

Стивен Вайнберг

**КВАНТОВАЯ
ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ**

Том 1

ОСНОВЫ

Главы

1 – 14

На правах рукописи
Экземпляр Л. М. Лапиной
для личного пользования

Перевод на русский язык А. В. Беркова
под редакцией Б. Л. Воронова
с исправлениями на 03.03.2001

с издания

The Quantum Theory of Fields

Volume I
Foundations

Steven Weinberg
University of Texas at Austin

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

© Steven Weinberg 1995

This book is in copyright. Subject to statutory exception
and to the provisions of relevant collective licensing agreements,
no reproduction of any part may take place without
the written permission of Cambridge University Press.

First published 1995
Reprinted 1996 (with corrections), 1998 (with corrections), 1999 (with corrections)

Содержание *

Предисловие	XV
Обозначения	XXI
1. Историческое введение	1
1.1. Релятивистская волновая механика	3
Волны де Бройля. Волновое уравнение Шредингера–Клейна–Гордона. Тонкая структура. Спин. Уравнение Дирака. Отрицательные энергии. Принцип исключения. Позитроны. Пересмотренный взгляд на уравнение Дирака.	
1.2. Рождение квантовой теории поля	19
Квантованные поля Борна, Гейзенберга, Иордана. Спонтанное излучение. Антиккоммутаторы. Квантовая теория Гейзенберга–Паули. Квантование дираковского поля методом Фарри–Оппенгеймера. Квантование скалярного поля методом Паули–Вайскопфа. Ранние вычисления в квантовой электродинамике. Нейтроны. Мезоны.	
1.3. Проблема бесконечностей	40
Бесконечно большие сдвиги энергии электрона. Поляризация вакуума. Рассеяние света на свете. Инфракрасные расходимости. Поиск альтернатив. Перенормировка. Конференция в Шелтер Айленде. Лэмбовский сдвиг. Аномальный магнитный момент электрона. Формализмы Швингера, Томонаги, Фейнмана и Дайсона. Почему не раньше?	
Библиография	51
Список литературы	53
2. Релятивистская квантовая механика	63
2.1. Квантовая механика	63
Лучи. Скалярные произведения. Наблюдаемые. Вероятности.	

* Разделы, отмеченные звездочками, лежат несколько в стороне от основной линии изложения и могут быть опущены при первом чтении.

2.2. Симметрии	65
Теорема Вигнера. Антилинейные и антиунитарные операторы. Наблюдаемые. Групповая структура. Представления с точностью до фазы. Правила суперпозиции. Группы Ли. Структурные константы. Абелевы симметрии.	
2.3. Квантовые преобразования Лоренца	72
Преобразования Лоренца. Квантовые операторы. Инверсии.	
2.4. Алгебра Пуанкаре	76
$J^{\mu\nu}$ и P^μ . Свойства преобразований. Коммутационные соотношения. Сохраняющиеся и не сохраняющиеся генераторы. Конечные трансляции и вращения. Свертка Иноню–Вигнера. Галилеевская алгебра	
2.5. Одночастичные состояния	82
Правила преобразований. Бусты. Малые группы. Нормировка. Массивные частицы. Безмассовые частицы. Спиральность и поляризация.	
2.6. Пространственная инверсия и обращение времени	98
Преобразование $J^{\mu\nu}$ и P^μ . Унитарный оператор P и антиунитарный оператор T . Массивные частицы. Безмассовые частицы. Крамеровское вырождение. Электрические дипольные моменты.	
2.7. Проективные представления *	108
Два-коциклы. Центральные заряды. Односвязные группы. В группе Лоренца нет центральных зарядов. Двусвязность группы Лоренца. Накрывающие группы. Пересмотренные правила суперотбора.	
Приложение А. Теорема о представлении симметрии	120
Приложение В. Групповые операторы и гомотопические классы ...	127
Приложение С. Инверсии и вырожденные мультиплеты	133
Задачи	139
Список литературы	140
3. Теория рассеяния	142
3.1. Ин- и аут-состояния	143
Многочастичные состояния. Волновые пакеты. Асимптотические условия в начальный и конечный моменты времени. Уравнения Липпмана–Швингера. Главные значения и дельта-функции.	
3.2. S-матрица	150
Определение S -матрицы. T -матрица. Борновское приближение. Унитарность S -матрицы.	

3.3. Симметрии S-матрицы	154
Лоренц-инвариантность. Достаточные условия. Внутренние симметрии. Электрический заряд, странность, изоспин, $SU(3)$. Сохранение четности. Внутренние четности. Четность пиона. Несохранение четности. Инвариантность по отношению к обращению времени. Теорема Ватсона. Несохранение PT . C , CP , CPT . Нейтральные K -мезоны. Несохранение CP .	
3.4. Вероятности и сечения	178
Вероятности в ящике. Вероятности распадов. Сечения. Лоренц-инвариантность. Фазовое пространство. Диаграммы Далица.	
3.5. Теория возмущений	188
Старая теория возмущений. Теория возмущений, зависящих от времени. Хронологически упорядоченные произведения. Ряды Дайсона. Лоренц-инвариантные теории. Борновское приближение искаженных волн.	
3.6. Следствия унитарности	195
Оптическая теорема. Дифракционные пики. CPT соотношения. Вероятности распадов частиц и античастиц. Кинетическая теория. H -теорема Больцмана.	
3.7. Разложения по парциальным волнам *	201
Дискретный базис. Разложение по сферическим гармоникам. Полные упругие и неупругие сечения. Фазовые сдвиги. Пороговое поведение: экзотермические, эндотермические и упругие реакции. Длина рассеяния. Упругие и неупругие сечения при больших энергиях.	
3.8. Резонансы *	211
Причины появления резонансов: слабая связь, барьеры, комплексность. Энергетическая зависимость. Унитарность. Формула Брейта-Вигнера. Виртуальные резонансы. Фазовые сдвиги в резонансе. Эффект Рамзауера-Таунсенда.	
Задачи	220
Список литературы	221
4. Принцип кластерного разложения	225
4.1. Бозоны и фермионы	226
Перестановочные фазы. Статистика Бозе и Ферми. Нормировка для тождественных частиц.	
4.2. Операторы рождения и уничтожения	230
Операторы рождения. Вычисление сопряженного оператора. Вывод соотношений коммутации и антикоммутации. Представления общих операторов. Гамильтониан свободной частицы. Лоренцовские преобра-	

зования операторов рождения и уничтожения. С, Р, Т свойства операторов рождения и уничтожения.	
4.3. Кластерное разложение и связанные амплитуды	236
Отсутствие корреляции удаленных экспериментов. Связные амплитуды. Подсчет дельта-функций.	
4.4. Структура взаимодействия	243
Условия кластерного разложения. Графический анализ. Двухчастичное рассеяние порождает трехчастичное рассеяние.	
Задачи	252
Список литературы	253
5. Квантовые поля и античастицы	254
5.1. Свободные поля	254
Поля рождения и уничтожения. Лоренцовские преобразования коэффициентных функций. Построение коэффициентных функций. Использование кластерного разложения. Причинность как следствие лоренц-инвариантности. Античастицы как следствие причинности. Нормальное упорядочение.	
5.2. Причинные скалярные поля	266
Поля рождения и уничтожения. Требование причинности. Скалярные поля описывают бозоны. Античастицы. Р, С, Т преобразования. π^0 .	
5.3. Причинные векторные поля	275
Поля рождения и уничтожения. Спин нуль или спин единица. Векторные поля описывают бозоны. Векторы поляризации. Требование причинности. Античастицы. Масса нуль. Р, С, Т преобразования.	
5.4. Дираковский формализм	283
Представление Клиффорда алгебры Пуанкаре. Преобразование матриц Дирака. Размерность дираковских матриц. Явный вид матриц. Матрица γ_5 . Псевдоунитарность. Комплексное сопряжение и транспонирование.	
5.5. Причинные дираковские поля	292
Поля рождения и уничтожения. Дираковские спиноры. Требование причинности. Дираковские поля описывают фермионы. Античастицы. Пространственная инверсия. Внутренняя четность пар частица-античастица. Зарядовое сопряжение. Внутренняя С-фаза пары частица-античастица. Майорановские спиноры. Обращение времени. Билинейные коварианты. Взаимодействие при бета-распаде.	
5.6. Общие неприводимые представления однородной группы Лоренца	305
Изоморфизм группе $SU(2) \otimes SU(2)$. (A, B) представление знакомых	

	полей. Поле Рариты–Швингера. Пространственная инверсия.	
5.7. Общие причинные поля *	310
	Построение коэффициентных функций. Скалярные плотности гамилтонианов. Требование причинности Античастицы Общая связь между спином и статистикой. Эквивалентность различных типов полей. Пространственная инверсия. Внутренняя четность произвольных пар частица–античастица. Зарядовое сопряжение. Внутренняя С-фаза античастиц. Зарядово-самосопряженные частицы и соотношения действительности. Обращение времени. Проблемы высших спинов.	
5.8. СРТ теорема	326
	СРТ-преобразование скалярного, векторного и дираковского полей. СРТ-преобразование скалярной плотности взаимодействия. СРТ-преобразование общих неприводимых полей. СРТ-инвариантность гамильтониана.	
5.9. Поля безмассовых частиц	328
	Построение коэффициентных функций Отсутствие векторных полей со спиральностью ± 1 . Необходимость калибровочной инвариантности. Антисимметричные тензорные поля со спиральностью ± 1 . Суммы по спиральностям. Построение причинных полей со спиральностью ± 1 . Гравитоны. Спин ≥ 3 . Общие неприводимые безмассовые поля. Единственность спиральностей для полей (A, B) .	
Задачи	340
Список литературы	341
6. ФЕЙНМАНОВСКИЕ ПРАВИЛА	344
6.1. Вывод правил	345
	Спаривания. Теорема Вика. Правила в координатном представлении. Комбинаторные множители. Знаковые множители. Примеры.	
6.2. Вычисление пропагатора	363
	Полином в числителе. Фейнмановский пропагатор для скалярных полей. Дираковские поля. Общие неприводимые поля. Ковариантные пропагаторы. Нековариантные слагаемые в хронологически упорядоченных произведениях.	
6.3. Правила в импульсном представлении	371
	Переход в импульсное представление. Фейнмановские правила. Подсчет независимых импульсов. Примеры. Петлевые множители.	
6.4. Выход с массовой оболочки	379
	Токи. Амплитуды вне массовой поверхности являются точными матричными элементами операторов в гейзенберговском представлении.	

Доказательство теоремы.	
Задачи	384
Список литературы	385
7. Канонический формализм	386
7.1. Канонические переменные	387
Канонические перестановочные соотношения. Примеры: действительное скалярное, комплексное скалярное, векторное, дираковское поля. Гамильтонианы свободных частиц. Лагранжианы свободных частиц. Канонический формализм для взаимодействующих полей.	
7.2. Лагранжев формализм	395
Уравнения движения Лагранжа. Действие. Лагранжиан. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Действительность действия. От лагранжианов к гамильтонианам. Новый подход к скалярному полю. Переход от представления Гейзенберга к представлению взаимодействия. Вспомогательные поля. Интегрирование по частям в действии.	
7.3. Глобальные симметрии	406
Теорема Нетер. Явное выражение для сохраняющихся величин. Явное выражение для сохраняющихся токов. Квантовые операторы симметрии. Тензор энергии–импульса. Импульс. Внутренние симметрии. Коммутаторы токов.	
7.4. Лоренцевская инвариантность	418
Токи $M^{\mu\nu}$. Генераторы $J^{\mu\nu}$. Тензор Белинфанте. Лоренц-инвариантность S -матрицы.	
7.5. Переход к представлению взаимодействия. Примеры	424
Скалярное поле со связью с производными. Векторное поле. Дираковское поле.	
7.6. Связи и скобки Дирака	433
Первичные и вторичные связи. Скобки Пуассона. Связи первого и второго рода. Дираковские скобки. Пример: действительное векторное поле.	
7.7. Переопределения полей	
и несущественные константы взаимодействия *	442
Лишние параметры. Переопределение полей. Пример: действительное скалярное поле.	
Приложение. Вычисление скобок Дирака	
из канонических коммутаторов	444
Задачи	450
Список литературы	451

8. Электродинамика	453
8.1. Калибровочная инвариантность	454
Необходимость константы для сохраняющегося тока. Оператор заряда. Локальная симметрия. Действие для фотона. Уравнения поля Калибровочно инвариантные производные.	
8.2. Связи и калибровочные условия	459
Первичные и вторичные связи. Связи первого рода. Фиксация калибровки. Кулоновская калибровка. Решение для A^0 .	
8.3. Квантование в кулоновской калибровке	463
Остающиеся константы относятся ко второму роду. Вычисление дираковских скобок в кулоновской калибровке. Построение гамильтониана. Кулоновское взаимодействие.	
8.4. Электродинамика в представлении взаимодействия	468
Гамильтонианы свободного поля и взаимодействия. Операторы в картине взаимодействия. Разложение по нормальным модам.	
8.5. Фотонный пропагатор	472
Полином в числителе. Отделение нековариантных слагаемых. Сокращение нековариантных слагаемых.	
8.6. Правила Фейнмана для спинорной электродинамики	475
Диаграммы Фейнмана. Вершины. Внешние линии. Внутренние линии. Разложение по $\alpha/4\pi$. Круговая, линейная и эллиптическая поляризация. Поляризация и суммы по спинам.	
8.7. Комптоновское рассеяние	484
S -матрица. Дифференциальное сечение. Кинематика. Суммы по спинам. Следы. Формула Клейна–Нишины. Поляризация при томсоновском рассеянии. Полное сечение.	
8.8. Обобщение: калибровочные поля как p-формы	494
Обоснование. p -формы. Внешние производные. Замкнутые и точные p -формы. Калибровочные поля в виде p -форм Дуальные поля и токи в D пространственно-временных измерениях. Калибровочные поля в виде p -форм эквивалентны полям в виде $(D - p - 2)$ -форм. В четырех измерениях нет ничего нового.	
Приложение. Следы	498
Задачи	502
Список литературы	503
9. Методы функционального интегрирования	504
9.1. Общая формула для функционального интеграла	507
Амплитуды перехода для бесконечно малых интервалов. Амплиту-	

ды перехода для конечных интервалов. Интерполирующие функции. Матричные элементы хронологически упорядоченных произведений. Уравнения движения.	
9.2. Переход к S-матрице	517
Волновая функция вакуума. Добавка $i\epsilon$.	
9.3. Лагранжева формула для функционального интеграла	523
Интегрирование по импульсам. Скаляры со связью с производными. Нелинейная сигма-модель. Векторное поле.	
9.4. Вывод фейнмановских правил с помощью функциональных интегралов	531
Выделение действия для свободных полей. Гауссово интегрирование. Пропагаторы: скалярные, векторные поля, связь с производной.	
9.5. Функциональные интегралы для фермионов	536
Антикоммутирующие s -числа. Собственные векторы канонических операторов. Суммирование по состояниям с помощью интегрирования по Березину. Замена переменных. Амплитуды перехода для бесконечно малых интервалов Амплитуды перехода для конечных интервалов. Вывод фейнмановских правил Фермионный пропагатор. Вакуумные амплитуды как детерминанты.	
9.6. Функциональная формулировка квантовой электродинамики ...	557
Функциональный интеграл в кулоновской калибровке. Новое введение a^0 . Переход к ковариантным калибровкам.	
9.7. Разные статистики *	563
Приготовление ин- и аут-состояний. Правила композиции. В пространствах с числом измерений больше 3 — только бозоны и фермионы. Анионы в двух измерениях.	
Приложение. Многократные гауссовы интегралы	567
Задачи	571
Список литературы	572
10. Непертурбативные методы	574
10.1. Симметрии	575
Трансляции. Сохранение заряда. Теорема Фарри.	
10.2. Полология	579
Полюсная формула для общей амплитуды. Вывод полюсной формулы. Обмен пионами.	
10.3. Перенормировка поля и массы	588
Редукционная формула Лемана–Симанчика–Циммермана. Перенор-	

мированные поля. Полюсы пропагаторов. Во внешних линиях нет радиационных поправок. Контрчлены в собственноэнергетических частях.	
10.4. Перенормированный заряд и тождества Уорда	597
Оператор заряда. Перенормировка электромагнитного поля. Перенормировка заряда. Тождество Уорда–Такахаша Тождество Уорда.	
10.5. Калибровочная инвариантность	604
Поперечность многофотонных амплитуд. Швингеровские члены. Калибровочные слагаемые в фотонном пропагаторе. Структура фотонного пропагатора. Перенормированная масса фотона равна нулю. Вычисление Z_3 . Радиационные поправки к выбору калибровки.	
10.6. Электромагнитные форм-факторы и магнитный момент	610
Матричные элементы J^0 . Форм-факторы J^m : спин 0. Форм-факторы J^μ : спин 1/2. Магнитный момент частицы спина 1/2. Измерение форм-факторов.	
10.7. Представление Челлена–Лемана *	618
Спектральные функции. Условия причинности. Спектральное представление. Асимптотическое поведение пропагаторов. Полюсы. Ограничение на константу перенормировки поля $Z = 0$ для составных частиц.	
10.8. Дисперсионные соотношения *	624
История. Аналитические свойства амплитуды рассеяния вперед для безмассового бозона. Вычитания. Дисперсионное соотношение. Кроссинг. Теорема Померанчука. Реджевское асимптотическое поведение. Рассеяние фотонов.	
Задачи	634
Список литературы	635
11. Однопетлевые радиационные поправки в квантовой электродинамике	638
11.1. Контрчлены	639
Перенормировка поля, массы и заряда. Контрчлены в лагранжиане.	
11.2. Поляризация вакуума	640
Однопетлевой интеграл для фотонной собственноэнергетической части. Параметры Фейнмана. Виковский поворот. Размерная регуляризация. Калибровочная инвариантность. Вычисление Z_3 . Сокращение расходимостей. Поляризация вакуума при рассеянии заряженных частиц. Эффект Юлинга. Мюонные атомы.	

11.3. Аномальные магнитные моменты и зарядовые радиусы	655
Однопетлевая формула для вершинной функции. Вычисление форм-факторов. Аномальные лептонные магнитные моменты порядка α . Аномальный магнитный момент мюона порядка $\alpha^2 \ln(m_\mu/m_e)$. Зарядовый радиус лептонов.	
11.4 Собственная энергия электрона	666
Однопетлевая формула для электронной собственноэнергетической части. Перенормировка массы электрона. Сокращение ультрафиолетовых расходимостей.	
Приложение. Некоторые интегралы	671
Задачи	673
Список литературы	673
12. Общая теория перенормировок	675
12.1. Индексы расходимости	676
Индекс расходимости. Размерный анализ. Перенормируемость. Критерий действительной сходимости.	
12.2. Сокращение расходимостей	683
Вычитание путем дифференцирования. Программа перенормировки. Перенормируемые теории. Пример: квантовая электродинамика. Перекрывающиеся расходимости. Рецепт перенормировки Боголюбова–Парасюка–Хеппа–Циммерманна. Выбор точки нормировки: теория ϕ^4 .	
12.3. Нужна ли перенормируемость?	699
Список перенормируемых взаимодействий. Не существует перенормируемых теорий тяготения. Сокращение расходимостей в перенормируемых теориях. Подавление перенормируемых взаимодействий. Пределы на новые масштабы масс. Проблемы с высшими производными. Детектирование перенормируемых взаимодействий. Низкоэнергетические разложения в перенормируемых теориях. Пример: скалярное поле с одной связью через производную. Насыщение или новая физика? Эффективные теории поля.	
12.4. Плавающее обрезание	711
Подход Вильсона. Уравнения ренормализационной группы. Теорема Польчинского. Притяжение к стабильной поверхности. Сравнение плавающего обрезания и перенормировки.	
12.5. Случайные симметрии *	716
Общая теория перенормировок для заряженных лептонов. Переопределение лептонных полей. Случайное сохранение лептонных	

ароматов, Р, С и Т.	
Задачи	720
Список литературы	720
13. Инфракрасные эффекты	723
13.1. Амплитуды испускания мягких фотонов	724
Испускание одиночного фотона. Пренебрежение испусканием с внутренних линий. Лоренц-инвариантность требует сохранения заряда. Испускание одиночного гравитона. Лоренц-инвариантность требует принципа эквивалентности. Многофотонное излучение. Факторизация	
13.2. Виртуальные мягкие фотоны	730
Эффекты, связанные с мягкими виртуальными фотонами. Радиационные поправки во внутренних линиях	
13.3. Реальные мягкие фотоны. Сокращение расходимостей	737
Сумма по спиральностям. Интегрирование по энергиям. Сумма по числу фотонов. Сокращение инфракрасных обрезаящих множителей. Аналогичное сокращение для гравитации	
13.4. Произвольные инфракрасные расходимости	741
Безмассовые заряженные частицы. Общее рассмотрение инфракрасных расходимостей. Струи. Теорема Ли–Науенберга	
13.5. Рассеяние мягких фотонов *	748
Полюсы в амплитуде. Соотношения сохранения. Универсальность низкоэнергетического предела	
13.6. Приближение внешнего поля *	752
Суммы по перестановкам фотонных вершин. Нерелятивистский предел. Перекрестный лестничный обмен	
Задачи	759
Список литературы	760
14. Связанные состояния во внешних полях	762
14.1. Уравнение Дирака	763
Дираковские волновые функции как матричные элементы поля. Антиккоммутаторы и полнота. Собственные состояния с заданной энергией. Волновые функции с отрицательной энергией. Ортонормированность. «Большие» и «малые» компоненты. Четность. Спиновая и угловая зависимость. Радиальные волновые функции. Энергии. Тонкая структура. Нерелятивистские приближения	
14.2. Радиационные поправки во внешних полях	774
Пропагатор электрона во внешнем поле. Неоднородное уравнение	

Дирака. Эффекты радиационных поправок. Сдвиги энергии.	
14.3. Лэмбовский сдвиг в легких атомах	781
Разделение больших и малых энергий. Слагаемое, соответствующее большим энергиям. Низкоэнергетическое слагаемое. Влияние перенормировки массы. Полный сдвиг энергии. $l = 0$. $l \neq 0$. Численные результаты. Сравнение теории и эксперимента для классического лэмбовского сдвига. Сравнение теории и эксперимента для сдвига $1s$ состояния.	
Задачи	802
Список литературы	803
Авторский указатель	805
Предметный указатель	810

ОГЛАВЛЕНИЕ ТОМА II

15. Неабелевы калибровочные теории	
16. Методы фонового поля	
17. Перенормировка калибровочных теорий	
18. Методы ренормгруппы	
19. Спонтанно нарушенные глобальные симметрии	
20. Операторные разложения	
21. Спонтанно нарушенные локальные симметрии	
22. Аномалии	
23. Протяженные полевые конфигурации	

Предисловие к первому тому

Зачем нужна еще одна книга по квантовой теории поля? Сегодня любой студент, изучающий этот предмет, имеет на выбор ряд прекрасных книг, многие из которых вполне современны. Еще одна книга будет иметь ценность, только если она содержит что-то новое или открывает новые перспективы.

Если говорить о содержании предлагаемой книги, то хотя она и содержит довольно много нового материала, все же главное отличие от других книг заключается в общности изложения: я пытался везде, где возможно, обсуждать вопросы в максимально общем виде. Отчасти это связано с тем, что квантовая теория поля нашла применения в областях, весьма далеких от сферы ее первых успехов — квантовой электродинамики, но главным образом — с тем, что, по моему убеждению, эта общность позволяет выявить главные моменты, не дав им раствориться в технических деталях конкретных теорий. Конечно, для иллюстрации общих положений я часто использую конкретные примеры, выбранные из современной физики частиц, ядерной физики и квантовой электродинамики.

Однако главное, что побудило меня написать эту книгу, было не столько ее конкретное содержание, сколько общий замысел. Я поставил своей целью изложить квантовую теорию поля так, чтобы дать читателю максимально ясное представление о том, *почему* эта теория приняла такую форму, которую она имеет, и почему именно в этой форме она так хорошо описывает реальный мир.

Начиная с первых работ Гейзенберга и Паули по общей квантовой теории поля, традиционный подход заключался в том, что существование полей принималось как данное, что находило подтверждение в нашем опыте описания электромагнетизма. Затем поля «квантовались», т. е. правила канонического квантования или интегрирования по траекториям применялись к нескольким простым полевым теориям. Некоторые замечания по поводу такого традиционного подхода читатель найдет в историческом введении в гл. 1. Вне сомнения,

такой путь позволяет быстро войти в суть дела, но мне кажется, что он оставляет вдумчивого читателя наедине со слишком большим числом вопросов, не имеющих ответа. Почему нам следует доверять правилам канонического квантования или интегрирования по траекториям? Почему мы должны принимать за истинные простые уравнения поля и лагранжианы, которые пишутся в литературе? Кстати, а почему вообще нужны поля? Мне кажется неправильным апеллировать к нашему опыту – в конце концов, наша цель в теоретической физике заключается не просто в том, чтобы описать окружающий нас мир, но и объяснить с помощью небольшого числа фундаментальных принципов, почему этот мир таков, каков он есть.

Точка зрения, проповедуемая в этой книге, состоит в том, что квантовая теория поля такая, какая она есть, потому что (если не принимать во внимание теорий типа теории струн, в которых участвует бесконечно большое число типов частиц) это единственный способ совместить принципы квантовой механики (включая свойство кластерного разложения) и теории относительности. Этой точки зрения я придерживаюсь много лет, но в последнее время она получила новую поддержку. Мы научились в последние годы рассматривать успешно работающие квантовые теории поля, в том числе и квантовую электродинамику, как «эффективные теории поля», являющиеся низкоэнергетическими приближениями к более глубокой теории, которая, может быть, является даже не теорией поля, а совсем другой теорией, скажем, теорией струн. С этой точки зрения, причина, почему квантовые теории поля описывают физику при доступных энергиях, заключается в том, что *любая* релятивистская квантовая теория выглядит при достаточно низких энергиях как квантовая теория поля. Поэтому важно понять основы квантовой теории поля с помощью принципов квантовой механики и теории относительности. Кроме того, в наши дни изменилась точка зрения на некоторые проблемы квантовых теорий полей, например, на неперенормируемость и «тривиальность», которые тревожили нас в те годы, когда мы рассматривали эти теории как истинно фундаментальные. В книге отражены эти изменения. Мое намерение было написать книгу по квантовой теории поля эры эффективных теорий поля.

Самыми непосредственными и очевидными следствиями теории относительности и квантовой механики являются свойства состояний частиц, поэтому частицы появляются сразу — уже в гл. 2 они введены

как объекты в представлениях неоднородной группы Лоренца в гильбертовом пространстве квантовой механики. В гл. 3 подготавливается почва для ответа на фундаментальный вопрос динамики: если состояние в далеком прошлом задано как некоторая совокупность свободных частиц, как будет выглядеть эта совокупность в будущем? Зная генератор трансляций во времени, т. е. гамильтониан, мы можем ответить на этот вопрос, записав разложение по теории возмущений множества амплитуд перехода, известного как S -матрица. В гл. 4 мы привлекаем принцип кластерного разложения для того, чтобы описать построение генератора временных трансляций — гамильтониана с помощью операторов рождения и уничтожения. Затем в гл. 5 мы возвращаемся к лоренц-инвариантности и показываем, что как следствие этой инвариантности операторы рождения и уничтожения группируются в причинные квантовые поля. В дополнение мы доказываем СРТ теорему и теорему о связи спина и статистики. Этот формализм используется в гл. 6 для вывода фейнмановских правил для вычисления элементов S -матрицы.

Только в гл. 7 мы подходим к лагранжиану и каноническому формализму. Идея заключается в том, чтобы ввести эти понятия не потому, что они оказались полезными в других областях физики (такое объяснение всегда не слишком удовлетворительно), а потому, что этот формализм позволяет ввести гамильтонианы взаимодействия, для которых S -матрица удовлетворяет различным предполагаемым симметриям. В частности, лоренц-инвариантность лагранжиана обеспечивает существование десяти операторов, удовлетворяющих соотношениям алгебры группы Пуанкаре, а это, как мы показываем еще в гл. 3, является необходимым условием для доказательства лоренц-инвариантности S -матрицы. Наконец-то, в гл. 8 появляется квантовая электродинамика. В гл. 9 рассмотрено интегрирование по траекториям, которое используется для обоснования полученных в гл. 8 методом размахивания руками фейнмановских правил квантовой электродинамики. Такое позднее введение интегралов по траекториям несколько противоречит сегодняшней моде. Однако мне кажется, что хотя интегралы по траекториям, несомненно, являются лучшим способом быстрее вывода фейнмановских правил для заданного лагранжиана, они несколько затемняют квантово-механические основания подобных вычислений.

Первый том завершает серия глав 10–14, в которых излагается введение в основы вычисления радиационных поправок в общих поле-

вых теориях, включая петлевые поправки. Здесь также последовательность изложения несколько необычна: мы начинаем с главы, посвященной непertурбативным методам. Отчасти это сделано потому, что полученные результаты помогают понять необходимость перенормировки массы и заряда независимо от того, содержатся ли в теории бесконечности или нет. В гл. 11 представлены классические однопетлевые вычисления в квантовой электродинамике, дающие возможность, с одной стороны, объяснить полезные вычислительные приемы (фейнмановские параметры, виковский поворот, размерная регуляризация и регуляризация Паули–Вилларса), а с другой стороны, демонстрирующие перенормировку в действии. Опыт, приобретенный в гл. 11, распространяется в гл. 12 на все порядки теории возмущений и на теории общего вида. Здесь же обсуждается современный взгляд на перенормируемость, связанный с эффективными теориями поля. Гл. 13 содержит изложение ряда специальных проблем, возникающих для безмассовых частиц низких энергий или с параллельными импульсами. Уравнение Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле, исторически появившееся на самой заре развития релятивистской квантовой механики, рассматривается только в гл. 14, посвященной проблемам связанных состояний. Причина заключается в том, что это уравнение следует рассматривать не как релятивистскую версию уравнения Шредингера (как это делал Дирак), а как приближение к истинной релятивистской квантовой теории полей фотонов и электронов. Глава заканчивается рассмотрением лэмбовского сдвига и сопоставлением вычислений с современными экспериментальными данными.

У читателя может возникнуть ощущение, что некоторые вопросы, особенно в гл. 3, могли бы быть с большим основанием содержаться в учебниках по ядерной физике или физике элементарных частиц. Да, вероятно это так, но по моему мнению, эти разделы обычно либо вообще не освещаются, либо освещаются очень скупо, с использованием конкретных динамических моделей, а не общих принципов симметрии и квантовой механики. Я встречал теоретиков — специалистов по теории струн, которые никогда не слышали о связи инвариантности относительно обращения времени со сдвигами фаз в конечном состоянии, и специалистов по ядерной физике, которые понятия не имели, почему резонансы описываются формулой Брейта–Вигнера. Таким образом, в первых главах я попытался скорее перебрать, чем недобрать.

Во втором томе речь пойдет о достижениях последних лет, которые оживили квантовую теорию поля: неабелевы калибровочные теории, ренормализационная группа, нарушенные симметрии, аномалии, инстантоны и т. п.

Я попытался дать ссылки как на классические работы по квантовой теории полей, так и на полезные источники по вопросам, упомянутым, но недостаточно подробно изложенным в книге. Я не всегда знал, кто ответствен за изложенный материал, так что отсутствие ссылки не следует считать утверждением, что представленные выводы и рассуждения оригинальны. Однако, некоторые все же обладают этим свойством. Надеюсь, что мне удалось в ряде мест исправить изложение в оригинальных статьях или стандартных учебниках, например, в доказательстве, что операторы симметрии либо унитарны, либо антиунитарны, в обсуждении правил суперотбора, в анализе вырождения частиц, связанном с нестандартными представлениями отражений, в использовании принципа кластерного разложения, в выводе редукционной формулы, в выводе приближения внешнего поля, и даже в расчете лэмбовского сдвига.

К каждой главе, кроме первой, подобраны задачи. Некоторые из них рассчитаны просто на закрепление технических приемов, описанных в главе. Другие нацелены на расширение результатов главы на более широкий класс теорий.

Занимаясь преподаванием квантовой теории поля, я убедился, что каждый из томов этой книги содержит достаточно материала для одногодичного курса лекций для старшекурсников. Полагаю, что книга должна быть доступна студентам, знакомым с нерелятивистской квантовой механикой и классической электродинамикой. Кроме того, я предполагаю знакомство читателей с основами анализа в комплексной области и матричной алгебры. Сведения из теории групп и топологии объясняются по ходу дела.

