.

Однако, есть одно исключение из этого вывода. Если пара электронных линий переходит в вакуум, то трансляционная инвариантность требует, чтобы импульсы этих линий были равны

по величине и противоположны по направлению. Таким образом, если один импульс находится вблизи поверхности Ферми, это же относится и ко второму. (Инвариантность относительно обращения времени требует, чтобы $E(\mathbf{p})$ было четной функцией $\mathbf{p}$, так что, даже если поверхность Ферми в общем случае не-сферическая, из $E(\mathbf{p}) = 0$ следует, что $E(-\mathbf{p}) = 0$.) Следовательно, интеграл по импульсу $\mathbf{p}$ одной из этих линий берется по оболочке толщиной κ , или, иными словами, по двум κ и одному l . Для каждого взаимодействия, включающего две такие линии, имеется не два, а одно интегрирование по l , так что вместо уменьшения порядка величины матричного элемента на множитель κ , как это указано в (21.6.43) и (21.6.46), подобное взаимодействие не оказывает на порядок величины матричного элемента никакого влияния. иными словами, взаимодействия, включающие четыре электронных оператора и действующие между электронными линиями, переходящими в конце концов в вакуум, становятся не несущественными, а маргинальными.

Чтобы увидеть следствия из этого исключения, удобно воспользоваться приемом, известным как *преобразование Хаббарда-Стратоновича*⁴⁵, которое кратко упоминалось в разделе 1.7. Теперь мы собираемся включить медленно меняющиеся внешние электромагнитные поля, так что будет удобно работать в координатном представлении. Из калибровочной инвариантности следует, что функция Лагранжа (21.6.37) примет вид

$$\begin{aligned}
 L = & - \sum_s \int d^3x \psi_s^\dagger(\mathbf{x}, t) \left[-i \frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x}, t) + E(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \right] \psi_s(\mathbf{x}, t) \\
 & + \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\
 & \times \psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{x}_1, t) \psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{x}_2, t) \psi_{s_3}(\mathbf{x}_3, t) \psi_{s_4}(\mathbf{x}_4, t),
 \end{aligned} \tag{21.6.47}$$

где

$$\psi_s(\mathbf{x}, t) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) a(\mathbf{p}, s, t). \tag{21.6.48}$$

Отбросим теперь слагаемые с более чем четырьмя электронными операторами, поскольку все эти слагаемые несущественны. Добавим к этой функции Лагранжа слагаемое

$$\begin{aligned}
\Delta L = & \frac{1}{4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\
& \times \left[\Psi_{s_2 s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) - \Psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{x}_1, t) \Psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{x}_2, t) \right] \\
& \times \left[\Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) - \Psi_{s_3}(\mathbf{x}_3, t) \Psi_{s_4}(\mathbf{x}_4, t) \right]
\end{aligned} \tag{21.6.49}$$

и совершим функциональное интегрирование по новому полю «пары» $\Psi(\mathbf{x}, s, \mathbf{x}', s', t)$ и по электронному полю ψ . Это возможно, потому что добавка ΔL квадратична по полям пар, а коэффициент при слагаемом второго порядка не зависит от поля, поэтому, согласно приложению к гл. 9, интегрирование по $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ в функциональных интегралах сводится к тому, что $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ надо положить равным значению в стационарной точке лагранжиана $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \psi_s(\mathbf{x}, t) \psi_{s'}(\mathbf{x}', t)$, в которой $\Delta L = 0$. Дополнительное слагаемое выбрано так, чтобы слагаемые в сумме $L + \Delta L$, которые четвертичны по электронным полям, сократились, и остались только квадратичные по этим полям члены:

$$\begin{aligned}
& L + \Delta L \\
& = - \sum_s \int d^3x \Psi_s^\dagger(\mathbf{x}, t) \left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x}, t) + E(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \right\} \Psi_s(\mathbf{x}, t) \\
& - \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\
& \times \left[\Psi_{s_1}^\dagger(\mathbf{x}_1, t) \Psi_{s_2}^\dagger(\mathbf{x}_2, t) \Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) + \Psi_{s_2 s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \Psi_{s_3}(\mathbf{x}_3, t) \Psi_{s_4}(\mathbf{x}_4, t) \right. \\
& \left. - \Psi_{s_2 s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) \right].
\end{aligned} \tag{21.6.50}$$

Переходим к самому главному. Мы показали, что взаимодействие V несущественно, за исключением случаев, когда оно действует на пару электронных линий, переходящих в вакуум. Когда мы вычисляем квантовое эффективное действие $\Gamma[\Psi]$ в присутствии внешнего медленно меняющегося поля пар $\Psi_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$, это означает, что мы опускаем все диаграммы, за исключением тех, которые становятся несвязными после разрезания по любой внутренней линии Ψ . Однако общее определение квантового эффективного действия требует, чтобы мы отбросили все диаграммы, которые

становятся несвязными после разрезания по любой внутренней линии. Следовательно, мы не должны вообще включать никаких внутренних линий Ψ . Так как электронное поле входит в выражение (21.6.50) квадратично, единственные выживающие диаграммы после интегрирования по электронным полям — это диаграмма с одной вершиной, возникающая от последнего слагаемого в квадратных скобках в (21.6.50), и однопетлевая диаграмма, которая по тем же соображениям, что и в разделе 16.2, дается логарифмом детерминанта от коэффициента при квадратичных по электронным полям слагаемых:

$$\begin{aligned} \Gamma[\Psi] = & \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \int dt \int d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 x_3 d^3 x_4 V_{s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\ & \times \Psi_{s_2 s_1}^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \Psi_{s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) \\ & - \frac{i}{2} \ln \text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & -A^T \end{pmatrix} + \text{const.} \end{aligned} \quad (21.6.51)$$

Здесь A и B — «матрицы»

$$A_{\mathbf{x}'s't', \mathbf{x}s} \equiv \delta_{s's} \left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x}, t) + E(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \right\} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(t' - t), \quad (21.6.52)$$

$$B_{\mathbf{x}'s't', \mathbf{x}s} \equiv -\Delta_{s's}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \delta(t' - t), \quad (21.6.53)$$

а Δ — щель,

$$\Delta_{s's}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma'\sigma} \int d^3 y d^3 y' V_{s's'\sigma'\sigma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{y}', \mathbf{y}) \Psi_{s's}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t). \quad (21.6.54)$$

(Здесь и ниже мы игнорируем аддитивную постоянную в Γ , возникающую от тех мод, по которым произведено интегрирование.) Это одна из задач, в которой можно вычислить эффективное действие, не делая каких-либо предположений о малости взаимодействия в лагранжиане.

Чтобы упростить дальнейшее обсуждение, ограничимся случаем синглетного по спину спаренного поля

$$\Psi_{+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -\Psi_{-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t), \quad (21.6.55)$$

где нижние индексы $+$ и $-$ соответствуют спиновым индексам $+1/2$ и $-1/2$, соответственно*. С учетом инвариантности относительно вращений по спиновым индексам, необходимые компоненты потенциала имеют вид

$$\begin{aligned} V_{+-+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) - V_{+--+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) &= -V_{-++-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) + V_{-++-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \\ &\equiv 2V(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (21.6.56)$$

Тогда из выражения (21.6.54) следует:

$$\Delta_{+-}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -\Delta_{-+}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t), \quad (21.6.57)$$

$$\Delta_{++}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \Delta_{--}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = 0. \quad (21.6.58)$$

Поэтому квантовое эффективное действие равно

$$\begin{aligned} \Gamma[\Psi] &= \int dt \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\ &\quad \times \Psi^\dagger(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t) \Psi(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t) \\ &\quad - i \ln \text{Det} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^\dagger & -\mathcal{A}^T \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (21.6.59)$$

где

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}'t, \mathbf{x}t} \equiv \left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} - A_0(\mathbf{x}, t) + E(-i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \right\} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(t' - t), \quad (21.6.60)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{x}'t, \mathbf{x}t} \equiv -\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \delta(t' - t) \quad (21.6.61)$$

и

$$\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \equiv \int d^3y d^3y' V(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{y}', \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}', \mathbf{y}, t). \quad (21.6.62)$$

Используем сначала эти результаты для рассмотрения трансляционно инвариантного случая без внешних электромагнитных полей.

* В жидком He^3 неисчезающие компоненты спаренного поля образуют спиновый триплет с компонентами $\Psi_1 = \Psi_{++}$, $\Psi_0 = \sqrt{2}\Psi_{+-} = \sqrt{2}\Psi_{-+}$, $\Psi_{-1} = \Psi_{--}$

Тогда поля пары и щели можно записать как фурье-преобразования

$$\Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \Psi(\mathbf{p}), \quad (21.6.63)$$

$$\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3} \int d^3p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \Delta(\mathbf{p}), \quad (21.6.64)$$

а электрон-электронный потенциал принимает в данном случае вид

$$\begin{aligned} & \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 e^{i\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)} V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\ & \equiv \gamma_4 V(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (21.6.65)$$

где γ_4 — пространственно-временной объем

$$\gamma_4 \equiv \int d^3x \int dt. \quad (21.6.66)$$

После перехода в представление волновых чисел и частот «матрицы» (21.6.60) и (21.6.61) становятся диагональными, и вычисление детерминанта становится тривиальным. Эффективный потенциал (не путать с электрон-электронным потенциалом) был определен в разделе 16.1 как взятое со обратным знаком эффективное действие в единице пространственно-временного объема:

$$\begin{aligned} V[\Psi] & \equiv -\Gamma[\Psi] / \gamma_4 \\ & = -\int d^3p d^3p' \Psi^*(\mathbf{p}') V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \Psi(\mathbf{p}) \\ & \quad + \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\omega d^3p \ln \left(1 - \frac{|\Delta(\mathbf{p})|^2}{\omega^2 - E^2(\mathbf{p}) + i\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (21.6.67)$$

где

$$\Delta(\mathbf{p}) = -\int d^3p' V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \Psi(\mathbf{p}'). \quad (21.6.68)$$

(Член $i\varepsilon$ может быть получен из фейнмановских правил для электронных петлевых диаграмм, и, как показано в разделе 9.2, он в конце концов возникает из условий на электронное поле при $t \rightarrow \pm\infty$.) Совершая виковский поворот, интегрируя по ω и выражая Ψ через Δ , получим

$$V[\Delta] = - \int d^3p d^3p' \Delta^*(\mathbf{p}') V^{-1}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \Delta(\mathbf{p}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \left[\sqrt{E^2(\mathbf{p}) + |\Delta(\mathbf{p})|^2} - E(\mathbf{p}) \right]. \quad (21.6.69)$$

Как мы видели в разделе 16.1, уравнения поля являются просто условием стационарности эффективного действия, которое в нашем случае приводит к знаменитому *уравнению для щели* для равновесной функции щели $\Delta_0(\mathbf{p})$:

$$0 = \frac{\delta V[\Delta]}{\delta \Delta^*(\mathbf{p})} \Big|_{\Delta=\Delta_0} = - \int d^3p' V^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Delta_0(\mathbf{p}') - \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{\Delta_0(\mathbf{p})}{\sqrt{E^2(\mathbf{p}) + |\Delta(\mathbf{p})|^2}}$$

или, в более знакомом виде,

$$\Delta_0(\mathbf{p}) = - \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3p' \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Delta_0(\mathbf{p}')}{\sqrt{E^2(\mathbf{p}') + |\Delta(\mathbf{p}')|^2}}. \quad (21.6.70)$$

Везде выше все интегралы по импульсам неявно понимались как ограниченные импульсами вида (21.6.39) внутри тонкой оболочки толщиной κ вокруг поверхности Ферми. Тогда эффективный потенциал (21.6.69) имеет вид

$$V[\Delta] = -\kappa^2 \int_{\mathcal{V}} d^2k d^2k' \Delta^*(\mathbf{k}') V^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\kappa dl \int_{\mathcal{V}} d^2k \left[\sqrt{l^2 v_F^2(\mathbf{k}) + |\Delta(\mathbf{k})|^2} - l v_F(\mathbf{k}) \right]. \quad (21.6.71)$$

Теперь эффективный потенциал следует понимать как функционал только от функции щели Δ на поверхности Ферми.

Поскольку κ произвольно, потенциал $V(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ должен иметь такую зависимость от κ , чтобы $V[\Delta]$ был независим от κ . В большинстве приложений ⁴⁴ методов ренормгруппы к сверхпроводимости используется описанный в разделе 12.4 подход Вильсона, заключающийся в выводе дифференциального уравнения для зависимос-

ти $V(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ от $\mathbf{k}$ и изучении поведения его решений при $\mathbf{k} \rightarrow 0$. С целью показать гибкость в подходах полезно заметить, что можно с тем же успехом воспользоваться подходом Гелл-Манна–Лоу и ввести перенормированный электрон–электронный потенциал ^{44a}

$$V_{\mu}^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv \frac{\delta^2 V[\Delta]}{\delta \Delta^*(\mathbf{k}') \delta \Delta(\mathbf{k})} \Big|_{\Delta(\mathbf{k}) = \Delta(\mathbf{k})^* = \mu}, \quad (21.6.72)$$

где μ — скользящая шкала перенормировки типа введенной в разделе 18.2. Выражая исходный электрон–электронный потенциал через V_{μ} , получаем вместо формулы (21.6.71)

$$\begin{aligned} V[\Delta] = & - \int_{\mathcal{V}} d^2 k d^2 k' \Delta^*(\mathbf{k}') V^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) \\ & - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\kappa} dl \int_{\mathcal{V}} d^2 k \left[\sqrt{l^2 v_F^2(\mathbf{k}) + |\Delta(\mathbf{k})|^2} - l v_F(\mathbf{k}) \right. \\ & \left. - \frac{|\Delta(\mathbf{k})|^2}{2(l^2 v_F^2(\mathbf{k}) + \mu^2)^{1/2}} + \frac{\mu^2 |\Delta(\mathbf{k})|^2}{4(l^2 v_F^2(\mathbf{k}) + \mu^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (21.6.73)$$

Теперь интеграл по l сходится если устремить обрезание к бесконечности, что дает

$$\begin{aligned} V[\Delta] = & - \int_{\mathcal{V}} d^2 k d^2 k' \Delta^*(\mathbf{k}') V^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) \\ & + \frac{2}{2(2\pi)^3} \int_{\mathcal{V}} d^2 k \frac{|\Delta(\mathbf{k})|^2}{v_F(\mathbf{k})} \left[\ln \left(\frac{|\Delta(\mathbf{k})|}{\mu} \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (21.6.74)$$

Условие стационарности $V[\Delta]$ при $\Delta = \Delta_0$ приводит к щелевому уравнению в наиболее полезной форме:

$$\Delta_0(\mathbf{k}) = \int_{\mathcal{V}} d^2 k V_{\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') v_F^{-1}(\mathbf{k}') \Delta_0(\mathbf{k}') \ln \left(\frac{|\Delta(\mathbf{k}')|}{\mu} \right). \quad (21.6.75)$$

Подстановка его в формулу (21.6.74) показывает, что плотность энергии сверхпроводящего состояния меньше, чем у нормального состояния, на величину

$$\Delta \equiv V(0) - V(\Delta_0) = \int_{\mathcal{V}} d^2k \frac{|\Delta_0(\mathbf{k})|^2}{2(2\pi)^3 v_F(\mathbf{k})}. \quad (21.6.76)$$

Конечно, зависимость от μ электрон-электронного потенциала V_μ должна быть выбрана так, чтобы удовлетворять уравнению ренормгруппы, обеспечивающему выполнение условия, что эффективный потенциал (21.6.74) не зависит от произвольного масштаба перенормировки μ :

$$\mu \frac{d}{d\mu} V_\mu^{-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = - \frac{\delta^2(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}{2(2\pi)^3 v_F(\mathbf{k})}$$

или, эквивалентно,

$$\mu \frac{d}{d\mu} V_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^2k'' V_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') v_F^{-1}(\mathbf{k}'') V_\mu(\mathbf{k}'', \mathbf{k}). \quad (21.6.77)$$

Это можно с пользой переписать с помощью эрмитового ядра

$$K_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^3} v_F^{-1/2}(\mathbf{k}') v_F^{-1/2}(\mathbf{k}) V_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}), \quad (21.6.78)$$

как

$$\mu \frac{d}{d\mu} K_\mu = K_\mu^2. \quad (21.6.79)$$

Поэтому собственные векторы $u_n(\mathbf{k})$ ядра $K_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ не зависят от μ , в то время как собственные значения принимают вид $1/\ln(\Lambda_n/\mu)$, где Λ_n — константы интегрирования типа Λ в квантовой хромодинамике. Таким образом, получаем следующее выражение для потенциала

$$V_\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2(2\pi)^3 v_F^{1/2}(\mathbf{k}) v_F^{1/2}(\mathbf{k}') \sum_n \frac{u_n(\mathbf{k}) u_n^*(\mathbf{k}')}{\ln(\Lambda_n/\mu)}, \quad (21.6.80)$$

где собственные векторы выбраны ортонормированными, так что условие полноты принимает вид

$$\sum_n u_n(\mathbf{k}) u_n^*(\mathbf{k}') = \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (21.6.81)$$

Теперь можно переписать эффективный потенциал (21.6.74) как

$$V[\Delta] = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^2k d^2k' \sum_n \frac{\Delta^*(\mathbf{k}') u_n^*(\mathbf{k}') \Delta(\mathbf{k}) u_n(\mathbf{k})}{\sqrt{v_F(\mathbf{k}') v_F(\mathbf{k})}} \left[\ln \left(\frac{|\Delta(\mathbf{k})|}{\Lambda_n} \right) - 1 \right]. \quad (21.6.82)$$

Для вещества с локальной инвариантностью относительно вращений поверхность Ферми является сферой, и собственные векторы $u_n(\mathbf{k})$ — сферические гармонические функции координат на этой сфере, однако выражение (21.6.82) справедливо без всяких предположений об инвариантности относительно вращений.

Мы можем использовать этот формализм для объяснения того, когда возникает сверхпроводимость. Логарифм в выражении (21.6.82) большой и отрицательный для очень малых Δ , и большой и положительный для очень больших Δ , так что, пока общий масштаб Δ растет от нуля до бесконечности, $V[\Delta]$ падает от нуля до отрицательных значений, а затем растет до бесконечности. Поэтому при любом электрон-электронном потенциале $V[\Delta]$ всегда имеет минимум при не равном нулю значении Δ . Однако этот результат требует важного уточнения. Когда мы устремляем обрезание κ к бесконечности, интеграл в (21.6.73) эффективно обрезается на значениях l порядка $|\Delta|/v_F$, в то время как поверхность Ферми имеет радиус порядка κ_F , где $8\pi\kappa_F^3 / 3(2\pi)^3$ есть плотность числа электронов. Поскольку мы предполагаем, что учитываются электроны, находящиеся в *тонкой* оболочке вокруг поверхности Ферми, вывод верен только при условии, что $|\Delta| \ll \omega_D$, где ω_D — дебаевская частота $\kappa_F v_F$. В частности, в случае инвариантности относительно вращений и не зависящей от направления целевой функции, эффективный потенциал достигает локального минимума при целевой функции порядка $\Lambda_{s\text{-волна}}$, так что до тех пор, пока $\Lambda_{s\text{-волна}} \ll \omega_D$, симметрия спонтанно нарушена. Этот результат можно выразить иначе, сказав, что для s -волновой сверхпроводимости s -волновая проекция электрон-электронного потенциала (21.6.80) после перенормировки на масштабе $\mu \approx \omega_D$ должна быть притягивающей. Однако не имеет значения, насколько силен этот перенормированный притягивающий потенциал.

Это свойство сверхпроводимости, заключающееся в том, что голдстоуновский бозон образует притягивающий потенциал, как бы слаб этот потенциал не был, есть следствие существования ферми-поверхности, усиливающей эффекты дальнего действия. В квантовых теориях поля, не содержащих элементарных бесспиновых полей типа рассмотренных в разделе 21.5, мы обычно не должны ожидать спонтанного нарушения симметрии в пустом пространстве, если только взаимодействия не достаточно сильны.

Вернемся к случаю внешнего электромагнитного поля. Как обычно, можно ввести поле голдстоуновского бозона $\phi(\mathbf{x}, t)$, записав каждое заряженное поле в теории, которым в данном случае является щелевое поле $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ или спаренное поле $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$, как калибровочное преобразование с калибровочным параметром $\phi(\mathbf{x}, t)$, действующее на соответствующее калибровочно инвариантное поле, которое мы отмечаем знаком тильды:

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \exp(-i\phi(\mathbf{x}, t))\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)\exp(-i\phi(\mathbf{x}', t)). \quad (21.6.83)$$

После этого эффективное действие определяется подстановкой (21.6.83) в (21.6.59). С помощью калибровочного преобразования можно теперь устранить зависимость от ϕ в выражении (21.6.83), подразумевая при этом, что $A_\mu(\xi)$ в формуле (21.6.60) заменено на $A_\mu(x) - \partial_\mu\phi(x)$. Если вещество не только сверхпроводящее, но находится в состоянии, далеко от точки перехода между сверхпроводящим и нормальным состояниями, можно также проинтегрировать по калибровочно инвариантным степеням свободы, связанным с полем $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$, что означает просто его замену на равновесное значение $\Psi_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$. Зависящая от голдстоуновского и внешнего электромагнитного полей часть эффективного действия имеет тогда вид

$$\Gamma[\phi, A] = \Gamma_{\Delta=0}[A] - i \ln \text{Det} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^\dagger & -\mathcal{A}^T \end{bmatrix} + i \ln \text{Det} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^T \end{bmatrix}, \quad (21.6.84)$$

где теперь

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbf{x}'t, \mathbf{x}t} = & \left[-i \frac{\partial}{\partial t} + eA_0(\mathbf{x}, t) - e\phi(\mathbf{x}, t) + E(-i\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - e\nabla\phi(\mathbf{x}, t)) \right] \\ & \times \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t), \end{aligned} \quad (21.6.85)$$

$$\mathcal{R}_{\mathbf{x}',t,\mathbf{x}t} = \Delta_0(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(t' - t). \quad (21.6.86)$$

Количественные свойства сверхпроводников типа глубины проникновения можно извлечь ⁴⁶ из разложения выражения (21.6.84) по степеням $A_0(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \nabla\phi(\mathbf{x}, t)$.

Приложение. Произвольная унитарная калибровка

В этом приложении мы покажем, что в произвольных спонтанно нарушенных калибровочных теориях всегда можно выбрать «унитарную» калибровку, в которой поля голдстоуновских бозонов удовлетворяют условию (21.4.30)

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \xi_a e_{ab} = 0. \quad (21.A.1)$$

Используя экспоненциальную параметризацию, верную для всех групп, заметим, во-первых, что любой элемент G , по крайней мере, в конечной окрестности единицы, может быть записан в виде

$$g = \exp\left(-i \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} \mathcal{T}_{\alpha}\right) \exp\left(i \sum_a \varphi_a x_a\right) \exp\left(i \sum_i \mu_i t_i\right), \quad (21.A.2)$$

где φ_a подчинено для всех α линейному ограничению

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \varphi_a e_{ab} = 0. \quad (21.A.3)$$

Это легко увидеть, когда элемент g бесконечно близок к единице. Любой такой элемент g можно записать как

$$g = 1 + i \sum_a \varphi_a^0 x_a + i \sum_i \mu_i^0 t_i, \quad (21.A.4)$$

с бесконечно малыми φ_a^0 и μ_i^0 . Эквивалентно,

$$g = 1 + i \sum_a \varphi_a x_a + i \sum_i \mu_i t_i - i \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} \mathcal{T}_{\alpha}, \quad (21.A.5)$$

где θ_a — произвольные бесконечно малые параметры, а

$$\varphi_a(\theta) \equiv \varphi_a^0 + \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} e_{\alpha a}, \quad (21.A.6)$$

$$\mu_i(\theta) \equiv \mu_i^0 + \sum_{\alpha} \theta_{\alpha} e_{\alpha i}. \quad (21.A.7)$$

Для любого данного можно выбрать θ_a так, чтобы минимизировать положительную величину

$$\sum_{ab} F_{ab}^2 \varphi_a(\theta) \varphi_b(\theta). \quad (21.A.8)$$

В этом минимуме величина (21.A.8) стационарна по отношению к вариациям θ_a , так что $\varphi_a(\theta)$ удовлетворяет условию (21.A.3). Для бесконечно малых φ , μ и θ формула (21.A.5) совпадает с (21.A.2), так что мы видим, что множество всех g вида (21.A.2) (с φ_a , удовлетворяющими условию (21.A.3)) включает все g , бесконечно близкие к единице. Из соображений непрерывности следует, что все это верно для всех g по крайней мере в некоторой конечной окрестности единицы.

Далее, рассмотрим конкретный групповой элемент

$$g = \gamma(\xi) = \exp \left(i \sum_a \xi_a x_a \right) \quad (21.A.9)$$

и запишем его в виде (21.A.2):

$$\gamma(\xi) = \exp \left(-i \sum_{\alpha} \theta_{\alpha}(\xi) \mathcal{T}_{\alpha} \right) \gamma(\varphi(\xi)) \exp \left(i \sum_i \mu_i(\xi) t_i \right), \quad (21.A.10)$$

где $\varphi_a(\xi)$ подчиняется условию (21.A.3). Это означает, что калибровочное преобразование $\exp(i \sum_{\alpha} \theta_{\alpha}(\xi) \mathcal{T}_{\alpha})$ превращает ξ_a в

$$\xi'_a = \varphi_a(\xi). \quad (21.A.11)$$

Опуская штрихи, видим, что нам удалось построить калибровку, в которой ξ_a удовлетворяет (21.A.1), что и требовалось доказать.

Задачи

1. Вычислите эффективный лагранжиан духов в «обобщенной унитарной калибровке», причем $B[f]$ дается, как обычно, выражением (15.5.22), но где теперь величина f дается выражением $f_\alpha(x) = i\varphi_n(x)(t_\alpha)_{nm}\langle\varphi_m(0)\rangle_{\text{VAC}}$, φ_n — действительные скалярные поля, а t_a — мнимые антисимметричные матрицы, представляющие алгебру Ли калибровочной группы. Чему равен пропагатор гостов? Является ли эта часть лагранжиана перенормируемой?
2. Что случилось бы с $SU(2) \times U(1)$ электрослабой теорией, если калибровочная симметрия была бы нарушена средним по вакууму поля Φ_3 , принадлежащего действительному триплету $\bar{\Phi} = (\Phi^+, \Phi^0, \Phi^-)$, а не обычному комплексному дублету (Φ^0, Φ^-) ?
3. Рассмотрите обычную электрослабую теорию с единственным скалярным дублетом. Вычислите в однопетлевом приближении влияние обмена Z^0 -бозоном и нейтральным скалярным бозоном на аномальный магнитный момент мюона.
4. Чему равен магнитный момент частиц W^+ и Z^0 в стандартной электрослабой модели в низшем приближении?
5. Каково было бы влияние открытия четвертого поколения кварков и лептонов на предсказания обсуждавшихся в разделе 21.5 единых теорий сильного и электрослабого взаимодействий?
6. Предположим, что несколько полей с несоизмеримыми значениями электрического заряда имели бы ненулевые вакуумные средние в сверхпроводнике. Как это повлияло бы на обсуждавшиеся в разделе 21.6 свойства сверхпроводников?

Список литературы

1. Goldstone, J., *Nuovo Cimento*, **9**, 154 (1961); Goldstone, J., Salam, A., and Weinberg, S., *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
2. Higgs, P.W., *Phys. Lett.*, **12**, 132 (1964); *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 508 (1964); *Phys. Rev.*, **145**, 1156 (1966); Englert, F. and Brout, R., *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 321 (1964); Guralnik, G.S., Hagen, C.R., and Kibble, T.W.B., *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 585 (1964); Kibble, T.W.B., *Phys. Rev.*, **155**, 1554 (1967); Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 507 (1967).
3. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1264 (1967); Salam, A., in *Elementary Particle Physics*, ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksells, Stockholm, 1968), p. 367.
- 3a. Фейнмановские правила для произвольных калибровочных теорий в унитарной калибровке даны в работе: Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D7**, 1068 (1973).
4. 't Hooft, G., *Nucl. Phys.*, **B35**, 167 (1971); Lee, B.W., *Phys. Rev.*, **D7**, 823 (1972).
5. Fujikawa, K., Lee, B.W., Sanda, A., *Phys. Rev.*, **D6**, 2923 (1972).
- 5a. Lee, B.W. and Zinn-Justin, J., *Phys. Rev.*, **D5**, 3121, 3137 (1972); *Phys. Rev.*, **D7**, 1049 (1972); 't Hooft, G. and Veltman, M., *Nucl. Phys.*, **B50**, 318 (1972); Lee, B.W., *Phys. Rev.*, **D9**, 933 (1974).
6. Georgi, H. and Glashow, S.L., *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 1494 (1972).
7. Lee, T.D. and Yang, C.N., *Phys. Rev.*, **98**, 101 (1955).
8. Модели с неполной $SU(2) \times U(1)$ симметрией были предложены в работах: Glashow, S.L., *Nucl. Phys.*, **22**, 579 (1961); Salam, A. and Ward, J., *Phys. Lett.*, **13**, 168 (1964). См. также: Schwinger, J., *Ann. Phys. (N.Y.)*, **2**, 407 (1957).

9. Спекуляции на тему о возможности существования нейтральных токов восходят к работам: Gamov, G. and Teller, E., *Phys. Rev.*, **51**, 288 (1937); Kemmer, N., *Phys. Rev.*, **52**, 906 (1937); Wentzel, G., *Helv. Phys. Acta*, **10**, 108 (1937); Bludman, S., *Nuovo Cimento*, **9**, 433 (1958); Leites-Lopes, J., *Nucl. Phys.*, **8**, 234 (1958).
10. Нейтральные токи впервые наблюдались в ЦЕРНе в одиночном событии рассеяния $\bar{\nu}_\mu - e^-$: Hasert, F.J. et al., *Phys. Lett.*, **46**, 121 (1973).
11. Cabibbo, N., *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 531 (1963).
12. Towner, I.S., Hagberg, E., Hardy, J.C. et al., Chalk River preprint nucl-th/9507005 (1995).
13. Glashow, S.L., Illiopoulos, J., and Maiani, L., *Phys. Rev.*, **D2**, 1285 (1970).
14. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **27**, 1688 (1971); *Phys. Rev.*, **D5**, 1413 (1972).
15. Aubert, J.J. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 1404 (1974); Augustin, J.E. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 1406 (1974).
16. Perl, M.L. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1489 (1975).
17. Herb, S.W. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 252 (1977).
18. Abe, F. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2626 (1995); Abachi, S. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2632 (1995).
19. Значения, которые получены коллаборациями CDF и D0 в Фермилабе, равны соответственно $176 \pm 8 \pm 10$ ГэВ (Abe, F. et al., [18]) и $199^{+19}_{-21} \pm 22$ ГэВ (Abachi, S. et al., [18]), где первая и вторая ошибки являются соответственно статистической и систематической ошибками. Интерпретация этих результатов в работе: Ellis, J., Fogli, G.L., and Lisi, E., CERN-BARI preprint hep-ph/9507424 привела к значению 181 ± 12 ГэВ.

20. Kobayashi, M. and Maskawa, K., *Progr. Theor. Phys.*, **49**, 282 (1972).
- 20a. Gilman, F.J., Kleinknecht, K., and Renk, B., Carnegie Mellon–Mainz preprint CMU-HUP95-19-DOE-ER/40-682-107 (1995).
- 20b. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 657 (1976). Более ранние модели, в которых скалярные поля ответственны за несохранение CP и T см. в работе: Lee, T.D., *Phys. Rev.*, **D8**, 1226 (1973); *Phys. Rep.*, **9C**, 143 (1974).
21. Hasert, F.J. *et al.*, *Phys. Lett.*, **46B**, 138 (1973); Musset, P., *Journal de Physique*, **11/12**, T34 (1973). Примерно в то же время события с нейтральными токами наблюдались в Фермилабе коллаборацией Гарвард–Пенсильвания–Висконсин–Фермилаб. Однако публикация их статьи задержалась, и они воспользовались возможностью и перестроили свой детектор. Сначала они не могли обнаружить тот же сигнал. Свидетельства в пользу существования нейтральных токов были опубликованы этой группой в работе: Benvenuti, A. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 800 (1974).
22. Arnison, G. *et al.*, *Phys. Lett.*, **122B**, 103 (1983); **126B**, 398 (1983); **129B**, 273 (1983); **134B**, 469 (1984); **147B**, 241 (1984).
23. Abe, F. *et al.* (CDF collaboration), *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 11 (1995). Масса W измерялась в данном эксперименте по наблюдениям распадов $W \rightarrow \mu + \nu$ и $W \rightarrow e + \nu$.
24. CERN report LEPEWWG/95-01, unpublished (1995).
25. Green, M. and Veltman, M., *Nucl. Phys.*, **B169**, 137 (1980); Novikov, V.A., Okun', L.B., and Vysotsky, M.I., *Nucl. Phys.*, **B397**, 35 (1992). Более поздние исследования см.: Langacker, P., in *Precision Tests of the Standard Model* (World Scientific, Singapore, 1994); Bamert, P., Burgess, C.P., and Maksymyk, I., Mc-Gill–Neuchatel–Texas preprint hep-ph/9505339 (1995); Hollik, W., Karlsruhe preprint hep-ph/9507406 (1995).

26. Fanchotti, S., Kniehl, B., and Sirlin, A., *Phys. Rev.*, **D48**, 307 (1973) и ссылки в этой работе.
27. Ellis, J., Fogli, G.L., and Lisi, E., [19].
- 27a. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 1566 (1979).
- 27b. Например, в так называемом механизме «качелей» масса нейтрино такого порядка генерировалась бы за счет обмена тяжелым нейтральным лептоном массой M ; см.: Gell-Mann, M., Ramond, P., and Slansky, R., in *Supergravity*, ed. P. van Nieuwenhuizen and D. Freedman (North Holland, Amsterdam, 1979), p. 315; Yanagida, T., *Prog. Theor. Phys.*, **B135**, 66 (1978).
- 27c. Weinberg, S., [27a]; Wilczek, F. and Zee, A., *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 1571 (1979). См. также: Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D22**, 1694 (1980).
28. Этот общий формализм был описан в работе: Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D13**, 974 (1976). Более ранние работы по динамическому нарушению симметрии в калибровочных теориях см.: Jackiw, R. and Johnson, K., *Phys. Rev.*, **D8**, 2386 (1973); Cornwall, J.M. and Norton, R.E., *Phys. Rev.*, **D8**, 3338 (1973).
29. Такая интерпретация результатов стандартной модели принадлежит Л. Сасскинду ([30]).
30. Weinberg, S., [28]; *Phys. Rev.*, **D19**, 1277 (1979); Susskind, L., *Phys. Rev.*, **D19**, 2619 (1979). Термин «техницвет» принадлежит Сасскинду.
31. Dimopoulos, S. and Susskind, L., *Nucl. Phys.*, **B15**, 237 (1979); Eichten, E. and Lane, K., *Phys. Lett.*, **90B**, 125 (1980); Weinberg, S., неопубликованная работа, цитируемая Эйхтеном и Лейном; Обзор см.: Farhi, E. and Susskind, L., *Phys. Rep.*, **74**, 277 (1981).
32. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D5**, 1962 (1972).

- 33.** Pati, J. and Salam, A., *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 275 (1973).
- 34.** Georgi, H. and Glashow, S.L., *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 438 (1974).
- 35.** Georgi, H., in *Particles and Fields — 1974*, ed. C. Carlson (Amer. Inst. of Physics, New York, 1975).
- 36.** Georgi, H., Quinn, H.R., and Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 451 (1974).
- 36a.** Dimopoulos, S. and Georgi, H., *Nucl. Phys.*, **B193**, 150 (1981); Ellis, J., Kelley, S., and Nanopoulos, D.V., *Phys. Lett.*, **B260**, 131 (1991); Amaldi, U., de Boer, W., and Furstmann, H., *Phys. Lett.*, **B260**, 447 (1991). Более поздний анализ данных см.: Langacker, P. and Polonsky, N., *Phys. Rev.*, **D47**, 4028 (1993); **D49**, 1454 (1994); Hall, L.J. and Sarid, U., *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 2673 (1993).
- 36b.** Dimopoulos, S., Raby, S., and Wilczek, F., *Phys. Rev.*, **D24**, 1681 (1981).
- 37.** Bardeen, J., Cooper, L.N., and Schrieffer, J.R., *Phys. Rev.*, **108**, 1175 (1957).
- 38.** Anderson, P.M., *Phys. Rev.*, **130**, 439 (1963).
- 39.** Weinberg, S., *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, No. **86**, 43 (1986).
- 40.** Josephson, B.D., *Phys. Lett.*, **1**, 25 (1962).
- 41.** Ginzburg, V.L. and Landau, L.D., *JETP (USSR)*, **20**, 1064 (1950).
- 42.** Gor'kov, L.P., *Soviet Phys. JETP*, **9**, 1364 (1959).
- 43.** Abrikosov, A.A., *Soviet Phys. JETP*, **5**, 1174 (1957).
- 43a.** Bogomol'nyi, E.B., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **24**, 449 (1976). Численные расчеты см.: Bogomol'nyi, E.B. and Vainstein, A.I., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **23**, 588 (1976).

44. Benfatto, G. and Gallavotti, G., *J. Stat. Phys.*, **59**, 541 (1990); *Phys. Rev.*, **42**, 9967 (1990); Feldman, J. and Trubowitz, E., *Helv. Phys. Acta*, **63**, 157 (1990); **64**, 213 (1991); **65**, 679 (1992); Shankar, R., *Physica*, **A177**, 530 (1991); *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 129 (1993); Polchinski, J., in *Recent Developments in Particle Theory*, Proc. of the 1992 TASI, eds. J. Harvey and J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993).
- 44a. Weinberg, S., *Nucl. Phys.*, **B413**, 567 (1994).
45. Stratonovich, R.L., *Sov. Phys. Dokl.*, **2**, 416 (1957); Hubbard, J., *Phys. Rev. Lett.*, **3**, 77 (1959).
46. Абрикосов А.А., Горьков Л.П. и Дзялошинский И.Е. *Методы квантовой теории поля в статистической физике*. Изд. 2-е. (М.: Физматгиз, 1962).
47. Чтобы придать точный смысл массе M , необходимо учесть как двухпетлевые поправки к уравнениям ренормгруппы (21.5.6)–(21.5.8), так и однопетлевые «пороговые поправки» к условию (21.5.5). См.: Weinberg, S., *Phys. Lett.*, **82B**, 387 (1979).

Аномалии

Применения симметрий в квантовой теории поля содержат некоторые тонкости, не имеющие аналогов в классических теориях. Даже в перенормируемых теориях бесконечности, возникающие в квантовой теории поля, требуют при реальных вычислениях введения определенного типа регуляторов или параметров обрезания. Регулятор может нарушать симметрии теории, и несмотря на то, что в конце вычислений он устраняется, следы такого нарушения симметрии могут остаться. Такая проблема впервые возникла при попытке понять вероятность распада нейтрального пиона в форме аномалии, которая нарушала *глобальную* симметрию сильных взаимодействий. Кроме того, аномалии могут нарушать *калибровочные* симметрии, но в этом случае теория становится несогласованной, так что условие сокращения аномалий можно использовать как ограничение на физические калибровочные теории. Важность аномалий станет еще яснее в следующей главе, где мы будем изучать связанные с ними непертурбативные эффекты в присутствии топологически нетривиальных полевых конфигураций.

22.1. Проблема распада π^0

К середине 1960-х годов представление о пионе как голдстоуновском бозоне, связанном со спонтанно нарушенной $SU(2) \otimes SU(2)$ симметрией сильных взаимодействий, привело к ряду успехов, о которых шла речь в гл. 19. Однако на счету такого представления было и несколько выдающихся неудач. Наибольшее беспокойство

вызывала проблема с вероятностью доминирующей моды распада нейтрального пиона $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Именно решение этой проблемы привело к открытию нарушающих симметрию аномалий.

После интегрирования по всем тяжелым и находящимся в связанном состоянии частицам можно ожидать, что эффективный лагранжиан для распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ будет определяться единственным калибровочно- и лоренц-инвариантным выражением не более чем с двумя производными:

$$\mathcal{L}_{\pi\gamma\gamma} = g\pi^0 \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda}, \quad (22.1.1)$$

где g — неизвестная константа размерности $[\text{масса}]^{-1}$. Методы раздела 3.4 позволяют вычислить вероятность распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$:

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{m_\pi^3 g^2}{\pi}. \quad (22.1.2)$$

Можно было бы наивно ожидать, что величина g — порядка

$$g \approx \frac{e^2}{8\pi^2 F_\pi}, \quad (22.1.3)$$

где $F_\pi \simeq 190$ МэВ использована как типичная шкала масс для сильных взаимодействий, а множитель $1/8\pi^2$ включен, потому что ответственные за распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ диаграммы содержат по крайней мере одну петлю. Например, в 1949 году, используя предшественницу КХД — теорию пионов и нуклонов с лагранжианом взаимодействия $iG_{\pi N} \bar{\pi} \cdot \vec{N} 2\vec{t} \gamma_5 N$, Штейнбергер¹ вычислил, что вклад в g от треугольных диаграмм с единственной протонной петлей равен

$$g_\Delta = \frac{e^2 G_{\pi N}}{32\pi^2 m_N}. \quad (22.1.4)$$

Численно это не слишком отличается от (22.1.3), поскольку в силу соотношения Гольдбергера–Треймана (см. раздел 19.4) $G_{\pi N} = 2m_N g_A / F_\pi$.

Эта оценка амплитуды $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ не учитывает специальных ограничений, накладываемых $SU(2) \otimes SU(2)$ симметрией. Большая часть этой симметрии нарушается электромагнитным взаимодей-

ствием, однако, по крайней мере, формально оно не влияет на $U(1) \times U(1)$ подгруппу, порождаемую электрически нейтральными генераторами $SU(2) \otimes SU(2)$. Действие бесконечно малого псевдоскалярного элемента этой подгруппы на кварки имеет вид

$$\delta u = i\epsilon\gamma_5 u, \quad \delta d = -i\epsilon\gamma_5 d, \quad (22.1.5)$$

так что электрический ток инвариантен:

$$\delta \left[\frac{2}{3} \bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d}\gamma^\mu d \right] = 0. \quad (22.1.6)$$

(Этот аргумент был приведен Сазерлендом² и Вельтманом³ до создания квантовой хромодинамики, когда вместо u - и d -кварков рассматривались протон и нейтрон.) Поскольку π^0 — голдстоуновский бозон, связанный с этой симметрией, то взаимодействие без производных тиа (22.1.1) может возникать только от нарушения этой симметрии кварковыми массами, и следовательно, оно должно быть пропорционально $m_\pi^2 \propto m_u + m_d$. Имея это в виду, можно ожидать, что константа g подавлена^{2,3} дополнительным множителем (m_π^2/m_N^2) :

$$g \approx \frac{e^2}{8\pi^2 F_\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{m_N^2} \right). \quad (22.1.7)$$

(Вместо m_N можно было бы подставить обсуждавшийся в разделе 19.3 нарушающий киральную симметрию масштаб $2\pi F_\pi = 1200$ МэВ, что мало бы изменило результаты.) Кроме того, имеются кирально-инвариантные эффективные $\pi^0\gamma\gamma$ взаимодействия, включающие производные поля π^0 . Лоренц-инвариантность требует, чтобы эти взаимодействия включали по меньшей мере две дополнительные производные. Используя однородное уравнение Максвелла $\partial_\mu F_{\nu\lambda} - \partial_\nu F_{\mu\lambda} = -\partial_\lambda F_{\mu\nu}$ и интегрируя по частям, видим, что имеется только одна независимая кирально-инвариантная связь ровно с двумя дополнительными производными, которая определяется подстановкой даламбертиана, действующего на поле π^0 , в выражение (22.1.1). На пионной массовой оболочке это то же самое, что и взаимодействие (22.1.1), но с дополнительным множителем m_π^2 , что

приводит к той же оценке (22.1.7). Иногда говорили, что киральная симметрия запрещает распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, но аккуратнее говорить, что благодаря киральной симметрии вероятность этого процесса ведет себя при $m_\pi \rightarrow 0$ не как m_π^3 , а как m_π^7 .

Трудность в том, что наблюдаемая вероятность распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ много больше, чем это можно было бы ожидать на основании (22.1.7), и в действительности много ближе к той цифре, которая получается, если воспользоваться наивным результатом (22.1.3). Конкретнее, из выражений (22.1.7) и (22.1.2) мы можем ожидать, что вероятность распада

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) \approx \frac{m_\pi^7 \alpha^2}{4\pi^3 F_\pi^2 m_N^4} = 1,9 \times 10^{13} \text{ с}^{-1}, \quad (22.1.8)$$

а, используя (22.1.3) вместо (22.1.7), мы получили бы

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) \approx \frac{m_\pi^3 \alpha^2}{4\pi^3 F_\pi^2} = 4,4 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}. \quad (22.1.9)$$

Наблюдаемое значение равно $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = (1,19 \pm 0,08) \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$, что находится в удовлетворительном согласии с грубой наивной оценкой (22.1.9) и почти на три порядка величины больше, чем «исправленный» результат (22.1.8)! Мы вынуждены прийти к выводу, что какая-то аномалия делает недействительной киральную симметрию, в силу которой был введен дополнительный множитель m_π^2/m_N^2 в g . Аналогичные проблемы возникают при попытке понять вероятности других процессов, например, $\eta^0 \rightarrow \gamma + \gamma$.

В 1969 году Белл и Джэкив ⁴ установили источник этой аномалии в нарушении киральной симметрии тем регулятором, который необходимо ввести, чтобы получить следствия сохранения нейтрального аксиального тока для однопетлевых фейнмановских диаграмм. Их результат был подтвержден, обобщен и расширен до высших порядков Адлером ⁵, который независимо обнаружил киральные аномалии при изучении тождеств Уорда для аксиальных токов в квантовой электродинамике. В конце концов, в 1979 году Фуджикава ⁶ понял, что при функциональной формулировке теории поля нарушающие киральную симметрию аномалии входят только в меру, используемую для определения функционального интеграла по фермионным полям. Как мы увидим в следующем

разделе, этот подход позволяет просто вывести порождаемую такой аномалией амплитуду $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ во всех порядках теории возмущений. Затем мы вернемся к непосредственному вычислению аномалий в более общих теориях и обсудим различные приложения.

22.2. Преобразование меры. Абелева аномалия

Обратимся теперь к вычислению аномалий того типа, который имеет отношение к π^0 -распаду. Для этого примем принадлежащую Фуджикаве ⁶ интерпретацию аномалий как симптома невозможности определения подходящей инвариантной меры интегрирования по фермионным полевым переменным. Анализ этой проблемы у Фуджикавы основывался на использовании функциональных интегралов в евклидовом пространстве и на разложении фермионных переменных интегрирования по собственным функциям калибровочно-инвариантного оператора Дирака, который эрмитов в четырехмерном евклидовом пространстве. Здесь мы изложим сначала менее строгий вывод, основанный на закомых нам функциональных интегралах в пространстве Минковского, что позволит получить правильный ответ при минимальной затрате усилий. В конце раздела мы коротко коснемся евклидова подхода и используем его для вывода знаменитой теоремы об индексах.

Начнем с вычисления аномалии в преобразовании меры относительно произвольного локального матричного преобразования $\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$ столбца $\psi_n(x)$ безмассовых комплексных фермионных полей спина 1/2, которые некиральной образом взаимодействуют с множеством калибровочных полей $A_\alpha^\mu(x)$ (примером могут служить поля u - и d -кварков, взаимодействующие с электромагнитным векторным потенциалом $A^\mu(x)$, в задаче о вычислении вероятности распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$). Поскольку переменные — фермионные, мера преобразуется не с помощью детерминанта матрицы преобразования, а с помощью обратного детерминанта:

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow (\text{Det } \mathcal{U} \text{ Det } \bar{\mathcal{U}})^{-1} [d\psi][d\bar{\psi}], \quad (22.2.1)$$

где

$$\mathcal{U}_{xn,ym} \equiv U(x)_{nm} \delta^4(x-y), \quad (22.2.2)$$

$$\overline{U}_{xp,ym} \equiv [\gamma_4 U(x)^\dagger \gamma_4]_{nm} \delta^4(x-y) \quad (22.2.3)$$

и $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$ — матрица, используемая для определения $\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_4$. Индексы n, m пробегают по значениям ароматов и дираковских спинных индексов.

В этом месте читатель может удивиться, почему мы беспокоимся о включении множителей γ_4 в выражение (22.2.3), хотя они дают вклад только в унитарное преобразование, которое не должно влиять на детерминанты. Ответ заключается в том, что для придания расчетам смысла окажется необходимым при вычислении пропагаторов и детерминантов регуляризовать сумму по фермионным модам, и мы увидим, что множители γ_4 влияют на регуляризованные детерминанты. Таким образом, вопрос о том, включать или не включать множители γ_4 , зависит от метода регуляризации, который мы используем, чтобы сделать наши напоминающие размахивание руками манипуляции осмысленными. Мы включаем множители γ_4 , потому что хотим осуществлять регуляризацию так, чтобы сохранялась лоренц-инвариантность, а в интересующих нас сейчас случаях как скаляр преобразуется не $U(x)^\dagger$, а $\gamma_4 U(x)^\dagger \gamma_4$.

Во-первых, рассмотрим случай, когда $U(x)$ — унитарное некиральное преобразование

$$U(x) = \exp[i\alpha(x)t], \quad (22.2.4)$$

где t — обычная эрмитова матрица (не содержащая γ_5 , но не обязательно бесследовая), а $\alpha(x)$ — произвольная действительная функция x . В этом случае U псевдоунитарна:

$$\overline{U} U = 1, \quad (22.2.5)$$

так что мера инвариантна относительно преобразований такого типа. В частности, симметрия относительно самой калибровочной группы, где t — один из некиральных генераторов t_α , не портится какими-то аномалиями.

Во-вторых, рассмотрим локальное киральное преобразование

$$U(x) = \exp[i\gamma_5 \alpha(x)t], \quad (22.2.6)$$

где t — опять обычная эрмитова матрица, а $\alpha(x)$ — снова произвольная действительная функция x . В этом случае матрица U псевдоэрмитова:

$$\overline{U} = U. \quad (22.2.7)$$

Мера неинвариантна относительно кирального преобразования; имеем

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow (\text{Det } U)^{-2} [d\psi][d\bar{\psi}]. \quad (22.2.8)$$

Ограничимся случаем *бесконечно малого* локального кирального преобразования. Выбирая $\alpha(x)$ в выражении (22.2.6) бесконечно малым, имеем теперь

$$[U - 1]_{nx,my} = i\alpha(x)[\gamma_5 t]_{nm} \delta^4(x - y). \quad (22.2.9)$$

Используя тождество $\text{Det } M = \exp(\text{Tr } \ln M)$ и предельную формулу $\ln(1 + x) \rightarrow x$ при $x \rightarrow 0$, видим, что теперь мера преобразуется как

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow \exp\left\{i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}(x)\right\} [d\psi][d\bar{\psi}], \quad (22.2.10)$$

где $\mathcal{A}$ — аномалия

$$\mathcal{A}(x) = -2\text{Tr}\{\gamma_5 t\} \delta^4(x - x) \quad (22.2.11)$$

и «Tr» означает здесь след как по дираковским индексам, так и по индексам сортов. Мера $[d\psi][d\bar{\psi}]$ входит в функциональный интеграл с весом $\exp\{i \int d^4x \mathcal{L}(x)\}$, так что множитель $\exp\{i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}(x)\}$ в законе преобразования (22.2.10) для меры приводит к тому же эффекту, как если бы плотность лагранжиана была не инвариантной по отношению к таким преобразованиям, а преобразовывалась как $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha(x) \mathcal{A}(x)$. Отсюда, когда мы используем эффективный лагранжиан, в котором проведено интегрирование по фермионам, то для того, чтобы учесть аномалии, мы должны включить неинвариантное слагаемое, так что

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) + \alpha(x) \mathcal{A}(x). \quad (22.2.12)$$

Остается только вычислить аномалию $\mathcal{A}(x)$.