Эта книга не годится для студента, который хочет немедленно начать вычислять с помощью диаграмм Фейнмана эффекты в стандартной модели сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий. Книга не подойдет и тем, кто ищет высокий уровень математической строгости. На самом деле, некоторые части книги изложены на таком уровне строгости, который вызовет слезы на глазах математически настроенного читателя. Все же, я надеюсь, что книга будет полезна тем физикам — ученым и студентам, которые хотят понять, *почему* квантовая теория поля такая, какая она есть. Прочтя ее, они будут

подготовлены к любым новым открытиям в физике, выходящим за рамки нашего сегодняшнего понимания.

* * *

Большую часть того, что изложено в книге, я узнал за годы взаимодействия со многими другими физиками, число которых слишком велико, чтобы их всех здесь перечислить. Но я должен выразить особую признательность Сидни Коулмену и моим коллегам по Техасскому университету Арно Бому, Луи Бойа, Филу Канделасу, Брайсу де Витту, Сесиль де Витт-Моретт, Жаку Дистлеру, Вилли Фишлеру, Джошу Фейнбергу, Иоакиму Гомесу, Вадиму Каплуновскому, Джо Польшинскому и Полю Шапиро. Приношу благодарность Джерри Холтону, Артуру Миллеру и Сэму Швеберу за помощь в подготовке исторического введения. Я благодарю также Элис Вилсон, которая сделала рисунки и печатала исходные файлы L^AT_EX до тех пор, пока я не научился делать это сам, а также Терри Рили за помощь в поиске бесчисленного количества книг и статей. Моя благодарность многочисленным студентам и коллегам, особенно Хидеаки Аояме, Кевину Кехиллу, Амиру Кашани-Пуру, Мичио Масуджиме, Фабио Стринго и Сан Фу Туану, за исправление многочисленных опечаток в первом издании этого тома. Я признателен Маурин Стори и Элисон Вулатт из издательства Кембриджского университета за помощь в подготовке рукописи к изданию, и особенно моему редактору Руфусу Нилу за полезные дружеские советы.

СТИВЕН ВАЙНБЕРГ

Остин, Техас.
Октябрь 1994

Обозначения

Латинские индексы i, j, k и т. д. принимают обычно значения 1, 2, 3 и нумеруют пространственные координаты.

Греческие индексы μ, ν и т. д. принимают в большинстве случаев значения 1, 2, 3, 0 и нумеруют пространственно-временные координаты, причем x^0 – временная координата.

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование, если это не оговорено особо.

Пространственно-временная метрика $\eta_{\mu\nu}$ диагональна, причем $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \eta_{00} = -1$.

Даламбертиан определяется как $\square \equiv \eta_{\mu\nu} \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2 / \partial t^2$, где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^i \partial x^i$ – лапласиан.

Тензор Леви-Чивита $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ определяется как полностью антисимметричный тензор с $\epsilon^{0123} = +1$.

Пространственные векторы обозначаются буквами, набранными полужирным шрифтом.

Шляпка над любым вектором обозначает соответствующий единичный вектор. Так, $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v} / |\mathbf{v}|$.

Точка над любой величиной обозначает производную этой величины по времени.

Матрицы Дирака γ_μ определены так, что $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$. Кроме того, $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ и $\beta = i\gamma^0$.

Ступенчатая функция $\theta(s)$ равна +1 при $s > 0$ и -1 при $s < 0$.

Комплексное сопряжение, транспонирование и эрмитовое сопряжение матрицы или вектора A обозначается как A^* , A^T и $A^\dagger = A^{*T}$ соответственно. Эрмитово сопряженный оператор к оператору O обозначается O^\dagger , за исключением случаев, когда используется звездочка, чтобы подчеркнуть, что вектор или матрица операторов не транспонируется. Символы + э. с. или + к. с. в конце уравнения означают добавление слагаемых, эрмитово сопряженных или комплексно сопряженных предыдущим.

За исключением гл. 1, мы используем систему единиц, в которой постоянная Планка \hbar и скорость света c приняты равными единице. Везде $-e$ — заряд электрона, измеренный в рациональных единицах, так что $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$.

Числа в скобках в конце приводимых числовых данных показывают неопределенность в последних знаках приведенного числа. Если это не оговорено особо, все экспериментальные данные взяты из справочника:

Review of Particle Properties, *Phys. Rev.*, 1994, **D50**, p. 1173.

Историческое введение

Мы настолько погружены в дела сегодняшней физики, что нам трудно понять многие проблемы, стоявшие перед учеными всего лишь несколько лет назад, или извлечь пользу из их опыта. К тому же знание истории физики — это благо, имеющее и обратную сторону: оно может помешать осуществить представляющуюся совершенно необходимой логическую реконструкцию физической теории.

В этой книге я попытался представить квантовую теорию полей в логической последовательности, подчеркивая дедуктивные выводы из физических принципов частной теории относительности и квантовой механики. Такой подход с неизбежностью увел меня в сторону от пути, по которому шло реальное развитие. Приведу один пример. Исторически квантовая теория поля частично возникла из изучения релятивистских волновых уравнений, в том числе, уравнений Максвелла, Клейна–Гордона и Дирака. По этой причине вполне оправдано, что в учебниках и монографиях по квантовой теории поля эти уравнения вводятся в самом начале, и им придается большое значение. Тем не менее, мне уже давно кажется, что значительно лучшей отправной точкой является вигнеровское определение частиц как представлений неоднородной группы Лоренца, несмотря на то, что работа Вигнера была опубликована только в 1939 году и еще долгое время после этого не оказывала существенного влияния на развитие предмета. В этой книге мы начинаем с частиц и только позднее переходим к полям.

Это совсем не означает, что частицы более фундаментальны, чем поля. Уже в течение многих лет, начиная с 1950-х годов, принято считать, что законы природы имеют форму квантовой теории

полей. Я начинаю в этой книге с частиц не потому, что они более фундаментальны, а потому, что наши знания о частицах более *определенны*, более непосредственно выводимы из принципов квантовой механики и теории относительности. Если бы оказалось, что какая-то физическая система не может быть описана квантовой теорией поля, это было бы сенсацией; но если бы оказалось, что система не подчиняется законам квантовой механики и теории относительности, это было бы катаклизмом.

На самом деле, точка зрения о фундаментальности квантовой теории поля недавно подверглась сомнению. Фундаментальная теория может оказаться не теорией полей *или* частиц, а, возможно, теорией чего-то совершенно иного, например, струн. С этой точки зрения, квантовая электродинамика и другие квантовые теории поля, которыми мы так гордимся, оказываются всего лишь *эффективными теориями поля*, низкоэнергетическими приближениями к более фундаментальной теории. Причина, по которой наши полевые теории так хорошо работают, заключается не в том, что они фундаментальны, а в том, что любая релятивистская квантовая теория выглядит как теория поля, если применять ее к взаимодействию частиц при достаточно низких энергиях. Таким образом, если мы хотим узнать, почему квантовые теории поля таковы, каковы они есть, нам следует начать с частиц.

Но мы не должны делать это ценой забвения своего прошлого. Поэтому в данной главе описана история квантовой теории поля с ранних времен до 1949 года, когда эта теория приняла современную форму. В остальной части книги я буду стараться уберечь историю от вторжения в физику.

Одна из проблем, с которой я столкнулся при написании этой главы, заключается в том, что история квантовой теории поля с самого начала была неразрывно связана с историей самой квантовой механики. Поэтому читатель, знакомый с историей квантовой механики, может встретить уже знакомый материал. Особенно это касается первого параграфа, где я обсуждаю ранние попытки соединить квантовую механику с частной теорией относительности. Я могу только посоветовать такому читателю перейти к менее знакомым страницам.

С другой стороны, читатели, ранее незнакомые с квантовой теорией поля, могут посчитать некоторые куски этой главы слишком краткими, чтобы быть еще и понятными. Призываю таких чи-

тателей не тревожиться. Данную главу не следует рассматривать как замкнутое введение в квантовую теорию поля, и она не нужна для понимания остальной части книги. Некоторые читатели могут предпочесть начать со следующей главы и вернуться к истории позднее. Однако для многих история квантовой теории поля может послужить хорошим введением в саму эту теорию.

Должен добавить, что эта глава не является оригинальной работой по истории науки. Я писал ее, пользуясь книгами и статьями настоящих историков, а также прочитанными мною некоторыми историческими воспоминаниями и оригинальными статьями по физике. Большинство из них упомянуто в библиографии в конце главы и в списке литературы. Читатель, желающий более глубоко познаться с историческими деталями, должен обратиться к указанным трудам.

Несколько слов об обозначениях. Чтобы сохранить аромат прошлых времен, я в этой главе буду явно выписывать множители \hbar и c (и даже h), но, чтобы облегчить сравнение с современной физической литературой, я буду использовать более современную *рационализованную* электростатическую систему единиц, в которой постоянная тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$ записывается как $e^2/(4\pi\hbar c)$. В последующих же главах я буду в основном использовать «естественную» систему единиц, полагая $\hbar = c = 1$.

1.1. Релятивистская волновая механика

Волновая механика начиналась как релятивистская теория. Действительно, как мы увидим далее, основоположники волновой механики Луи де Бройль и Эрвин Шредингер во многом вдохновлялись в своих трудах идеями теории относительности. Только позднее стало понятно, что релятивистская волновая механика как релятивистская квантовая теория систем с фиксированным числом частиц просто невозможна. Таким образом, несмотря на множество успехов, релятивистская волновая механика в конце концов уступила дорогу квантовой теории поля. Тем не менее релятивистская волновая механика сохранилась как важная часть формального аппарата квантовой теории поля. Кроме того, воспроизведение успешных результатов релятивистской волновой механики всегда было вызовом для теории поля.

Гипотеза о том, что материальные частицы могут описываться, как фотоны, в виде волн, была впервые высказана Луи де Бройлем¹ в 1923 году. Помимо аналогии с излучением, важнейшим аргументом было условие лоренц-инвариантности: если эти частицы описываются волной, фаза которой в точке \mathbf{x} в момент времени t имеет вид $2\pi(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \nu t)$, и если эта фаза должна быть лоренц-инвариантной, тогда вектор \mathbf{k} и частота ν должны преобразовываться как \mathbf{x} и t , а следовательно, как \mathbf{p} и E . Чтобы это было возможно, величины \mathbf{k} и ν должны зависеть от скорости так же, как \mathbf{p} и E , т. е. должны быть пропорциональны этим величинам с одной и той же константой пропорциональности. Для фотонов верно соотношение Эйнштейна $E = h\nu$, поэтому вполне естественным было предположение, что для материальных частиц, как и для фотонов,

$$\mathbf{k} = \mathbf{p}/h, \quad \nu = E/h. \quad (1.1.1)$$

Групповая скорость волны $\partial\nu/\partial\mathbf{k}$ оказывается при этом равной скорости частицы, так что действительно частицам могут быть сопоставлены волновые пакеты.

Предположив, что любая замкнутая орбита содержит целое число длин волн частицы $\lambda = 1/|\mathbf{k}|$, де Бройль сумел вывести старое правило квантования Нильса Бора и Арнольда Зоммерфельда, казавшееся до этого загадочным, хотя и приводившее к хорошим результатам при расчете атомных спектров. Далее, сам де Бройль и Вальтер Эльзассер² предположили, что волновая теория де Бройля может быть проверена, если поискать интерференционные эффекты при рассеянии электронов в кристаллах. Несколькими годами спустя эти эффекты были обнаружены Клинтон Д. Джозефом Дэвиссоном и Лестером Джермером³. Однако оставалось неясным, каким образом следует изменить соотношения де Бройля (1.1.1) для несвободных частиц, например, электрона в произвольном кулоновском поле.

Следующим этапом в истории квантовой механики, отодвинувшим в сторону волновую механику, было развитие в 1925–1927 годах матричной механики⁴ в трудах Вернера Гейзенберга, Макса Борна, Паскуаля Йордана и Вольфганга Паули. По крайней мере, частично это развитие вдохновлялось убеждением, что теория должна включать только наблюдаемые величины, например, уровни энергии или вероятности испускания или поглощения. Работа Гейзенберга 1925 года начинается с манифеста: «В настоящей работе дела-

ется попытка установить основы теоретической квантовой механики, опираясь исключительно на соотношения между величинами, которые в принципе наблюдаемы». Подобный позитивизм периодически проявлялся на разных этапах истории квантовой теории поля, например, при введении Джоном Уилером и Гейзенбергом понятия S -матрицы (см. гл. 3) и при возрождении дисперсионной теории в 1950-х годах (см. гл. 10), однако современная квантовая теория поля весьма далека от этого идеала. Мы слишком отклонимся от нашего предмета, если будем сколько-нибудь детально описывать здесь матричную механику.

Как всем известно, волновая механика была возрождена Эрвином Шредингером. В серии статей 1926 года ⁵ вначале было предложено знакомое всем нерелятивистское волновое уравнение, и на его основе воспроизведены результаты матричной механики. Только позднее, в шестом разделе четвертой статьи предлагалось релятивистское волновое уравнение. Согласно Дираку ⁶, история была совсем другой: сначала Шредингер вывел релятивистское уравнение, затем разочаровался в нем, так как уравнение приводило к неправильной тонкой структуре уровней водорода, и, наконец, через несколько месяцев осознал, что нерелятивистское приближение к релятивистскому уравнению само по себе имеет смысл, даже если релятивистское уравнение неверно! К тому времени, когда Шредингер решился опубликовать свое релятивистское волновое уравнение, оно было уже независимо открыто Оскаром Клейном ⁷ и Вальтером Гордоном ⁸, так что обычно его называют уравнением Клейна–Гордона.

Релятивистское волновое уравнение Шредингера было выведено на основе замечания, что для «лоренцовского электрона» с массой m и зарядом e , находящегося во внешнем поле с векторным потенциалом \mathbf{A} и кулоновским потенциалом ϕ , функция Гамильтона H и импульс \mathbf{p} связаны соотношением *

$$0 = (H + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)^2 - m^2c^4. \quad (1.1.2)$$

Для свободной частицы, которая описывается плоской волной $\exp\{2\pi i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \nu t)\}$, соотношения де Бройля (1.1.1) могут быть получены

* Это лоренц-инвариантное выражение, т. к. величины \mathbf{A} и ϕ преобразуются так же, как $c\mathbf{p}$ и E . На самом деле, Шредингер записал H и \mathbf{p} через частные производные функции действия, но для нашего обсуждения это несущественно.

путем замен:

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad E = \hbar \nu \rightarrow i\hbar \partial / \partial t, \quad (1.1.3)$$

где \hbar — введенное позднее Дираком удобное обозначение для величины $h/(2\pi)$. Используя формальную аналогию, Шредингер предположил, что электрон во внешних полях \mathbf{A} , Φ будет описываться волновой функцией $\psi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей уравнению, полученному с помощью тех же замен в формуле (1.1.2):

$$0 = \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi \right)^2 - c^2 \left(-i\hbar \nabla + \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 - m^2 c^4 \right] \psi(\mathbf{x}, t). \quad (1.1.4)$$

В частности, для стационарных состояний атома водорода $\mathbf{A} = 0$ и $\Phi = e/(4\pi r)$, а ψ зависит от времени как $\exp(-iEt/\hbar)$, так что (1.1.4) принимает вид:

$$0 = \left[\left(E + \frac{e^2}{4\pi r} \right)^2 - c^2 \hbar^2 \nabla^2 - m^2 c^4 \right] \psi(\mathbf{x}). \quad (1.1.5)$$

При разумных граничных условиях можно найти собственные значения энергии⁹

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad (1.1.6)$$

где $\alpha \equiv e^2/(4\pi\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры, примерно равная $1/137$; n — положительное целое число, а l — орбитальный угловой момент в единицах \hbar , равный целому числу, лежащему в пределах $0 \leq l \leq n - 1$. Слагаемое, пропорциональное α^2 , хорошо описывает основные черты водородных спектров (серии Лаймана, Бальмера и т. д.). По Дираку, именно это согласие подтолкнуло Шредингера к рассмотрению нерелятивистского волнового уравнения. С другой стороны, слагаемое, пропорциональное α^4 , приводило к тонкой структуре

спектров, противоречившей уже существовавшим аккуратным измерениям Фридриха Пашена.

Полезно сравнить результат Шредингера с тем, который был получен Арнольдом Зоммерфельдом¹⁰ по правилам старой квантовой теории:

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]. \quad (1.1.7)$$

Здесь k – целое число между 1 и n , которое в теории Зоммерфельда выражается через орбитальный момент $l\hbar$ в виде $k = l + 1$. Это приводит к тонкому расщеплению, находящемуся в согласии с экспериментом. Например, для $n = 2$ из (1.1.7) получаем два уровня ($k = 1$ и $k = 2$), расщепление которых равно наблюдаемой величине $\alpha^4 mc^2 / 32$ или $4,53 \times 10^{-5}$ эВ. В противоречии с этим, результат Шредингера (1.1.6) дает при $n = 2$ величину расщепления уровней тонкой структуры $\alpha^4 mc^2 / 12$, что значительно больше наблюдаемой величины.

Шредингер правильно понял, что источником этого расхождения было пренебрежение спином электрона. Расщепление атомных уровней щелочных атомов некулоновскими электрическими и слабыми внешними магнитными полями (так называемый аномальный эффект Зеемана) показало, что мультиплетность состояний больше, чем предсказываемая теорией Бора–Зоммерфельда. Это побудило Джорджа Уленбека и Сэмюэла Гаудсмита¹¹ предположить в 1925 году, что электрон обладает внутренним угловым моментом $\hbar/2$. По известной величине зеемановского расщепления¹² им удалось установить, что магнитный момент электрона равен

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

Было ясно, что спин электрона должен взаимодействовать с его орбитальным моментом, так что релятивистское уравнение Шредингера и не могло привести к правильному значению тонкого расщепления.

К 1927 году уже несколько авторов¹³ сумели показать, что спин-орбитальное взаимодействие ответственно за расхождение между результатом Шредингера (1.1.6) и опытом. На самом деле, здесь играют роль два эффекта: один из них — прямое взаимодействие магнитного момента (1.1.8) и магнитного поля, действующего на электрон, движущийся

в электростатическом поле атома; второй эффект — релятивистская «томасовская прецессия», связанная (даже в отсутствие магнитного момента) с круговым движением вращающегося электрона¹⁴. Вместе эти два эффекта приводят к подъему уровня с полным угловым моментом $j = l + 1/2$ до значения, определяемого формулой Зоммерфельда (1.1.7) при $k = l + 1 = j + 1/2$, в то время как уровень с $j = l - 1/2$ опускается до значения, даваемого той же формулой при $k = l = j + 1/2$. Таким образом, оказалось, что энергия зависит только от n и j , но не от l отдельно:

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]. \quad (1.1.9)$$

По случайности теория Зоммерфельда давала правильную величину расщепления в водороде ($j + 1/2$ принимает, как и k , только целые значения от 1 до n), однако совершенно неправильным образом приписывала различным уровням значения орбитального момента l . Кроме того, в согласии с экспериментом предсказывалась мультиплетность уровней тонкой структуры в водороде, равная 2 для $j = 1/2$ и $2(2j + 1)$ для $j > 1/2$ (в соответствии со значениями l , равными $j \pm 1/2$).

Несмотря на эти успехи, все еще не существовало последовательной релятивистской теории, с самого начала включавшей спин электрона. Такую теорию построил в 1928 году Поль Дирак. Однако он не пытался просто создать релятивистскую теорию вращающегося электрона. Дирак подошел к задаче, поставив вопрос, кажущийся в наши дни очень странным. В начале своей статьи 1928 года¹⁵ он спрашивает, «почему Природа выбрала именно эту модель электрона, вместо того, чтобы удовлетвориться точечным зарядом». Для нас сегодня это звучит примерно так же, как вопрос о том, почему бактерия состоит из одной клетки. Спин $\hbar/2$ — просто одно из свойств, определяющих именно электрон, и отличающее эту частицу от множества других известных в наши дни частиц с разными спинами. Однако в 1928 году не возбранялось верить, что все вещество состоит из электронов и похожих на них частиц, но с положительным зарядом, входящих в состав атомного ядра. Поэтому в духе того времени можно так переформулировать вопрос Дирака: «Почему фундаментальные составляющие вещества должны иметь спин $\hbar/2$?»

Для Дирака ключом к ответу на этот вопрос было требование положительности вероятностей. Было известно¹⁶, что плотность вероятности для нерелятивистского уравнения Шредингера равна $|\psi|^2$, причем она удовлетворяет уравнению непрерывности вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} (|\psi|^2) - \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0,$$

так что интеграл от $|\psi|^2$ по пространству не зависит от времени. С другой стороны, единственные выражения для плотности вероятности ρ и плотности тока \mathbf{J} , которые можно построить из решений релятивистского уравнения Шредингера, и которые удовлетворяют закону сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.1.10)$$

имеют вид

$$\rho = N \operatorname{Im} \psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie\Phi}{\hbar} \right) \psi, \quad (1.1.11)$$

$$\mathbf{J} = Nc^2 \operatorname{Im} \psi^* \left(\nabla + \frac{ie\mathbf{A}}{\hbar} \right) \psi, \quad (1.1.12)$$

где N — произвольная константа. Невозможно считать ρ плотностью вероятности, так как и при наличии, и в отсутствие внешнего потенциала Φ плотность ρ не имеет определенного знака. Прочитав воспоминания Дирака¹⁷ по этому поводу:

«Вспоминаю, что как-то в Копенгагене Бор спросил меня, над чем я работаю, и я рассказал, что пытаюсь построить удовлетворительную релятивистскую теорию электрона. Бор ответил: “Но ведь это уже сделали Клейн и Гордон!” Поначалу такой ответ меня крайне обескуражил. Казалось, что Бор вполне удовлетворен решением Клейна, меня же оно совершенно не устраивало из-за возникающих при этом отрицательных вероятностей. Но я не сдался и продолжал поиск теории, в которой были бы только положительные вероятности».

Как утверждает Георгий Гамов¹⁸, Дирак нашел решение проблемы однажды вечером в 1928 году, когда он сидел, уставившись

в огонь камина в колледже св. Иоанна в Кембридже. Дирак понял, что уравнение Клейна–Гордона (или релятивистское уравнение Шредингера) приводит к отрицательным вероятностям потому, что плотность ρ в уравнении закона сохранения (1.1.10) содержит производные волновой функции по времени. Это, в свою очередь, вытекает из того, что волновая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению *второго* порядка по времени. Задача, таким образом, заключалась в том, чтобы заменить это волновое уравнение другим уравнением, куда бы входили производные по времени первого порядка, как в нерелятивистском уравнении Шредингера.

Предположим, что волновая функция электрона является многокомпонентной величиной $\Psi_n(x)$, удовлетворяющей волновому уравнению вида

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi, \quad (1.1.13)$$

где \mathcal{H} – некоторая матричная функция пространственных производных. Поскольку уравнение линейно по производным по времени, то для построения лоренц-инвариантной теории мы должны предположить, что оно также линейно и по пространственным производным, иными словами, \mathcal{H} имеет вид

$$\mathcal{H} = -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \alpha_4 mc^2, \quad (1.1.14)$$

где α_1 , α_2 , α_3 и α_4 — постоянные матрицы. Из (1.1.13) можно получить уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mathcal{H}^2 \Psi = & -\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} \\ & - i\hbar mc^3 (\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + m^2 c^4 \alpha_4^2 \Psi. \end{aligned}$$

(Здесь принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам: i, j принимают значения 1, 2, 3 или x, y, z .) Но это уравнение должно согласовываться с релятивистским уравнением Шредингера для свободного поля (1.1.4), выражающим просто релятивистскую связь между энергией и импульсом. Поэтому матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ и α_4 должны удовлетворять условиям:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} I, \quad (1.1.15)$$

$$\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i = 0, \quad (1.1.16)$$

$$\alpha_4^2 = I, \quad (1.1.17)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (1 при $i = j$; 0 при $i \neq j$), а I — единичная матрица. Дирак нашел набор матриц 4×4 , удовлетворяющих этим соотношениям:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Чтобы доказать лоренц-инвариантность развитого формализма, Дирак умножил (1.1.13) слева на α_4 , так что уравнение стало возможным записать в виде:

$$\left(\hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2 \right) \psi = 0, \quad (1.1.19)$$

$$\gamma \equiv -i\alpha_4 \alpha, \quad \gamma^0 \equiv -i\alpha_4. \quad (1.1.20)$$

(Греческие индексы μ, ν , и т. д. принимают значения 1, 2, 3, 0, причем $x^0 = ct$. Дирак использовал в своей работе $x_4 = ict$ и поэтому $\gamma_4 = \alpha_4$.) Матрицы γ_μ удовлетворяют следующим соотношениям антикоммутации:

$$\frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} +1, & \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ -1, & \mu = \nu = 0, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (1.1.21)$$

Дирак заметил, что эти соотношения являются лоренц-инвариантными в том смысле, что матрицы $\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$, где Λ — произвольное преобразование Лоренца, также им удовлетворяют. Отсюда Дирак сделал вывод, что $\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ должны быть связаны с γ^μ некоторым преобразованием подобия

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda).$$

Следовательно волновое уравнение оказывается инвариантным, если при преобразовании Лоренца $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ волновая функция подвергается матричному преобразованию $\psi \rightarrow S(\Lambda)\psi$. (Более подробно эти вопросы обсуждаются в гл. 5 с несколько иной точки зрения.)

Для изучения поведения электронов в произвольном внешнем электромагнитном поле Дирак воспользовался «обычной процедурой», сделав те же замены

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi, \quad -i\hbar \nabla \rightarrow -i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (1.1.22)$$

что и в (1.1.4). В результате уравнение (1.1.13) принимает вид:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right) \psi = \left(-i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \boldsymbol{\alpha} \psi + mc^2 \alpha_4 \psi. \quad (1.1.23)$$

С помощью этого уравнения Дирак показал, что условие сохранения углового момента в центральном поле имеет вид

$$[\mathcal{H}, -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla + \hbar \boldsymbol{\sigma} / 2] = 0, \quad (1.1.24)$$

где \mathcal{H} — матричный дифференциальный оператор (1.1.14), а $\boldsymbol{\sigma}$ — 4×4 -обобщение спиновых матриц, ранее введенных Паули¹⁹:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.1.25)$$

Так как каждая компонента σ имеет собственные значения, равные ± 1 , то наличие дополнительного слагаемого в (1.1.24) показывает, что электрон обладает внутренним угловым моментом $\hbar/2$.

Дирак также квадрировал уравнение (1.1.23) и получил уравнение второго порядка. Оказалось, что оно имеет тот же вид, что и уравнение Клейна–Гордона (1.1.4), за исключением двух дополнительных слагаемых в правой части:

$$[-e\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - ie\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}]\psi. \quad (1.1.26)$$

В случае медленно движущегося электрона доминирует первое слагаемое, соответствующее магнитному моменту, значение которого согласуется с найденным Уленбеком и Гаудсмитом¹¹ значением (1.1.8). Как заметил Дирак, такое значение магнитного момента с учетом релятивистской структуры теории приводит к правильной структуре тонкого расщепления в согласии (с точностью до $\alpha^4 mc^2$) с результатами Гейзенберга, Иордана и Чарльза Г. Дарвина¹³. Чуть позднее Дарвин²⁰ и Гордон²¹ вывели «точную» формулу для уровня энергии атома водорода в рамках теории Дирака:

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\{n - j - \frac{1}{2} + [(j + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2]^{1/2}\}} \right)^{-1/2}. \quad (1.1.27)$$

Первые три слагаемых в разложении этого выражения в ряд по степеням α^2 согласуются с приближенным выражением (1.1.9).

Построенная теория удовлетворяла требованиям, выдвинутым Дираком: формализм должен быть релятивистским, а вероятности — существенно положительными. Из (1.1.13) и (1.1.14) можно вывести уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.1.28)$$

$$\rho = |\psi|^2, \quad \mathbf{J} = c\psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi, \quad (1.1.29)$$

так что положительную величину $|\psi|^2$ можно интерпретировать как плотность вероятности, причем полная вероятность равна интегралу от квадрата модуля волновой функции $\int |\psi|^2 d^3x$.

Однако возникла новая проблема, которую Дирак не сумел сразу разрешить.

При заданном импульсе \mathbf{p} волновое уравнение (1.1.13) имеет *четыре* решения в виде плоских волн:

$$\psi \propto \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)\right]. \quad (1.1.30)$$

Два решения с $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ соответствуют двум спиновым состояниям электрона с проекциями спина $\pm \hbar/2$. У двух других решений $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$, и они не имеют ясной физической интерпретации. Как отметил Дирак, эта же проблема возникает и для релятивистского уравнения Шредингера: при каждом \mathbf{p} существуют два решения вида (1.1.30), одно — с положительным, другое — с отрицательным значением E .

Конечно, даже в классической физике релятивистское соотношение $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ имеет два решения: $E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$. Однако в этом случае можно просто предположить, что физическими являются только те частицы, у которых E положительно. Так как у положительных решений $E > mc^2$, а у отрицательных $E < -mc^2$, между этими решениями существует щель конечной величины, причем никаким непрерывным воздействием невозможно перевести частицу из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией.

В релятивистской квантовой механике проблема с отрицательными энергиями представляется значительно более серьезной. Как заметил Дирак в работе 1928 года, взаимодействие электрона с излучением может привести к переходам, в которых электрон с положительной энергией переходит в состояние с отрицательной энергией, а избыточная энергия уносится двумя или более фотонами. Почему же тогда вещество стабильно?

В 1930 году Дирак предложил необычное решение проблемы. Оно было основано на принципе запрета, так что уместно сказать несколько слов об истории этого принципа.

Изучение периодической таблицы элементов, а также систематика рентгеновских спектров выявили определенные закономерности заполнения электронами энергетических уровней атомов²³: максимальное число электронов N_n на оболочке, характеризующейся главным квантовым числом n , вдвое больше числа различных орбитальных состояний с данным n :

$$N_n = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2 = 2, 8, 18, \dots \quad (1.1.31)$$

В 1925 году Вольфганг Паули высказал предположение, что подобную структуру можно понять, если считать, что N_n равно полному числу возможных состояний на n -ой оболочке, и кроме того существует некий таинственный *принцип запрета*, запрещающий более, чем одному электрону находиться в данном состоянии. Паули приписал загадочный множитель 2 в (1.1.31) «*необычной, классически необъяснимой двойственности*» электронных состояний, что, как мы видели, чуть позднее было связано со спином электрона¹¹. Принцип запрета дал ответ на вопрос, остававшийся неясным в старой теории Бора и Зоммерфельда: почему все электроны в тяжелых атомах на падают на оболочку с наименьшей энергией? Затем принцип запрета Паули был формализован рядом авторов²³ как требование, чтобы волновая функция многоэлектронной системы была бы антисимметричной по пространственным и спиновым координатам всех электронов. Энрико Ферми²⁶ и Дирак²⁷ включили этот принцип в статистическую механику, так что частицы, подчиняющиеся принципу запрета, стали называть общим термином *фермионы*, в то время, как частицы типа фотонов, для которых волновая функция симметрична и которые подчиняются статистике Бозе и Эйнштейна, получили название *бозонов*. Принцип запрета сыграл важнейшую роль в теории металлов, белых карликов и нейтронных звезд и т. п., а также в химии и атомной физике, но обсуждение этих вопросов уведет нас слишком далеко от основной темы.

Гипотеза Дирака состояла в том, что электроны с положительными энергиями не могут перейти в состояния с отрицательной энергией, так как «*все состояния с отрицательной энергией заняты, быть может, за исключением нескольких состояний с малыми скоростями*». Эти вакантные состояния или «дырки» в море электронов с отрицательными энергиями ведут себя как частицы с противоположными значениями квантовых чисел: положительной энергией и положительным зарядом. Единственной частицей с положительным зарядом, известной к тому времени, был протон, и как позднее вспоминал Дирак^{27а}, «*вся научная атмосфера в те времена противилась введению новых частиц*». Поэтому Дирак отождествил свои дырки с протонами; действительно,

его статья 1930 года ²² так и называлась — «Теория электронов и протонов».

Теория дырок немедленно столкнулась с серьезными трудностями. Одна очевидная проблема была связана с бесконечной плотностью заряда вездесущих электронов с отрицательной энергией: где же тогда создаваемое ими электрическое поле? Дирак предложил интерпретировать плотность заряда, входящую в уравнения Максвелла, как «отклонение от нормального состояния электризации мира». Другая проблема была связана с колоссальной разницей наблюдаемых значений масс и взаимодействий электронов и протонов. Дирак надеялся, что кулоновские взаимодействия между электронами каким-то образом объяснят такую разницу, но Герман Вейль ²⁸ показал, что теория дырок полностью симметрична по отношению к отрицательным и положительным зарядам. Наконец, Дирак ²² предсказал существование процесса электрон-протонной аннигиляции, в котором электрон с положительной энергией взаимодействует с дыркой в море электронов с отрицательной энергией, и попадает на этот незанятый уровень, испуская пару гамма-квантов. Само по себе это не создавало дополнительных трудностей для теории дырок. Более того, высказывались надежды, позднее не оправдавшиеся, что таким образом удастся объяснить источник энергии звезд. Однако вскоре Юлиус Роберт Оппенгеймер и Игорь Тамм отметили ²⁹, что электрон-протонная аннигиляция в атомах будет происходить со скоростью, несовместимой с наблюдаемой стабильностью обычного вещества. По этим причинам в 1931 году Дирак изменил свою точку зрения и решил, что дырки должны проявляться не как протоны, а как новый сорт положительно заряженных частиц с массой, равной массе электрона ^{29а}.

Вторая и третья проблемы были устранены после того, как Карл Андерсон, по-видимому ничего не знавший о предсказании Дирака, открыл позитрон ³⁰. 2 августа 1932 года в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле индукцией 15 кГс, был зарегистрирован необычный трек от частиц космического излучения. Этот трек был искривлен в направлении, свидетельствующем о положительном заряде частицы, причем его протяженность была по меньшей мере в десять раз больше, чем можно было ожидать для протона! И кривизна, и удельная ионизация трека были совместимы с гипотезой, что это след новой частицы, отличающейся от электрона только знаком заряда, как и ожидалось для одной из дираковских дырок.

(Еще ранее это же открытие было сделано П. М. Блеккетом, однако он его не опубликовал сразу же. Андерсон цитирует сообщения прессы о полученных Блеккетом и Джузеппе Оккиалини свидетельствах существования положительно заряженных частиц в треках космических лучей.) Так оказалось, что Дирак был не прав только в своем первоначальном отождествлении дырок с протонами.

Открытие более или менее предсказанного позитрона, а также предыдущие успехи уравнения Дирака в объяснении магнитного момента электрона и тонкой структуры спектров водорода подняли теорию Дирака на пьедестал, на котором она находится уже более шести десятилетий. Хотя и нет сомнений в том, что теория Дирака в какой-то форме выживет в любой будущей физической теории, все же есть серьезные основания быть неудовлетворенными ее исходными посылками.

1. Прделанный Дираком анализ трудностей с отрицательными вероятностями, возникающими при рассмотрении релятивистского волнового уравнения Шредингера, казалось, исключает существование любых частиц с нулевым спином. Но даже в 1920-х годах такие частицы были известны — например атом водорода в основном состоянии или ядро гелия. Конечно, можно было пытаться возражать, что атомы водорода и альфа-частицы не являются элементарными и поэтому не должны описываться релятивистскими волновыми уравнениями. Однако, не было ясно (и продолжает оставаться неясным), как включить идею элементарности в формализм релятивистской квантовой механики. В наши дни известно большое число частиц со спином нуль — π -мезоны, K -мезоны и т. д., которые не менее элементарны, чем протон или нейтрон. Нам известны также частицы со спином единица — W^\pm и Z^0 , столь же элементарные, как электрон или любая другая частица. Наконец, если не принимать во внимание эффекты сильного взаимодействия, в наши дни мы бы рассчитывали тонкую структуру уровней «мезоатомов», состоящих из бесспиновых отрицательно заряженных π - или K -мезонов, связанных с атомным ядром, исходя из стационарных решений релятивистского уравнения Клейна–Гордона–Шредингера! Итак, трудно согласиться с тем, что релятивистское уравнение для частиц со спином нуль содержит в себе что-то фундаментально неправильное, что *вынуждает* обратиться к уравнению Дирака — дело просто в том, что спин электрона равен $\hbar/2$, а не нулю.

2. Насколько нам сейчас известно, каждому сорту частиц соответствует своя «античастица» с той же массой и противоположным зарядом. (Некоторые истинно нейтральные частицы, вроде фотона, являются античастицами для самих себя.) Однако, как же мы можем интерпретировать античастицы заряженных бозонов, например, π^\pm или W^\pm , как дырки в море состояний с отрицательной энергией? Ведь для частиц, квантованных по правилам статистики Бозе–Эйнштейна, принцип исключения не действует и ничто не препятствует частице с положительной энергией перейти в состояние с отрицательной энергией, независимо от того, занято оно или нет. Но если теория дырок неприменима для бозонных античастиц, почему, спрашивается, ей следует доверять в случае фермионов? Я расспрашивал Дирака в 1972 году, что он думал в свое время по этому поводу. Он ответил, что не воспринимал бозоны типа пиона или W^\pm как «существенные». Несколькими годами спустя, в лекции^{29a} Дирак отметил, что «мы не имеем более картины вакуума, в котором состояния с отрицательной энергией заполнены», и подчеркнул, что в этом случае «вся теория становится более сложной». В следующем разделе мы покажем, как в результате развития квантовой теории поля интерпретация античастиц как дырок стала ненужной, несмотря на то, что до сих пор она, к сожалению, просачивается на страницы многих учебников. Процитируем Джулиана Швингера^{30a}: «Картина бесконечного моря электронов с отрицательной энергией рассматривается сейчас в лучшем случае как исторический курьез и прочно забыта».

3. Одним из больших успехов теории Дирака было правильное предсказание величины магнитного момента электрона. Оно особенно поражало потому, что магнитный момент (1.1.8) оказался вдвое больше, чем можно было бы ожидать в случае орбитального движения заряженной частицы с угловым моментом $\hbar/2$. Этот множитель 2 оставался загадкой вплоть до создания теории Дирака. Однако, на самом деле, в линии рассуждений Дирака нет ничего, что безоговорочно приводит именно к такому значению магнитного момента. Когда мы включаем в волновое уравнение (1.1.23) взаимодействие с электрическим и магнитным полями, мы можем с успехом добавить «паулиевское слагаемое»³¹

$$k\alpha_4[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi F_{\mu\nu} \quad (1.1.32)$$

с произвольным коэффициентом κ . (Здесь $F_{\mu\nu}$ — обычный тензор напряженности электромагнитного поля, причем $F^{12} = B_3$, $F^{01} = E_1$, и т. д.) Такое слагаемое можно получить, добавив предварительно в уравнение свободного поля слагаемое, пропорциональное выражению $[\gamma^\mu \gamma^\nu](\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu)\psi$, которое, конечно, равно нулю, а затем совершить, как и ранее, подстановку (1.1.22). Более современный подход заключается просто в замечании, что слагаемое (1.1.32) удовлетворяет всем принятым принципам инвариантности, включая лоренц-инвариантность и калибровочную инвариантность, так что нет причин, почему такое слагаемое *не должно* включаться в волновые уравнения (см. раздел 12.3.). Такое слагаемое будет приводить к дополнительному вкладу в магнитный момент электрона, пропорциональному κ , так что, если не принимать во внимание возможное требование чисто формальной простоты, нет никаких оснований ожидать, что в теории Дирака магнитный момент электрона имеет какое-то определенное значение.

Как мы увидим далее, все перечисленные проблемы были в конце концов решены (или, по крайней мере, разъяснены) в процессе развития квантовой теории поля.

1.2. Рождение квантовой теории поля

Фотон — единственный пример частицы, которая до своего открытия была известна как поле. Поэтому неудивительно, что развитие формализма квантовой теории поля прежде всего было связано с излучением, и только позднее он был применен к другим частицам и полям.

В 1926 году в одной из основополагающих работ по матричной механике Борн, Гейзенберг и Иордан³² применили свои новые методы к свободному полю излучения. Для простоты они игнорировали поляризацию электромагнитных волн и рассмотрели пространственно одномерную задачу, причем координата x изменялась от 0 до L . Если потребовать, чтобы поле излучения $u(x, t)$ обращалось в нуль на концах интервала, то оно будет иметь вид, совпадающий с величиной смещения точек струны с закрепленными при $x = 0$ и $x = L$ концами. По аналогии со случаем струны для полного электромагнитного поля гамильтониан был выбран в виде

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} d^3x. \quad (1.2.1)$$

Чтобы свести это выражение к сумме квадратов, поле u было представлено как сумма фурье-компонент при условии, что $u = 0$ при $x = 0$ и $x = L$:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \left(\frac{\omega_k x}{c} \right), \quad (1.2.2)$$

$$\omega_k = k\pi c/L. \quad (1.2.3)$$

В результате

$$H = \frac{L}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \dot{q}_k^2(t) + \omega_k^2 q_k^2(t) \right\}. \quad (1.2.4)$$

Таким образом, струна или поле ведет себя как сумма независимых гармонических осцилляторов с угловыми частотами ω_k , как и предвидел за 20 лет до этого Пауль Эренфест^{32a}.

В частности, «импульс» $p_k(t)$, канонически сопряженный к $q_k(t)$, определяется, как и в механике частиц, условием, что если H выражено как функция p и q , то

$$\dot{q}_k(t) = \frac{\partial}{\partial p_k(t)} H(p(t), q(t)).$$

Отсюда получается, что импульс

$$p_k(t) = \frac{L}{2} \dot{q}_k(t), \quad (1.2.5)$$

и можно записать канонические перестановочные соотношения:

$$[\dot{q}_k(t), q_j(t)] = \frac{2}{L} [p_k(t), q_j(t)] = \frac{-2i\hbar}{L} \delta_{kj}, \quad (1.2.6)$$

$$[q_k(t), q_j(t)] = 0. \quad (1.2.7)$$

Кроме того, временная зависимость $q_k(t)$ определяется уравнением движения Гамильтона

$$\ddot{q}_k(t) = \frac{2}{L} \dot{p}_k(t) = -\frac{2}{L} \frac{\partial H}{\partial q_k(t)} = -\omega_k^2 q_k(t). \quad (1.2.8)$$

Явный вид матриц, определяемых уравнениями (1.2.6)–(1.2.8), был уже известен Борну, Гейзенбергу и Иордану из предыдущей работы по гармоническому осциллятору. Для q -матрицы получается выражение

$$q_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}} \left[a_k \exp(-i\omega_k t) + a_k^\dagger \exp(+i\omega_k t) \right], \quad (1.2.9)$$

где a_k — не зависящая от времени матрица, а a_k^\dagger — ее эрмитово сопряженная матрица, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[a_k, a_j^\dagger] = \delta_{kj}, \quad (1.2.10)$$

$$[a_k, a_j] = 0. \quad (1.2.11)$$

Строки и столбцы этих матриц помечены набором неотрицательных целых чисел n_1, n_2, \dots , каждое из которых соответствует нормальной моде. Матричные элементы равны

$$(a_k)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \sqrt{n_k} \delta_{n'_k, n_k - 1} \prod_{j \neq k} \delta_{n'_j, n_j}, \quad (1.2.12)$$

$$(a_k^\dagger)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \sqrt{n_k + 1} \delta_{n'_k, n_k + 1} \prod_{j \neq k} \delta_{n'_j, n_j}. \quad (1.2.13)$$

Для единственной нормальной моды эти матрицы можно выписать в явном виде:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Можно непосредственно убедиться, что матрицы (1.2.12) и (1.2.13) удовлетворяют перестановочным соотношениям (1.2.10) и (1.2.11).

Физическая интерпретация вектора-столбца с целыми компонентами n_1, n_2, \dots заключается в том, что он представляет состояние с n_k квантами в каждой нормальной моде k . Матрицы a_k или a_k^\dagger , действующие на такой вектор-столбец, будут соответственно уменьшать или увеличивать n_k на единицу, оставляя неизменными все n_l с $l \neq k$. Поэтому можно интерпретировать эти матрицы как операторы уничтожения или рождения одного кванта в k -ой нормальной моде. В частности, вектор со всеми $n_k = 0$ представляет вакуум; действие на него любого оператора a_k дает нуль.

Дальнейшая интерпретация связана с рассмотрением функции Гамильтона. Подставляя (1.2.9) и (1.2.10) в (1.2.4), находим:

$$H = \sum_k \hbar \omega_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}). \quad (1.2.14)$$

Таким образом, гамильтониан диагонален в n -представлении:

$$(H)_{n_1, n_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \sum_k \hbar \omega_k (n_k + \frac{1}{2}) \prod_j \delta_{n'_j, n_j}. \quad (1.2.15)$$

Видно, что энергия состояния есть просто сумма энергий $\hbar \omega_k$ каждого кванта в данном состоянии плюс бесконечная нулевая энергия $E_0 = \frac{1}{2} \sum \hbar \omega_k$. В применении к полю излучения этот формализм подтвердил разработанный Бозе метод подсчета состояний излучения по числу n_k квантов в каждой нормальной моде.

Борн, Гейзенберг и Иордан использовали такой формализм при выводе выражения для среднеквадратичных флуктуаций энергии в излучении черного тела. (Для этой цели они, в действительности, использовали только коммутационные соотношения (1.2.6)–(1.2.7).) Однако вскоре такой подход был применен к исследованию более актуальной проблемы — вычислению вероятностей спонтанного излучения.

Чтобы понять возникшие здесь трудности, необходимо вернуться немного назад. В одной из первых работ по матричной механике Борн и Иордан³³ высказали предположение, что атом, перескакивая из состояния β в более низкое по энергии состояние α , должен испускать излучение подобно классическому заряженному осциллятору, смещение которого дается выражением

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\beta\alpha} \exp(-2\pi i\nu t) + \mathbf{r}_{\beta\alpha}^* \exp(2\pi i\nu t), \quad (1.2.16)$$

$$h\nu = E_\beta - E_\alpha, \quad (1.2.17)$$

а $\mathbf{r}_{\beta\alpha}$ — $\beta\alpha$ матричный элемент матрицы, связанной с координатой электрона. Энергия E такого осциллятора равна

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{\mathbf{r}}^2 + (2\pi\nu)^2 \mathbf{r}^2) = 8\pi^2 m\nu^2 |\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2. \quad (1.2.18)$$

Непосредственное классическое вычисление позволяет теперь найти излученную мощность, а после деления на энергию $h\nu$ одного фотона — вероятность испускания фотона

$$A(\beta \rightarrow \alpha) = \frac{16\pi^3 e^2 \nu^3}{3hc^3} |\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2. \quad (1.2.19)$$

Однако оставалось совершенно непонятным, почему при рассмотрении спонтанного излучения следовало таким образом обращаться с формулами для излучения классического диполя.

Несколько позднее Дирак³⁴ дал более убедительный, хотя еще менее прямой вывод этих соотношений. Рассматривая поведение квантованных атомных состояний в осциллирующем классическом электромагнитном поле плотностью энергии u , приходящейся на единичный интервал частот в окрестности частоты (1.2.17), он сумел вывести формулы для вероятностей поглощения $uB(\alpha \rightarrow \beta)$ или индуцированного испускания $uB(\beta \rightarrow \alpha)$:

$$B(\alpha \rightarrow \beta) = B(\beta \rightarrow \alpha) \equiv \frac{2\pi^2 e^2}{3\hbar^2} |\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2. \quad (1.2.20)$$

(Отметим, что выражение в правой части этого равенства симметрично по отношению к состояниям α и β , так как $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ равно $\mathbf{r}_{\beta\alpha}^*$.) Эйнштейн^{34a} уже показал в 1917 году, что возможность теплового равновесия между атомами и излучением черного тела требует выполнения определенного соотношения между вероятностью $A(\beta \rightarrow \alpha)$ спонтанного излучения и вероятностями uB индуцированного испускания или поглощения:

$$A(\beta \rightarrow \alpha) = \left(\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \right) B(\beta \rightarrow \alpha). \quad (1.2.21)$$

Подстановка формулы (1.2.20) в это соотношение немедленно приводит к результату Борна и Иордана (1.2.19) для вероятности спонтанного излучения. Тем не менее, представляется неудовлетворительным, что термодинамические аргументы должны использоваться для вывода формул, описывающих процессы, происходящие с одиночными атомами.

Наконец в 1927 году Дирак³⁵ сумел представить строгое квантово-механическое рассмотрение спонтанного излучения. Векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ был разложен на нормальные моды, как в формуле (1.2.2), и было показано, что коэффициенты удовлетворяют перестановочным соотношениям типа (1.2.6). Соответственно, каждое состояние свободного поля излучения было задано набором целых чисел n_k , по одному на каждую нормальную моду, а матричные элементы энергии электромагнитного взаимодействия приняли вид суммы по нормальным модам, причем матричные коэффициенты оказались пропорциональными матрицам a_k и a_k^\dagger , определенным в (1.2.10)–(1.2.13). Главное в этих результатах – появление множителя в уравнении (1.2.13). Вероятность перехода, в котором число фотонов в нормальной моде k увеличивается от n_k до $n_k + 1$, пропорционально квадрату этого множителя, т. е. $n_k + 1$. Но в поле излучения с n_k фотонами в нормальной моде k плотность энергии u на единичный интервал частот равна:

$$u(\nu_k) = \left(\frac{8\pi\nu_k^2}{c^3} \right) n_k \times h\nu_k,$$

так что вероятность испускания излучения в нормальной моде k пропорциональна

$$n_k + 1 = \frac{c^3 u(\nu_k)}{8\pi h \nu_k^3} + 1.$$

Первое слагаемое интерпретируется как вклад индуцированного испускания, а второе – как вклад спонтанного излучения. Таким образом, без всякого обращения к термодинамике Дирак смог заключить, что отношение вероятностей индуцированного испускания uB и спонтанного излучения A удовлетворяет соотношению Эйнштейна (2.21). Используя свой же более ранний результат (1.2.20) для B , Дирак сумел заново вывести формулу Борна–Иордана³³ (1.2.19)

для вероятности спонтанного излучения A . Несколько позднее аналогичные методы были использованы Дираком при квантово-механическом рассмотрении рассеяния излучения и времени жизни возбужденных атомных состояний³⁶, а также Виктором Вайскопфом и Юджином Вигнером при детальном анализе формы спектральных линий^{36а}.

Дирак в своей работе разделил электромагнитный потенциал на поле излучения \mathbf{A} и на статический кулоновский потенциал A^0 , что в результате нарушило явную лоренцевскую и калибровочную инвариантность классической электродинамики. Позднее эти процедуры получили более солидное обоснование в известной работе Энрико Ферми^{26б}. В 1930-е годы многие физики изучали квантовую электродинамику по обзору Ферми 1932 года.

Использование канонических перестановочных соотношений для операторов q и p или a и a^\dagger также поставило вопрос о лоренц-инвариантности квантованной теории. В 1928 году Иордан и Паули³⁷ сумели показать, что коммутаторы полей в разных пространственно-временных точках являются на самом деле лоренц-инвариантными. (Эти коммутаторы вычисляются в гл. 5.) Несколько позже Бор и Леон Розенфельд³⁸ использовали ряд остроумных мысленных экспериментов для того, чтобы показать, что эти перестановочные соотношения выражают ограничения на нашу способность производить измерения полей в пространственно-временных точках, разделенных времениподобными интервалами.

Вскоре после успешного квантования электромагнитного поля эта же техника была применена к другим полям. Поначалу такую технику называли «вторичным квантованием»: те поля, которые подвергались квантованию, были волновыми функциями, используемыми в одночастичных задачах квантовой механики, например, дираковской волновой функцией электрона. По-видимому, первый шаг в этом направлении был сделан в 1927 году Иорданом³⁹. В следующем, 1928 году Иордан и Вигнер⁴⁰ сделали важные дополнения. Они заметили, что принцип запрета Паули не позволяет числам заполнения электронов n_k в любой нормальной моде k (учитывающей как координатные, так и спиновые переменные) принимать значения, отличные от 0 или 1. Следовательно, электронное поле нельзя представить как суперпозицию операторов, удовлетворяющих перестановочным соотношениям (1.2.10), (1.2.11), так как эти соотношения требуют, чтобы n_k принимало любые целые значения от 0 до ∞ . Чтобы выйти из

положения, они предположили, что электронное поле должно разлагаться на сумму операторов a_k и a_k^\dagger , удовлетворяющих антикоммутиационным соотношениям

$$a_k a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k = \delta_{jk}, \quad (1.2.22)$$

$$a_k a_j + a_j a_k = 0. \quad (1.2.23)$$

Эти соотношения могут быть удовлетворены матрицами, помеченными последовательностью целых чисел n_1, n_2, \dots , по одному для каждой моды, причем эти целые числа могут принимать только два значения — нуль и единица:

$$(a_k)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \begin{cases} 1, & n'_k = 0, n_k = 1, n'_j = n_j \text{ для } j \neq k, \\ 0 & \text{для остальных индексов,} \end{cases} \quad (1.2.24)$$

$$(a_k^\dagger)_{n'_1, n'_2, \dots, n_1, n_2, \dots} = \begin{cases} 1, & n'_k = 1, n_k = 0, n'_j = n_j \text{ для } j \neq k, \\ 0 & \text{для остальных индексов.} \end{cases} \quad (1.2.25)$$

Например, для одной нормальной моды матрицы a_k и a_k^\dagger содержат ровно два столбца и две строки, соответствующие значениям n и n' , равными 0 и 1. Матрицы a и a^\dagger имеют вид:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Читатель может убедиться, что матрицы (1.2.24) и (1.2.25) действительно удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям (1.2.22) и (1.2.23).

Интерпретация вектора-столбца, задаваемого целыми числами n_1, n_2, \dots , заключается в том, что, как и для бозонов, он представляет состояние с n_k квантами в каждой нормальной моде. Разница, конечно, в том, что, поскольку каждое число n_k может принимать только два значения 0 или 1, в каждой моде может быть не более одного кванта, как и требуется принципом запрета Паули. Оператор a_k уничтожает квант в нормальной моде k , если он там уже был, или действие этого оператора дает нуль; аналогично,

оператор a_k^\dagger порождает квант в нормальной моде k , если только в ней не присутствует уже один квант, в противном случае оператор a^\dagger действует нулем. Много позже Фирц и Паули показали^{40а}, что выбор между коммутационными и антикоммутационными соотношениями диктуется только значением спина частицы: коммутаторы следует использовать для частиц с целым спином вроде фотона, антикоммутаторы — для частиц с полуцелым спином вроде электрона. (Иным способом это показано в гл. 5.)

Общая теория квантовых полей была впервые изложена в 1929 году в двух исчерпывающих статьях Гейзенберга и Паули⁴¹. Исходным пунктом их работы было применение канонического формализма к самим полям, а не к коэффициентам нормальных мод, содержащихся в этих полях. Гейзенберг и Паули рассмотрели лагранжиан L как интеграл по пространству от локальной функции полей и их пространственных и временных производных. Уравнения поля определялись из принципа стационарности действия $\int L dt$ при варьировании полей, а коммутационные соотношения определялись из предположения, что вариационная производная лагранжиана по любой из производных поля по времени ведет себя как сопряженный этому полю «импульс» (для фермионных полей коммутационные соотношения превращались в антикоммутационные). Гейзенберг и Паули применили общий формализм к электромагнитному и дираковскому полям и исследовали различные инвариантности и законы сохранения, включая законы сохранения заряда, импульса и энергии, а также лоренцовскую и калибровочную инвариантность.

Формализм Гейзенберга–Паули фактически совпадает с тем, который описан в гл. 7, так что сейчас можно ограничиться одним примером, который пригодится далее в этой главе. Лагранжиан свободного комплексного скалярного поля $\phi(x)$ имеет следующий вид:

$$L = \int d^3x \left[\dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - c^2 (\nabla \phi)^\dagger \cdot (\nabla \phi) - (mc^2/\hbar)^2 \phi^\dagger \phi \right]. \quad (1.2.26)$$

Если подвергнуть $\phi(x)$ бесконечно малой вариации $\delta\phi(x)$, то лагранжиан изменится на величину

$$\begin{aligned} \delta L = \int d^3x [& \dot{\phi}^\dagger \delta\dot{\phi} + \dot{\phi} \delta\dot{\phi}^\dagger - c^2 \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \delta\phi - c^2 \nabla \phi \cdot \nabla \delta\phi^\dagger \\ & - (mc^2/\hbar)^2 \phi^\dagger \delta\phi - (mc^2/\hbar)^2 \phi \delta\phi^\dagger]. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

При использовании принципа наименьшего действия предполагается, что вариации полей исчезают на границах пространственно-временной области интегрирования. Таким образом, при вычислении изменения действия $\int L dt$ можно сразу же проинтегрировать по частям и записать:

$$\delta \int L dt = c^2 \int d^4x \left[\delta\phi^+ \left(\square - (mc^2/\hbar)^2 \right) \phi + \delta\phi \left(\square - (mc^2/\hbar)^2 \right) \phi^+ \right].$$

Но это выражение должно обращаться в нуль при любых $\delta\phi$ и $\delta\phi^+$, так что поле ϕ должно удовлетворять знакомому релятивистскому волновому уравнению

$$\left(\square - (mc^2/\hbar)^2 \right) \phi = 0 \quad (1.2.28)$$

и ϕ^+ -сопряженному уравнению. «Импульсы», канонически сопряженные полям ϕ и ϕ^+ , даются вариационными производными функции Лагранжа L по $\dot{\phi}$ и $\dot{\phi}^+$, которые легко находятся из (1.2.27):

$$\pi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}^+, \quad (1.2.29)$$

$$\pi^+ \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^+} = \dot{\phi}. \quad (1.2.30)$$

Эти полевые переменные удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям с дельта-функцией вместо дельта-символа Кронекера:

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi^+(\mathbf{x}, t), \phi^+(\mathbf{y}, t)] = -i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.2.31)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \phi^+(\mathbf{y}, t)] = [\pi^+(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (1.2.32)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\pi^+(\mathbf{x}, t), \pi^+(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi^+(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (1.2.33)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\phi^+(\mathbf{x}, t), \phi^+(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^+(\mathbf{y}, t)] = 0. \quad (1.2.34)$$

Здесь (как и в механике частиц) функция Гамильтона дается «суммой» всех канонических импульсов, умноженных на производные по времени соответствующих полей, минус функция Лагранжа:

$$H = \int d^3x [\pi\dot{\phi} + \pi^\dagger\dot{\phi}^\dagger] - L, \quad (1.2.35)$$

или, после подстановки (1.2.26), (1.2.29) и (1.2.30),

$$H = \int d^3x [\pi^\dagger\pi + c^2(\nabla\phi)^\dagger(\nabla\phi) + (m^2c^4/\hbar^2)\phi^\dagger\phi]. \quad (1.2.36)$$

После основополагающих работ Гейзенберга и Паули оставался еще один вопрос, который необходимо было разрешить, прежде чем квантовая теория поля смогла достичь окончательной предвоненной формы. Это было решение проблемы состояний с отрицательной энергией. В предыдущем разделе мы видели, что в 1930 году, как раз в то же время, когда появились работы Гейзенберга и Паули, Дирак предположил, что все состояния электрона с отрицательной энергией заполнены, а наблюдаемыми являются не сами эти электроны, а дырки в море состояний с отрицательной энергией. После того, как в 1930 году идея Дирака была наглядно подтверждена открытием позитрона, его «теория дырок» была использована для вычисления ряда процессов в низшем порядке теории возмущений, в том числе, процессов рождения электрон-позитронных пар и рассеяния электронов и позитронов на электронах.

В то же время было затрачено много усилий на развитие формализма, лоренцовская инвариантность которого была бы очевидной. Попыткой, оказавшей наибольшее влияние на дальнейшее развитие, был «многовременной» формализм Дирака, Владимира Фока и Бориса Подольского⁴², в котором вектор состояния был представлен волновой функцией, зависящей от пространственно-временных и спиновых координат всех электронов как с положительной, так и с отрицательной энергией. В рамках этого формализма сохраняется по-отдельности полное число электронов с положительной и отрицательной энергией; например, рождение электрон-позитронных пар описывается как возбуждение электрона с отрицательной энергией с переходом в состояние с положительной энергией, а аннигиляция электрона и позитрона описывается как обратный процесс. Такой многовременной формализм имел то преимущество, что был явно лоренц-инвариантным, но имел и ряд недостатков. В частности, была глубокая пропасть между описанием фотона в терминах квантованного электромагнитного поля и описанием электронов и позитронов. Правда, не все физики считали это неудобством; электронное поле,

в отличие от электромагнитного, не имело классического предела, так что были сомнения относительно его физического смысла. К тому же Дирак ^{42a} рассматривал поля как средства наблюдения частиц, так что он и не рассчитывал, что частицы и поля будут описываться одинаково. Хотя мне неизвестно, тревожило ли это кого-нибудь в те годы, но ведь в многовременном формализме был и более практический недостаток: этот формализм было трудно использовать при описании процессов типа β -распада ядра, в котором рождаются электрон и антинейтрино без сопровождающих позитрона и нейтрино. Осуществленное Ферми ⁴³ успешное вычисление энергетического спектра электронов в β -распаде следует расценивать как один из первых триумфов квантовой теории поля.

Ключевая идея, необходимая для демонстрации эквивалентности дираковской теории дырок и квантовой теории поля электрона, была высказана в 1933–1934 годах Фоком ^{43a}, а также Уэнделлом Фарри и Оппенгеймером ⁴⁴. Чтобы представить суть этой идеи с более современной точки зрения, предположим, что мы пытаемся построить электронное поле по аналогии с электромагнитным полем или полем Борна–Гейзенберга–Иордана (1.2.2). Так как электрон обладает зарядом, мы не можем, по-видимому, смешивать операторы уничтожения и рождения, и должны попытаться записать поле в виде:

$$\psi(x) = \sum_k u_k(\mathbf{x}) e^{-i\omega_k t} a_k, \quad (1.2.37)$$

где $u_k(\mathbf{x}) e^{-i\omega_k t}$ представляют полный набор ортонормированных решений уравнения Дирака (1.1.13) в виде плоских волн (индекс k теперь несет информацию о трехмерном импульсе, спине и знаке энергии):

$$\mathcal{H}u_k = \hbar\omega_k u_k, \quad (1.2.38)$$

$$\mathcal{H} \equiv -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \alpha_4 mc^2, \quad (1.2.39)$$

$$\int u_k^\dagger u_l d^3x = \delta_{kl}, \quad (1.2.40)$$

а a_k – соответствующие операторы уничтожения, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям Иордана–Вигнера (1.2.22)–(1.2.23). В соответствии с идеями «вторичного квантования» или канонической

процедуры квантования Гейзенберга и Паули ⁴¹ гамильтониан строится путем вычисления «среднего значения» H , причем «волновая функция» заменяется на квантованное поле (1.2.37):

$$H = \int d^3x \psi^\dagger \mathcal{H} \psi = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k. \quad (1.2.41)$$

Конечно, трудность заключается в том, что этот оператор не положителен — половина значений ω_k отрицательны, в то время как произведение $a_k^\dagger a_k$ может принимать только положительные значения 0 и 1 (см. формулы (1.2.24) и (1.2.25)). Для того, чтобы вылечить эту болезнь, Фарри и Оппенгеймер воспользовались идеей Дирака ⁴², что позитрон можно интерпретировать как отсутствие электрона с отрицательной энергией. Соотношения антикоммутации симметричны по отношению к операторам рождения и уничтожения, так что они определили операторы рождения и уничтожения позитрона как соответствующие операторы уничтожения и рождения электронов с отрицательной энергией:

$$b_k^\dagger \equiv a_k, \quad b_k \equiv a_k^\dagger \quad (\text{для } \omega_k < 0), \quad (1.2.42)$$

где индекс k у b означает позитронную моду с импульсом и спином, противоположными этим величинам в электронной моде k . Дираковское поле (1.2.37) можно теперь записать в виде

$$\psi(x) = \sum_k^{(+)} a_k u_k(x) + \sum_k^{(-)} b_k^\dagger u_k(x), \quad (1.2.43)$$

где символы (+) и (–) означают суммы по нормальным модам k с энергиями $\omega_k > 0$ и $\omega_k < 0$, соответственно, а $u_k(x) \equiv u_k(\mathbf{x})e^{-i\omega_k t}$.

Аналогично, используя соотношения антикоммутации для операторов b , можно переписать оператор энергии (1.2.41) в следующем виде:

$$H = \sum_k^{(+)} \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k^{(-)} \hbar |\omega_k| b_k^\dagger b_k + E_0, \quad (1.2.44)$$

где E_0 — бесконечное c -число

$$E_0 = -\sum_k^{(-)} \hbar |\omega_k|. \quad (1.2.45)$$

Для того, чтобы подобное переопределение стало чем-то большим, чем простой формальностью, необходимо уточнить, что физический вакуум — это состояние Ψ_0 , не содержащее электронов или позитронов с положительной энергией:

$$a_k \Psi_0 = 0 \quad (\omega_k > 0), \quad (1.2.46)$$

$$b_k \Psi_0 = 0 \quad (\omega_k < 0). \quad (1.2.47)$$

Таким образом, из формулы (1.2.44) вытекает, что энергия вакуума равна E_0 . Если измерять все энергии относительно энергии вакуума E_0 , то физический оператор энергии равен $H - E_0$; из (1.2.44) следует, что это оператор *положителен*.