На первый взгляд кажется маловероятным, что мы можем получить для аномалии какой-то определенный результат. Дельта-функция бесконечна, однако след равен нулю. Чтобы исправить ситуацию, мы должны ввести регулятор, чтобы придать смысл $\delta^4(x - y)$. Это можно сделать калибровочно-инвариантным способом, включив действующий на дельта-функцию дифференциальный оператор $f(-D_x^2 / M^2)$ перед тем, как устремлять аргумент дельта-функции к нулю:

$$\mathcal{A}(x) = -2 \left[\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-D_x^2 / M^2) \} \delta^4(x - y) \right]_{y \rightarrow x}. \quad (22.2.13)$$

Здесь D_x — дираковский дифференциальный оператор в присутствии калибровочного поля $A_\alpha^\mu(x)$:

$$(D_x)_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i t_\alpha A_{\alpha\mu}(x). \quad (22.2.14)$$

Кроме того, M — некая большая масса, которая в конце концов устремляется к бесконечности, а $f(s)$ — гладкая функция, подчиненная единственному условию *, что при изменении s от 0 до ∞ $f(s)$ должна плавно падать от 1 до 0:

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0, \quad (22.2.15)$$

$$s f'(s) = 0 \text{ при } s = 0 \text{ и } s = \infty. \quad (22.2.16)$$

Заметим, что мы не выбираем регуляризующую функцию зависящей от ∂ , поскольку хотим сохранить калибровочную инвариантность, а также не считаем ее функцией $D^\mu D_\mu$, так как хотим с ее помощью регуляризовать не только детерминант, но и фермионный пропагатор D^{-1} .

Чтобы вычислить аномалию (2.2.13), используем фурье-представление дельта-функции и запишем аномалию в виде

* Например, можно выбрать $f(s) = \exp(-s^2)$, как это сделал в первой работе Фуджикава, или $f(s) = 1/(1+s)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= -2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-\mathcal{D}_x^2 / M^2) \} e^{ik \cdot (x-y)} \right]_{y=x} \\ &= -2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-[ik + \mathcal{D}_x]^2 / M^2) \}. \end{aligned}$$

(Производная по x равна нулю, когда она действует, находясь в крайнем правом положении во втором выражении, но не равна нулю при действии на $A_{\text{ци}}(x)$.) Обезразмеривая импульс k^μ множителем M , получаем:

$$\mathcal{A}(x) = -2M^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-[ik + \mathcal{D}_x / M]^2) \}. \quad (22.2.17)$$

Аргумент обрезавшей функции можно записать как

$$-\left[ik + \frac{\mathcal{D}_x}{M} \right]^2 = k^2 - \frac{ik \cdot \mathcal{D}_x}{M} - \left(\frac{\mathcal{D}_x}{M} \right)^2. \quad (22.2.18)$$

В пределе $M \rightarrow \infty$ в выражение (22.2.17) дают вклад только члены в разложении $f(-[ik + \mathcal{D}_x / M]^2)$, имеющие не более четырех множителей $1/M$, а также члены, содержащие не менее четырех дираковских гамма-матриц, поскольку в противном случае след по дираковским индексам равен нулю. В результате остаются только слагаемые второго порядка по $\mathcal{D}_x^2$:

$$\mathcal{A}(x) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f''(k^2) \text{Tr} \{ \gamma_5 t \mathcal{D}_x^4 \}, \quad (22.2.19)$$

которые теперь уже не зависят от регуляризующей массы M .

Чтобы вычислить интеграл по k , совершим поворот контура интегрирования по k^0 того же типа, что и при вычислении фейнмановских диаграмм, так что k^0 заменится на ik^4 , где k^4 изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. (Этот шаг можно обосновать, только если с самого начала работать с евклидовыми функциональными интегралами.) Тогда интеграл сводится к

$$\int d^4 k f''(k^2) = i \int_0^\infty 2\pi^2 \kappa^3 d\kappa f''(\kappa^2). \quad (22.2.20)$$

После повторного интегрированием по частям с использованием выражений (22.2.16) и затем (22.2.15) получаем:

$$\int d^4k f''(k^2) = i\pi^2 \int_0^\infty ds s f''(s) = -i\pi^2 \int_0^\infty ds f'(s) = i\pi^2. \quad (22.2.21)$$

Чтобы вычислить след, запишем

$$\begin{aligned} D_x^2 &= \frac{1}{4} \{ (D_x)^\mu, (D_x)^\nu \} \{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} + \frac{1}{4} \{ (D_x)^\mu, (D_x)^\nu \} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ &= D_x^2 - \frac{1}{4} i t_\alpha F_\alpha^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (22.2.22)$$

Единственное слагаемое с D_x^4 , которое дает вклад в след по дираковским индексам, содержит произведение четырех матриц Дирака, поэтому

$$\text{tr}_D \{ \gamma_5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu] [\gamma_\rho, \gamma_\sigma] \} = 16i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (22.2.23)$$

где « tr_D » обозначает след только по дираковским индексам, и, как обычно, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon^{0123} = +1$. После подстановки выражений (22.2.21)–(22.2.23) в формулу (22.2.19) получаем аномалию в виде

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu}(x) F_\beta^{\rho\sigma}(x) \text{tr} \{ t_\alpha t_\beta t \}, \quad (22.2.24)$$

где « tr » здесь означает след только индексам, отмечающим различные сорта фермионов. В частном случае, когда t — единичная матрица, величина (22.2.24) известна как *плотность Черна–Понтрягина*.

Этот результат можно записать через ток, связанный с аномальной симметрией. Для простоты предположим, что само действие инвариантно относительно преобразования симметрии $\psi(x) \rightarrow \psi(x) + i\psi\gamma_5\alpha(x)$ с постоянным бесконечно малым параметром α . Тогда, как обсуждалось в разделе 7.3, если проделать такое преобразование с *зависящим* от пространственно-временной точки параметром $\alpha(x)$, изменение действия можно записать как $\delta I = \int d^4x J_5^\mu(x) \partial_\mu \alpha(x)$, где $J_5^\mu(x)$ — ток, который становится сохра-

няющимися, когда операторы поля удовлетворяют динамическим уравнениям, вытекающим из условия стационарности действия относительно произвольных вариаций полей. Если совершить изменение переменных $\delta\psi(x) = i\gamma_5\alpha(x)\psi(x)$, то изменение интеграла по фермионным полям равно

$$\delta \int [d\psi][d\bar{\psi}]e^{iI} = i \int d^4x \int [d\psi][d\bar{\psi}] [\mathcal{A}(x)\alpha(x) + J_5^\mu(x)\partial_\mu\alpha(x)]e^{iI}. \quad (22.2.25)$$

Но это всего лишь изменение переменных, так что для произвольных $\alpha(x)$ оно не может повлиять на функциональный интеграл. Поэтому для произвольных калибровочных полей

$$\left\langle \partial_\mu J_5^\mu \right\rangle_A = \mathcal{A} = -\frac{1}{16\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\beta^{\rho\sigma} \text{tr}\{t_\alpha t_\beta t\}, \quad (22.2.26)$$

где для любого оператора $\mathcal{O}$ величина $\langle \mathcal{O} \rangle_A$ есть квантовое среднее $\mathcal{O}$ в фиксированном фоновом поле $A^\mu(x)$:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_A \equiv \frac{\int [d\psi][d\bar{\psi}]e^{iI}\mathcal{O}}{\int [d\psi][d\bar{\psi}]e^{iI}}. \quad (22.2.27)$$

Кстати говоря, можно переписать выражение (22.2.26) как условие сохранения. Рассмотрим частный случай, когда след $\text{tr}\{t_\alpha t_\beta t\}$ пропорционален $\delta_{\alpha\beta}$:

$$\text{tr}\{t_\alpha t_\beta t\} = N\delta_{\alpha\beta}. \quad (22.2.28)$$

Определим ток, известный как класс Черна–Саймонса:

$$\begin{aligned} G^\mu &\equiv 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left[A_\gamma{}^\nu \partial_\lambda A_{\gamma\rho} + \frac{1}{3} C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\nu} A_{\beta\lambda} A_{\gamma\rho} \right] \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left[A_\gamma{}^\nu F_{\gamma\lambda\rho} - \frac{1}{3} C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\nu} A_{\beta\lambda} A_{\gamma\rho} \right], \end{aligned} \quad (22.2.29)$$

который удовлетворяет тождеству

$$\partial_\mu G^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}. \quad (22.2.30)$$

Это уравнение позволяет переписать выражение (22.2.26) как условие

$$\partial_\mu K^\mu = 0, \quad (22.2.31)$$

где

$$K^\mu \equiv \left\langle J_5^\mu \right\rangle_A + \frac{N}{8\pi^2} G^\mu. \quad (22.2.32)$$

Однако сохранение тока K^μ не может служить аргументом в пользу подавления распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, как это мы сделали в предыдущем разделе, поскольку при таком рассуждении предполагалась не только киральная симметрия, связанная с сохранением аксиального тока, но и электромагнитная калибровочная инвариантность. Но из выражения (22.2.29) следует, что хотя ток K^μ сохраняется, он калибровочно-неинвариантен.

Наш вывод формулы (22.2.24) для аномалии показывает, что если вычислять функцию аномалии, используя в (22.2.13) вместо $f(-\partial_x^2/M^2)$ дифференциальный оператор $f(-D_x^2/M^2)$, то в результате получим нулевую аномальную функцию. На самом деле, при такой процедуре регуляризации аксиальный ток есть не J_5^μ , а K^μ . Как отмечалось выше, проблема с такой процедурой заключается в том, что регуляризующий оператор уже калибровочно неинвариантен, что отражается в наличии калибровочно неинвариантного слагаемого в K^μ . Не существует процедуры регуляризации фермионных пропагаторов и детерминантов, которая была бы и калибровочно, и кирально-инвариантной.

Теперь можно вернуться к проблеме, давшей старт вопросу об аномалиях, и использовать полученные результаты для вычисления истинной вероятности процесса $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Интересующая нас симметрия порождается зарядово-нейтральными киральными преобразованиями легких кварковых полей

$$\delta u \equiv i\alpha\gamma_5 u, \quad \delta d \equiv -i\alpha\gamma_5 d. \quad (22.2.33)$$

В чистой квантовой хромодинамике эта симметрия свободна от аномалий, поскольку u и d принадлежат одному представлению цветовой калибровочной группы, так что их вклады в глюон-глюонные слагаемые в аномалию симметрии (22.2.33) сокращаются.

С другой стороны, в присутствии электромагнитного поля $A^\mu(x)$ эта симметрия имеет аномалию

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \text{tr}\{q^2 \tau_3\},$$

где q — матрица кварковых зарядов, а t_3 — диагональная 2×2 матрица с элементами $+1$ для u и -1 для d . Если, как обычно, предположить, что имеются N_c u -кварков заряда $2e/3$ и равное число d -кварков заряда $-e/3$, то след равен

$$\text{tr}\{q^2 \tau_3\} = N_c \left(\frac{2e}{3}\right)^2 (+1) + N_c \left(\frac{-e}{3}\right)^2 (-1) = \frac{N_c e^2}{3},$$

так что аномалия равна

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x). \quad (22.2.34)$$

Теперь мы должны включить в эффективный лагранжиан слагаемые, которые под действием кирального преобразования (22.2.33) преобразуют лагранжиан по правилу (22.2.12), т. е.

$$\delta \mathcal{L}_{\text{eff}} = \alpha \mathcal{A}(x) = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \alpha. \quad (22.2.35)$$

Под действием преобразования (22.2.33) пионное поле преобразуется как

$$\delta \pi^0 = \alpha F_\pi, \quad (22.2.36)$$

где $F_\pi = 184$ МэВ — введенная в гл. 19 амплитуда пионного распада. (Условие нормировки для этой константы фиксируются нашим определением генератора симметрии как $\gamma_5 \tau_3 = 2\gamma_5 t_3$.) Отсюда, мы должны включить в эффективный лагранжиан слагаемое

$$\frac{\pi^0(x) \mathcal{A}(x)}{F_\pi} = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2 F_\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \pi^0(x). \quad (22.2.37)$$

Сравнивая это выражение с общей формулой (22.1.1) для эффективного лагранжиана распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, видим, что константа g в (22.1.1) должна быть равной ⁵

$$g = \frac{N_c e^2}{48\pi^2 F_\pi}. \quad (22.2.38)$$

(Это показывает, что наша предыдущая грубая оценка по порядку величины (22.1.3) была завышена на множитель $6/N_c$.) Таким образом, предсказывается, что вероятность (22.1.2.) распада пиона равна

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{N_c^2 \alpha^2 m_\pi^3}{144\pi^3 F_\pi^2} = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \times 1,11 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}. \quad (22.2.39)$$

Наблюдаемая вероятность равна $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = (1,19 \pm 0,08) \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$ и она хорошо согласуется с теоретическим расчетом (22.2.39) тогда и только тогда, когда $N_c = 3$. Успех этого вычисления был одним из первых свидетельств твердой уверенности в существовании трех цветов кварков.

Как мы видели в предыдущем разделе, вскоре после открытия π^0 Штейнбергер вычислил g , исходя из диаграммы с одной протонной петлей, и получил в результате $g = e^2 G / (32\pi^2 m_N)$, где G — псевдоскалярная пион-нуклонная константа связи. Этот результат точно согласовывался бы с (22.2.38) при $N_c = 3$, если бы мы воспользовались соотношением Гольдбергера–Треймана с $g_A = 1$, чтобы положить $G = 2m_N / F_\pi$. Правильный результат больше, чем полученный Штейнбергером, на множитель $g_A^2 = 1,56$. Причина, по которой Штейнбергер получил почти правильный ответ, заключается в том, что ответ определяется треугольной аномалией, пропорциональной $\text{tr}\{q^2 t_3\}$. Для одного протона этот след равен e^2 , что совпадает с найденным выше значением следа в случае трех цветов кварков.

* * *

Как отмечалось выше, более строгий вывод выражения для аномалии можно получить, используя функциональные интегралы

лы в евклидовом пространстве-времени. (Применения евклидовых функциональных интегралов кратко обсуждается в приложении А к гл. 23.) Вводим четвертую евклидову координату $x_4 = ix^0 = -ix_0$, и соответственно $\partial_4 = -i\partial_0$, $\gamma_4 \equiv i\gamma^0$ и $A_{4\alpha} = iA^0_\alpha$. Тогда пространственно-временной объем записывается как $d^4x = -i(d^4x)_E$, где $(d^4x)_E$ — евклидов элемент объема $(d^4x)_E = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. В евклидовом пространстве-времени поля $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ должны рассматриваться как совершенно независимые, а их локальные киральные преобразования определяются следующими формулами: $\delta\psi(x) = i\alpha(x)t\gamma_5\psi(x)$, $\delta\bar{\psi}(x) = -i\alpha(x)\bar{\psi}(x)t\gamma_5$. Преобразование меры вновь дается выражением (22.2.10), с функцией аномалии $\mathcal{A}(x)$, определяемой формулой (22.2.11). Вводя, как и ранее, регуляризующую функцию, приходим к формуле (22.2.13) для $\mathcal{A}(x)$. Большим преимуществом евклидова подхода является то, что при действительных x_4 и $A_{4\alpha}$ оператор Дирака $i\mathcal{D}$ в (22.2.13) эрмитов:

$$i\mathcal{D} = [i\partial_i + t_\alpha A_{i\alpha}] \gamma_i, \quad (22.2.40)$$

где по i, j , и т. д. проводится суммирование по значениям 1, 2, 3, 4. Поэтому он имеет ортонормированные спинорные собственные функции $\phi_\kappa(x)$:

$$i\mathcal{D}\phi_\kappa = \lambda_\kappa \phi_\kappa, \quad (22.2.41)$$

$$\int (d^4x)_E \phi_\kappa(x)^\dagger \phi_{\kappa'}(x) = \delta_{\kappa\kappa'}, \quad (22.2.42)$$

с собственными значениями λ_κ . Мы предполагаем также, как и везде в данном разделе, что t коммутирует с $i\mathcal{D}$, и можно выбрать ϕ_κ так, что $t\phi_\kappa = t_\kappa \phi_\kappa$. Эти собственные функции удовлетворяют условию полноты

$$\sum_\kappa \phi_\kappa(x) \phi_\kappa^\dagger(y) = \delta^4(x-y) \cdot 1, \quad (22.2.43)$$

где «1» — 4×4 единичная матрица. Поэтому функция аномалии может быть записана как предел явно сходящейся суммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= -2 \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 t f(-\mathcal{D}^2/M^2) \sum_\kappa \phi_\kappa(x) \phi_\kappa^\dagger(x) \right\} \\ &= -2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_\kappa f(\lambda_\kappa^2/M^2) (\phi_\kappa^\dagger(x) \gamma_5 \phi_\kappa(x)). \end{aligned} \quad (22.2.44)$$

Совершенно так же, как мы вывели формулу (22.2.24) для функции аномалии, мы можем показать, что теперь

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon_{ijkl}^E F_{ij\alpha} F_{kl\beta} \operatorname{tr}\{t_\alpha t_\beta t\}, \quad (22.2.45)$$

где ε_{ijkl}^E — полностью антисимметричный тензор с $\varepsilon_{1234}^E = +1$. (Разница в знаках в выражениях (22.2.24) и (22.2.45) возникает из-за того, что в (22.2.45) опущены по сравнению с (22.2.24) два множителя i : один — из формулы (22.2.23), так как

$$\operatorname{tr}_D\{\gamma_5[\gamma_i, \gamma_j][\gamma_k, \gamma_l]\} = 16\varepsilon_{ijkl}^E,$$

а другой — от замены d^4k на $(d^4k)_E$ в (22.2.20.)

Пусть дана любая собственная функция $\phi_k(x)$ операторов iD и t с собственным значением $\lambda_k \neq 0$, тогда существует другая нормированная собственная функция $\phi_{k-}(x)$ с собственными значениями $\lambda_{k-} = -\lambda_k$ и t_k , равная $\phi_{k-}(x) = \gamma_5 \phi_k(x)$. (Напомним, что в обозначениях, используемых по всей книге, γ_5 — эрмитова матрица, $\gamma_5 = -i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$.) Поскольку $\phi_k(x)$ и $\phi_{k-}(x)$ — собственные векторы эрмитового оператора с разными собственными значениями, они ортогональны, так что $\int d^4x (\phi_k^\dagger(x) \gamma_5 \phi_k(x)) = 0$. Поэтому остается только сумма по собственным функциям с $\lambda_k = 0$. Эти собственные функции в общем случае не объединены в пары; так как g_5 антикоммутирует с iD , они могут быть выбраны как одновременно ортонормированные собственные функции ϕ_u, ϕ_v оператора iD с собственным значением нуль и оператора γ_5 с собственными значениями $+1$ и -1 , соответственно.

$$\begin{aligned} iD\phi_u &= 0, \quad \gamma_5\phi_u = \phi_u, \\ iD\phi_v &= 0, \quad \gamma_5\phi_v = -\phi_v. \end{aligned} \quad (22.2.46)$$

Используя то, что $f(0) = 1$, выражение (22.2.44) принимает вид

$$\mathcal{A}(x) = -2 \left[\sum_u t_u (\phi_u^\dagger(x) \phi_u(x)) - \sum_v t_v (\phi_v^\dagger(x) \phi_v(x)) \right]. \quad (22.2.47)$$

Далее, поскольку ϕ_u и ϕ_v нормированы как в выражении (22.2.42), интеграл от (22.2.47) дает

$$\int (d^4x)_{E \cdot \mathcal{N}}(x) = -2 \left[\sum_u t_u - \sum_v t_v \right], \quad (22.2.48)$$

где суммы по u и v пробегает по левым и правым нулевым модам оператора $i\mathcal{D}$, соответственно. В частности, в случае, когда t — единичная матрица, можно с помощью выражения (22.2.45) выразить это как связь между функционалом калибровочного поля и числом нулевых мод оператора Дирака с определенными спиральностями:

$$-\frac{1}{32\pi^2} \int (d^4x)_{E \cdot \mathcal{N}}(x) \varepsilon_{ijkl}^E F_{\alpha ij} F_{\beta kl} \text{tr}[t_\alpha t_\beta] = n_+ - n_-, \quad (22.2.49)$$

где здесь $n_\pm$ — число нулевых мод $\mathcal{D}$, имеющих собственные значения $\gamma_5 = \pm 1$. Это — знаменитая *теорема об индексе Атьи–Зингера* ^{6а}. Среди прочего, она показывает, что в результате вариаций калибровочного поля интеграл в левой части выражения (22.2.49) может изменяться не плавно, а лишь на целые значения, и поэтому может зависеть только от топологии калибровочного поля. Эту зависимость мы опишем в разделе 23.5.

22.3. Прямое вычисление аномалий. Общий случай

В разделе 22.2 мы видели, как можно использовать элегантный подход Фуджикавы для вычисления аномалий киральных симметрий в калибровочных теориях типа квантовой хромодинамики, где калибровочные взаимодействия не киральны, и фермионное число сохраняется. Этот же метод можно использовать и для более общих задач, хотя при этом он становится менее наглядным ⁷. В этом разделе мы найдем аномалию с помощью прямых вычислений, как это и было впервые сделано. Мы получим при этом полезные новые представления об аномалиях, что в конечном итоге позволит с минимальными дополнительными хлопотами обсудить аномалии в произвольных теориях.

Чтобы рассмотреть общий случай, объединим все левые фермионные поля (включая антифермионы в случаях, когда такое различие имеет смысл) в один столбец χ . Например, если ψ — столбец,

содержащий все кварковые и лептонные поля (не совпадающие с антикварковыми и антилептонными полями), то

$$\chi \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi \\ \frac{1}{2}[\beta \mathcal{C}(1 - \gamma_5)\Psi]^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi \\ \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\beta \mathcal{C}\Psi^* \end{bmatrix}, \quad (22.3.1)$$

где $\mathcal{C}$ — матрица, определенная в разделе 5.4 соотношением

$$\mathcal{C} \gamma_\mu^T \mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\mu,$$

которое необходимо для того, чтобы все компоненты χ принадлежали одному и тому же представлению $(1/2, 0)$ группы Лоренца. Под действием инфинитезимального калибровочного преобразования

$$\delta\psi = i\theta_\alpha \left[\frac{1}{2}(1 + \gamma_5) t_\alpha^L + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) t_\alpha^R \right] \psi, \quad (22.3.2)$$

сохраняющего фермионное число (т. е. барионное число или разность барионного и лептонного чисел), этот столбец подвергается преобразованию

$$\delta\chi = i\varepsilon_\alpha T_\alpha \chi, \quad (22.3.3)$$

где

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} t_\alpha^L & 0 \\ 0 & -t_\alpha^{R*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_\alpha^L & 0 \\ 0 & -(t_\alpha^R)^T \end{bmatrix}. \quad (22.3.4)$$

Мы не будем ограничивать рассмотрение теориями, в которых фермионное число сохраняется, так что T_α могут теперь быть любыми эрмитовыми представлениями калибровочной алгебры, не обязательно имеющими блочно-диагональную форму (22.3.4). Сначала рассмотрим только безмассовые фермионы, и учтем влияние масс фермионов несколько ниже.

Нас интересует однопетлевая трехточечная функция

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \equiv \langle T \{ j_\alpha^\mu(x), j_\beta^\nu(y), j_\gamma^\rho(z) \} \rangle_{\text{VAC}}, \quad (22.3.5)$$

где j_α^μ — ток фермионов, вычисленный с помощью свободных полей:

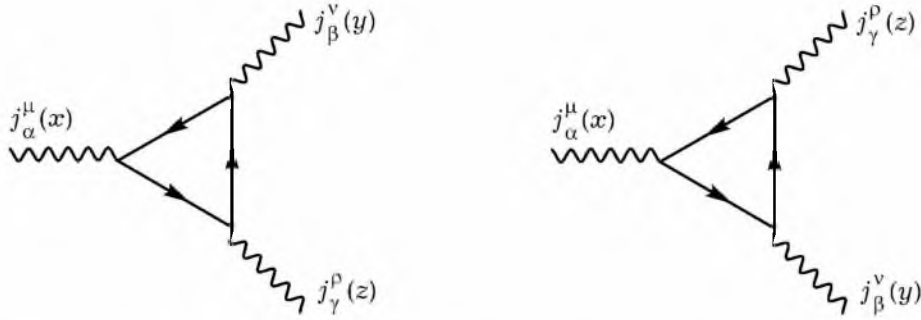


Рис. 22.1. Две треугольные диаграммы для аномалии в токе @. Сплошные линии — фермионы, волнистые линии изображают фиктивные калибровочные поля, связанные с токами

$$j_\alpha^\mu = -i\bar{\chi}T_\alpha\gamma^\mu\chi. \quad (22.3.6)$$

Вклад двух фейнмановских диаграмм рис. 22.1 равен

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) = & -i\text{Tr}\left[S(x-y)T_\beta\gamma^\nu P_L S(y-z)T_\gamma\gamma^\rho P_L S(z-x)T_\alpha\gamma^\mu P_L\right] \\ & - i\text{Tr}\left[S(x-z)T_\gamma\gamma^\rho P_L S(z-y)T_\beta\gamma^\nu P_L S(y-x)T_\alpha\gamma^\mu P_L\right], \end{aligned} \quad (22.3.7)$$

где P_L — оператор проектирования на левые фермионные поля

$$P_L = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2}\right), \quad (22.3.8)$$

а $S(x)$ — пропагатор безмассового фермионного поля:

$$S(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p \left(\frac{-i\mathbf{p}}{p^2 - i\epsilon} \right) e^{ip \cdot x}. \quad (22.3.9)$$

(Дальнейшие комментарии по поводу такого использования фейнмановских правил см. в конце данного раздела.) Собирая все множители в выражении (22.3.7), получаем

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) &= \frac{i}{(2\pi)^{12}} \int d^4k_1 d^4k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \int d^4p \\
&\times \left\{ \text{tr} \left[\frac{p - k_1 + a}{(p - k_1 + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{p + a}{(p + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{p + k_2 + a}{(p + k_2 + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \right. \\
&\times \text{tr} [T_\beta T_\gamma T_\alpha] \\
&+ \left\{ \text{tr} \left[\frac{p - k_2 + b}{(p - k_2 + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{p + b}{(p + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{p + k_1 + b}{(p + k_1 + b)^2 - i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \right. \\
&\times \text{tr} [T_\gamma T_\beta T_\alpha] \left. \right\}, \tag{22.3.11}
\end{aligned}$$

где здесь «tr» означает след либо по дираковским, либо по групповым индексам в зависимости от того выражения, которое стоит под знаком следа. В это выражение введены произвольные постоянные 4-векторы a и b , поскольку, несмотря на то, что выражение (22.3.10) сходится и поэтому не зависит от того, как обозначены импульсы внутренних линий, вычисление $\partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}$ включает манипуляции с расходящимися интегралами, которые зависят от этих обозначений. Мы увидим, что произвол в выборе a^μ и b^μ соответствует свободе перекидывания аномалии в этих интегралах от одного тока к другому, но не позволяет устранить все аномалии.

Беря дивергенцию выражения (22.3.10), мы используем тождества

$$k_1 + k_2 = (p + k_2 + a) - (p - k_1 + a) = (p + k_2 + b) - (p - k_2 + b)$$

и находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4k_1 d^4k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \int d^4p \\
&\times \left\{ \text{tr} [T_\beta T_\gamma T_\alpha] \text{tr} \left[\frac{p - k_1 + a}{(p - k_1 + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \frac{p + a}{(p + a)^2 - i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] - \right. \tag{22.3.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\text{tr}[T_\beta T_\gamma T_\alpha] \text{tr} \left[\frac{\not{p} + \not{a}}{(p+a)^2 - i\varepsilon} \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{k}_2 + \not{a}}{(p+k_2+a)^2 - i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \\
& + \text{tr}[T_\gamma T_\beta T_\alpha] \text{tr} \left[\frac{\not{p} - \not{k}_2 + \not{b}}{(p-k_2+b)^2 - i\varepsilon} \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{b}}{(p+b)^2 - i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \\
& - \text{tr}[T_\gamma T_\beta T_\alpha] \text{tr} \left[\frac{\not{p} + \not{b}}{(p+b)^2 - i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{k}_1 + \not{b}}{(p+k_1+b)^2 - i\varepsilon} \gamma^\rho \frac{1+\gamma_5}{2} \right] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

В этом месте удобно разделить трехточечную функцию на симметричные и антисимметричные по групповым индексам слагаемые, записав

$$\begin{aligned}
\text{tr}[T_\beta T_\gamma T_\alpha] &= D_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}iNC_{\alpha\beta\gamma}, \\
\text{tr}[T_\gamma T_\beta T_\alpha] &= D_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}iNC_{\alpha\beta\gamma},
\end{aligned}$$

где $D_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью симметричная величина

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\text{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\} T_\gamma], \quad (22.3.12)$$

а коэффициент в структурных константах $C_{\alpha\beta\gamma}$ определяется условием

$$\text{tr}[T_\alpha T_\beta] = N\delta_{\alpha\beta}.$$

Слагаемые, антисимметричные по групповым индексам, в общем случае не равны нулю, однако они не отвечают какому-то нарушению симметрии. Как и при выводе тождества Уорда в разделе 10.4, при формальном вычислении дивергенции матричного элемента (22.3.5) мы сталкиваемся с вкладами от производных по времени тета-функций в хронологическом произведении, равными

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{форм}} &= -iC_{\alpha\beta\delta} \delta^4(x-y) \langle j_\delta^\nu(y) j_\gamma^\rho(z) \rangle_{\text{VAC}} \\
&\quad - iC_{\alpha\beta\delta} \delta^4(x-z) \langle j_\beta^\nu(y) j_\delta^\rho(z) \rangle_{\text{VAC}}.
\end{aligned} \quad (22.3.13)$$

Нетрудно убедиться, что антисимметричные члены в выражении (22.3.11) просто воспроизводят (22.3.13). Аномалия содержится в симметричной части выражения (22.3.11):

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{аном}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \int d^4 p \\
 & \times \left\{ \text{tr} \left[\frac{p - k_1 + a}{(p - k_1 + a)^2 - i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{p + a}{(p + a)^2 - i\varepsilon} \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \right. \\
 & - \text{tr} \left[\frac{p + a}{(p + a)^2 - i\varepsilon} \gamma^\rho \frac{p + k_2 + a}{(p + k_2 + a)^2 - i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \\
 & + \text{tr} \left[\frac{p - k_2 + b}{(p - k_2 + b)^2 - i\varepsilon} \gamma^\rho \frac{p + b}{(p + b)^2 - i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \\
 & \left. - \text{tr} \left[\frac{p + b}{(p + b)^2 - i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{p + k_1 + b}{(p + k_1 + b)^2 - i\varepsilon} \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \right\}. \quad (22.3.14)
 \end{aligned}$$

Объединяя первый след с четвертым, а второй — с третьим, можно записать это выражение в виде

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{аном}} = \frac{1}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \\
 & \times \left\{ \text{tr} \left[\gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] I_{\kappa\lambda}(a - b - k_1, b, b + k_1) \right. \\
 & \left. + \text{tr} \left[\gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] I_{\kappa\lambda}(b - a - k_2, a, a + k_2) \right\}, \quad (22.3.15)
 \end{aligned}$$

где

$$I_{\kappa\lambda}(k, c, d) \equiv \int d^4 p [f_{\kappa\lambda}(p + k, c, d) - f_{\kappa\lambda}(p, c, d)], \quad (22.3.16)$$

$$f_{\kappa\lambda}(p, c, d) \equiv \frac{(p + c)_\kappa (p + d)_\lambda}{[(p + c)^2 - i\varepsilon][(p + d)^2 - i\varepsilon]}. \quad (22.3.17)$$

Чтобы вычислить эти интегралы, рассмотрим разложение функции $f_{\kappa\lambda}(p + k, c, d)$ по степеням k :

$$f_{\kappa\lambda}(p + k, c, d) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{\mu_1} \dots k^{\mu_n} \frac{\partial^n f_{\kappa\lambda}(p, c, d)}{\partial p^{\mu_1} \dots \partial p^{\mu_n}}.$$

Член нулевого порядка $f_{\kappa\lambda}(p, c, d)$ в выражении (22.3.16) явно сокращается. Все остальные слагаемые в (22.3.16) являются интегралами от производных по p , и поэтому после виковского поворота могут быть записаны как поверхностные интегралы по большой 3-сфере, скажем, радиуса P . Тогда n -я производная f дает поверхностный интеграл от функции, которая ведет себя как $P^{-2-(n-1)}$, в то время как площадь 3-сферы радиуса P ведет себя как P^3 , поэтому единственными членами, которые дают вклад при $P \rightarrow \infty$, будут члены с $n = 1$ и $n = 2$:

$$I_{\kappa\lambda}(k, c, d) = k^\mu \int d^4p \frac{\partial f_{\kappa\lambda}(p, c, d)}{\partial p^\mu} + \frac{1}{2} k^\mu k^\nu \int d^4p \frac{\partial^2 f_{\kappa\lambda}(p, c, d)}{\partial p^\mu \partial p^\nu}. \quad (22.3.18)$$

После прямого вычисления находим

$$I_{\kappa\lambda}(k, c, d) = \frac{1}{6} i p^2 [2k_\lambda c_\kappa + 2k_\kappa d_\lambda - k_\lambda d_\kappa - k_\kappa c_\lambda - \eta_{\kappa\lambda} k \cdot (k + c + d)], \quad (22.3.19)$$

Теперь следует отдельно рассмотреть слагаемые в следах в выражении (22.3.15), которые возникают от 1 и от γ_5 в проекционной матрице $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$. Слагаемые от 1 содержат след $\text{tr}[\gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho]$, который симметричен по κ и λ , а также по ν и ρ , так что интегралы образуют комбинацию

$$I_{\kappa\lambda}(a - b - k_1, b, b + k_1) + I_{\lambda\kappa}(a - b - k_1, b, b + k_1) \\ + I_{\kappa\lambda}(b - a - k_2, a, a + k_2) + I_{\lambda\kappa}(b - a - k_2, a, a + k_2)$$

Используя выражение (22.3.19), нетрудно увидеть, что эта комбинация обращается в нуль, если и только если мы выберем произвольные постоянные векторы так, чтобы

$$a = -b. \quad (22.3.20)$$

Кроме того, этот выбор позволяет избежать некиральной аномалии для всех трех токов, так как в выражении $(\partial/\partial y^\nu)\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ векторы a и b должны быть заменены на $a' = k_2 + a$ и $b' = -k_2 + b$, а в выражении $(\partial/\partial z^\rho)\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ — на $a'' = k_1 + a$ и $b'' = -k_1 + b$, так что выбор $a = -b$ одновременно обеспечивает выполнение равенств $a' = -b'$ и $a'' = b''$.

У нас остается слагаемое в следе, содержащее γ_5 . Оно полностью антисимметрично:

$$\text{tr}[\gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma_5] = -4i\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}, \quad (22.3.21)$$

где $\epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho}$ — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon^{0123} = 1$. Подставляя это в выражение (22.3.15) с учетом $b = -a$ находим:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{аном}} = \frac{2}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1 + k_2) \cdot x} \times e^{ik_1 \cdot y} e^{ik_2 \cdot z} \pi^2 \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} a_\kappa (k_1 + k_2)_\lambda. \quad (22.3.22)$$

Аномалия (22.3.22) в токе $J_\alpha^\mu(x)$ могла бы быть устранена, если выбрать $a \propto k_1 + k_2$. Хотя такой выбор возможен, он все же не устраняет аномалию везде; она появилась бы в $(\partial/\partial y^\nu)\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ или $(\partial/\partial z^\rho)\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$. Симметрия задачи указывает, что аномалия будет отсутствовать в $(\partial/\partial y^\nu)\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$, если и только если $(k_2 + a) - (-k_2 + b) \propto k_1$, или иначе, если $a + k_2 \propto k_1$, и будет отсутствовать в $(\partial/\partial z^\rho)\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$, если и только если $(-k_1 + a) - (k_1 + b) \propto k_2$ или иначе, если $a - k_1 \propto k_2$. Можно выбрать a^μ так, чтобы удовлетворить любым двум из этих условий, так что аномалия может быть устранена из любых двух токов, однако очевидно, что при непараллельных k_1 и k_2 невозможно одновременно удовлетворить всем трем условиям $a \propto k_1 + k_2$, $a + k_2 \propto k_1$ и $a - k_1 \propto k_2$. (Например, из первых двух условий следует, что $a = -k_1 - k_2$ в противоречии с третьим условием.)

Поэтому мы приходим к выводу, что хотя у нас и есть некоторая свобода в выборе того, какой из токов содержит аномалию, но *необращение в нуль величин $D_{\alpha\beta\gamma}$ определенно показывает, что аномалия есть по крайней мере в одном из токов $J_\alpha^\mu(x)$, $J_\beta^\nu(y)$ или $J_\gamma^\rho(z)$* . В этом заключается один из главных результатов проделанных вычислений, который будет использован в следующем раз-

деле как источник ограничений на содержание полей материи в калибровочных теориях.

Мы видели, что вычисление аномалий зависит от выбора вектора сдвига a^μ . К сожалению, нет ни одного выбора, который был бы удовлетворителен во всех отношениях, так что мы должны выбирать a^μ в соответствии с конкретными особенностями рассматриваемой задачи.

В одном классе очень важных задач $J_\alpha^\mu(x)$ — ток глобальной симметрии, а $J_\beta^\nu(y)$ и $J_\gamma^\rho(z)$ — токи калибровочных симметрий, т. е. токи, с которыми связаны калибровочные поля. (Мы рассматривали подобную задачу в предыдущем разделе.) В таких случаях мы *должны* выбрать a^μ так, чтобы аномалия содержалась только в $J_\alpha^\mu(x)$, но не в $J_\beta^\nu(y)$ или $J_\gamma^\rho(z)$. Как было показано, для этого требуется, чтобы $a + k_2 \propto k_1$ и $a - k_1 \propto k_2$, что приводит к единственному выбору

$$a = k_1 - k_2. \quad (22.3.23)$$

Если принять такое значение a^μ , то аномалия (22.3.22) равна

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) \right]_{\text{аном}} &= \frac{2}{(2\pi)^{12}} D_{\alpha\beta\gamma} \int d^4 k_1 d^4 k_2 e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} e^{ik_1\cdot y} e^{ik_2\cdot z} \\ &\quad \times 4\pi^2 \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} k_{1\kappa} k_{2\lambda} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial y^\kappa} \frac{\partial \delta^4(z-x)}{\partial z^\lambda}. \end{aligned} \quad (22.3.24)$$

Заметим попутно, что подобный результат может возникнуть только в теориях, включающих безмассовые частицы ^{7a}. В противном случае можно ожидать, что фурье-образ $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ имеет разложение в степенной ряд в окрестности нулевого импульса. Единственные члены в этом разложении, которые могли бы привести к дивергенции тока вида (22.3.24), — это псевдотензоры первого порядка по импульсам

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2) \right]_{\text{аном}} &\equiv \int d^4 y d^4 z e^{-ik_1\cdot y} e^{-ik_2\cdot z} \left[\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(0, y, z) \right]_{\text{аном}} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[A_{\alpha\beta\gamma} k_{1\sigma} + B_{\alpha\beta\gamma} k_{2\sigma} \right], \end{aligned}$$

где $A_{\alpha\beta\gamma}$ и $B_{\alpha\beta\gamma}$ — константы. Согласно уравнению (22.3.24)

$$(k_1 + k_2)_\mu \left[\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2) \right]_{\text{аном}} = \frac{i}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} k_{1\kappa} k_{2\lambda},$$

так что

$$A_{\alpha\beta\gamma} - B_{\alpha\beta\gamma} = \frac{i}{4\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma}.$$

Однако из симметрии амплитуды по трем токам следует, что

$$A_{\alpha\beta\gamma} k_{1\sigma} + B_{\alpha\beta\gamma} k_{2\sigma} = -A_{\alpha\gamma\beta} k_{2\sigma} - B_{\alpha\gamma\beta} k_{1\sigma} = -A_{\gamma\alpha\beta} (-k_{1\sigma} - k_{2\sigma}) - B_{\gamma\alpha\beta} k_{2\sigma},$$

так что, приравнивая коэффициенты при $k_{1\sigma}$ и $k_{2\sigma}$, получаем:

$$A_{\alpha\beta\gamma} = -B_{\alpha\gamma\beta} = A_{\gamma\alpha\beta}, \quad B_{\alpha\beta\gamma} = -A_{\alpha\gamma\beta} = A_{\gamma\alpha\beta} - B_{\gamma\alpha\beta}.$$

Беря разность этих уравнений, находим, что

$$A_{\alpha\beta\gamma} - B_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma\beta} - B_{\alpha\gamma\beta} = B_{\gamma\alpha\beta}.$$

Так как эта разность пропорциональна $D_{\alpha\beta\gamma}$, то должна выполняться полная симметрия, поэтому $B_{\alpha\beta\gamma}$ а следовательно, и $A_{\alpha\beta\gamma}$ полностью симметричны. Но тогда условия симметрии трехточечной функции имеют вид $A = -B = B - A$, откуда следует, что $A_{\alpha\beta\gamma} = B_{\alpha\beta\gamma} = 0$ в противоречии с выражением (22.3.24). По тем же соображениям, невозможно сократить аномалию, добавив во вза-

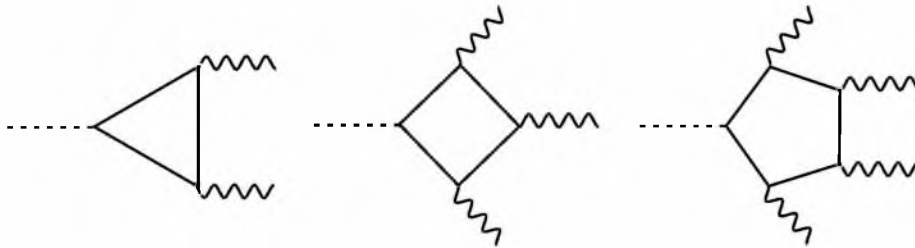


Рис. 22.2. Однопетлевые диаграммы для аномалии в токе, отмеченном пунктирной линией. Сплошные линии — фермионы, волнистые линии — калибровочные бозоны, с которыми взаимодействуют фермионы

имодействие локальное слагаемое, вклад которого в дивергенцию тока J_α^μ сократит ту дивергенцию, которая дается выражением (22.3.24).

Возвращаясь теперь к формуле (22.3.24), мы можем выразить этот результат через среднее по вакууму тока J_α^μ в присутствии калибровочных полей, связанных с токами J_β^ν и J_γ^ρ . Вклад треугольных диаграмм в ток в присутствии калибровочных полей равен

$$\langle J_\alpha^\mu(x) \rangle_\Delta = -\frac{1}{2} \int d^4 y d^4 z \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho}(x, y, z) A_\nu^\beta(y) A_\rho^\gamma(z). \quad (22.3.25)$$

Используя выражение (22.3.24), видим, что этот вклад имеет аномальную дивергенцию

$$\left[\langle \partial_\mu J_\alpha^\mu(x) \rangle \right]_{\text{аном}} = -\frac{1}{8\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \partial_\kappa A_\nu^\beta(x) \partial_\lambda A_\rho^\gamma(x). \quad (22.3.26)$$

На рис. 22.2 показаны дополнительные диаграммы, также содержащие аномалии. Калибровочная инвариантность требует, что диаграммы рис. 22.2 должны складываться и приводить к калибровочно инвариантному результату

$$\left[\langle \partial_\mu J_\alpha^\mu(x) \rangle \right]_{\text{аном}} = -\frac{1}{32\pi^2} D_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} F_{\kappa\nu}^\beta(x) F_{\lambda\rho}^\gamma(x). \quad (22.3.27)$$

Для проверки, рассмотрим теорию с сохранением фермионов с генераторами T_α вида (22.3.4). Константа $D_{\alpha\beta\gamma}$ в аномалии (22.3.26) дается выражением

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \text{tr}[\{t_\alpha^L, t_\beta^L\} t_\gamma^L] - \frac{1}{2} \text{tr}[\{t_\alpha^R, t_\beta^R\} t_\gamma^R] \quad (22.3.28)$$

Конкретнее, в разделе 22.2 мы вычисляли дивергенцию аксиального тока J_5^μ с $t^L = -t^R \equiv t$ за счет взаимодействий калибровочных полей с векторными токами J_β^ν и J_γ^ρ (обозначенными в разделе 22.2 как J_ν^α и J_β^ρ) с $t_\beta^L = t_\beta^R = t_\beta$ и аналогично для t_γ . Следовательно, в данном случае $D_{\alpha\beta\gamma}$ заменяется на $\text{tr}[\{t, t_\beta\} t_\gamma] = \text{tr}[\{t_\beta, t_\gamma\} t]$ и выражение (22.3.27) принимает вид

$$\left[\langle \partial_\mu J_5^\mu(x) \rangle \right]_{\text{аном}} = -\frac{1}{32\pi^2} \text{tr}[\{t_\beta, t_\gamma\} t] \epsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} F_{\kappa\nu}^\beta(x) F_{\lambda\rho}^\gamma(x) \quad (22.3.29)$$

Когда ни с одним из токов $J_\alpha^\mu(x)$, $J_\beta^\nu(y)$ или $J_\gamma^\rho(z)$ не связано какое-то калибровочное поле, выбор вектора сдвига a^μ становится вопросом удобства. Когда некоторые (но не все) токи связаны со спонтанно нарушенными симметриями, можно полностью сохранить ненарушенные симметрии, если выбрать a^μ так, чтобы в токах, соответствующих ненарушенным симметриям, не было аномалий. (Это соображение будет важными в разделе 22.7.) Например, в квантовой хромодинамике и подобных теориях, где генераторы T_α глобальных симметрий типа киральной $SU(3) \times SU(3)$ имеют вид (22.3.4), все токи являются либо векторами, соответствующими ненарушенным симметриям, причем $t_\alpha^R = t_\alpha^L$, либо аксиальными векторами, соответствующими нарушенным симметриям, причем $t_\alpha^R = -t_\alpha^L$. Из соотношения (22.3.28) следует, что единственными треугольными диаграммами с аномалиями в этом случае будут либо диаграммы с одним аксиальным и двумя векторными токами, либо диаграммы с тремя аксиальными токами.

В случае одного аксиального и двух векторных токов мы выбираем a^μ так, чтобы не возникала аномалия, интерферирующая с сохранением векторных токов. Следовательно, если $J_\alpha^\mu(x)$ — аксиальный ток, а $J_\beta^\nu(y)$ и $J_\gamma^\rho(z)$ — два векторных тока, то, как и в (22.3.23), мы должны выбрать $a^\mu = k_1^\mu - k_2^\mu$, так что аномалия будет определяться выражением (22.3.24). С другой стороны, в случае трех аксиальных токов нет оснований требовать, чтобы любой из них был свободен от аномалий. Вместо этого естественно придать вектору a^μ такое значение, которое не нарушает симметрии между тремя токами. На основании лоренц-инвариантности можно попробовать выбрать $a = \alpha k_1 + \beta k_2$, где α и β — константы. Тогда из симметрии будет следовать, что импульс каждой внутренней линии должен равняться p плюс произведение α на импульс, вытекающий с конца линии, плюс произведение β на импульс, вытекающий с начала линии. Иначе говоря, если мы положим $a = \alpha k_1 + \beta k_2$, то симметрия требует, что $a - k_1 = -\alpha(k_1 + k_2) + \beta k_2$ и $a + k_2 = \alpha k_2 - \beta(k_1 + k_2)$. В случае непараллельных k_1 и k_2 эти три соотношения удовлетворяются, если и только если $\alpha = -\beta = 1/3$, так что

$$a = \frac{1}{3}(k_1 - k_2). \quad (22.3.30)$$

Подставляя это в формулу (22.3.22) и сравнивая с выражением (22.3.23), видим, что аномалия в аксиальном токе в фейнмановской амплитуде для трех аксиальных токов равна одной трети от той, которая была бы в случае одного аксиального и двух векторных токов.

Дивергенция тока содержит дополнительные аномалии от диаграмм рис. 22.2. Калибровочная инвариантность здесь не помогает, поскольку даже вклад треугольной диаграммы не приводит к сохраняющимся токам. Полная аномалия была вычислена Бардиным⁸ для киральной $SU(3) \times SU(3)$ симметрии сильных взаимодействий, причем векторы сдвига по импульсу были выбраны так, что векторные токи сохранялись, а диаграммы только со всеми аксиальными токами были симметричны по этим токам. Хотя в квантовой хромодинамике такая $SU(3) \times SU(3)$ симметрия (действующая не на цвета, а на ароматы кварков) не является калибровочной, удобно выразить аномалию как нарушение калибровочной инвариантности функционала $\Gamma[V, A]$ фиктивных слабо связанных калибровочных полей: октета векторных полей $V_a^\mu(x)$ и октета аксиальных полей $A_a^\mu(x)$. Введем также бесконечно малые операторы калибровочных преобразований *

$$i\mathcal{Y}_a(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\delta V_{a\mu}} - f_{abc} V_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta V_{c\mu}(x)} - f_{abc} A_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{c\mu}(x)} \quad (22.3.31)$$

и

$$i\mathcal{X}_a(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\delta A_{a\mu}} - f_{abc} V_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{c\mu}(x)} - f_{abc} A_{b\mu}(x) \frac{\delta}{\delta V_{c\mu}(x)}, \quad (22.3.32)$$

где f_{abc} — структурные константы $SU(3)$. Как отмечалось выше, выбор импульсов внутренних линий сделан так, что векторный ток не содержит аномалии:

$$\mathcal{Y}_a \Gamma[V, A] = 0, \quad (22.3.33)$$

* Здесь операторы $\mathcal{Y}_a$ и $\mathcal{X}_a$ — те же, что в работе ⁸ обозначались X_a и Y_a . Такое изменение обозначений сделано для того, чтобы сохранить согласованность с обозначениями гл. 19, где генераторы нарушенной симметрии последовательно обозначались X_a .

но при этом аномалии появляются в аксиальных токах

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a \Gamma[V, A] = & \frac{i}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left\{ \lambda_a \left[V_{\mu\nu} V_{\rho\sigma} + \frac{1}{3} A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma} - \frac{32}{3} A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{8}{3} i (A_\mu A_\nu V_{\rho\sigma} + A_\mu V_{\rho\sigma} A_\nu + V_{\rho\sigma} A_\mu A_\nu) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (22.3.34)$$

где λ_a — матрицы $SU(3)$, выписанные в формуле (19.7.2), а

$$V_\mu \equiv \frac{1}{2} \lambda_a V_{\mu a}, \quad A_\mu \equiv \frac{1}{2} \lambda_a A_{\mu a}, \quad (22.3.35)$$

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - i[V_\mu, V_\nu] - i[A_\mu, A_\nu], \quad (22.3.36)$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[V_\mu, A_\nu] - i[A_\mu, V_\nu]. \quad (22.3.37)$$

Как уже объяснялось, появление множителя $1/3$, сопровождающего второе слагаемое в правой части формулы (22.3.34), есть следствие разного выбора a^μ в AVV и AAA диаграммах. В разделе 22.6 мы опишем условия согласованности, благодаря которым, зная квадратичные члены, можно вычислить кубические и четвертичные члены в выражении (22.3.34).

Для аномалий, включающих симметрии, которые все спонтанно нарушены, нет оснований выбирать a^μ так, чтобы отличать разные токи. Наоборот, естественно пометить импульсы внутренних фермионных линий таким способом, который симметричен относительно прикрепленных линий калибровочных бозонов. Как мы видели, это означает, что треугольная диаграмма должна вычисляться при выборе $a = \frac{1}{3}(k_1 - k_2)$. При этом вклад треугольной аномалии становится равным $1/3$ значения, даваемого выражением (22.3.26). С учетом квадратных и пятиугольных диаграмм этот результат принимает вид^{8a}

$$\begin{aligned} \left[\langle D_\mu J_\alpha^\mu \rangle \right]_{\text{аном}} = & -\frac{1}{24} \varepsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ T_\alpha \left[\partial_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho - \frac{1}{2} i \partial_\kappa A_\nu A_\lambda A_\rho \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} i A_\kappa \partial_\nu A_\lambda A_\rho - \frac{1}{2} A_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho \right] \right\}, \end{aligned} \quad (22.3.38)$$

где $A^\mu \equiv A_\alpha^\mu T_\alpha$. Мы не станем выводить эту формулу, поскольку уже знаем, что в таких случаях квадратичные по A_μ члены равны одной трети от соответствующих членов в (22.3.26), а в разделе 22.6 мы сумеем с помощью условий согласованности вывести выражения для остальных слагаемых в формуле (22.3.38), исходя из квадратичных слагаемых.

Теперь следует рассмотреть возможные поправки к этим результатам. Тщательный вывод аномалии во всех порядках теории возмущений был сделан Адлером и Бардиным⁹. Ниже мы приводим только суть их анализа.