Проблема состояний с отрицательной энергией для заряженных частиц со спином нуль была также разрешена в 1934 году Паули и Вайскопфом⁴⁵ в работе, написанной отчасти как вызов дираковской картине заполненных состояний с отрицательной энергией. Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют в этом случае соотношениям коммутации, а не антикоммутации, поэтому невозможно просто поменять роль этих операторов, как это было сделано для фермионов. Вместо этого следует вернуться к каноническому формализму Гейзенберга и Паули⁴¹ с тем, чтобы решить, какие коэффициенты в разных нормальных модах являются операторами рождения или уничтожения.

Паули и Вайскопф разложили свободное заряженное скалярное поле на плоские волны в кубическом пространственном объеме $V \equiv L^3$:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} q(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (1.2.48)$$

с волновыми числами, ограниченными условиями периодичности: величины $k_j L / (2\pi)$ должны быть при $j = 1, 2, 3$ набором трех положительных или отрицательных целых чисел. Аналогично канонически сопряженная величина (1.2.29) разлагается в виде

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} p(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.2.49)$$

Здесь в показателе экспоненты поставлен знак минус, так что (1.2.29) принимает вид

$$p(\mathbf{k}, t) = \dot{q}^\dagger(\mathbf{k}, t). \quad (1.2.50)$$

Формулы Фурье-обращения имеют вид

$$q(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x \varphi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (1.2.51)$$

$$p(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x \pi(\mathbf{x}, t) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.2.52)$$

Поэтому для всех q и p выполняются канонические коммутационные соотношения (1.2.31)–(1.2.34):

$$[p(\mathbf{k}, t), q(\mathbf{l}, t)] = \frac{-i\hbar}{V} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} = -i\hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}, \quad (1.2.53)$$

$$\begin{aligned} [p(\mathbf{k}, t), q^\dagger(\mathbf{l}, t)] &= [p(\mathbf{k}, t), p(\mathbf{l}, t)] = [p(\mathbf{k}, t), p^\dagger(\mathbf{l}, t)] = \\ &[q(\mathbf{k}, t), q(\mathbf{l}, t)] [q(\mathbf{k}, t), q^\dagger(\mathbf{l}, t)] = 0, \end{aligned} \quad (1.2.54)$$

а также соотношения, получающиеся отсюда для эрмитово сопряженных величин. Подставляя (1.2.48) и (1.2.49) в формулу (1.2.36) для функции Гамильтона, можно выразить этот оператор через величины p и q :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} [p^\dagger(\mathbf{k}, t)p(\mathbf{k}, t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q^\dagger(\mathbf{k}, t)q(\mathbf{k}, t)], \quad (1.2.55)$$

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 \equiv c^2 \mathbf{k}^2 + (mc^2/\hbar)^2. \quad (1.2.56)$$

Производные по времени величин p определяются из уравнения Гамильтона

$$\dot{p}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\partial H}{\partial q(\mathbf{k}, t)} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 q^\dagger(\mathbf{k}, t) \quad (1.2.57)$$

(и ему сопряженного). С учетом (1.2.50) этот результат в точности эквивалентен волновому уравнению Клейна–Гордона–Шредингера (1.2.28).

Мы видим, что, как и в случае модели Борна, Гейзенберга и Иордана ⁴ 1926 года, свободное поле ведет себя как бесконечное число связанных гармонических осцилляторов. Паули и Вайскопфу удалось построить операторы p и q , удовлетворяющие коммутационным соотношениям (1.2.53)–(1.2.54) и «уравнениям движения» (1.2.50) и (1.2.57), введя операторы уничтожения и рождения a , b , a^\dagger и b^\dagger двух разных типов, соответствующих частицам и античастицам:

$$q(\mathbf{k}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} [a(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) - b^\dagger(\mathbf{k}) \exp(i\omega_{\mathbf{k}}t)], \quad (1.2.58)$$

$$p(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar}} [b(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) + a^\dagger(\mathbf{k}) \exp(i\omega_{\mathbf{k}}t)], \quad (1.2.59)$$

для которых

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l})] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}, \quad (1.2.60)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{l})] = [b(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})] = 0, \quad (1.2.61)$$

$$[a(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})] = [a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = 0. \quad (1.2.62)$$

Можно непосредственно убедиться в том, что эти операторы действительно удовлетворяют соотношениям (1.2.53), (1.2.54), (1.2.50) и (1.2.57). Поле (1.2.48) можно записать как

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} [a(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}}t) \\ - b^\dagger(-\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}}t)], \end{aligned} \quad (1.2.63)$$

а функция Гамильтона (1.2.55) принимает вид

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}} [b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})],$$

или, используя (1.2.60)–(1.2.62),

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} [b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})] + E_0, \quad (1.2.64)$$

где E_0 – бесконечно большое с-число

$$E_0 \equiv \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}. \quad (1.2.65)$$

Существование двух разных типов операторов a и b , равноправно входящих в гамильтониан, показывает, что построенная теория описывает два сорта частиц одной и той же массы. Как подчеркнули Паули и Вайскопф, эти две разновидности можно рассматривать как частицы и соответствующие античастицы, которые (если они заряжены) имеют противоположные заряды. Таким образом, как мы отмечали выше, бозоны со спином 0, так же, как и фермионы со спином 1/2, могут иметь свои античастицы, которые для бозонов невозможно интерпретировать как дырки в море частиц с отрицательной энергией.

Теперь можно выяснить, какие из операторов a и b или a^\dagger и b^\dagger являются операторами уничтожения, взяв среднее значение от коммутационных соотношений в состоянии вакуума Ψ_0 . Например, если a^\dagger_k были бы операторами уничтожения, то при действии на вакуумное состояние они давали бы нуль, так что среднее по вакууму от (1.2.60) равнялось бы

$$-||a(\mathbf{k})\Psi_0||^2 = (\Psi_0, [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})]\Psi_0) = +1, \quad (1.2.66)$$

в противоречии с требованием, чтобы левая часть равенства была отрицательной. Таким способом можно установить, что операторами уничтожения являются a_k и b_k , и поэтому

$$a(\mathbf{k})\Psi_0 = b(\mathbf{k})\Psi_0 = 0. \quad (1.2.67)$$

Это условие находится в согласии со всеми коммутационными соотношениями. Итак, канонический формализм вынуждает заключить, что коэффициент при $e^{+i\omega t}$ в выражении для поля (1.2.63) должен быть оператором рождения, как это получается и в формализме Фарри–Оппенгеймера⁴⁴ для частиц со спином 1/2.

Из уравнений (1.2.64) и (1.2.67) вытекает, что E_0 есть энергия вакуумного состояния. Если измерять все энергии относительно E_0 ,

то физическим оператором энергии станет оператор $H - E_0$, причем из (1.2.64) следует, что он положителен.

Как же обстоит дело с проблемой отрицательных вероятностей, которая стала отправной точкой в исследованиях Дирака? Как заметил Дирак, единственная плотность вероятности ρ , которую можно построить из решений свободного скалярного волнового уравнения Клейна–Гордона–Шредингера (1.2.28) и которая удовлетворяет закону сохранения в форме (1.1.10), должна быть пропорциональна величине

$$\rho = 2 \operatorname{Im} \left[\phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (1.2.68)$$

и поэтому не обязательно положительна. Аналогично, во «вторично-квантованной» теории, где ϕ определяется уравнением (1.2.63), ρ не является положительным оператором. Так как оператор $\phi^\dagger(x)$ не коммутирует с оператором $\phi(x)$, формулу (1.2.68) можно записать по-разному, причем все выражения будут отличаться на бесконечно большие c -числа. Оказывается удобным записать плотность ρ в виде

$$\rho = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \phi^\dagger - \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \phi \right]. \quad (1.2.69)$$

Интеграл по пространству от этого оператора легко вычисляется и равен

$$N \equiv \int \rho d^3x = \sum_{\mathbf{k}} (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})). \quad (1.2.70)$$

Очевидно, что он имеет собственные значения обоих знаков.

Однако в определенном смысле такая же проблема возникает и в квантовой теории поля частиц спина 1/2. Дираковский оператор плотности $\psi^\dagger\psi$ действительно положительный, но чтобы построить физическую плотность, мы должны вычесть вклад заполненных электронных состояний. В частности, пользуясь разложением на плоские волны (1.2.43), можно записать оператор полного числа частиц:

$$N \equiv \int d^3x \psi^\dagger\psi = \sum_{\mathbf{k}} {}^{(+)}a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} {}^{(-)}b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}).$$

Соотношения антикоммутирования для операторов b позволяют переписать это выражение как

$$N - N_0 = \sum_{\mathbf{k}} {}^{(+)}a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - \sum_{\mathbf{k}} {}^{(-)}b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}), \quad (1.2.71)$$

где N_0 – бесконечная постоянная,

$$N_0 = \sum_{\mathbf{k}} {}^{(-)}1. \quad (1.2.72)$$

Согласно (1.2.46) и (1.2.47) величина N_0 есть число частиц в вакууме, поэтому Фарри и Оппенгеймер сделали вывод, что оператор числа физических частиц есть $N - N_0$ и он может, как для поля спина нуль, иметь и положительные, и отрицательные собственные значения.

Предлагаемое квантовой теорией поля решение этой проблемы заключается в том, что ни величины Ψ у Фарри и Оппенгеймера, ни Φ у Паули и Вайскопфа не являются амплитудами вероятности, которые должны определять сохраняющиеся положительные плотности вероятности. Вместо этого физическое гильбертово пространство разлагается на состояния, определенные как состояния с заданным числом частиц и/или античастиц в каждой моде. Если Φ_n есть полный ортонормированный набор таких состояний, то измерение числа частиц в произвольном состоянии Ψ приведет к вероятности обнаружения системы в состоянии Φ_n , равной

$$P_n = |(\Phi_n, \Psi)|^2, \quad (1.2.73)$$

где (Φ_n, Ψ) есть обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве. Таким образом, для любого спина даже не возникает вопрос о возможности отрицательных вероятностей. Волновые поля Ψ , Φ , и т. д. — совсем не амплитуды вероятности, а *операторы*, рождающие или уничтожающие частицы в различных нормальных модах. Было бы хорошо, если бы вводящий в заблуждение термин «вторичное квантование» постепенно ушел бы на покой.

В частности, операторы N и $N - N_0$ в (1.2.70) и (1.2.71) должны интерпретироваться не как полные вероятности, а как операторы числа частиц, точнее, числа частиц *минус* число античастиц. Для заряженных частиц сохранение заряда приводит к тому, что операторы заряда пропорциональны операторам числа частиц, так что знак минус в (1.2.70) и (1.2.71) позволяет немедленно прийти к выводу, что заряды частиц и античастиц противоположны. В таком

теоретико-полевым формализме взаимодействия соответствуют слагаемым в гамильтониане третьего, четвертого или более высоких порядков по полевым переменным, а вероятности различных процессов получаются использованием этих операторов взаимодействия в зависящей от времени теории возмущений. Концепции, изложенные в предыдущих кратких замечаниях, будут служить основой для большей части материала этой книги.

Несмотря на очевидные преимущества, квантовая теория поля не сразу вытеснила теорию дырок. Обе точки зрения некоторое время сосуществовали, а при вычислениях вероятностей физических реакций использовались разные комбинации теоретико-полевого и дырочного подходов. Этот период ознаменовался расчетами в низшем порядке по степеням e^2 сечений разных процессов: $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ (1929 год, Клейн, Нишина ⁴⁶); $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ (1930 год, Дирак ⁴⁷); $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ (1932 год, Меллер ⁴⁸); $e^- + Z \rightarrow e^- + \gamma + Z$ и $\gamma + Z \rightarrow e^+ + e^- + Z$ (здесь Z означает кулоновское поле тяжелого атома) (1934 год, Бете, Гайтлер ⁴⁹); $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ (1936 год, Баба ⁵⁰). (Правила вычисления таких процессов сформулированы в гл. 8 и подробно проиллюстрированы на примере рассеяния фотона на электро-не.) Эти вычисления в низшем порядке теории возмущений давали конечные результаты, находившиеся в разумном согласии с экспериментальными данными.

Тем не менее, в 1930-е годы нарастало ощущение неудовлетворенности квантовой теорией поля (с учетом или без учета теории дырок). Одной из причин была очевидная неудача квантовой электродинамики при расчете проникающей способности заряженных частиц в ливнях космического излучения, отмеченная в 1936 году Оппенгеймером и Франклином Карлсоном ^{50a}. Другой причиной неудовлетворенности, оказавшейся связанной с первой, было постоянное открытие новых сортов частиц и взаимодействий. Мы уже упоминали электрон, фотон, позитрон, нейтрино, и, конечно, ядро атома водорода — протон. В 1920-е годы было распространено мнение, что более тяжелые ядра состоят из протонов и электронов, однако было трудно понять, как легкая частица вроде электрона могла удерживаться внутри ядра. Еще одна серьезная трудность, связанная с такой картиной, была отмечена в 1931 году Эренфестом и Оппенгеймером ⁵¹: для того, чтобы ядро обычного азота ^{14}N имело атомный номер 7 и массовое число 14, оно должно было состоять из 14 протонов и 7 электронов и поэтому быть фермионом,

что противоречило полученному методами молекулярной спектроскопии⁵² выводу, что ^{14}N — бозон. Эта (и другие) проблема решилась после открытия в 1932 году нейтрона⁵³ и гипотезы Гейзенберга⁵⁴, что ядра состоят из протонов и нейтронов, а не из протонов и электронов. Было очевидно, что для удержания ядра между нейтронами и протонами должны действовать большие неэлектромагнитные короткодействующие силы.

После успеха фермиевской теории β -распада ряд авторов^{54a} высказывал предположения, что в рамках этой теории ядерные силы можно было бы объяснить как результат обмена электронами и нейтрино. Несколькими годами спустя, в 1935 году Хидеки Юкава предложил совершенно новую квантовую теорию поля для описания ядерных сил⁵⁵. В рамках полностью классического описания он нашел, что взаимодействие скалярного поля с нуклонами (протонами и нейтронами) должно было бы порождать нуклон-нуклонный потенциал, зависящий от расстояния между этими частицами как

$$V(r) \propto \frac{1}{r} \exp(-\lambda r), \quad (1.2.74)$$

а не как $1/r$ в случае кулоновского потенциала между электрическими зарядами. Величина λ была введена в уравнение скалярного поля Юкавы как параметр; проквантовав это поле, Юкава обнаружил, что оно описывает частицы массой $\hbar/(\lambda c)$. Взяв наблюдаемый радиус сильного взаимодействия между нуклонами, Юкава сумел оценить, что $\hbar/(\lambda c)$ порядка 200 масс электрона. В 1937 году такие «мезоны» были обнаружены в опытах с пузырьковыми камерами⁵⁶ Сетом Неддермейером и Андерсоном, а также Джабезом Карри Стритом и Эдвардом Карлом Стивенсоном. По общему мнению, это и были гипотетические частицы Юкавы.

Открытие мезонов подтвердило, что в космическом излучении заряженными частицами могут быть не только электроны, и поэтому проблема, тревожившая Оппенгеймера и Карлсона, была снята. Однако это открытие породило новые трудности. Лотар Нордхейм^{56a} отметил в 1939 году, что те же самые сильные взаимодействия, за счет которых мезоны множественно рождаются в верхних слоях атмосферы (и которые требуются теорией Юкавы) должны приводить к поглощению мезонов в нижних слоях атмосферы, что противоречило наблюдавшемуся большому количеству этих мезонов на малых

высотах. В 1947 году в эксперименте Марчелло Конверси, Этторе Панчини и Оресте Пиччиони⁵⁷ было показано, что те мезоны, которые преобладают в космическом излучении на малых высотах, на самом деле слабо взаимодействуют с нуклонами и поэтому не могут быть сопоставлены частицам Юкавы. Эта загадка разрешилась после теоретического предположения⁵⁸, а затем и экспериментального подтверждения⁵⁹ Чезаре Латгеса, Оккиалини и Сесила Пауэлла, что на самом деле существуют два типа мезонов с несколько различающимися массами: более тяжелый (его сейчас называют π -мезоном или пионом) способен сильно взаимодействовать и выполняет роль переносчика ядерных сил, предсказанную Юкавой; более легкий (называемый сейчас мюоном) способен только к слабым или электромагнитным взаимодействиям и преобладает в космическом излучении на уровне моря, возникая как результат распада пионов. В том же 1947 году в космическом излучении были найдены совершенно новые типы частиц, известные сейчас как K -мезоны и гипероны (Джордж Рочестер и Клиффорд Батлер⁶⁰.) С 1947 года и вплоть до наших дней продолжается открытие ужасающего количества частиц все новых разновидностей, однако продолжение рассказа об этом увело бы нас далеко в сторону от предмета рассмотрения. Все эти открытия ясно показали, что любая концептуальная основа, ограниченная фотонами, электронами и позитронами, была бы слишком узкой для того, чтобы серьезно рассматриваться как фундаментальная теория. Но еще более важной оказалась чисто теоретическая проблема бесконечностей.

1.3. Проблема бесконечностей

Квантовая теория поля имеет дело с полями $\Psi(x)$, уничтожающими и рождающими частицы в пространственно-временной точке x . Предыдущий опыт обращения с классической теорией электрона предупреждает, что точечный электрон обладает бесконечной собственной электромагнитной массой. В случае поверхностного распределения заряда по сфере радиусом a эта масса равна $e^2/(6\pi a c^2)$ и расходится при $a \rightarrow 0$. К сожалению, та же проблема с еще большей остротой встала в первые же дни существования квантовой теории поля, и хотя ее удалось в значительной степени смягчить последующими улучшениями теории, она так и остается с нами по сей день.

Проблема бесконечностей в квантовой теории поля была, по-видимому, впервые отмечена в работах Гейзенберга и Паули 1929–1930 годов ⁴¹ Вскоре появление бесконечностей было подтверждено при вычислениях электромагнитной собственной энергии связанного электрона Оппенгеймером ⁶¹ и свободного электрона Айваром Валлером ⁶². Они использовали обычную теорию возмущений второго порядка с промежуточными состояниями, включавшими электрон и фотон. Например, сдвиг энергии электрона E_n на n -ом энергетическом уровне атома водорода определяется формулой:

$$\Delta E_n = \sum_{m,\lambda} \int d^3k \frac{|\langle m; \mathbf{k}, \lambda | H' | n \rangle|^2}{E_n - E_m - |\mathbf{k}|c}, \quad (1.3.1)$$

где суммы и интеграл берутся по всем промежуточным состояниям электрона m , спиральностям фотона λ и импульсам фотона \mathbf{k} , а H' - слагаемое в гамильтониане, описывающее взаимодействие излучения и электронов. Подобное вычисление дает формально бесконечную собственную энергию; более того, если устранить эту бесконечность путем отбрасывания всех промежуточных состояний с волновыми числами фотонов большими $1/a$, то собственная энергия при $a \rightarrow 0$ ведет себя как $1/a^2$. Бесконечности такого рода часто называют ультрафиолетовыми расходимостями, так как они возникают от промежуточных состояний, содержащих частицы очень коротких длин волн.

Во всех таких вычислениях электрон рассматривался по правилам первоначальной теории Дирака без заполненных состояний с отрицательной энергией. Несколькоми годами спустя Вайскопф повторил вычисления собственной массы электрона в рамках новой дырочной теории с полностью занятыми состояниями с отрицательной энергией. В этом случае во втором порядке теории возмущений возникает дополнительное слагаемое, которое на языке теории без дырок может быть описано как возникающее от процессов, в которых электрон в конечном состоянии сначала рождается из вакуума вместе с фотоном и позитроном, а последний затем аннигилирует с начальным электроном. Сначала Вайскопф получил зависимость $1/a^2$ от величины обрезания волнового числа фотонов $1/a$. В то же время (по предложению Бора) аналогичные вычисления были сделаны Карлсоном и Фарри. Увидев результаты Вайскопфа, Фарри понял, что хотя Вайскопф и учел то электростатическое слагаемое, которым

пренебрегли он и Карлсон, но допустил ошибку при вычислении вклада магнитной собственной энергии. Узнав об этом от Фарри, Вайскопф исправил свою ошибку и обнаружил, что все члены порядка $1/a^2$ в полном сдвиге массы сократились! Однако, несмотря на это сокращение, бесконечность сохранилась: при обрезании по волновому числу величиной $1/a$ собственная масса оказалась равной⁶³

$$m_{\text{эм}} = \frac{3\alpha}{2\pi} m \ln\left(\frac{\hbar}{mca}\right), \quad (1.3.2)$$

Ослабление зависимости от обрезания, принявшей вид $\ln a$ по сравнению с классической зависимостью $1/a$ или ранней квантовой зависимостью $1/a^2$, было воспринято в свое время как обнадеживающий признак и оказалось очень важным позднее при развитии теории перенормировок.

В 1933 году, по-видимому, Дирак⁶⁴ обнаружил возникновение бесконечности совсем другого типа. Он рассмотрел влияние внешнего статического заряда почти однородной плотности $\epsilon(\mathbf{x})$ на вакуум, т. е. на электроны с отрицательной энергией, находившиеся в рамках теории дырок в заполненных энергетических состояниях. Кулоновское взаимодействие между $\epsilon(\mathbf{x})$ и плотностью заряда электронов отрицательной энергии приводит к «поляризации вакуума» с индуцированной плотностью заряда

$$\delta\epsilon = A\epsilon + B\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \nabla^2\epsilon + \dots \quad (1.3.3)$$

Константа B конечна и порядка α . В то же время, константа A логарифмически расходится как $\alpha \ln a$, где $1/a$ – величина обрезания по волновому числу.

Похоже, что бесконечности возникали и в связанной с предыдущей задаче рассеяния света на свете. Ганс Эйлер, Бернард Кокель и Гейзенберг⁶⁵ показали в 1935–1936 годах, что эти бесконечности можно устранить, используя более или менее произвольное предписание, ранее предложенное Дираком⁶⁶ и Гейзенбергом⁶⁷. Они вычислили эффективную плотность лагранжиана для нелинейных электродинамических процессов, порождаемых виртуальными электрон–позитронными парами,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{e^4\hbar}{360\pi^2 m_e^4 c^7} \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] + \dots, \quad (1.3.4)$$

справедливую при частотах $\nu \ll m_e c^2 / \hbar$. Вскоре Николас Кеммер и Вайскопф⁶⁸ высказали соображения, что в этом случае бесконечности фиктивны, и что выражение (1.3.4) можно вывести без всяких вычитательных предписаний.

Ярким лучом в борьбе с бесконечностями было успешное рассмотрение инфракрасных расходимостей, возникающих не от высокоэнергетической, а от низкоэнергетической области интегрирования. В 1937 году Феликс Блох и Арне Нордсик показали^{68a}, что эти бесконечности сокращаются, если учесть процессы с излучением произвольного числа фотонов низкой энергии. В современных терминах эта проблема будет обсуждаться в гл. 13.

Наконец, еще одна бесконечность возникла в 1939 году в вычислениях Сидни Майклом Данковым⁶⁹ радиационных поправок к рассеянию электрона статическим кулоновским полем атома. Вычисление содержало ошибку (было пропущено одно слагаемое), но это стало понятно только позднее^{69a}.

В 1930-е годы все эти бесконечности не воспринимались лишь как неудачи конкретных вычислений. Скорее, они указывали на пробел в понимании фундаментальных основ релятивистской квантовой теории поля, что только подчеркивалось упомянутыми в предыдущем разделе проблемами с космическим излучением.

Одним из симптомов этого непреходящего пессимизма было продолжавшееся все 30-е и 40-е годы использование альтернативных схем. Как вспоминал позднее Джулиан Швингер^{69b}, «основным занятием большинства вовлеченных в эти проблемы физиков был не анализ и тщательное применение известной релятивистской теории взаимодействующих электронного и электромагнитного полей, а попытки изменить ее». Так, в 1938 году Гейзенберг⁷⁰ предположил существование фундаментальной длины L , аналогичной фундаментальному кванту действия \hbar и фундаментальной скорости c . По предположению, теория поля была применима только на расстояниях, больших L , так что все расходящиеся интегралы эффективно должны были обрезаться на расстояниях порядка L , или на импульсах порядка \hbar/L . Чтобы придать теории поля нелокальную структуру, было высказано несколько специальных предположений. Некоторые теоретики стали подозревать, что формализм векторов состояний и квантовых полей должен быть заменен на другой, основанный исключительно на наблюдаемых величинах, типа введенной в 1937 году

Джоном Арчибалдом Уилером ⁷¹ и Гейзенбергом ⁷² S -матрицы, элементы которой равны амплитудам различных процессов рассеяния. Как мы увидим, понятие S -матрицы стало жизненно необходимой частью современной квантовой теории поля, а для некоторых теоретиков чистая теория S -матрицы стала идеалом, особенно как возможное решение проблем сильных взаимодействий ⁷³. Рассуждая в несколько ином направлении, Уилер и Ричард Фейнман ⁷⁴ попытались в 1945 году исключить электромагнитное поле, выводя электромагнитные взаимодействия из действия на расстоянии. Им удалось показать, что полностью запаздывающий (или опережающий) потенциал можно получить, если учесть не только взаимодействие между источником и пробными зарядами, но и между этими зарядами и всеми другими зарядами во вселенной. Возможно, наиболее радикальной модификацией квантовой механики, предложенной в эти годы, было введение Дираком ⁷⁵ состояний с отрицательной вероятностью как средства сокращения бесконечностей в сумме по состояниям. Эта идея *индефинитной метрики* в гильбертовом пространстве получила развитие и в квантовой теории поля, хотя и не в оригинальной форме.

В 1930-е годы в воздухе носилась и более консервативная идея о том, как обращаться с бесконечностями. Возможно, все эти бесконечности могли быть поглощены в переопределении или *перенормировке* параметров теории. Например, уже было известно, что в любой лоренц-инвариантной классической теории электромагнитные собственная энергия и собственный импульс электрона *должны* иметь форму поправок к массе электрона. Отсюда, бесконечности в этих величинах можно было сократить с «голой» неэлектромагнитной массой электрона, получив конечную измеримую «перенормированную» массу. Кроме того, уравнение (1.3.3) показывает, что поляризация вакуума изменяет заряд электрона от величины, равной интегралу $e \equiv \int d^3x \cdot \epsilon$, до величины

$$e_{\text{полный}} = \int d^3x (\epsilon + \delta\epsilon) = (1 + A)e. \quad (1.3.5)$$

Поляризация вакуума приводит к конечным результатам в низшем порядке, если наблюдаемые величины типа сечений рассеяния выражены через $e_{\text{полный}}$, а не через e . Вопрос заключался в том, все ли бесконечности в квантовой теории поля можно устранить подобным образом. В 1936 году Вайскопф ⁷⁶ предположил, что дело обстоит

именно так, и на ряде простых примеров убедился, что известные бесконечности могут быть устранены перенормировкой физических параметров. Однако при существовавшей тогда вычислительной технике было невозможно показать, что бесконечности всегда можно устранить подобным образом, а пример Данкова⁶⁹, казалось, подтверждал, что этого сделать нельзя.

Другим результатом, связанным с появлением бесконечностей, стала тенденция полагать, что всякий эффект, который оказывался бесконечным в рамках квантовой теории поля, на самом деле не имеет места. В частности, в дираковской теории 1928 года предсказывалось полное вырождение уровней $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ атома водорода во всех порядках по α . Всякая попытка расчета расщепления этих двух уровней в рамках квантовой электродинамики сводилась к проблеме бесконечной собственной энергии связанного электрона. Поэтому реальное существование такого расщепления не воспринималось всерьез. Позднее Бете⁸⁰ вспоминал, что «этот сдвиг оказывался бесконечным во всех существовавших теориях и поэтому просто игнорировался». Такое отношение сохранялось даже в конце 1930-х годов, когда спектроскопические эксперименты стали давать прямые указания на существование расщепления $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ уровней порядка 1000 МГц. Заметным исключением стал Эдвин Альбрехт Юлинг⁷⁸, который понял, что упомянутый выше эффект поляризации вакуума должен приводить к расщеплению уровней $2s_{1/2}-2p_{1/2}$. К сожалению, как мы увидим в гл. 14, этот вклад в расщепление много меньше 1000 МГц и к тому же имеет неправильный знак.

Туман, окутывавший квантовую теорию поля, начал рассеиваться вскоре после второй мировой войны. В течение 1–4 июня 1947 года в местечке Шелтер Айленд, штат Нью Йорк, проходила конференция по основам квантовой механики, на которую собрались как физики–теоретики, работавшие над проблемами квантовой теории поля еще в 30-е годы, так и ученые молодого поколения, начавшие научную работу во время войны. Что особенно важно, среди участников было и несколько физиков–экспериментаторов. Лидерами дискуссии стали Ганс Крамерс, Оппенгеймер и Вайскопф. Один из экспериментаторов (или, скорее, теоретик, ставший экспериментатором), Уиллис Лэмб, рассказал об убедительном опыте по измерению сдвига уровней энергии $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ в водороде⁷⁹. Пучок атомов водорода от источника, содержащий много атомов в $2s$ - и $2p$ -состояниях, направлялся на детектор, чувствительный только

к атомам в возбужденном состоянии. Атомы в $2p$ -состояниях очень быстро распадались, переходя в основное $1s$ состояние с испусканием одного фотона (α -линия Лаймана), в то время, как $2s$ -состояния могли только медленно распадаться с испусканием двух фотонов. В результате детектор измерял число атомов в метастабильном $2s$ состоянии. Пучок проходил через магнитное поле, благодаря которому к любому имеющемуся сдвигу уровней $2s_{1/2}-2p_{1/2}$ добавлялся известный зеемановский сдвиг. Кроме того, на пучок накладывалось микроволновое электромагнитное поле с фиксированной частотой $\nu \sim 10$ ГГц. При определенной напряженности магнитного поля наблюдалось резкое уменьшение сигнала детектора, свидетельствовавшее о том, что микроволновое поле породило резонансные переходы из метастабильного $2s$ -состояния в $2p$ -состояние, а затем — в основное состояние за счет быстрого перехода с испусканием лаймановской α -линии. При заданной величине магнитного поля полное расщепление уровней $2s-2p$, включавшее зеемановское расщепление и собственно сдвиг между уровнями, должно было равняться $h\nu$. Отсюда можно было извлечь величину расщепления уровней. Было объявлено предварительное значение сдвига, равное 1000 МГц и находившееся в согласии с более ранними спектроскопическими измерениями⁷⁷. Последствия этого открытия нашли отражение в изречении, которое я слышал в Копенгагене в 1954 году, когда проходил там аспирантуру: «Не следует говорить, что нечто равно нулю только потому, что оно равно бесконечности!»

Открытие лэмбовского сдвига вызвало глубокий интерес у теоретиков, собравшихся в Шелтер Айленде, тем более, что многие из них уже работали над улучшением формализма расчетов в квантовой электродинамике. Крамерс доложил свою работу о перенормировке массы в классической электродинамике протяженного электрона^{79a}, в которой показал, что трудности, связанные с расходимостью собственной энергии в пределе нулевого радиуса, не возникают в явном виде, если записать теорию в виде, где массовый параметр отождествлен с экспериментально наблюдаемой массой электрона. Швингер и Вайскопф (до которых уже дошли слухи о результате Лэмба) обсуждали ситуацию по дороге в Шелтер Айленд и высказали предположение, что поскольку, как было известно, учет промежуточных состояний, включающих позитроны, уменьшает расходимость выражений для сдвигов уровней энергии с $1/a^2$ до $\ln a$, то не может ли случиться, что учет этих проме-

жуточных состояний делает *разности* сдвигов атомных уровней конечными. (На самом деле, в 1946 году, еще до того, как Вайскопф узнал об опыте Лэмба, он предложил эту задачу своему аспиранту Брайсу Френчу.) Почти сразу же после конференции, в поезде, идущем в Скенектеди, Ганс Бете⁸⁰ проделал нерелятивистское вычисление, все еще не учитывавшее эффекты, связанные с наличием позитронных промежуточных состояний, но использовавшее для устранения бесконечностей простой метод обрезания импульсов виртуальных фотонов величиной порядка $m_e c$. Бете получил вселявшее надежду приближенное значение сдвига, равное 1040 МГц. Вскоре рядом авторов⁸¹ были выполнены полностью релятивистские вычисления, использующие для устранения бесконечностей идею перенормировок. Эти вычисления привели к блестящему согласию с экспериментом.