Рассуждения, которые привели к выражению (22.3.22), можно повторить в любом порядке теории возмущений и показать, что в общем случае аномалия возникает от интегралов в импульсном пространстве, которые можно записать как поверхностные члены. Отсюда, как мы уже видели в формуле (22.3.18), единственные диаграммы для дивергенции тока, которые дают вклад в аномалию, — это те, у которых интеграл по импульсу, циркулирующему по фермионной петле, имеет размерность (в степенях импульса) нуль или больше. Взаимодействия фермионов в петле с виртуальными калибровочными бозонами уменьшило бы размерность интеграла по импульсу в фермионной петле в степени, достаточной для устранения аномалии. Поэтому вклад в аномалию от таких радиационных поправок отсутствует. (Конечно, интеграл по импульсам виртуальных калибровочных бозонов, а также по фермионной петле имел бы неотрицательную размерность, но в противоположность фермионному пропагатору можно регуляризовать пропагаторы калибровочных бозонов, не нарушая обсуждаемую киральную симметрию.) На аномалию влияют взаимодействия калибровочных бозонов, прикрепленных к фермионной петле, с другими калибровочными бозонами и фермионными петлями, но такие взаимодействия сводятся к перенормировке операторов типа $\epsilon^{k\nu\lambda\rho} F_{k\nu}^\beta(x) F_{\lambda\rho}^\gamma(x)$. По тем же соображениям, любая фермионная масса, не нарушающая обсуждаемые симметрии (если такое было бы возможным), не изменяла бы аномалию, поскольку извлекаемые из этой массы множители понижали бы размерность интеграла в импульсном пространстве.

Последнее замечание предыдущего абзаца поднимает вопрос, можем ли мы вычислить аномалию, не зная всех фермионов в теории — как тяжелых, так и легких или безмассовых. Да, мы можем это сделать. Сейчас мы покажем, что *ни один фермион*,

которому данная симметрия позволяет иметь массу, не дает вклада в аномалию для этой симметрии. В рассматриваемом здесь общем классе теорий массовое слагаемое в плотности лагранжиана имело бы вид

$$\mathcal{P}_{\text{масс}} = - \sum_{nn'\sigma\sigma'} \chi_{\sigma n} \epsilon_{\sigma\sigma'} M_{nn'} \chi_{\sigma' n'} + \text{э.с.}, \quad (22.3.39)$$

где σ — двухкомпонентный спинорный индекс представления $(\frac{1}{2}, 0)$ группы Лоренца; $\epsilon_{\sigma\sigma'}$ — антисимметричная матрица с $\epsilon_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = +1$, необходимая для лоренц-инвариантности, а M — симметричная массовая матрица*. Далее, для того, чтобы слагаемое $\mathcal{P}_{\text{масс}}$ не нарушало калибровочную инвариантность, массовая матрица должна удовлетворять условию

$$-T_{\alpha}^T M = M T_{\alpha}. \quad (22.3.40)$$

Индекс n можно заменить на индекс r , отмечающий различные неприводимые представления калибровочной группы, и индекс s , отмечающий компоненты внутри каждого неприводимого представления, так что

$$(T_{\alpha})_{rs, r's'} = \delta_{rr'} (T_{\alpha}^{(r)})_{s, s'} \quad (22.3.41)$$

и можно записать

$$M_{rs, r's'} = (M^{(r, r')})_{s, s'}. \quad (22.3.42)$$

Тогда выражение (22.3.40) принимает вид

* В теориях с сохранением числа фермионов, где χ имеет вид (22.3.1), M связана с обычной массовой матрицей m :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^T & 0 \end{pmatrix}$$

Если принять все фазы инверсий равными единице, то из инвариантности относительно пространственной инверсии, зарядового сопряжения и отражения времени вытекают дальнейшие следствия, что матрица m эрмитова, симметрична или действительна.

$$-T_{\alpha}^{(r)T} M^{(r,r')} = M^{(r,r')} T_{\alpha}^{(r')}. \quad (22.3.43)$$

(Здесь нет суммирования по r или r' .) Из леммы Шура¹⁰ следует, что всякий раз, когда матрицы пары неприводимых представлений связаны таким соотношением, та матрица, которая связывает их, либо равна нулю, либо несингулярна (см. раздел 5.5). Таким образом, либо $M^{(r,r')} = 0$, либо $-T_{\alpha}^{(r)T}$ и $T_{\alpha}^{(r')}$ связаны преобразованием подобия (это же относится к T_{β} и T_{γ}). В последнем случае вклады в константу аномалии (22.3.12) от фермионов, принадлежащих отдельным неприводимым представлениям r и r' , связаны соотношением

$$D_{\alpha\beta\gamma}^{(r)} = -D_{\alpha\beta\gamma}^{(r')}, \quad (22.3.44)$$

так что аномалия либо исчезает (при $r = r'$), или вклады в нее от двух представлений сокращаются (при $r \neq r'$). Таким образом, на аномалии в данном множестве симметрий не оказывает влияния возможное наличие фермионов с массами, разрешенными этими симметриями.

* * *

Вернемся к тонкому месту в использовании фейнмановских правил для расчета трехточечной функции (22.3.7). Используя стандартный фермионный пропагатор (22.3.9), мы фактически удвоили число фермионных полей; в дополнение к чисто левым полям $\chi(x)$, задаваемым формулами (22.3.1), пропагатор (22.3.9) включает правые моды (не связанные с полями $(1 - \gamma_5)\Psi$ теорий с сохранением числа фермионов), не взаимодействующие с калибровочными полями. Если собрать эти невзаимодействующие правые поля и взаимодействующие левые поля в единый спинор Ψ , то плотность лагранжиана фермионов станет равной $-\bar{\Psi}D\Psi$, где теперь

$$D = \partial - iA_{\alpha}T_{\alpha}\left(\frac{1 + \gamma_5}{2}\right). \quad (22.3.45)$$

Однопетлевой вакуумный функционал для полей спина $\frac{1}{2}$, взаимодействующих с реальными или фиктивными калибровочными

полями, равен просто $\text{Det } \mathcal{D}$. Нарушение калибровочной инвариантности в этом детерминанте можно приписать тому факту, что оператор (22.3.45) есть сумма двух слагаемых,

$$\mathcal{D} = \not{\partial} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) + \mathcal{D} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right), \quad (22.3.46)$$

из которых только второй калибровочно инвариантен.

Есть и другой подход к аномалиям^{10a}, в рамках которого можно вычислить большой класс аномалий, связанных с координатными, а также калибровочными симметриями в пространствах любой размерности. Вместо того, чтобы иметь дело с оператором (22.3.45) с хорошо определенным детерминантом, из выражения (22.3.46) берется только второе слагаемое

$$\mathcal{D}_L \equiv \mathcal{D} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right). \quad (22.3.47)$$

Оно полностью калибровочно инвариантно, но имеет плохо определенный детерминант, поскольку такой оператор отображает пространство фермионных полей одной киральности не в себя, а в пространство полей другой киральности. Можно попытаться определить калибровочно инвариантный вакуумный функционал $\text{Det } \mathcal{D}_L$, записав дифференциальные уравнения для $\text{Det } \mathcal{D}_L$ в факторпространстве калибровочных полей по калибровочным преобразованиям, но тогда можно наткнуться на препятствия. Есть локальные препятствия, связанные с нарушениями необходимых условий интегрируемости, и они соответствуют уже обсуждавшимся аномалиям. Но даже когда таких локальных препятствий нет, в случаях, когда бесконечномерное факторпространство конфигураций калибровочного поля по калибровочным преобразованиям является неодносвязным, топологические препятствия могут помешать определению однозначных функционалов в этом пространстве. Подобная глобальная аномалия была найдена Витеном^{10b} для калибровочной группы $SU(2)$ (свободной от локальных аномалий) с нечетным числом безмассовых левых фермионов в $SU(2)$ дублетах.

22.4. Свободные от аномалий калибровочные теории

Мы вычислили влияние аномалий на сохранение произвольного тока J_α^μ . В тех случаях, когда этот ток сам связан с калибровочным полем, из калибровочной инвариантности вытекает, что аномалия должна отсутствовать. В предыдущем разделе мы видели, что аномалия пропорциональна полностью симметричному постоянному множителю $D_{\alpha\beta\gamma}$, определенному формулой (22.3.12), так что для калибровочных токов должно выполняться равенство ¹¹

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \text{tr} \left[\{T_\alpha, T_\beta\} T_\gamma \right] = 0, \quad (22.4.1)$$

где T_α — представление калибровочной алгебры на множестве всех левых фермионных и антифермионных полей, а «tr» вновь означает сумму по всем этим сортам фермионов и антифермионов. Такое условие выполняется для любой калибровочной группы, если фермионные поля реализуют подходящее приводимое или неприводимое представление этой группы. Кроме того, существуют некоторые калибровочные группы, для которых условие (22.4.1) удовлетворяется для фермионов в любом представлении группы. ¹² (В разделе 22.6 с помощью формализма Баталина–Вилковыского дано чисто алгебраическое доказательство того, что для таких калибровочных групп аномалии отсутствуют во всех порядках теории возмущений.)

Условие (22.4.1) очевидно удовлетворяется, если поля левых фермионов (и антифермионов) реализуют представление калибровочной алгебры, которое эквивалентно комплексно сопряженному представлению, т. е.

$$(iT_\alpha)^* = S(iT_\alpha)S^{-1}$$

или эквивалентно (поскольку всегда T_α выбирается эрмитовым)

$$T_\alpha^T = -ST_\alpha S^{-1}. \quad (22.4.2)$$

(Подстановка формулы (22.4.2) в (22.3.12) дает $D_{\alpha\beta\gamma} = -D_{\alpha\beta\gamma}$) Такое представление может быть либо *действительным*, и в этом случае можно с помощью преобразования подобия $T'_\alpha = RT_\alpha R^{-1}$ преоб-

разовать представление к виду, в котором T'_α мнимы и антисимметричны, либо *псевдодействительным*, и в таком случае это невозможно. (Например, трехмерное неприводимое представление $SU(2)$ действительно, а двумерное представление псевдодействительно.) Аномалии отсутствуют в случае калибровочных алгебр, имеющих только действительные или псевдодействительные представления, а именно, для алгебр ¹³ $SO(2n+1)$ (включая $SU(2) \neq SO(3)$), $SO(4n)$ при $n \geq 2$, $USp(2n)$ при $n \geq 3$, G_2 , F_4 , E_7 , E_8 и всех их прямых сумм. Несколько других алгебр также имеют только такие представления, для которых $D_{\alpha\beta\gamma}$ обращается в нуль, даже несмотря на то, что некоторые из этих представлений не относятся к вещественным или псевдовещественным. ¹² Сюда относятся $SO(4n+2)$ (за исключением $SO(2) \neq U(1)$ и $SO(6) \neq SU(4)$) и E_6 и их прямые суммы друг с другом и перечисленными выше алгебрами. Таким образом, аномалии возможны только для калибровочных алгебр, включающих в прямые суммы алгебры $SU(n)$ (при $n \geq 3$) или $U(1)$. Так случилось, что именно эти алгебры являются одними из самых важных калибровочных алгебр в современной физике. Стандартная модель основана на калибровочной группе $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, поэтому для того, чтобы сделать теорию свободной от аномалий, нужно рассчитывать на сокращения между кварками и лептонами.

В табл. 22.1 дана классификация левых спинорных полей первого поколения стандартной модели по тем представлениям, которые они реализуют в цветовой $SU(3)$ группе, электрослабой $SU(2)$ группе и по значению квантового числа группы $U(1)$

$$y / g' = t_3 / g - q / e..$$

Теперь мы можем проверить, обращается ли в нуль $D_{\alpha\beta\gamma}$, когда T_α , T_β и T_γ принимают значения всех генераторов группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Следует рассматривать только те комбинации генераторов, для которых произведение T_α , T_β и T_γ нейтрально относительно преобразований группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, поскольку для всех остальных комбинаций $D_{\alpha\beta\gamma}$ с очевидностью обращается в нуль. Инварианты можно построить из $SU(3)$ генераторов, количество которых равно 0, 2 или 3 (поскольку 8×8 , и $8 \times 8 \times 8$ содержат синглеты), из 0, 2 или 3 $SU(2)$ генераторов и любого числа $U(1)$ генераторов, так что остается лишь проверить следующие варианты.

Таблица 22.1

Левые фермионные и антифермионные поля
первого поколения в стандартной модели

Фермионы	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)[y/g]$
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	3	2	-1/6
u_R^*	$\bar{3}$	1	+2/3
d_R^*	$\bar{3}$	1	-1/3
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	1	2	1/2
e_R^*	1	1	-1

$SU(3)$ – $SU(3)$ – $SU(3)$. В этом случае $D_{\alpha\beta\gamma}$ обращается в нуль, поскольку левые фермионы реализуют представление $3 + 3 + \bar{3} + \bar{3} + 1 + 1 + 1$ группы $SU(3)$, которое вещественно.

$SU(3)$ – $SU(3)$ – $U(1)$. В этом случае аномалия пропорциональна величине

$$\sum_{3,\bar{3}} \frac{y}{g'} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

$SU(2)$ – $SU(2)$ – $SU(2)$. Здесь нет аномалии, поскольку $SU(2)$ имеет только вещественные или псевдовещественные представления.

$SU(2)$ – $SU(2)$ – $U(1)$. В этом случае аномалия пропорциональна величине

$$\sum_{\text{дублеты}} \frac{y}{g'} = 3 \left(-\frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} = 0.$$

$U(1)-U(1)-U(1)$. В этом случае аномалия пропорциональна величине

$$\sum \left(\frac{y}{g'} \right)^3 = 6 \left(-\frac{1}{6} \right)^3 + 3 \left(\frac{2}{3} \right)^3 + 3 \left(-\frac{1}{3} \right)^3 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 + (-1)^3 = 0.$$

Итак, видно, что для калибровочных симметрий стандартной модели все аномалии сокращаются^{13а}. Этот результат можно изящно обосновать, заметив, что $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ может быть погружена в $SO(10)$ ¹⁴. Все представления $SO(10)$ свободны от аномалий, и это же свойство наследуется любым приводимым представлением $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, реализующим полное представление $SO(10)$. Оказывается, что левые поля одного поколения кварков, лептонов, антикварков и антилептонов, а также один дополнительный $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -синглет образуют полное 16-мерное представление $SO(10)$ (фундаментальное спинорное представление), так что для этого набора левых фермионов $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ аномалий нет. Синглет в любом случае не давал бы вклада в такие аномалии, так что в калибровочных симметриях стандартной модели аномалии отсутствуют.

Есть еще одна требующая вычисления аномалия. Все сорта фермионов одинаковым образом взаимодействуют с гравитацией. Расчет диаграммы фермионной петли для среднего значения тока $\bar{\chi} T \gamma^\mu \chi$ (где χ — столбец, содержащий все поля левых фермионов и антифермионов) в присутствии внешнего гравитационного поля приводит к аномалии¹⁵ $\partial_\mu (\bar{\chi} T \gamma^\mu \chi)$, пропорциональной

$$\text{tr}\{T\} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\kappa\lambda} R_{\rho\sigma}{}^{\kappa\lambda}.$$

В частности, чтобы избежать гравитационного нарушения калибровочной симметрии вида (22.3.3), генераторы должны удовлетворять условию

$$\text{tr}\{T_\alpha\} = 0. \quad (22.4.3)$$

Как и чисто калибровочная аномалия, эта аномалия обращается в нуль для калибровочных генераторов, удовлетворяющих условию (22.4.2), поэтому в нее не дают вклада фермионы, образующие вещественное или псевдовещественное представление калибровочной группы. Поэтому аномалию можно вычислить, приняв во внимание только те фермионы, массы которых возникают от нарушения калибровочной симметрии. Кроме того, это условие автоматически удовлетворяется генераторами любых *простых* подалгебр калибровочной алгебры, типа $SU(2)$ или $SU(3)$. (Действительно, $\text{tr}\{T_\alpha\}$ есть число, коммутирующее со всеми T_β , поэтому, если оно не равно нулю, то алгебра не проста.) Следовательно, нам нужно только проверить, что условие (22.4.3) удовлетворяется $U(1)$ генераторами калибровочной алгебры. В стандартной модели сумма значений слабого гиперзаряда Ψ для всех левых фермионов равна

$$\sum \frac{y}{g'} = 6 \left(-\frac{1}{6} \right) + 3 \left(\frac{2}{3} \right) + 3 \left(-\frac{1}{3} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \right) + (-1) = 0,$$

так что в токах стандартной модели нет гравитационных аномалий. Требование исчезновения аномалий можно использовать как руководящий принцип при формулировке реалистичных теорий. Например, значения слабых гиперзарядов Ψ для различных $SU(3)$ и $SU(2)$ мультиплетов первоначально брались из эксперимента, но можно было задаться вопросом, почему эти слабые гиперзаряды (и соответствующие средние электрические заряды в каждом мультиплете) равны наблюдаемым значениям. Для ответа на этот вопрос предположим, что мы приписали произвольные слабые гиперзаряды a, b, c, d, e мультиплетам $(u_L, d_L), u_R^*, d_R^*, (v_L, e_L), e_R^*$, соответственно. Условия сокращения аномалий приводят к следующим равенствам.

$SU(3)$ – $SU(3)$ – $U(1)$:

$$\sum_{3,\bar{3}} y = 2a + b + c = 0;$$

$SU(2)$ – $SU(2)$ – $U(1)$:

$$\sum_{\text{дублеты}} y = 3a + d = 0;$$

$U(1)-U(1)-U(1)$:

$$\sum y^3 = 6a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 2d^3 + e^3 = 0;$$

Гравитон-гравитон- $U(1)$:

$$\sum y = 6a + 3b + 3c + 2d + e = 0.$$

Не считая возможности взаимозамены u_R и d_R , эти уравнения имеют только два решения, которые мы назовем $U(1)$ и $U(1)'$:

$$U(1): \quad b/a = -4, \quad c/a = 2, \quad d/a = -3, \quad e/a = 6;$$

$$U(1)': \quad b = -c, \quad a = d = e = 0.$$

Более того, эти решения взаимоисключающие — мы не можем предположить, что обе симметрии $U(1)$ и $U(1)'$ являются локальными, поскольку тогда возникнет $U(1)'-U(1)'-U(1)$ аномалия, пропорциональная $(-4) + (+2) \neq 0$, и $U(1)'-U(1)-U(1)$ аномалия, пропорциональная $(-4)^2 - (+2)^2 \neq 0$. Генератор $U(1)$ — это гиперзаряд стандартной электрослабой теории (общий постоянный множитель включен в определение константы g'), в то время как симметрия $U(1)'$ не соответствует ничему наблюдаемому в природе. Это небольшое вычисление дает разумное объяснение выбору значений ψ или, эквивалентно, электрических зарядов в стандартной модели и показывает, что если потребовать, чтобы все калибровочные аномалии сокращались внутри единственного поколения кварков и лептонов, то невозможно в дополнение к слабому гиперзаряду связать калибровочный бозон с любым другим $U(1)$ квантовым числом.

С другой стороны, хотя разумно предположить, что $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ калибровочные бозоны стандартной модели взаимодействуют только с известными кварками и лептонами (что одновременно объясняет, почему не открыты другие фермионы, и сохраняет красивое сокращение аномалий в стандартной модели), могут существовать и другие $U(1)'$ калибровочные бозоны, взаимодействующие с другими, еще не обнаруженными ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$)-

нейтральными фермионами, а также с известными кварками и лептонами. Обозначим $U(1)'$ квантовые числа Ψ' мультиплетов (u_L, d_L) , u_R^*, d_R^* , (ν_L, e_L) , e_R^* соответственно как a', b', c', d', e' . Так как мы ничего не знаем о возможных $(SU(3) \times SU(2) \times U(1))$ -нейтральных фермионах, требование сокращения $U(1)'-U(1)'-U(1)'$ и гравитон-гравитон- $U(1)'$ аномалий не приводит к каким-то ограничениям на a', b', c', d', e' . Остающиеся условия сокращения аномалий имеют следующий вид.

$SU(3)-SU(3)-U(1)'$:

$$\sum_{3, \bar{3}} y' = 2a' + b' + c' = 0;$$

$SU(2)-SU(2)-U(1)'$:

$$\sum_{\text{дублеты}} y' = 3a' + d' = 0;$$

$U(1)-U(1)-U(1)'$:

$$\sum y^2 y' = 6a' + 3(-4)^2 b' + 3(2)^2 c' + 2(-3)^2 d' + (6)^2 e' = 0;$$

$U(1)-U(1)'-U(1)'$:

$$\sum y y'^2 = 6a'^2 + 3(-4)b'^2 + 3(2)c'^2 + 2(-3)d'^2 + (6)e'^2 = 0.$$

Общее решение для Ψ' есть линейная комбинация Ψ и квантового числа $B - L$ (где B и L — обычные барионное и лептонное числа), принимающего значения $1/3, -1/3, -1/3, -1$ и $+1$ для мультиплетов (u_L, d_L) , u_R^*, d_R^* , (ν_L, e_L) , e_R^* соответственно. Если $B - L$ является локальной симметрией с константой, которая не на много порядков величины меньше, чем e , то она должна быть спонтанно нарушена, поскольку обычные тела имеют макроскопические значения $B - L$. Чтобы избежать противоречия с наблюдениями нейтральных токов, характерная шкала F нарушения такой симметрии должна быть больше, чем у электрослабой симметрии, но не обязательно на много порядков. Таким образом, нейтральный векторный бозон, несколько тяжелее Z^0 и связанный с $B - L$, является, по-видимому, наиболее приемлемым дополнением к стандартной модели.

Все это касалось одного поколения стандартной модели. Для трех поколений имеется много больше свободных от аномалий симметрий. Один из классов симметрий, которые не нарушаются аномалиями или (насколько мы знаем) чем либо еще, состоит из разностей чисел лептонов разных ароматов. Наряду с $B - L$ это будет важно при обсуждении в разделе 23.5 классификации порождаемых аномалиями процессов, не сохраняющих барионное и лептонное числа.

22.5. Безмассовые связанные состояния*

Иногда высказываются гипотезы, что кварки и лептоны могут быть связанными состояниями более фундаментальных частиц. Если бы такие гипотетические фундаментальные частицы имели асимптотически свободные калибровочные взаимодействия, аналогичные тем, которые есть в квантовой хромодинамике, то мы были бы вправе ожидать, что эти частицы находятся в плену, и это объясняло бы, почему они не наблюдаются. Однако такая картина приводит к трудностям. Какая-либо внутренняя структура кварков и лептонов никогда не наблюдалась, поэтому характерная энергетическая шкала Λ' (аналогичная шкале $\Lambda \approx 200$ МэВ в квантовой хромодинамике) этих калибровочных взаимодействий должна быть очень большой. Например, как отмечалось в разделе 12.3, согласие между теорией и экспериментом для магнитного момента мюона указывает, что $\Lambda' > 3$ ТэВ. Однако, если не считать голдстоуновских бозонов, мы в обычной ситуации могли бы ожидать, что массы связанных состояний в такой теории порядка Λ' или, может быть, $2\pi\Lambda'$, точно так же, как в квантовой хромодинамике масса протона порядка $2\pi\Lambda_{\text{КХД}}$. Такие ожидания, конечно, находятся в кричащем противоречии с тем фактом, что наблюдаемые массы кварков и лептонов много меньше Λ' . Можно задать вопрос иначе: если лептоны и кварки являются связанными состояниями, то почему их размер (измеренный по значениям аномальных магнитных моментов и т. п.) настолько меньше их комптоновской длины волны?

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

Один из способов ответа на этот вопрос заключается в предположении, что, в противоположность квантовой хромодинамике, в такой теории имеются ненарушенные киральные симметрии, оставляющие кварки и лептоны безмассовыми, если не считать малых поправок от других взаимодействий. В общем случае, киральная симметрия — это любая симметрия, для которой безмассовые элементарные поля данной спиральности (включая комплексно сопряженные поля противоположной спиральности) реализуют комплексное представление. Действуя на вакуум произведениями элементарных полей, можно построить другие состояния с определенной спиральностью, которые также образуют комплексные представления этих симметрий. Если любое из указанных состояний представляет реальную составную частицу, то эти состояния должны быть безмассовыми, поскольку все спиральные компоненты состояния массивной частицы должны реализовывать то же представление любой симметрии, коммутирующей с вращениями, так что данная спиральная компонента частицы вместе с противоположной по знаку спиральной компонентой античастицы вместе реализуют вещественное представление. Конечно, может быть не так легко выяснить, какие из построенных таким образом состояний соответствуют реальным составным безмассовым частицам, но если это соответствие имеет место, безмассовость таких состояний естественна, поскольку для того, чтобы какие-то безмассовые частицы данной спиральности, принадлежащие комплексному представлению группы симметрии, при изменении какого-нибудь параметра теории стали массивными, их свойства симметрии должны измениться дискретным образом от комплексного к вещественному представлению.

Хотя подобные рассуждения показывают, что существуют теории, в которых естественно имеются безмассовые или очень легкие составные частицы, они не дают никаких указаний на то, когда это реально происходит. Вопрос очень интересен безотносительно к проблеме понимания кварков и лептонов как возможных составных частиц. 'Т Хофт¹⁶ предложил мощный способ ответа на этот вопрос, основанный на рассмотрении аномалий. Коротко, если фундаментальная теория обладает глобальными киральными симметриями (не нарушенными калибровочными аномалиями, а также спонтанно не нарушенными), состоящими из преобразований

над элементарными левыми фермионами (и антифермионами) спина $1/2$ χ с генераторами симметрии T_α , T_β и т. д., и если константа аномалии $\text{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma]$ этих глобальных симметрий не равна нулю, то спектр связанных состояний должен включать безмассовые частицы спина $1/2$, на левых состояниях которых те же симметрии индуцируют преобразования с генераторами $\mathcal{T}_\alpha$, $\mathcal{T}_\beta$ и т. д. и с той же константой аномалии

$$\text{tr}[\{\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta\}\mathcal{T}_\gamma] = \text{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma]. \quad (22.5.1)$$

Рассуждения 'т Хофта были следующими. Предположим, что с генераторами T_α , T_β и т. д. глобальных симметрий фундаментальной теории связаны какие-то слабовзаимодействующие калибровочные бозоны. Предположим также, что, хотя некоторые коэффициенты $D_{\alpha\beta\gamma} \neq \text{tr}[\{T_\alpha, T_\beta\}T_\gamma]$ не равны нулю, эта аномалия сокращается аномалиями, возникающими за счет других безмассовых фермионов—«наблюдателей», не ощущающих тех сил, которые удерживают в плену отдельные компоненты составных частиц. При энергиях, много меньших характерной энергетической шкалы Λ' запирающих взаимодействий, физические процессы будут описываться эффективным лагранжианом, в котором не содержатся запертые фермионы. Если симметрии с генераторами T_α , T_β и т. д. спонтанно не нарушены, то голдстоуновских бозонов нет, и единственными частицами в этом эффективном лагранжиане будут слабовзаимодействующие калибровочные бозоны и фермионы-наблюдатели, а также любые безмассовые связанные состояния запертых фермионов и сильновзаимодействующих калибровочных бозонов. Самосогласованность эффективной теории поля требует, чтобы она была свободна от аномалий, но, по предположению, фермионы-наблюдатели имеют константу аномалии, равную $-D_{\alpha\beta\gamma}$, так что должны существовать безмассовые связанные состояния, обеспечивающие равную и противоположную по знаку константу аномалии, т. е. равную константе аномалии для исходных запертых фермионов*. Заметим, что это рассуждение остается в силе независимо от того, насколько слабы

* Остается показать, что эти частицы должны иметь спин $1/2$. Мы предполагаем, что голдстоуновских бозонов здесь нет, а другие бесспино-

калибровочные взаимодействия с генераторами T_α , T_β и т. д., так что эти калибровочные бозоны и незапертые фермионы не должны быть реальными частицами для того, чтобы придти к заключению: *безмассовые связанные состояния спина 1/2 воспроизводят аномалии запертых элементарных фермионов спина 1/2, из которых они построены.*

В качестве простого примера предположим, что фундаментальная теория содержит n «ароматов» безмассовых фермионов, каждый из которых имеет как левую, так и правую компоненты в фундаментальном представлении N асимптотически свободной $SU(N)$ калибровочной группы. Потребуем, чтобы N было нечетным, так, чтобы могли существовать неплененные $SU(N)$ -нейтральные фермионные связанные состояния. Как и в квантовой хромодинамике, эта теория автоматически обладает глобальной $SU_L(n)$ и $SU_R(n)$ и $U_V(1)$ симметрией с левыми и правыми безмассовыми фермионами в представлениях $(n, 1)$ и $(1, n)$ соответственно, для которых $U_V(1)$ квантовое число имеет одинаковое значение, принимаемое за единицу. В фундаментальной теории для триплетов токов $SU(n)_L-SU(n)_L-U(1)_Y$ и $SU(n)_R-SU(n)_R-U(1)_Y$ есть неисчезающие константы аномалий, значения которых равны

$$D_{aL,bL,0} = D_{aR,bR,0} = N\delta_{ab},$$

(продолжение сноски со с. 525)

вые частицы не могут быть естественным образом безмассовыми. Предполагается, что элементарные калибровочные бозоны теории нейтральны по отношению к аномальным преобразованиям симметрии, поэтому они не могут давать вклад в аномалии. Составные частицы спина $j \geq 1$ исключаются с помощью других рассуждений.^{16a} Мы рассматриваем теорию, в которой аномальные токи можно построить как лоренцовские 4-векторные функции элементарных полей спина 1/2. Чтобы давать вклад в аномалию, эти токи должны были бы иметь не равные нулю матричные элементы между любыми безмассовыми составными частицами спина $j = 1$, что нарушало бы лоренц-инвариантность. Безмассовые составные частицы спина $j \geq 3/2$ исключаются потому, что в такой теории можно построить сохраняющийся тензор энергии-импульса, который должен был бы иметь не равные нулю матричные элементы между состояниями таких безмассовых частиц, и при $j \geq 3/2$ это также нарушало бы лоренц-инвариантность.

где a , b , и т. д. отмечают $SU(n)$ генераторы λ_a , нормированные так, что в фундаментальном n -компонентном представлении $\text{tr}\{\lambda_a\lambda_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab}$. При $n > 2$ есть также неисчезающие константы аномалий для $SU(n)_L$ – $SU(n)_L$ – $SU(n)_L$ и $SU(n)_R$ – $SU(n)_R$ – $SU(n)_R$ токов, равные

$$D_{aL,bL,0} = D_{aR,bR,0} = N\text{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}\lambda_c].$$

Мы предполагаем здесь, что $SU_L(n) \times SU_R(n) \times U(1)$ симметрия спонтанно не нарушена. Из-за эффекта пленения единственные фермионные связанные состояния в физическом спектре будут содержаться в представлениях этой симметрии, которые можно образовывать из m_L и m_R элементарных фермионов спиральности $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, соответственно, а также $\bar{m}_L$ и $\bar{m}_R$ их античастиц, причем

$$m_L + m_R - \bar{m}_L - \bar{m}_R = kN, \quad (22.5.2)$$

где k — любое положительное или отрицательное нечетное число. Следовательно, единственными неприводимыми представлениями (r, s) группы $SU(n)_L \times SU(n)_R$, с которыми мы столкнемся, будут те, для которых r — прямое произведение m_L фундаментальных представлений $SU(n)$ и $\bar{m}_L$ им комплексно сопряженных, s — прямое произведение m_R фундаментальных представлений $SU(n)$ и $\bar{m}_R$ им комплексно сопряженных, а квантовое число $U(1)_V$ равно kN , где k , m_L , $\bar{m}_L$, m_R и $\bar{m}_R$ подчиняются условию (22.5.2). Пусть $p(r, s, k)$ — кратность появления неприводимого представления (r, s) группы $SU(n)_L \times SU(n)_R$ с $U(1)_V$ квантовым числом kN среди связанных состояний со спиральностью $+\frac{1}{2}$. Тогда формула (22.5.1) принимает вид

$$\sum_{r,s,k} p(r, s, k) d_s \text{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}\mathcal{T}_c] = N\text{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}\lambda_c], \quad (22.5.3)$$

$$\sum_{r,s,k} p(r, s, k) d_s k \text{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}] = \text{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}], \quad (22.5.4)$$

где $\text{tr}^{(r)}$ обозначает след в неприводимом представлении r группы $SU(n)$, а d_s — размерность представления s группы $SU(N)$. Единственным другим ограничением на $p(r, s, k)$ является то, что эти величины должны быть положительными целыми числами.

Для комплексно сопряженного представления $(\bar{r}, \bar{s}, -k)$ любому представлению (r, s, k) группы $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ значения следов $\text{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b, \mathcal{T}_c\}]$ и $k\text{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}]$ противоположны по знаку значениям этих же следов в представлении (r, s, k) , так что условия (22.5.3) и (22.5.4) ограничивают только значения

$$l(r, s, k) \equiv p(r, s, k) - p(\bar{r}, \bar{s}, -k).$$

Напомним, что в используемых здесь обозначениях такие следы берутся по всем безмассовым связанным состояниям спиральности $+\frac{1}{2}$, включая античастицы безмассовых связанных состояний спиральности $-\frac{1}{2}$, которые преобразуются по комплексно сопряженным представлениям. Комплексно сопряженное представление к любому представлению $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ имеет значения $\text{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b, \mathcal{T}_c\}]$ и $k\text{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}]$, противоположные по знаку к значениям этих следов для са мого представления. Следовательно, мы можем просуммировать в (22.5.3) и (22.5.4) только по представлению с $U(1)_V$ квантовым числом $kN > 0$:

$$\sum_{r,s,k>0} l(r, s, k) d_s \text{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b, \mathcal{T}_c\}] = N \text{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c], \quad (22.5.5)$$

$$\sum_{r,s,k>0} l(r, s, k) d_s k \text{tr}^{(r)}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}] = \text{tr}[\{\lambda_a, \lambda_b\}], \quad (22.5.6)$$

где $l(r, s, k)$ равно кратности появления неприводимого представления (r, s) группы $SU_L(n) \times SU_R(n)$ с $U(1)_V$ квантовым числом $kN > 0$ среди связанных состояний спиральности $+\frac{1}{2}$ минус кратность появления того же представления среди связанных состояний спиральности $-\frac{1}{2}$. (Если четность не нарушается, то представление (r, s, k) должно возникать в связанных состояниях спиральности $-\frac{1}{2}$ столь же часто, как представление (s, r, k) — среди связанных состояний спиральности $+\frac{1}{2}$, так что в этом случае $l(r, s, k) = -l(s, r, k)$).

Прежде всего рассмотрим случай, когда число ароматов $n = 2$. Невозможно симметрично связать три 3-вектора, получив при этом $SU(2)$ инвариант, поэтому обе части (22.5.5) автоматически обращаются в нуль, и остается только условие (22.5.6). Фундаментальное двухкомпонентное представление $SU(2)$ содержится в произведении любого нечетного числа таких двухкомпонентных

представлений, так что всегда можно найти решение (22.5.6) с $l(r,s,k) = 0$ для всех представлений $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ с нетривиальным r , за исключением случая, когда r есть фундаментальное представление, s — тривиальное представление и $k = 1$, для которого мы полагаем $l = 1$. К сожалению, такое решение совершенно неоднозначно — существует бесконечное число способов воспроизведения аномалий лежащей в основе фундаментальной теории.

В случае произвольных n и N обычно можно найти много решений уравнений (22.5.5) и (22.5.6), но есть случаи, когда решений нет. Для таких теорий можно прийти к выводу, что $SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V$ симметрия должна быть частично или полностью спонтанно нарушена. Этот вывод имеет особенно интересные приложения к квантовой хромодинамике, поэтому сосредоточимся на случае $SU(3)$ калибровочной группы.

Конкретнее, ограничимся представлениями с $k = 1$ и $\bar{m}_L = \bar{m}_R = 0$, которые можно построить только из трех фермионов и без антифермионов. Эти представления таковы *:

- (a) r — симметричный $SU(n)$ тензор третьего ранга; s — тривиальное представление;
- (b) r — антисимметричный $SU(n)$ тензор третьего ранга; s — тривиальное представление;
- (c) r — $SU(n)$ тензор третьего ранга со смешанной симметрией; s — тривиальное представление;
- (d) r — симметричный $SU(n)$ тензор второго ранга; s — $SU(n)$ вектор;
- (e) r — антисимметричный $SU(n)$ тензор второго ранга; s — $SU(n)$ вектор;
- (f) r — $SU(n)$ вектор; s — симметричный $SU(n)$ тензор второго ранга;
- (g) r — $SU(n)$ вектор; s — антисимметричный $SU(n)$ тензор второго ранга;
- (h) r — тривиальное представление; s — симметричный $SU(n)$ тензор третьего ранга;
- (i) r — тривиальное представление; s — антисимметричный $SU(n)$ тензор третьего ранга;

* Ниже все $SU(N)$ векторы и тензоры считаются контравариантными.

(j) r — тривиальное представление; s — $SU(n)$ тензор третьего ранга со смешанной симметрией.

При $n > 2$ формулы (22.5.5) и (22.5.6) принимают вид *

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n+3)(n+6)l_a + \frac{1}{2}(n-3)(n-6)l_b + (n^2-9)l_c + n(n+4)l_d \\ & + n(n-4)l_e + \frac{1}{2}n^2(n+1)l_f + \frac{1}{2}n^2(n-1)l_g = 3 \end{aligned} \quad (22.5.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n+2)(n+3)l_a + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)l_b + (n^2-3)l_c + n(n+2)l_d \\ & + n(n-2)l_e + \frac{1}{2}n(n+1)l_f + \frac{1}{2}n(n-1)l_g = 1. \end{aligned} \quad (22.5.8)$$

Не составляет труда удовлетворить условию (22.5.7), но заметим, что если n кратно трем, то для всех значений l каждое слагаемое в левой части формулы (22.5.8) также кратно трем, и удовлетворить этому условию невозможно. В частности, мы приходим к выводу, что $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ симметрия квантовой хромодинамики с тремя сортами безмассовых кварков должна быть спонтанно нарушена. Это результат не ограничивается представлениями (a)–(j) и применим к любому представлению $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$, которое можно построить из нейтральных по цвету комбинаций кварков и антикварков.

* * *

Если не считать частных случаев, вроде калибровочной группы $SU(3)$ с $n = 3$ элементарными фермионными $SU(3)$ триплетными, условие подбора аномалий 'т Хофта не слишком ограничительно.

* В работе ¹⁶ 'т Хофт предположил, что четность спонтанно не нарушается, поэтому он привел эти формулы для случая, когда $l_a = -l_h$, $l_b = -l_i$, $l_c = -l_j$, $l_d = -l_f$ и $l_e = -l_g$. Как мы видим, основной вывод не зависит от сохранения четности.

В общем случае оно допускает большое количество безмассовых связанных состояний при ненарушенной киральной симметрии. 'т Хофт предложил также *условие расщепления*, которое требует, что когда один или более сортов элементарных фермионов становятся очень тяжелыми, не должно быть ненарушенных киральных симметрий, препятствующих частицам, содержащим тяжелые элементарные фермионы, приобретать массы. Например, в случае $SU(3)$ цветовой калибровочной группы, если мы придадим одному из n сортов кварков большую массу, то те трехфермионные связанные состояния, которые содержат единственный массивный кварк, будут реализовывать представления (r', s') группы $SU(n-1) \times SU(n-1)$ следующих типов:

- (**v**) r' — симметричный $SU(n-1)$ тензор второго ранга; s' — тривиальное представление;
- (**w**) r' — антисимметричный $SU(n-1)$ тензор второго ранга; s' — тривиальное представление;
- (**x**) r' и s' — $SU(n)$ векторы;
- (**y**) r' — тривиальное представление; s' — симметричный $SU(n-1)$ тензор второго ранга;
- (**z**) r' — тривиальное представление; s' — антисимметричный $SU(n-1)$ тензор второго ранга.

Для того, чтобы трехфермионное массовое состояние приобрело большую массу, необходимо, чтобы $l'(r', s') = 0$, где $l'(r', s')$ — кратность появления неприводимого представления (r', s') среди связанных состояний спиральности $+\frac{1}{2}$ минус кратность появления того же представления среди связанных состояний спиральности $-\frac{1}{2}$. Изучив список трехфермионных представлений (a)–(j) группы $SU(n) \times SU(n)$, чтобы увидеть, какие представления $SU(n-1) \times SU(n-1)$ они включают, мы получаем, что условие расщепления 'т Хофта требует, чтобы *

* В сохраняющем четность случае, изученном 'т Хофтом, четвертое и пятое уравнения тождественны первому и второму, а третье тождественно обращается в нуль.

$$\begin{aligned}
0 &= l'_v = l_a + l_c + l_d, \\
0 &= l'_w = l_b + l_c + l_e, \\
0 &= l'_x = l_f + l_g + l_d + l_e, \\
0 &= l'_y = l_f + l_h + l_j, \\
0 &= l'_z = l_g + l_i + l_j.
\end{aligned} \tag{22.5.9}$$

К сожалению, в большинстве случаев все же остается бесконечное число решений, хотя не существует решений, в которых числа l — целые и независимые от n .

Условие расщепления кажется вполне приемлемым, однако его использование 'т Хофтом было поставлено под вопрос¹⁷ на том основании, что когда одна или более фермионные массы увеличиваются, обычно возникают фазовые переходы, изменяющие массовый спектр по сравнению с тем, который был бы при малых массах фермионов. Существует более сильное условие, известное как *жесткое массовое условие*, которое требует, что когда один или более сорт элементарных фермионов приобретает любую массу, не должно быть ненарушенных киральных симметрий, препятствующих приобретению каких-то масс составным частицам, содержащим эти массивные элементарные фермионы¹⁷. Если жесткое массовое условие правильно, оно приводит к ряду следствий, таких как описанные 'т Хофтом условия (22.5.9), которые ни при каких обстоятельствах не нарушаются фазовыми переходами.

Легко построить нереалистичные модели, в которых жесткое массовое условие нарушается, например, теории со спонтанно нарушенными *некиральными* симметриями, приводящими к безмассовым голдстоуновским бозонам, состоящим из массивных фермионов¹⁷. (В этих моделях с ростом масс фермионов также возникают фазовые переходы, которые сводят на нет выводы 'т Хофта, полученные из условия расщепления.) Однако, как показано в обсуждавшейся в разделе 19.9 работе Вафы и Виттена, в разных более реалистичных КХД-подобных теориях некиральные симметрии не могут спонтанно нарушаться, поэтому сказанное выше не следует рассматривать как серьезное возражение против жесткого массового условия.

22.6. Условия совместности

Численный коэффициент, возникающий в аномалии для любой симметрии, зависит от того, какие частицы материи содержатся в теории. С другой стороны, форма аномалии определяется условиями совместности, которые впервые были получены Вессом и Зумино в 1971 г.

Даже в тех случаях, когда нас интересуют аномалии в токах глобальных симметрий, для вывода условий совместности удобно представить, что все токи симметрий связаны с калибровочными полями, которые в случае неабелевых симметрий связаны, кроме того, друг с другом, таким образом, что эти симметрии становятся локальными симметриями плотности лагранжиана. Всегда можно вернуться к глобальной симметрии, считая, что соответствующая калибровочная константа связи становится бесконечно малой. Если не принимать во внимание аномалий, то эффективное действие $\Gamma[A]$ в фоновом калибровочном поле $A_{\alpha\mu}(x)$ будет в таком формализме инвариантным относительно инфинитезимальных преобразований $A_{\beta\mu}(y) \rightarrow A_{\beta\mu}(y) + i[d^4x \epsilon_\alpha(x) \mathcal{F}_\alpha(x) A_{\beta\mu}(y)]$ калибровочного поля, где с целью воспроизведения преобразования (15.1.9) следует взять

$$-i\mathcal{F}_\alpha(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu}(x) \frac{\delta}{\delta A_{\gamma\mu}(x)}. \quad (22.6.1)$$

Если учесть аномалии, то теперь $\mathcal{F}_\alpha(x)$ уже не обращает $\Gamma[A]$ в нуль, а вместо этого

$$\mathcal{F}_\alpha(x) \Gamma[A] = G_\alpha[x; A], \quad (22.6.2)$$

где $G_\alpha[x; A]$ представляет эффект аномалии. Формулу (22.6.2) можно также записать как формулу для ковариантной дивергенции среднего значения тока:

$$D_\mu \langle J_\alpha^\mu(x) \rangle = -iG_\alpha[x; A], \quad (22.6.3)$$

где

$$\langle J_\alpha^\mu(x) \rangle \equiv \frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)} \Gamma[A] \quad (22.6.4)$$

а D_μ — калибровочно инвариантная производная (15.1.10), взятая в присоединенном представлении с $(t_\beta)_{\gamma\alpha} = -iC_{\alpha\beta\gamma}$

Условия совместности Весса–Зумино следуют из коммутационных соотношений *

$$[\mathcal{T}_\alpha(x), \mathcal{T}_\beta(y)] = iC_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)\mathcal{T}_\gamma(x). \quad (22.6.5)$$

Из формул (22.6.2) и (22.6.5) выводим общее условие совместности

$$\mathcal{T}_\alpha(x)G_\beta[y; A] - \mathcal{T}_\beta(y)G_\alpha[x; A] = iC_{\alpha\beta\gamma}\delta^4(x-y)G_\gamma[y; A]. \quad (22.6.6)$$

Эти условия были впервые выведены Вессом и Зумино для киральной $SU(3) \times SU(3)$ симметрии сильных взаимодействий — случая, представляющего не только физический, но и исторический интерес. Здесь генераторы $\mathcal{T}_\alpha(x)$, действующие на калибровочные поля, состоят из генераторов с положительной четностью $\mathcal{Y}_a(x)$, определенных формулой (22.3.31), и генераторов $\mathcal{J}_a(x)$ с отрицательной четностью, определенных в (22.3.32) **. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\mathcal{Y}_a(x), \mathcal{Y}_b(y)] = i\delta^4(x-y)f_{abc}\mathcal{Y}_c(x),$$

$$[\mathcal{Y}_a(x), \mathcal{J}_b(y)] = i\delta^4(x-y)f_{abc}\mathcal{J}_c(x),$$

$$[\mathcal{J}_a(x), \mathcal{J}_b(y)] = i\delta^4(x-y)f_{abc}\mathcal{Y}_c(x),$$

где f_{abc} — структурные константы $SU(3)$. Так как $SU(3)$ подгруппа, генерируемая операторами $\mathcal{Y}_a$, спонтанно не нарушена, удобно

* Множитель $-i$ был включен в (22.6.1) для того, чтобы обеспечить стандартный множитель $+i$, сопровождающий структурную константу $C_{\alpha\beta\gamma}$ в этом коммутационном соотношении. Напоминание: мы используем базис алгебр Ли, в котором структурные константы полностью антисимметричны, и поэтому не должны различать верхние и нижние калибровочные индексы.

** Еще одно напоминание: как отмечалось в разделе 22.3, используемые здесь генераторы $\mathcal{J}_a^*$ и $\mathcal{Y}_a$ в работе [8] назывались, соответственно, Y_a и X_a .

рассматривать интегрирование по импульсам фермионов таким образом, чтобы сохранить инвариантность относительно генерируемых этими операторами калибровочных преобразований, так что

$$\mathcal{Y}_a(x)\Gamma = 0,$$

При этом остается ненулевая аномалия

$$\mathcal{X}_a(x)\Gamma = G_a(x).$$

Поэтому нетривиальные условия совместности принимают вид

$$\mathcal{Y}_a(x)G_b(y) = i\delta^4(x-y)f_{abc}G_c(x)$$

и

$$\mathcal{X}_a(x)G_b(y) - \mathcal{X}_b(x)G_a(y) = 0.$$

Первое из них просто утверждает, что $G_a(x)$ преобразуется как октет относительно обычных $SU(3)$ преобразований. Второе условие накладывает другие сильные ограничения на $G_a(x)$. Читатель может проверить, что это условие удовлетворяется при подстановке формулы Бардина (22.3.34) для $G_a(x)$. Мы не будем входить в детали, а вместо этого рассмотрим в качестве иллюстрации произвольную калибровочную теорию, в которой все токи рассматриваются симметричным образом. Для этого случая в разделе 22.3 была приведена формула (22.3.8) для аномалии, но в ней не были выведены члены более высокого, чем второй, порядка по калибровочным полям. Здесь мы покажем, что эти члены диктуются условиями совместности (22.6.6).

Для этого, а также для возможных последующих обобщений, очень удобно переформулировать систему условий совместности Весса–Зумино как условие инвариантности относительно описанных в разделе 15.7 БРСТ преобразований. Введем гостовское поле ω_α и определим нильпотентный БРСТ оператор для произвольной калибровочной теории равенствами

$$sA_{\alpha\mu} = \partial_\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma, \quad (22.6.7)$$

$$s\omega_\alpha = -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma, \quad (22.6.8)$$

понимая при этом, что s удовлетворяет дистрибутивному закону $s(AB) = (sA)B \pm A(sB)$, причем знак отрицателен, если A — фермионная величина типа ω_α , и положителен во всех остальных случаях. Вместо функции аномалии $G_\alpha[x; A]$ будем работать с функционалом

$$G[\omega, A] = \int \omega_\alpha(x) G_\alpha[x; A] d^4x. \quad (22.6.9)$$

Тогда (имея в виду, что ω_α — фермионная величина)

$$\begin{aligned} sG[\omega, A] &= -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma} \int d^4x \omega_\beta(x) \omega_\gamma(x) G_\alpha[x; A] \\ &\quad - \int d^4x \omega_\alpha(x) \int d^4y \left[\frac{\partial \omega_\beta(y)}{\partial y^\mu} + C_{\beta\gamma\delta} A_{\gamma\mu}(y) \omega_\delta(y) \right] \frac{\delta G_\alpha[x; A]}{\delta A_{\beta\mu}(y)} \\ &= \int d^4x \int d^4y \omega_\alpha(x) \omega_\beta(y) \left[-\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma} \delta^4(x-y) G_\gamma[x; A] \right. \\ &\quad \left. + i\mathcal{T}_\beta(y) G_\alpha[x; A] \right]. \end{aligned}$$

Так как поля гостов антикоммутируют друг с другом, это можно записать в виде

$$\begin{aligned} sG[\omega, A] &= -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \omega_\alpha(x) \omega_\beta(y) \\ &\quad \times \left[iC_{\alpha\beta\gamma} \delta^4(x-y) G_\gamma[x; A] + \mathcal{T}_\beta(y) G_\alpha[x; A] - \mathcal{T}_\alpha(x) G_\beta[y; A] \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что условие совместности (22.6.6) будет выполнено, если и только если для всех гостовских полей $\omega_\alpha(x)$ $G[\omega; A]$ является БРСТ инвариантом:

$$sG[\omega, A] = 0. \quad (22.6.10)$$

Рассмотрим теперь возможность, что аномалия $G[\omega; A]$ может быть записана как БРСТ оператор s , действующий на локальный функционал $F[A]$:

$$G[\omega, A] = sF[A]. \quad (22.6.11)$$

(Заметим, что функционал F с необходимостью не зависит от полей духов, поскольку оператор s добавляет один множитель духового поля, а аномальный функционал G уже линеен по духовому полю.) Оператор БРСТ удовлетворяет условию $s^2 = 0$, поэтому такая аномалия будет удовлетворять условию совместности $sG = 0$. Если $F[A]$ — локальный функционал* калибровочного поля, то его можно вычесть из действия, тем самым сократив аномалию. Это же верно для любого слагаемого в аномалии, которое может быть записано как БРСТ оператор s , действующий на локальный функционал; такое слагаемое удовлетворяет условию совместности с собой, и может быть сокращено путем добавления локального члена в действие. Таким образом, интересующие нас возможные аномалии являются локальными функционалами $G[\omega; A]$ с гостовским числом единица, удовлетворяющие условию совместности (22.6.10), с точностью до слагаемых, которые можно выразить как действие s на некоторый локальный функционал с гостовским числом нуль. В согласии с общепринятой терминологией для нильпотентных операторов, классы эквивалентности таких функционалов образуют так называемую кохомологию оператора s с гостовским числом единица.

Все это можно выразить и с помощью самих локальных плотностей. Мы можем записать аномалию (или любое слагаемое в аномалии) как $G = \int d^4x \mathcal{G}(x)$, где $\mathcal{G}(x)$ — степенной ряд по калибровочным и духовым полям и их производным в пространственно-временной точке x . Тогда условие $sG = 0$ эквивалентно утверждению, что для некоторой функции $\mathcal{J}^\mu(x)$ полей и их производных

$$s\mathcal{G}(x) = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x). \quad (22.6.12)$$

Аналогично, те слагаемые в $\mathcal{G}$, которые могут быть сокращены добавлением локальных членов в действие, имеют вид $s\mathcal{F}$ с точностью до возможных производных. Таким образом, интересующие нас аномалии являются локальными функциями с гостовским числом единица, удовлетворяющими условию совместности (22.6.12),

* Под локальным функционалом подразумевается интеграл от локальной функции, т. е. функции полей и их производных в данной точке.

взятыми с точностью до слагаемых, которые могут быть записаны как действие s на некоторый взятый с точностью до производных локальный функционал с гостовским числом нуль. Это называется когомологией оператора s с гостовским числом единица в пространстве локальных функций, взятых с точностью до производных, и обозначается $H^1(s|d)$.

Для нахождения когомологии БРСТ оператора s и последующего вывода формы аномалии в произвольных калибровочных теориях были использованы алгебраические методы¹⁹. В этом подходе неизвестными остаются только постоянные коэффициенты, зависящие от того, какие поля материи входят в теорию, и подлежащие расчету методами разделов 22.2 или 22.3. Так как мы уже вычислили слагаемые в аномалии второго порядка по калибровочным полям для произвольных калибровочных теорий, включая постоянные коэффициенты, используем теперь условие совместности (22.6.12) для вычисления слагаемых высших порядков по полям.

В разделе 22.3 было показано, что когда все токи рассматриваются симметрично, слагаемые второго порядка по калибровочным полям составляют одну треть от выражения (22.3.26). Это оператор массовой размерности четыре, и поскольку условие совместности Весса–Зумино (22.6.6) связывает только операторы одинаковой размерности, для того, чтобы удовлетворить этому условию, нужно добавить только такие члены более высокого порядка по калибровочному полю, которые имеют такую же размерность. Поэтому мы ищем решение условий совместности в (не обязательно единственном) виде

$$G_\alpha = i \left[\left\langle \partial_\mu J_\alpha^\mu \right\rangle \right]_{\text{аном}} = -\frac{i}{24\pi^2} \varepsilon^{\kappa\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ T_\alpha \left[\partial_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho + ic_1 \partial_\kappa A_\nu A_\lambda A_\rho + ic_2 A_\kappa \partial_\nu A_\lambda A_\rho + ic_3 A_\kappa A_\nu \partial_\lambda A_\rho - c_4 A_\kappa A_\nu A_\lambda A_\rho \right] \right\}, \quad (22.6.13)$$

где $A_\mu \neq A_{\alpha\mu} T_\alpha$, а c_i — константы, которые нужно определить. Чтобы значительно сберечь силы, удобно переписать это выражение на языке дифференциальных форм (см. раздел 8.8). Введем множество s -числовых параметров dx^μ , которые считаются антикоммутирующими сами с собой и всеми фермионными полями, такими, как поля духов ω_α . Тогда dx^μ антикоммутируют и с БРСТ

оператором s . Так как $dx^\kappa dx^\nu dx^\lambda dx^\rho$ — полностью антисимметричная величина, ее можно записать как

$$dx^\kappa dx^\nu dx^\lambda dx^\rho = \varepsilon^{\kappa\nu\lambda\rho} d^4x, \quad d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (22.6.14)$$

Введем также внешнюю производную

$$d \equiv dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

Поскольку производные коммутируют, внешняя производная нильпотентна и антикоммутирует с s :

$$d^2 = 0, \quad ds + sd = 0. \quad (22.6.15)$$

Наконец, вводим антикоммутирующие величины

$$A \equiv iA_\mu dx^\mu = iA_{\alpha\mu} T_\alpha dx^\mu, \quad \omega \equiv i\omega_\alpha T_\alpha. \quad (22.6.16)$$

В этих обозначениях выражение (22.6.13) принимает вид

$$G[\omega, A] = \frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr} \left\{ \omega \left[(dA)^2 + c_1 (dA) A^2 + c_2 A (dA) A + c_3 A^2 (dA) + c_4 A^4 \right] \right\}. \quad (22.6.17)$$

Для того, чтобы удовлетворить условию совместности (22.6.10), заметим, что правила БРСТ преобразования (22.6.7) и (22.6.8) можно записать как

$$sA = -d\omega + \{A, \omega\}, \quad (22.6.18)$$

$$s\omega = \omega^2. \quad (22.6.19)$$

Далее, БРСТ преобразование последнего члена в формуле (22.6.17) имеет вид

$$\begin{aligned}
s\text{Tr}[\omega A^4] &= \text{Tr}[\omega^2 A^4 - \omega\{A, \omega\}A^3 + \omega A\{A, \omega\}A^2 \\
&\quad - \omega A^2\{A, \omega\}A + \omega A^3\{A, \omega\}] + \text{слагаемые с } \omega d\omega A^3 \\
&= \text{Tr}[\omega^2 A^4] + \text{слагаемые с } \omega d\omega A^3.
\end{aligned}$$

Других вкладов в sG , пропорциональных $\text{Tr}[\omega^2 A^4]$, нет, поэтому условие совместности (22.6.10) может быть удовлетворено только, если $c_4 = 0$. Прямое вычисление с учетом $c_4 = 0$ приводит к выражению

$$\begin{aligned}
sG &= \frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr} \{ -(dA)^2 \omega^2 + \omega d\omega AdA - d\omega \omega dAA \\
&\quad - A\omega dAd\omega - \omega Ad\omega dA \\
&\quad + c_1 [\omega dAd\omega A - \omega dAA d\omega] \\
&\quad + c_2 [\omega d\omega dAA - \omega AdAd\omega] \\
&\quad + c_3 [\omega d\omega AdA - \omega Ad\omega dA] \\
&\quad - c_1 [\omega Ad\omega A^2 + \omega d\omega A^3 + \omega dAA^2 \omega] \\
&\quad - c_2 [\omega A^2 d\omega A - \omega Ad\omega A^2 + \omega AdAd\omega] \\
&\quad - c_3 [-\omega A^3 d\omega + \omega A^2 d\omega A + \omega A^2 dA\omega] \}.
\end{aligned}$$

Нам не нужно предполагать, что подынтегральное выражение обращается в нуль. Достаточно считать, что оно есть производная некоторой локальной функции, так что интеграл от нее равен нулю. Это условие должно по-отдельности удовлетворяться для слагаемых, содержащих как две, так и одну производные, поскольку между слагаемыми с разным числом производных никакое сокращение невозможно.

Нетрудно проверить, что слагаемые в подынтегральном выражении, содержащие только одну производную, имеют вид $d\mathcal{F}$, если принять $c_1 = -c_2 = +c_3 \neq c$. Оставшиеся слагаемые собираются в полную производную, если взять $c = -1/2$, что подтверждает ранее упомянутый результат (22.3.38). Часто полученный результат записывают более компактно в виде

$$\begin{aligned}
G[\omega, A] &= \frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr} \left\{ \omega d \left[AdA - \frac{1}{2} A^3 \right] \right\} \\
&= \frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr} \left\{ \omega d \left[AF + \frac{1}{2} A^3 \right] \right\}, \quad (22.6.20)
\end{aligned}$$

где F — матричнозначная два-форма напряженности поля

$$F \equiv \frac{1}{2} it_\alpha F_{\alpha\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dA - A^2. \quad (22.6.21)$$

Аномалия не обязательно должна быть записана в форме (22.6.13), так что выражение (22.6.20) не является единственным результатом для $G[\omega, A]$. Приведенные в следующем разделе результаты показывают, что для любой подгруппы H группы G , для которой $\text{Tr}\{t_i\{t_j, t_k\}\} = 0$ для всех генераторов H , в действие можно добавить локальные слагаемые, так, что аномалия G_i исчезает, когда t_i — любой генератор H .

Для построения решения условий совместности существует элегантный алгебраический прием, известный как *уравнения спуска Сторы–Зумино*.^{18a} Описание этого метода в пространстве-времени любого четного числа измерений ничуть не сложнее, чем в четырехмерном пространстве-времени, так что выберем размерность пространства-времени равным $2n$. Для начала следует представить, что к $2n$ координатам пространства и времени добавлены еще по меньшей мере две переменные, так, чтобы придать смысл $(2n+2)$ -форме $\text{Tr}F^{n+1}$. Заметим, что

$$dF = -d(A^2) = -(dA)A + A(dA) = [A, F], \quad (22.6.22)$$

так что след $\text{Tr}F^{n+1}$ замкнут:

$$d\text{Tr}F^{n+1} = (n+1)\text{Tr}\{(dF)F^n\} = \text{Tr}\{[A, F^{n+1}]\} = 0. \quad (22.6.23)$$

Если только расширенное пространство-время односвязно, то согласно теореме Пуанкаре форма $\text{Tr}\{F^{n+1}\}$ точна, в том смысле, что существует $(2n+1)$ -форма Ω_{2n+1} (известная как *форма Черна–Саймонса*), для которой

$$\text{Tr}\{F^{n+1}\} = d\Omega_{2n+1}. \quad (22.6.24)$$

Далее, $\text{Tr}\{F^{n+1}\}$ явно калибровочно-инвариантна и зависит только от калибровочного поля, так что она и БРСТ инвариантна:

$$s\text{Tr}[F^{n+1}] = 0. \quad (22.6.25)$$

Считается, что «дифференциалы» dx^μ антикоммутируют с фермионными полями, как духовое поле ω_α , так что оператор d антикоммутирует с оператором s , определенным формулами (22.6.7) и (22.6.8):

$$sd + ds = 0.$$

Поскольку оператор s нильпотентен, отсюда следует, что форма $s\Omega_{2n+1}$ также замкнута:

$$d(s\Omega_{2n+1}) = -s\text{Tr}\{F^{n+1}\} = 0.$$

Вновь применяя теорему Пуанкаре, получаем, что должна существовать $2n$ -форма Ω_{2n}^1 первого порядка по ω_α , для которой

$$s\Omega_{2n+1} = d\Omega_{2n}^1. \quad (22.6.26)$$

Кроме того, $d(s\Omega_{2n}^1) = -s^2\Omega_{2n+1} = 0$, поэтому существует $(2n-1)$ -форма Ω_{2n-1}^2 второго порядка по духовому полю, для которой

$$s\Omega_{2n}^1 = d\Omega_{2n-1}^2. \quad (22.6.27)$$

Отсюда следует, что даже хотя сама форма Ω_{2n}^1 не инвариантна относительно БРСТ преобразований, интеграл от Ω_{2n}^1 по $2n$ -мерному пространству-времени есть БРСТ инвариант:

$$s\int_{\text{пространство-время}} \Omega_{2n}^1 = 0, \quad (22.6.28)$$

Таким образом, мы находим кандидата $\int \Omega_{2n}^1$ на аномальный функционал $G[\omega, A]$, интегрируя два дифференциальных уравнения первого порядка $d\Omega_{2n+1} = \text{Tr}\{F^{n+1}\}$ и $d\Omega_{2n}^1 = s\Omega_{2n+1}$. Произвольные (не единственные) решения этих уравнений имеют вид

$$\Omega_{2n+1} = (n+1) \int_0^1 dt \text{Tr}\{AF_t^n\}, \quad (22.6.29)$$

$$\Omega_{2n}^1 = -(n+1) \sum_{r=0}^{n-1} \int_0^1 dt (1-t) \text{Tr} \{ \omega d(F_t^r A F_t^{n-1-r}) \}, \quad (22.6.30)$$

где $F_t \equiv tF + (t-t^2)A^2$. Вычисление интеграла (22.6.30) показывает, что в случае четырех пространственно-временных измерений формула (22.6.20) дает для $G[\omega, A]$ результат, пропорциональный $\int \Omega_4^1$.

Можно продолжить этот спуск и вывести ряд других полезных результатов. В частности, из формулы (22.6.27) и нильпотентности s следует, что $d(s\Omega_{2n-1}^2) = 0$, так что по теореме Пуанкаре $s\Omega_{2n-1}^2$ имеет вид $d\Omega_{2n-2}^3$, и интеграл от Ω_{2n-1}^2 по $2n-1$ координатам пространства является БРСТ инвариантом:

$$s \int_{\text{пространство}} \Omega_{2n-1}^2 = 0. \quad (22.6.31)$$

Такие БРСТ инвариантные функционалы второго порядка по гостовским полям являются кандидатами ^{18b} в так называемые *швингеровские члены* ^{18c}.

Интересующие нас сейчас швингеровские члены возникают как аномальные слагаемые $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в коммутационных соотношениях временных компонент двух токов симметрии при равных временах:

$$[J_\alpha^0(\mathbf{x}, t), J_\beta^0(\mathbf{y}, t)] = iC_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma^0(\mathbf{x}, t) \delta^{2n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (22.6.32)$$

(В этом разделе все операторы берутся в один и тот же момент времени t , который мы ниже не будем указывать явно.) Из антисимметрии коммутатора имеем $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -S_{\beta\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, так что вся информация о $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ содержится в функционале

$$S[\omega] \equiv \int d^{2n-1}x d^{2n-1}y \omega_\alpha(\mathbf{x}) \omega_\beta(\mathbf{y}) S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (22.6.33)$$

Заметим, что в общем случае $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ зависит от различных полей материи и калибровочных полей, так что $S[\omega]$ вообще говоря зависит как от этих полей, так и от поля духов $\omega_\alpha(x)$.

Образуя коммутатор выражения (22.6.32) с третьим током $J_\gamma^0(\mathbf{z})$, сворачивая с $\omega_\alpha(\mathbf{x})\omega_\beta(\mathbf{y})\omega_\gamma(\mathbf{z})$, интегрируя по $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и используя тождество Якоби, находим:

Действие БРСТ оператора s на функционалы от полей материи и калибровочных полей типа $S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ эквивалентно калибровочному преобразованию с параметром преобразования ω_α , так что

$$sS_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i \left[\int d^{2n-1}z \, \omega_\gamma(\mathbf{z}) J_\gamma^0(\mathbf{z}), S_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right].$$

Вспоминая формулу (22.6.8), находим, что функционал (22.6.33) является БРСТ инвариантом:

$$sS[\omega] = 0. \quad (22.6.34)$$

Кроме того, добавляя в токи определенные слагаемые, можно изменить $S[\omega]$ на слагаемые вида $sT[\omega]$, так что множество возможных швингеровских членов, которые нельзя устранить добавлением слагаемых в токи, дается кохомологией БРСТ оператора с духовым числом два, т. е. БРСТ инвариантными функционалами S второго порядка по духовому полю, которые сами не имеют вида sT . Из выражения (22.6.31) следует, что кандидатом на такой функционал является $\int \Omega_{2n-1}^2$.

* * *

Проведенный до сих пор в этом разделе анализ аномалий, строго говоря, применим только к аномалиям в однопетлевом приближении. Правда, теория с однопетлевыми аномалиями в токах, с которыми связаны квантовые калибровочные поля, несостоятельна, и поэтому не нуждается в исследовании в высших порядках. Однако обратное неверно: если теория с квантовыми калибровочными полями свободна от аномалий в однопетлевом приближении, необходимо еще показать, что аномалии отсутствуют и в высших порядках. Кроме того, нет ничего противоречивого в теориях с аномалиями в глобальных симметриях, например, в киральных симметриях квантовой хромодинамики, и в этих случаях мы должны установить, влияют ли на эти аномалии поправки высших порядков.

Поскольку БРСТ преобразования действуют на поля нелинейно, то даже в отсутствие аномалий у нас нет оснований полагать, что эффективное действие $G[\omega, A]$ будет БРСТ инвариантным вне рамок однопетлевого приближения. Как мы видели в разделе 17.1,

вне этих рамок следует рассматривать функционалы не только от калибровочных и духовых полей, но и от их антиполей. (Введение антиполей иногда важно и в однопетлевом приближении, но по другой причине: локальный функционал только от полей, удовлетворяющий условиям совместности Весса–Зумино и не выражаемый как БРСТ-оператор, действующий на локальный функционал только от полей, не будет кандидатом на аномалию, если его *можно* выразить как антискобку действия с локальным функционалом полей и антиполей, поскольку в этом случае аномалию можно сократить путем вычитания такого слагаемого из действия. Это соответствует изменению действия полей одновременно с изменением калибровочной симметрии, которой подчиняется это действие.)

Оказывается, что изучение аномалий с антиполями, включенными в действие, также может быть выражено на языке когомологий^{20, 21}. Анализ этой проблемы основан на принадлежащей Зинн–Жюстену версии (17.1.10) уравнения, которое Баталин и Вилковский назвали мастер-уравнением. В отсутствие аномалий $(G, G) = 0$, так что в однопетлевом приближении $(S, G_1) = 0$, где S — действие нулевого порядка, а G_1 — однопетлевой вклад в квантовое эффективное действие. При наличии аномалий мы вместо этого имеем

$$(S, G_1) = G_1, \quad (22.6.35)$$

где G_1 — некоторый функционал полей и антиполей, который должен иметь гостовское число единица, т. к. S и G_1 имеют гостовское число нуль. Предполагается, что действие удовлетворяет классическому мастер-уравнению $(S, S) = 0$, так что антискобочная операция в формуле (22.6.35) нильпотентна и поэтому $(S, G_1) = 0$. Однако, если для какого-то локального функционала F_1 с гостовским числом нуль $G_1 = (S, F_1)$, мы можем сократить аномалию в однопетлевом порядке, вычитая слагаемое F_1 (рассматриваемое как квантовая поправка порядка $\hbar$) из действия, а следовательно, из G_1 . (Конечно, $G_1 = (S, G_1)$, но при наличии безмассовых частиц G_1 не является локальным функционалом.) Таким образом, кандидаты в аномалии — такие локальные функционалы G_1 с духовым числом единица, которые замкнуты в том смысле, что они удовлетворяют

условию $(S, G_1) = 0$, но не точны, т. е. не могут быть записаны в виде $G_1 = (S, F_1)$ для локальных функционалов F_1 с духовым числом единица. Иными словами, кандидаты в аномалии соответствуют когомологии антискобочной операции $X \mapsto (S, X)$ при гостовском числе единица на пространство локальных функционалов полей и антиполей.

Это похоже на полученный выше в данном разделе результат, но с заменой БРСТ-оператора s на антискобку $(S, \dots)$. Если в условии (22.6.35) положить антиполя равными нулю и вспомнить, что $(\delta\Gamma_1/\delta\chi^n)_{\chi^\dagger=0} = s\chi^n$, получим, что это условие, на самом деле, приводит к условию $s\Gamma_1 = 0$, которое, как мы видели, эквивалентно требованию, что G_1 удовлетворяет условию совместности Весса–Зумино. Однако в определенном смысле анализ, основанный на условии (22.6.35), можно распространить на высшие порядки.

Чтобы увидеть это, предположим, что антискобочная операция $X \mapsto (S, X)$ имеет пустую когомологию при духовом числе единица в пространстве локальных функционалов, и что мы переопределили действие описанным выше способом так, чтобы $G_1 = (S, \Gamma_1) = 0$. Аномалия, которая нарушает мастер-уравнение $(\Gamma, \Gamma) = 0$ в двухпетлевом приближении, представляется функцией G_2 , для которой

$$(\Gamma_1, \Gamma_1) + 2(S, \Gamma_2) = G_2.$$

Однако, т. к. $(S, \Gamma_1) = 0$ и $(S, S) = 0$, любая такая функция G_2 будет удовлетворять уравнению $(S, G_2) = 0$. С учетом предположения о пустой когомологии, это означает, что G_2 можно выразить как $G_2 = (S, F_2)$, где F_2 — локальный функционал с гостовским числом нуль, т. е. в этом порядке аномалию можно сократить, вычитая F_2 из действия.

Это рассуждение можно распространить на все порядки. Предположим, мы сократили аномалии в мастер-уравнении вплоть до порядка $N - 1$, так что

$$0 = G_M = \sum_{L=0}^M (\Gamma_L, \Gamma_{M-L}) = 2(S, \Gamma_M) + \sum_{L=1}^{M-1} (\Gamma_L, \Gamma_{M-L}),$$

для всех $M < N$. Аналогично, член N -го порядка в антискобке (Γ, Γ) равен

$$G_N = 2(S, \Gamma_N) + \sum_{M=1}^{N-1} (\Gamma_M, \Gamma_{N-M}),$$

так что, используя тождество Якоби (15.9.21) (в котором для трех бозонных операторов берутся все знаки $-$) и приведенную выше формулу для (S, Γ_M) , находим

$$(S, G_N) = -2 \sum_{M=1}^{N-1} ((S, \Gamma_M), \Gamma_{N-M}) = \sum_{M=1}^{N-1} \sum_{L=1}^{M-1} ((\Gamma_L, \Gamma_{M-L}), \Gamma_{N-M}).$$

Это можно записать в более симметричной форме:

$$(S, G_N) = - \sum_{M_1=1}^{N-2} \sum_{M_2=1}^{N-2} \sum_{M_3=1}^{N-2} \delta_{N, M_1+M_2+M_3} (\Gamma_{M_1}, (\Gamma_{M_2}, \Gamma_{M_3})).$$

Так как пределы изменения M_1 , M_2 и M_3 одинаковы, можно записать двойную антискобку в этой сумме как сумму по $3!$ перестановкам по этим индексам, которая обращается в нуль в силу тождества Якоби (15.9.21). Так мы приходим к выводу, что $(S, G_N) = 0$. Если, как и предполагалось, кохомология пуста, отсюда следует, что существует локальный функционал F_N , для которого $G_N = (S, F_N)$. Поэтому, вычитая F_N из действия, можно сократить аномалию во всех порядках N , что и требовалось доказать.

Используя чисто алгебраические методы, Барнич, Брандт и Энно²² сумели показать, что для янг-миллсовских теорий (в четырех пространственно-временных измерениях), основанных на полупростых калибровочных группах, кохомология антискобочной операции $X \mapsto (S, X)$ (при гостовском числе единица на пространстве локальных функционалов) состоит исключительно из линейной комбинации членов вида (22.6.20), по одному на каждую простую подгруппу калибровочной группы, с неизвестными коэффициентами.* Отсюда, без всяких ссылок на то, какие поля материи содержит

* Нет нужды конкретизировать представление калибровочной алгебры, в котором должен вычисляться след в формуле (22.6.20), поскольку этот след одинаков с точностью до постоянного коэффициента для всех представлений простой алгебры Ли,^{19a} и, в любом случае, постоянный коэффициент не определяется этой кохомологической теоремой.

теория, следует, что в однопетлевом порядке, когда аномалия G_1 автоматически удовлетворяет условию $(S, G_1) = 0$, аномалия для полупростой калибровочной группы должна быть линейной комбинацией слагаемых вида (22.6.20) с единственным постоянным коэффициентом для каждой простой подгруппы, подлежащим определению путем детальных расчетов с учетом того, какие поля материи входят в теорию. Далее, мы видели в разделе 22.4, что существуют калибровочные группы, для которых след в формуле (22.6.20) автоматически обращается в нуль для любого набора фермионных полей. (Это полупростые калибровочные группы, не содержащие $SU(n)$ множителей с $n \geq 3$.) В этих случаях теорема, доказанная в ²², показывает, что когомология антискобочной операции $X \mapsto (S, X)$ при духовом числе единица равна нулю. Как мы видели, это означает, что в таких теориях нет аномалий в любом порядке теории возмущений.

Есть и другой аспект связи аномалии с когомологией антискобочной операции.²³ При выводе тождества Славнова–Тейлора (16.4.6) мы предполагали, что мера $\prod_{n,x} d\chi^n(x)$ инвариантна относительно рассматриваемого преобразования симметрии. В разделе 15.9 мы вывели уравнение Зинн–Жюстена из тождества Славнова–Тейлора для преобразования симметрии $\chi^n \rightarrow \chi^n + \theta \delta S / \delta \chi_n^\dagger$, поэтому этот вывод разрушается, если только $\prod_{n,x} d\chi^n(x)$ не инвариантна относительно такого преобразования, или, иными словами, если только не выполнено $\Delta S = 0$, где Δ — оператор (15.9.34). Когда $\Delta S \neq 0$, все еще возможно сохранить уравнение Зинн–Жюстена, добавив к S локальные функционалы, которые так нарушают классическое мастер-уравнение $(S, S) = 0$, чтобы сократить вклады, возникающие из-за неинвариантности меры. Оказывается, что условие такого сокращения — не что иное, как квантовое мастер-уравнение (15.9.35).

Чтобы построить действие S , удовлетворяющее этому уравнению, мы начинаем с действия нулевого порядка S_0 , удовлетворяющего классическому мастер-уравнению $(S_0, S_0) = 0$, и добавляем квантовые поправки. Пусть когомология операции $X \mapsto (S_0, X)$ (при гостовском числе единица в пространстве локальных функционалов) пуста. Тогда доказательство, использованное выше, чтобы показать отсутствие в этом случае аномалий во всех порядках, можно использовать для того, чтобы показать, что к S_0 можно

так добавить локальный функционал, что квантовое мастер-уравнение будет удовлетворяться во всех порядках.

22.7. Аномалии и голдстоуновские бозоны

В той же работе 1971 г., в которой были выведены условия совместности, Весс и Зумино¹⁸ заметили, что возможное наличие аномалий имеет важные следствия для взаимодействия голдстоуновских бозонов. Чтобы понять их аргументы, полезно применить развитые 'т Хофтом¹⁶ в 1979 г. рассуждения о «подборе аномалий», которые уже использовались в разделе 22.5.

Рассмотрим нарушенную глобальную группу симметрии G , которая линейно реализуется в некоторой фундаментальной теории запертых безмассовых фермионов, например, в глобальной киральной $SU(3) \times SU(3)$ симметрии в квантовой хромодинамике с тремя безмассовыми кварками. Введем в этой фундаментальной теории фиктивные калибровочные поля, так что глобальная симметрия G станет локальной, если не считать возможных аномалий. В общем случае такая локальная симметрия *будет* нарушена аномалиями, т. к. в реальности симметрия чисто глобальна, и нет никаких причин, почему глобальная симметрия должна допускать расширение на свободную от аномалий локальную симметрию. Однако эти аномалии можно сократить путем добавления подходящих безмассовых фермионов-наблюдателей. До тех пор, пока введенные таким образом калибровочные константы достаточно малы, а фермионы-наблюдатели обладают только этими очень слабыми калибровочными взаимодействиями, динамика теории в результате таких модификаций изменится не сильно.

Рассмотрим теперь эффективную теорию поля, описывающую физику при низких энергиях в области, где запертые фермионы ненаблюдаемы. Единственными степенями свободы в такой теории будут безмассовые частицы — фиктивные калибровочные бозоны и фермионы-наблюдатели, а также набор голдстоуновских бозонов с полями ξ_a , по одному на каждую независимую нарушенную симметрию. Так как исходная фундаментальная теория была выбрана калибровочно инвариантной и свободной от аномалий, это же должно быть верно и для эффективной теории поля. Однако фермионы-наблюдатели порождают аномалию, ко-

торая ранее сокращала аномалию, возникавшую за счет запертых безмассовых фермионов в исходной теории, поэтому для того, чтобы они сократили аномалию за счет голдстоуновских бозонов, калибровочная эффективная теория поля голдстоуновских бозонов должна иметь аномалию для фиктивных локальных симметрий, равную той, которая порождается запертыми фермионами в исходной теории. Это означает, что вместо условия (22.6.2) эффективное действие $\Gamma[\xi, A]$ фиктивных калибровочных полей и голдстоуновских бозонов подчиняется условию

$$\mathcal{T}_\beta(x)\Gamma[\xi, A] = G_\beta[x; A], \quad (22.7.1)$$

где $G_\beta[x; A]$ — функция аномалии исходной теории, в которой нет голдстоуновских бозонов, а $\mathcal{T}_\beta$ — генератор калибровочной группы G , действующей теперь как на калибровочные поля, так и на поля голдстоуновских бозонов. (Индекс β у $\mathcal{T}_\beta$ пробегает значения i , отмечающие полный набор независимых генераторов $\mathcal{Y}_i$ ненарушенной подгруппы симметрии H , и значения a , отмечающие набор независимых генераторов нарушенных симметрий $\mathcal{X}_a$; каждому $\mathcal{X}_a$ соответствует одно поле x_a голдстоуновского бозона.)

Конечно, условие (22.7.1) можно также использовать для изучения взаимодействий голдстоуновских бозонов с реальными слабосвязанными калибровочными полями. Например, если лежащая в основе теория включает электрослабые калибровочные бозоны, взаимодействующие с кварками, можно отождествить некоторые из полей, названных нами фиктивными, с калибровочными полями электрослабых взаимодействий. В таких случаях часть фермионов-наблюдателей также должна быть реальной для того, чтобы сократить порождаемые петлями запертых фермионов аномалии в калибровочных симметриях действительных слабосвязанных калибровочных полей (например так, как лептоны сокращают электрослабые аномалии, порождаемые кварками).

Обратимся к приложениям условия (22.7.1). Чтобы вычислить таким способом генератор калибровочной симметрии $\mathcal{T}_\beta(x)$, заметим, что под действием произвольного группового преобразования $g = \exp(-i \int \zeta_\beta(x) \mathcal{T}_\beta(x) d^4x)$ поля голдстоуновских бозонов $\xi_a(x)$ преобразуются в поля $\xi'_a(x)$ согласно правилу (19.6.18), а калибровочные поля $A_\beta^\mu(x)$ преобразуются в калибровочно-преобразованные поля $A_\beta^{\prime\mu}(x)$, так что

$$\mathcal{T}_\beta(x) = \mathcal{T}_\beta^A(x) + \mathcal{T}_\beta^\xi(x). \quad (22.7.2)$$

Здесь $\mathcal{T}_\beta^A(x)$ действует на калибровочные поля и определяется формулой (22.6.1)

$$-i\mathcal{T}_\beta^A(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta}{\delta A_{\beta\mu}(x)} - C_{\beta\gamma\alpha} A_\mu(x) \frac{\delta}{\delta A_{\alpha\mu}(x)}, \quad (22.7.3)$$

где $C_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричные структурные константы калибровочной группы G , а $\mathcal{T}_\beta^\xi(x)$ действует на поля голдстоуновских бозонов и определяется инфинитезимальным пределом выражения (19.6.7), который (при условии экспоненциальной параметризации $\gamma(\xi) = \exp(i\xi_a X_a)$) равен *

$$T_\beta \exp(i\xi_a(x)X_a) = -\mathcal{T}_\beta^\xi(x) \exp(i\xi_a(x)X_a) + \exp(i\xi_a(x)X_a) \theta_{\beta i}(x) Y_i. \quad (22.7.4)$$

Здесь T_β — матрицы, представляющие генераторы группы G в любом представлении; эти генераторы разделяются на множества X_a и Y_i , представляющие, соответственно, генераторы нарушенных и ненарушенных симметрий. Кроме того, $\theta_{\beta i}(x)$ — зависящие от x функции, вид которых нас не будет занимать.

Относительно функций аномалии $G_\beta[x; A]$ мы будем предполагать только выполнение условий совместности (22.6.6):

$$\mathcal{T}_\alpha(x) G_\beta[y; A] - \mathcal{T}_\beta(y) G_\alpha[x; A] = iC_{\alpha\beta\gamma} \delta^4(x-y) G_\gamma[y; A]. \quad (22.7.5)$$

и отсутствие аномалий в ненарушенных симметриях:

$$G_i[x; A] = 0. \quad (22.7.6)$$

* Знак «минус» в первом слагаемом в правой части выражения (22.7.4) и множитель $-i$ в левой части выражения (33.7.3) возникают потому, что калибровочное преобразование (15.1.17) с параметром калибровки Λ_β индуцируется экспонентой $\exp[-i \int \Lambda_\beta(x) \mathcal{T}_\beta(x)]$. Это можно увидеть, потребовав, чтобы оператор $\mathcal{T}_\beta(x)$ удовлетворял коммутационным соотношениям (22.6.5).

Как отмечалось в предыдущем разделе, до тех пор, пока для генераторов подгруппы ненарушенной симметрии след $\text{Tr}[T_i\{T_j, T_k\}]$ обращается в нуль (как это имеет место для некиральных генераторов $SU(3) \times SU(3)$), всегда можно добавить к действию локальный функционал, так, чтобы удовлетворить условию (22.7.6).

Если предположения (22.7.5) и (22.7.6) выполнены, всегда можно найти решение аномальных тождеств Славнова–Тейлора (22.7.1):

$$\Gamma[\xi, A] = -i \int_0^1 dt \int \xi_b(y) G_b[y; A_{-t\xi}] d^4y, \quad (22.7.7)$$

где $[A_{-t\xi}(x)]_\mu$ есть результат действия на $A_\mu \equiv T_\beta A_{\mu\beta}$ калибровочного преобразования (15.1.17) с $\Lambda_a = -t\xi_a$ и $\Lambda_i = 0$:

$$\begin{aligned} [A_{-t\xi}(x)]_\mu &= \exp(-itX_a\xi_a(x))A_\mu(x)\exp(itX_a\xi_a(x)) \\ &\quad - i\left[\partial_\mu \exp(-itX_a\xi_a(x))\right]\exp(itX_a\xi_a(x)). \end{aligned} \quad (22.7.8)$$

В противоположность случаю, когда аномалии были у ненарушенных симметрий, формулы (22.7.7) и (22.7.8) определяют *локальный* (хотя и сложный) функционал калибровочных полей и полей голдстоуновских бозонов. Любое другое решение уравнения (22.7.1) будет отличаться от приведенного на функционал, свободный от аномалий.

Наметим доказательство ²⁴ того, что действие (22.7.7) удовлетворяет уравнению (22.7.1). Вместо того, чтобы иметь дело с локальным генератором $\mathcal{T}_\beta(x)$, удобно ввести произвольную функцию $\eta_\beta(x)$ и определить

$$\mathcal{T}[\eta] = \int d^4x \eta_\beta(x) \mathcal{T}_\beta(x). \quad (22.7.9)$$

Чтобы вычислить $\mathcal{A}[\eta]\xi_b(x)$, введем матрицу

$$\eta_{-t\xi}(x) \equiv \exp(-iX_a\xi_a(x)t)[\eta(x) + \mathcal{T}[\eta]]\exp(iX_a\xi_a(x)t) \equiv [\eta_{-t\xi}(x)]_\beta T_\beta, \quad (22.7.10)$$

где $\eta(x) \equiv \eta_\beta(x)T_\beta$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta_{-t\xi}(x) = -i \left[X_a \xi_a(x), \eta_{-t\xi}(x) \right] + i (\mathcal{F}[\eta] \xi_a(x)) X_a ,$$

так что

$$\mathcal{F}[\eta] \xi_b(x) = -i \frac{\partial}{\partial t} [\eta_{-t\xi}(x)]_b + i C_{a\gamma b} \xi_a(x) [\eta_{-t\xi}(x)]_\gamma . \quad (22.7.11)$$

Чтобы найти $\mathcal{F}[\eta] G_b[y, A]$, применим $\mathcal{F}[\eta]$ к калибровочному полю, и после прямого вычисления получим, что

$$\mathcal{F}[\eta] [A_{-t\xi}(x)] = \left(\mathcal{F}^A [\eta_{-t\xi}] A_\mu(x) \right)_{A \rightarrow A_{-t\xi}} , \quad (22.7.12)$$

так что, используя условие совместности (22.7.5),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\eta] G_b[y, A_{-t\xi}] &= \int d^4x [\eta_{-t\xi}(x)]_\gamma \left(\mathcal{F}_\gamma^A(x) G_b[y, A] \right)_{A \rightarrow A_{-t\xi}} \\ &= \int d^4x [\eta_{-t\xi}(x)]_a \left(\mathcal{F}_b^A(y) G_a[x, A] \right)_{A \rightarrow A_{-t\xi}} \\ &\quad + i C_{\gamma ba} [\eta_{-t\xi}(y)]_\gamma G_a[y, A_{-t\xi}] . \end{aligned} \quad (22.7.13)$$

Слагаемые со структурными константами в формулах (22.7.11) и (22.7.13) сокращаются, и в результате

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\eta] \Gamma[\xi, A] &= \int_0^1 dt \int d^4y \left\{ - \left[\frac{\partial}{\partial t} [\eta_{-t\xi}(y)]_b \right] G_b[y, A_{-t\xi}] \right. \\ &\quad \left. - i [\eta_{-t\xi}(y)]_a \left(\mathcal{F}[\xi] G_a[y, A]_{A \rightarrow A_{-t\xi}} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (22.7.14)$$

Другое непосредственное вычисление показывает, что

$$\frac{\partial}{\partial t} [A_{-t\xi}(x)]_\mu = i \left(\mathcal{F}^A(\xi) A_\mu(x) \right)_{A \rightarrow A_{-t\xi}} , \quad (22.7.15)$$

так что слагаемые в подынтегральном выражении в (22.7.14) складываются, образуя производную по t :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] &= -\int_0^1 dt \int d^4 y \frac{\partial}{\partial t} \{ [\eta_{-t\xi}(y)]_b G_b[y; A_{-t\xi}] \} \\
&= -\int d^4 y [[\eta_{-t\xi}(y)]_b G_b[y; A_{-t\xi}]]_{t=0}^{t=1}.
\end{aligned} \tag{22.7.16}$$

При $t = 1$ имеем

$$\eta_{-\xi}(x) = \exp(-iX_a \xi_a(x)) [\eta(x) + \mathcal{T}[\eta]] \exp(iX_a \xi_a(x)).$$

Из выражения (22.7.4) видно, что это есть линейная комбинация генераторов подгруппы H ненарушенной симметрии, так что коэффициент $[\eta_{-\xi}(y)]$ у любого генератора X_b нарушенной симметрии обращается в нуль. Кроме того, из формул (22.7.10) и (22.7.8) немедленно следует, что при $t = 0$ $\eta_{-t\xi}(y) = \eta(y)$ и $[A_{-t\xi}(y)]_\mu = A_\mu(y)$, так что из выражения (22.7.16) вытекает, что

$$\mathcal{T}[\eta]\Gamma[\xi, A] = \int d^4 y [\eta_0(y)]_b G_b[y; A_0] = \int d^4 y \eta_b(y) G_b[y; A], \tag{22.7.17}$$

Совместно с условием (22.7.6) это эквивалентно желаемому результату (22.7.1), что и требовалось доказать.

Решение (22.7.7) уравнения (22.7.1) не единственно, однако является *единственным* решением, обращающимся в нуль при $x = 0$. Чтобы увидеть это, заметим, что

$$\exp\left[-i \int \eta_\beta(x) \mathcal{T}_\beta(x) d^4 x\right] \Gamma[\xi, A] = \Gamma[\xi', A'], \tag{22.7.18}$$

где штрихи указывают на калибровочное преобразование с калибровочным параметром η_β . Здесь удобно представить экспоненту в виде

$$\exp(z) = 1 + \int_0^1 dt \exp(zt) z$$

так что из формул (22.7.1) и (22.7.18) следует:

$$\begin{aligned}
\Gamma[\xi, A] - i \int_0^1 \exp\left[-it \int \eta_\beta(x) \mathcal{T}_\beta^A(x) d^4 x\right] \int \xi_b(y) G_b[y; A] d^4 y \\
= \Gamma[\xi', A'].
\end{aligned} \tag{22.7.19}$$

В частности, если взять $\eta_a = -\xi_a$ и $\eta_i = 0$, тогда $\xi'_a = 0$, и в этом случае, по предположению, правая часть в выражении (22.7.19) обращается в нуль, а следовательно мы приходим к формуле

$$\Gamma[\xi, A] = -i \int_0^1 \exp\left[it \int \xi_a(x) \mathcal{F}_a^A(x) d^4x\right] \int \xi_b(y) G_b[y; A] d^4y. \quad (22.7.20)$$

Функциональный оператор $\exp[it \int \xi_a(x) \mathcal{F}_a^A(x) d^4x]$ в формуле (22.7.20) просто порождает калибровочное преобразование (15.1.17) с калибровочным параметром $\Lambda_\beta(x) = -t\xi_a(x)$, так что формулу (22.7.20) можно записать в виде (22.7.7).

Решение (22.7.7) можно применить для изучения электро-слабых взаимодействий октета псевдоскалярных голдстоуновских бозонов, однако она имеет важные приложения и для взаимодействий самих голдстоуновских бозонов в отсутствие реальных калибровочных полей. В случае, когда $A = 0$, выражение (22.7.8) становится «чисто калибровочным» полем

$$\begin{aligned} [A_{-t\xi}(x)]_\mu &= -i \left[\partial_\mu \exp(-itX_a \xi_a(x)) \right] \exp(itX_a \xi_a(x)) \\ &= -i \left[\partial_\mu V(t\xi(x)) \right] V^{-1}(t\xi(x)), \end{aligned} \quad (22.7.21)$$

где

$$V(t\xi(x)) \equiv \exp(-itX_a \xi_a(x)). \quad (22.7.22)$$

Если $A_\alpha^\mu(x) = 0$, из уравнения (22.7.1) вытекает, что

$$\mathcal{F}_\beta(x) \Gamma[\xi, 0] = 0, \quad (22.7.23)$$

так что в результате подстановки (22.7.21) в (22.7.7) получается G -инвариантный локальный функционал поля голдстоуновских бозонов $\xi_a(x)$, хотя, как мы увидим, в общем случае он не равен интегралу по пространству-времени от G -инвариантной функции $\xi_a(x)$ и его производных.

Простейшим примером является случай полностью нарушенной группы симметрии. В этом случае условие (22.7.6) ничего не дает, и мы можем использовать для аномалии симметричную форму (22.3.38):

$$G_a[x; A] = \frac{i}{24\pi^2} \varepsilon^{\kappa\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ T_a \left[\partial_\kappa A_\nu(x) \partial_\lambda A_\rho(x) - \frac{1}{2} i \partial_\kappa A_\nu(x) A_\lambda(x) A_\rho(x) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} i A_\kappa(x) \partial_\nu A_\lambda(x) A_\rho(x) - \frac{1}{2} i A_\kappa(x) A_\nu(x) \partial_\lambda A_\rho(x) \right] \right\}, \quad (22.7.24)$$

где теперь T_α — конкретное представление генераторов группы, реализуемое левыми фермионами теории (включая антифермионы, если это различие существенно). Подставляя (22.7.21) в (22.7.24), находим, что в этом случае в следе в формуле (22.7.24) после свертки с $\varepsilon^{\kappa\lambda\rho}$ выживают только члены, пропорциональные

$$\text{Tr} \left\{ T_a (\partial_\kappa V) V^{-1} (\partial_\nu V) V^{-1} (\partial_\lambda V) V^{-1} (\partial_\rho V) V^{-1} \right\},$$

с коэффициентами -1 , $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$, соответственно. Поэтому решение (22.7.7) принимает вид

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{1}{48\pi^2} \varepsilon^{\kappa\lambda\rho} \int d^4 y \xi_a(y) \int_0^1 dt \text{Tr} \left\{ T_a \left[\partial_\kappa V(t\xi(y)) \right. \right. \\ \times V^{-1}(t\xi(y)) \left[\partial_\nu V(t\xi(y)) \right] V^{-1}(t\xi(y)) \left[\partial_\lambda V(t\xi(y)) \right] \\ \times V^{-1}(t\xi(y)) \left[\partial_\rho V(t\xi(y)) \right] V^{-1}(t\xi(y)) \left. \right\}. \quad (22.7.25) \quad (22.7.28)$$

Как и утверждалось, это выражение не есть интеграл от инвариантной функции полей и их производных. Например, если поля голдстоуновских бозонов малы, формула (22.7.25) принимает вид

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{1}{240\pi^2} \varepsilon^{\kappa\lambda\rho} \text{Tr} \{ T_a T_b T_c T_d T_e \} \int d^4 y \xi_a \partial_\kappa \xi_b \partial_\nu \xi_c \partial_\lambda \xi_d \partial_\rho \xi_e \\ + O(\xi^6). \quad (22.7.26)$$

Любая функция ковариантных производных полей голдстоуновских бозонов будет содержать член низшего порядка по полям, который просто будет произведением частных производных голдстоуновских полей, и поэтому такая функция не может содержать член низшего порядка вида (22.7.26).

В качестве практически более важного примера рассмотрим $SU(3) \times SU(3)$ киральную симметрию квантовой хромодинамики

с безмассовыми кварками u , d и s , которая спонтанно нарушена до диагональной $SU(3)$ подгруппы Гелл-Манна и Неемана. Чтобы использовать результаты данного раздела, мы *должны* пометить внутренние импульсы в интегралах по фермионным петлям так, чтобы векторные токи диагональной $SU(3)$ подгруппы были свободны от аномалий. В этом случае аномалия принимает форму Бардина (22.3.34):

$$G_a[V, A] = \frac{in}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left\{ t_a \left[V_{\mu\nu} V_{\rho\sigma} + \frac{1}{3} A_{\mu\nu} A_{\rho\sigma} - \frac{32}{3} A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma + \frac{8}{3} i(A_\mu A_\nu V_{\rho\sigma} + A_\mu V_{\rho\sigma} A_\nu + V_{\rho\sigma} A_\mu A_\nu) \right] \right\}, \quad (22.7.27)$$

где V_μ , A_μ , $V_{\mu\nu}$ и $A_{\mu\nu}$ определены формулами (22.3.35)–(22.3.37), t_a здесь равняется половине матриц Гелл-Манна λ_a , определенных формулами (19.7.2), а n — число типов («цветов») кварков каждого сорта (аромата). (Мы теперь используем строчную букву t для матриц, представляющих генераторы группы, поскольку в этом следе суммирование ведется только по левым кваркам, но не по левым антикваркам.) Для чисто калибровочного поля типа (22.7.21) напряженности $V_{\mu\nu}$ и $A_{\mu\nu}$ обращаются в нуль, так что, подставляя (22.7.27) в (22.7.7), находим аномальное эффективное действие голдстоуновских бозонов

$$\Gamma[\xi, 0] = -\frac{2n}{3\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int_0^1 dt \int d^4x \text{Tr} \left\{ \xi_a t_a [A_{-t\xi}]_\mu [A_{-t\xi}]_\nu [A_{-t\xi}]_\rho [A_{-t\xi}]_\sigma \right\}.$$

где теперь « A » обозначает не векторное, а аксиальное калибровочное поле. Чтобы найти $[A_{-t\xi}]_\mu$, используем формулу (22.7.21), которая в данном случае имеет вид

$$[V_{-t\xi}(x)]_\mu + \gamma_5 [A_{-t\xi}(x)]_\mu = -i \left[\partial_\mu \exp(-it\gamma_5 t_a \xi_a(x)) \right] \exp(it\gamma_5 t_a \xi_a(x)). \quad (22.7.29)$$

Умножая на $(1 + \gamma_5)/2$ и $(1 - \gamma_5)/2$ и беря разность, находим аксиальное слагаемое

$$\begin{aligned}
[A_{-t\xi}(x)]_\mu &= -\frac{1}{2}i[\partial_\mu \exp(-it\xi_a t_a)]\exp(it\xi_a t_a) \\
&\quad + \frac{1}{2}i[\partial_\mu \exp(it\xi_a t_a)]\exp(-it\xi_a t_a) \\
&= \frac{1}{2}i\exp(it\xi_a t_a)U^{-1}(t\xi(x))[\partial_\mu U(t\xi(x))]\exp(-it\xi_a t_a),
\end{aligned} \tag{22.7.30}$$

где

$$U(t\xi) \equiv \exp(2it_a \xi_a t). \tag{22.7.31}$$

После подстановки в формулу (22.7.28) находим эффективное аномальное действие

$$\begin{aligned}
\Gamma[\xi, 0] &= -\frac{n}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int_0^1 dt \int d^4x \text{Tr} \left\{ \xi_a t_a U^{-1}(t\xi(x)) [\partial_\mu U(t\xi(x))] \right. \\
&\quad \times U^{-1}(t\xi(x)) [\partial_\nu U(t\xi(x))] U^{-1}(t\xi(x)) [\partial_\rho U(t\xi(x))] U^{-1}(t\xi(x)) \\
&\quad \left. \times [\partial_\sigma U(t\xi(x))] \right\}.
\end{aligned} \tag{22.7.32}$$

Как было отмечено Виттеном ²⁵, это выражение можно переписать в удобной пятимерной форме. Выберем в качестве пятой координаты t и определим $\xi_a(x, t) \equiv t\xi_a(x)$. Тогда формула (22.7.32) примет вид

$$\begin{aligned}
\Gamma[\xi, 0] &= -\frac{in}{240\pi^2} \varepsilon^{ijklm} \int d^5z \text{Tr} \left\{ U^{-1}(\xi(z)) [\partial_i U(\xi(z))] \right. \\
&\quad \times U^{-1}(\xi(z)) [\partial_j U(\xi(z))] U^{-1}(\xi(z)) [\partial_k U(\xi(z))] U^{-1}(\xi(z)) \\
&\quad \left. \times [\partial_l U(\xi(z))] U^{-1}(\xi(z)) [\partial_m U(\xi(z))] \right\},
\end{aligned} \tag{22.7.33}$$

где i, j и т. д. принимают значения 1, 2, 3, 0, 5, $z^i = x^i$ для $i = 1, 2, 3, 0$ и $z^5 = t$, а интеграл берется по области $0 \leq z^5 \leq 1$. (Дополнительный множитель $1/5$ возникает в формуле (22.7.33) для того, чтобы учесть, что любой из пяти индексов i, j, k, l или m может принимать значение 5.) Поскольку $\xi_a(z)$ принимает фиксированное значение нуль при $z^5 = 0$ и любых значениях z^μ из z^i , мы можем считать все эти значения z^i одной точкой и рассматривать область интегрирования в (22.7.33) как пятимерный шар, четырехмерная граница которого $z^5 = 1$ есть обычное пространство-время. Тогда формула (22.7.33) есть частный случай задаваемого формулами (19.8.1) и (19.8.3) действия Весса–Зумино–Виттена, которое также было пропорци-

онально целому числу n . Единственной разницей является то, что теперь n отождествляется с числом цветов. В разделе 19.8 мы видели, что интеграл (19.8.3) зависит только от значений $\xi_a(z)$ на пространственно-временной границе пятимерного шара, поэтому при выводе формулы (22.7.33) мы показали, что формула (19.8.2) применима для любого продолжения $x_a(x)$ внутрь пятимерного шара, а не только для случая $\xi_a(x, t) = t\xi(x)$.

* * *

В более общем случае рассмотрим произвольную калибровочную группу G , спонтанно нарушенную до подгруппы H , которая сама по себе свободна от аномалий, т. е. для которой D -символ (22.3.12) обращается в нуль для любых трех генераторов H . Чу, Хо и Зумино²⁶ показали, что к действию можно добавить локальный функционал $B[A]$ так, что токи подгруппы H будут свободными от аномалий даже, когда учитываются калибровочные поля нарушенных симметрий. Этот функционал имеет вид

$$B[A] = \frac{1}{48\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ [A_h^\mu, A_h^\nu] (F_h^{\rho\sigma} + F_h^{\rho\sigma}) + A_h^\mu A_h^\nu A_h^\rho A_h^\sigma - A_h^\mu A_h^\nu A_h^\rho A_h^\sigma + \frac{1}{2} A_h^\mu A_h^\nu A_h^\rho A_h^\sigma \right\}, \quad (22.7.34)$$

где снова $A^\mu \equiv T_\alpha A_\alpha^\mu$ и $F^{\mu\nu} \equiv T_\alpha F_\alpha^{\mu\nu}$, а $A_h^\mu \equiv T_i A_i^\mu$ и $F_h^{\mu\nu} \equiv T_i F_i^{\mu\nu}$ — слагаемые в A^μ и $F^{\mu\nu}$ в алгебре ненарушенной подгруппы симметрии H . Тогда полная аномалия равна

$$G'_\beta[x; A] = G_\beta[x; A] + \mathcal{J}_\beta(x) B[A] \quad (22.7.35)$$

(где $G_\beta[x; A]$ — симметризованная аномалия (22.3.38)), и она удовлетворяет желаемому условию

$$G'_\beta[x; A] = 0. \quad (22.7.36)$$

Аномальная часть эффективного действия для голдстоуновских бозонов и калибровочных полей получается подстановкой выражения (22.7.35) вместо G_β в решение (22.7.7). Таким способом Чу и др.²⁶ нашли аномальное эффективное действие

$$\Gamma'[\xi, A] = \Gamma[\xi, A] - B[A_{-\xi}] + B[A], \quad (22.7.37)$$

где $\Gamma[\xi, A]$ — ранее выведенное эффективное действие (22.7.7), а $A_{-\xi}(x)$ получается, если положить в (22.7.8) $t = 1$. В частности, когда калибровочное поле обращается в нуль, $A_{-\xi}$ есть чисто калибровочное поле

$$[A_{-\xi}(x)]_\mu = -i[\partial_\mu V(\xi(x))]V^{-1}(\xi(x)),$$

$$V(\xi(x)) = \exp(-iX_a \xi_a(x)),$$

так что в этом случае действие для голдстоуновских бозонов равно

$$\Gamma[\xi, 0] = \Gamma[\xi, 0] - \frac{1}{48\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ A_{-\xi}^\mu A_{-\xi h}^\nu A_{-\xi h}^\rho A_{-\xi h}^\sigma - A_{-\xi h}^\mu A_{-\xi}^\nu A_{-\xi}^\rho A_{-\xi}^\sigma + \frac{1}{2} A_{-\xi h}^\mu A_{-\xi}^\nu A_{-\xi h}^\rho A_{-\xi}^\sigma \right\}. \quad (22.7.38)$$

Результат не единственен; в частности, в теориях, сохраняющих четность (типа квантовой хромодинамики) можно добавить в эффективное действие локальные слагаемые, с тем, чтобы сократить любые не сохраняющие четность члены в выражении (22.7.38).