На конференции в Шелтгер Айленде был доложен и другой взволновавший всех экспериментальный результат Исидора Раби. Проведенные в его лаборатории измерения сверхтонкой структуры водорода и дейтерия показали⁸², что магнитный момент электрона отличается от предсказываемого дираковского значения $e\hbar/2mc$ на множитель, равный примерно 1,0013. Последующие измерения гиромангнитных отношений в натрии и галлии привели к еще более точному значению⁸³

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} (1,00118 \pm 0,00003).$$

Узнав об этих результатах, Грегори Брейт предположил^{83а}, что отклонения возникают в результате радиационных поправок порядка α к магнитному моменту электрона. На конференции и Брейт, и Швингер доложили о своих попытках рассчитать эту поправку. Вскоре после конференции Швингер успешно завершил расчет величины аномального магнитного момента электрона⁸⁴, получив значение

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) = \frac{e\hbar}{2mc} \cdot 1,001162,$$

находившееся в прекрасном согласии с экспериментом. Этот результат наряду с расчетом лэмбовского сдвига, выполненными Бете, убедили наконец физиков в реальности радиационных поправок.

Применявшиеся в это время математические методы вычислений представляли собой дикую смесь концепций и формализмов. Один из подходов, развитый Швингером⁸⁵, был основан на операторных методах и принципе наименьшего действия. Этот подход был доложен на последовавшей за Шелтер Айлендом конференции в Поконо Манор в 1948 году. Другой лоренц-инвариантный операторный формализм был еще раньше построен Синитиро Томонагой⁸⁶ с сотрудниками в Японии, но эта работа сначала не была известна на Западе. Еще в 1930-е годы Томонага столкнулся с бесконечностями в мезонной теории Юкавы. В 1947 году он и его коллеги все еще находились вне общего круга научных связей: об опыте Лэмба они узнали из статьи в журнале *Newsweek*.

Внешне совершенно иной подход был предложен Фейнманом⁸⁷. Он коротко доложил о нем на конференции в Поконо. Вместо того, чтобы вводить квантовополевые операторы, Фейнман представил S -матрицу в виде функционального интеграла от $\exp(iW)$, где W — интеграл действия для совокупности дираковских частиц, взаимодействующих с *классическим* электромагнитным полем, взятый по всем траекториям дираковских частиц, удовлетворяющим при $t \rightarrow \pm\infty$ определенным граничным условиям.

Одним из результатов работы Фейнмана, получившим необычайное практическое значение, была формулировка системы графических правил для вычисления элементов S -матрицы в любом желаемом порядке теории возмущений. В противоположность старой теории возмущений 1920–1930 годов, эти фейнмановские правила автоматически учитывали одновременно процессы рождения частиц и аннигиляции античастиц и приводили к результатам, которые на каждом этапе вычислений были лоренц-инвариантными. На примере вычисления Вайскопфом собственной энергии электрона⁶³ мы уже видели, что природа возникающих бесконечностей становится понятной только, когда частицы и античастицы рассматриваются на равных основаниях.

Наконец, в двух статьях 1949 года Фримен Дайсон⁸⁸ показал, что операторные формализмы Швингера и Томонаги приводят к тем же самым графическим правилам, которые нашел Фейнман. Дайсон проанализировал также бесконечности, возникающие в произвольных диаграммах Фейнмана, и наметил доказательство того, что все они относятся к тому типу, который может быть устранен при перенормировке. Одним из самых поразительных результатов, вытекав-

ших из анализа Дайсона, был критерий того, какие квантовые теории поля относятся к разряду «перенормируемых», в том смысле, что все бесконечности могут быть поглощены переопределением *конечного* числа констант связи и масс. В частности, взаимодействие паулиевского типа (1.1.32), которое могло бы привести к изменению предсказываемого значения магнитного момента электрона, нарушило бы перенормируемость квантовой электродинамики. С выходом в свет статьи Дайсона наконец-то появился единый систематический формализм, который мог быть легко изучен физиками и обеспечивал общий язык для последующих приложений квантовой теории поля к задачам физики.

Я не могу расстаться с рассказом о бесконечностях, не упомянув об одном удивительном аспекте этой истории. Еще в 1930 году Оппенгеймер заметил, что основная ультрафиолетовая расходимость в собственной энергии связанного электрона сокращается, если взять разность сдвигов двух атомных уровней энергии. Позднее, в 1934 году Вайскопф нашел, что большая часть расходимости собственной энергии свободного электрона сокращается, если включить в рассмотрение промежуточные состояния, содержащие позитроны. Уже в 1934 году было вполне естественным полагать, что включив позитронные промежуточные состояния и найдя разность сдвигов уровней для пары атомных состояний, можно полностью устранить ультрафиолетовую расходимость в относительном сдвиге уровней энергии*. Были и экспериментальные свидетельства⁷⁷ существования сдвига уровней $2s_{1/2}-2p_{1/2}$, равного примерно 1000 МГц. Так почему же никто из теоретиков до 1947 года не попытался *численно* оценить эту разность уровней энергии?

Строго говоря, одна такая попытка была в 1939 году^{88a}, но внимание было сфокусировано не на той части задачи на вычислении зарядового радиуса протона, что весьма мало влияет на уровни энергии атома водорода. Расчет привел к грубому согласию с ранними экспериментами⁷⁷. Однако, как в 1939 году показал Лэмб, это было ошибкой.

* На самом деле, такая догадка неверна. Как обсуждается в разделе 14.3, радиационные поправки к массе электрона влияют на сдвиг атомных уровней не только через сдвиг энергии покоя электрона, который одинаков для всех уровней, но и через изменение кинетической энергии электрона, меняющейся от одного уровня к другому.

Полностью релятивистское вычисление лэмбовского сдвига, учитывающее позитроны в промежуточных состояниях, можно было бы сделать и в 1930-е годы, используя старую нерелятивистскую теорию возмущений. Пока удерживаются все слагаемые до данного порядка, старомодная теория возмущений приводит к тем же результатам, что и строго релятивистские расчеты с помощью формализмов Фейнмана, Швингера и Томонаги. На самом деле, первый после работы Бете точный расчет лэмбовского сдвига, выполненный в США Френчем и Вайскопфом и Норманом Кроллом и Лэмбом, был сделан именно таким способом, хотя группа Томонаги⁸¹ уже применяла ковариантные методы расчетов для решения этой и других задач.

То, чего нехватало ученым, — это уверенности в схеме перенормировок как средства обращения с бесконечностями. Как мы видели, перенормировки широко обсуждались в конце 30-х годов. Но в это время считалось общепринятым (такую точку зрения особенно подчеркивал Оппенгеймер⁸⁹) что при энергиях, превышающих 100 МэВ, квантовую электродинамику нельзя воспринимать всерьез, и что решение ее проблем может быть найдено с помощью совершенно новых неожиданных идей.

На конференции в Шелтер Айленде произошло несколько событий, изменивших такую точку зрения. Одним из них было сообщение, что обсуждавшиеся в предыдущем разделе проблемы, касающиеся космического излучения, находят свое разрешение: Роберт Маршак высказал гипотезу⁵⁸ о существовании двух мезонов с близкими массами — мюонов, которые и наблюдались на опыте, и пионов, ответственных за ядерные силы. Еще важнее было получение достаточно точных значений лэмбовского сдвига и аномального магнитного момента электрона, что заставило физиков внимательно обдумать всю проблему радиационных поправок. Возможно, не менее существенным было и то, что на конференции собрались теоретики, имевшие свои оригинальные взгляды на перенормировку как решение проблемы бесконечностей. Когда в конце 1940-х годов случилась революция, она была совершена в основном молодыми физиками. Несмотря на возраст, эти ученые сыграли консервативную роль, отказавшись от поисков радикальных решений, которыми занимались их предшественники.

Библиография

Aramaki, S. Development of the Renormalization Theory in Quantum Electrodynamics. *Historia Scientiarum*, **36**, 97 (1989); *ibid.* **37**, 91 (1989). [Раздел 1.3]

Beyer, R.T., ed. *Foundations of Nuclear Physics* (Dover Publications, Inc., New York, 1949). [Раздел 1.2]

Brown, L. Yukawa's Prediction of the Meson. *Centauros*, **25**, 71 (1981). [Раздел 1.2]

Brown, L.M. and Hoddeson, L., eds. *The Birth of Particle Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1983). [Разделы 1.1-1.3]

Cao, T.Y. and Schweber, S.S. «The Conceptual Foundations and the Philosophical Aspects of Renormalization Theory». *Synthese*, 97, 33 (1933). [Раздел 1.3]

Dirac, P.A.M. *The Development of Quantum Theory* (Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1971). [Раздел 1.1]

Fermi, E. Quantum Theory of Radiation. *Rev. Mod. Phys.* **4**, 87 (1932). [Разделы 1.2 и 1.3]

Gamov, G.A. *Thirty Years that Shook Physics* (Doubleday and Co., Garden City, New York, 1966). [Раздел 1.1]

Jammer, M. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. (McGraw Hill Book Co., New York, 1966). [Раздел 1.1] (Имеется русский перевод: Джеммер М. *Эволюция понятий квантовой механики*. М., Наука, 1985.)

Mehra, J. «The Golden Age of Theoretical Physics: P.A.M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933», in: *Aspects of Quantum Theory*, ed. by A. Salam and E.P. Wigner (Cambridge University Press, Cambridge, 1972). [Раздел 1.1]

Miller, A.I. *Early Quantum Electrodynamics — A Source Book* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994). [Разделы 1.1, 1.2, 1.3]

Pais, A. *Inward Bound* (Clarendon Press, Oxford, 1986). [Разделы 1.1, 1.2, 1.3]

Schweber, S.S. «Feynman and the Visualization of Space-Time Processes», *Rev. Mod. Phys.*, **58**, 449 (1986). [Раздел 1.3]

Schweber, S.S. «Some Chapters for a History of Quantum Field Theory: 1938-1952», in: *Relativity, Groups, and Topology II*, ed. by B.S. DeWitt and R. Stora (North-Holland, Amsterdam, 1984). [Разделы 1.1, 1.2, 1.3]

Schweber, S.S. «A Short History of Shelter Island I», in: *Shelter Island II*, ed. by R. Jackiw, S. Weinberg, and E. Witten (MIT Press, Cambridge, MA, 1985). [Раздел 1.3]

Schweber, S.S. *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga* (Princeton University Press, Princeton, 1994). [Разделы 1.1, 1.2, 1.3]

Schwinger, J., ed., *Selected Papers in Quantum Electrodynamics* (Dover Publications Inc., New York, 1958). [Разделы 1.2 и 1.3]

Tomonaga, S.-I. *The Physicist's Conception of Nature* (Reidel, Dordrecht, 1973). [Разделы 1.2 и 1.3]

Weinberg, S. «The Search for Unity: Notes for a History of Quantum Field Theory», *Daedalus*, Fall 1977. [Разделы 1.1, 1.2, 1.3]

Weisskopf, V.F. «Growing Up with Field Theory: The Development of Quantum Electrodynamics in Half a Century», 1979 Bernard Gregory lecture at CERN, published in: L. Brown and L. Hoddeson, op. cit. [Разделы 1.1, 1.2, 1.3]

Wentzel, G. «Quantum Theory of Fields (Until 1947)», in: *Theoretical Physics in the Twentieth Century*, ed. by M. Fierz and V.F. Weisskopf (Interscience Publishers Inc., New York, 1960). [Разделы 1.2 и 1.3]

Whittaker, E. A. *History of the Theories of Aether and Electricity* (Humanities Press, New York, 1973). [Раздел 1.1]

Список литературы

1. de Broglie, L., *Comptes Rendus*, **177**, 507, 548, 630 (1923); *Nature*, **112**, 540 (1923); Thèse de doctorat (Masson et Cie, Paris, 1924); *Annales de Physique*, **3**, 22 (1925) [reprinted in English in: *Wave Mechanics*, ed. by G. Ludwig (Pergamon Press, New York, 1968)]; *Phil. Mag.*, **47**, 446 (1924).
2. Elsasser, W., *Naturwiss.*, **13**, 711 (1925).
3. Davisson, C. J. and Germer, L. H., *Phys. Rev.*, **30**, 705 (1927).
4. Heisenberg, W., *A. Phys.*, **33**, 879 (1925); Born, M. and Jordan, P., *Z. f. Phys.*, **34**, 858 (1925); Dirac, P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **A109**, 642 (1925); Born, M., Heisenberg, W., and Jordan, P., *Z. f. Phys.*, **35**, 557 (1925); Pauli, W., *Z. f. Phys.*, **36**, 336 (1926). Эти работы перепечатаны в книге: *Sources of Quantum Mechanics*, ed. by B. L. van der Waerden (Dover Publications, Inc., New York, 1968).
5. Schrödinger, E., *Ann. Phys.*, **79**, 361, 489; **80**, 437; **81**, 109 (1926). Эти статьи перепечатаны в переводе на англ. к сожалению, в несколько сокращенном варианте, в книге *Wave Mechanics* (см. [1]). Кроме того см.: *Collected Papers on Wave Mechanics*, trans. by J. F. Scheerer and W. M. Deans (Blackie & Son, London, 1928).
6. См., например: Dirac, P. A. M., *The Development of Quantum Theory* (Gordon & Breach, New York, 1971). Кроме того, см. некролог Дирака о Шредингере: Dirac, P. A. M., *Nature*, **189**, 355 (1961), и статью: Dirac, P. A. M., *Scientific American*, **208**, 45 (1963).
7. Klein, O., *Z. f. Phys.*, **37**, 895 (1926). См. также: V. Fock, *Z. f. Phys.*, **38**, 242 (1926); *ibid*, **39**, 226 (1926).
8. Gordon, W., *Z. f. Phys.*, **40**, 117 (1926).

9. Детали вычислений см., например, в книге: Schiff, L.I., *Quantum Mechanics*, 3rd edn (McGraw Hill, Inc., New York, 1968), Section 51. (Есть рус. пер.: Шифф Л. *Квантовая механика*. М., ИЛ, 1957).
10. Pashen, F., *Ann. Phys.*, **50**, 901 (1916). Эти эксперименты реально были выполнены с использованием ионов He^+ , поскольку расстояние между уровнями тонкой структуры у них в 16 раз больше, чем у водорода. Впервые тонкая структура спектральных линий была обнаружена в интерферометрических опытах: Michelson, A.A., *Phil. Mag.*, **31**, 338 (1891); *ibid.*, **34**, 280 (1892).
- 10a. Sommerfeld, A., *Münchener Berichte* 1915, pp. 425, 429; *Ann. Phys.*, **51**, 1, 125 (1916). См. также: Wilson, W., *Phil. Mag.*, **29**, 795 (1915).
11. Uhlenbeck, G.E. and Goudsmit, S., *Naturwiss.*, **13**, 953 (1925); *Nature*, **117**, 264 (1926). Спин электрона был ранее введен из других соображений в работе: Compton, A.H., *J. Frank. Inst.*, **192**, 145 (1921).
12. Общая формула для зеемановского расщепления в одноэлектронных атомах была эмпирически установлена в работах: Landé, A., *Z. f. Phys.*, **5**, 231 (1921); *ibid.*, **7**, 398 (1921); *ibid.*, **15**, 189 (1923); *ibid.*, **19**, 112 (1923). В те времена дополнительный неорбитальный угловой момент, входящий в эту формулу, считался угловым моментом атомной «сердцевины»: Sommerfeld, A., *Ann. Phys.*, **63**, 221 (1920); *ibid.*, **70**, 32 (1923). Только позднее было установлено, что дополнительный угловой момент связан со спином электрона (см. ¹¹).
13. Heisenberg, W. and Jordan, P., *Z. f. Phys.*, **37**, 263 (1926); Darwin, C.G., *Proc. Roy. Soc.*, **A116**, 227 (1927). Дарвин утверждает, что несколько авторов сделали эту работу одновременно, в то время как Дирак цитирует только Дарвина.
14. Thomas, L.H., *Nature*, **117**, 514 (1926). См. также: Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972), Section 5.1.
15. Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **A117**, 610 (1928). По поводу применения этой теории к вычислению эффектов Зеемана и Паше-

- на-Бака, а также относительных интенсивностей линий внутри мультиплетов тонкой структуры см. также Dirac, *ibid.*, **A118**, 351 (1928).
16. По поводу вероятностной интерпретации нерелятивистской квантовой механики см.: Born, M., *Z. f. Phys.*, **37**, 863 (1926); *ibid.*, **38**, 803 (1926); Wentzel, G., *Z. f. Phys.*, **40**, 590 (1926); Heisenberg, W., *Z. f. Phys.*, **43**, 172 (1927); Bohr, N., *Nature*, **121**, 580 (1928); *Naturwissenschaften*, **17**, 483 (1929); *Electrons et Photons — Rapports et Discussions du V^e Conseil de Physique Solvay* (Gauthier-Villars, Paris, 1928).
 17. Беседа между Дираком и Дж. Мехрой 28 марта 1969 года, цитируется в книге: Mehra, J., *Aspects of Quantum Theory*, ed. by A. Salam and E.P. Wigner (Cambridge University Press, Cambridge, 1972).
 18. Gamow, G., *Thirty Years that Shook Physics* (Doubleday and Co., Garden City, NY, 1966), p. 125.
 19. Pauli, W., *Z. f. Phys.*, **37**, 263 (1926); **43**, 601 (1927).
 20. Darwin, C.G., *Proc. Roy. Soc.*, **A118**, 654 (1928); **A120**, 621 (1928).
 21. Gordon, W., *Z. f. Phys.*, **48**, 11 (1928).
 22. Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **A126**, 360 (1930); см. также [47].
 23. Stoner, E.C., *Phil. Mag.*, **48**, 719 (1924).
 24. Pauli, W., *Z. f. Phys.*, **31**, 765 (1925).
 25. Heisenberg, W., *Z. f. Phys.*, **38**, 411 (1926); **39**, 499 (1926); Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **A112**, 661 (1926); Pauli, W., *Z. f. Phys.*, **41**, 81 (1927); Slater, J.C., *Phys. Rev.*, **34**, 1293 (1929).
 26. Fermi, E., *Z. f. Phys.*, **36**, 902 (1926); *Rend. Accad. Lincei*, **3**, 145 (1926).
 27. Dirac, P.A.M., [25].

- 27a.** Dirac, P.A.M., First W.R. Crane Lecture at the University of Michigan, April 17, 1989, неопубликовано.
- 28.** Weyl, H., *Theory of Groups and Quantum Mechanics*, translated from the second (1931) German edition (Dover Publications, Inc., New York), Ch. IV, Section 12. См. также: Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **A133**, 61 (1931).
- 29.** Oppenheimer, J.R., *Phys. Rev.*, **35**, 562 (1930); Tamm, I., *Z. f. Phys.*, **62**, 545 (1930).
- 29a.** Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **133**, 60 (1931).
- 30.** Anderson, C.D., *Science*, **76**, 238 (1932); *Phys. Rev.*, **43**, 491 (1933).
- 30a.** Schwinger, J., A Report on Quantum Electrodynamics, in: *The Physicist's Conception of Nature* (Reidel, Dordrecht, 1973), p. 415.
- 31.** Pauli, W., *Handbuch der Physik* (Julius Springer, Berlin, 1932–1933); *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 203 (1941).
- 32.** Born, Heisenberg, and Jordan, [4], Section 3.
- 32a.** Ehrenfest, P., *Phys. Z.*, **7**, 528 (1906).
- 33.** Born and Jordan, [4].
- 34.** Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **A112**, 661 (1926), Section 5. Более понятный вывод дан в книге: Schiff, L.I., *Quantum Mechanics*, 3rd edn. (McGraw-Hill Book Company, New York, 1968), Section 44.
- 34a.** Einstein, A., *Phys. Z.*, **18**, 121 (1917).
- 35.** Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **A114**, 243 (1927).
- 36.** Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **A114**, 710 (1927).
- 36a.** Weisskopf, V.F. and Wigner, E.P., *Z. f. Phys.*, **63**, 54 (1930).

- 36b.** Fermi, E., *Lincei Rend.*, **9**, 881 (1929); **12**, 431 (1930); *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 87 (1932).
- 37.** Jordan, P. and Pauli, W., *Z. f. Phys.*, **47**, 151 (1928).
- 38.** Bohr, N. and Rosenfeld, L., *Kon. dansk. vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd.*, **XII**, No. 8 (1933); *Phys. Rev.*, **78**, 794 (1950).
- 39.** Jordan, P., *Z. f. Phys.*, **44**, 473 (1927). См. также: Jordan, P. and Klein, O., *Z. f. Phys.*, **45**, 751 (1929); Jordan, P., *Phys. Zeit.*, **30**, 700 (1940).
- 40.** Jordan, P. and Wigner, E., *Z. f. Phys.*, **47**, 631 (1928).
- 40a.** Fierz, M., *Helv. Phys. Acta*, **12** (1939); Pauli, W., *Phys. Rev.*, **58**, 716 (1940); Pauli, W. and Belinfante, F.J., *Physica*, **7**, 177 (1940).
- 41.** Heisenberg, W. and Pauli, W., *Z. f. Phys.*, **56**, 1 (1929); *ibid*, **59**, 168 (1930).
- 42.** Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **A136**, 453 (1932); Dirac, P.A.M., Fock, V.A., and Podolsky, B., *Phys. Zeit. der Sovjetunion*, **2**, 468 (1932); Dirac, P.A.M., *Phys. Zeit. der Sovjetunion*, **3**, 64 (1933). См. также Rosenfeld, L., *Z. f. Phys.*, **76**, 729 (1932).
- 43.** Fermi, E., *Z. f. Phys.*, **88**, 161 (1934). Ферми цитирует неопубликованную работу Паули, где высказывается предположение, что наряду с электроном в β -распаде испускается новая ненаблюдаемая нейтральная частица. Эта частица была названа нейтрино, чтобы отличить ее от недавно открытого нейтрона.
- 43a.** Fock, V., *C. R. Leningrad*, 1933, p. 267.
- 44.** Furry, W.H. and Oppenheimer, J.R., *Phys. Rev.*, **45**, 245 (1934). В этой статье используется формализм матрицы плотности, развитый в работе: Dirac, P.A.M., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **30**, 150 (1934). См. также: Peierls, R.E., *Proc. Roy. Soc.*, 146, 420 (1934); Heisenberg, W., *Z. f. Phys.*, **90**, 209 (1934); Rosenfeld, L., *Z. f. Phys.*, **76**, 729 (1932).

45. Pauli, W. and Weisskopf, V., *Helv. Phys. Acta*, **7**, 709 (1934). См. также: Pauli, W., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **6**, 137 (1936).
46. Klein, O. and Nishina, Y., *Z. f. Phys.*, **52**, 853 (1929); Nishina, Y., *ibid.*, 869 (1929). См. также: Tamm, I., *Z. f. Phys.*, **62**, 545 (1930).
47. Dirac, P.A.M., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **26**, 361 (1930).
48. Møller, C., *Ann. d. Phys.*, **14**, 351, 568 (1932).
49. Bethe, H. and Heitler, W., *Proc. Roy. Soc.*, **A146**, 83 (1934); см. также Racah, G., *Nuovo Cimento*, **11**, 7 (1934); *ibid.*, **13**, 69 (1936).
50. Bhabha, H.J., *Proc. Roy. Soc.*, **A154**, 195 (1936).
- 50a. Carlson, J.F. and Oppenheimer, J.R., *Phys. Rev.*, **51**, 220 (1937).
51. Ehrenfest, P. and Oppenheimer, J.R., *Phys. Rev.*, **37**, 333 (1931).
52. Heitler, W. and Herzberg, G., *Naturwiss.*, **17**, 673 (1929); Rasetti, F., *Z. f. Phys.*, **61**, 598 (1930).
53. Chadwick, J., *Proc. Roy. Soc.*, **A136**, 692 (1932).
54. Heisenberg, W., *Z. f. Phys.*, **77**, 1 (1932); см. также: Curie-Joliot, I. and Joliot, F., *Compt. Rend.*, **194**, 273 (1932).
- 54a. По поводу ссылок см. в работе: Brown, L.M. and Rechenberg, H., *Hist. Stud. in Phys. and Bio. Science*, **25**, 1 (1994).
55. Yukawa, H., *Proc. Phys.-Math. Soc. (Japan)* (3) **17**, 48 (1935).
56. Neddermeyer, S.H. and Anderson, C.D., *Phys. Rev.*, **51**, 884 (1937); Street, J.C. and Stevenson, E.C., *Phys. Rev.*, **52**, 1003 (1937).
- 56a. Nordheim, L. and Webb, N., *Phys. Rev.*, **56**, 494 (1939).
57. Conversi, M., Pancini, E., and Piccioni, O., *Phys. Rev.*, **71**, 209L (1947).

58. Sakata, S. and Inoue, T., *Progr. Theor. Phys.*, **1**, 143 (1946); Marshak, R.E. and Bethe, H.A., *Phys. Rev.*, **77**, 506 (1947).
59. Lattes, C.M.G., Occhialini, G.P.S., and Powell, C.F., *Nature*, **160**, 453, 486 (1947).
60. Rochester, G.D. and Butler, C.C., *Nature*, **160**, 855 (1947).
61. Oppenheimer, J.R., *Phys. Rev.*, **35**, 461 (1930).
62. Waller, I., *Z. f. Phys.*, **59**, 168 (1930); *ibid.*, **61**, 721, 837 (1930); *ibid.*, **62**, 673 (1930).
63. Weisskopf, V.F., *Z. f. Phys.*, **89**, 27 (1934). Электромагнитная собственная энергия в этой работе вычислена только в низшем порядке по α . Доказательство того, что расходимость имеет логарифмический характер во всех порядках теории возмущений было дано в работе: Weisskopf, V.F., *Phys. Rev.*, **56**, 72 (1939).
64. Dirac, P.A.M., *XVII Conseil Solvay de Physique*, p. 203 (1933). Последующие вычисления, основанные на менее ограничительных предположениях: Heisenberg, W., *Z. f. Phys.*, **90**, 209 (1934); *Sachs. Akad. Wiss.*, **86**, 317 (1934); Serber, R., *Phys. Rev.*, **43**, 49 (1935); Uehling, E.A., *Phys. Rev.*, **48**, 55 (1935); Pauli, W. and Rose, M., *Phys. Rev.*, **49**, 462 (1936). См. также: Furry and Oppenheimer, [44]; Peierls, [44], Weisskopf, [63].
65. Euler, H. and Kockel, B., *Naturwiss.*, **23**, 246 (1935); Heisenberg, W. and Euler, H., *Z. f. Phys.*, **98**, 714 (1936).
66. Dirac, P.A.M., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **30**, 150 (1934).
67. Heisenberg, W., *Z. f. Phys.*, **90**, 209 (1934).
68. Kemmer, N. and Weisskopf, V.F., *Nature*, **137**, 659 (1936).
- 68a. Bloch, F. and Nordsieck, A., *Phys. Rev.*, **52**, 54 (1937). См. также: Pauli, W. and Fierz, M., *Nuovo Cimento*, **15**, 167 (1938).
69. Dancoff, S.M., *Phys. Rev.*, **55**, 959 (1939).

- 69a.** Lewis, H.W., *Phys. Rev.*, **73**, 173 (1948); Epstein, S., *Phys. Rev.*, **73**, 177 (1948). См. также: Schwinger, J., [84] ; Koba, Z. and Tomonaga, S., *Progr. Theor. Phys.*, **3/3**, 290 (1948).
- 69b.** Schwinger, J., в книге: *The Birth of Particle Physics*, ed. by L. Brown and L. Hoddeson (Cambridge University Press, Cambridge, 1983), p. 336.
- 70.** Heisenberg, W., *Ann. d. Phys.*, **32**, 20 (1938).
- 70a.** Wentzel, G., *Z. f. Phys.*, **86**, 479, 635 (1933); **87**, 726 (1934); Born, M. and Infeld, L., *Proc. Roy. Soc.*, **A150**, 141 (1935); Pauli, W., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **6**, 137 (1936).
- 71.** Wheeler, J.A., *Phys. Rev.*, **52**, 1107 (1937).
- 72.** Heisenberg, W., *Z. f. Phys.*, **120**, 513, 673 (1943); *Z. Naturforsch.* **1**, 608 (1946). См. также: Møller, C., *Kon. Dansk. Vid. Sel., Mat.-Fys. Medd.*, **23**, No. 1 (1945); *ibid.*, **23**, No. 19 (1946).
- 73.** См., например: Chew, G., *The S-Matrix Theory of Strong Interactions* (W.A. Benjamin, Inc., New York, 1961) (есть рус. пер.: Дж. Чу. *Теория S-матрицы*. М.: Мир, 1965).
- 74.** Wheeler, J.A. and Feynman, R.P., *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 157 (1945); *ibid.*, **21**, 425 (1949). Дальнейшие ссылки и обсуждение применения теорий действия на расстоянии в космологии см. в книге: Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1972), Section 16.3 (есть рус. пер.: Вейнберг С. *Гравитация и космология*. М.: Мир, 1976).
- 75.** Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc.*, **A180**, 1 (1942). Критические замечания см. в работе: Pauli, W., *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 175 (1943). Обзор классических теорий этого типа, а также других попыток разрешить проблему бесконечностей см. в статье: Peierls, R.P., in: *Rapports du 8^{me} Conseil de Physique Solvay 1948* (R. Stoops, Brussels, 1950), p. 241.
- 76.** Weisskopf, V.F., *Kgl. Dansk. Vidensk. Selskab, Mat.-Fys. Medd.*,

- 14**, No. 6 (1934), особенно с. 34 и с. 5-6. См. также: Pauli and Fierz, [68a]; Kramers [79a].
- 77.** Pasternack, S., *Phys. Rev.*, **54**, 1113 (1938). Это предложение было основано на экспериментах: Houston, W.V., *Phys. Rev.*, **51**, 446 (1937); Williams, R.C., *Phys. Rev.*, **54**, 558 (1938). Сообщения о противоположных данных: Drinkwater, J.W., Richardson, O., and Williams, W.E., *Proc. Roy. Soc.*, **174**, 164 (1940).
- 78.** Uehling, E.A., [64].
- 79.** Lamb, W.E. and Retherford, R.C., *Phys. Rev.*, **72**, 241 (1947).
- 79a.** Kramers, H.A., *Nuovo Cimento*, **15**, 108 (1938); *Ned. T. Natwink.*, **11**, 134 (1944); *Rapports du 8^{me} Conseil de Physique Solvay 1948* (R. Stoops, Brussels, 1950).
- 80.** Bethe, H.A., *Phys. Rev.*, **72**, 339 (1947).
- 81.** French, J.B. and Weisskopf, V.F., *Phys. Rev.*, **75**, 1240 (1949); Kroll, M. and Lamb, W.E., *ibid.*, **75**, 388 (1949); Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **75**, 898 (1949); Feynman, R.P., *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.*, **74**, 939, 1430 (1948); **76**, 749, 769 (1949); **80**, 440 (1950); Fukuda, H., Miyamoto, Y., and Tomonaga, S., *Progr. Theor. Phys. Rev. Mod. Phys.*, **4**, 47, 121 (1948).
- 82.** Nafe, J.E., Nelson, E.B., and Rabi, I.I., *Phys. Rev.*, **71**, 914 (1947); Nagel, D.E., Julian, R.S., and Zacharias, J.R., *Phys. Rev.*, **72**, 973 (1947).
- 83.** Kush, P. and Foley, H.M., *Phys. Rev.*, **72**, 1256 (1947).
- 83a.** Breit, G., *Phys. Rev.*, **71**, 984 (1947). Швингер включил в работу [84] исправленный вариант результатов Брейта.
- 84.** Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **73**, 416 (1948).
- 85.** Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948); *ibid.*, **75**, 651 (1949);

- ibid., **76**, 790 (1949); ibid., **82**, 664, 914 (1951); ibid., **91**, 713 (1953); *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **37**, 452 (1951).
- 86.** Tomonaga, S., *Progr. Theor. Phys. Rev. Mod. Phys.*, **1**, 27 (1946); Koba, Z., Tati, T., and Tomonaga, S., ibid., **2**, 101 (1947); Kanesawa, S. and Tomonaga, S., ibid., **3**, 1, 101 (1948); Tomonaga, S., *Phys. Rev.*, **74**, 224 (1948); Ito, D., Koba, Z., and Tomonaga, S., *Progr. Theor. Phys.*, **3**, 276 (1948); Koba, Z. and Tomonaga, S., ibid., **3**, 290 (1948).
- 87.** Feynman, R.P., *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.*, **74**, 939, 1430 (1948); ibid., **76**, 749, 769 (1949); ibid., **80**, 440 (1950).
- 88.** Dyson, F.J., *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949).
- 88a.** Frohlich, H., Heitler, W., and Kahn, B., *Proc. Roy. Soc.*, **A171**, 269 (1939); *Phys. Rev.*, **56**, 961 (1939).
- 88b.** Lamb, W.E., Jr., *Phys. Rev.*, **56**, 384 (1939); **57**, 458 (1940).
- 89.** Цитируется Р. Сербером в книге: *The Birth of Particle Physics*, [69b], p. 270.