Задачи

1. Рассчитайте вероятность процесса $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$ в главном порядке по m_s , считая $m_u = m_d = 0$.
2. Рассмотрите киральную $SU(3)$ симметрию, относительно которой левые компоненты полей спина $\frac{1}{2}$ в теории, сохраняющей число фермионов, образуют N фундаментальных представлений $\mathbf{3}$ группы $SU(3)$, а все правые компоненты являются синглетами. Вычислите аномалию в $SU(3)$ симметрии. Какой будет аномалия, если добавить M фермионных полей, левые компоненты которых являются синглетами, а правые компоненты преобразуются как симметричные тензоры второго ранга $SU(3)$ с нулевым следом?

3. Найдите решение условий подбора аномалий 'т Хофта (22.5.5) и (22.5.6) для случая $n = 4$ сортов кварков. Найдите решение для случая $n = 2$, отличное от приведенного в тексте.
4. Выведите уравнение Зинн-Жюстена из квантового мастер-уравнения, не предполагая $\Delta S = 0$.

Список литературы

1. Steinberger, J., *Phys. Rev.*, **76**, 1180 (1949). См. также: Finkelstein, R.J., *Phys. Rev.*, **72**, 415 (1949); Fukuda, H. and Miyamoto, Y., *Prog. Theor. Phys.*, **4**, 347 (1949); Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **82**, 664 (1951); Rosenberg, L., *Phys. Rev.*, **129**, 2786 (1963). Грубая оценка этой вероятности распада была сделана еще до экспериментального обнаружения π^0 в работе: Sakata, S. and Tanikawa, Y., *Phys. Rev.*, **57**, 548 (1940).
2. Sutherland, D.G., *Nucl. Phys.*, **B2**, 433 (1967).
3. Veltman, M., *Proc. Roy. Soc.*, **A301**, 107 (1967).
4. Bell, J.S. and Jackiw, R., *Nuovo Cimento*, **60A**, 47 (1969). См. также: Jackiw, R., in *Lectures on Current Algebra and its Applications* (Princeton Press, Princeton, 1972).
5. Adler, S., *Phys. Rev.*, **177**, 2426 (1969). См. также: Adler, S., in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory – 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics*, eds. S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton (MIT Press, Cambridge, MA, 1970), Vol. I.
6. Fujikawa, K., *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 1195 (1979).
- 6a. Atiyah, M.F. and Singer, I.M., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **81**, 2597 (1984).
7. Alvarez-Gaumé, L. and Ginsparg, P., *Ann. Phys.*, **161**, 423 (1985).

8. Bardeen, W.A., *Phys. Rev.*, **184**, 1848 (1969).
- 8a. См., например, работы: Zumino, B., Wu, Y.-S., and Zee, A., *Nucl. Phys.*, **B239**, 477 (1984).
9. Adler, S.L. and Bardeen, W.A., *Phys. Rev.*, 1517 (1969).
10. См., например: Georgi, H., *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1982), pp. 15, 198. Исходная ссылка: Schur, I., *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406 (1905).
- 10a. Atiyah, M.F. and Singer, I.M., [6a]; Zumino, B., in *Relativity, Groups and Topology II*, eds. B.S. de Witt and R. Stora (North-Holland, Amsterdam, 1984); Alvarez-Gaumé L. and Ginsparg, P., [7]; Bardeen, W. and Zumino, B., *Nucl. Phys.*, **B244**, 421 (1984); Stora, R., in *Progress in Gauge Field Theory*, eds. G. 't Hooft et al. (Plenum, New York, 1984), p. 543; Alvarez, O., Singer, I., and Zumino, B., *Comm. Math. Phys.*, **96**, 409 (1984); Alvarez-Gaumé L. and Ginsparg, P., *Nucl. Phys.*, **B262**, 439 (1985); Zumino, B., *Nucl. Phys.*, **B253**, 477 (1985); Bismut, J.M. and Freed, D.S., *Commun. Math. Phys.*, **106**, 159 (1986); **107**, 103 (1986); Freed, D.S., *Commun. Math. Phys.*, **107**, 483 (1986).
- 10b. Witten, E., *Phys. Lett.*, **117B**, 324 (1982).
11. Gross, D.J. and Jackiw, R., *Phys. Rev.*, **96**, 477 (1969).
12. Georgi, H. and Glashow, S.L., *Phys. Rev.*, **D6**, 429 (1972).
13. Mehta, M.L., *J. Math. Phys.*, **7**, 1824 (1966); Mehta, M.L. and Srivastava, P.K., *J. Math. Phys.*, **7**, 1833 (1966).
- 13a. Сокращение аномалий в четырехкварковой версии стандартной электрослабой теории было показано в работах: Bouchiat, C., Iliopoulos, J., and Meyer, Ph., *Phys. Lett.*, **38B**, 519 (1972); Weinberg, S., in *Fundamental Interactions in Physics and Astrophysics*, eds. G. Iverson et al. (Plenum Press, New York, 1973), p. 157.

14. Georgi, H., in *Particles and Fields — 1974*, ed. C. Carlson (Amer. Inst. of Physics, New York, 1975).
15. Delbourgo, R. and Salam, A., *Phys. Lett.*, **40B**, 381 (1972); Eguchi, T. and Freund, P., *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 1251 (1976). См. также: Nielsen, N.K., Grisaru, M.T., Romer, R., and van Nieuwenhuizen, P., *Nucl. Phys.*, **B140**, 477 (1978); Perry, M.J., *Nucl. Phys.*, **B143**, 114 (1978); Hawking, S.W. and Pope, C., *Nucl. Phys.*, **B146**, 381 (1978); Christensen, S.M. and Duff, M.J., *Phys. Lett.*, **76B**, 571 (1978); Critchley, R., *Phys. Lett.*, **78B**, 410 (1978); Hanson, A.J. and Romer, R., *Phys. Lett.*, **80B**, 58 (1978). Обзор см.: Eguchi, T. Gilkey, P.B., and Hanson, A.J., *Phys. Rep.*, **66**, 213 (1980). В случае $4n + 2$ измерений существует и аномалия в дивергенции тензора энергии-импульса; см.: Alvarez-Gaumé, L. and Witten, E., *Nucl. Phys.*, **B234**, 269 (1984).
16. 't Hooft, G., lecture given at the Cargèse Summer Institute, 1979, in *Recent Developments in Gauge Theories*, eds. G. 't Hooft et al. (Plenum, New York, 1980). См. также: Dimopoulos, S., Raby, S., and Susskind, L., *Nucl. Phys.*, **B173**, 208 (1980); Coleman, S. and Witten, E., *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 1000 (1980); Frishman, Y., Schwimmer, A., Banks, T., and Yankielowicz, S., *Nucl. Phys.*, **B177**, 157 (1981); Zee, A., Univ. of Pennsylvania report, 1980 (unpublished); Barbieri, R., Maiani, L., and Petronzio, R., *Phys. Lett.*, **96B**, 63 (1980); Farrar, G., *Phys. Lett.*, **96B**, 273 (1980); Chanda, R. and Roy, P., *Phys. Lett.*, **99B**, 453 (1981).
- 16a. Weinberg, S. and Witten, E., *Phys. Lett.*, **96B**, 59 (1980).
17. Preskill, J. and Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D24**, 1059 (1981).
18. Wess, J. and Zumino, B., *Phys. Lett.*, **37B**, 95 (1971).
- 18a. Stora, R., in *Progress in Gauge Field Theory*, eds. G. 't Hooft et al. (Plenum, New York, 1984), p. 543; Zumino, B., in *Relativity, Groups and Topology II*, eds. B.S. de Witt and R. Stora (Elsevier, Amsterdam, 1984), p. 1293; Mañes, J. and Zumino, B., *Commun. Math. Phys.*, **102**, 157 (1985).

- 18b.** Faddeev, L.D., *Phys. Lett.*, **145B**, 81 (1984); Zumino, B., *Nucl. Phys.*, **B253**, 477 (1985).
- 18c.** Schwinger, J., *Phys. Rev. Lett.*, **3**, 296 (1959).
- 19.** Dixon, J.A., unpublished preprints (1976–1979); *Commun. Math. Phys.*, **139**, 495 (1991); Brandt, F., Dragon, N., and Kreuzer, M., *Nucl. Phys.*, **B322**, 224 (1990); Dubois-Violette, M., Henneaux, M., Talon, M., and Viallet, C.M., *Phys. Lett.*, **B289**, 361 (1992); Dubois-Violette, M., Talon, M., and Viallet, C.M., *Phys. Lett.*, **B158**, 231 (1985); *Commun. Math. Phys.*, **102**, 105 (1985); Mañes, J. and Zumino, in *Supersymmetry and its Applications: Superstrings, Anomalies, and Supergravity*, eds. G.W. Gibbons, S.W. Hawking, and P.K. Townsend (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).
- 19a.** См., например: Georgi, H., [10], уравнение 11.9 в гл. XXV.
- 20.** Stora, R., in *New Directions in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics — Lectures at the 1976 Cargèse Summer School*, eds. M. Lévy and P. Mitter (Plenum, New York, 1977).
- 21.** Dixon, J.A., [19].
- 22.** Barnich, G. and Henneaux, M., *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1588 (1994); Barnich, G., Brandt, F., and Henneaux, M., *Commun. Math. Phys.*, **174**, 57, 93 (1995).
- 23.** Troost, W., van Nieuwenhuizen, P., and Van Proeyen, A., *Nucl. Phys.*, **B333**, 727 (1990).
- 24.** Я узнал об этом доказательстве от проф. Б. Зумино (частное сообщение).
- 25.** Witten, E., *Nucl. Phys.*, **B223**, 422 (1983).
- 26.** Chu, C.-S., Ho, P.-M., and Zumino, B., *Nucl. Phys.*, **B475**, 484 (1996).

Протяженные полевые конфигурации

Большая часть этой книги была посвящена применениям квантовой теории поля, которые могут быть, по меньшей мере, описаны в рамках теории возмущений, независимо от того, приводит ли ряд теории возмущений к хорошим или плохим численным результатам. При использовании теории возмущений мы разлагаем действие в окрестности обычных, не зависящих от пространственно-временных координат, вакуумных значений полей, оставляя старшие квадратичные слагаемые в экспоненте $\exp(iI)$ и рассматривая все слагаемые более высокого порядка как малые поправки. Начиная с середины 1970-х годов растущий интерес стали вызывать эффекты, возникающие из-за наличия протяженных, зависящих от пространственно-временных координат, полевых конфигураций, таких, как инстантоны¹, которые также являются стационарными «точками» действия. В принципе, такие конфигурации следует включать в функциональные интегралы, и суммировать по флуктуациям вокруг них. (В разделе 20.7 мы уже столкнулись в другом контексте с примером инстантонной конфигурации.) Хотя такие непертурбативные вклады часто сильно подавлены, в квантовой хромодинамике они велики, а в стандартной электрослабой теории приводят к интересным экзотическим явлениям.

Существуют и такие протяженные конфигурации, которые возникают не только как поправки к функциональным интегралам для процессов с участием обычных частиц, но и как возможные компоненты реальных физических состояний. Среди этих конфигураций встречаются частицеподобные, например, магнитные монополи² и скирмионы³, которые концентрируются вокруг точки в пространстве или, эквивалентно, вокруг мировой линии в простран-

стве-времени. Существуют также струноподобные конфигурации ⁴, напоминающие обсуждавшиеся в разделе 21.6 вихревые нити в сверхпроводниках, которые концентрируются вокруг линии в пространстве или, эквивалентно, вокруг мирового листа в пространстве-времени. Наконец, имеются похожие на листы в пространстве конфигурации типа доменных стенок ⁵ между пространственными областями, в которых по-разному нарушаются дискретные симметрии. В противоположность этому, упомянутые выше инстантоны являются *событие-подобными* и концентрируются вокруг точки в пространстве-времени, так что поэтому они никогда не возникают как компоненты реальных физических состояний.

Некоторые протяженные полевые конфигурации устойчивы из-за граничных условий, накладываемых физической природой той задачи, в которой эти конфигурации возникают. Примером может служить решение — «баунс», возникающее при анализе распада вакуума ⁶, которое мы обсудим в разделе 23.8. Другие конфигурации стабильны по той причине, что они обладают квантовым числом, сохранение которого запрещает любые возможные моды распада ⁷.

В большей части этой главы мы будем рассматривать протяженные полевые конфигурации, устойчивые за счет их топологии. При анализе всех подобных конфигураций используются топологические приемы и рассуждения, прежде всего, теория гомотопий, так что мы начнем с совместного рассмотрения всех топологически стабилизированных конфигураций в пространстве или пространстве-времени произвольного числа измерений d .

23.1. Применения топологии

Часто случается, что пространство всех возможных полевых конфигураций обретает нетривиальную топологию в результате наложения условия конечности некоторого функционала S различных полей. В классической полевой теории S есть потенциальная энергия (или, в некоторых случаях, потенциальная энергия, приходящаяся на единицу площади или единицу длины). Никакое конечное возмущение не может породить конфигурацию, в которой потенциальная энергия бесконечна. В классической статистической механике S — гамильтониан, а в квантовой теории поля, сформулированной в евклидовом пространстве, S — евклидово действие

или величина, ему пропорциональная. (Евклидовы функциональные интегралы и некоторые их применения обсуждаются в приложении А к этой главе.) Мы будем строить теорию возмущений, начав с некоторой равновесной полевой конфигурации, для которой евклидово действие или гамильтониан конечны, а затем проинтегрируем по флуктуациям, оставляющим эти величины конечными.

Говорят, что две полевых конфигурации топологически эквивалентны, если возможно непрерывно продеформировать одну из них в другую, не проходя при этом через запрещенные конфигурации, в которых S бесконечно. Очевидно, что это — отношение эквивалентности (в том смысле, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно), поэтому оно разделяет множество всех полевых конфигураций на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из конфигураций одинаковой топологии. Например, если S — потенциальная энергия (гамильтониан в случае независимых от времени полей) в случае d пространственных измерений, то бесконечный потенциальный барьер запрещает топологически различным полевым конфигурациям переходить друг в друга. В частности, протяженные конфигурации с нетривиальной топологией, возникающие из обычно пространственно однородных вакуумных полей, не могут расплыться и сами стать пространственно однородными.

Топологическая классификация оказывается полезной и при поиске локального минимума S . Если нам удастся найти конфигурацию, минимизирующую S на множестве всех конфигураций данного топологического типа, тогда эта полевая конфигурация должна быть, по крайней мере, локальным минимумом S для *всех* конфигураций любого типа, поскольку никакие малые вариации полей не могут изменить их топологический тип. Поэтому подобная конфигурация является решением полевых уравнений, эквивалентных условию, что S стационарно. Проблемы подобного сорта возникают не только в задачах устойчивости, когда S — гамильтониан, ни и при поиске тех полевых конфигураций, в окрестности которых можно разлагать полевые переменные в функциональных интегралах в евклидовом d -мерном пространстве-времени. В этом случае S есть взятое с обратным знаком евклидово действие I , и мы должны искать его локальный минимум, так чтобы главный член в разложении вокруг этой конфигурации представлял квадратичное действие свободного поля, а члены второго порядка имели бы правильный знак.

Приведем несколько примеров ⁸.

а. Скирмионы и т. п. Рассмотрим действительные голдстоуновские бозонные поля π_a , связанные со спонтанным нарушением непрерывной глобальной группы симметрии G до подгруппы H . Как было показано в гл. 19, потенциальная энергия этих голдстоуновских бозонов в евклидовом пространстве размерностью $d > 2$ принимает вид

$$S[\pi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\pi) \partial_i \pi_a \partial_i \pi_b + \dots \right], \quad (23.1.1)$$

где g_{ab} — положительно определенная матрица, а многоточие означает возможные члены высшего порядка по производным π . Альтернативно, формулу (23.1.1) можно рассматривать как взятое с обратным знаком действие для поля голдстоуновского бозона в d -мерном евклидовом пространстве-времени.

Для полевых конфигураций с конечным S производные $\partial_i \pi_a(\mathbf{x})$ должны убывать на бесконечности быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-d/2}$ (где $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_i x_i}$), так что само поле $\pi_a(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ должно стремиться к константе $\pi_{a\infty}$, а оставшиеся члены должны обращаться в нуль быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{(2-d)/2}$. Голдстоуновские бозонные поля π_a в любой точке образуют однородное пространство — фактор-пространство G/H , в котором любое значение поля можно преобразовать в любое другое значение с помощью преобразования из G , так что, применив глобальное преобразование из G , всегда возможно добиться, чтобы предел $\pi_{a\infty}$ принимал любое конкретное значение, например, $\pi_{a\infty} = 0$. Таким образом, поле $\pi_a(\mathbf{x})$ представляет отображение всего d -мерного пространства, в котором сфера $r = \infty$ считается одной точкой, в многообразии G/H всех значений поля.

Однако d -мерное евклидово пространство, в котором $(d-1)$ -мерная сферическая поверхность на бесконечности считается одной точкой, топологически эквивалентно d -мерной сфере S_d (т. е. поверхности $(d+1)$ -мерного шара) в том смысле, что каждое из этих многообразий может быть непрерывно отображено в другое. Поэтому поля $\pi(\mathbf{x})$, обращающиеся в нуль при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, можно расклассифицировать по топологически различным отображениям S_d на многообразии G/H полевых переменных, для которых точка на бесконеч-

ности отображается в нуль. Множество классов таких топологических различных отображений $S_d \mapsto \mathcal{M}$ с одной точкой S_d , отображающейся в фиксированную точку $\mathcal{M}$, известно как d -я *гомотопическая группа* $\pi_d(\mathcal{M})$ многообразия $\mathcal{M}$. В следующем разделе мы обсудим эти гомотопические группы и объясним их групповую структуру. Список гомотопических групп для разных многообразий приведен в Приложении В к этой главе. В данный момент достаточно отметить, что хотя в ситуации, когда многообразие $\mathcal{M}$ является линейным пространством, гомотопическая группа $\pi_d(\mathcal{M})$ тривиальна (в том смысле, что любая полевая конфигурация $\pi(\mathbf{x})$, стремящаяся к константе при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, может быть непрерывно продеформирована в конфигурацию, в которой поле принимает это значение везде), многообразие $\mathcal{M} = G/H$ голдстоуновских бозонных полей часто обладает нетривиальной гомотопической группой. В случаях, имеющих отношение к квантовой хромодинамике, когда $SU(2) \times SU(2)$ нарушается до $SU(2)$ или $SU(3) \times SU(3)$ нарушается до $SU(3)$, многообразие G/H совпадает с $SU(2)$ или $SU(3)$ соответственно, а для них, согласно формулам Приложения В, гомотопические группы $\pi_3(H)$ нетривиальны. Топологически нетривиальные поля в локальных минимумах потенциальной энергии при $d = 3$ известны под названием *скирмионов*³. Барионы, например, протон, могут в определенных отношениях рассматриваться как скирмионные решения чисто мезонной теории.

До тех пор, пока члены с высшими степенями производных $\partial_i \pi_a$ не включены в подинтегральное выражение, функционал (23.1.1) не содержит скирмионных стационарных точек. В отсутствие таких членов любые топологически нетривиальные полевые конфигурации будут давать континуум значений S , простирающийся до нижней границы $S = 0$, на которой π становится сингулярным, так что топология не может стабилизировать такие конфигурации. Это утверждение известно как *теорема Деррика*⁹. Для ее доказательства заметим, что для любой полевой конфигурации $\pi_a(\mathbf{x})$ можно ввести другую конфигурацию с той же топологией

$$\pi_a^R(\mathbf{x}) \equiv \pi_a(\mathbf{x}/R),$$

где R — произвольный действительный положительный масштабный множитель. Тогда для явно выписанных в выражении (23.1.1) членов

$$S[\pi^R] = R^{d-2}S[\pi].$$

При $d > 2$ это — убывающая функция R при $R \rightarrow 0$, так что имеется континуум значений $S[\pi^R]$, простирающихся вплоть до значения $S = 0$. Более того, $S[\pi] > 0$, т. к. $S[\pi]$ может обращаться в нуль только при постоянном $\pi(\mathbf{x})$, что невозможно, поскольку мы предположили топологическую нетривиальность π . Отсюда следует, что данная нижняя граница достигается только при $R = 0$, где $\pi_a^R(\mathbf{x})$ становится сингулярным.

Полевые конфигурации голдстоуновских бозонов могут быть стабилизированы добавлением в S членов с высшими производными. Например, если взять $S[\pi] = T[\pi] + D[\pi]$, где

$$T[\pi] \equiv \int d^d x \frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\pi) \partial_i \pi_a \partial_i \pi_b \geq 0,$$

$$D[\pi] \equiv \int d^d x f_{abcd}(\pi) \nabla \pi_a \cdot \nabla \pi_b \cdot \nabla \pi_c \cdot \nabla \pi_d \geq 0,$$

то $D[\pi^R] = R^{d-4}D[\pi]$, в то время, как и раньше, $T[\pi^R] = R^{d-2}T[\pi]$, так что $S[\pi^R]$ достигает минимума при конечном R , если $2 < d < 4$, куда, в частности, входит физически интересный случай $d = 3$.

Проблемы в теории скирмионов не связаны с тем, что мы должны добавлять члены с высшими производными типа $D[\pi]$ в действие. Как обсуждалось в разделе 19.5, можно ожидать появления подобных членов в действии любой эффективной полевой теории голдстоуновских бозонов. Трудность в том, что нет никаких рациональных причин для отбрасывания бесконечного числа других членов с высшими производными, имеющих один и тот же порядок величины для конфигураций, обладающих устойчивостью за счет баланса между членами с разным числом производных. Все это делает невозможным реалистические вычисления.

6. Доменные стенки. Если нарушается *дискретная* симметрия, возникает возможность, что симметрия нарушается по-разному в разных областях, отделенных друг от друга доменными стенками, в которых вакуумные поля переходят от одного минимума потенциала к другому. Например, рассмотрим плоскую доменную стенку в плоскости y – z и предположим, что энергия на единицу площади дается выражением

$$S[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + V(\varphi) \right], \quad (23.1.2)$$

где $\varphi(x)$ — действительное скалярное поле, которое, по предположению, зависит только от расстояния x вдоль направления по нормали к стенке, а $V(\varphi)$ — потенциал, обладающий симметрией относительно преобразования $\varphi \rightarrow -\varphi$, с минимумами только при значениях поля $\pm \bar{\varphi}$. Для удобства, подберем аддитивную константу в $V(\varphi)$ так, чтобы минимальное значение $V(\varphi)$ равнялось нулю. В этом случае $V(\varphi) \geq 0$, и $V(\varphi) = 0$ только при $\varphi = \pm \bar{\varphi}$. Чтобы сохранить конечность S , необходимо, чтобы при $x \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow -\infty$ поле φ стремилось либо к $+\bar{\varphi}$, либо к $-\bar{\varphi}$. Таким образом, имеются четыре топологически различные конфигурации, которые топологически стабильны. В двух из них поле φ стремится к одинаковым пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, так что конфигурацию можно плавно продеформировать в вакуумные конфигурации с постоянным везде полем $\varphi(x)$. В двух других φ стремится к противоположным пределам при $x \rightarrow \pm\infty$. Здесь мы классифицируем полевые конфигурации по группе $\pi_0(G)$, где $\pi_0(\mathcal{M})$ для любого многообразия $\mathcal{M}$ обычно определяется как множество связных компонент $\mathcal{M}$, а G — группа симметрии, которая в нашем случае равна группе Z_2 , порожденной отражением $\varphi \rightarrow -\varphi$.

Сейчас уместно дать представление о введенном Богомольным¹⁰ приеме, который окажется полезным в разделах 23.3 и 23.5 при рассмотрении более сложных случаев монополей и инстантонов. Перепишем выражение (23.1.2) в виде

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\varphi}{dx} \mp \sqrt{2V(\varphi)} \right)^2 \pm \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(\infty)} \sqrt{2V(f)} df, \quad (23.1.3)$$

Интеграл во втором слагаемом в правой части выражения (23.1.3) можно рассматривать как «топологический заряд», зависящий только от значений, принимаемых полем при $x \rightarrow \pm\infty$. Для конфигураций, стремящихся к одному и тому же пределу при $x \rightarrow \pm\infty$, этот интеграл обращается в нуль, и минимальное значе-

ние S , соответствующее постоянным полям, равно нулю. Для поля $\varphi(x)$, принимающего разные значения при $x \rightarrow \pm\infty$, можно выбрать знаки $\pm$ в выражении (23.1.3) так, чтобы получить нижнюю границу

$$S[\varphi] \geq \int_{-\varphi}^{\varphi} \sqrt{2V(f)} df. \quad (23.1.4)$$

Эта граница достигается тогда, когда обращается в нуль первое слагаемое, или, иными словами, когда

$$x = \pm \int_0^{\varphi(x)} \frac{df}{\sqrt{2V(f)}} + x_0, \quad (23.1.5)$$

где x_0 — постоянная интегрирования, которая, очевидно, определяет положение центра доменной стенки. Заметим, что теорема Деррика не имеет отношения к полученному решению, т. к. для доменных стенок $d = 1$, и для полей $\varphi(x/R)$ с измененным масштабом интегралы от двух слагаемых в подынтегральном выражении (23.1.2) ведут себя как R^{-1} и R^{+1} соответственно.

Формулу (23.1.5) можно вывести более прямым способом путем вывода дифференциального уравнения второго порядка для $\varphi(x)$ из условия, что выражение (23.1.2) должно быть стационарно относительно малых вариаций $\varphi(x)$, и используя затем это дифференциальное уравнение, чтобы показать, что величина $\frac{1}{2}(d\varphi/dx)^2 - V(\varphi)$ постоянна по x . Преимущество вывода, основанного на формуле (23.1.3), состоит в том, что сразу же видно, что решение (23.1.5) устойчиво относительно малых возмущений, сохраняющих плоский характер стенки, если не считать «нулевой моды», связанной с изменениями положения стенки x_0 . Добавив слагаемое $\frac{1}{2}(d\varphi/dy)^2 + \frac{1}{2}(d\varphi/dz)^2$ в подынтегральное выражение (23.1.2), можно увидеть, что это решение также устойчиво относительно любых возмущений $\delta\varphi(x,y,z)$, если только $\delta\varphi(x,y,z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и фиксированных y и z .

Если имеются дискретные спонтанно нарушенные симметрии, то при нарушении этих симметрий в ранней Вселенной должны были образоваться доменные стенки. Если эти доменные стенки не исчезли, они должны приводить к большим искажениям наблюдаемой сейчас во Вселенной изотропии и однородности ⁵. Нам неизвестна

ни одна точная дискретная симметрия, кроме СРТ, и ни одна спонтанно нарушенная приближенная или точная дискретная симметрия, так что на сегодняшний день проблема доменных стенок неактуальна.

в. Инстантоны и т. п. Рассмотрим теперь калибровочную теорию с действием

$$S[A] = \frac{1}{2} \int d^d x F_{\alpha ij} F_{\alpha ij}, \quad (23.1.6)$$

где $F_{\alpha ij}$ — обычный тензор напряженности поля, и мы считаем $d \geq 4$. Это можно рассматривать как действие квантовых калибровочных полей в евклидовом d -мерном пространстве-времени, или как потенциальную энергию классических калибровочных полей во временной калибровке с $A^0_\alpha = 0$ в $(d + 1)$ -мерном пространстве-времени.

Для того, чтобы $S[A]$ было конечным, напряженность $F_{\alpha ij}$ должна обращаться в нуль при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Этого можно достичь, если $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ достаточно быстро убывает при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, но даже при $d \geq 4$ возможна ситуация, когда $S[A]$ конечно для поля $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$, убывающего как $1/|\mathbf{x}|$, если только поле при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ стремится к чистой калибровке:

$$it_\alpha A_{\alpha i}(\mathbf{x}) \rightarrow g^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_i g(\hat{\mathbf{x}}), \quad (23.1.7)$$

где $g(\hat{\mathbf{x}})$ — зависящий от направления элемент калибровочной группы G . Более того, $A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ не изменяется, если заменить $g(\hat{\mathbf{x}})$ на $g_0 g(\hat{\mathbf{x}})$ для любого фиксированного элемента группы $G_0 \in G$, так что, выбрав $g_0 = g^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_1)$, можно добиться, чтобы $g(\hat{\mathbf{x}}_1) = 1$ для любого направления $\hat{\mathbf{x}}_1$. Поэтому каждое калибровочное поле с конечным $S[A]$ определяет отображение единичной сферы $g(\hat{\mathbf{x}}_1) = 1$ на групповое многообразие, причем точка $\hat{\mathbf{x}}_1$ отображается в единичный элемент G . (В случае, когда калибровочное поле обращается в нуль быстрее, чем $1/|\mathbf{x}|$, при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, это отображение переводит все точки единичной сферы в тождественный элемент калибровочной группы.) Множество классов всех топологически различных отображений $S_{d-1} \mapsto G$, при которых одна точка S_{d-1} отображается в фиксированный элемент G , называется $(d-1)$ -й гомотопической группой группового многообразия. Как указано в Приложении В к этой главе, для любой полупростой группы Ли G группа $\pi_3(G)$ нетривиальна. Топологи-

чески нетривиальные стационарные точки действия $S[A]$ при $d = 4$ называются инстантонами¹. Их значение в квантовой хромодинамике обсуждается в разделах 23.5 и 23.6.

Для того, чтобы $S[A]$ было стационарным при значении поля $A(\mathbf{x})$, необходимо, чтобы $A(\mathbf{x})$ удовлетворяло полемому уравнению

$$\partial_i F_{\alpha ij} = 0. \quad (23.1.8)$$

Простые рассуждения об изменении масштаба снова ограничивают значения размерности d , при которой можно надеяться найти топологически нетривиальный локальный минимум $S[A]$. Определим $A^R(\mathbf{x}) \equiv A(\mathbf{x}/R)$. Тогда

$$S[A^R] = R^{d-4} S[A],$$

так что при $d \neq 4$ у $S[A]$ не может быть никаких нетривиальных стационарных точек, если только не выполнено равенство $S[A] = 0$. Однако, если $S[A] = 0$, то и $F_{\alpha ij} = 0$ везде, так что с помощью калибровочного преобразования можно везде обратить $A_{\alpha i}$ в нуль.

Как мы увидим в разделе 23.5, при $d = 4$ все-таки *возможно* найти инстантонные решения, для которых $S[A]$ (обозначенное там как $-I[A]$) стационарно, а $F_{\alpha ij}$ отлично от нуля везде за исключением бесконечно удаленной области. Приведенные выше соображения об изменении масштаба показывают, что если $A(\mathbf{x})$ — такое инстантонное решение, то этим решением будет и $A(\mathbf{x}/R)/R$. Однако это вырождение устраняется квантовыми поправками.

г. Монополи, вихревые нити и т. д. Рассмотрим теперь теорию калибровочных полей вместе со скалярами, реализующими линейное представление калибровочной группы, причем

$$S[\varphi, A] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} g_{ab}(\varphi) D_i \varphi_a D_i \varphi_b + \frac{1}{4} F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} + U(\varphi) \right], \quad (23.1.9)$$

где $g_{ab}(\varphi)$ — положительно определенная матрица (обычно не зависящая от φ), потенциал $U(\varphi)$ ограничен снизу и сдвинут на постоянную величину, так что его минимум равен нулю, а $F_{\alpha ij}$ и D_i — обычные напряженность поля и калибровочно-ковариантная произ-

водная. Мы требуем, чтобы $U(\phi)$ было скаляром, а $g_{ab}(\phi)$ — тензором относительно преобразований калибровочной группы G . Опять, выражение (23.1.9) представляет собой либо действие квантовой теории поля в d -мерном евклидовом пространстве-времени, либо потенциальную энергию для классической теории поля во временной калибровке в $(d+1)$ -мерном пространстве-времени.

Для того, чтобы $S[A, \phi]$ было конечным, необходимо, чтобы $U(\phi(\mathbf{x}))$ обращалось в нуль при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Множество тех ϕ , при которых $U(\phi)$ обращается в нуль, инвариантно относительно G , и может быть как дискретным, так и непрерывным. Выше, в случае **б** мы имели пример того, когда это множество дискретно. Рассмотрим теперь случай нарушенной симметрии, когда нули $U(\phi)$ образуют непрерывное многообразие M_0 , состоящее из полей, связанных преобразованиями $g \in G$. В этом случае каждое $\phi(\hat{\mathbf{x}})$ может быть получено преобразованием $\gamma(\hat{\mathbf{x}}) \in G$, действующим на значение $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ поля в произвольном направлении $\hat{\mathbf{x}}_1$. Поэтому можно считать, что поле $\phi(\mathbf{x})$ определяет отображение $S_{d-1} \mapsto G$ на фактор-пространство G/H , иными словами, — на группу G с отождествленными элементами g_1 и g_2 , отличающимися только правым умножением на некоторый элемент h подгруппы $H \subset G$, оставляющим $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$ инвариантным, т. е. если $g_1 = g_2 h$. В частности, точка $\hat{\mathbf{x}}_1$ отображается на подгруппу H , т. к. $\gamma(\hat{\mathbf{x}}_1)$, действуя на $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$, должно давать само $\phi(\hat{\mathbf{x}}_1)$. Таким образом, поля, достигающие при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ значений на многообразии M_0 , могут быть расклассифицированы согласно топологически различным отображениям S_{d-1} в G/H , переводящим точку $\hat{\mathbf{x}}_1$ в фиксированный «единичный» элемент H из G/H . Множество классов таких топологически различных отображений $S_{d-1} \mapsto G/H$ с одной точкой из S_{d-1} , отображающейся в фиксированный элемент из G/H , известно как $(d-1)$ -я гомотопическая группа $\pi_{d-1}(G/H)$ многообразия G/H .

В этом случае $\partial_i \phi(\mathbf{x})$ ведет себя как $1/|\mathbf{x}|$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Для того, чтобы $S[\phi]$ было конечным, $D_i \phi$ должна обращаться при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ в нуль быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-d/2}$, поэтому необходимо, чтобы $i t_{\alpha} A_{\alpha i}(\mathbf{x})$ стремилось при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ к $\gamma^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_i \gamma(\hat{\mathbf{x}})$ быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-d/2}$. Это — чисто калибровочное поле, так что тензор напряженности поля $F_{\alpha ij}(\mathbf{x})$ обращается в нуль быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-d/2-1}$, что достаточно для сходимости интеграла $\int d^d x F_{\alpha ij} F_{\alpha ij}$.

Для калибровочной теории, определенной выражением (23.1.9), теорема Деррика неприменима, но интересно посмотреть, к чему

приведет нас та же схема рассуждений. Для любых заданных полей $\Phi(\mathbf{x})$ и $A(\mathbf{x})$ снова определим поля $\Phi^R(\mathbf{x}) \equiv \Phi(\mathbf{x}/R)$ и $A^R(\mathbf{x}) \equiv A(\mathbf{x}/R)/R$. Тогда три члена в гамильтониане (23.1.9) имеют следующие масштабные свойства:

$$T[\Phi^R, A^R] = R^{d-2}T[\Phi, A], \quad K[A^R] = R^{d-4}K[A], \quad V[\Phi^R] = R^dV[\Phi],$$

где $T[\Phi, A] \equiv \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{ab} g_{ab}(\Phi) D_i \Phi_a D_i \Phi_b$, $K[A] \equiv \frac{1}{4} \int d^d x F_{\alpha ij} F_{\alpha ij}$, и $V[\Phi] \equiv \int d^d x U(\Phi)$. При $d > 4$ величина $S[\Phi^R, A^R]$ не имеет минимума при любом конечном значении R , так что не существует стабильной конфигурации с нетривиальной топологией. При $0 < d < 4$ нетрудно найти конечное значение R , при котором $S[\Phi^R, A^R]$ имеет минимум.

В физически интересном случае $d = 3$ топологически нетривиальные полевые конфигурации классифицируются согласно гомотопической группе $\pi_2(G/H)$, которая нетривиальна для односвязной группы G (например, $SU(2)$), нарушенной до группы H , содержащей группу $U(1)$ электромагнетизма. Топологически нетривиальные классические полевые конфигурации с $d = 3$ называются *магнитными монополями*². Как мы увидим в разделе 23.3, величина их магнитного заряда квантована, причем разные значения магнитного заряда отвечают разным элементам группы $\pi_2(G/H)$.

В случае $d = 2$ топологически нетривиальные конфигурации соответствуют элементам группы $\pi_1(G/H)$, которая нетривиальна, когда G — неодносвязная группа, например, $U(1)$ или $SO(3)$, нарушенная либо полностью, либо до дискретной подгруппы. Топологически нетривиальные классические полевые конфигурации при $d = 2$ являются сечениями *вихревых нитей*. Один пример — это сверхпроводимость, где $G = U(1)$ спонтанно нарушается до $H = Z_2$. В разделе 21.6 мы видели, что в сверхпроводниках II рода в определенном интервале значений напряженности магнитного поля возникают вихревые нити, причем магнитный поток, который они несут, квантован, так что разные значения потока отвечают разным элементам $\pi_1(U(1)/Z_2)$. Вихревые нити могут возникать и в релятивистских квантовых теориях поля⁴, а также могут рождаться при нарушающих симметрию переходах в ранней Вселенной. В этом случае их называют *космическими струнами*¹¹.

Монополи и вихревые нити обладают замечательным свойством, которое можно получить только на основании топологических рассуждений. В обоих случаях формы голдстоуновских бозон-

ных полей $\pi_a(\mathbf{x})$ на больших сферах (S_1 — для вихревых нитей, S_2 — для монополей), окружающих конфигурацию, закручены, так что они не могут быть гладко продеформированы в постоянные поля. В частности, невозможно гладким образом уменьшить радиусы этих сфер до нуля, не столкнувшись с каким-то типом сингулярности, поскольку несингулярное поле $\pi_a(\mathbf{x})$ на сфере при уменьшении радиуса сферы до нуля должно было бы стать постоянным. В обоих случаях сингулярность возникает на некоторой сердцевине (линии или, возможно, трубке для вихревых нитей и точке или, возможно, шаре для монополей), внутри которой группа G уже не нарушена, так что система описывается не голдстоуновскими бозонными полями, а параметром порядка, линейно преобразующимся под действием преобразований из G .

В случае $d = 4$ функция $S[\varphi^R, A^R]$ от R может иметь минимум при некотором конечном значении R , если $T[\varphi, A] = V[\varphi] = 0$, для чего необходимо, чтобы $\varphi(\mathbf{x})$ везде принимало значение, при котором $U(\varphi) = 0$. Предполагая, что эти значения образуют континуум, связанный преобразованиями калибровочной группы G , можно с помощью калибровочного преобразования сделать их все постоянными, $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_0$. Тогда в этой калибровке из условия $T[\varphi, A] = 0$ следует, что $A_a(\mathbf{x}) = 0$ для всех нарушенных симметрий для которых $t_a \varphi_0 \neq 0$. На такой полевой конфигурации как $T[\varphi, A]$, так и $V[\varphi]$ стационарны, так что для стационарности $S[\varphi, A]$ необходима стационарность $K[\varphi, A]$, а это означает, что ненулевые калибровочные поля A_{im} (принадлежащие подгруппе $H \subset G$, не нарушенной полем φ_0) удовлетворяют полевым уравнениям Янга–Миллса

$$\partial_\mu F_{i\mu\nu} = 0. \quad (23.1.10)$$

Поэтому данный случай сводится к случаю **c**, но с заменой калибровочной группы G на ее ненарушенную подгруппу H .

23.2. Гомотопические группы

В предыдущем разделе мы научились классифицировать полевые конфигурации, на которых гамильтониан или другие функционалы имеют конечное значение, в соответствии с элементами подходящих гомотопических групп. Но мы до сих пор не объясни-

ли, в каком смысле гомотопические группы являются группами, и не придали групповой структуре никакого физического значения. Как мы увидим, существует естественное определение закона умножения элементов гомотопических групп, согласно которому две протяженные конфигурации полей, образующих многообразие $\mathcal{M}$ в d измерениях, которые принадлежат различным элементам c_1 и c_2 группы $\pi_d(\mathcal{M})$, могут непрерывно сливаться и образовывать конфигурацию, принадлежащую элементу $c_1 \times c_2$ этой группы.

Начнем с определения первой гомотопической группы $\pi_1(\mathcal{M})$ произвольного многообразия $\mathcal{M}$ в d измерениях, которую называют также *фундаментальной группой многообразия*. Как мы видели, условием топологической стабильности вихревой нити в трех измерениях (или монополя в двух измерениях) является существование нетривиальной группы $\pi_1(G/H)$ для некоторого фактор-пространства G/H . После знакомства с $\pi_1(\mathcal{M})$ мы перейдем к изучению более общих гомотопических групп.

Говорят, что связное многообразие $\mathcal{M}$ многосвязно, если на многообразии существует какой-либо замкнутый путь $p(z)$, параметризованный одной переменной z с $0 \leq z \leq 1$, причем $p(0) = p(1)$, который не может быть стянут в точку путем непрерывной деформации. Поскольку на связном многообразии всегда можно непрерывно продеформировать любой замкнутый путь так, что любая точка пути может оказаться в любом желаемом месте на многообразии, можно ограничиться только путями, для которых $p(0) = p(1) = p_0$, где p_0 — любая фиксированная точка на многообразии, называемая *базовой точкой*. Говорят, что два таких замкнутых пути $p_1(z)$ и $p_2(z)$ гомотопически эквивалентны, если они *могут* быть продеформированы один в другой, т. е. если существует непрерывная функция $p(z, t)$, $0 \leq t \leq 1$, такая, что

$$p(z, 0) = p_1(z), \quad p(z, 1) = p_2(z), \quad p(0, t) = p(1, t) = p_0.$$

Отношение гомотопической эквивалентности есть именно отношение эквивалентности в том смысле, что оно симметрично, рефлексивно и транзитивно, так что это отношение разделяет пространство замкнутых путей на многообразии на классы эквивалентности: два замкнутых пути принадлежат одному классу, если и только если они гомотопически эквивалентны. Множество всех этих клас-

сов эквивалентности называется первой гомотопической группой многообразия $\pi_1(\mathcal{M})$.

Для определения правила умножения в группе $\pi_1(\mathcal{M})$ выберем стандартный путь $p[z, c]$, начинающийся и кончающийся в базовой точке p_0 для каждого класса эквивалентности c в $\pi_1(\mathcal{M})$. Для любых двух классов эквивалентности c_1 и c_2 определим «произведение» $c_1 \times c_2$ как класс эквивалентности, содержащий путь $p[z, c_1, c_2]$, который начинается в точке p_0 , следует по пути $p[z, c_1]$ назад в точку p_0 , а затем следует по пути $p[z, c_2]$ снова в точку p_0 . Формально

$$p[z, c_1, c_2] \equiv \begin{cases} p[2z, c_1] & , 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \\ p[2z - 1, c_2] & , \frac{1}{2} \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Теперь нужно показать, что так определенное умножение удовлетворяет групповым аксиомам. Для этого заметим, что $(c_1 \times c_2) \times c_3$ есть класс эквивалентности, содержащий путь $p[z, c_1 \times c_2, c_3]$, идущий вдоль стандартного пути $p[z, c_1 \times c_2]$, начинающегося и кончающегося в базовой точке, в то время как $c_1 \times (c_2 \times c_3)$ — класс эквивалентности, содержащий путь $p[z, c_1, c_2 \times c_3]$, идущий вдоль стандартного пути $p[z, c_1]$ из базовой точки p_0 и обратно, а затем — вдоль стандартного пути $p[z, c_1 \times c_2]$ из базовой точки p_0 и обратно. По определению, путь $p[z, c_1 \times c_2]$ может быть продеформирован в путь, идущий вдоль пути $p[z, c_1]$ из базовой точки p_0 и обратно, а затем — вдоль пути $p[z, c_2]$ из базовой точки p_0 и обратно. В то же время, путь $p[z, c_2 \times c_3]$ может быть продеформирован в путь, идущий вдоль пути $p[z, c_2]$ из базовой точки p_0 и обратно, а затем — вдоль пути $p[z, c_3]$ из базовой точки p_0 и обратно. Таким образом, оба пути $p[z, c_1 \times c_2, c_3]$ и $p[z, c_1, c_2 \times c_3]$ могут быть продеформированы в путь, идущий вдоль пути $p[z, c_1]$ из базовой точки p_0 и обратно, затем — вдоль пути $p[z, c_2]$ из базовой точки p_0 и обратно, и наконец — вдоль пути $p[z, c_3]$ из базовой точки p_0 и обратно. Следовательно, эти пути могут быть продеформированы друг в друга, откуда

$$(c_1 \times c_2) \times c_3 = c_1 \times (c_2 \times c_3).$$

Единичный элемент e группы $\pi_1(\mathcal{M})$ определяется как класс эквивалентности, содержащий путь $p[z, e]$, не выходящий из базовой точки. Чтобы проверить, что $e \times c = c$, заметим, что

$$p[z, e, c] \equiv \begin{cases} p_0 & , 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \\ p[2z - 1, c] & , \frac{1}{2} \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Но этот путь можно непрерывно продеформировать в $p[z, c]$, выбрав

$$p[z, t] \equiv \begin{cases} p_0 & , 0 \leq z \leq t/2, \\ p[(2z - t)/(2 - t), c] & , t/2 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

что совпадает с $p[z, e, c]$ при $t = 1$ и с $p[z, c]$ при $t = 0$. Произведение $e \times c$ есть класс эквивалентности, содержащий $p[z, e, c]$, но, как мы видим, этот класс совпадает с классом эквивалентности, содержащим $p[z, c]$, который и есть класс c . Доказательство того, что $c \times e = c$, проводится аналогично.

«Обратный» класс c^{-1} к классу эквивалентности c содержит путь $p^{-1}[z, c]$, идущий вдоль того же пути, что и стандартный путь $p[z, c]$, но в противоположном направлении. Иными словами,

$$p^{-1}[z; c] \equiv p[1 - z; c].$$

Этот путь не обязательно совпадает со «стандартным путем» $p[z, c^{-1}]$, но, по определению класса эквивалентности c^{-1} , два пути можно продеформировать друг в друга. Чтобы убедиться, что $c^{-1} \times c = e$, заметим, что при деформации пути $p[z, c^{-1}]$ в $p^{-1}[z, c]$ путь $p[z, c^{-1}, c]$ можно продеформировать в путь

$$p[z, c^{-1}, c] \rightarrow \begin{cases} p[1 - 2z, c] & , 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \\ p[2z - 1, c] & , \frac{1}{2} \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Но этот путь можно непрерывно продеформировать в $p[z, e] = p_0$, выбрав

$$p[z, t] = \begin{cases} p[1 - 2tz, c] & , 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \\ p[2tz + 1 - 2t, c] & , \frac{1}{2} \leq z \leq 1, \end{cases}$$

что совпадает с $p[z, c^{-1}, c]$ при $t = 1$ и с $p[z, e]$ при $t = 0$. Произведение $c^{-1} \times c$ есть класс эквивалентности, содержащий $p[z, c^{-1}, c]$, но, как мы теперь видим, этот класс совпадает с классом эквивалентности, содержащим $p[z, e]$, что есть просто e . Доказательство того, что $c \times c^{-1} = e$, проводится аналогично. Существование еди-

ничного элемента и обратных элементов показывает, что совокупность классов эквивалентности образует *группу*.

Классическим примером многообразия $\mathcal{M}$ с нетривиальной первой гомотопической группой является окружность: $\mathcal{M} = S_1$. Ее можно параметризовать углом θ , причем $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi n$ (где n — положительное или отрицательное целое число) считаются одной точкой. Гомотопические группы состоят из классов функций $\theta(z)$, $0 \leq z \leq 1$, с начальным значением в некоторой базовой точке $q(0) = q_0$ и конечным значением в той же базовой точке $\theta(1) = \theta_0 + 2\pi n$. Две такие функции можно непрерывно продеформировать друг в друга тогда и только тогда, когда у них одинаковое значение n , так что $\pi_1(S_1)$ состоит из счетного бесконечного числа классов c_n , помеченных положительным или отрицательным целым числом n . Кроме того, «произведение» двух классов c_n и c_m состоит из путей, которые совершают n оборотов по окружности, начинаясь и кончаясь в базовой точке, а затем еще m таких же оборотов, так что в данном случае умножение сводится к сложению:

$$c_n \times c_m = c_{n+m} \quad (23.2.1)$$

откуда

$$\pi_1(S_1) = Z, \quad (23.2.2)$$

где Z — группа положительных и отрицательных целых чисел по сложению. Чтобы немедленно продемонстрировать физическое применение, заметим, что когда калибровочная группа $SO(2)$ полностью спонтанно нарушена, фактор-пространство есть сама группа $SO(2)$, имеющая топологию окружности. Поэтому в данном случае существует бесконечное число типов топологически стабильных вихревых нитей, характеризующихся положительным или отрицательным целым числом n . Например, так обстоит дело в сверхпроводнике II рода, где, как мы видели в разделе 21.6, группа $U(1)$ электромагнитной калибровочной инвариантности спонтанно нарушена до дискретной подгруппы Z_2 .

В общем случае все сферы S_d с $d > 1$ односвязны, и это означает, что их первая гомотопическая группа тривиальна, что обычно выражается в виде

$$\pi_1(S_d) = 0 \quad \text{при } d > 1. \quad (23.2.3)$$

Только немногие из более знакомых нам групп Ли являются многосвязными.

$$\pi_1(G) = \begin{cases} Z & G = U(k) & k \geq 1 \\ Z_2 & G = SO(k) & k \geq 3 \\ 0 & G = Spin(k) & k \geq 3 \\ 0 & G = SU(k) & k \geq 2 \\ 0 & G = USp(2k) & k \geq 1 \\ 0 & G = G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 \end{cases} \quad (23.24)$$

Здесь Z_2 — группа из двух элементов 1 и -1 , с групповым умножением, определенным как обычное умножение, а $Spin(n)$ — односвязная накрывающая группа группы $SO(n)$. (В разделе 2.7 мы видели, что $Spin(3)$ совпадает с $SU(2)$.) Кроме того, для прямого произведения двух многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ фундаментальной группой будет

$$\pi_1(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') = \pi_1(\mathcal{M}) \times \pi_1(\mathcal{M}'). \quad (23.25)$$

Можно оценить физическое значение групповой структуры $\pi_1(\mathcal{M})$, если задаться вопросом, что происходит, когда сближаются две первоначально удаленные параллельные вихревые нити в трех измерениях. Пока вихревые нити достаточно далеки друг от друга, их поля не взаимодействуют, поэтому конфигурацию можно описать, задав классы c' и c'' в $\pi_1(G/H)$, которым принадлежит каждая нить. Класс c , которому принадлежит вся конфигурация, определяется поведением полей на очень большой окружности, объемлющей обе вихревые нити. Непрерывной деформацией можно превратить эту окружность в две большие окружности, каждая из которых окружает свою вихревую нить, пересекающихся в точке посередине между нитями. Когда мы проходим такой замкнутый путь в двумерном пространстве, то, как и в определении произведения классов, мы проходим по пути в G/H , состоящем сначала из замкнутого пути класса c' , а затем — из замкнутого пути класса c'' . Отсюда мы приходим к выводу, что вся конфигурация соответствует классу $c = c' \times c''$, и поэтому две вихревые нити могут только слиться и образовать нить такого класса. В частности, если $c'' = c'^{-1}$, то вихревые нити могут только аннигилировать.

Рассмотрим теперь общую гомотопическую группу $\pi_k(\mathcal{M})$. Она во многом похожа на $\pi_1(\mathcal{M})$, если не считать того, что вместо рас-

смотрения отображений окружности S_1 на многообразие $\mathcal{M}$ мы рассматриваем отображения k -сферы S_k (поверхности $(k+1)$ -мерного шара) на $\mathcal{M}$, причем опять одна точка S_k всегда отображается в одну и ту же «базовую точку» p_0 из $\mathcal{M}$. Два таких отображения эквивалентны, если одно может быть продеформировано в другое при условии, что та же точка S_k всегда отображается в базовую точку. Элементами k -мерной гомотопической группы $\pi_k(\mathcal{M})$ являются классы эквивалентности таких отображений.