Релятивистская квантовая механика

Точка зрения, принятая в этой книге, такова: квантовая теория поля такая, какая она есть, потому что (с определенными оговорками) это единственный способ совместить квантовую механику с частной теорией относительности. Поэтому нашей первой задачей будет изучение того, как в квантовых построениях возникают симметрии вроде лоренцевской инвариантности.

2.1. Квантовая механика

Сначала хорошее известие: квантовая теория поля основана на той же квантовой механике, которая была создана Шредингером, Гейзенбергом, Паули, Борном и др. в 1925–1926 годах и с тех пор используется для расчетов в атомной, молекулярной, ядерной физике и физике твердого тела. Предполагается, что читатель знаком с квантовой механикой. В этом разделе дается лишь самое краткое изложение принципов квантовой механики в обобщенной дираковской формулировке ¹.

(1) Физические состояния задаются лучами в гильбертовом пространстве. Это один из видов комплексного векторного пространства. Иначе говоря, если Φ и Ψ есть векторы в этом пространстве (их часто называют «векторами состояния»), то таковым является и вектор $\xi\Phi + \eta\Psi$, где ξ , η — произвольные комплексные числа. Гильбертово пространство снабжено скалярным произведением*:

* Мы часто будем использовать дираковские скобочные обозначения и вместо (Ψ_1, Ψ_2) писать $\langle 1|2\rangle$.

любой паре векторов сопоставляется комплексное число (Φ, Ψ) , причем выполнены следующие условия:

$$(\Phi, \Psi) = (\Psi, \Phi)^*, \quad (2.1.1)$$

$$(\Phi, \xi_1 \Psi_1 + \xi_2 \Psi_2) = \xi_1 (\Phi, \Psi_1) + \xi_2 (\Phi, \Psi_2), \quad (2.1.2)$$

$$(\eta_1 \Phi_1 + \eta_2 \Phi_2, \Psi) = \eta_1^* (\Phi_1, \Psi) + \eta_2^* (\Phi_2, \Psi). \quad (2.1.3)$$

Норма (Ψ, Ψ) удовлетворяет также условию положительности: $(\Psi, \Psi) \geq 0$, причем норма обращается в нуль, если и только если $\Psi = 0$. (Есть еще ряд технических предположений, позволяющих совершать предельные переходы для векторов внутри гильбертова пространства.) Луч — это множество нормированных векторов (т. е. $(\Psi, \Psi) = 1$), причем Ψ и Ψ' принадлежат одному лучу, если $\Psi' = \xi \Psi$, где ξ — произвольное комплексное число с $|\xi| = 1$.

(2) Наблюдаемые представляются эрмитовыми операторами. Это отображения $\Psi \rightarrow A\Psi$ гильбертова пространства в себя, линейные в том смысле, что

$$A(\xi\Psi + \eta\Phi) = \xi A\Psi + \eta A\Phi, \quad (2.1.4)$$

и удовлетворяющие условию вещественности $A^\dagger = A$, где для любого линейного оператора A сопряженный ему оператор A^\dagger определяется условием

$$(\Phi, A^\dagger \Psi) \equiv (A\Phi, \Psi) = (\Psi, A\Phi)^*. \quad (2.1.5)$$

(Есть также и некоторые технические предположения о непрерывности $A\Psi$ как функции Ψ .) Состояние, представленное лучом \mathcal{R} , имеет определенное значение α наблюдаемой, оператор которой есть A , если векторы Ψ , принадлежащие этому лучу, являются собственными векторами A с собственными значениями α :

$$A\Psi = \alpha\Psi. \quad (2.1.6)$$

Элементарная теорема утверждает, что если A — эрмитов оператор, то собственные значения α действительны, а собственные векторы, отвечающие разным α , ортогональны.

(3) Если система находится в состоянии, представленном лучом \mathcal{R} , и проводится эксперимент по проверке того, является ли это состояние одним из различных состояний, представленных взаимно ортогональными лучами $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ (например, путем измерения одной или более наблюдаемых), то вероятность обнаружить систему в состоянии, описываемом лучом \mathcal{R}_n , равна

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2, \quad (2.1.7)$$

где Ψ и Ψ_n — любые векторы, принадлежащие лучам \mathcal{R} и \mathcal{R}_n , соответственно. (Пара лучей называется ортогональной, если скалярные произведения векторов из двух лучей равны нулю.) Другая элементарная теорема утверждает, что если векторы состояний Ψ_n образуют полную систему, то полная вероятность равна единице:

$$\sum_n P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = 1. \quad (2.1.8)$$

2.2. Симметрии

Преобразование симметрии — это такое изменение нашей точки зрения, которое не меняет результатов возможных экспериментов. Если наблюдатель O видит систему в состоянии, представленном лучами \mathcal{R} или $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$, то эквивалентный наблюдатель O' , исследующий ту же самую систему, будет видеть ее в другом состоянии, представленном лучами \mathcal{R}' или $\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2, \dots$, соответственно, однако оба наблюдателя должны обнаружить, что соответствующие вероятности не изменились:

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n). \quad (2.2.1)$$

(Это лишь необходимое условие того, чтобы преобразование лучей было симметрией; дальнейшие условия обсуждаются в следующей главе.) Важная теорема, доказанная Вигнером в начале 1930-х годов, утверждает, что для любого преобразования лучей $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ можно определить в гильбертовом пространстве оператор U , причем, если Ψ принадлежит лучу \mathcal{R} , то $U\Psi$ принадлежит лучу \mathcal{R}' , а сам оператор U является либо *унитарным* и *линейным*:

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi), \quad (2.2.2)$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta U\Psi, \quad (2.2.3)$$

либо антиунитарным и антилинейным:

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^*, \quad (2.2.4)$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi. \quad (2.2.5)$$

В аргументации Вигнера пропущены некоторые этапы. Более полное доказательство дано в Приложении А к этой главе.

Как уже отмечалось, оператор, сопряженный линейному оператору L , определяется равенством

$$(\Phi, L^\dagger\Psi) \equiv (L\Phi, \Psi). \quad (2.2.6)$$

Это условие не может быть выполнено для антилинейного оператора, так как в этом случае правая часть соотношения (2.2.6) была бы линейна по Φ , в то время как левая часть – антилинейна. Вместо этого оператор, сопряженный антилинейному оператору A , определяется равенством

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Psi, \Phi)^* = (\Psi, A\Phi). \quad (2.2.7)$$

Если принять это определение, то условия унитарности или антиунитарности имеют одинаковый вид

$$U^\dagger = U^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Всегда существует тривиальное преобразование симметрии $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, которому соответствует единичный оператор $U = 1$. Этот оператор, конечно, унитарный и линейный. Теперь из соображений непрерывности можно заключить, что любая симметрия (типа вращения, трансляции или лоренцовского преобразования), которая может быть сделана тривиальной путем непрерывного изменения некоторых параметров (углов поворота, расстояний или скоростей), должна представляться не антилинейным и антиунитарным оператором, а только линейным унитарным оператором U . (Симметрии, пред-

ставляемые антиунитарными антилинейными операторами, менее известны в физике; все они включают обращение направления течения времени. Подробнее см. раздел 2.6.)

В частности, преобразование симметрии, бесконечно близкое к тривиальному, можно представить линейным унитарным оператором, бесконечно близким к единичному:

$$U = 1 + i\varepsilon t, \quad (2.2.9)$$

где ε — действительное бесконечно малое число. Для того, чтобы этот оператор был унитарным и линейным, оператор t должен быть эрмитовым и линейным. Поэтому t является кандидатом на то, чтобы быть наблюдаемой. Действительно, большинство (если не все) наблюдаемых в физике, вроде импульса или углового момента, возникают подобным образом из преобразований симметрии.

Множество преобразований симметрии обладает свойствами, позволяющими установить, что оно является *группой*. Если T_1 — преобразование, переводящее лучи \mathcal{R}_n в \mathcal{R}'_n , а T_2 — другое преобразование, переводящее \mathcal{R}'_n в \mathcal{R}''_n , то результат последовательного осуществления обоих преобразований является тоже преобразованием симметрии, переводящим \mathcal{R}_n в \mathcal{R}''_n , которое мы записываем как T_2T_1 . Кроме того, преобразованию симметрии T , переводящему лучи \mathcal{R}_n в \mathcal{R}'_n , соответствует обратное преобразование T^{-1} , переводящее \mathcal{R}'_n в \mathcal{R}_n . Наконец, существует тождественное-преобразование $T = 1$, оставляющее лучи неизменными.

Унитарные или антиунитарные операторы $U(T)$, соответствующие этим преобразованиям симметрии, отражают групповую структуру преобразований, но с тем усложнением, что в противоположность самим преобразованиям симметрии операторы $U(T)$ действуют не на лучи, а на векторы в гильбертовом пространстве. Если T_1 переводит \mathcal{R}_n в \mathcal{R}'_n , то $U(T_1)$, действуя на вектор Ψ_n из луча \mathcal{R}_n , превращает его в вектор $U(T_1)\Psi_n$ из луча \mathcal{R}'_n . Далее, если T_2 переводит \mathcal{R}'_n в \mathcal{R}''_n , то, действуя на $U(T_1)\Psi_n$, получаем вектор $U(T_2)U(T_1)\Psi_n$ из луча \mathcal{R}''_n . Однако $U(T_2T_1)\Psi_n$ также принадлежит этому лучу, так что два вектора могут отличаться только фазой $\phi_n(T_2, T_1)$:

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n = e^{i\phi_n(T_2, T_1)}U(T_2T_1)\Psi_n. \quad (2.2.10)$$

Далее, за одним важным исключением, из линейности (или антилинейности) $U(T)$ вытекает, что эти фазы не зависят от состояния Ψ_n . Приведем доказательство. Рассмотрим два различных вектора Ψ_A, Ψ_B , не пропорциональные друг другу. Применяя (2.2.10) к состоянию $\Psi_{AB} \equiv \Psi_A + \Psi_B$, получим

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{AB}} U(T_2 T_1) (\Psi_A + \Psi_B) &= U(T_2) U(T_1) (\Psi_A + \Psi_B) \\ &= U(T_2) U(T_1) \Psi_A + U(T_2) U(T_1) \Psi_B \\ &= e^{i\phi_A} U(T_2 T_1) \Psi_A + e^{i\phi_B} U(T_2 T_1) \Psi_B. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Всякий унитарный или антиунитарный оператор имеет обратный оператор (сопряженный исходному), который также унитарен или антиунитарен. Умножая (2.2.11) слева на $U^{-1}(T_2 T_1)$, находим, что

$$e^{\pm i\phi_{AB}} (\Psi_A + \Psi_B) = e^{\pm i\phi_A} \Psi_A + e^{\pm i\phi_B} \Psi_B, \quad (2.2.12)$$

причем верхние или нижние знаки соответствуют унитарному или антиунитарному оператору $U(T_2 T_1)$. Так как Ψ_A и Ψ_B линейно независимы, это возможно лишь при условии, что

$$e^{i\phi_{AB}} = e^{i\phi_A} = e^{i\phi_B}. \quad (2.2.13)$$

Таким образом, как и утверждалось, фаза в (2.2.10) не зависит от вектора состояния Ψ_n , так что само соотношение можно записать как операторное равенство

$$U(T_2) U(T_1) = e^{i\phi(T_2, T_1)} U(T_2 T_1). \quad (2.2.14)$$

При $\phi = 0$ говорят, что $U(T)$ реализует *представление* группы преобразований симметрии. При произвольных фазах $\phi(T_2, T_1)$ мы получаем то, что называется проективным представлением или «представлением с точностью до фазы». Структура группы Ли сама по себе не может указать, реализуют ли физические векторы состояний обычное или проективное представление, однако, как мы увидим, эта структура может указать, имеет ли группа хотя бы одно внутренне ей присущее проективное представление.

В цепочке рассуждений, приводящих к (2.2.14), есть одно узкое место: может оказаться, что нельзя приготовить систему в состоянии $\Psi_A + \Psi_B$. Например, считается общепризнанным, что невозможно приготовить систему в виде суперпозиции двух состояний, полные угловые моменты которых, соответственно, целые и полуцелые. В таких случаях мы говорим, что между разными классами состояний действуют «правила суперотбора»³, и фазы $\phi(T_2, T_1)$ могут зависеть от того, на какие классы действуют операторы $U(T_2)U(T_1)$ и $U(T_2, T_1)$. В разделе 2.7 мы обсудим эти фазы и проективные представления несколько подробнее. Как будет видно, всякая группа симметрии, имеющая проективные представления, всегда может быть расширена (без какого либо другого изменения ее физических приложений) таким образом, что все ее представления можно будет определить как не- проективные с $\phi = 0$. Будем считать, что это уже доказано, и положим $\phi = 0$ в (2.2.14).

Для физики особенно важны группы, носящие название *связных групп Ли*. Это группы преобразований $T(\theta)$, задаваемые конечным набором действительных непрерывных параметров θ^a , причем каждый элемент группы можно связать с единичным элементом некоторым путем, лежащим внутри группы. Закон группового умножения принимает вид

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta)), \quad (2.2.15)$$

где $f^a(\bar{\theta}, \theta)$ — функция $\bar{\theta}$ и θ . Полагая координаты единичного элемента равными $\theta^a = 0$, мы должны иметь

$$f^a(\theta, 0) = f^a(0, \theta) = \theta^a. \quad (2.2.16)$$

Как уже отмечалось, преобразования таких непрерывных групп должны представляться унитарными (но не антиунитарными) операторами $U(T(\theta))$ в физическом гильбертовом пространстве. Для групп Ли эти операторы могут быть представлены (по крайней мере, в окрестности единичного элемента) степенным рядом

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b \theta^c t_{bc} + \dots, \quad (2.2.17)$$

где $t_a, t_{bc} = t_{cb}$ и т. д. — эрмитовы операторы, не зависящие от θ .

Предположим, что $U(T(\theta))$ реализует обычное (т. е. не проективное) представление этой группы преобразований, иными словами

$$U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar{\theta}, \theta))). \quad (2.2.18)$$

Посмотрим, как выглядит это соотношение, если разложить его в ряд по степеням θ^a и $\bar{\theta}^a$. Как следует из (2.2.16), разложение $f^a(\bar{\theta}, \theta)$ до второго порядка должно иметь вид

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a{}_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \dots, \quad (2.2.19)$$

где $f^a{}_{bc}$ – действительные коэффициенты. (Наличие любых слагаемых порядка θ^2 или $\bar{\theta}^2$ будет нарушать соотношение (2.2.16).) Тогда уравнение (2.2.18) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left[1 + i\bar{\theta}^a t_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^c t_{bc} + \dots \right] \times \left[1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \dots \right] \\ & = 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f^a{}_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \dots)t_a \\ & + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar{\theta}^b + \dots)(\theta^c + \bar{\theta}^c + \dots)t_{bc} + \dots \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Слагаемые порядка 1, θ , $\bar{\theta}$, θ^2 и $\bar{\theta}^2$ автоматически сокращаются в обеих частях (2.2.20), однако, собирая слагаемые с $\bar{\theta}\theta$, находим нетривиальное условие:

$$t_{bc} = -t_b t_c - i f^a{}_{bc} t_a. \quad (2.2.21)$$

Оно показывает, что если нам задана структура группы, т. е. функция $f(\theta, \bar{\theta})$, а следовательно, и ее квадратичные коэффициенты $f^a{}_{bc}$, мы можем вычислить слагаемые второго порядка в $U(T(\theta))$, зная генераторы t_a , возникающие в слагаемых первого порядка. Однако, должно выполняться условие самосогласованности: оператор t_{bc} должен быть симметричным по b и c (так как он равен второй производной $U(T(\theta))$ по θ^b и θ^c), так что из (2.2.21) следует, что

$$[t_b, t_c] = i C^a{}_{bc} t_a, \quad (2.2.22)$$

где

$$C^a_{bc} \equiv -f^a_{bc} + f^a_{cb} \quad (2.2.23)$$

представляет набор действительных констант, называемых *структур-ными константами*. Такой набор коммутационных соотношений определяет *алгебру Ли*. В разделе 2.7 мы докажем, что коммутационные соотношения (2.2.22) — единственное условие, необходимое для того, чтобы процесс разложения мог быть продолжен: весь степенной ряд для $U(T(\theta))$ можно вычислить с помощью бесконечного набора соотношений типа (2.2.21), если нам известны слагаемые первого порядка, т. е. генераторы t_a . Это не обязательно означает, что знание t_a однозначно определяет операторы $U(T(\theta))$ для всех θ^a , однако, по крайней мере, в конечной окрестности координат $\theta^a = 0$ единичного элемента $U(T(\theta))$ определяются однозначно в том смысле, что если $\theta, \bar{\theta}$ и $f(\theta, \bar{\theta})$ заданы в этой окрестности, то удовлетворяется уравнение (2.2.18). Распространение этих результатов на все θ^a обсуждается в разделе 2.7.

Важным является частный случай, к которому мы будем вновь и вновь обращаться. Пусть функция $f(\theta, \bar{\theta})$ (возможно, лишь для некоторого подмножества координат θ^a) является просто суммой

$$f^a(\theta, \bar{\theta}) = \theta^a + \bar{\theta}^a. \quad (2.2.24)$$

Сюда относятся трансляции в пространстве–времени или вращения вокруг фиксированной оси (но *не* вокруг двух по очереди). Тогда коэффициенты f^a_{bc} в (2.2.19) и структурные константы (2.2.23) обращаются в нуль. Все генераторы коммутируют друг с другом:

$$[t_b, t_c] = 0. \quad (2.2.25)$$

Такая группа называется *абелевой*. В этом случае легко вычислить $U(T(\theta))$ для всех θ^a . При любом целом N находим из (2.2.18) и (2.2.24):

$$U(T(\theta)) = \left[U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right) \right]^N.$$

Переходя к пределу $N \rightarrow \infty$ и удерживая только слагаемое первого порядка в $U(T(\theta/N))$, получаем

$$U(T(\theta)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{i}{N} \theta^a t_a \right]^N,$$

откуда

$$U(T(\theta)) = \exp(it_a \theta^a). \quad (2.2.26)$$

2.3. Квантовые преобразования Лоренца

Эйнштейновский принцип относительности утверждает эквивалентность «инерциальных» систем отсчета. Он отличается от галилеевского принципа относительности, которому подчиняется механика Ньютона, видом преобразования, связывающего координаты в разных системах отсчета. Если x^μ — координаты в одной инерциальной системе (x^1, x^2, x^3 — декартовы пространственные координаты, $x^0 = t$ — временная координата, скорость света положена равной единице), то координаты x'^μ в любой другой инерциальной системе должны удовлетворять соотношению:

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.3.1)$$

или эквивалентно:

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.3.2)$$

Здесь $\eta_{\mu\nu}$ — диагональная матрица, элементы которой равны

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1, \quad \eta_{00} = -1. \quad (2.3.3)$$

Принято правило суммирования по неммым индексам: подразумевается сумма по любому индексу типа μ или ν в формуле (2.3.2), появляющемуся в одном и том же слагаемом дважды, один раз вверху, другой — внизу. Эти преобразования обладают тем специ-

альным свойством, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета (в выбранных единицах она равна 1). Действительно, световая волна, распространяющаяся с единичной скоростью, удовлетворяет условию $|d\mathbf{x}/dt| = 1$ или

$$\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = d\mathbf{x}^2 - dt^2 = 0,$$

откуда следует, что и $\eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = 0$, т. е. $|d\mathbf{x}'/dt'| = 1$ *

Всякое преобразование координат $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, удовлетворяющее (2.3.2), линейно^{3а}:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (2.3.4)$$

где a^μ – произвольные константы, а постоянная матрица $\Lambda^\mu{}_\nu$ удовлетворяет условию:

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.3.5)$$

Для дальнейшего полезно записать условия лоренцовских преобразований в иной форме. Матрица $\eta_{\mu\nu}$ имеет обратную, обозначаемую $\eta^{\mu\nu}$, которая имеет те же компоненты, т. е. она диагональна и $\eta^{00} = -1$, $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = +1$. Умножая выражение (2.3.5) на $\eta^{\sigma\tau}\Lambda^\kappa{}_\tau$ и группируя множители, имеем

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho(\Lambda^\nu{}_\sigma\Lambda^\kappa{}_\tau\eta^{\sigma\tau}) = \Lambda^\kappa{}_\rho = \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\kappa}\Lambda^\mu{}_\rho.$$

Умножая это равенство на матрицу, обратную $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho$, получаем:

$$\Lambda^\nu{}_\sigma\Lambda^\kappa{}_\tau\eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa}. \quad (2.3.6)$$

Эти преобразования образуют группу. Если сначала осуще-

*Существует более широкий класс преобразований координат, известных как *конформные* преобразования, для которых $\eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu$ пропорционально, хотя в общем случае не равно, $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, и которые также оставляют инвариантной скорость света. Показано, что конформная инвариантность в двух измерениях имеет огромное значение в теории струн и статистической механике, но физический смысл таких конформных преобразований в четырехмерном пространстве–времени до сих пор неясен.

ствить лоренцовское преобразование (2.3.4), а затем второе лоренцовское преобразование $x'^{\mu} \rightarrow x''^{\mu}$, так что

$$x''^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} x'^{\rho} + \bar{a}^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} (\Lambda^{\rho}_{\nu} x^{\nu} + a^{\rho}) + \bar{a}^{\mu},$$

то результат эквивалентен лоренцовскому преобразованию $x^{\mu} \rightarrow x''^{\mu}$, причем

$$x''^{\mu} = (\bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu}) x^{\nu} + (\bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} a^{\rho} + \bar{a}^{\mu}). \quad (2.3.7)$$

(Заметим, что если обе матрицы Λ^{μ}_{ν} и $\bar{\Lambda}^{\mu}_{\nu}$ удовлетворяют (2.3.5), то это же верно и для $\bar{\Lambda}^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu}$, так что это действительно преобразование Лоренца. Черта используется здесь только для того, чтобы отличить одно лоренцовское преобразование от другого.) Преобразования $T(\Lambda, a)$, действующие на физические состояния, удовлетворяют поэтому правилу композиции

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a}) T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda} \Lambda, \bar{\Lambda} a + \bar{a}). \quad (2.3.8)$$

Беря детерминант от обеих частей (2.3.5), находим, что

$$(\text{Det} \Lambda)^2 = 1, \quad (2.3.9)$$

так что Λ^{μ}_{ν} имеет обратную матрицу $(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\rho}$, в силу (2.3.5) равную

$$(\Lambda^{-1})^{\rho}_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\rho} \equiv \eta_{\nu\mu} \eta^{\rho\sigma} \Lambda^{\mu}_{\sigma}. \quad (2.3.10)$$

Как следует из (2.3.8), обратное преобразование к $T(\Lambda, a)$ имеет вид $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$, причем тождественное преобразование равно $T(1, 0)$.

В согласии с тем, о чем шла речь в предыдущем разделе, преобразования $T(\Lambda, a)$ индуцируют унитарные линейные преобразования векторов в физическом гильбертовом пространстве

$$\Psi \rightarrow U(\Lambda, a)\Psi.$$

Операторы U удовлетворяют правилу композиции

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a}) U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda} \Lambda, \bar{\Lambda} a + \bar{a}). \quad (2.3.11)$$

(Как уже отмечалось, чтобы избежать появления фазового множителя в правой части уравнения (2.3.11), необходимо в общем случае расширить группу Лоренца. Соответствующая процедура описана в разделе 2.7.)

Вся группа преобразований $T(\Lambda, a)$ обычно называется *неоднородной группой Лоренца* или *группой Пуанкаре*. Она имеет много важных подгрупп. Во-первых, преобразования с $a^\mu = 0$, причем

$$T(\Lambda, 0)T(\Lambda, 0) = U(\Lambda\Lambda, 0). \quad (2.3.12)$$

очевидно образуют подгруппу, называемую *однородной группой Лоренца*. Кроме того, из (2.3.9) следует, что либо $\text{Det } \Lambda = +1$, либо $\text{Det } \Lambda = -1$. Ясно, что преобразования с $\text{Det } \Lambda = +1$ образуют подгруппу как однородной, так и неоднородной группы Лоренца. Далее, выписывая 00-компоненты уравнений (2.3.5) и (2.3.6), имеем:

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 = 1 + \Lambda^0_i \Lambda^0_i. \quad (2.3.13)$$

где проводится суммирование по индексу i , принимающему значения 1, 2, 3. Видно, что либо $\Lambda^0_0 \geq +1$, либо $\Lambda^0_0 \leq -1$. Преобразования с $\Lambda^0_0 \geq +1$ образуют подгруппу. Действительно, если Λ^μ_ν и $\bar{\Lambda}^\mu_\nu$ — две таких матрицы Λ , то

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 = \bar{\Lambda}^0_0 \Lambda^0_0 + \bar{\Lambda}^0_1 \Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^0_2 \Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^0_3 \Lambda^3_0.$$

Но из уравнения (2.3.13) вытекает, что 3-вектор $(\Lambda^1_0, \Lambda^2_0, \Lambda^3_0)$ имеет длину $((\Lambda^0_0)^2 - 1)^{1/2}$, аналогично 3-вектор $(\bar{\Lambda}^0_1, \bar{\Lambda}^0_2, \bar{\Lambda}^0_3)$ имеет длину $((\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1)^{1/2}$, поэтому скалярное произведение этих двух 3-векторов ограничено условием

$$|\bar{\Lambda}^0_1 \Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^0_2 \Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^0_3 \Lambda^3_0| \leq \sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1} \sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1}, \quad (2.3.14)$$

так что

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 \geq \bar{\Lambda}^0_0 \Lambda^0_0 - \sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1} \sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1} \geq 1.$$

Подгруппа преобразований Лоренца с $\text{Det } \Lambda = +1$ и $\Lambda^0_0 \geq +1$ носит название *собственной ортохронной группы Лоренца*. Так как невозможно с помощью непрерывного изменения параметров перескочить от преобразования с $\text{Det } \Lambda = +1$ к преобразованию с $\text{Det } \Lambda = -1$, или от преобразования с $\Lambda^0_0 \geq +1$ к преобразованию

с $\Lambda^0_0 \leq -1$, то всякое лоренцовское преобразование, которое может быть получено из единичного преобразования путем непрерывного изменения параметров, должно иметь $\text{Det } \Lambda$ и Λ^0_0 того же знака, что и само единичное преобразование, т.е. должно принадлежать собственной ортохронной группе Лоренца.

Всякое преобразование Лоренца — либо собственное и ортохронное, либо может быть записано как произведение элемента собственной ортохронной группы Лоренца и одного из дискретных преобразований \mathcal{P} , \mathcal{T} или \mathcal{PT} , где \mathcal{P} — матрица пространственной инверсии, ненулевые элементы которой равны

$$\mathcal{P}^0_0 = 1, \quad \mathcal{P}^1_1 = \mathcal{P}^2_2 = \mathcal{P}^3_3 = -1, \quad (2.3.15)$$

а \mathcal{T} — матрица обращения времени с ненулевыми элементами

$$\mathcal{T}^0_0 = -1, \quad \mathcal{T}^1_1 = \mathcal{T}^2_2 = \mathcal{T}^3_3 = 1. \quad (2.3.16)$$

Таким образом, изучение всей группы Лоренца сводится к изучению собственной ортохронной подгруппы, а также пространственной инверсии и отражения времени. Мы рассмотрим пространственную инверсию и отражение времени отдельно в разделе 2.6. До этого будем изучать только однородную или неоднородную собственную ортохронную группу Лоренца.

2.4. Алгебра Пуанкаре

Как мы видели в разделе 2.2, многое о любой группе симметрии, являющейся группой Ли, можно узнать, изучая групповые элементы вблизи единицы. В случае неоднородной группы Лоренца единицей является преобразование $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$, $a^\mu = 0$, так что следует изучать преобразования, имеющие вид

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad a^\mu = \varepsilon^\mu, \quad (2.4.1)$$

с инфинитезимальными параметрами ω^μ_ν и ε^μ . Условие (2.3.5) можно записать как

$$\omega_{\sigma\rho} \equiv \eta_{\mu\sigma} \omega^\mu_\rho, \quad \omega^\mu_\rho \equiv \eta^{\mu\sigma} \omega_{\sigma\rho}.$$

$$\begin{aligned}\eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu\rho} + \omega^{\mu\rho})(\delta^{\nu\sigma} + \omega^{\nu\sigma}) \\ &= \eta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2).\end{aligned}$$

Здесь использовано соглашение, которое будет далее применяться во всей книге, что опускание и подъем индексов осуществляются сверткой с $\eta_{\mu\nu}$ или $\eta^{\mu\nu}$:

Удерживая только слагаемые первого порядка по ω в условии (2.3.5), находим, что это условие сводится к требованию антисимметрии $\omega_{\mu\nu}$:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (2.4.2)$$

Антисимметричный тензор второго ранга в четырехмерном пространстве имеет $(4 \times 3)/2 = 6$ независимых компонент, так что с учетом четырех компонент \mathfrak{E}^{μ} неоднородное преобразование Лоренца определяется $6 + 4 = 10$ параметрами.

Так как $U(1, 0)$ переводит всякий луч в себя, этот оператор должен быть пропорционален единичному оператору и может быть сделан равным ему путем выбора фазы *. Для инфинитезимального преобразования Лоренца (2.4.1) оператор $U(1 + \omega, \varepsilon)$ должен быть суммой единичного оператора 1 и слагаемых, линейных по $\omega_{\rho\sigma}$ и ε_{ρ} . Запишем это в виде

$$U(1 + \omega, \varepsilon) = 1 + \frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \varepsilon_{\rho} P^{\rho} + \dots \quad (2.4.3)$$

Здесь $J^{\rho\sigma}$ и P^{ρ} — не зависящие от ω и ε операторы, а многоточие соответствует слагаемым более высокого порядка по ω и/или ε . Для того, чтобы оператор $U(1 + \omega, \varepsilon)$ был унитарным, операторы $J^{\rho\sigma}$ и P^{ρ} должны быть эрмитовыми:

* При отсутствии правил суперотбора возможность, что коэффициент пропорциональности зависит от состояния, на которое действует $U(1, 0)$, может быть исключена с помощью тех же рассуждений, которые использовались в разделе 2.2, чтобы исключить возможную зависимость фаз проективных представлений групп симметрии от состояний, на которые эта симметрия действует. Если же действуют правила суперотбора, может оказаться необходимым переопределить $U(1, 0)$, включив фазовые множители, зависящие от сектора, в котором действует этот оператор.

$$J^{\rho\sigma\dagger} = J^{\rho\sigma}, P^{\rho\dagger} = P^{\rho}. \quad (2.4.4)$$

Так как $\omega_{\rho\sigma}$ — антисимметричный тензор, коэффициенты $J^{\rho\sigma}$ можно также выбрать антисимметричными:

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}. \quad (2.4.5)$$

Как будет видно, P^1 , P^2 и P^3 являются операторами компонент импульса, J^{23} , J^{31} и J^{12} — операторами компонент вектора момента импульса, а P^0 — оператором энергии или *гамильтонианом*.*

Исследуем свойства лоренцовских преобразований операторов $J^{\rho\sigma}$ и P^{ρ} . Рассмотрим произведение

$$U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \varepsilon)U^{-1}(\Lambda, a),$$

где Λ^{μ}_{ν} и a^{μ} — параметры нового преобразования, не связанные с ω или ε . Согласно (2.3.11), произведение $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a)$ равно $U(1,0)$, так что $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ — оператор, обратный $U(\Lambda, a)$. Тогда из (2.3.11) следует, что

$$U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \varepsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a). \quad (2.4.6)$$

В первом порядке по ω и ε имеем

$$\begin{aligned} & U(\Lambda, a)\left[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \varepsilon_{\rho}P^{\rho}\right]U^{-1}(\Lambda, a) \\ &= \frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - (\Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\mu}P^{\mu}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Приравнивая коэффициенты при $\omega_{\rho\sigma}$ и ε_{ρ} в обеих частях этого равенства (и пользуясь формулой (2.3.10)), находим:

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_{\mu}^{\rho}\Lambda_{\nu}^{\sigma}(J^{\mu\nu} - a^{\mu}P^{\nu} + a^{\nu}P^{\mu}), \quad (2.4.8)$$

* Определение генераторов момента импульса (углового момента) диктуется коммутационными соотношениями для $J^{\mu\nu}$. Однако они не позволяют выбрать между операторами P^{μ} и $-P^{\mu}$, так что знак слагаемого $\varepsilon_{\rho}P^{\rho}$ в (2.4.3) является предметом соглашения. Совместимость (2.4.3) с обычным определением гамильтониана P^0 показана в разделе 3.1.