Часто удобно изображать d -сферу S_d как внутренность d -мерного гиперкуба, все точки границы которого отождествлены как одна точка. Например, мы уже видели, что окружность S_1 можно рассматривать как интервал $0 \leq \theta \leq 2\pi$, причем точки 0 и 2π отождествлены. Аналогично, можно сделать карту S_2 , например, поверхности Земли, выколов южный полюс и растянув получившийся лист на единичный квадрат $0 \leq z_1 \leq 1$, $0 \leq z_2 \leq 1$. При непрерывных отображениях этого квадрата на $\mathcal{M}$ все точки границы квадрата отображаются в одну точку на $\mathcal{M}$, поскольку все точки границы являются, на самом деле, одной точкой — южным полюсом сферы. В общем случае, два отображения $p(z_1, \dots, z_d)$ и $p'(z_1, \dots, z_d)$ сферы S_d на $\mathcal{M}$ гомотопически эквивалентны, если одно может быть непрерывно продеформировано в другое при сохранении равенства p на границе гиперкуба базовой точке p_0 .

Как и выше, для каждого класса эквивалентности c мы выбираем стандартное отображение $p(z_1, \dots, z_d; c)$. Произведение c_1 и c_2 определяется как класс эквивалентности, содержащий отображение

$$p(z_1, z_2, \dots, z_d; c_1, c_2) = \begin{cases} p(2z_1, z_2, \dots, z_d; c_1) & , 0 \leq z_1 \leq \frac{1}{2}, \\ p(2z_1 - 1, z_2, \dots, z_d; c_2) & , \frac{1}{2} \leq z_1 \leq 1. \end{cases} \quad (23.2.6)$$

Единичный элемент e определяется как класс эквивалентности, содержащий отображение c с $p = p_0$ для всех z , а обратный класс c^{-1} к c определяется как класс эквивалентности, содержащий отображение c

$$p^{-1}[z_1, z_2, \dots, z_d; c] = p[1 - z_1, z_2, \dots, z_d; c]. \quad (23.2.7)$$

Так же, как и для $\pi_1(\mathcal{M})$, можно показать, что это умножение ассоциативно и что $e \times c = c \times e = c$, $c^{-1} \times c = c \times c^{-1} = e$. Все группы $\pi_n(\mathcal{M})$ при $n \geq 2$ абелевы. (Существуют многообразия $\mathcal{M}$, для которых

$\pi_1(\mathcal{M})$ неабелева, например, плоскость с двумя или более выколотыми точками.)

В каждом из случаев, когда $\pi_k(\mathcal{M}) = Z$, должно существовать одно-однозначное отображение k -сферы S_k в k -сферу S'_k на $\mathcal{M}$, которое соответствует элементу «единица» в Z (не путать с единичным элементом группы, который равен нулю). Элемент v в Z с $v = 2, 3, \dots$ соответствует отображению S_k в ту же k -сферу S'_k на $\mathcal{M}$, которое v раз покрывает S'_k , причем якобиан преобразования $S_k \rightarrow S'_k$ положителен. Элемент v в Z с $v = -1, -2, \dots$ соответствует отображению $S_k \rightarrow S'_k$, которое покрывает S'_k $|v|$ раз, причем якобиан преобразования $S_k \rightarrow S'_k$ отрицателен.

Например, мы видели в предыдущем разделе, что в том случае, когда односвязная группа G нарушается до группы $U(1)$ электромагнетизма, возникают магнитные монополи. Как показано в приложении, в этом случае

$$\pi_2(G/U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z. \quad (23.2.8)$$

так что магнитный монополи обладает целочисленным квантовым числом v , которое, как показано в разделе 23.3, пропорционально магнитному заряду. Это квантовое число показывает, сколько раз 2-сфера большого радиуса, окружающая монополи, отображается на 2-сферу многообразия $G/U(1)$ полей голдстоуновских бозонов (при этом относительная ориентация двух 2-сфер одинакова или противоположна в зависимости от того, положительно или отрицательно число v). Квантовое число v называют *топологическим числом* *. Структура группы Z показывает, что это квантовое число сохраняется в том смысле, что монополи с квантовым числом v может объединиться с монополем с квантовым числом v' , образовав при этом только монополи с квантовым числом $v + v'$.

Если ненарушенной группой является $SO(n)$ с $n \geq 3$, то согласно результатам приложения В к этой главе

* Автор употребляет здесь и далее (в т. III) распространенный в англоязычной литературе термин *winding number*, который в разных русскоязычных источниках переводится как «число оборотов» или «число накрутки». Однако мы, следуя монографии А.С. Шварца «Квантовая теория поля и топология» (М.: Наука, 1989) предпочли использовать более общий термин *топологическое число*. — Прим. пер.

$$\pi_2(G/SO(n)) = \pi_1(SO(n)) = Z_2. \quad (23.2.9)$$

В этом случае существует только один тип «монополя», соответствующий элементу -1 группы Z_2 , который может аннигилировать только в пары. Важно отличать этот случай от того, когда группа $SO(n)$ заменяется ее односвязной накрывающей группой $Spin(n)$, для которой вообще нет монополей. Мы вернемся к этому вопросу в конце следующего раздела.

Другой пример. В предыдущем разделе мы видели, что скирмионы в квантовой хромодинамике с n легкими кварками соответствуют элементам $\pi_3(SU(n))$, что, согласно приложению B, есть Z . Таким образом, эти скирмионы обладают сохраняющимся целочисленным квантовым числом ν , которое, вероятно, может быть отождествлено с барионным числом. Аналогично, напомним из результатов предыдущего раздела, что инстантоны в калибровочной теории, основанной на простой калибровочной группе G , соответствуют элементам $\pi_4(G)$, которая, согласно приложению B, есть Z . Поэтому инстантоны, как и скирмионы, обладают целочисленным топологическим числом ν . В разделе 23.5 мы увидим, как это квантовое число можно выразить в виде локального функционала калибровочного поля.

23.3. Монополи

В качестве детального примера топологически нетривиальной полевой конфигурации рассмотрим монополь 'т Хофта–Полякова² и его обобщения. В разделе 23.1 мы видели, что если односвязная калибровочная группа G спонтанно нарушается до группы электромагнетизма $U(1)$, то конфигурации конечной энергии классифицируются в соответствии с элементами группы $\pi_2(G/U(1)) = \pi_1(U(1)) = Z$. (Случай неодносвязных групп Ли будет рассмотрен в конце этого раздела.) Согласно физической интерпретации гомотопических групп, которая обсуждалась в разделе 23.2, это означает, что данные конфигурации обладают сохраняющимся аддитивным квантовым числом. Однако нам все еще следует показать, что каждая из таких стационарных конфигураций действительно существует, и дать физическую интерпретацию их топологических квантовых чисел.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим теорию (похожую на электрослабую модель Джорджи и Глешоу¹²), в которой

калибровочная группа $SU(2)$ спонтанно нарушается вакуумным средним $SU(2)$ триплета скалярных полей Φ_n . (В конце раздела мы поясним, почему в данном случае мы говорим о калибровочной группе $SU(2)$, а не $SO(3)$.) Лагранжиан скалярных и калибровочных полей в пространстве-времени Минковского выберем в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_n^{\mu\nu} - \frac{1}{2} D_\mu \Phi_n D^\mu \Phi_n - V(\Phi_n \Phi_n), \quad (23.3.1)$$

где

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\nu} - \partial_\nu A_{\mu} + e\epsilon_{nml} A_{m\mu} A_{\nu l}, \quad (23.3.2)$$

$$D_\mu \Phi_n \equiv \partial_\mu \Phi_n + e\epsilon_{nml} A_{m\mu} \Phi_l, \quad (23.3.3)$$

а функция $V(\Phi_n \Phi_n)$ предполагается положительной и равной нулю при ненулевом значении $\langle \Phi \rangle$ (считающимся положительным) величины $\sqrt{\Phi_n \Phi_n}$. (В большинстве работ по монополям принимается, что V — полином четвертой степени $\lambda(\Phi_n \Phi_n - \langle \Phi \rangle^2)^2$ с $\lambda > 0$, но мы здесь не будем этого предполагать.) Выражение (23.3.1) описывает теорию, в которой имеется независящее от пространственно-временных координат вакуумное решение с $A_{n\mu} = 0$. Вакуумное среднее Φ_n с $\Phi_n \Phi_n = \langle \Phi \rangle^2$ нарушает $SU(2)$ группу симметрии теории до ее подгруппы $U(1)$, которую можно отождествить с калибровочной группой электродинамики. Однако мы будем искать топологически нетривиальные неоднородные, но не зависящие от времени классические решения во временной калибровке, в которой $A_n^0 = 0$, но $A_n^i \neq 0$. В этом случае лагранжиан равен взятой с обратным знаком плотности потенциальной энергии H , которая равна

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} F_{nij}^2 + \frac{1}{2} (D_i \Phi_n)^2 + V(\Phi), \quad (23.3.4)$$

(квадраты подразумевают очевидные свертки по индексам). Поскольку все члены в выражении (23.3.4) положительны, в конфигурации с конечной энергией интеграл от каждого члена должен по-отдельности сходиться.

В частности, для того, чтобы сходилась интеграл от $V(\Phi_n \Phi_n)$, вектор Φ_n должен иметь фиксированную длину $\langle \Phi \rangle$ на бесконечности, так что каждая конфигурация конечной энергии определяет

гладкое отображение большой 2-сферы $\mathcal{S}$, окружающей монополярную конфигурацию, на 2-сферу Φ_n , где $\Phi_n \Phi_n = \langle \Phi \rangle^2$. Когда $\hat{\mathbf{x}}$ принимает значения на $\mathcal{S}$, Φ_n может любое целое число N раз пробегать значения на сфере $\Phi_n \Phi_n = \langle \Phi \rangle^2$. При этом якобиан $\text{Det}(\partial x / \partial \Phi)$ может быть положительным, и в этом случае говорят, что топологическое число равно N , или отрицательным, и в этом случае топологическое число равно $-N$.

Чтобы понять, какое отношение топологическое число к магнитному заряду монополя, необходимо сначала рассмотреть, что в данной теории наблюдается как «магнитное поле». Какой бы ни была полевая конфигурация, можно ввести калибровку, в которой скалярное поле Φ_n в любом заданном конечном объеме направлено в определенную сторону, например, вдоль третьей оси, так что в этой области связанное с ненарушенной $U(1)$ подгруппой $SU(2)$ калибровочное поле есть A_{3i} . Т Хофт нашел калибровочно-инвариантный тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, который в такой калибровке сводится к обычному тензору напряженности электромагнитного поля $\partial_\mu A_{3\nu} - \partial_\nu A_{3\mu}$:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} \hat{\Phi}_n - \frac{1}{e} \epsilon_{nml} \hat{\Phi}_n D_\mu \hat{\Phi}_m D_\nu \hat{\Phi}_l \quad (23.3.5)$$

где $\hat{\Phi}_n \equiv \Phi_n / \sqrt{\Phi_m \Phi_m}$. Чтобы проверить, что в калибровке с постоянными $\hat{\Phi}_n$ тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ — обычный тензор напряженности электромагнитного поля (и для дальнейших применений), воспользуемся выражениями (23.3.2) и (23.3.3) и тождеством $\epsilon_{abc} \epsilon_{ade} = \delta_{bd} \delta_{ce} - \delta_{be} \delta_{cd}$, чтобы записать $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ в виде¹³

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu (\hat{\Phi}_n A_{n\nu}) - \partial_\nu (\hat{\Phi}_n A_{n\mu}) - \frac{1}{e} \epsilon_{nml} \hat{\Phi}_n \partial_\mu \hat{\Phi}_m \partial_\nu \hat{\Phi}_l. \quad (23.3.6)$$

Таким образом, в калибровке, где $\hat{\Phi}_n$ — фиксированный единичный вектор, направленный вдоль третьей оси, имеем, как и обещано,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_{3\nu} - \partial_\nu A_{3\mu}.$$

Магнитный заряд g любой локализованной полевой конфигурации определяется как коэффициент $1/4\pi$, умноженный на магнитный поток через большую замкнутую поверхность $\mathcal{S}$ вокруг конфигурации:

$$4\pi g \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{F}_{ij} d^2 S_k. \quad (23.3.7)$$

Первые два члена в выражении (23.3.6) для $\mathcal{F}_{ij}$ являются производными, и поэтому не вносят вклада в интеграл (23.3.7), так что

$$g = -\frac{1}{8\pi e} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{nml} \int_{\mathcal{S}} \hat{\phi}_n \partial_i \hat{\phi}_m \partial_j \hat{\phi}_l d^2 S_k. \quad (23.3.8)$$

Это выражение обладает важным свойством — оно топологически инвариантно, т. е., интегрируя по частям, если необходимо, можно получить, что изменение g в результате бесконечно малой вариации $\delta \hat{\phi}_n$ поля $\hat{\phi}_n$ равно

$$\delta g = -\frac{3}{8\pi e} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{nml} \int_{\mathcal{S}} \delta \hat{\phi}_n \partial_i \hat{\phi}_m \partial_j \hat{\phi}_l d^2 S_k.$$

Но, поскольку $\hat{\phi}$ есть единичный вектор, $\delta \hat{\phi}$, а также $\partial_i \hat{\phi}$ и $\partial_j \hat{\phi}$ все лежат в плоскости, перпендикулярной $\hat{\phi}$, так что

$$\varepsilon_{nml} \delta \hat{\phi}_n \partial_i \hat{\phi}_m \partial_j \hat{\phi}_l = 0,$$

и поэтому $\delta g = 0$. Величина (23.3.8) связана с топологическим инвариантом, который называется *индексом Кронекера*.

Поскольку g — поверхностный интеграл, он аддитивен. Это означает, что для любых двух удаленных друг от друга локализованных конфигураций та поверхность $\mathcal{S}$, которая используется для вычисления g , может быть взята в виде пары сфер, окружающих каждая свою конфигурацию, соединенных тонкой перемычкой, так что значение g для всей системы будет суммой значений g_1 , g_2 для отдельных локализованных конфигураций. Кроме того, поскольку g — топологический инвариант, равенство $g = g_1 + g_2$ будет сохраняться для любой полевой конфигурации, получающейся плавным слиянием двух конфигураций с магнитными зарядами g_1 и g_2 . Отсюда следует, что g должно быть пропорционально топологическому числу. Арафуне, Фройнд и Гебель¹³ проверили это и вычислили коэффициент пропорциональности, используя формулу (23.3.8) для произвольного топологического числа. Здесь мы просто вычислим

коэффициент, исследуя монополь 'т Хофта–Полякова ², поля которого соответствуют топологическому числу единица.

Как мы видели в предыдущем разделе, «тождественный» (не путать с единицей) элемент $\mathcal{S}$ в $\pi_2(SU(2)/U(1))$, который соответствует элементу «единица» в Z , состоит из конфигураций, в которых 2-сфера S на бесконечности один раз (с положительным якобианом) отображается на сферу, описываемую полем $\hat{\phi}_n$. В качестве представителя этого класса можно взять конфигурацию, в которой на бесконечности от направлено так же, как $\mathbf{x}$. Для построения такой конфигурации, потребуем симметрии относительно объединенных вращений $\mathbf{j} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ и $\mathbf{x}$, а также сохранения четности, и выдвинем анзац:

$$\phi_n = \hat{x}_n \langle \phi \rangle F(r), \quad (23.3.9)$$

$$A_{ni} = \frac{\varepsilon_{nil} \hat{x}_l}{er} G(r). \quad (23.3.10)$$

Имеется важная аналогия между этой полевой конфигурацией и вихревой нитью в сверхпроводнике. Решение $\phi = \pm l\phi/2e$ для поля голдстоуновского бозона, найденное в разделе 21.6, показывает, что несмотря на спонтанное нарушение калибровочной и вращательной инвариантности, решение в виде вихревой нити инвариантно относительно комбинации глобального калибровочного преобразования, для которого $\phi \rightarrow \phi + \Lambda$, и жесткого вращения $\phi \rightarrow \phi \pm 2e\Lambda/l$. Аналогично, монопольное решение вида (23.3.9)–(23.3.10) неинвариантно относительно вращений или калибровочных преобразований, но инвариантно относительно жесткого трехмерного пространственного вращения и такого же глобального $SO(3)$ калибровочного преобразования.

Как уже отмечалось, для того, чтобы интеграл от $V(\phi_n \phi_n)$ сошелся, необходимо, чтобы $\phi_n \phi_n$ стремилось к $\langle \phi \rangle^2$ при $r \rightarrow \infty$, так что в этом пределе $F(r) \rightarrow 1$. Чтобы установить предельное поведение $G(r)$, заметим, что ковариантная производная скалярного поля равна

$$D_i \phi_n = \pm \langle \phi \rangle \left[(1 - G(r)) (\delta_{ni} - \hat{x}_n \hat{x}_i) \frac{F(r)}{r} + \hat{x}_n \hat{x}_i F'(r) \right], \quad (23.3.11)$$

так что скалярное слагаемое в гамильтониане имеет вид

$$\frac{1}{2}(D_i\varphi_n)^2 = \langle\varphi\rangle^2 \left[\frac{F^2(1-G)^2}{r^2} + \frac{F'^2}{2} \right], \quad (23.3.12)$$

Для того, чтобы интеграл от этого выражения был конечен, необходимо, чтобы $G(r) \rightarrow 1$ и $F'(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Наконец, напряженность поля (23.3.2) равна

$$F_{nij} = \frac{\varepsilon_{ijk}}{e} \left[-\frac{1}{r} G'(r)(\delta_{nk} - \hat{x}_n \hat{x}_k) - \frac{1}{r^2} (2G(r) - G^2(r)) \hat{x}_n \hat{x}_k \right], \quad (23.3.13)$$

так что янг-миллсовский член в гамильтониане равен

$$\frac{1}{4}(F_{nij})^2 = \frac{1}{e^2} \left[\frac{G'^2}{r^2} + \frac{(2G - G^2)^2}{2r^4} \right] \quad (23.3.14)$$

Интеграл от этого выражения сходится на больших расстояниях, если $G'(r)$ достаточно быстро убывает при $r \rightarrow \infty$.

Эти результаты можно использовать для вычисления магнитного заряда данной конфигурации. Из выражения (23.3.13), с учетом предельных значений $G(\infty) = 1$ и $G'(\infty) = 0$, следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$F_{nij} \rightarrow \frac{\varepsilon_{ijk} \hat{x}_k \hat{x}_n}{er^2}. \quad (23.3.15)$$

Поскольку $D_i\varphi_n$ быстро убывает при $r \rightarrow \infty$, магнитная часть тензора напряженности поля в этой калибровке определяется при $r \rightarrow \infty$ первым членом в выражении (23.3.5), так что на больших расстояниях магнитное поле равно

$$B_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk} \rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \hat{\varphi}_n F_{njk} \rightarrow -\frac{\hat{x}_i}{er^2}. \quad (23.3.16)$$

Следовательно данная конфигурация имеет магнитный заряд $g = -1/e$. Согласно приведенным выше общим рассуждениям, магнитный заряд конфигурации с топологическим числом n , отвечающим элементу v группы Z , равен

$$g_v = -v/e. \quad (23.3.17)$$

Чтобы найти стабильную конфигурацию, минимизирующую интеграл от гамильтониана (23.3.4), требуются детальные численные расчеты. Однако существует предельный случай, в котором можно получить аналитическое решение. Для того, чтобы это увидеть, удобно сначала вывести выражение для общей нижней границы энергии монополя при заданном магнитном заряде g (Богомольный¹⁰). Заметим, что выражение (23.3.4) можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} (F_{nij} \mp \epsilon_{ijk} D_k \Phi_n)^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{nij} D_k \Phi_n + V(\Phi_n \Phi_n), \quad (23.3.18)$$

Используя тождество Бьянки (15.3.9), можно переписать второе слагаемое:

$$\pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{nij} D_k \Phi_n = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} D_k (F_{nij} \Phi_n) = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_k (F_{nij} \Phi_n),$$

так что интеграл от него равен заданному магнитному заряду:

$$\pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x F_{nij} D_k \Phi_n = \pm \langle \Phi \rangle \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \pm 4\pi \langle \Phi \rangle g.$$

Поскольку все другие члены в $\mathcal{H}$ положительны, мы пришли к общей нижней границе энергии конфигурации с магнитным зарядом g :

$$E = \int d^3x \mathcal{H} \geq 4\pi \langle \Phi \rangle |g|. \quad (23.3.19)$$

При $g = \pm 1/e$ это дает энергию $E \geq 4\pi \langle \Phi \rangle |g|$, и при малой константе связи e это много больше, чем поправки за счет квантовых флуктуаций, которые самое большее — порядка $\langle \Phi \rangle$. Именно поэтому можно серьезно относиться к классической конфигурации как к главному члену в разложении по теории возмущений.

Теперь возникает искушение попробовать минимизировать энергию при заданном магнитном заряде, положив первый член в (23.3.18) равным нулю, так что

$$F_{nij} = \pm \epsilon_{ijk} D_k \Phi_n, \quad (23.3.20)$$

но в общем случае это не приводит к конфигурации, при которой энергия стационарна. Условием того, что энергия будет стационар-

ной по отношению к вариациям скалярных полей, является уравнение поля

$$D_k D_k \Phi_n = 2\Phi_n V'(\Phi_n \Phi_n), \quad (23.3.21)$$

в то время как из условия (23.3.20) совместно с тождеством Бьянки (15.3.9) вытекало бы, что $D_k D_k \Phi_n = 0$. Из этого аргумента следует, что в частном случае, когда $V(\Phi_n \Phi_n)$ очень мало, возможно, наложив условие (23.3.20), почти достичь нижней границы (23.3.19) и следовательно минимизировать энергию при заданном магнитном заряде. (Если V — полином четвертой степени $\lambda(\Phi_n \Phi_n - \langle \Phi \rangle^2)^2$, предположение о малости V означает, что $\lambda \ll e^2$, как в сверхпроводниках I рода.) Подобные стабильные конфигурации изучались таким способом Богомольным¹⁰. Ранее эти конфигурации были найдены Прасадом и Соммерфилдом¹⁴ без непосредственного использования условия (23.3.20). Обычно их называют *БПС монополями*.

Условие Богомольного (23.3.20) позволяет записать дифференциальные уравнения первого порядка для $F(r)$ и $G(r)$, решить которые намного легче, чем полевые уравнения второго порядка, выведенные непосредственно из условия стационарности энергии. Используя выражения (23.3.11) и (23.3.13), находим, что члены в условии (23.3.20), пропорциональные $\epsilon_{ijk}[\delta_{kn} - \hat{x}_k \hat{x}_n]$ и $\epsilon_{ijk} \hat{x}_k \hat{x}_n$ соответственно, приводят к дифференциальным уравнениям

$$e\langle \Phi \rangle F(1 - G) = G', \quad (23.3.22)$$

$$e\langle \Phi \rangle r^2 F' = G(2 - G). \quad (23.3.23)$$

С учетом граничных условий $F(r) \rightarrow 1$ и $G(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ эти уравнения имеют решение

$$F = \text{cth} \rho - \frac{1}{\rho}, \quad G = 1 - \frac{\rho}{\text{sh} \rho}, \quad (23.3.24)$$

где $\rho \equiv e\langle \Phi \rangle r$. Заметим, в частности, что поле Φ_n , задаваемое выражениями (23.3.9) и (23.3.24), обращается в нуль при $r \rightarrow 0$, так что, как это и отмечалось в разделе 23.1, $SU(2)$ симметрия в центре монополя восстанавливается.

Вернемся к случаю потенциала V произвольной величины. Монополю 'т Хофта–Полякова стабилен, т. к. нет конфигураций

с меньшим топологическим квантовым числом, в которые он мог бы распадаться. Конфигурации с большими значениями магнитного заряда в общем случае нестабильны. Существуют также интересные конфигурации, обладающие как магнитным, так и электрическим зарядом, — так называемые *дионы* ¹⁵.

Существует иной способ понять значение $1/e$ магнитного заряда монополя 'т Хофта–Полякова, восходящий к первой работе Дирака по магнитным монополям ¹⁶. Как отмечалось выше, вместо той калибровки, которую мы использовали, можно совершить калибровочное преобразование $\varphi_n \rightarrow R_{nm}(\mathbf{x})\varphi_m$, которое поворачивает φ_n в точку с фиксированным направлением $\hat{\mathbf{v}}$, например, вдоль третьей оси. Тогда напряженность поля $B_{nk} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{nij}$ преобразуется в $R_{nm}B_{mk}$, которая стремится к $\hat{\mathbf{v}}_n \hat{x}_k / er^2$ при $r \rightarrow \infty$, так что мы не должны проектировать это на направление локальной ненарушенной симметрии. Цена, которую приходится заплатить за это удобство, заключается в том, что калибровочное преобразование сингулярно: вращение, переводящее вектор, направленный по $\hat{\mathbf{x}}$, на некое фиксированное направление $\hat{\mathbf{v}}$, имеет вид

$$R(\hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{v}}) = 1 - (1 - \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}}^T + \hat{\mathbf{v}} (\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}})^T + (\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}^T - \frac{(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}})(\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}})^T}{1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}}}, \quad (23.3.25)$$

и оно сингулярно при $\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{v}}$. Это вращение R не единственно; например, можно осуществить вращение $R(\hat{\mathbf{x}}; -\hat{\mathbf{v}})$, переводящее $\hat{\mathbf{x}}$ по направлению $-\hat{\mathbf{v}}$, а затем фиксированное вращение на 180° вокруг некоторой оси, перпендикулярной $\hat{\mathbf{v}}$, но тогда получившееся вращение станет сингулярным при $\hat{\mathbf{x}} = +\hat{\mathbf{v}}$. Чтобы избежать сингулярностей, нам следует выбирать в разных областях разные калибровки. Так, если $\hat{\mathbf{v}}$ направлено вдоль третьей оси, можно использовать в области $0 < \theta < \theta_0$ калибровку, которая сингулярна при $\theta = \pi$, а в области $\theta_0 < \theta < \pi$ — калибровку, которая сингулярна при $\theta = 0$. Здесь θ_0 — произвольный угол в интервале $0 < \theta_0 < \pi$, часто выбираемый равным $\pi/2$. Везде за исключением $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ магнитное поле на больших расстояниях дается выражением $B \rightarrow g\hat{\mathbf{x}}/r^2$, где g — магнитный заряд. Его можно записать как ротор $\nabla \times \mathbf{A}$ векторного потенциала, единственной ненулевой компонентой которого является азимутальная ϕ -компонента. При $0 < \theta < \theta_0$ мы должны взять

$A_\phi = g(1 - \cos \theta)/r \sin \theta$, сингулярную при $\theta = \pi$, а при $\theta_0 < \theta < \pi$ должны взять $A_\phi = -g(1 + \cos \theta)/r \sin \theta$, сингулярную только при $\theta = 0$. Разность $\Delta \mathbf{A}$ между этими двумя векторными потенциалами есть градиент $\nabla \Lambda$, $\Lambda = 2g\phi$, который, конечно, не влияет на магнитное поле при $0 < \theta < \pi$, но может влиять на динамику заряженных полей. Калибровочное преобразование с $\Lambda = 2g\phi$ изменяет поле зарядом q на множитель $\exp(2iqg\phi)$, который однозначен только, если $2qg$ — целое число. Это и есть условие квантования Дирака. Существование магнитного монополя с магнитным зарядом g требует, чтобы все электрические заряды были бы целыми кратными величины $(2g)^{-1}$. Это условие автоматически удовлетворяется для монополя 'т Хофта–Полякова, т. к. $g = 1/e$, а все заряды в модели Джорджи–Глешоу являются целыми кратными $e/2$.

В результате открытия нейтральных токов модель Джорджи–Глешоу была исключена как модель слабых и электромагнитных взаимодействий, однако существование магнитных монополей ожидается и в других теориях, в которых односвязная группа G спонтанно нарушается не до $U(1)$, но до некоторой подгруппы $H' \times U(1)$, где H' односвязна. (Согласно приложению В к этой главе, для односвязных групп G имеем $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$, и если $H = H' \times U(1)$, то $\pi_1(H) = \pi_1(H') \times \pi_1(U(1)) = \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$.) При спонтанном нарушении калибровочной группы $SU(2) \times U(1)$ стандартной электрослабой теории монополи не возникают, т. к. группа не односвязна. (Подробнее об этом ниже.) Однако монополи появляются при спонтанном нарушении односвязной калибровочной группы G теорий объединения сильных и электрослабых взаимодействий, например, группы $SU(4) \times SU(4)$, $SU(5)$ или $Spin(10)$, до калибровочной группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ стандартной модели. (См. раздел 21.5.) В этом случае ожидается, что монополи имеют массу, равную массе $M \approx 10^{15} - 10^{16}$ ГэВ возникающих при таком спонтанном нарушении векторных бозонов, умноженной на обратный квадрат калибровочной константы связи. Такие монополи могли бы рождаться во время фазового перехода Вселенной, при котором G была спонтанно нарушена до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ при температуре T порядка M .

Это приводит к проблемам в ряде космологических моделей¹⁷. Перед этим фазовым переходом скалярные поля с необходимостью были некоррелированы на расстояниях, превышающих размер горизонта —наибольшее расстояние, которое мог пройти свет с момента начальной сингулярности. В стандартных космологических

теориях ¹⁸ в ранний момент времени t размер горизонта составляет величину порядка $t \approx (G_N T^4)^{-1/2}$ (где $G_N \approx (10^{19} \text{ ГэВ})^{-2}$ — ньютонова постоянная), так что плотность числа монополей, родившихся в этот момент, было бы порядка $t^{-3} \approx (G_N M^4)^{3/2}$, что меньше плотности числа фотонов M^3 при $T \approx M$ на множитель порядка $(G_N M^2)^{3/2}$. При $M \approx 10^{15} \text{ ГэВ}$ этот множитель порядка 10^{-12} . Если монополи не находят друг друга и не аннигилируют, то это отношение должно оставаться примерно тем же до сегодняшнего дня, но при этом на каждый нуклон сегодня приходится примерно 10^9 фотонов микроволнового излучения, следовательно, на нуклон должно приходиться по меньшей мере 10^{-3} монополей. Это находится в разительном противоречии с наблюдениями. Указанный потенциальный парадокс был одной из причин появления инфляционных космологических моделей ¹⁹, в рамках которых существует период экспоненциального расширения Вселенной. Если это расширение произошло до образования монополей, оно очень сильно увеличило бы размер горизонта, если же оно произошло после образования монополей (но до периода вторичного нагрева), то резко уменьшилась бы плотность монополей.

Открытие монополей любого типа откроет возможности наблюдения примечательных явлений, в том числе, существования фермион-монопольных конфигураций с дробным фермионным числом ²⁰, и нарушение сохранения числа барионов при фермион-монопольном рассеянии.

* * *

Выше мы рассматривали только монополи, связанные со спонтанным нарушением односвязной калибровочной группы G . Возникает следующий вопрос. Для каждой группы Ли G , односвязна она или нет, существует односвязная группа $\bar{G}$ с той же алгеброй Ли, известная как *накрывающая группа* группы G . (Примеры см. в разделе 2.7.) Всякая не односвязная группа имеет меньше представлений, чем ее накрывающая группа (например, двусвязные группы $SO(n)$ имеют только скалярные, векторные и тензорные представления, в то время, как их накрывающие группы $Spin(n)$ имеют вдобавок спинорные представления). Если дело обстоит так, что теория не содержит полей, принадлежащих дополнительным представле-

ниям накрывающей группы, можем ли мы по желанию рассматривать в качестве калибровочной группы теории либо неодносвязную группу G , либо ее накрывающую группу $\bar{G}$? В частности, зависит ли список возможных монополей от того, содержит ли теория только поля, преобразующиеся как представления неодносвязной группы G , или дополнительные поля, реализующие представления ее накрывающей группы $\bar{G}$? Например, в оригинальной модели Джорджи–Глешоу¹² содержались только скалярные поля, принадлежавшие три-векторному представлению $SO(3)$, но в модель входили и фермионы, принадлежавшие спинорным представлениям накрывающей группы $Spin(3) = SU(2)$. Изменяются ли разрешенные значения магнитного заряда монополя, если добавить скалярные поля, принадлежащие спинорным представлениям $SU(2)$? Изменяются ли эти значения, если убрать фермионы?

Ответ заключается в том, что список возможных монополей не зависит от того, говорим ли мы, что калибровочной группой является неодносвязная группа G или ее накрывающая группа $\bar{G}$, и поэтому он не изменяется, если мы добавим или уберем поля, принадлежащие представлениям $\bar{G}$, которые не являются представлениями G . Как мы видели в разделе 23.1, в общем случае топологически стабильные подобные монополям конфигурации классифицируются по элементам группы $\pi_2(G/H)$. Согласно приведенным в приложении В к этой главе результатам, когда H погружена в G , эта гомотопическая группа состоит из тех элементов $\pi_1(H)$, которые отвечают тривиальному элементу $\pi_1(G)$. Но если мы заменяем G ее накрывающей группой $\bar{G}$, мы также заменяем H другой подгруппой $\bar{H}$, поскольку, когда H погружено в $\bar{G}$, некоторые из петель в H не возвращаются в базовую точку. Это как раз те петли, которые не становятся тривиальными при погружении H в G , так что $\pi_2(G/H) = \pi_1(H')$. Таким образом, до тех пор, пока речь идет о монополях, мы можем с тем же успехом говорить, что калибровочной группой является не G , а $\bar{G}$.

Например, пока рассматриваются скалярные поля, можно считать, что калибровочной группой модели Джорджи–Глешоу является двусвязная группа $SO(3)$, а не ее односвязная накрывающая группа $SU(2)$. Тогда ненарушенной подгруппой является $SO(2)$, в которой мы отождествляем преобразования, отличающиеся вращением на 360° . Таким образом, группа $\pi_1(SO(2))$ включает петли, идущие от единичного элемента к вращению на 360° . Однако, если

$SO(3)$ погружена в $SU(2)$, подобные пути уже не будут петлями. Но группа $\pi_2(SO(3)/SO(2))$ отличается от группы $\pi_1(SO(2))$: когда $SO(3)$ погружается в $SU(2)$, эта группа исключает гомотопически нетривиальные петли, т. е. как раз те петли, которые идут от единичного элемента к вращению на 360° . Таким образом, $\pi_2(SO(3)/SO(2))$ есть $U(1)$ подгруппа группы $SU(2)$, так, как будто с самого начала калибровочной группой теории была группа $SU(2)$.

Всегда удобно считать, что калибровочная группа G , связанная с любой полупростой калибровочной алгеброй, является односвязной накрывающей группой, так что можно использовать простой результат: $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$. Как мы только что видели, в этом случае свойства связности H фиксируются ее погружением в G , или, точнее, погружением алгебры Ли группы H в алгебру Ли группы G . Например, калибровочная алгебра $SU(3)$ может быть спонтанно нарушена либо в подалгебру $SU(2)$, относительно которой фундаментальное представление $SU(3)$ преобразуется как дублет плюс синглет, либо в подалгебру $SO(3)$, относительно которой фундаментальное представление $SU(3)$ преобразуется как три-вектор. В первом случае у нас нет возможности считать, что ненарушенная подгруппа есть $SO(3)$; так как $\pi_1(SU(2)) = 0$, монополей в данном случае нет. Во втором случае, в качестве ненарушенной калибровочной группы следует рассматривать не $SU(2)$, а $SO(3)$, так что в теории есть конфигурации типа монополей, которые классифицируются согласно элементам группы $\pi_1(SO(3)) = Z_2$. На природу ненарушенной подалгебры H и ее погружение в калибровочную алгебру G могут оказывать динамическое влияние разные типы полей, которые вводятся в лагранжиан, но как только алгебра H и ее погружение в алгебру G зафиксированы, список монополей оказывается совершенно не зависящим от набора полей в теории.

В частности, рассуждения, которые привели к условию квантования Дирака, показывают, что в любой теории, в которой алгебра Ли спонтанно нарушена до подалгебры, включающей оператор электрического заряда, разрешенные магнитные заряды являются целыми кратными обратной величины наименьшего электрического заряда, появляющегося в представлениях накрывающей группы G , независимо от того, существуют ли частицы такого заряда в теории на самом деле. Если алгебра G сама содержит генератор $U(1)$, то мы должны рассматривать накрывающую группу этой $U(1)$, которая является некомпактной группой трансляций вдоль

действительной оси. Если такой $U(1)$ генератор возникает как слагаемое в операторе электрического заряда, как это имеет место в стандартной электрослабой теории, то в представлениях накрывающей группы нет минимального электрического заряда, а следовательно, нет и монополей.

23.4. Интегральный инвариант Картана–Маурера

Большую помощь в понимании топологии различных компактных многообразий оказывает то, что часто существует топологически инвариантная величина, которую можно записать как интеграл по многообразию. Это окажется важными при обсуждении инстантонов в следующем разделе, кроме того, мы уже использовали этот факт при изучении членов Весса–Зумино–Виттена в разделах 19.8 и 22.7.

Рассмотрим отображение произвольного компактного многообразия S нечетной размерности d с координатами $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d$ на многообразие $\mathcal{M}$ матриц $g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d)$ с $\text{Det } g \neq 0$. (Для интересующих нас приложений обычно $\mathcal{S}$ является сферой S_d , а g — элементами группы Ли G в некотором представлении.) Определим функционал $\mathcal{I}(g)$, известный как форма Картана–Маурера:

$$\mathcal{I}[g] = \int d\theta^1 d\theta^2 \dots d\theta^d \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \times \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \dots g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right\}, \quad (23.4.1)$$

где $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d}$ — полностью антисимметричная величина с $\epsilon^{12\dots d} = 1$. Из того, что $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} = -(-1)^d \epsilon^{i_2 \dots i_d i_1}$, следует, что $\mathcal{I}[g]$ обращается в нуль, когда $\mathcal{S}$ четномерно, поэтому ограничимся рассмотрением случая нечетного d . Полезность формы Маурера–Картана вытекает из ряда ее примечательных свойств.

Во-первых, этот интеграл не зависит от координатной системы, использованной для параметризации многообразия $\mathcal{S}$. Это довольно очевидно следует из того, что $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d}$ есть контравариантная тензорная плотность, в том смысле, что

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \frac{\partial \theta'^{j_1}}{\partial \theta^{i_1}} \frac{\partial \theta'^{j_2}}{\partial \theta^{i_2}} \dots \frac{\partial \theta'^{j_d}}{\partial \theta^{i_d}} = \text{Det} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right) \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_d}.$$

Во-вторых, интеграл (23.4.1) инвариантен также относительно малых деформаций отображения $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{M}$. используя свойства следа, видим, что в результате инфинитезимального изменения $g \rightarrow g + \delta g$ функции $g(\theta)$ изменение в каждом множителе $g^{-1} \partial g / \partial \theta^i$ в (23.4.1) вносит один и тот же вклад в изменение $\mathcal{I}[g]$:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{I}[g] &= d \int d\theta^1 d\theta^2 \dots d\theta^d \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \\ &\quad \times \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \dots \delta \left(g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

Далее, последний множитель в следе равен

$$\begin{aligned} \delta \left(g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \right) &= -g^{-1}(\theta) \delta g(\theta) g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} + g^{-1}(\theta) \frac{\partial \delta g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}} \\ &= g^{-1}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^{i_d}} (\delta g(\theta) g^{-1}(\theta)) g(\theta). \end{aligned}$$

После интегрирования по частям производная $\partial / \partial \theta^{i_d}$ при действии на частные производные $\partial g(\theta) / \partial \theta^{i_n}$ не дает вклада, поскольку $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_d}$ антисимметрична. Оставшиеся $d - 1$ членов, в которых ∂ действует на $g^{-1}(\theta)$, все равны друг другу, не считая переменного знака, поэтому, поскольку их четное число, сумма этих членов равна нулю.

Наконец, обратимся к частному случаю, когда $\mathcal{S}$ есть сфера S_d . Поскольку $\mathcal{I}[g]$ инвариантен относительно малых вариаций $g(\theta)$, этот инвариант можно рассматривать как функцию $\mathcal{I}(c)$ только гомотопического класса c , которому принадлежит $g(\theta)$. Интегралы $\mathcal{I}(c)$ (или, строго говоря, $\exp\{\mathcal{I}(c)\}$) реализуют представление гомотопической группы $\pi_d(\mathcal{M})$ в том смысле, что

$$\mathcal{I}(c_a \times c_b) = \mathcal{I}(c_a) + \mathcal{I}(c_b).$$

(Если $g_a(\theta)$ и $g_b(\theta)$ — элементы гомотопических классов c_a и c_b соответственно, то гомотопический класс $c_a \times c_b$ состоит из отображений, гомотопически эквивалентных отображению

$$g_{ab}(\theta) = \begin{cases} g_a(2\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) & 0 \leq \theta_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g_b(2\theta_1 - 1, \theta_2, \dots, \theta_d) & \frac{1}{2} \leq \theta_1 \leq 1. \end{cases}$$

Части интеграла $\mathcal{A}[g_{ab}]$ по полусферам $\theta \leq \theta_1 \leq 1/2$ и $1/2 \leq \theta_1 \leq 1$ можно вычислить, перейдя к переменным $\theta'_1 = 2\theta_1$ и $\theta'_1 = 2\theta_1 - 1$ соответственно, что дает члены $\mathcal{A}(c_a)$ и $\mathcal{A}(c_b)$ в выражении (23.4.2).

В частности, отсюда следует, что для гомотопических классов e , c , $c \times c$ и т. д., а также c^{-1} , $c^{-1} \times c^{-1}$ и т. д.

$$\mathcal{A}(c^n) = n\mathcal{A}(c). \quad (23.4.3)$$

Если для некоторого c интеграл $\mathcal{A}(c) \neq 0$, то все эти инвариаты различны, так что различны все классы c^n , и поэтому они образуют подгруппу Z группы $\pi_d(\mathcal{M})$. Это почти объясняет большую разницу между размерами гомотопических групп в случае нечетных и четных размерностей, показанную в приложении В к этой главе. Например, $\pi_1(U(1)) = Z$, $\pi_3(G) = Z$ для всех простых групп Ли G , а $\pi_5(SU(n)) = Z$ для всех $n \geq 3$, в то время как для всех групп Ли G $\pi_2(G) = 0$ и $\pi_4(G)$ конечна.

В качестве простого примера, когда $\mathcal{A}(c) \neq 0$, рассмотрим гомотопическую группу $\pi_1(U(1))$, совпадающую с группой $\pi_1(S_1)$, которую мы использовали как пример в начале предыдущего раздела. Всякое отображение $S_1 \mapsto U(1)$ можно охарактеризовать значением v , равным разности чисел, показывающих, сколько раз фаза элемента $U(1)$ обходит S_1 против часовой стрелки, и сколько раз эта фаза обходит S_1 в противоположном направлении, пока координата θ обходит S_1 , причем два отображения гомотопически эквивалентны, если и только если значения v у них одинаковы. v -й класс содержит отображение $g_v(\theta) = \exp(2iv\pi\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$, для которого

$$\mathcal{A}[g_v] = \int_0^1 d\theta \exp(-2iv\pi\theta) \frac{d}{d\theta} \exp(2iv\pi\theta) = 2iv\pi,$$

и это подтверждает, что $\pi_1(U(1)) = Z$.

Имея целью вычисление $\mathcal{A}(g)$ в менее простых случаях, предположим, что мы непрерывно деформируем множество $\mathcal{M}$ в группу Ли H размерностью d . Результат осуществления преобразования H с параметрами θ , за которым следует преобразование H с параметрами j , есть преобразование H с параметрами $\theta'(\theta, j)$. На языке матричного представления $g(\theta)$ это можно записать в виде

$$g(\Phi)g(\Theta) = g(\Theta'(\Theta, \Phi)).$$

Дифференцируя по Θ' при фиксированном Φ и умножая слева на обратное уравнение, получаем

$$\frac{\partial \Theta^i}{\partial \Theta'^j} g^{-1}(\Theta) \frac{\partial g(\Theta)}{\partial \Theta'^j} = g^{-1}(\Theta') \frac{\partial g(\Theta')}{\partial \Theta'^j}.$$

Подынтегральное выражение в $\mathcal{A}[g]$ в точке Θ' принимает по-этому вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_d} \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\Theta') \frac{\partial g(\Theta')}{\partial \Theta'^{j_1}} g^{-1}(\Theta') \frac{\partial g(\Theta')}{\partial \Theta'^{j_2}} \dots g^{-1}(\Theta') \frac{\partial g(\Theta')}{\partial \Theta'^{j_d}} \right\} \\ &= \text{Det} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Theta'} \right) \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\Theta) \frac{\partial g(\Theta)}{\partial \Theta^{i_1}} g^{-1}(\Theta) \frac{\partial g(\Theta)}{\partial \Theta^{i_2}} \dots g^{-1}(\Theta) \frac{\partial g(\Theta)}{\partial \Theta^{i_d}} \right\}. \end{aligned}$$

Далее, у всякой группы H есть метрика $\gamma_{ij}(\Theta)$ (не обязательно единственная), которая форм-инвариантна в том смысле, что

$$\gamma_{ij}(\Theta') = \frac{\partial \Theta^k}{\partial \Theta'^i} \frac{\partial \Theta^l}{\partial \Theta'^j} \gamma_{kl}(\Theta). \quad (23.4.4)$$

Например, можно выбрать

$$\gamma_{ij}(\Theta) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\Theta) \frac{\partial g(\Theta)}{\partial \Theta^i} g^{-1}(\Theta) \frac{\partial g(\Theta)}{\partial \Theta^j} \right\}. \quad (23.4.5)$$

При любом выборе $\gamma_{ij}(\Theta)$, беря детерминант выражения (23.4.4), получаем

$$\text{Det} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Theta'} \right) = \sqrt{\frac{\text{Det} \gamma(\Theta')}{\text{Det} \gamma(\Theta)}}.$$

Заменяя координаты Θ в (23.4.1) на координаты Θ' , находим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[g] &= \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\Theta) \frac{\partial g(\Theta)}{\partial \Theta^{i_1}} g^{-1}(\Theta) \frac{\partial g(\Theta)}{\partial \Theta^{i_2}} \dots g^{-1}(\Theta) \frac{\partial g(\Theta)}{\partial \Theta^{i_d}} \right\} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\text{Det} \gamma(\Theta)}} \int d^d \Theta' \sqrt{\text{Det} \gamma(\Theta')}. \end{aligned} \quad (23.4.6)$$

Поскольку параметры Φ второго преобразования H произвольны, можно рассатривать θ и θ' как независимые переменные и вычислить правую часть (23.4.6) при любом значении θ , например, $\theta^i = 0$. Удобно нормировать генераторы t_i и координаты θ^i так, чтобы при $\theta \rightarrow 0$

$$g(\theta) \rightarrow 1 + 2i\theta^i t_i. \quad (23.4.7)$$

В этом случае выражение (23.4.6) принимает вид

$$\mathcal{A}[g] = (2i)^d \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \text{Tr}\{t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_d}\} \frac{1}{\sqrt{\text{Det } \gamma(\theta)}} \int d^d \theta' \sqrt{\text{Det } \gamma(\theta')} \cdot \quad (23.4.8)$$

Нас особо интересует случай $d = 3$. Ботт²² показал, что для любой простой группы Ли G все непрерывные отображения $S_3 \mapsto G$ можно непрерывно продеформировать в отображения S_3 на «стандартную» $SU(2)$ подгруппу группы G . (Если $G \equiv SU(n)$, этой стандартной подгруппой является та, которая действует только на две первые компоненты фундаментального представления $SU(n)$. Не все $SU(2)$ подгруппы $SU(n)$ эквивалентны этой.) Как отмечалось в разделе 2.7, в 2×2 представлении произвольный элемент $SU(2)$ можно записать в виде

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \theta_4 + i\theta_3 & \theta_2 + i\theta_1 \\ -\theta_2 + i\theta_1 & \theta_4 - i\theta_3 \end{pmatrix} = \theta_4 + 2i\theta \cdot \mathbf{t}, \quad (23.4.9)$$

где, как обычно,

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а θ_4 и θ действительны, причем $(\theta_4)^2 = 1 - \theta^2$. (Заметим, что формула (23.4.9) согласуется с условием нормировки (23.4.7). Прямое вычисление приводит к следующему выражению для метрики (23.4.5):

$$\gamma_{ij}(\theta) = \delta_{ij} + \frac{\theta_i \theta_j}{1 - \theta^2}, \quad (23.4.10)$$

так что

$$\text{Det } \gamma(\theta) = \frac{1}{1 - \theta^2}. \quad (23.4.11)$$

Отсюда интеграл (23.4.8) принимает вид

$$\mathcal{I}[g] - 8i\epsilon^{ijk} \text{Tr}\{t_i t_j t_k\} \int \frac{d^3\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}}.$$

Используя формулы $4t_i t_j = d_{ij} + 2ie^{ijl} t_l$ и $\text{Tr}\{t_i t_k\} = \frac{1}{2}d_{ik}$, видим, что

$$8\epsilon^{ijk} \text{Tr}\{t_i t_j t_k\} = 2i\epsilon^{ijk} \epsilon^{ijk} = 12i.$$

Кроме того, для «тождественного» отображения g_1 интеграл дважды берется по внутренности единичного шара (поскольку θ_4 может быть как положительной, так и отрицательной), так что

$$\int \frac{d^3\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} = 2 \int_0^1 \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{1 - r^2}} = 2\pi^2.$$

Для класса с отображений, гомотопичных g_1 , имеем поэтому

$$\mathcal{I}(c) = 24\pi^2, \quad (23.4.12)$$

откуда

$$\mathcal{I}(c^\vee) = 24\pi^2 \vee. \quad (23.4.13)$$

Целое число $\vee$ называется *топологическим числом*. Этот результат справедлив в представлении, для которого стандартная $SU(2)$ подалгебра имеет генераторы t_i со структурными константами ϵ_{ijk} и условием нормировки $\text{Tr}\{t_i t_j\} = \frac{1}{2}d_{ij}$. В более общем случае, если $[t_i t_j] = i g \epsilon_{ijk} t_k$ и $\text{Tr}\{t_i t_j\} = \frac{1}{2} N g^2 d_{ij}$, то

$$\mathcal{I}(c^\vee) = 24\pi^2 N \vee. \quad (23.4.14)$$

Результаты (23.4.13) или (23.4.14) показывают, что для каждой простой группы Ли группа $\pi_3(G)$ содержит Z . Как указано в приложении Б к этой главе, $\pi_3(G) = Z$ для всех простых групп Ли. таким

образом, гомотопический класс $g(\theta)$ для любой простой группы Ли полностью определяется ее гомотопическим классом, получающимся при деформации группы на ее стандартную $SU(2)$ подгруппу.

23.5. Инстантоны

Как мы видели в разделе 23.1, топологически нетривиальные решения чисто калибровочной теории с простой калибровочной группой G в евклидовом пространстве-времени $d = 4$ измерений соответствуют элементам гомотопической группы $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$. Эти решения, представляющие четырехмерные полевые конфигурации, называются *инстантонами* и (по причинам, которые обсуждаются в следующем разделе) должны включаться вместе со своими флуктуациями в функциональные интегралы. После того, как Белавин, Поляков, Шварц и Тьюкин¹ продемонстрировали существование таких решений, 'т Хофт²³ показал, что включение этих конфигураций в функциональные интегралы решает проблему $U(1)$, о которой шла речь в разделе 19.10. Мы сначала обсудим сами инстантонные решения, а затем рассмотрим их роль при вычислении функциональных интегралов.

Согласно выражению (23.1.7), для того, чтобы топологически нетривиальное калибровочное поле имело конечное действие, сами калибровочные поля должны при $r \rightarrow \infty$ стремиться к чистой калибровке (здесь $r \equiv \sqrt{x_i x_i}$, и i пробегает значения 1, 2, 3, 4):

$$iA_i(x) \rightarrow g^{-1}(\hat{x})\partial_i g(\hat{x}), \quad (23.5.1)$$

где $A_i \equiv t_{\alpha} A_{\alpha i}$ и $g(\hat{x})$ — зависящий от направления элемент калибровочной группы G .