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu. \quad (2.4.9)$$

Для однородных преобразований Лоренца ($a^\mu = 0$) из этих выражений просто следует, что $J^{\mu\nu}$ есть тензор, а P^μ — вектор. Для чистых трансляций ($\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$) из этих формул следует, что P^ρ является трансляционно-инвариантной величиной, а $J^{\rho\sigma}$ — нет. В частности, изменение пространственно-пространственных компонент $J^{\rho\sigma}$ в результате пространственной трансляции соответствует обычному изменению углового момента за счет переноса начала координат, по отношению к которому вычисляется угловой момент.

Далее, применим правила (2.4.8), (2.4.9) к преобразованию, которое само является бесконечно малым. Иначе говоря, выберем матрицу $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, $a^\mu = \varepsilon^\mu$, где бесконечно малые величины $\omega^\mu{}_\nu$ и ε^μ не связаны с предыдущими ω и ε . Пользуясь формулой (2.4.3) и сохраняя только слагаемые первого порядка по $\omega^\mu{}_\nu$ и ε^μ , находим, что формулы (2.4.8) и (2.4.9) принимают вид:

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \varepsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} - \varepsilon^\rho P^\sigma + \varepsilon^\sigma P^\rho, \quad (2.4.10)$$

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \varepsilon_\mu P^\mu, P^\rho] = \omega_\mu{}^\rho P^\mu. \quad (2.4.11)$$

Приравнивая коэффициенты при $\omega_{\mu\nu}$ и ε_μ в обеих сторонах этих равенств, находим коммутационные соотношения

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}, \quad (2.4.12)$$

$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho, \quad (2.4.13)$$

$$[P^\mu, P^\rho] = 0. \quad (2.4.14)$$

Они определяют алгебру Ли группы Пуанкаре.

В квантовой механике особую роль играют те операторы, которые *сохраняются*, т. е. коммутируют с оператором энергии $H = P^0$. Из формул (2.4.13) и (2.4.14) следует, что такими операторами являются 3-вектор импульса

$$\mathbf{P} = \{P^1, P^2, P^3\}, \quad (2.4.15)$$

3-вектор момента импульса

$$\mathbf{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\} \quad (2.4.16)$$

и, конечно, сам оператор энергии P^0 . Остающиеся генераторы образуют так называемый 3-вектор *буста*

$$\mathbf{K} = \{J^{10}, J^{20}, J^{30}\}. \quad (2.4.17)$$

Эти генераторы *не сохраняются*, и поэтому мы не приписываем физическим состояниям собственных значений \mathbf{K} . В трехмерных обозначениях коммутационные соотношения (2.4.12), (2.4.13) и (2.4.14) можно записать в виде:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (2.4.18)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad (2.4.19)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (2.4.20)$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \quad (2.4.21)$$

$$[K_i, P_j] = iH\delta_{ij}, \quad (2.4.22)$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0, \quad (2.4.23)$$

$$[K_i, H] = iP_i, \quad (2.4.24)$$

где i, j, k принимают значения 1, 2, 3, а ϵ_{ijk} — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon_{123} = +1$. Видно, что коммутационные соотношения (2.4.18) совпадают с коммутационными соотношениями для компонент оператора углового момента.

Чистые трансляции $T(1, a)$ образуют подгруппу неоднородной группы Лоренца с вытекающим из (2.3.8) правилом группового умножения

$$T(1, \bar{a})T(1, a) = T(1, \bar{a} + a). \quad (2.4.25)$$

Оно аддитивно в том же смысле, что и (2.2.24), так что, используя (2.4.3) и повторяя рассуждения, приведшие к (2.2.26),

находим, что конечные трансляции представляются в физическом гильбертовом пространстве в виде

$$U(1, \mathbf{a}) = \exp(-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}). \quad (2.4.26)$$

Точно так же можно показать, что вращение R_θ на угол $|\theta|$ вокруг направления θ представляется в физическом гильбертовом пространстве как

$$U(R_\theta, 0) = \exp(i\mathbf{J} \cdot \theta). \quad (2.4.27)$$

Представляет интерес сравнить алгебру Пуанкаре с алгеброй Ли группы симметрии ньютоновской механики — группы Галилея. Можно вывести эту алгебру, начав с законов преобразования группы Галилея и повторив ту процедуру, которую мы использовали для вывода алгебры Пуанкаре. Однако, так как уже выведены соотношения (2.4.18)–(2.4.24), легче получить алгебру Галилея как предел алгебры Пуанкаре при малых скоростях с помощью приема, который известен как *контракция Иноню–Вигнера* ^{4, 5}. Следует ожидать, что для системы частиц с типичными массой m и скоростью \mathbf{v} операторы импульса и момента импульса порядка $\mathbf{P} \sim m\mathbf{v}$, $\mathbf{J} \sim 1$. С другой стороны, оператор энергии $H = M + W$, где полная масса $M \sim m$ и энергия, не связанная с массой (кинетическая и потенциальная), $W \sim mv^2$. Из уравнений (2.4.18)–(2.4.24) следует, что в пределе при $v \ll 1$ коммутационные соотношения принимают вид:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, [K_i, K_j] = 0,$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, [K_i, P_j] = -iM\delta_{ij},$$

$$[J_i, W] = [P_i, W] = 0, [K_i, W] = -iP_i,$$

$$[J_i, M] = [P_i, M] = [K_i, M] = [W, M] = 0,$$

где $\mathbf{K} \sim 1/v$. Произведение трансляции $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ и «буста» $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ должно быть преобразованием $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}$, но это неверно для действия указанных операторов в гильбертовом пространстве:

$$\exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) = \exp(iM\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} / 2) \exp(i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{a})).$$

Появление фазового множителя $\exp(iM\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/2)$ показывает, что это проективное представление с правилом суперотбора, запрещающим суперпозицию состояний с разными массами. В этом отношении математика группы Пуанкаре проще, чем группы Галилея. Однако нет никаких причин, препятствующих формальному расширению группы Галилея путем добавления одного или более генераторов в ее алгебру Ли, которые коммутировали бы со всеми другими генераторами и имели бы собственные значения, равные массам различных состояний. В этом случае физические состояния реализуют обычное, а не проективное представление расширенной группы симметрии. По-видимому, разница проявляется лишь в обозначениях, не считая того, что при подобной интерпретации группы Галилея нет нужды в правиле суперотбора по массе.

2.5. Одночастичные состояния

Рассмотрим теперь классификацию одночастичных состояний в соответствии с тем, как они преобразуются под действием преобразований неоднородной группы Лоренца.

Все компоненты 4-вектора энергии–импульса коммутируют друг с другом, поэтому естественно выражать физические векторы состояний через собственные векторы 4-импульса. Вводя метку σ для обозначения всех других степеней свободы, рассмотрим векторы состояний $\Psi_{p,\sigma}$, удовлетворяющие условию

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma}. \quad (2.5.1)$$

Для произвольных состояний, описывающих, например, несколько несвязанных частиц, метка σ сама может включать как непрерывные, так и дискретные метки. Примем как часть определения одночастичного состояния, что метка σ может быть только дискретной, и ограничимся пока что рассмотрением такого случая. (Однако конкретное связанное состояние двух или более частиц, например, низшее энергетическое состояние атома водорода, следует рассматривать как одночастичное состояние. Оно не является элементарной частицей, но различие между составными и элементарными частицами нам сейчас не важно.)

Из уравнений (2.5.1) и (2.4.26) следует, что состояния $\Psi_{p,\sigma}$ преобразуются под действием трансляций по закону

$$U(1, a)\Psi_{p,\sigma} = e^{-ip \cdot a}\Psi_{p,\sigma}.$$

Рассмотрим теперь, как преобразуются эти состояния под действием однородных преобразований Лоренца. Из формулы (2.4.9) следует, что в результате действия квантового однородного преобразования Лоренца $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$ на состояние $\Psi_{p,\sigma}$ возникает собственный вектор 4-импульса с собственным значением Λp :

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= U(\Lambda)\left[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)\right]\Psi_{p,\sigma} = U(\Lambda)(\Lambda^{-1\mu} P^\rho)\Psi_{p,\sigma} \\ &= \Lambda^\mu_\rho P^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Поэтому $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ должно быть линейной комбинацией векторов состояний $\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}. \quad (2.5.3)$$

В общем случае подходящим выбором линейных комбинаций $\Psi_{p,\sigma}$ можно так выбрать метки σ , чтобы матрица $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ стала блочно-диагональной, т. е. совокупность $\Psi_{p,\sigma}$ с меткой σ , принимающей значения внутри одного блока, сама была бы представлением неоднородной группы Лоренца. Естественно сопоставить состояния частицы конкретного типа с компонентами представления неоднородной группы Лоренца, которое неприводимо в том смысле, что его нельзя далее разложить указанным способом.

Конечно, разные сорта частиц могут соответствовать изоморфным представлениям, для которых матрицы $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ либо тождественны, либо совпадают с точностью до преобразования подобия. В некоторых случаях удобно определить типы частиц как неприводимые представления более широких групп, включающих неоднородную собственную ортохронную группу Лоренца в качестве подгруппы; например, как мы увидим, для безмассовых частиц, взаимодействия которых сохраняют симметрию по отношению к пространственным отражениям, принято рассматривать все компоненты неприводимого представления неоднородной группы

Лоренца, включая пространственную инверсию, как один тип частиц.

Наша задача заключается в исследовании структуры коэффициентов $C_{\sigma\sigma}(\Lambda, p)$ для неприводимых представлений неоднородной группы Лоренца. Для этого заметим, что единственными функциями p^μ , остающимися инвариантными по отношению ко всем собственным ортохронным преобразованиям Лоренца Λ^μ_ν , являются квадрат этого 4-вектора $p^2 \equiv \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ и знак p^0 при $p^2 \leq 0$. Таким образом, для каждого значения p^2 и (при $p^2 \leq 0$) определенного знака p^0 можно выбрать «стандартный» 4-импульс k^μ и выразить любой 4-вектор p^μ из этого класса в виде

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p)k^\nu, \quad (2.5.4)$$

где L^μ_ν — стандартное преобразование Лоренца, зависящее от p^μ и неявно от выбора стандартного импульса k^μ . Затем можно определить состояния $\Psi_{p,\sigma}$ импульса p как

$$\Psi_{p,\sigma} \equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma}, \quad (2.5.5)$$

где $N(p)$ — числовой нормировочный множитель, который будет далее установлен. До этого момента мы ничего не говорили о том, как метки σ связаны с разными импульсами. Уравнение (2.5.5) заполняет этот пробел.

Действуя на (2.5.5) произвольным однородным преобразованием Лоренца $U(\Lambda)$, находим:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} \\ &= N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Суть последнего шага — в том, что преобразование Лоренца $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ переводит k в $L(p)k = p$, затем в Λp и назад в k , так что это преобразование принадлежит подгруппе однородной группы Лоренца, состоящей из лоренцовских преобразований W^μ_ν , оставляющих k^μ инвариантным:

$$W^\mu_\nu k^\nu = k^\mu. \quad (2.5.7)$$

Эта подгруппа называется *малой группой*⁵. Для любого W , удовлетворяющего (2.5.7), имеем:

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}. \quad (2.5.8)$$

Коэффициенты $D(W)$ являются представлением малой группы, т. е. для любых элементов \bar{W}, W

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}, W)\Psi_{k,\sigma'} &= U(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma} = U(\bar{W})U(W)\Psi_{k,\sigma} \\ &= U(\bar{W}) \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(\bar{W}, W)\Psi_{k,\sigma''} = \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})\Psi_{k,\sigma'} \end{aligned}$$

и поэтому

$$D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})D_{\sigma''\sigma}(W). \quad (2.5.9)$$

В частности, можно применить соотношение (2.5.8) к преобразованию малой группы:

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p), \quad (2.5.10)$$

после чего (2.5.6) принимает вид:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = N(p) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))U(L(\Lambda p))\Psi_{k,\sigma'},$$

или, вспоминая определение (2.5.5),

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \right) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}. \quad (2.5.11)$$

Помимо вопросов нормировки, задача определения коэффициентов $S_{\sigma\sigma}$ в законе преобразования (2.5.3) была сведена к задаче нахождения представлений малой группы. Такой подход, заключающийся в получении представлений какой-то группы типа неоднородной группы Лоренца из представлений малой группы, носит название метода индуцированных представлений⁶.

В таблице 2.1 приведен удобный выбор стандартного импульса k^μ и соответствующей малой группы для 4-импульсов разных классов. Из этих шести классов 4-импульсов только для случаев a , b и e известна какая-то интерпретация в терминах физичес-

Таблица 2.1

		Стандартный импульс k^μ	Малая группа
<i>a</i>	$p^2 = -M^2 < 0, p_0 > 0$	$(0,0,0,M)$	$SO(3)$
<i>b</i>	$p^2 = -M^2 < 0, p_0 < 0$	$(0,0,0,M)$	$SO(3)$
<i>в</i>	$p^2 = 0, p_0 > 0$	$(0,0,k,k)$	$ISO(2)$
<i>г</i>	$p^2 = 0, p_0 < 0$	$(0,0,k,-k)$	$ISO(2)$
<i>д</i>	$p^2 = M^2 > 0$	$(0,0,M,0)$	$SO(2,1)$
<i>e</i>	$p^\mu = 0$	$(0,0,0,0)$	$SO(3,1)$

Табл. 2.1. Стандартные импульсы и соответствующие малые группы для разных классов 4-импульсов. Здесь k — произвольная положительная энергия, например, 1 эВ. Тип малых групп почти очевиден: $SO(3)$ — обычная группа вращений в трех измерениях (не содержащая пространственных инверсий), поскольку вращения — это единственные собственные ортохронные преобразования Лоренца, оставляющие частицу с нулевым импульсом в состоянии покоя. Группы $SO(2,1)$ и $SO(3,1)$ — группы Лоренца в $(2+1)$ и $(3+1)$ измерениях, соответственно. Группа $ISO(2)$ — группа евклидовой геометрии, состоящая из вращений и трансляций в двух измерениях. Появление этой группы в качестве малой группы для случая $p^2 = 0$ объяснено в основном тексте.

ких состояний. Нет нужды много говорить здесь о случае e , когда $p^\mu = 0$. Он соответствует вакууму, который инвариантен по отношению к действию $U(\Lambda)$. В последующем изложении мы будем рассматривать только случаи a и $в$, соответствующие частицам с массой $M > 0$ и $M = 0$.

Полезно сделать паузу и сказать несколько слов о нормировке таких состояний. Пользуясь обычной квантово-механической процедурой ортогонализации и нормировки, можно выбрать состояния со стандартным импульсом k^μ , ортонормированными в том смысле, что

$$(\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\delta_{\sigma'\sigma}. \quad (2.5.12)$$

(В этом соотношении возникла δ -функция, так как $\Psi_{k,\sigma}$ и $\Psi_{k',\sigma'}$ являются собственными состояниями эрмитова оператора с собственными значениями \mathbf{k} и \mathbf{k}' , соответственно.) Отсюда вытекает, что представление малой группы в (2.5.8) и (2.5.11) должно быть унитарным*:

$$D^\dagger(W) = D^{-1}(W). \quad (2.5.13)$$

Что можно сказать о скалярных произведениях для произвольных импульсов? Используя унитарность оператора $U(\Lambda)$ в соотношениях (2.5.5) и (2.5.11), получаем, что скалярное произведение равно

$$\begin{aligned} (\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) &= N(p)U^{-1}(L(p))\Psi_{p',\sigma'} \Psi_{p,\sigma} \\ &= N(p)N^*(p')D(W(L^{-1}(p), p'))^*_{\sigma\sigma'}\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \end{aligned}$$

где $k' \equiv L^{-1}(p)p'$. Кроме того, $k \equiv L^{-1}(p)p$, и дельта-функция $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ пропорциональна $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. При $p' = p$ преобразование малой группы тривиально, $W(L^{-1}(p), p) = 1$, так что скалярное произведение равно

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (2.5.14)$$

Остается выяснить, чему равен коэффициент пропорциональности между $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ и $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Заметим, что лоренц-

* Малые группы $SO(2,1)$ и $SO(3,1)$ для $p^2 > 0$ и $p^\mu = 0$ не имеют нетривиальных конечномерных унитарных представлений. Поэтому, если бы существовали состояния с данным импульсом p^μ при $p^2 > 0$ или $p^\mu = 0$, которые бы нетривиальным образом преобразовывались под действием элементов малой группы, то таких состояний должно было быть бесконечно много.

инвариантный интеграл от произвольной скалярной функции $f(p)$ по 4-импульсам с $-p^2 = M^2 \geq 0$ и $p^0 > 0$ (т. е. для случаев *a* и *b* в таблице) равен

$$\begin{aligned} \int d^4p \delta(p^2 - M^2) \theta(p^0) f(p) &= \int d^3\mathbf{p} dp^0 \delta((p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - M^2) \theta(p^0) f(\mathbf{p}, p^0) \\ &= \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}} \end{aligned}$$

($\theta(p^0)$ – ступенчатая функция: $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$). При интегрировании «на массовой поверхности» $p^2 + M^2 = 0$ инвариантный элемент объема есть

$$d^3\mathbf{p} / \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}. \quad (2.5.15)$$

Дельта-функция определена равенством

$$F(\mathbf{p}) = \int F(\mathbf{p}') \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') d^3\mathbf{p}' = \int F(\mathbf{p}') \left[\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right] \frac{d^3\mathbf{p}'}{\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}},$$

откуда инвариантная дельта-функция равна

$$\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.5.16)$$

Так как p' и p связаны соответственно с k' и k лоренцовским преобразованием $L(p)$, имеем:

$$p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = k^0 \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$$

и поэтому

$$(\Psi_{p', \sigma'}, \Psi_{p, \sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma' \sigma} \left(\frac{p^0}{k^0} \right) \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.5.17)$$

Иногда выбирают нормировочный множитель $N(p)$ просто равным единице, $N(p) = 1$, но в этом случае нужно следить за множителями p^0/k^0 в скалярных произведениях. Я предпочитаю более привычное соглашение

$$N(p) = \sqrt{k^0/p^0}, \quad (2.5.18)$$

при выборе которого

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.5.19)$$

Рассмотрим два представляющих физический интерес случая: частицы с массой $M > 0$ и частицы нулевой массы.

Случай положительной массы

В данном случае малой группой является трехмерная группа вращений. Ее унитарные представления могут быть разложены в прямую сумму неприводимых унитарных представлений ⁷ $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(R)$ размерности $2j + 1$, где $j = 0, 1/2, 1, \dots$. Последние можно построить из стандартных матриц бесконечно малых вращений $R_{ik} = \delta_{ik} + \Theta_{ik}$, где $\Theta_{ik} = -\Theta_{ki}$ — бесконечно малые величины:

$$D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(1 + \Theta) = \delta_{\sigma'\sigma} + \frac{i}{2} \Theta_{ik} (J_{ik}^{(j)})_{\sigma'\sigma}, \quad (2.5.20)$$

$$\begin{aligned} (J_{23}^{(j)} \pm iJ_{31}^{(j)})_{\sigma'\sigma} &= (J_1^{(j)} \pm iJ_2^{(j)})_{\sigma'\sigma} \\ &= \delta_{\sigma',\sigma \pm 1} \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}, \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

$$(J_{12}^{(j)})_{\sigma'\sigma} = (J_3^{(j)})_{\sigma'\sigma} = \sigma \delta_{\sigma'\sigma}. \quad (2.5.22)$$

Здесь σ пробегает значения $j, j - 1, \dots, -j$. Для частицы массой $M > 0$ и спина j уравнение (2.5.11) принимает вид:

$$U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma'}, \quad (2.5.23)$$

где элемент малой группы $W(\Lambda, p)$ (вигнеровское вращение ⁵) определяется формулой (2.5.10):

$$W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p).$$

Чтобы рассчитать результат этого вращения, следует выбрать «стандартный буст» $L(p)$, который переводит 4-импульс $k^\mu = (0, 0, 0, M)$ в 4-импульс p^μ . Удобно выбрать его в виде

$$L_{ik}^i(\mathbf{p}) = \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k,$$

$$L_0^i(\mathbf{p}) = L_i^0(\mathbf{p}) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1},$$
(2.5.24)

$$L_0^0(\mathbf{p}) = \gamma,$$

$$\hat{p}_i \equiv p_i/|\mathbf{p}|, \quad \gamma \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} / M.$$

Очень важно, что если Λ_v^μ есть произвольное трехмерное вращение \mathcal{R} , вигнеровское вращение $W(\Lambda, p)$ совпадает с \mathcal{R} для всех p . Для доказательства заметим, что можно записать буст (2.5.24) в виде

$$L(p) = R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}),$$

где $R(\hat{\mathbf{p}})$ – вращение (стандартная форма его определена ниже уравнением (2.5.47)), переводящее ось z вдоль направления \mathbf{p} , а

$$B(|\mathbf{p}|) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2 - 1} & \gamma \end{bmatrix}.$$

Тогда для произвольного вращений \mathcal{R}

$$W(\mathcal{R}, p) = R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}).$$

Однако в результате вращения $R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}R(\hat{\mathbf{p}})$ ось z оказывается направленной сначала вдоль $\hat{\mathbf{p}}$, затем вдоль $\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}}$, и наконец, опять возвращается в исходное состояние, так что в совокупности получается просто вращение на некоторый угол θ вокруг третьей оси:

$$R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}R(\hat{\mathbf{p}}) = R(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как $R(\theta)$ коммутирует с $B(|\mathbf{p}|)$, получаем:

$$W(\mathcal{R}, p) = R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R(\theta)B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) = R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})R(\theta)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})$$

и отсюда

$$W(\mathcal{R}, \mathbf{p}) = \mathcal{R},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, состояния движущейся массивной частицы (а следовательно и многочастичные состояния) преобразуются по отношению к вращениям так же, как и в нерелятивистской квантовой механике. Это еще одно хорошее известие, поскольку весь аппарат сферических гармоник, коэффициентов Клебша–Гордана и т. п. можно целиком перенести из нерелятивистской квантовой механики в релятивистскую теорию.

Масса нуль

Прежде всего, следует установить структуру малой группы. Рассмотрим произвольный элемент малой группы W^μ_ν , где $W^\mu_\nu k^\nu = k^\mu$ и $k^\mu = (0, 0, 1, 1)$ – стандартный 4-импульс для данного случая. Действуя на времениподобный 4-вектор $t^\mu = (0, 0, 0, 1)$, это лоренцовское преобразование должно дать 4-вектор Wt , длина которого и скалярное произведение с вектором $Wk = k$ такие же, как и для вектора t :

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\mu = -1,$$

$$(Wt)^\mu k_\mu = t^\mu k_\mu = -1.$$

Любой 4-вектор, удовлетворяющий второму условию, может быть записан в виде

$$(Wt)^\mu = (\alpha, \beta, \zeta, 1 + \zeta),$$

и тогда из первого условия получаем соотношение

$$\zeta = (\alpha^2 + \beta^2) / 2. \quad (2.5.25)$$

Отсюда вытекает, что действие W^μ_ν на t^ν совпадает с действием лоренцовского преобразования

$$S^\mu_\nu(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \zeta & \zeta \\ -\alpha & -\beta & -\zeta & 1 + \zeta \end{bmatrix}. \quad (2.5.26)$$

Это не означает, что элемент W равен $S(\alpha, \beta)$, однако $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ является лоренцовским преобразованием, не меняющим времени-подобный вектор $(0, 0, 0, 1)$, т. е. простым вращением. Кроме того, S^μ_ν , как и W^μ_ν , оставляет инвариантным светоподобный 4-вектор $(0, 0, 1, 1)$, так что преобразование $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ должно быть вращением на некоторый угол θ вокруг третьей оси:

$$S^{-1}(\alpha, \beta)W = R(\theta), \quad (2.5.27)$$

$$R^\mu_\nu(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому наиболее общий вид элемента малой группы таков:

$$W(\theta, \alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)R(\theta). \quad (2.5.28)$$

Что это за группа? Заметим, что преобразования с $\theta = 0$ или с $\alpha = \beta = 0$ образуют подгруппы:

$$S(\bar{\alpha}, \bar{\beta})S(\alpha, \beta) = S(\bar{\alpha} + \alpha, \bar{\beta} + \beta), \quad (2.5.29)$$

$$R(\bar{\theta})R(\theta) = R(\bar{\theta} + \theta). \quad (2.5.30)$$

Эти подгруппы *абелевы*, т. е. все их элементы коммутируют друг с другом. Более того, подгруппа с $\theta = 0$ является *инвариантной* в том смысле, что ее элементы преобразуются в другие элементы той же подгруппы под действием любого элемента всей группы:

$$R(\theta)S(\alpha, \beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta, -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta). \quad (2.5.31)$$

С помощью соотношений (2.5.29)–(2.5.31) можно найти произведение любых элементов группы. Читатель узнает в этих правилах умножения те, которые принадлежат группе $ISO(2)$, состоящей из трансляций (на вектор (α, β)) и вращений (на угол θ) в двух измерениях.

Те группы, у которых *нет* инвариантных абелевых подгрупп, обладают рядом простых свойств, и по этой причине их называют *полупростыми*. Как мы видели, малая группа $ISO(2)$, как и неоднородная группа Лоренца, не является полупростой, что приводит к интересным усложнениям. Прежде всего, посмотрим на алгебру Ли группы $ISO(2)$. Если считать θ , α , β бесконечно малыми, то общий групповой элемент можно представить в виде

$$W(\theta, \alpha, \beta)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu,$$

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из (2.4.3) следует, что соответствующий оператор в гильбертовом пространстве равен

$$U(W(\theta, \alpha, \beta)) = 1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3, \quad (2.5.32)$$

где A и B – эрмитовые операторы:

$$A = -J^{13} + J^{10} = J_2 + K_1, \quad (2.5.33)$$

$$B = -J^{23} + J^{20} = -J_1 + K_2, \quad (2.5.34)$$

и, как и ранее, $J_3 = J_{12}$. Либо из соотношений (2.4.18)–(2.4.20), либо непосредственно из формул (2.5.29)–(2.5.31) видно, что коммутаторы этих генераторов равны

$$[J_3, A] = +iB, \quad (2.5.35)$$

$$[J_3, B] = -iA, \quad (2.5.36)$$

$$[A, B] = 0. \quad (2.5.37)$$

Так как A и B являются коммутирующими эрмитовыми операторами, они (как и операторы импульса в неоднородной группе Лоренца) могут быть одновременно диагонализированы на состояниях $\Psi_{k,a,b}$:

$$A\Psi_{k,a,b} = a\Psi_{k,a,b},$$

$$B\Psi_{k,a,b} = b\Psi_{k,a,b}.$$

Проблема заключается в том, что если будет найден один такой набор ненулевых собственных значений A и B , то мы автоматически получим континуум таких значений. Из (2.5.31) имеем:

$$U[R(\theta)]AU^{-1}[R(\theta)] = A \cos \theta - B \sin \theta,$$

$$U[R(\theta)]BU^{-1}[R(\theta)] = A \sin \theta + B \cos \theta.$$

так что при произвольном θ

$$A\Psi_{k,a,b}^\theta = (a \cos \theta - b \sin \theta)\Psi_{k,a,b}^\theta,$$

$$B\Psi_{k,a,b}^\theta = (a \sin \theta + b \cos \theta)\Psi_{k,a,b}^\theta,$$

$$\Psi_{k,a,b}^\theta \equiv U^{-1}(R(\theta))\Psi_{k,a,b}.$$

Согласно экспериментальным данным безмассовые частицы не обладают какой-либо непрерывной степенью свободы вроде θ . Чтобы избежать появления подобного континуума состояний, мы должны потребовать, чтобы физические состояния (называемые теперь $\Psi_{k,s}$) были собственными векторами A и B с $a = b = 0$:

$$A\Psi_{k,\sigma} = B\Psi_{k,\sigma} = 0. \quad (2.5.38)$$

Эти состояния различаются собственным значением оставшегося генератора

$$J_3 \Psi_{k,\sigma} = \sigma \Psi_{k,\sigma}. \quad (2.5.39)$$

Так как импульс \mathbf{k} определяет направление в трехмерном пространстве, σ равна компоненте углового момента в направлении движения, иначе, *спиральности* частицы.

Теперь можно установить свойства лоренцовских преобразований произвольных безмассовых состояний. Заметим, во-первых, что с помощью общих соображений, приведенных в разделе 2.2, уравнение (2.5.32) обобщается для конечных α и β , принимая вид

$$U(S(\alpha, \beta)) = \exp(i\alpha A + i\beta B), \quad (2.5.40)$$

а для конечных θ — вид

$$U(R(\theta)) = \exp(iJ_3 \theta). \quad (2.5.41)$$

Произвольный элемент малой группы W можно записать в виде (2.5.28), и поэтому

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\alpha A + i\beta B) \exp(iJ_3 \theta) \Psi_{k,\sigma} = \exp(i\theta \sigma) \Psi_{k,\sigma}$$

так что из (2.5.8) находим:

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\theta \sigma) \delta_{\sigma'\sigma},$$

где θ — угол, определенный так же, как в (2.5.28). В результате правило лоренцовского преобразования для безмассовой частицы произвольной спиральности задается уравнениями (2.5.11) и (2.5.18) и принимает вид

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma \theta(\Lambda, p)) \Psi_{\Lambda p, \sigma}, \quad (2.5.42)$$

где $\theta(\Lambda, p)$ определяется из равенства

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) \equiv S(\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p)) R(\theta(\Lambda, p)). \quad (2.5.43)$$

В разделе 5.9 будет показано, что электромагнитная калибровочная инвариантность возникает из той части малой группы, которая параметризована с помощью α и β .

До этого момента не было приведено никаких аргументов, запрещающих спиральности безмассовой частицы σ принимать любое действительное значение. Как мы увидим в разделе 2.7, существуют топологические соображения, ограничивающие разрешенные значения σ целыми или полуцелыми числами, как и для массивных частиц.

Для вычисления элемента малой группы (2.5.43) для заданных Λ и p (а также для вычисления в следующем разделе действия операций пространственной инверсии и отражения времени на эти состояния), нам необходимо зафиксировать соглашение о виде стандартного лоренцовского преобразования, которое переводит вектор $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)$ в p^μ . Удобно выбрать его в виде

$$L(p) = R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/\kappa), \quad (2.5.44)$$

где $B(u)$ – чистый буст в направлении третьей оси:

$$B(u) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (u^2 + 1)/2u & (u^2 - 1)/2u \\ 0 & 0 & (u^2 - 1)/2u & (u^2 + 1)/2u \end{bmatrix}. \quad (2.5.45)$$

а $R(\hat{\mathbf{p}})$ – чистое вращение, переводящее третью ось по направлению единичного вектора $\hat{\mathbf{p}}$. Например, пусть $\hat{\mathbf{p}}$ определяется полярным и азимутальным углами θ и φ :

$$\hat{\mathbf{p}} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta). \quad (2.5.46)$$

Тогда можно рассматривать $R(\hat{\mathbf{p}})$ как вращение на угол θ вокруг второй оси, переводящее $(0, 0, 1)$ в $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$, и последующее вращение на угол φ вокруг третьей оси:

$$U(R(\hat{\mathbf{p}})) = \exp(i\varphi J_3) \exp(i\theta J_2), \quad (2.5.47)$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. (Мы приводим $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$, а не $R(\hat{\mathbf{p}})$,

указывая одновременно интервал изменения θ и φ , поскольку сдвиг θ и φ на 2π определяет то же самое вращение $R(\hat{\mathbf{p}})$, однако изменяет знак $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$ при действии на состояния с полужелым спином.) Так как (2.5.47) — вращение, переводящее третью ось к направлению (2.5.46), любой другой выбор $R(\hat{\mathbf{p}})$ будет отличаться от приведенного не более чем на начальное вращение вокруг третьей оси, соответствующее просто переопределению фазового множителя для одночастичного состояния.