Поэтому обсуждавшийся в предыдущем разделе топологический инвариант может быть записан с учетом асимптотического поведения калибровочного поля в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[g] &\equiv \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \epsilon^{abc} \\ &\times \text{Tr} \left\{ g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^a} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^b} g^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^c} \right\} \\ &= -i \lim_{r \rightarrow \infty} r^3 \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \epsilon^{abc} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \theta^a} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial \theta^b} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \theta^c} \text{Tr} \{ A_i A_j A_k \}, \end{aligned} \quad (23.5.2)$$

где θ^a ($a = 1, 2, 3$) — любые три параметра, используемые для задания направления единичного 4-вектора $\hat{x}$. Этот поверхностный интеграл можно вычислить с помощью теоремы Гаусса. По аналогии с током (22.2.29) в пространстве Минковского, можно определить ток в евклидовом пространстве-времени

$$G_l \equiv \epsilon_{lijk}^E \left[A_{\gamma i} F_{\gamma j k} - \frac{1}{3} C_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha i} A_{\beta j} A_{\gamma k} \right], \quad (23.5.3)$$

дивергенция которого равна

$$\partial_l G_l = \frac{1}{2} \epsilon_{lijk}^E F_{\alpha i j} F_{\alpha k l}. \quad (23.5.4)$$

(Здесь ϵ_{lijk}^E — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon_{1234}^E \equiv 1$). Мы используем представление калибровочной группы с полностью антисимметричными структурными константами, так что

$$\text{Tr}\{t_\alpha t_\beta\} = \frac{1}{2} N \delta_{\alpha\beta}, \quad (23.5.5)$$

где N — константа, зависящая от представления, в котором вычисляется след в выражении (23.5.2). Следовательно выражение (23.5.3) можно записать в виде

$$G_l \equiv (2/N) \epsilon_{lijk}^E \text{Tr} \left[A_i F_{jk} + (2i/3) A_i A_j A_k \right]. \quad (23.5.6)$$

При $r \rightarrow \infty$ напряженность поля F_{kl} обращается в нуль, так что

$$G_l \rightarrow (4i/3N) \epsilon_{lijk}^E \text{Tr} \left[A_i A_j A_k \right]. \quad (23.5.7)$$

Отсюда интеграл (23.5.2) равен

$$\mathcal{A}[g] = -(3N/4) \int (d^4 x)_E \partial_l G_l = -(3N/8) \epsilon_{ijkl}^E \int (d^4 x)_E F_{\alpha i j} F_{\alpha k l}. \quad (23.5.8)$$

Поэтому, для того, чтобы продемонстрировать существование топологически нетривиальных полевых конфигураций, нам следует показать, что существуют такие конфигурации, для которых интеграл от плотности Черна–Понтрягина $\epsilon_{ijkl}^E F_{\alpha i j} F_{\alpha k l}$ не равен нулю.

Для этой цели очень удобно использовать так называемое *неравенство Богомольного*¹⁰. Из того, что

$$0 \leq \int \left(F_{\alpha ij} \mp \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl}^E F_{\alpha kl} \right)^2 (d^4 x)_E$$

(квадрирование подразумевает очевидные свертки по индексам), имеем:

$$S[A] \geq \frac{1}{8} \left| \epsilon_{ijkl}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha kl} (d^4 x)_E \right| = \frac{\|g\|}{3N}, \quad (23.5.9)$$

где $S[A]$ есть (с точностью до множителя) евклидово действие

$$S[A] \equiv \frac{1}{4} \int F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} (d^4 x)_E, \quad (23.5.10)$$

Нижняя граница (23.5.9), очевидно, достигается, если и только если калибровочное поле самодуально или антисамодуально, т. е.

$$F_{\alpha ij} = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl}^E F_{\alpha kl}. \quad (23.5.11)$$

Отсюда, всякое решение уравнения первого порядка (23.5.11) соответствует минимуму $S[A]$ для калибровочных полей с топологическим числом единица и, следовательно, является также решением янг-миллсовского полевого уравнения второго порядка.

Белавин и др.¹ нашли решение уравнения (23.5.11) вида

$$iA_i(x) = \left(\frac{r^2}{r^2 + R^2} \right) g_1^{-1}(\hat{x}) \partial_i g_1(\hat{x}), \quad (23.5.12)$$

где R — произвольный масштабный фактор, а $g_1(\hat{x})$ — элемент $SU(2)$ подгруппы калибровочной группы, причем

$$g_1(\hat{x}) = \left(\frac{x_4 + 2i\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}}{r} \right), \quad (23.5.13)$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (23.5.14)$$

Ясно, что это решение имеет асимптотическое поведение (23.5.1), причем $g(\hat{\mathbf{x}})$ совпадает с «тождественным» отображением

(24.5.9), так что данное решение принадлежит гомотопическому классу тождественного отображения. Как мы видели в предыдущем разделе, это означает, что решение имеет топологическое число $v = 1$. Из выражений (23.4.14) и (23.5.9) (которое в данном случае следует рассматривать как равенство) имеем

$$S[A] = 8\pi^2. \quad (23.5.15)$$

Из выражений (23.5.10) и (23.5.11) (с положительным знаком) находим также, что

$$\epsilon_{ijkl}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} (d^4 x)_E = 64\pi^2. \quad (23.5.16)$$

Это решение неоднозначно, поскольку его можно подвергнуть трансляции или калибровочному преобразованию, но, если не учитывать эти степени свободы, не существует других решений полевых уравнений с топологическим числом единица ²⁴.

Так как мы нашли полевые конфигурации с $v = 1$, это означает, что должны быть и полевые конфигурации с любым целым v . Например, решения с v , равным целому положительному числу k , можно построить, объединяя k решений с $v = 1$ с центрами, находящимися настолько далеко друг от друга, что можно пренебречь нелинейностями в полевых уравнениях. Решение с $v = -1$ можно получить, заменяя g_1 в выражении (23.5.12) на g_1^{-1} , а решения с отрицательным целым значением $v = -k$ можно построить наложением k таких решений, разделенных большими расстояниями. В случае произвольного топологического числа выражения (23.5.15) и (23.5.16) принимают вид

$$S[A] = 8\pi^2 |v|. \quad (23.5.17)$$

$$\epsilon_{ijkl}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} (d^4 x)_E = 64\pi^2 v. \quad (23.5.18)$$

Эти результаты получены для калибровочного поля, нормированного так же, как в выражениях (23.5.11)–(23.5.13). С учетом этой нормировки, действие $I[A]$ равно не $-S[A]$, а величине

$$I[A] = -\frac{S[A]}{g^2} = -\frac{8\pi^2 |v|}{g^2}, \quad (23.5.19)$$

где g — обычная константа связи. Если бы мы использовали наше обычное соглашение и включили множитель g в генераторы и структурные константы, то действие $I[A]$ совпадало бы с $-S[A]$. Если же включить множитель $1/g$ в $A_{\alpha\mu}$ и $F_{\alpha\mu\nu}$, то, вместо (23.5.15), получилось бы $S[A] = 8\pi^2/g^2$, и в этом случае опять действие равнялось бы $-8\pi^2/g^2$, но вместо формулы (23.5.18) мы имели бы

$$\varepsilon_{ijkl}^E \int F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} (d^4x)_E = 64\pi^2 \nu / g^2. \quad (23.5.20)$$

В следующем разделе мы увидим, что при вычислении функциональных интегралов необходимо суммировать вклады от инстантонов со всеми топологическими числами. Вклад конфигураций с топологическим числом $\nu \neq 0$ в евклидовы функциональные интегралы подавлен множителем $\exp(I[A]) = \exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$. В разделе 23.7 мы увидим, что коэффициент при этой экспоненте является целой отрицательной степенью $-n$ константы g ; в квантовой хромодинамике $n = 12$. Функция $g^{-n} \exp(-8|\nu|\pi^2/g^2)$ и все ее производные по g обращаются в нуль при $g = 0$, так что эти вклады являются непертурбативными, т. е. ни при каких условиях не могут быть получены в любом порядке теории возмущений.

Это не обязательно означает, что подобные вклады малы. Как мы видели в гл. 18, в квантовой хромодинамике константа g является не фиксированным безразмерным параметром, а бегущей функцией энергии, становящейся большой при низких энергиях. Эффективный масштаб энергий, использованный для определения константы в формуле (23.5.19), определяется квантовыми флуктуациями, которые обсуждаются в разделе 23.7. Однако по соображениям размерности этот масштаб не может слишком сильно отличаться от величины $1/R$, где R — размер инстантона в выражении (23.5.12). Этот размер не фиксирован, и по нему следует проинтегрировать с некоторой весовой функцией, зависящей от рассматриваемого процесса. В квантовой хромодинамике бегущая константа связи g_μ определяется при больших μ формулой (18.7.7) в виде

$$g_\mu^2 = \frac{8\pi^2}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda)},$$

где $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$ и $\Lambda \approx 250$ МэВ — квантово-хромодинамический масштабный фактор. Поэтому для малых инстантонов множитель $\exp(-8\pi^2/g_{1/R}^2)$ равен

$$\exp(-8\pi^2/g_{1/R}^2) = (R\Lambda)^{\beta_0}.$$

Для больших инстантонов с $R\Lambda \gg 1$ этот множитель вычислить нельзя, но ясно, что в данном случае не происходит подавления инстантонных эффектов.

Несмотря на первоначальные надежды, открытие инстантонов не привело к заметному продвижению в нашей способности производить количественные расчеты в квантовой хромодинамике. С другой стороны, как мы сейчас увидим, это открытие привело к существенным *качественным* изменениям в понимании квантовой хромодинамики и других калибровочных теорий.

Уже тот факт, что существуют решения полевых уравнений, для которых интеграл (23.5.15) не обращается в нуль, достаточен для того, чтобы разрешить обсуждавшуюся в разделе 19.10 проблему $U(1)$. При *глобальных* $U(1)$ преобразованиях $\Psi \rightarrow \exp(i\gamma_5\alpha)\Psi$ мера интегрирования по кварковым полям подвергается изменению, которое определяется формулой (22.2.10):

$$[d\Psi][d\bar\Psi] \rightarrow \exp\{i\alpha \int \mathcal{A}(x)(d^4x)_E\} [d\Psi][d\bar\Psi], \quad (23.5.21)$$

где (при матрице t , равной единице) аномалия $\mathcal{A}(x)$ дается выражением (22.2.45):

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{ijkl} F_{ij\alpha} F_{kl\beta} \text{tr } t_\alpha t_\beta. \quad (23.5.22)$$

Существование этой аномалии само по себе не решает проблему $U(1)$, поскольку величина (23.5.22) является полной производной и поэтому в случае несингулярного калибровочного поля, достаточно быстро убывающего на бесконечности, имеет равный нулю интеграл. Инстантонное решение убывает лишь как $1/r$ и приводит к ненулевому значению этого интеграла, которое определяется формулами (23.5.22), (23.5.18) и (23.5.5):

$$\int \mathcal{A}(x)(d^4x)_E = 2N\nu, \quad (23.5.23)$$

Этим показывается, что аномалия действительно *нарушает* $U(1)$ киральную симметрию.

Как мы видели в разделе 22.4, токи барионного и лептонного чисел также содержат аномалии, вызванные взаимодействием кварков и лептонов с $SU(2) \times U(1)$ калибровочными полями стандартной модели. Поэтому инстантонные конфигурации $SU(2)$ калибровочного поля приводят к нарушению сохранения числа барионов и лептонов²⁵. Как отмечалось в разделе 22.4, существует ряд токов, сохранение которых не нарушается аномалиями или чем-то еще, типа разности барионного и лептонного чисел или разностей электронных, мюонных и тау-лептонных чисел, так что эти разности будут сохраняться в любом нарушающем сохранение барионного и лептонного числа процессе. Например, распад протона или дейтрона запрещен, но распад $\text{He}^3 \rightarrow e^+ + \mu^+ + \bar{\nu}_\tau$ разрешен. Амплитуды этих эффектов подавлены тем же множителем $\exp(-8|v|\pi^2/g^2)$, что и раньше, но теперь g является $SU(2)$ константой связи $e/\sin \theta$, вычисленной не при скользящем масштабе, а в естественном масштабе электрослабых процессов порядка m_Z . Беря $e^2/4\pi = 1/129$ (см. раздел 18.2) и $\sin^2\theta = 0,23$, находим, что подавляющий множитель при $|v| = 1$ равен $\exp(-373)$. Похоже, что наблюдение распада He^3 на три антилептона маловероятно.

* * *

Существует иной подход²⁶, проливающий свет на некоторые стороны физики инстантонов. Можно ожидать, что во временной калибровке с $A_{\alpha 4}(\mathbf{x}, x_4) = 0$ калибровочное поле при $x_4 \rightarrow \pm\infty$ стремится к независимым от времени чистым калибровкам

$$i\mathbf{A}(\mathbf{x}, x_4) \equiv it_\alpha \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{x}, x_4) \rightarrow g_\pm^{-1}(\mathbf{x}) \nabla g_\pm(\mathbf{x}), \quad (23.5.24)$$

где $g_\pm(\mathbf{x})$ — групповые элементы в представлении, определяемом генераторами t_a . Предполагая, что $A_\alpha(\mathbf{x}, x_4)$ обращается в нуль при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, групповые элементы $g_\pm(\mathbf{x})$ должны стремиться при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ к постоянным значениям $g_\pm$, так что при $x_4 \rightarrow \infty$ трехмерные пространства можно рассматривать как три-сферы с точкой на бесконечности, рассматриваемой как обыкновенная точка. Следуя тем же рассуждениям, что и при выводе формулы (23.4.13), получим

$$\varepsilon_{ijk} \int d^3x \operatorname{Tr} \left\{ g_{\pm}^{-1}(\mathbf{x}) \partial_i g_{\pm}(\mathbf{x}) g_{\pm}^{-1}(\mathbf{x}) \partial_j g_{\pm}(\mathbf{x}) g_{\pm}^{-1}(\mathbf{x}) \partial_k g_{\pm}(\mathbf{x}) \right\} = 24\pi^2 n_{\pm}, \quad (23.5.25)$$

где $n_{\pm}$ — целые числа. Интеграл по границе 4-пространства в (23.5.2) можно рассматривать как разность интегралов по «плоскостям» $x_4 = +\infty$ и $x_4 = -\infty$, так что из формул (23.5.8) и (23.5.18) (с $N = 1$) находим:

$$v = n_+ - n_- . \quad (23.5.26)$$

Экспоненциальный множитель $\exp(-8|v|\pi^2/g^2)$ из (23.5.19) можно поэтому рассматривать как амплитуду перехода от конфигурации с пространственным топологическим числом n_- при $x_4 \rightarrow -\infty$ к конфигурации с пространственным топологическим числом n_+ при $x_4 \rightarrow +\infty$. Экспоненциальный вид этого множителя при $n \neq 0$ отражает то, что это — процесс *тунеллирования*: никакой непрерывной последовательностью чисто калибровочных полей невозможно перейти от конфигурации с одним пространственным топологическим числом к конфигурации с другим таким числом.

Интерпретация множителя $\exp(-8|v|\pi^2/g^2)$ как амплитуды туннельного перехода позволяет предположить, что процессы с несохранением барионного и лептонного чисел могут происходить быстрее при температурах выше 1 ТэВ, где, вместо того, чтобы тунеллировать сквозь барьер, тепловые флуктуации могут перевести вакуум *над* барьером²⁷. Такой процесс может иметь значение в космологии, но при этом все равно должны соблюдаться упомянутые выше правила отбора: тепловые флуктуации не меняют разности плотностей барионного и лептонного чисел или разностей плотностей трех типов лептонных чисел.

23.6. Угол тета

Мы видели, что существуют конфигурации с произвольным целым топологическим числом. Откуда мы знаем, что эти конфигурации должны включаться в функциональный интеграл? Чтобы рассуждать непредвзято, предположим, что мы складываем конфигурации с произвольными весовыми множителями $f(v)$ для каждого топологического числа, не исключая при этом возможности,

что некоторые или все эти весовые множители могут равняться нулю. Тогда среднее значение локальной наблюдаемой $\mathcal{O}$, находящейся внутри большого евклидового пространственно-временного объема Ω , равно

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\Omega} = \frac{\sum_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}) \int_{\mathbf{v}} [d\Phi] \exp(I_{\Omega}[\Phi]) \mathcal{O}[\Phi]}{\sum_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}) \int_{\mathbf{v}} [d\Phi] \exp(I_{\Omega}[\Phi])}, \quad (23.6.1)$$

где Φ означает все поля теории, индекс $\mathbf{v}$ при знаках интеграла указывает, что мы должны включить только конфигурации с топологическим числом $\mathbf{v}$, а $I_{\Omega}[\Phi]$ — интеграл от лагранжиана по пространственно-временному объему Ω . Предположим теперь, что Ω разделен на два очень больших объема Ω_1 и Ω_2 , причем $\mathcal{O}$ находится в Ω_1 . Интеграл по всем полям с топологическим числом $\mathbf{v}$ можно записать как интеграл по всем полям с топологическим числом $\mathbf{v}_1$ в объеме Ω_1 и с топологическим числом $\mathbf{v}_2$ в объеме Ω_2 , причем производится суммирование по $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ при условии $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$. Таким образом, в хорошем приближении выражение (23.6.1) принимает вид

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\Omega} = \frac{\sum_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \int_{\mathbf{v}_1} [d\Phi] \exp(I_{\Omega_1}[\Phi]) \mathcal{O}[\Phi] \int_{\mathbf{v}_2} [d\Phi] \exp(I_{\Omega_2}[\Phi])}{\sum_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \int_{\mathbf{v}_1} [d\Phi] \exp(I_{\Omega_1}[\Phi]) \int_{\mathbf{v}_2} [d\Phi] \exp(I_{\Omega_2}[\Phi])}. \quad (23.6.2)$$

Но тогда при произвольных весовых множителях это среднее не совпадает с тем, которое бы получилось, если просто отбросить объем Ω_2 , в противоречии с общими идеями кластерного разложения. (См. гл. 4.) Для того, чтобы в этом отношении сократились множители, включающие объем Ω_2 , должно выполняться равенство

$$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2).$$

Так будет в случае, если и только если $f(\mathbf{v})$ имеет вид

$$f(\mathbf{v}) = \exp(i\theta \mathbf{v}), \quad (23.6.3)$$

где θ — свободный параметр. Отсюда, в частности, мы не можем произвольно отбросить все конфигурации с ненулевым топологическим числом, поскольку тогда инстантон с топологическим числом n в одной области должен быть сбалансирован инстантоном с топологическим числом $-n$ в какой-то другой области, что делает невозможным вычисление средних значений без учета того, что происходит вдали от местонахождения измеряемых операторов.

Множитель $f(v)$ можно представить в более знакомой форме. Согласно формуле (23.5.18), при такой нормировке калибровочных полей, что в стандартной $SU(2)$ подгруппе структурные константы равны ϵ_{ijk} , топологическое число можно записать как интеграл

$$v = \frac{1}{64\pi^2} \int (d^4x)_E \epsilon_{ijkl}^E F_{\alpha ij} F_{\alpha kl}. \quad (23.6.4)$$

Это выражение можно представить в виде функционального интеграла в пространстве Минковского. Так как $(d^4x)_E = id^4x$, $F_{\alpha 34} = -iF_{\alpha 30}$, и $\epsilon^{1230} = -1$, выражение (23.6.4) можно записать в виде

$$v = -\frac{1}{64\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} F_{\alpha\kappa\lambda} F_{\alpha\rho\sigma}. \quad (23.6.5)$$

Таким образом, включение весового множителя (23.6.3) эквивалентно добавлению к лагранжиану слагаемого

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{\theta}{64\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} F_{\alpha\kappa\lambda} F_{\alpha\rho\sigma}. \quad (23.6.6)$$

Однако, как отмечалось в начале раздела 15.2, мы в любом случае могли бы включить такой член с произвольным действительным параметром θ в лагранжиан любой неабелевой калибровочной теории.

Включение члена (23.6.6) в лагранжиан нарушило бы сохранение P и CP . Конечно, можно было бы просто положить $\theta = 0$, однако это сделало бы недействительным то, что в разделе 18.7 было оценено как один из успехов квантовой хромодинамики: в ней P и CP автоматически сохраняются сильными взаимодействиями, хотя, конечно, эти симметрии нарушаются слабыми взаимодействиями.

Чтобы понять физические следствия включения члена (23.6.6) в лагранжиан, рассмотрим влияние переопределения всех фермионных полей

$$\psi_f \rightarrow \exp(i\gamma_5 \alpha_f) \psi_f, \quad (23.6.7)$$

где f — индекс аромата, а α_f — набор действительных фаз. Согласно формулам (22.2.10) и (22.2.24), произойдет изменение меры в функциональном интеграле по фермионным полям:

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow \exp\left\{\frac{-i}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\alpha^{\rho\sigma} \sum_f \alpha_f\right\} [d\psi][d\bar{\psi}]. \quad (23.6.8)$$

(Мы используем генераторы, нормированные условием $\text{Tr}(t_\alpha t_\beta) = \delta_{\alpha\beta}/2$.) Сравнение этого выражения с формулой (23.6.6) показывает, что это эквивалентно сдвигу θ :

$$\theta \rightarrow \theta + 2 \sum_f \alpha_f. \quad (23.6.9)$$

Переопределение фермионных полей изменит и массовые члены в лагранжиане. Чтобы учесть массовые члены, включающие γ_5 , запишем фермионный массовый член в лагранжаине как

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} \sum_f \mu_f \bar{\psi}_f (1 + \gamma_5) \psi_f - \frac{1}{2} \sum_f \mu_f^* \bar{\psi}_f (1 - \gamma_5) \psi_f, \quad (23.6.10)$$

с массовыми параметрами μ_f . Если эти параметры будут комплексными, будет нарушаться Р и СР сохранение. Тогда переопределение (23.6.7) следующим образом изменяет параметры:

$$\mu_f \rightarrow \exp(2i\alpha_f) \mu_f. \quad (23.6.11)$$

Простая замена переменных в функциональном интеграле не может иметь какого либо физического значения, поэтому наблюдаемые величины могут зависеть от θ или фаз массовых параметров m_f не по-отдельности, а лишь в комбинации

$$\exp(-i\theta) \prod_f \mu_f. \quad (23.6.12)$$

В частности, мы всегда можем определить фермионные поля так, что $\theta = 0$, но ценой возможного введения нарушающих P или CP сохранение фаз в массовые параметры.

Эта дискуссия показывает, что если бы хоть одна кварковая масса равнялась нулю, то угол тета не оказывал бы никакого влияния, и в квантовой хромодинамике не было бы нарушения C или CP . Анализ отношений масс кварков в разделе 19.7 показывает, что все кварки обладают ненулевыми массами, хотя иногда делаются утверждения, что включение слагаемых второго порядка по m_s в этот анализ позволило бы считать m_u равным нулю²⁸. Однако вне всяких сомнений кварки u и d довольно легкие, что приводит к некоторому подавлению эффектов, связанных с ненулевым углом тета. В разделе 19.4 мы видели, что m_u и m_d — примерно порядка m_π^2/m_N (здесь m_N используется как типичная квантово-хромодинамическая шкала энергий), так что можно ожидать подавления эффектов от угла тета четырьмя множителями m_π . Но это не совсем так. Если P и CP не сохраняются, то существует ненулевая амплитуда перехода π^0 в вакуум, пропорциональная m_π^4 , но диаграммы «головастики» с пионными линиями, оканчивающимися в таких вершинах перехода в вакуум, усилены множителем m_π^{-2} от пионного пропагатора, так что в результате эффект пропорционален не m_π^4 , а m_π^2 . В частности, если определить фермионные поля так, что все M_f действительны, то за счет ненулевого угла тета возникнет несохраняющий P и T электрический дипольный момент нейтрона d_n , пропорциональный $|\theta|$ и m_π^2 . По соображениям размерности этот дипольный момент будет порядка

$$d_n \approx |\theta| e m_\pi^2 / m_N^3 \approx 10^{-16} |\theta| e \text{ см.} \quad (23.6.13)$$

Известно, что электрический дипольный момент нейтрона меньше $10^{-25} e \text{ см}$, так что $|\theta| < 10^{-9}$.

Чтобы естественным образом объяснить такую малость θ , Печчеи и Квинн³⁰ предложили теорию, в которой θ на самом деле становится динамической переменной, которая может релаксировать к минимуму эффективного потенциала, в котором P и CP сохраняются. Их идея была подхвачена Вильчеком и мной³¹, заметившими, что это требует существования легкой бесспиновой частицы — аксиона. Тот аксион, который появился в первой модели Печчеи–Квинна, был исключен экспериментальными данными,

однако существуют более общие возможности ³², когда аксион настолько слабо взаимодействует с обычной материей, что его невозможно наблюдать.

Общее свойство всех вариантов теории аксиона заключается в том, что существует некоторая $U(1)$ симметрия, которая спонтанно нарушается при энергиях, намного превышающих те, которые ассоциируются с квантовой хромодинамикой, и кроме того нарушается аномалией, включающей глюонные поля. Согласно общему формализму гл. 19 и 22, низкоэнергетическая эффективная теория поля будет содержать поле голдстоуновского бозона ϕ , так что под действием преобразования симметрии

$$\phi \rightarrow \phi + F_\phi \varepsilon, \quad (23.6.14)$$

эффективный лагранжиан подвергается преобразованию

$$\delta \mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\frac{\varepsilon A}{64\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\alpha^{\rho\sigma}, \quad (23.6.15)$$

где A — безразмерная константа порядка единицы, характеризующая аномалию, а F_ϕ — константа порядка энергетической шкалы, при которой симметрия спонтанно нарушается (ϕ считается кано-нически нормированным). Тогда включающие ϕ слагаемые в эффективном лагранжиане равны

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{64\pi^2} \frac{\phi}{M} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\alpha^{\rho\sigma} + \dots, \quad (23.6.16)$$

где $M \equiv F_\phi/A$ и многоточие означает возможные взаимодействия, включающие производные по ϕ . Сравнивая выражения (23.3.16) и (23.3.6), видим, что при постоянном ϕ все наблюдаемые будут функциями не ϕ и θ по-отдельности, но только комбинации $\theta + \phi/M$. (Это верно, когда фермионные поля определены так, что все массовые параметры $\mathcal{M}_f$ действительны; в противном случае наблюдаемые будут зависеть от $\theta - \sum_f \text{Arg.} \mathcal{M}_f + \phi/M$.) Если все взаимодействия в теории, кроме тета-члена (23.6.6) и взаимодействия ϕ в выражении (23.3.16), сохраняют P и CP , тогда эффективный потенциал будет четен по $\theta + \phi/M$, так что он будет иметь стационарную точку при $\theta + \phi/M = 0$, не нарушая сохранения P и CP . В реальном

мире симметрии P и CP не точны, но единственные наблюдаемые нарушения связаны со слабыми взаимодействиями, которые лишь немного сдвигают среднее значение Φ от значения $-M\theta$ ³³.

Даже не конкретизируя лежащую в основе теорию и пользуясь техникой эффективной теории поля, можно довольно много сказать об общих свойствах аксиона. Наиболее общий лагранжиан аксионного поля Φ , включающий теперь тета-член и все взаимодействия с u - и d -кварками до порядка $1/M$, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi = & -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{1}{64\pi^2} \left[\frac{\Phi}{M} + \theta \right] \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\alpha^{\rho\sigma} \\ & - \frac{if_u}{M} \partial_\mu \Phi \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu u - \frac{if_d}{M} \partial_\mu \Phi \bar{d} \gamma_5 \gamma^\mu d, \end{aligned} \quad (23.6.17)$$

где f_u и f_d — безразмерные константы связи, которые, как ожидается, порядка единицы. Как видно из выражения (23.6.8), переопределение кварковых полей (23.6.7) приводит к сдвигу величины $\Phi(x)/M + \theta$ во втором члене лагранжиана (23.6.17):

$$\frac{\Phi(x)}{M} + \theta \rightarrow \frac{\Phi(x)}{M} + \theta + 2[\alpha_u(x) + \alpha_d(x)]. \quad (23.6.18)$$

Выбирая $\alpha_f = -(\theta + \Phi/M)c_f/2$ с постоянными коэффициентами c_f , удовлетворяющими условию $c_u + c_d = 1$, мы исключаем слабое в лагранжиане, содержащее $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_\alpha^{\mu\nu} F_\alpha^{\rho\sigma}$, и изменяем массовый член в низкоэнергетическом лагранжиане квантовой хромодинамики:

$$\mathcal{L}_m = -m_u \bar{u} [-ic_u(\theta + \Phi/M)\gamma_5] u - m_d \bar{d} [-ic_d(\theta + \Phi/M)\gamma_5] d. \quad (23.6.19)$$

Кроме того, из кинематической части кваркового лагранжиана мы извлекаем член с взаимодействием с производной:

$$\frac{1}{2} ic_u (\bar{u} \gamma^\mu \gamma_5) u \partial_\mu \Phi / M + \frac{1}{2} ic_d (\bar{d} \gamma^\mu \gamma_5) d \partial_\mu \Phi / M, \quad (23.6.20)$$

так что f_u и f_d в выражении (23.6.17) заменяются на $f'_u = f_u - c_u/2$ и $f'_d = f_d - c_d/2$. Чтобы вывести вид эффективного лагранжиана для пионов и аксионов при низких энергиях, последуем процедуре раз-

дела 19.5 (заменяв протоны и нейтроны кварками u и d), сделав замены:

$$\begin{aligned}\bar{u}u &\rightarrow v \cos(\pi^0/F_\pi), & \bar{d}d &\rightarrow v \cos(\pi^0/F_\pi), \\ \bar{u}\gamma_5 u &\rightarrow iv \sin(\pi^0/F_\pi), & \bar{d}\gamma_5 d &\rightarrow -iv \sin(\pi^0/F_\pi), \\ i\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 &\rightarrow \frac{1}{2}F_\pi\partial^\mu\pi^0 + \dots, & i\bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 &\rightarrow \frac{1}{2}F_\pi\partial^\mu\pi^0 + \dots,\end{aligned}\quad (23.6.21)$$

где константа $v = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$, а многоточие означает члены, не содержащие однопионного полюса. Из формул (23.6.19) и (23.6.20) находим эффективный пион-аксионный лагранжиан:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{эфф}} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 - \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi'\partial^\mu\Phi' - \left(\frac{f'_u - f'_d}{2M}\right)F_\pi\partial_\mu\Phi'\partial^\mu\pi^0 \\ &\quad - m_u v \cos\left(\frac{\pi^0}{F_\pi} - \frac{c_u\Phi'}{M}\right) - m_d v \cos\left(\frac{\pi^0}{F_\pi} + \frac{c_d\Phi'}{M}\right),\end{aligned}\quad (23.6.22)$$

где Φ' — разность между аксионным полем и его средним значением:

$$\Phi' \equiv \Phi - \langle \Phi \rangle = \Phi + M\theta. \quad (23.6.23)$$

Поскольку c_u и c_d произвольны, не считая того, что $c_u + c_d = 1$, мы можем устранить перекрестный член $\partial_\mu\Phi'\partial^\mu\pi^0$, выбрав $c_u = \frac{1}{2} + f_u - f_d$ и $c_d = \frac{1}{2} + f_d - f_u$, так что $f'_u = f'_d$. Квадратичная часть лагранжиана (23.6.22) имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{quad}} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 - \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi'\partial^\mu\Phi' - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\pi^0 \\ \Phi'\end{pmatrix}M_0^2\begin{pmatrix}\pi^0 \\ \Phi'\end{pmatrix}, \quad (23.6.24)$$

где

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} (m_u + m_d)v/F_\pi^2 & (-m_u c_u + m_d c_d)v/F_\pi M \\ (-m_u c_u + m_d c_d)v/F_\pi M & (m_u c_u^2 + m_d c_d^2)v/M^2 \end{pmatrix}. \quad (23.6.25)$$

При $M \gg F_\pi$ одно собственное значение M_0^2 равно

$$(m_u + m_d)v / F_\pi^2,$$

что совпадает с квадратом массы π^0 , в согласии с формулой (19.7.20). Тогда другое собственное значение является массой аксиона

$$m_a^2 = \frac{v}{M^2} \frac{m_d m_u}{m_d + m_u} = \frac{F_\pi^2}{M^2} \frac{m_d m_u}{(m_d + m_u)^2} m_\pi^2. \quad (23.6.26)$$

С учетом выведенных в разделе 19.7 значений отношения масс кварков, находим отсюда $m_a = 13 \text{ МэВ}/M(\text{ГэВ})$.

Этот же формализм можно использовать для того, чтобы что-то сказать относительно взаимодействий аксионов с адронами. Собственный вектор M_0^2 с собственным значением m_a^2 имеет компоненту вдоль исходного направления π^0 , равную

$$(m_u c_u - m_d c_d) F_\pi / (m_d + m_u) M.$$

Как отмечалось выше, из-за однопионного полюса это аксион-адронное взаимодействие является доминирующим. Мы видим, что отношение амплитуд образования аксионов и пионов типично порядка F_π/M . Тот факт, что в таких соударениях аксионы не наблюдаются, указывает, что $M > 3 \text{ ТэВ}$, в противоречии с исходным ожиданием^{30,31}, что аномальная $U(1)$ симметрия спонтанно нарушается теми же скалярными вакуумными средними порядка $0,3 \text{ ТэВ}$, которые нарушают электрослабую $SU(2) \times U(1)$ симметрию. Отсутствие аксионов в реакторных или ускорительных экспериментах можно объяснить, выбрав M в качестве независимого параметра³², много большего масштаба нарушения электрослабого взаимодействия, но есть еще и астрофизические ограничения. Пределы на скорость остывания красных гигантов дают ограничение³⁴ $M > 10^7 \text{ ГэВ}$, а наблюдение за сверхновой SN1987A показывает³⁵, что $M > 10^{10} \text{ ГэВ}$ *. Космологические соображения устанавливают³⁶ верхний предел $M < 10^{12}$

* При $M > 10^7 \text{ ГэВ}$ масса аксиона должна быть меньше 1 эВ , так что звезды достаточно горячи, чтобы рождают аксионы. Отношение вероятностей распада аксиона и π^0 на два фотона должно быть порядка произведения $(F_\pi/M)^2$ и отношения фазовых объемов $(m_a/m_\pi)^3$, или

ГэВ, оставляя открытое, но узкое, окно для разрешенных параметров аксиона.

23.7. Квантовые флуктуации в окрестности протяженных полевых конфигураций

Топологически нетривиальные четырехмерные полевые конфигурации типа инстантонов вносят лишь вклады нулевого порядка в функциональные интегралы. Теперь следует рассмотреть влияние квантовых флуктуаций в окрестности этих конфигураций.

Начнем с самого общего случая и рассмотрим набор полей, называемых в совокупности $\Phi(x)$, динамика которых описывается евклидовым действием $I[\Phi]$. Предположим, что мы имеем множество конфигураций $\Phi_{v,u}$, при которых $I[\Phi]$ стационарно, где v отмечает топологический тип конфигурации, а u представляет набор непрерывных коллективных параметров, от которых конфигурация зависит. Например, для инстантонов v — целое топологическое число, а u включает положение и масштаб, а также «направление» инстантона в калибровочной группе. Евклидовы функциональные интегралы можно тогда записать в виде

$$\int [d\Phi] \exp(I[\Phi]) \theta = \sum_v \int du \int_u [d\Phi'] \exp(I[\Phi_{v,u} + \Phi']) \theta, \quad (23.7.1)$$

где индекс при знаке интеграла по флуктуациям Φ' указывает, что мы должны интегрировать только по флуктуациям, которые не влекут за собой изменений в коллективных параметрах, а θ — любое произведение локальных функций полевых операторов. Так как действие $I[\Phi]$ стационарно при $\Phi = \Phi_{v,u}$, его разложение до второго порядка по флуктуациям принимает вид

$$\frac{\Gamma(a \rightarrow \gamma + \gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma)} = \left(\frac{F_\pi}{M} \right)^2 \left(\frac{m_a}{m_\pi} \right)^3 \approx \left(\frac{F_\pi}{M} \right)^5.$$

Отсюда при $M > 10^7$ ГэВ время жизни аксиона должно быть больше 10^{24} с. Этого времени вполне достаточно, чтобы аксион перед распадом пролетел даже космологические расстояния.

$$I[\phi_{v,u} + \phi'] \simeq I_v - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y K_{xl,ym}(v,u) \phi'_l(x) \phi'_m(y), \quad (23.7.2)$$

где l и m включают индексы спина и сорта, а $I_v \equiv I[\phi_{v,u}]$ — функция только v , поскольку предполагается, что действие стационарно при всех полевых конфигурациях $\phi_{v,u}$. Тогда интеграл по флуктуациям ϕ' в формуле (23.7.1) даст сумму членов от сверток полей в $\mathcal{O}$, умноженную (для действительных бозонных полей) на общий множитель $[\text{Det} K(v,u)]^{-1/2}$, причем следует понимать это так, что K действует только в подпространстве тех флуктуаций, которые не влекут за собой изменений в коллективных параметрах v . Этот множитель можно записать как произведение по собственным значениям $\lambda_n(v,u)$ «матрицы» $K(v,u)$:

$$(\text{Det} K(v,u))^{-1/2} = \prod_n \lambda_n^{-1/2}(v,u), \quad (23.7.3)$$

где штрих указывает на то, что исключены «нулевые моды», т. е. нулевые собственные значения K , для которых собственные функции соответствуют изменениям в коллективных параметрах.

Эти замечания позволяют уточнить результаты раздела 23.5 для зависимости вклада инстантонов с разными топологическими числами от константы связи. Пусть поля в нашей теории определены так, что действие принимает вид $I[\phi, g] = g^{-2} I_1[\phi]$, где $I_1[\phi]$ не зависит от констант связи. (Например, как обсуждалось в конце раздела 15.2, в янг–миллсовских теориях в качестве калибровочного поля используется канонически нормированное калибровочное поле, умноженное на g .) Тогда все собственные значения K пропорциональны g^{-2} , и множитель (23.7.3) пропорционален g в степени, равной числу ненулевых собственных значений K . Эта степень, естественно, бесконечна, но ее можно записать как число *всех* собственных значений K , число которых также бесконечно, но не зависит от v , минус число $\ell(v)$ нулевых мод, равное конечному зависящему от v числу коллективных параметров. Мы заключаем, что помимо множителей, не зависящих от v , вклад флуктуаций в окрестности конфигураций топологического типа v представляет собой зависящий от константы связи множитель, который может быть выражен через число $\ell(v)$ коллективных параметров в виде

$$g^{-\ell(v)}. \quad (23.7.4)$$

Оценка основана на приближении (23.7.2), соответствующем одно-петлевому приближению, так что при учете членов более высокого порядка множитель (23.7.4) будет умножаться на степенной ряд по g , детали которого зависят от операторов $\mathcal{O}$, входящих в функциональный интеграл.

Посмотрим, как это можно применить к инстантонам. Конечно, конфигурация с $v = 0$ не содержит коллективных параметров, так что ее вклад в функциональные интегралы есть просто степенной ряд по g . Конфигурация с $v = 1$ имеет четыре коллективных параметра, определяющих пространственно-временное положение инстантона, один параметр, задающий масштаб инстантона и число N_1 коллективных параметров, соответствующих вращениям и/или глобальным калибровочным преобразованиям, которые не оставляют инстантон инвариантным. Поэтому (включая теперь множитель $\exp(I_v)$, определяемый формулой (23.5.19)) зависимость инстантонов с $v = 1$ от константы связи имеет вид $g^{-5-N_1} \exp(-8\pi^2/g^2)$. Для $v = 1$ инстантона (23.5.12) в $SU(2)$ теории Янга–Миллса имеются тринезависимых вращения и три независимых $SU(2)$ преобразования, но поскольку инстантон инвариантен относительно трех комбинированных вращений и $SU(2)$ преобразований, $N_1 = 3$ и флуктуации в окрестности $v = 1$ инстантона приводит к зависимости от константы связи вида $g^{-8} \exp(-8\pi^2/g^2)$. В $SU(3)$ теории Янга–Миллса имеются три независимых вращения и восемь независимых $SU(3)$ преобразований, но снова инстантон инвариантен относительно трех независимых комбинированных вращений и $SU(3)$ преобразований в стандартной $SU(2)$ подгруппе (например, действующих на первые две компоненты фундаментального представления $SU(3)$), и кроме того инвариантен относительно одного дополнительного $SU(3)$ преобразования, которое (как гиперзаряд) коммутирует со всеми генераторами стандартной $SU(2)$ подгруппы. Отсюда $N_1 = 3+8-3-1 = 7$, так что $v = 1$ инстантон приводит к множителю, пропорциональному $g^{-12} \exp(-8\pi^2/g^2)$.

Предположим теперь, что действие содержит также слагаемое

$$-\int d^4x \int d^4y \bar{\psi}_l(x) \mathcal{K}_{lx,my}(v,u) \psi_m(y),$$

включающее независимые поля ψ и $\bar{\psi}$. Если ни одно из этих полей не содержится в $\mathcal{O}$, то интеграл по ним дает множитель $\text{Det } \mathcal{K}(v,u)$,

исчезающий, если у $\mathcal{H}(v, u)$ имеются какие-то нулевые моды. Этот результат легко понять, если вспомнить правила интегрирования по фермионным параметрам. Разлагая $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ по собственным модам $\mathcal{H}$, можно записать интеграл по $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ как интеграл по коэффициентам в этих разложениях. Коэффициенты нулевых мод не входят в квадратичное приближение в действии, так что для каждой такой фермионной нулевой моды получается интеграл по фермионному параметру, который не входит в подынтегральное выражение, так что согласно общим правилам раздела 9.5 этот интеграл равен нулю. Единственными не исчезающими членами в интеграле по фермионным параметрам будут те, для которых подынтегральное выражение содержит по одному множителю каждой переменной интегрирования. Отсюда интеграл по фермионным полям в выражении (23.7.1) не обратится в нуль только в случае, если в $\mathcal{O}$ имеется единственное фермионное поле для каждой нулевой моды в K . Для инстантонов существуют фермионные нулевые моды, числа и киральности которых определяются теоремами об индексах, типа доказанной в разделе 22.2 теоремы об индексе Атьи–Зингера, так что для заданного топологического числа разрешены только определенные процессы. На этой основе 'т Хофт²⁵ показал, что порождаемое инстантонами с $v = 1$ не сохраняющее барионное и лептонное числа эффективное взаимодействие в электрослабой стандартной модели должно включать ровно по одному каждому лептонному аромату.

23.8. Распад вакуума

Вакуумное состояние стабильно, если средние значения его скалярного поля соответствуют истинному минимуму эффективно-го потенциала. Однако если средние значения скалярного поля находятся в локальном минимуме, которые выше истинного, тогда такой вакуум метастабилен. «Фальшивое» метастабильное вакуумное состояние, соответствующее локальному минимуму, будет распадаться в стабильный «истинный» вакуум, соответствующий истинному минимуму, за счет процесса подбарьерного перехода, аналогичного ядерному альфа-распаду или спонтанному делению. Конечно, речь не идет о процессе, который можно наблюдать в лаборатории, но предположительно он происходил несколько раз

в истории Вселенной, когда спонтанно нарушались различные симметрии, так что важно уметь вычислять вероятность такого распада фальшивого вакуума. Как мы сейчас увидим, это вычисление включает рассмотрение еще одной протяженной полевой конфигурации⁶.

Сосредоточимся на компоненте ϕ мультиплета скалярных полей, приобретающей среднее значение $\langle\phi\rangle$ в истинном вакууме. Например, в теории нарушенной киральной симметрии, обсуждавшейся в разделе 19.5, поле ϕ являлось четвертой компонентой кирального 4-вектора. Как окажется, когда проницаемость барьера сильно подавлена, другие скалярные поля (включая поля любых голдстоуновских бозонов) не влияют на главный подавляющий фактор в вероятности распада. Для определенности, выберем лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi). \quad (23.8.1)$$

Предположим, что эффективный потенциал в низшем порядке имеет истинный минимум при $\phi = \langle\phi\rangle$ и локальный минимум при $\phi = 0$, и мы подобрали аддитивную постоянную в лагранжиане так, что $V(0) = 0$, откуда в данном случае $V(\langle\phi\rangle) < 0$. Мы хотим вычислить вероятность, с которой состояние фальшивого вакуума со средним значением скалярного поля, равным нулю, распадается в состояние истинного вакуума со средним значением скалярного поля $\langle\phi\rangle$.

Из результатов Приложения А к этой главе (формулы (23.А.6), (23.А.21) и (23.А.23)) следует, что энергия E_0 состояния фальшивого вакуума с нулевым средним значением скалярного поля дается выражением

$$E_0 = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left[\int \exp(-S[\phi; T]) \prod_{\mathbf{x}, t} d\phi(\mathbf{x}, t) \right], \quad (23.8.2)$$

где $S[\phi; T]$ — евклидово действие, полученное с помощью формулы (23.8.1),

$$S[\phi; T] = \int d^3x \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (23.8.3)$$

а интеграл в (23.8.2) берется по всем полям $\varphi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющим условиям

$$\varphi(\mathbf{x}, T/2) = \varphi(\mathbf{x}, -T/2) = 0. \quad (23.8.4)$$

Энергия (23.8.2) комплексна, и ее мнимая часть определяет вероятность распада.

Чтобы вычислить функциональный интеграл в формуле (23.8.2), найдем стационарную «точку» евклидова действия $S[\varphi, T]$. Поля, при которых интеграл (23.8.3) стационарен, удовлетворяют уравнениям поля

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \varphi} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (23.8.5)$$

и граничным условиям (23.8.4). Благодаря таким граничным условиям, решение этого уравнения называется *баунсом* *.

Будем искать эти решения, сделав предположение, что $\varphi(\mathbf{x}, t)$ инвариантно относительно вращений вокруг точки $\mathbf{x}_0$, t_0 в четырех измерениях:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\rho), \text{ где } \rho \equiv \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + (t - t_0)^2}. \quad (23.8.6)$$

Существуют и решения, которые не являются инвариантными относительно вращений в четырехмерном пространстве, но этим другим решениям отвечают большие значения S ³⁷, так что они становятся пренебрежимо малыми при больших T . Подставляя анзатц (23.8.6) в уравнение (23.8.5), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} = V'(\varphi). \quad (23.8.7)$$

Строго говоря, решение такого вида согласуется с граничными условиями (23.8.4), только когда T очень велико по сравнению

* Вместо точного перевода *отскок* мы предпочли русскую транслитерацию англ. термина *bounce*. Именно такой термин используется в ряде имеющихся русскоязычных книг. — Прим. пер.

с характерным временем, связанным с $V(\rho)$. В этом случае мы можем взять T в условии (23.8.4) бесконечно большим, и тогда оно становится условием обращения в нуль $\Phi(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$. Кроме того, $\Phi(\mathbf{x}, t)$ должно быть аналитической функцией $\mathbf{x}$ в окрестности $\mathbf{x} = 0$ при всех t , включая $t = t_0$, так что $\Phi(\rho)$ есть степенной ряд по ρ^2 при $\rho \rightarrow 0$, и, в частности, $d\Phi/d\rho = 0$ при $\rho = 0$. С учетом этих условий уравнение (23.8.7) есть уравнение движения частицы единичной массы с «координатой» Φ , зависящей от «времени» ρ , и движущейся в потенциальном поле $-V(\Phi)$ в присутствии силы вязкого трения $-(3/\rho)d\Phi/d\rho$. Эта частица начинает движение из состояния покоя при некотором конечном начальном значении Φ_0 при $\rho = 0$ и достигает значения $\Phi = 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, теряя при движении свою начальную «энергию» $-V(\Phi_0) > 0$ за счет вязкости. Евклидово действие (23.8.2) для такого решения равно

$$B \equiv \int_0^\infty 2\pi^2 \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \right)^2 + V(\Phi) \right]. \quad (23.8.8)$$

Критически важно определить знак B . Для этого мы используем³⁸ тот же прием, который был применен при доказательстве теоремы Деррика в разделе 23.1, и рассматриваем действие (23.8.8) для модифицированного поля $\Phi_R(\rho) \equiv \Phi(\rho/R)$. Изменяя масштаб переменной интегрирования, находим:

$$S[\Phi_R] = \int_0^\infty 2\pi^2 \rho^3 d\rho \left[\frac{R^2}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \right)^2 + R^4 V(\Phi) \right]. \quad (23.8.9)$$

Если $\Phi(\rho)$ есть решение уравнения (23.8.7), тогда действие должно быть стационарно по отношению к любой вариации Φ , так что $dS[\Phi_R]/dR$ должна обращаться в нуль при $R = 1$. Поэтому

$$\int_0^\infty \rho^3 d\rho \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \right)^2 = -4 \int_0^\infty \rho^3 d\rho V(\Phi). \quad (23.8.10)$$

Отсюда следует, что

$$B - \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 > 0. \quad (23.8.11)$$

Мы вернемся позже к явному приближенному решению для $\phi(\rho)$, но сначала рассмотрим, как можно использовать такие решения.

В данном случае мы имеем не однобаунсовую конфигурацию, при которой евклидово действие стационарно, но континуум, характеризующийся коллективными координатами $\mathbf{x}_0$ и t_0 . Согласно результатам раздела 23.7, мы должны провести интегрирование по этим параметрам, и так как B не зависит от $\mathbf{x}_0$ и t_0 , что в результате дает множители $\mathcal{V}$ и T в ящике пространственного объема $\mathcal{V}$. Вклад всех однобаунсовых конфигураций в функциональный интеграл (23.8.2) дается в однопетлевом приближении выражением

$$\mathcal{V} T A \exp(-B). \quad (23.8.12)$$

Коэффициент A пропорционален * произведению $\prod_n' \lambda_n^{-1/2}$, где λ_n — собственные значения ядра $\delta^2 S[\phi] / \delta\phi(\mathbf{x}, t) \delta\phi(\mathbf{x}', t')$, а штрихи означают, что мы должны опустить нулевые собственные значения, отвечающие изменениям коллективных координат $\mathbf{x}_0$ и t_0 . Используя формулу (23.8.10), видим, что вторая производная выражения (23.8.9) по R отрицательна при $R = 1$, так что имеется по крайней мере одно (на самом деле ровно одно ³⁹) отрицательное собственное значение, и следовательно в данном порядке коэффициент A мнимый. Мы не будем пытаться вычислить A , заметим лишь, что в противоположность $\exp(-B)$ коэффициент A не содержит драматической зависимости от параметров теории, так что можно оценить его по соображениям размерности как величину

* Когда непрерывная группа симметрии G спонтанно нарушается до подгруппы H , существуют дополнительные коллективные координаты, задающие ориентацию H внутри G . Интегрирование по этим параметрам приводит к дополнительным множителям в A , равным объему факторпространства G/H .

порядка iM^{-4} , где M — некоторый характерный масштаб масс в теории.

При больших γ и T можно найти дополнительные стационарные конфигурации, образуя наложение любого числа N таких баунсовых конфигураций, что приводит к вкладу, представляющему N -ю степень величины (23.8.12), деленному на $N!$, для того, чтобы учесть тот факт, что при интегрировании $\mathbf{x}_0$ и t_0 по N , мы суммируем по конфигурациям, которые отличаются только перестановками N тождественных баунсов. Суммирование по N дает тогда степень величины (23.8.12), так что энергия (23.8.2) есть просто величина (23.8.12), деленная на $-T$:

$$E_0 = -\gamma A \exp(-B). \quad (23.8.13)$$

Поскольку A — порядка iM^{-4} , вероятность распада фальшивого вакуума в единице объема будет величиной порядка

$$\Gamma / \gamma \approx M^{-4} \exp(-B). \quad (23.8.14)$$

Заметим, что это — вероятность распада в единице объема, поскольку распад происходит не за счет изменения скалярного поля одновременно во всем пространстве, а за счет появления пузырьков истинного вакуума на фоне фальшивого вакуума.

Результат (23.8.14) часто оказывается полезным в случае, когда B велико, так что подбарьерный переход сильно подавлен, и можно оцетить фактор подавления просто как $\exp(-B)$. К счастью, наиболее естественная ситуация, в которой B велико, это та, когда удастся вычислить B в замкнутой форме. Это случай, когда энергия $V(\langle\phi\rangle) \equiv -\epsilon$ истинного вакуума лишь немного меньше нулевой энергии фальшивого вакуума, но $V(\phi)$ положительно и не мало между $\phi = 0$ и $\phi = \langle\phi\rangle$. Чтобы минимизировать в этом случае евклидово действие (23.8.3), нужно взять ϕ близким к $\langle\phi\rangle$ внутри четырехмерного шара большим радиусом R , при котором ϕ падает до нуля внутри оболочки толщиной $L \approx M^{-1}$, характерной для потенциала в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. (Иногда это называют «приближением тонкой стенки», но, возможно, лучшим названием было бы «приближение большого пузыря».) В этом приближении действие (23.8.3) равно

$$S(R) \simeq -\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \epsilon + 2\pi^2 R^3 \mathcal{S}, \quad (23.8.15)$$

где $\mathcal{P}$ — поверхностное натяжение, равное вкладу оболочки в действие, отнесенному к единице площади. Второй член в левой части формулы (23.8.7) становится пренебрежимо малым при $\rho \approx R$, так что задача становится по существу одномерной. Поэтому можно взять поверхностное натяжение из неравенства (23.1.4), которое при подстановке решения полевых уравнений становится равенством. В теперешних обозначениях

$$\mathcal{P} = \int_0^{\langle \Phi \rangle} \sqrt{2V(f)} df. \quad (23.8.16)$$

Действие (23.8.15) стационарно при значении радиуса

$$R \simeq \frac{3\mathcal{P}}{\epsilon}, \quad (23.8.17)$$

так что действие в своей стационарной точке имеет значение

$$B \simeq \frac{27\pi^2 \mathcal{P}^4}{2\epsilon^3}. \quad (23.8.18)$$

Заметим, что B велико для малых ϵ , так что в этом случае вероятность распада фальшивого вакуума сильно подавлена. После прохождения сквозь барьер пузырек истинного вакуума будет расти со скоростью света, сталкиваясь в конце концов с другими пузырьками, пока все пространство не окажется в состоянии наименьшей энергии.

Приложение А. Евклидовы функциональные интегралы

В этом приложении описывается использование евклидовых функциональных интегралов в квантовой теории поля. Как отмечалось в разделе 9.1, квантовую теорию поля можно сформулировать в четырехмерном евклидовом пространстве-времени. Вместо того, чтобы углубляться в нетривиальное аналитическое продолжение, необходимое для вычисления элементов S -матрицы в данном подходе, мы проиллюстрируем здесь использование евклидовых

функциональных интегралов, обратившись к задаче, для которой они естественно приспособлены.

Рассмотрим набор эрмитовых канонических переменных Q_a и P_a , с коммутационными соотношениями

$$[Q_a, P_b] = i\delta_{ab}, \quad (23.A.1)$$

$$[Q_a, Q_b] = [P_a, P_b] = 0. \quad (23.A.2)$$

В квантовой теории поля считается, что индекс a , как в разделе 9.1, включает пространственную координату $\mathbf{x}$ и любые дискретные лоренцовские индексы и индексы сортов m , а кронекеровский дельта-символ в формуле (23.A.1) понимается как $\delta_{\mathbf{x}m, \mathbf{y}n} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{mn}$. Определим собственные состояния Q_a :

$$Q_a|q\rangle = q_a|q\rangle, \quad (23.A.3)$$

нормированные так, что

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q) \equiv \prod_a \delta(q'_a - q_a), \quad (23.A.4)$$

Аналогично определены собственные состояния $|p\rangle$ оператора P_a .

Задача, которую мы рассматриваем, состоит в вычислении матричного элемента

$$F(q', q; T) \equiv \langle q' | \exp(-H[Q, P]T) | q \rangle, \quad (23.A.5)$$

где H — гамильтониан, а T — произвольная положительная постоянная. Одним из приложений является изучение энергий основных состояний. Если наименьшее собственное значение H равно E_0 , и собственный вектор этого состояния есть $|0\rangle$, тогда при $T \rightarrow \infty$

$$F(q', q; T) \rightarrow \langle q' | 0 \rangle \langle 0 | q \rangle \exp(-E_0 T),$$

так что

$$E_0 = -\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln F(q', q; T)}{T} \right). \quad (23.A.6)$$

Кроме того, можно вычислить функцию распределения в статистической механике, зная след

$$Z(\beta) \equiv \text{Tr} \exp(-\beta H) = \int \left[\prod_a dq_a \right] F(q', q; \beta), \quad (23.A.7)$$

где $1/\beta$ — температура.

Чтобы вывести формулу функционального интеграла для $F(q', q; T)$, определим евклидовы зависящие от времени операторы

$$Q_a(t) \equiv e^{Ht} Q_a e^{-Ht}, \quad P_a(t) \equiv e^{Ht} P_a e^{-Ht}, \quad (23.A.8)$$

и соответствующие правые и левые собственные состояния

$$|q, t\rangle \equiv \exp(Ht)|q\rangle, \quad \langle q, t| \equiv \langle q| \exp(-Ht), \quad (23.A.9)$$

$$|p, t\rangle \equiv \exp(Ht)|p\rangle, \quad \langle p, t| \equiv \langle p| \exp(-Ht), \quad (23.A.10)$$

такие, что

$$Q_a(t)|q, t\rangle = q_a|q, t\rangle, \quad \langle q, t|Q_a(t) = q_a\langle q, t|, \quad (23.A.11)$$

и

$$P_a(t)|p, t\rangle = p_a|p, t\rangle, \quad \langle p, t|P_a(t) = p_a\langle p, t|. \quad (23.A.12)$$

Одно различие между этим формализмом и обычным формализмом в пространстве Минковского заключается в том, что «временная» эволюция операторов управляется неунитарным преобразованием подобия (23.A.8), так что здесь нет простой связи между правыми собственными состояниями $\langle q, t|$ оператора $Q(t)$ и эрмитово сопряженными левыми собственными состояниями $|q, t\rangle$, не считая состояний, взятых в точке $t = 0$.

На этом языке определение (23.A.5) величины $F(q', q; t)$ можно переписать в виде

$$F(q', q; T) = \langle q', T/2 | q, -T/2 \rangle. \quad (23.A.13)$$

Вычислим сначала $\langle q', t + dt | q, t \rangle$ для инфинитезимального интервала dt . Принимая соглашение, что в $H(Q, P)$ все Q записаны левее всех P , имеем

$$\langle q', t + dt | q, t \rangle = \langle q', t | \exp(-H(q', P)dt) | q, t \rangle.$$

Разложим $|q, t\rangle$ по полному набору собственных состояний операторов $P_a(t)$. Из формулы (23.A.1) имеем, как обычно,

$$\langle q, t | p, t \rangle = \prod_a \frac{\exp(ip_a q_a)}{\sqrt{2\pi}}, \quad \langle p, t | q, t \rangle = \prod_a \frac{\exp(-ip_a q_a)}{\sqrt{2\pi}},$$

так что

$$\langle q', t + dt | q, t \rangle = \int \left(\prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \right) \exp \left(i \sum_a p_a (q'_a - q_a) - H(q', p) dt \right).$$

(Здесь временно приостановлено соглашение о суммировании.)

Как и в разделе 9.1, разделим временной интервал от $-T/2$ до $T/2$ на большое число очень маленьких интервалов и включим для каждого интервала сумму по собственным состояниям Q . Определяя функции $q(t)$ и $p(t)$, осуществляющие интерполяцию между величинами собственных значений Q и P на каждом интервале, получаем выражение для F в виде функционального интеграла в самой общей форме

$$F(q', q; T) = \int_{q(-T/2)=q, q(T/2)=q'} \left(\prod_{a,t} dq_a(t) \right) \int \left(\prod_{a,t} \frac{dp_a(t)}{2\pi} \right) \quad (23.A.14) \\ \times \exp \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt \left[i \sum_a \dot{q}_a(t) p_a(t) - H(q(t), p(t)) \right] \right).$$

Чтобы вычислить функцию распределения (23.A.7), мы должны проинтегрировать по p и q , которые подчинены только условию, что $q(t)$ — периодическая функция с периодом, равным обратной температуре β :

$$\begin{aligned}
Z(\beta) = & \int_{q(\beta/2)=q(-\beta/2)} \left(\prod_{a,t} dq_a(t) \right) \int \left(\prod_{a,t} \frac{dp_a(t)}{2\pi} \right) \\
& \times \exp \left(\int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[i \sum_a \dot{q}_a(t) p_a(t) - H(q(t), p(t)) \right] \right).
\end{aligned} \tag{23.A.15}$$

Формулы (23.A.14) и (23.A.15) выглядят несколько странно, так как в экспоненте один член — действительный, а другой — мнимый. Вид этих формул становится более привычным, если мы возьмем функциональный интеграл по всем $p_a(t)$. Для важного класса теорий, в которых $H(q, p)$ квадратичен по p , интеграл тривиален:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} A_{ab}(q) p_a p_b + \sum_a B_a(q) p_a + C(q). \tag{23.A.16}$$

Как показано в приложении к гл. 9, интеграл по p в формуле (23.A.14) дает

$$\begin{aligned}
F(q', q; t) = & \int_{q(-T/2)=q, q(T/2)=q'} \left(\prod_{a,t} dq_a(t) \right) (\text{Det}[2i\pi \mathcal{M}(q)])^{-1/2} \\
& \times \exp \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt \left[i \sum_a \dot{q}_a(t) \bar{p}_a(t) - H(q(t), \bar{p}(t)) \right] \right),
\end{aligned} \tag{23.A.17}$$

где $\mathcal{M}(q)$ — «матрица»

$$\mathcal{M}(q)_{at',bt} = \delta(t' - t) A_{ab}(q(t)), \tag{23.A.18}$$

а $\bar{p}(t)$ — стационарная «точка» аргумента в экспоненте в формуле (23.A.17), т. е. решение уравнения

$$i\dot{q}_a(t) = \frac{\delta H(q(t), p)}{\delta p_a} \Big|_{p=\bar{p}(t)}. \tag{23.A.19}$$

Множитель i здесь не должен удивлять, так как уравнение (23.A.19) — это то же уравнение, которое удовлетворяется неэрмитовыми операторами (23.A.8):

$$i\dot{Q}_a(t) = i[H, Q_a(t)] = \frac{\delta H(Q(t), P(t))}{\delta P_a(t)}.$$

Для гамильтониана в виде произвольной квадратичной формы (23.A.16) решение уравнения (23.A.19) имеет вид

$$\bar{p}_a = \sum_b [A^{-1}(q)]_{ab} (iq_{ab} - B_b(q)), \quad (23.A.20)$$

и поэтому выражение (23.A.17) принимает вид

$$F(q', q; t) = \int_{q(-T/2)=q, q(T/2)=q'} \left(\prod_{a,t} dq_a(t) \right) \times (\text{Det}[2i\pi \mathcal{M}(q)])^{-1/2} \exp(-S[q]), \quad (23.A.21)$$

где $S[q]$ — действие

$$S[q] \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + i \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) B_a(q) \dot{q}_b - \frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) B_a(q) B_b(q) + C(q) \right]. \quad (23.A.22)$$

В частном (но часто встречающемся) случае, когда $B_a(q) = 0$, это выражение упрощается:

$$S[q] \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}^{-1}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b + C(q) \right]. \quad (23.A.23)$$

Следовательно в данном случае «лагранжиан», возникающий в функциональном интеграле, равен тому выражению, которое должен был бы иметь гамильтониан в пространстве-времени Минковского, когда все p выражены через q и $\dot{q}$.

Приложение В. Перечень гомотопических групп

В этом приложении представлен перечень гомотопических групп ⁴⁰ различных многообразий. Ниже Z обозначает группу целых чисел, со сложением в качестве операции группового умножения, так что единичным элементом является нуль. Кроме того, Z_n — группа целых чисел по модулю n . Тривиальная группа, состоящая из элемента 0, обозначается 0. Гомотопические группы для прямых произведений многообразий можно получить из гомотопических групп самих многообразий с помощью правила произведения:

$$\pi_n(\cdot \mathcal{M}_1 \times \cdot \mathcal{M}_2) = \pi_n(\cdot \mathcal{M}_1) \times \pi_n(\cdot \mathcal{M}_2).$$

Сферы

$$\begin{aligned} \pi_n(S_m) &= 0 \quad \text{при } n < m; \\ \pi_n(S_n) &= Z; \\ \pi_{n+1}(S_n) &= Z_2, \quad \text{кроме } \pi_2(S_1) = 0, \pi_3(S_2) = Z; \\ \pi_{n+2}(S_n) &= Z_2, \quad \text{кроме } \pi_3(S_1) = 0; \\ \pi_{n+2}(S_n) &= Z_2, \quad \text{кроме } \pi_3(S_1) = 0, \pi_5(S_2) = Z_2, \pi_6(S_3) = Z_{12}, \\ &\quad \pi_7(S_4) = Z \times Z_{12}; \\ \pi_n(S_1) &= 0, \quad \text{кроме } \pi_1(S_1) = Z. \end{aligned}$$

Многообразия групп Ли

$$\begin{aligned} \pi_1(G) &= \begin{cases} Z, & G = U(1); \\ Z_2, & G = SO(n) \ (n \geq 3); \\ 0, & \text{другие простые компактные связные} \\ & \text{группы Ли}; \end{cases} \\ \pi_2(G) &= 0, \quad G - \text{любая компактная связная группа Ли}; \\ \pi_3(G) &= Z, \quad G - \text{любая компактная связная группа Ли}; \\ \pi_4(G) &= \begin{cases} Z_2 \times Z_2, & G = SO(4), Spin(4); \\ Z_2, & G = USp(2n), SU(2), SO(3), Spin(5), SO(5); \\ 0, & G = SU(n) \ (n \geq 3), SO(n) \ (n \geq 6), G_2, F_4, E_n; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\pi_{4n+2}(USp(2n)) = \begin{cases} Z_{(2n+2)!}, & n - \text{even}, \\ Z_{2(2n+2)!}, & n - \text{odd}; \end{cases} \quad \pi_{2n}(SU(n)) = Z_{n!}.$$

Теоремы периодичности Ботта

Для $n \geq (k-1)/4$, $k \geq 2$

$$\pi_k(USp(2n)) = \begin{cases} Z, & k = 3, 7 \pmod{8}; \\ Z_2, & k = 4, 5 \pmod{8}; \\ 0, & k = 0, 1, 2, 6 \pmod{8}; \end{cases}$$

Для $n \geq k+2$, $k \geq 2$

$$\pi_k(SO(n)) = \begin{cases} Z, & k = 3, 7 \pmod{8}; \\ Z_2, & k = 0, 1 \pmod{8}; \\ 0, & k = 2, 4, 5, 6 \pmod{8}; \end{cases}$$

Для $n \geq (k+1)/2$, $k \geq 2$

$$\pi_k(SU(n)) = \begin{cases} Z, & k - \text{even}; \\ 0, & k - \text{odd}. \end{cases}$$

Фактор-пространства

Для любой группы Ли G и любой подгруппы Ли $H \subset G$

$$\pi_2(G/H) = \ker\{\pi_1(H) \mapsto \pi_1(G)\}.$$

Это означает, что $\pi_2(G/H)$ есть та подгруппа $\pi_1(H)$, которая отображается в тривиальный элемент $\pi_1(G)$ при вложении H и G . В частном случае

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H), \text{ если } \pi_1(G) = 0.$$

Задачи

1. Какого типа слагаемое следует добавить в действие для полей голдстоуновских бозонов в четырехмерном евклидовом пространстве-времени, чтобы стало возможным получить топологически нетривиальные полевые конфигурации, на которых действие стационарно?
2. Рассмотрите теорию скалярных полей в шести пространственных измерениях, в которой киральная симметрия $SU(2) \times SU(2)$ лагранжиана спонтанно нарушается до $SU(2)$ группы изоспина. Предположите, что в лагранжиан добавлено достаточное количество слагаемых с высшими производными, так что скирмионы стабилизированы. Какому типу закона сохранения подчиняются эти скирмионы? (Указание: заметьте, что как показано в разделе 2.7, $SU(2)$ топологически то же самое, что S_3 .)
3. Покажите, что все $\pi_n(\mathcal{M})$ для $n > 1$ и произвольных многообразий $\mathcal{M}$ являются абелевыми.
4. Какова зависимость от константы связи вклада инстантонов с единичным топологическим числом в $SU(4)$ калибровочной теории?
5. Выведите формулу для массы аксиона в случае, когда все массы m_u , m_d и m_s малы.
6. Рассмотрите теорию действительного скалярного поля ϕ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4 - g \phi,$$

где m^2 и λ положительны, а g очень мала. Вычислите экспоненциальный подавляющий множитель $\exp(-B)$ в вероятности распада метастабильного вакуумного состояния через m^2 , λ и g .

Список литературы

1. Belavin, A.A., Polyakov, A.M., Schwarz, A.S., and Tyupkin, Yu.S., *Phys. Lett.*, **59B**, 85 (1975).
2. 't Hooft, G., *Nucl. Phys.*, **B79**, 276 (1974); Polyakov, A.M., *JETP Letters*, **20**, 194 (1974).
3. Skyrme, T.H.R., *Proc. Roy. Soc. London*, **A260**, 127 (1961).
4. Nielsen, H. and Olesen, P., *Nucl. Phys.*, **B61**, 45 (1973).
5. Zel'dovich, Ya.B., Kobzarev, I.Yu., and Okun', L.B., *Sov. Phys. JETP*, **40**, 2 (1975).
6. Coleman, S., *Phys. Rev.*, **D15**, 2929 (1977); Callan, C.G. and Coleman, S., *Phys. Rev.*, **D16**, 1762 (1977). Обсуждение в разделе 23.8 основано на этих работах. Первые работы по образованию областей с нарушенной симметрией см.: Lee, T.D. and Wick, G.C., *Phys. Rev.*, **D9**, 2291 (1974); Voloshin, M.B., Kobzarev, I.Yu., and Okun', L.B., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **20**, 644 (1975).
7. Coleman, S., *Nucl. Phys.*, **B262**, 263 (1985); Lee, T.D. and Pang, Y., *Phys. Rep.*, **221**, 251 (1992) и процитированные в этой работе другие ссылки на статьи Ли с сотрудниками.
8. Необычайно живо написанный обзор этих вопросов и ссылки на большую часть оригинальной литературы см.: Coleman, S., *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985), ch. 6, 7. Хороший более поздний обзор: Weinberg, E.J., *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **42**, 177 (1992).
9. Derrick, G.H., *J. Math. Phys.*, **5**, 1252 (1964).
10. Bogomol'nyi, E.B., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **24**, 449 (1976).
11. Теория гомотопий была использована для изучения нарушения симметрии в ранней Вселенной в работах: Kibble, T.W.B., *J. Phys.*, **A9**, 1387 (1976); Vilenkin, A. and Shellard, E.P.S., *Cosmic Strings*

and Other Topological Defects (Cambridge University Press, Cambridge, 1994) и приведенные там ссылки.

12. Georgi, H. and Glashow, S.L., *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 1494 (1972).
13. Arafune, J., Freund, P.G.O., and Goebel, C.J., *J. Math. Phys.*, **16**, 433 (1975).
14. Prasad, M.K. and Sommerfeld, C.M., *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 760 (1975).
15. Arbais, F.A. and Primack, J.R., *Phys. Rev.*, **D13**, 819 (1976).

Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc. London*, **A133**, 60 (1934); *Phys. Rev.*, **74**, 817 (1948).
17. Zel'dovich, Ya.B. and Khlopov, M.Yu., *Phys. Lett.*, **79B**, 239 (1978); Preskill, J., *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 1365 (1979). Обзор см.: Preskill, J., *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **34**, 461 (1984).
18. См., например: Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972), ch. 15 (есть рус. пер.: С. Вейнберг. *Гравитация и космология*. М.: Мир, 1975).
19. Guth, A., *Phys. Rev.*, **D23**, 347 (1981); Linde, A.D., *Phys. Lett.*, **108B**, 389 (1982); Albrecht, A. and Steinhardt, P., *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 1220 (1982).
20. Jackiw, R. and Rebbi, C., *Phys. Rev.*, **D13**, 3398 (1976).
21. Rubakov, V.A., *JETP Lett.*, **33**, 644 (1981); *Nucl. Phys.*, **B212**, 391 (1982); Callan, C.G., *Phys. Rev.*, **D25**, 2141 (1982); *Phys. Rev.*, **D26**, 2058 (1982); *Nucl. Phys.*, **B212**, 391 (1982).
22. Bott, R., *Bull. Soc. Math. France*, **84**, 251 (1956).
23. 't Hooft, G., *Phys. Rev.*, **D14**, 3432 (1976); *Phys. Rep.*, **142**, 357 (1986).

24. Atiyah, M. and Ward, R., *Commun. Math. Phys.*, **55**, 117 (1977).
25. 't Hooft, G., *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 8 (1976). Вместо использованной здесь идентификации свободных от аномалий сохраняющихся токов, вывод 'т Хофтом правил отбора базировался на анализе нулевых мод оператора Дирака (см. раздел 23.7), приводящих к изменению каждого квантового числа у инстантона с данным топологическим числом.
26. Callan, C.G., Dashen, R.F., and Gross, D.J., *Phys. Lett.*, **63B**, 334 (1976); Jackiw, R. and Rebbi, C., *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 172 (1976).
27. Kuzmin, V.A., Rubakov, V.A., and Shaposhnikov, M.E., *Phys. Lett.*, **155B**, 36 (1985). Доминирующий вклад в переход дают полевые конфигурации, известные как сфалероны; см.: Manton, N.S., *Phys. Rev.*, **D28**, 2019 (1983); Klinkhammer, F.R. and Manton, N.S., *Phys. Rev.*, **D30**, 2212 (1984); Dashen, R.F., Hasslacher, B., and Neveu, A., *Phys. Rev.*, **D10**, 4138 (1974).
28. Georgi, H. and McArthur, I., unpublished (1981); Kaplan, D.V. and Manohar, A.V., *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 2004 (1986); Choi, K., *Nucl. Phys.*, **B383**, 58 (1992).
29. Более детальные вычисления см.: Baluni, V., *Phys. Rev.*, **D19**, 2227 (1978); Crewther, R.J., Di Vecchia, P., Veneziano, G., and Witten, E., *Phys. Lett.*, **88B**, 123 (1979).
30. Peccei, R.D. and Quinn, H., *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 1440 (1977); *Phys. Rev.*, **D16**, 1791 (1977).
31. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 223 (1978); Wilczek, F., *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 279 (1978).
32. Kim, J.E., *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 103 (1979); Shifman, M.A., Vainshtein, A.I., and Zakharov, V.I., *Nucl. Phys.*, **B166**, 493 (1980); Zhitnitsky, A.R., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **31**, 260 (1980); Dine, M., Fishler, W., and Srednicki, M., *Phys. Lett.*, **104B**, 199 (1981).

33. Weinberg, S., in *Neutrinos '78*, ed. E.C. Fowler (Purdue, Lafayette, 1978).
34. Dicus, D.A., Kolb, E.W., Teplitz, V.I., and Wagoner, R.V., *Phys. Rev.*, **D18**, 1829 (1978); D22, 839 (1980).
35. См. обзоры: Turner, M.S., *Phys. Rep.*, **197**, 68 (1990); Raffelt, G.G., *Phys. Rep.*, **198**, 1 (1990).
36. Preskill, J., Wise, M.B., and Wilczek, F., *Phys. Lett.* **120B**, 127 (1983); Abbott, L.F. and Sikivie, P., *Phys. Lett.*, **120B**, 130 (1983); Dine, M. and Fishler, W., *Phys. Lett.*, **120B**, 137 (1983). Обзоры см.: Kim, J.E., *Phys. Rep.*, **150**, 1 (1987); Turner, M.S., *Phys. Rep.*, **197**, 68 (1990).
37. Coleman, S., Glaser, V., and Martin, A., *Commun. Math. Phys.*, **58**, 211 (1978).
38. Coleman, S., [8], Section 6.2.
39. Coleman, S., [8], Section 6.5.
40. Actor, A., *Rev. Mod. Phys.*, **51**, 461 (1979); *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* (MIT Press, Cambridge, 1980), Appendix A.

Именной указатель

- Абрикосов А. А. 481
Боголюбов Н. Н. 219
Воронов Б. Л. 87
Дзялошинский И. Е. 481
Горьков Л. П. 481
Славнов А.А. 109
Тютин И. В. 87
Ширков Д.В. 219
- Abachi, S. 477
Abbott, L.F. 152, 641
Abe, F. 477, 478
Abe, K. 221
Actor, A. 641
Ademollo, M. 393
Adler, S. 333, 561
Adler, S.L. 219, 334, 336, 562
Albrecht, A. 639
Altarelli, G. 219, 221, 394
Alvarez, O. 562
Alvarez-Gaume, L. 86
Alvarez-Gaumi, L. 561
Amaldi, U. 480
Anderson, P.M., 480
Anselmi, D. 151
Arafune, J. 639
Arbais, F.A. 639
Arnison, G. 478
Atiyah, M. 640
Atiyah, M.F. 561, 562
Aubert, J.J. 477
Augustin, J.E. 477
- Baker, M. 219
- Baluni, V. 640
Bamert, P. 478
Banks, T. 563
Barbieri, R. 563
Bardeen, J. 480
Bardeen, W.A. 220, 562
Barnich, G. 86, 152, 564
Batalin, I.A. 87
Baulieu, L. 86
Baur, R. 334
Beane, S.R. 336
Becchi, C. 85
Becci, C. 151
Belavin, A.A. 638
Bell, J.S. 561
Bender, C.M. 109
Benfatto, G. 481
Bernard, C. 393
Bijnens, J. 334, 337
Bismut, J.M. 562
Bjorken, J.D. 393
Bleuler, K. 85
Bloom, E.D. 220, 393
Bludman, S. 477
Boer, de, W. 480
Bogomol'nyi, E.B. 480, 638
Bonora, L. 85
Borel, A. 338
Bott, R. 337, 639
Bouchiat, C. 562
Branchina, V. 109
Brandt, F. 86, 152, 564
Brézin, E. 220
Breidenbach, M. 220, 393

- Brout, R. 476
Burgess, C.P. 478

Cabibbo, N. 477
Cahill, K. 109
Callan, C.G. 219, 336, 393, 638, 639, 640
Cartan, E. 87
Castorina, P. 109
Chaikin, P.M. 220
Chanda, R. 563
Choi, K. 640
Chou, K.-C. 334
Christ, N. 85, 394
Christensen, S.M. 563
Chu, C.-S. 564
Coleman, S. 109, 219, 336, 337, 563, 638, 641
Collins, J.C. 219
Cooper, F. 109
Cooper, L.N. 480
Cornwall, J.M. 479
Cotta-Ramusino, P. 85
Crewther, R.J. 640
Critchley, R. 563
Curci, G. 85, 86

Das, T. 334
Dashen, R. 333, 336, 640
De Witt, B. 109
Delbourgo, R. 563
Derrick, G.H. 638
Dicus, D.A. 641
Dimopoulos, S. 479, 480, 563
Dine, M. 640, 641
Dirac, P.A.M. 639
Dixon, J.A. 564
Donoghue, J.F. 333, 335, 337, 393
Dragon, N. 564
Dubois-Violette, M. 564
Duff, M.J. 563
Duncan, A. 393, 394
Dyson, F.J. 394

Ecker, G. 337
Eguchi, T. 563
Eichten, E. 221, 479
Ellis, J. 221, 477, 479, 480
Englert, F. 476
Ericson, T. 334

Faddeev, L.D. 84, 564
Fanchotti, S. 479
Farhi, E. 479
Farrar, G. 563
Fayyazuddin 393
Feldman, J. 481
Fernandez, R. 219
Ferrara, S. 87
Ferrari, R. 85, 86
Feynman, R.P. 84, 393
Finkelstein, R.J. 561
Fischer, M.E. 220
Fishler, W. 640, 641
Fogli, G.L. 477, 479
Fradkin, E.S. 87
Fradkina, T.E. 87
Freed, D.S. 562
Freedman, D.Z. 87
Freund, P. 563
Freund, P.G.O. 639
Friar, J. 336
Friedman, J.L. 220
Frishman, Y. 563
Fritzsche, H. 220, 221, 338
Froelich, J. 219
Frriar, J. 335
Fubini, S. 334
Fujikawa, K. 476, 561
Fujimoto, Y. 109
Fukuda, H. 561
Furstmann, H. 480

Gaillard, M.K. 221
Gallavotti, G. 481
Gamov, G. 477
Gasser, J. 337

- Gell-Mann, 218
 Gell-Mann, M. 85, 220, 221, 334, 335, 336, 337, 338, 479
 Georgi, H. 394, 480, 562, 563, 564 639, 640
 Gilkey, P.B. 563
 Gilman, F.J. 478
 Gilmore, R. 87
 Ginsparg, P. 561, 562
 Ginzburg, V.L. 480
 Glaser, V. 641
 Glashow, S. 337
 Glashow, S.L. 85, 338, 476, 477, 480, 562, 639
 Glimm, J. 219
 Goebel, C.J. 639
 Goldberger, M.L. 334
 Goldman, T. 335
 Goldstone, J. 109, 333, 476
 Golowich, E. 335, 337, 393
 Gomis, J. 87, 151
 Gor'kov, L.P. 480
 Green, M. 478
 Greenberg, O.W. 220
 Greub, W. 337
 Gribov, V. 85
 Grisaru, M.T. 563
 Gross, D.J. 219, 220, 221, 393, 394, 562, 640
 Gupta, S.N. 85
 Guralnik, G.S. 334, 336, 476
 Guth, A. 639

 Hagberg, E. 477
 Hagen, C.R. 476
 Hall, L.J. 480
 Halperin, S. 337
 Han, M.Y. 220
 Hanson, A.J. 563
 Hanson, G. 221
 Harada, M. 152
 Hardy, G.H. 394
 Hardy, J.C. 477

 Hasert, F.J. 477, 478
 Hasslacher, B. 394, 640
 Hawking, S.W. 563
 Haymaker, R.W. 109
 Heitler, W. 85
 Henneaux, M. 86, 87, 152, 564
 Herb, S.W. 477
 Higgs, P.W. 476
 Hinchliffe, I. 221
 Hindmarsh, M. 109
 Ho, P.-M. 564
 Hollik, W. 478
 Holstein, B.R. 333, 335, 337
 Holten, van, J.W. 87
 Hooft, 't, G. 151, 152, 220, 221, 338, 394, 476, 638, 639, 640
 Hubbard, J. 481

 Iliopoulos, J. 109, 477, 562
 Itzykson, C. 109

 Jackiw, R. 85, 219, 338, 479, 561, 562, 639, 640
 Jaffe, A. 219
 Johnson, K. 219, 479
 Johnston, D. 109
 Jona-Lasinio, G. 334
 Josephson, B.D. 480
 Jost, J. 219
 Kallosh, R.E. 87
 Kaplan, D.V. 640
 Kawarabayashi, K. 393
 Kelley, S. 480
 Kemmer, N. 477
 Kendall, H.W. 220
 Khlopov, M.Yu. 639
 Kibble, T.W.B. 476, 638
 Kim, J.E. 640, 641
 Kimura, T. 86
 Kleinknecht, K. 478
 Klinkhammer, F.R. 640
 Kniehl, B. 479
 Kobayashi, M. 478

- Kobzarev, I.Yu. 638
Kogut, J. 220
Kolb, E.W. 641
Kolck, van, U. 335, 336
Kotchan, D. 334
Kreuzer, M. 564
Kugo, R. 85
Kugo, T. 152
Kuzmin, V.A. 640
- Landau, L.D. 219, 480
Lane, K. 221, 479
Langacker, P. 336, 478, 480
Lautrup, B. 85, 394
Lavrov, P.M. 86, 151
Lelvy, M. 334, 335
Lee, B.W. 151, 476
Lee, C.Y. 336
Lee, T.D. 85, 478, 638
LeGuillou, J.C. 220
Leites-Lopes, J. 477
Leutwyler, H. 221, 337
Linde, A.D. 639
Lipatov, L.N. 394
Lisi, E. 477
LoSecco, J. 393
Low, F.E. 218
Lubensky, T.C. 220
Lurie, D. 334
Luttinger, J.M. 219
- Maiani, L. 477, 563
Maksymyk, I. 478
Maltman, K. 334
Manes, J. 85
Manohar, A.V. 640
Manton, N.S. 640
Martin, A. 109, 641
Maskawa, K. 478
Matur, V.S. 334
Maces, J. 563, 564
McArthur, I. 640
Mehta, M.L. 562
- Meissner, U.G. 337
Meyer, Ph. 562
Mills, R.J. 84
Min, D.-P. 336
Miyamoto, Y. 561
Moshhin, P.Yu. 86
Mostow, G.D. 336
Mueller, A.H. 394
Musset, P. 478
Muzinich, I. 85
- Nakanishi, N. 85
Nambu, Y. 220, 333, 334
Nanopoulos, D.V. 480
Ne'eman, Y. 336
Neveu, A. 640
Nickel, B.G. 220
Nielsen, H. 638
Nielsen, N.K. 563
Nieuwenhuizen, van, P. 87, 563, 564
Norton, R.E. 479
Novikov, V.A. 478
- Oakes, R.J. 336
Ojima, I. 85
Okubo, S. 337
Okun', L.B. 478
Okun', L.B. 638
Oleson, P. 638
O'Rai fertaigh, L. 109
Ordóñez, C. 335
- Pagels, H. 336
Palais, R.S. 336
Pang, Y. 638
Parisi, G. 394
Park, T.-S. 336
Parravicini, G. 109
Pati, J. 480
Peccei, R.D. 640
Perez-Mercader, J. 109
Perl, M.L. 477
Pernice, S. 394

- Perry, M.J. 563
 Peskin, M. 221
 Peterman, A. 219
 Petronzio, R. 563
 Pich, A. 337
 Polchinski, J. 481
 Politzer, H.D. 220, 394
 Polonsky, N. 480
 Polyakov, A.M. 638
 Pope, C. 563
 Prasad, M.K. 639
 Preskill, J. 338, 563, 639, 641
 Primack, J.R. 639
 Proeyen, Van, A. 564

 Quinn, H.R. 480, 640

 Raby, S. 480, 563
 Raffelt, G.G. 641
 Ramond, P. 479
 Ray, L. 335
 Rebbi, C. 85, 639, 640
 Renk, B. 478
 Renner, B. 336
 Reshetnyak, A.A. 86
 Rho, M. 336
 Riazuddin 393
 Romer, R. 563
 Rosenberg, L. 561
 Ross, G.G. 221
 Rouet, A. 85, 151
 Roy, P. 563
 Rubakov, V.A. 639, 640

 Sakata, S. 561
 Salam, A. 109, 333, 476, 480, 563
 Samuel, S. 87
 Sanda, A. 476
 Sarid, U. 480
 Schrieffer, J.R. 480
 Schur, I. 562
 Schwarz, A.S. 86, 638
 Schwimmer, A. 563
 Schwinger, J. 476, 561, 564
 Schwitters, R.F. 221
 Seely, R. 337
 Shankar, R. 481
 Shaposhnikov, M.E. 640
 Shei, S.-S. 338
 Shellard, E.P.S. 639
 Shifman, M.A. 640
 Shrauner, E. 334
 Siegel, W. 86
 Sigg, D. 335
 Sikivie, P. 641
 Singer, I.M. 561, 562
 Sirlin, A. 479
 Skyrme, T.H.R. 638
 Slansky, R. 479
 Sokal, A.D. 219
 Sommerfeld, C.M. 639
 Srednicki, M. 640
 Srivastava, P.K. 562
 Steinberger, J. 561
 Steinhardt, P. 639
 Sterman, G. 221
 Stora, R. 85, 151, 562, 563, 564
 Stratonovich, R.L. 481
 Stueckelberg, E.G.C. 218
 Susskind, L. 479, 563
 Sutherland, D.G. 561
 Suzuki, M. 393
 Symanzik, K. 109, 219

 Talon, M. 564
 Tanikawa, Y. 561
 Taylor, J.C. 109
 Teitelboim, C. 87
 Teller, E. 477
 Teplitz, V.I. 641
 Thierry-Mieg, J. 85
 Thierry-Mieg, J. 86
 Thirring, W. 334
 Titchmarsh, E.C. 333
 Tomozawa, Y. 336
 Towner, I.S. 334, 477

- Treiman, S. 334, 393
 Troost, W. 564
 Trubowitz, E. 481
 Turner, M.S. 641
 Tyupkin, Yu.S. 638
 Tyutin, I.V. 85, 87, 151

 Urech, R. 334
 Utiyama, R. 84

 Vafa, C. 338
 Vainstein, A.I. 480, 640
 Vanstone, R. 337
 Vecchia, Di, P. 640
 Veltman, M. 151, 476, 478, 561
 Veneziano, G. 393, 640
 Vialett, C.M. 564
 Vilenkin, A. 639
 Vilkovisky, G.A. 87
 Voloshin, M.B. 638
 Voronov, B.L. 151
 Vysotsky, M.I. 478

 Wagoner, R.V. 641
 Ward, J. 476
 Ward, R. 640
 Weinberg, E. 109
 Weinberg, E.J. 638
 Weinberg, S. 221, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 393, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 562, 563, 639, 640, 641

 Weingarten, D. 338
 Weisberger, W.I. 334
 Weise, W. 334
 Wentzel, G. 477
 Wess, J. 336, 337, 563
 Wick, G.C. 638
 Wigner, E.P. 87
 Wilczek, F. 220, 221, 394, 479, 480, 640, 641
 Wilson, K. 393
 Wilson, K.G. 219, 220
 Wise, M.B. 641
 Witt, de, B. 84, 87, 152
 Witten, E. 337, 338, 562, 563, 564
 Wu, Y.-S. 562

 Yamawaki, K. 152
 Yanagida, T. 479
 Yang, C.N. 84, 476
 Yankielowicz, S. 563

 Zakharov, V.I. 640
 Zappala, D. 109
 Zee, A. 221, 479, 562, 563
 Zel'dovich, Ya.B. 638, 639
 Zhitnitsky, A.R. 640
 Zimmermann, W. 393
 Zinn-Justin, J. 87, 151, 220, 476
 Zumino, B. 85, 336, 337, 562, 563, 564
 Zweig, G. 220

Предметный указатель

- a_1 -мезон 364
 b -кварк 208, 418-422
 c -кварк 208, 418-422
 Δ -функция 232
 d -кварки, см. u - и d -кварки
 ϕ -мезон 318
 η мезон 304-311, 328-332
 J/ψ частица 419
 ρ -мезоны 312
 s -кварк 208, 304-305, 418-422
 σ -модель 261-264
 σ -член 282
 t -кварк 208, 418-422
 τ -лептон 365, 420
 u - и d -кварки 208, 247, 304-305, 368, 418-422
 ω -мезон 312

 Адлеровский нуль 238
 Адроны, см. мезоны, барионы
 Аксиальная калибровка 7, 21-23, 50, 58
 Аксиальная константа связи g_A 253, 276
 Аксионы 615-620
 Алгебра токов 261
 Алгебры Ли $U(1)$, определение 12
 Алгебры Ли, см. компактные алгебры Ли, полупростые алгебры Ли, простые алгебры Ли, $U(1)$ алгебры Ли
 Аннигиляция e^+e^- 175, 211-212, 364, 384, 423
 Аномалии в симметриях 59, 482-560
 Аномалия Адлера-Белла-Джекива, см. аномалии в симметриях
 Аномальные размерности 183
 Анти-БРСТ преобразования 58, 86
 Антигосты, см. поля гостов и антигостов
 Антиканонические преобразования 67, 127

 Антиполя 60, 127
 Антискобки см. также формализм
 Баталина-Вилковыского, антиканонические преобразования
 Аромат, определение 208
 Асимптотическая свобода 183-185, 209
 Аффинная связность 9

 Базовая точка, определение 578
 Барионное число 322, 585, 595
 Барионы 304
 Бегущая константа связи
 Бета-функция
 определение 165
 зависимость от определения константы 190-191, 194
 в электродинамике 173, 206
 в случае минимального вычитания 205
 для многих констант связи 192-195
 в квантовой хромодинамике 209
 в скалярной теории поля 166-167, 177, см. также ренормгруппа
 Бозоны Намбу-Голдстоуна, см. голдстоуновские бозоны
 БРСТ квантование 50-51, 58, 125
 БРСТ симметрия 38-51, 65, 11-112, 535-538
 Бьеркеновский скейлинг 367-370, 376, 380

 Взаимодействия
 релевантные 200, 203
 нерелевантные 200, 203
 маргинальные 200
 Вихревые нити 454-459, 574-577
 Внешние поля K_n 111

- Внешняя производная, определение 51, 539
 Восьмеричный путь см. $SU(3) \times SU(3)$
 Временная калибровка 573, 586
 Выпуклость эффективного потенциала 103
 Вырожденность вакуума 222-227
- Генераторы симметрий 20
 Гиперзаряд y , определение 410
 Глубина проникновения 448, 453
 Глубоконеупругое рассеяние 210, 339, 365-380
 Глюоны 208-210, 373
 Голдстоуновские бозоны 227-260, 285-304, 395, см. также мезоны, пионы, скирмионы
 Гомотопическая эквивалентность, определение 578
 Гомотопические группы 316, 569, 577-585, 635
 Гостовское число 35, 46, 121
 Гости гостей 54
 Гравитация 1, 8-9, 11, 19-20, 60, 126, 520-521
 Группа $Spin(n)$ 585
 Группы Z и Z_n , определения 581-582, 635
 Группы Ли, см. компактные группы Ли, исключительные группы Ли, ортогональные группы, симплектические группы, унитарные группы
- Дебаевская частота 471
 Действительные и псевдодействительные представления 516-517
 Джозефсоновский контакт 451
 Дифференциальные формы 51, 54-55, 538
 Доменные стенки 566, 570
 Древесные диаграммы, определение 92
 Духи Ландау 182, 187
- Евклидовы функциональные интегралы 323, 486, 495-498, 629-634
- Жесткое массовое условие 322, 532
- Изотопический спин 4, 222, 247
 Инвариантность относительно зарядового сопряжения 211, 324
 Инвариантность относительно обращения времени 324, 422
 Индекс Кронекера 588
 Инстантоны 384, 565, 573, 604-611
 Интегральный инвариант Картана-Маурера 598-604
 Инфракрасная безопасность, определение 157, 211
 Инфракрасные расходимости 156-157, 211
 Исключительные группы и алгебры Ли 16, 81, 517
- Калибровка Ландау (или Лоренца) 32, 403
 Калибровка Фейнмана 32
 Калибровка фонового поля 131-138
 Калибровка Фуджикавы-Ли-Санды
 Калибровочная инвариантность 3-9, 427, 446
 Канонические преобразования (в формализме Баталина-Вилковыского), см. антиканонические преобразования
 Квантование потока 449-459
 Квантовая хромодинамика 208-215, 304, 384, см. также кварки, глюоны, асимптотическая свобода, глубоконеупругое рассеяние
 Квантовая электродинамика, см. электродинамика
 Квантовое мастер-уравнение 70, 127
 Квантовое эффективное действие 88-91, 104-108, 223, 228, 416, 472
 Кварки 208-215, 304, 368-369, 418-422 массы 614-620, см. также аномалии
 Киральная симметрия 247-250
 Классы универсальности 204
 К-мезоны 307-312, 318, 419
 Ковариантные производные
 в калибровочных теориях 6
 в общей теории относительности 9
 в спонтанном нарушении симметрии 264, 295
 Когомология

- антискобки 129-130, 547-549
 анти-БРСТ 86
 БРСТ 45, 531
 де Рама 321
 Коллективные параметры 620
 Компактные алгебры Ли, определение 13
 Константы связи
 электрослабые 410-416, 436-437, 441, 623
 для неабелевых калибровочных полей 17, 137, 149-150
 для скалярных полей 165
 Корреляционная длина 453
 Космические струны 576
 Космология 570, 576, 594, 611, 619, 623
 Кривизна, см. тензор кривизны Римана-Кристоффеля
 Критические показатели, явления 198-204
 Кулоновская калибровка 21

 Лептонное число 410, 425-426

 Магнитные монополи 304, 565, 585-598
 Мандельштамовские переменные, определение 158
 Мастер-уравнение 60, 64, 113, см. также квантовое мастер-уравнение
 Матрица Кобаяши-Маскавы 420
 Матрицы λ 305
 Мезоны 304-315, 318, 328-332, 364
 Мера
 для интегрирования по фермионным полям 485-498, 609
 для интегрирования по калибровочным полям 25
 Мера Хаара 30
 Метод Фаддеева-Попова-де Витта 2, 26-34, 61
 Метрика
 для калибровочных групп 9-17, 72-77
 для полей голдстоуновских бозонов 568
 для групп Ли 13, 599
 Механизм ГИМ 418
 Механизм Хиггса, определение 395

 Минимальное вычитание 168, 204-208, 216
 Минимальные переменные 62
 Монополя БПС 592
 Мюон 415-417

 Накрывающие группы 82, 595
 Неабелевы калибровочные теории 1-82, 118-126, см. также квантовая хромодинамика, электрослабая теория
 Нейтральные токи 417-422, 439
 Нейтрино 408-411
 реакции ν -e и $\bar{\nu}$ -e 364, 417
 массы и осцилляции 425-426
 Нейтрон, см. электрический дипольный момент нейтрона, нуклон
 Нелинейные реализации 265, 293-303
 Ненарушенные симметрии 321-328
 Неоднозначность Грибова 21
 Неприводимость, определение 73-74
 Неравенства Богомольного 591, 594, 605
 Нуклон
 как скирмион 585
 аксиальные форм-факторы 253-254, 258
 взаимодействие с пионами 273-289
 массы 282, 315
 Нулевые моды 620-623, 627, 640

 Обобщенная фейнмановская (ξ) калибровка 33, 402
 Обозначения де Витта 52
 Образование пузырей 628-629
 Обрезание 148, 154-155, 489-491
 Общая теория относительности, см. гравитация
 Объединение сильных и электрослабых взаимодействий 439-445
 Одночастично неприводимые диаграммы 90-92
 Оператор Δ 70
 Оператор Славнова, определение 55
 Оператор Ходжа 57, 87
 Операторные разложения 339-391
 Ортогональные группы 16, 78-79, 81, 635-636
 Открытые калибровочные алгебры 59,

- 63, 69–71
- Параметр Λ в квантовой хромодинамике 208–211
- Параметр F для нарушенной симметрии, определение 235
- Параметры Гассера–Лейтвайлера
- Параметр порядка 303, 451–452
- Партонная модель 367–368
- Перенормировка
- на скользящей шкале 153–155, 163–178
 - в произвольных теориях 125–131, 193–196
 - в «перенормируемых» калибровочных теориях 113–125
 - электрон–электронного потенциала 469
 - полей 136–137, 162
 - калибровочных констант связи 137, 148–149, 163
 - произвольных операторов 159–163, 170, 343, 349, 390
 - масс 136–137, 196–198
 - константы самодействия пионов 270
 - скалярных констант связи 157–158
- Пионы
- как голдстоуновские бозоны 247–304
 - константа связи с нуклонами 254
 - $\pi^\pm$ распад 251–252, 256
 - π^0 распад 482–486, 495
 - масса 256
 - рассеяние на нуклонах 279–283
 - рассеяние на пионах 268–270
 - головастики
- Плотность Черна–Понтрягина 491
- Поверхностное натяжение 572, 628–629
- Подалгебры, определение 12
- Подстройка вакуума 243, 246, 256
- Подсчет индексов расходимости 267–268, 274, 277–278, 433, 462
- Поле Наканиши–Лаутрупа 40
- Полная приводимость, определение
- Поля гостов и антигостов 34–38, 404
- Поля p -форм, см. дифференциальные формы
- Пороговые поправки
- Постоянная аномалии $D_{\alpha\beta\gamma}$, определение 502
- Правила сумм для спектральных функций 358–365
- Правило сумм Адлера–Вайсбергера 259, 285
- Правые смежные классы, определение 289
- Преобразование Бореля 380
- Преобразование Лежандра 91, 111
- Преобразование Хаббарда–Стратоновича 463
- Приближение тонкой стенки 628
- Принцип кластерного разложения 227
- Присоединенное представление, определение 4
- Проблема $U(1)$ 328–332
- Проницаемость барьера, см. туннелирование
- Простые алгебры Ли, определение 12
- Прямые суммы, определение 12, 74
- Псевдоголдстоуновские бозоны 240–246
- Псевдодействительные представления, определение 516–517
- Разложение Вильсона–Фишера 202
- Разложение Картана 290
- Размерная регуляризация 149–150, 168, см. также минимальное вычитание
- Распад ^{14}O 251, 418
- Распад вакуума 178, 623
- Распад протона 426
- Расширенный техницвет 438
- Ренормалоны 380–386
- Ренормгруппа 153–217, 352–355, см. также аномальные размерности, асимптотическая свобода, асимптотическая безопасность, бета-функция, критические явления, фиксированная точка, дух Ландау
- Решения–«баунсы» 566, 625
- Решеточное приближение 31, 53, 155, 187–189, 321
- Сверхпроводимость 303, 445–473
- Свободная энергия 202
- Связанные состояния 322–323, 523–532

- Связи 20
 Сечение Мотта, определение 366
 Симметрические пространства, определение 290
 Симметрия $SO(10)$ (или $Spin(10)$) 440
 Симметрия $SU(2) \times SU(2)$ 247-250, 362
 Симметрия $SU(2) \times U(1)$, см. электрослабая теория
 Симметрия $SU(3)$ и $SU(3) \times SU(3)$ 304-321, 327-328, 364
 Симметрия $SU(4) \times SU(4)$ 440
 Симметрия $SU(5)$ 440
 Симметрия Печчеи-Квинна 615-617
 Симплектические группы 16, 79-81, 517, 635
 Сингулярности при нулевой массе, см. инфракрасные расходимости
 Скирмионы 565, 568-571
 Скрытая симметрия 437
 Слабые взаимодействия 251-253
 Случайные симметрии 213
 в квантовой хромодинамике 213
 в стандартной модели 425-426
 Смежные классы, определение 289
 Соотношение Голдбергера-Треймана 254, 258, 276
 Соотношение Каллана-Гросса 368, 376
 Сохранение четности 213, 324, 422, 613
 Спонтанное нарушение симметрии 88
 приближенные симметрии 240-246
 динамические нарушение симметрии 426-439
 глобальные симметрии 222-332, 355-357
 в сверхпроводимости 308
 локальные симметрии 3, 395-473
 CP-несохранение 613-617
 Стандартная модель, см. также электрослабая теория, квантовая хромодинамика
 Стандартная подгруппа $SU(2)$ 602
 Странность 213
 Струи 157, 210-211
 Структурные константы 3-4, 11-17, 55, 71-77, 123
 Структурные функции 365-366
 Супергравитация 59
 Суперсимметрия 445
 Сфалероны 640
 Твист 372
 Температурные эффекты 200-201, 611, 629
 Тензор кривизны Римана-Кристоффеля 9
 Тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}$, определение 6
 Тензор энергии-импульса 19-20, 380
 Теорема Адлера-Бардина 512
 Теорема Атьи-Зингера об индексе 498
 Теорема Деррика 569, 626
 Теорема Римана-Лебега 226
 Теоремы периодичности Ботта 636
 Теории струн 51-58
 Теория Бардина-Купера-Шриффера 459-473
 Теория Гинзбурга-Ландау 452
 Теория Янга-Миллса, см. Неабелевы калибровочные теории
 Техницвет 438-439
 Тожества Славнова-Тейлора 106, 111, 548
 Тожество Бьянки (для калибровочных полей) 19, 82
 Тожество Якоби 4, 55, 65, 67
 Токи
 аксиальные 251-254, 270
 в калибровочных теориях 18-19
 в сверхпроводниках 433, 451
 аномальных симметрий 491-493
 нарушенных симметрий 231
 полулептонных слабых взаимодействий 417
 используемые для определения эффективного действия 89-91
 векторные (изоспиновые) 251
 Токи второго рода 252
 Топологическое число 603, 607, 611
 Топология 566-577, см. также гомотопия, когомология
 Трансляционная инвариантность антигостов 121
 Тривиальность 189
 Тривиальные пары 62

- Туннелирование 225, 611, 623, 628
- Угол Кабиббо 251, 418–422
- Угол тета 611–620
- Унитарная калибровка 395–397, 434, 473
- Унитарные группы и алгебры 16, 77–82, 635
- Уравнение Зинн–Жюстена 59, 110–113, 128
- Уравнение Каллана–Симанчика 166, см. также ренормгруппа
- Уравнения Альтарелли–Паризи 376
- Уравнения спуска Сторы–Зумино 541
- Условия квантования Дирака 593
- Условия совместности Весса–Зумино 533–549
- Фазовые переходы 204
- Фермиевская константа 252, 423
- Ферми-поверхность 460
- Ферромагнетизм 202
- Фиксированная точка 182, 198–200
- Фиксирующий калибровку функционал 26, 53, 61, 68, 403
- Фоновое поле 131
- Форма Черна–Саймонса 492
- Формализм Баталина–Вилковыского 59–71, 125–131, 514–547
- Формула Бардина 510
- Фундаментальная группа 578
- Функция Гелл–Манна–Лоу, см. бета-функция
- Функция распределения 630–631
- Хиггсовский бозон 424
- Цвет, определение 208
- Частица Z^0 175, 215, 408–416, 423
- Частицы $W^\pm$ 408–416, 423
- Частичное сохранение аксиального тока (ЧСАТ) 260
- Чисто калибровочные поля 8, 448, 573–575
- Члены Весса–Зумино–Виттена 315–321
- Швингеровские члены 543
- Щель 468
- Электрический дипольный момент нейтрона 615
- Электродинамика 1, 47–49, 149, 162–163, 173, 206
- Электрон 408–417
- Электрослабая модель Джорджи–Глешоу 408, 585, 594
- Электрослабая теория 408–426, 436–439, 610
- Электрослабый угол смешивания 412, 416
- Эффект Мейсснера 448
- Эффективная теория поля 198
для произвольной нарушенной глобальной симметрии 285–304
пионов и нуклонов 260–285
для сверхпроводимости 459–473,
см. также члены Весса–Зумино–Виттена
- Эффективное действие, см. квантовое эффективное действие
- Эффективный потенциал 96–100, 175–178, 228, 466–467
- Юкавские взаимодействия 413–416