Заметим, что спиральность лоренц-инвариантна; безмассовая частица заданной спиральности σ выглядит одинаково (не считая импульса) во всех инерциальных системах отсчета, и можно рассматривать безмассовые частицы с заданными различными значениями спиральности как разные сорта частиц. Однако, как будет показано в следующем разделе, частицы противоположной спиральности связаны симметрией относительно пространственного отражения. Так, поскольку электромагнитные и гравитационные силы удовлетворяют требованию симметрии по отношению к пространственной инверсии, обе безмассовые частицы со спиральностями ± 1 , связанные с электромагнетизмом, носят название *фотонов*, а две безмассовые частицы со спиральностями ± 2 , которые считаются связанными с тяготением, называются *гравитонами*. С другой стороны, предполагаемые безмассовые частицы со спиральностями $\pm 1/2$, испускаемые при β -распаде ядер, при взаимодействиях не сохраняют симметрию по отношению к пространственной инверсии (если не считать тяготения), поэтому такие частицы называются по-разному: *нейтрино* в случае спиральности $+1/2$, и *антинейтрино* — в случае спиральности $-1/2$.

Хотя спиральность безмассовых частиц является лоренц-инвариантной характеристикой, сами состояния частиц не обладают этим свойством. В частности, из-за зависящего от спиральности фазового множителя $\exp(i\sigma\theta)$ в уравнении (2.5.42), состояние, образованное как линейная суперпозиция одночастичных состояний с противоположными спиральностями, перейдет в результате лоренцовского преобразования в другую суперпозицию. Например, общее однофотонное состояние с заданным 4-импульсом можно записать в виде

$$\Psi_{p;\alpha} = \alpha_+ \Psi_{p,+1} + \alpha_- \Psi_{p,-1},$$

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1.$$

Наиболее общим является случай *эллиптической поляризации*, когда оба коэффициента $|\alpha_{\pm}|$ не равны нулю и различны. Предельными частными случаями является *циркулярная (круговая) поляризация*, когда один из коэффициентов α_+ или α_- обращается в нуль, и *линейная поляризация*, когда $|\alpha_+| = |\alpha_-|$. Общая фаза α_+ и α_- не имеет физического смысла и в случае линейной поляризации может быть выбрана так, что $\alpha_- = \alpha_+^*$. Однако относительная фаза важна. Действительно, в случае линейной поляризации с $\alpha_- = \alpha_+^*$ фазу α_+ можно сопоставить с углом между плоскостью поляризации и некоторым фиксированным опорным направлением, перпендикулярным вектору \mathbf{p} . Из формулы (2.5.43) следует, что под действием лоренцовского преобразования $\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mu}$ этот угол изменяется на величину $\theta(\Lambda, \mathbf{p})$. Плоскополяризованные гравитоны можно определить аналогичным образом, при этом следствием соотношения (2.5.42) будет то, что под действием лоренцовского преобразования Λ плоскость поляризации повернется на угол $2\theta(\Lambda, \mathbf{p})$.

2.6. Пространственная инверсия и обращение времени

В разделе 2.3 было показано, что всякое однородное преобразование Лоренца является или собственным и ортохронным (т. е. $\text{Det } \Lambda = +1$ и $\Lambda^0_0 \geq +1$), или произведением собственного ортохронного преобразования и одного из преобразований \mathcal{P} , \mathcal{T} или \mathcal{PT} , где \mathcal{P} и \mathcal{T} — преобразования пространственной инверсии и обращения времени:

$$\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Всегда считалось самоочевидным, что фундаментальное правило умножения элементов группы Пуанкаре

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$$

выполняется и в том случае, если Λ и/или $\bar{\Lambda}$ включают множители \mathcal{P} , \mathcal{T} или \mathcal{PT} . В частности, считалось, что существуют операторы, соответствующие самим \mathcal{P} и \mathcal{T} ,

$$\mathbf{P} \equiv U(\mathcal{P}, 0), \quad \mathbf{T} \equiv U(\mathcal{T}, 0),$$

такие, что

$$\mathbf{P}U(\Lambda, a)\mathbf{P}^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a), \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{T}U(\Lambda, a)\mathbf{T}^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a) \quad (2.6.2)$$

для любого собственного ортохронного преобразования Лоренца Λ^μ_ν и любой трансляции a^μ . Эти законы преобразования содержат в себе большую часть того, что принято понимать под словами о «сохранении» величин \mathbf{P} и \mathbf{T} .

В 1956–1957 годах стало понятно⁸, что для \mathbf{P} это верно только в приближении, когда мы пренебрегаем эффектами слабых взаимодействий, типа тех, которые обуславливают β -распад. Инвариантность по отношению к обращению времени «прожила» еще некоторое время, пока в 1964 году не появились косвенные свидетельства⁹, что эти свойства \mathbf{T} также верны лишь приближенно (см. раздел 3.3). В последующем изложении мы примем, что операторы \mathbf{P} и \mathbf{T} , удовлетворяющие соотношениям (2.6.1) и (2.6.2), действительно существуют, но будем держать в памяти, что это утверждение носит приближенный характер.

Рассмотрим (2.6.1) и (2.6.2) для случая инфинитезимальных преобразований, т. е. положим

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu,$$

где $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ и ϵ_μ — бесконечно малые величины. Пользуясь соотношением (2.4.3) и приравнивая коэффициенты при $\omega_{\rho\sigma}$ и ϵ_ρ в (2.6.1) и (2.6.2), найдем свойства преобразования генераторов группы Пуанкаре по отношению к \mathbf{P} и \mathbf{T} :

$$\mathbf{P}iJ^{\rho\sigma}\mathbf{P}^{-1} = i\mathcal{P}^\rho_\mu \mathcal{P}^\sigma_\nu J^{\mu\nu}, \quad (2.6.3)$$

$$\mathbf{P}iP^\rho\mathbf{P}^{-1} = i\mathcal{P}^\rho_\mu P^\mu, \quad (2.6.4)$$

$$TiJ^{\rho\sigma}T^{-1} = i\mathcal{T}_{\mu}^{\rho}\mathcal{T}_{\nu}^{\sigma}J^{\mu\nu}, \quad (2.6.5)$$

$$TiP^{\rho}T^{-1} = i\mathcal{T}_{\mu}^{\rho}P^{\mu}. \quad (2.6.6)$$

Во многом эти соотношения напоминают формулы (2.4.8) и (2.4.9), если не считать того, что мы не сократили множители i в обеих частях этих уравнений, так как еще не приняли решения, считать ли \mathbf{P} и \mathbf{T} линейными и унитарными или антилинейными и антиунитарными операторами.

Решение принимается очень просто. Полагая $\rho = 0$ в формуле (2.6.4), находим:

$$PiHP^{-1} = iH,$$

где $H \equiv P^0$ — оператор энергии. Если бы \mathbf{P} был антиунитарным и антилинейным оператором, то он антикоммутировал бы с i , так что $PiHP^{-1} = -H$. Но в этом случае для любого состояния Ψ с $E > 0$ существовало бы другое состояние $P^{-1}\Psi$ с энергией $-E < 0$. Однако не существует состояний с отрицательной энергией (т. е. энергией, меньшей энергии вакуума), так что мы вынуждены выбрать другую альтернативу: оператор \mathbf{P} — *линейный и унитарный* и он *коммутирует* с оператором H .

С другой стороны, полагая $\rho = 0$ в (2.6.6), имеем

$$TiHT^{-1} = -iH.$$

Если предположить, что \mathbf{T} — линейный и унитарный оператор, можно просто сократить все i , так что $TiHT^{-1} = -H$, и в результате мы опять приходим к губительному выводу, что для любого состояния Ψ с энергией E существует другое состояние $T^{-1}\Psi$ с энергией $-E$. Чтобы избежать этого, мы вынуждены заключить, что \mathbf{T} является *антилинейным* и *антиунитарным* оператором.

Поскольку мы решили, что оператор \mathbf{P} линеен, а \mathbf{T} антилинеен, можно переписать соотношения (2.6.3)–(2.6.6) в трехмерных обозначениях через генераторы (2.4.15)–(2.4.17):

$$PJP^{-1} = +\mathbf{J}, \quad (2.6.7)$$

$$PKP^{-1} = -\mathbf{K}, \quad (2.6.8)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = -\mathbf{P}, \quad (2.6.9)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1} = -\mathbf{J}, \quad (2.6.10)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-1} = +\mathbf{K}, \quad (2.6.11)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{T}^{-1} = -\mathbf{P} \quad (2.6.12)$$

и, как показано выше,

$$\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{H}. \quad (2.6.13)$$

С физической точки зрения важно, что \mathbf{P} должен сохранять знак \mathbf{J} , так как по крайней мере орбитальная часть \mathbf{J} есть векторное произведение $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ двух векторов, каждый из которых меняет знак при инверсии пространственных координат. С другой стороны, оператор \mathbf{T} меняет знак \mathbf{J} , так как после обращения времени наблюдатель видит все тела вращающимися в другую сторону. Заметим попутно, что (2.6.10) совместно с перестановочными соотношениями для компонент углового момента $\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}$, поскольку \mathbf{T} меняет знак не только \mathbf{J} , но и i . Читатель может без труда проверить, что (2.6.7)–(2.6.13) совместны со всеми перестановочными соотношениями (2.4.18)–(2.4.24).

Рассмотрим действие операторов \mathbf{P} и \mathbf{T} на одночастичные состояния.

P: $M > 0$

Одночастичные состояния $\Psi_{k,\sigma}$ определены как собственные векторы операторов \mathbf{p} , H и J_3 с собственными значениями 0 , M и σ , соответственно. Из соотношений (2.6.7), (2.6.9) и (2.6.13) следует, что это же верно и для состояния $\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma}$, и потому, чтобы исключить вырождение, такие состояния могут отличаться только фазой:

$$\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma \Psi_{k,\sigma}$$

причем фазовый множитель ($|\eta| = 1$) может как зависеть, так и не зависеть от проекции спина σ . Чтобы показать, что η_σ не зависит от σ , заметим, что из (2.5.8), (2.5.20) и (2.5.21) следует формула

$$(J_1 \pm iJ_2)\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\Psi_{k,\sigma \pm 1}, \quad (2.6.14)$$

где j — спин частицы. Действуя оператором \mathbf{P} на обе части этого равенства, имеем

$$\eta_\sigma = \eta_{\sigma \pm 1},$$

так что η_σ действительно не зависит от σ . Поэтому можно записать

$$\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta\Psi_{k,\sigma}, \quad (2.6.15)$$

где фазовый множитель η носит название *внутренней четности*, зависящей только от типа частицы, на волновую функцию которой действует оператор \mathbf{P} .

Чтобы перейти к состояниям с конечным импульсом, следует подействовать на состояние унитарным оператором $U(L(p))$, соответствующим «бусту» (2.5.24):

$$\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0} U(L(p)) \Psi_{k,\sigma}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}L(p)\mathbf{P}^{-1} &= L(\mathbf{P}p), \\ \mathbf{P}p &= (-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}). \end{aligned}$$

так что, пользуясь (2.6.1) и (2.6.15), находим:

$$\mathbf{P}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0} U(L(\mathcal{P}p)) \eta \Psi_{k,\sigma},$$

или

$$\mathbf{P}\Psi_{p,\sigma} = \eta \Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}. \quad (2.6.16)$$

T: M > 0

Из уравнений (2.6.10), (2.6.12) и (2.6.13) следует, что действие \mathbf{T} на одночастичное состояние с нулевым импульсом $\Psi_{k,\sigma}$ приводит к состоянию со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{T}\Psi_{k,\sigma}) &= 0, \\ H(\mathbf{T}\Psi_{k,\sigma}) &= M(\mathbf{T}\Psi_{k,\sigma}), \\ J_3(\mathbf{T}\Psi_{k,\sigma}) &= -\sigma(\mathbf{T}\Psi_{k,\sigma}), \end{aligned}$$

так что

$$T\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma},$$

где ζ_σ — фазовый множитель. Применяя оператор T к (2.6.14) и вспоминая, что T антикоммутирует не только с \mathbf{J} , но и с i , находим:

$$(-J_1 \pm iJ_2)\zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\zeta_{\sigma \pm 1} \Psi_{k,-\sigma \pm 1}.$$

Снова используя в левой части равенства соотношение (2.6.14), видим, что квадратные корни сокращаются и

$$-\zeta_\sigma = \zeta_{\sigma \pm 1}.$$

Решением последнего уравнения является $\zeta_\sigma = \zeta(-)^{j-\sigma}$, где ζ — некоторый другой фазовый множитель, зависящий только от типа частицы:

$$T\Psi_{k,\sigma} = \zeta(-)^{j-\sigma} \Psi_{k,-\sigma}. \quad (2.6.17)$$

Однако в противоположность «внутренней четности» η фазовый множитель операции обращения времени ζ физически несущественен. Этот вывод следует из того, что всегда можно переопределить одночастичные состояния, изменив их фазу:

$$\Psi_{k,\sigma} \rightarrow \Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{1/2} \Psi_{k,\sigma},$$

так что фазовый множитель ζ исчезает из закона преобразования:

В последующем изложении мы сохраним произвольный фазовый множитель ζ в (2.6.17), чтобы не ограничивать возможности выбора фазы одночастичных состояний. Однако следует помнить, что эта фаза на самом деле не имеет значения.

Чтобы построить состояния с конечным импульсом, вновь действуем «бустом» (2.5.24). Заметим, что

$$\mathcal{J}L(\mathbf{p})\mathcal{J}^{-1} = L(\mathcal{J}\mathbf{p}),$$

$$\mathcal{J}\mathbf{p} = (-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}).$$

(Это означает, что изменение знака каждого элемента Λ^μ_ν с нечетным числом *временных* индексов эквивалентно изменению знака элементов с нечетным числом *пространственных* индексов.) С помощью (2.6.2) и (2.5.5) находим:

$$\Gamma\Psi_{p,\sigma} = \zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}. \quad (2.6.18)$$

P: M = 0

Действуя на состояние $\Psi_{k,\sigma}$, определенное как собственный вектор оператора P^μ с собственным значением $k^\mu = (0,0,\kappa,\kappa)$ и собственный вектор оператора J_3 с собственным значением σ , оператор четности \mathbf{P} переводит это состояние в состояние с 4-импульсом $(\mathcal{P}k)^\mu = (0,0,-\kappa,\kappa)$ и $J_3 = \sigma$. Таким образом, состояние со спиральностью (проекцией спина на направление импульса) σ переводится в состояние со спиральностью $-\sigma$. Как отмечалось выше, это показывает, что существование симметрии относительно пространственной инверсии требует, чтобы каждый тип безмассовых частиц с ненулевой спиральностью обязательно имел партнера с противоположной спиральностью. Так как \mathbf{P} не оставляет инвариантным стандартный импульс, удобно вместо этого рассмотреть оператор $U(R_2^{-1})\mathbf{P}$, где R_2 — вращение, также переводящее k в $\mathcal{P}k$. Его удобно выбрать как вращение на угол -180° вокруг оси y :

$$U(R_2) = \exp(-i\pi J_2). \quad (2.6.19)$$

Так как $U(R_2^{-1})$ меняет знак J_3 , находим:

$$U(R_2^{-1})\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma\Psi_{k,-\sigma}, \quad (2.6.20)$$

где η_σ — фазовый множитель. Операция $R_2^{-1}\mathcal{P}$ коммутирует с лоренцовским «бустом» (2.5.45), а \mathcal{P} коммутирует с вращением, поворачивающим ось z в направлении \mathbf{p} , так что, действуя оператором \mathbf{P} на (2.5.5), получаем для произвольного 4-импульса p^μ

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)U(R_2^{-1})\mathbf{P}\Psi_{k,\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\eta_\sigma U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,-\sigma}. \end{aligned}$$

Заметим, что $R(\hat{\mathbf{p}})R_2$ — это вращение, поворачивающее ось z в направлении $-\hat{\mathbf{p}}$, но $U(R(\hat{\mathbf{p}})R_2)$ не в точности равно $U(R(-\hat{\mathbf{p}}))$. Согласно формуле (2.5.47)

$$U(R(-\hat{\mathbf{p}})) = \exp(i(\varphi \pm \pi)J_3) \exp(i(\pi - \theta)J_2),$$

где азимутальный угол выбран как $\varphi + \pi$, если $0 \leq \varphi \leq \pi$, или $\varphi - \pi$, если $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$, с тем чтобы он оставался в интервале от 0 до 2π . Тогда

$$\begin{aligned} U^{-1}(R(-\hat{\mathbf{p}}))U(R(\hat{\mathbf{p}})R_2) &= \exp(-i(\pi - \theta)J_2) \\ &\times \exp(-i(\varphi \pm \pi)J_3) \exp(i\varphi J_3) \exp(i\theta J_2) \exp(-i\pi J_2) \\ &= \exp(-i(\pi - \theta)J_2) \exp(\mp i\pi J_3) \exp(-i(\pi - \theta)J_2). \end{aligned}$$

Но вращение на угол $\pm 180^\circ$ вокруг оси z меняет знак J_2 , так что

$$U(R(\hat{\mathbf{p}})R_2) = U(R(-\hat{\mathbf{p}})) \exp(\pm i\pi J_3). \quad (2.6.21)$$

Кроме того, $R(-\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/k)$ есть просто стандартный буст $L(\mathcal{P})$ в направлении $\mathcal{P} = (-\mathbf{p}, p^0)$. Поэтому окончательно

$$\mathbf{P}\Psi_{p,\sigma} = \eta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P},-\sigma}, \quad (2.6.22)$$

где фаза равна $-\pi\sigma$ или $+\pi\sigma$ в зависимости от того, положительна или отрицательна y -компонента вектора \mathbf{p} . Это необычное изменение знака в результате операции инверсии для безмассовых частиц полуцелого спина связано с принятым в (2.5.47) соглашением для вращения, которое использовалось для определения состояний безмассовых частиц с произвольным импульсом. Поскольку группа вращений не является односвязной, подобные нарушения непрерывности неизбежны.

T: M = 0

Действуя на состояние $\Psi_{k,\sigma}$, являющимся собственным для операторов P^μ и J_3 с собственными значениями $k^\mu = (0, 0, k, k)$ и σ , соответственно, оператор обращения времени T переводит его в состояние с 4-импульсом $(\mathcal{K})^\mu = (0, 0, -k, k)$ и $J_3 = -\sigma$. Таким образом T не изменяет спиральность $\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}$, и поэтому ничего нельзя сказать о том, имеются ли у частиц со спиральностью σ партнеры

с противоположной спиральностью $-\sigma$. Поскольку T , как и P , не оставляет инвариантным стандартный 4-импульс, удобно рассмотреть генератор $U(R_2^{-1})T$, где R_2 — вращение (2.6.19), который также переводит k в (\mathcal{K}) . Это преобразование коммутирует с J_3 , так что

$$U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,\sigma}, \quad (2.6.23)$$

где ζ_σ — другая фаза. Так как $R_2^{-1}T$ коммутирует с бустом (2.5.45), а T коммутирует с вращением, то, действуя оператором T на состояние (2.5.5), получим:

$$T\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U\left(R(\hat{p})R_2 B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right) \zeta_\sigma \Psi_{k,\sigma}. \quad (2.6.24)$$

С помощью (2.6.21) находим окончательно:

$$T\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma) \Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}. \quad (2.6.25)$$

Как и ранее, верхний или нижний знак в этой формуле соответствует положительному или отрицательному знаку y -компоненты вектора \mathbf{p} .

* * *

Любопытно, что квадрат оператора обращения времени T^2 очень просто действует на одночастичные состояния как массивных, так и безмассовых частиц. Пользуясь (2.6.18) и вспоминая, что T — антиунитарный оператор, получаем, что для одночастичных состояний массивных частиц

$$T^2\Psi_{p,\sigma} = T\zeta(-)^{j-\sigma} \Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} = \zeta^*(-)^{j-\sigma} \zeta(-)^{j+\sigma} \Psi_{p,\sigma},$$

или иначе

$$T^2\Psi_{p,\sigma} = (-)^{2j} \Psi_{p,\sigma}. \quad (2.6.26)$$

Для безмассовых частиц мы получаем такой же результат. Если y -компонента вектора \mathbf{p} положительна, то y -компонента $\mathcal{P}\mathbf{p}$ отрицательна и наоборот, поэтому из (2.6.25) находим:

$$\begin{aligned} T^2\Psi_{p,\sigma} &= T\zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma^* \exp(\mp i\pi\sigma)\zeta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma} \\ &= \exp(\mp 2i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}. \end{aligned}$$

Если спиральность σ – целое или полуцелое число, этот результат можно записать в виде:

$$T^2\Psi_{p,\sigma} = (-)^{2|\sigma|}\Psi_{p,\sigma}. \quad (2.6.27)$$

Под «спином» безмассовой частицы обычно понимают абсолютное значение ее спиральности, поэтому (2.6.27) эквивалентно (2.6.26).

Этот результат приводит к интересному следствию. Когда T^2 действует на любое состояние Ψ системы невзаимодействующих массивных или безмассовых частиц, он порождает множитель $(-)^{2j}$ или $(-)^{2|\sigma|}$ для каждой частицы. Поэтому, если состояние содержит нечетное число частиц с полуцелыми спином или спиральностью (и дополнительно любое количество частиц с целыми спином или спиральностью), мы получим общее изменение знака:

$$T^2\Psi = -\Psi. \quad (2.6.28)$$

Если теперь «включить» различные взаимодействия, этот результат сохранится, при условии, что эти взаимодействия, нарушая, быть может, вращательную инвариантность, не нарушают инвариантность относительно обращения времени. (Например, приведенные рассуждения применимы в том случае, когда система подвергается воздействию статических гравитационного и электрического полей.) Предположим теперь, что Ψ есть собственное состояние гамильтониана. Так как T коммутирует с гамильтонианом, состояние $T\Psi$ также будет собственным состоянием гамильтониана. Будет ли это то же самое состояние? Если так, то $T\Psi$ может отличаться от Ψ только фазовым множителем:

$$T\Psi = \zeta\Psi,$$

но в этом случае

$$T^2\Psi = T(\zeta\Psi) = \zeta^*T\Psi = |\zeta|^2\Psi = \Psi,$$

что противоречит (2.6.28). Мы видим, что если у оператора

энергии есть собственное состояние, удовлетворяющее (2.6.28), то обязательно имеется другое состояние с той же энергией. Этот факт известен как *вырождение Крамерса*¹⁰. Конечно, вывод тривиален, если система инвариантна относительно вращений, так как полный угловой момент j любого состояния этой системы должен быть полуцелым, и поэтому каждый энергетический уровень будет $2j + 1 = 2, 4, \dots$ -кратно вырожден. Удивительно, что даже в случае, когда инвариантность относительно вращений нарушена внешними полями, например, электростатическим полем, до тех пор, пока эти поля инвариантны относительно T , сохраняется по крайней мере двукратное вырождение. В частности, если бы любая частица имела электрический или гравитационный дипольный момент, то статическое электрическое или гравитационное поле полностью снимало бы $2j + 1$ -кратное вырождение по спину, так что подобные дипольные моменты запрещены инвариантностью по отношению к обращению времени.

Для полноты изложения следует отметить, что P - и T -преобразования могут действовать на мультиплеты частиц одной массы более сложным образом. Эта возможность рассмотрена в Приложении В к данной главе. Примеры ее использования в физике неизвестны.

2.7. Проективные представления *

Вернемся к возможности, указанной в разделе 2.2, когда группа симметрии может действовать на физические состояния проективно, иначе говоря, когда элементы группы симметрии T, \bar{T} и т. д. могут быть представлены в физическом гильбертовом пространстве операторами $U(T), U(\bar{T})$ и т. п., удовлетворяющими правилу композиции:

$$U(T)U(\bar{T}) = \exp(i\phi(T, \bar{T}))U(T\bar{T}), \quad (2.7.1)$$

с действительной фазой ϕ . (Черта здесь используется только для того, чтобы отличать один оператор симметрии от другого.) Основ-

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

ное требование, которому должна удовлетворять любая фаза ϕ в (2.7.1), вытекает из условия ассоциативности

$$U(T_3)(U(T_2)U(T_1)) = (U(T_3)U(T_2))U(T_1).$$

Оно имеет следующий вид:

$$\phi(T_2, T_1) + \phi(T_3, T_2T_1) = \phi(T_3, T_2) + \phi(T_3T_2, T_1). \quad (2.7.2)$$

Конечно, каждая фаза вида

$$\phi(T, \bar{T}) = \alpha(T\bar{T}) - \alpha(T) - \alpha(\bar{T}) \quad (2.7.3)$$

автоматически удовлетворяет (2.7.2), но проективное представление с такой фазой можно заменить на обычное представление, заменив оператор $U(T)$ на

$$\tilde{U}(T) \equiv U(T) \exp(i\alpha(T)),$$

для которого

$$\tilde{U}(T)\tilde{U}(\bar{T}) = \tilde{U}(T\bar{T}).$$

Всякое множество функций $\phi(T, \bar{T})$, удовлетворяющих (2.7.2) и отличающихся только на функции $\Delta\phi(T, \bar{T})$ вида (2.7.3), называется *2-коциклом*. Тривиальный коцикл содержит функцию $\phi = 0$, и поэтому состоит из функций вида (2.7.3), которые можно устранить переопределением $U(T)$. Нас интересует вопрос, допускает ли группа симметрии существование нетривиальных коциклов, иными словами, может ли эта группа иметь представление на физическом гильбертовом пространстве, которое *внутренне* проективно в том смысле, что фаза $\phi(T, \bar{T})$ *не может быть* устранена описанным выше образом.

Чтобы ответить на этот вопрос, полезно рассмотреть сначала влияние фазы ϕ в (2.7.1) на перестановочные соотношения генераторов бесконечно малых преобразований. Если \bar{T} или T – единичный элемент группы симметрии, фаза ϕ очевидно должна равняться нулю:

$$\phi(T, 1) = \phi(1, \bar{T}) = 0. \quad (2.7.4)$$

Если оба элемента T и \bar{T} *близки* к единичному элементу, фаза

должна быть мала. Используя для параметризации элементов группы координаты θ^a (см. раздел 2.2), причем $T(0) \equiv 1$, находим, что вследствие (2.7.4) разложение в окрестности $\theta = \bar{\theta} = 0$ должно начинаться со слагаемых порядка $\theta \bar{\theta}$:

$$\phi(T(\theta), T(\bar{\theta})) = f_{ab} \theta^a \bar{\theta}^b + \dots, \quad (2.7.5)$$

где f_{ab} – действительные числовые константы. Подставляя это разложение в степенное разложение соотношения (2.7.1) и повторяя шаги, которые привели к (2.2.22), получаем:

$$[t_b, t_c] = iC^a{}_{bc} t_a + iC_{bc} 1, \quad (2.7.6)$$

где C_{bc} – антисимметричный коэффициент,

$$C_{bc} = -f_{bc} + f_{cb}. \quad (2.7.7)$$

Появление в правой части перестановочных соотношений слагаемых, пропорциональных единичному элементу (так называемых *центральных зарядов*), является для алгебры Ли прямым аналогом наличия фаз в проективном представлении группы.

Постоянные C_{bc} , так же, как $C^a{}_{bc}$ удовлетворяют важным ограничениям, вытекающим из тождества Якоби. Вычисляя коммутатор (2.7.6) с t_d и добавляя аналогичные выражения, в которых индексы b, c, d заменены на c, d, b и d, b, c , убеждаемся, что сумма всех трех двойных коммутаторов тождественно обращается в нуль, откуда

$$C^a{}_{bc} C^e{}_{ad} + C^a{}_{cd} C^e{}_{ab} + C^a{}_{db} C^e{}_{ac} = 0, \quad (2.7.8)$$

а также

$$C^a{}_{bc} C_{ad} + C^a{}_{cd} C_{ab} + C^a{}_{db} C_{ac} = 0. \quad (2.7.9)$$

Уравнение (2.7.9) всегда имеет один очевидный класс ненулевых решений для C_{ab} :

$$C_{ab} = C^e{}_{ab} \phi_e, \quad (2.7.10)$$

где ϕ_e – произвольные действительные постоянные. Для этих решений можно устранить центральные заряды из (2.7.6) переопределением генераторов:

$$t_a \rightarrow \bar{t}_a \equiv t_a + \phi_a. \quad (2.7.11)$$

Новые генераторы удовлетворяют перестановочным соотношениям без центральных зарядов:

$$[\tilde{t}_b, \tilde{t}_c] = iC^a_{bc}\tilde{t}_a. \quad (2.7.12)$$

Данная алгебра Ли может либо допускать, либо не допускать существование решений уравнения (2.7.9), отличных от (2.7.10).

Теперь сформулируем ключевую теорему, определяющую возможность или невозможность существования внутренне проективных представлений. Фаза любого представления $U(T)$ данной группы может быть выбрана так, что $\phi = 0$ в (2.7.1), если выполнены два условия:

а) генераторы группы в этом представлении могут быть переопределены так же, как в формуле (2.7.11), с тем, чтобы устранить из алгебры Ли все центральные заряды;

б) группа является односвязной, т. е. любые два элемента группы могут быть связаны путем, целиком лежащим внутри группы, а любые два таких пути могут быть непрерывным образом преобразованы друг в друга. (Эквивалентно, любая петля, начинающаяся и кончающаяся на каком-то групповом элементе, может быть непрерывным образом стянута в точку.)

Доказательство теоремы дано в Приложении Б к этой главе. Там же комментируется случай неодносвязных групп. Согласно этой теореме существуют ровно две причины (причем одна не исключает другую), по которым могут возникать внутренне проективные представления: алгебраическая, когда представление группы проективно уже в окрестности единицы, или топологическая, когда группа неодносвязна, и поэтому путь из 1 в T и затем из T в \bar{T} не может быть непрерывно продеформирован в некоторый другой путь из 1 в \bar{T} . В последнем случае фаза ϕ в (2.7.1) зависит от конкретного выбора стандартных путей, ведущих из единичного элемента к различным элементам группы и используемых для определения соответствующих операторов U .

Рассмотрим теперь каждую из этих возможностей по очереди применительно к частному случаю неоднородной группы Лоренца.

(А) Алгебра

С учетом центральных зарядов перестановочные соотношения

для генераторов неоднородной группы Лоренца будут иметь вместо (2.4.12)–(2.4.14) вид:

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} + C^{\rho\sigma, \mu\nu}, \quad (2.7.13)$$

$$i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma} P^{\rho} + C^{\rho\sigma, \mu}, \quad (2.7.14)$$

$$i[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] = \eta^{\nu\rho} P^{\mu} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu} + C^{\rho, \mu\nu}, \quad (2.7.15)$$

$$i[P^{\mu}, P^{\rho}] = C^{\rho, \mu}. \quad (2.7.16)$$

Очевидно, что константы C удовлетворяют также условиям антисимметрии:

$$C^{\rho\sigma, \mu\nu} = -C^{\mu\nu, \rho\sigma}, \quad (2.7.17)$$

$$C^{\rho\sigma, \mu} = -C^{\mu, \rho\sigma}, \quad (2.7.18)$$

$$C^{\rho, \mu} = -C^{\mu, \rho}. \quad (2.7.19)$$

Покажем, что у всех этих констант есть дополнительные алгебраические свойства, позволяющие устранить их переопределением $J^{\mu\nu}$ и P^{μ} путем сдвига на постоянные слагаемые. (Это соответствует переопределению фазы операторов $U(\Lambda, a)$.) Чтобы вывести указанные свойства, используем тождества Якоби

$$[J^{\mu\nu}, [P^{\rho}, P^{\sigma}]] + [P^{\sigma}, [J^{\mu\nu}, P^{\rho}]] + [P^{\rho}, [P^{\sigma}, J^{\mu\nu}]] = 0, \quad (2.7.20)$$

$$[J^{\lambda\eta}, [J^{\mu\nu}, P^{\rho}]] + [P^{\rho}, [J^{\lambda\eta}, J^{\mu\nu}]] + [J^{\mu\nu}, [P^{\rho}, J^{\lambda\eta}]] = 0, \quad (2.7.21)$$

$$[[J^{\lambda\eta}, [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]] + [J^{\rho\sigma}, [J^{\lambda\eta}, J^{\mu\nu}]] + [J^{\mu\nu}, [J^{\rho\sigma}, J^{\lambda\eta}]] = 0. \quad (2.7.22)$$

(Тождество Якоби с тремя P удовлетворяется автоматически и поэтому не содержит дополнительной информации.) Подставляя (2.7.13)–(2.7.16) в (2.7.20)–(2.7.22), находим алгебраические соотношения, которым удовлетворяют константы C :

$$0 = \eta^{\nu\rho} C^{\mu, \sigma} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu, \sigma} - \eta^{\nu\sigma} C^{\mu, \rho} + \eta^{\mu\sigma} C^{\nu, \rho}, \quad (2.7.23)$$

$$0 = \eta^{\nu\rho} C^{\mu,\lambda\eta} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu,\lambda\eta} - \eta^{\mu\eta} C^{\rho,\lambda\nu} + \eta^{\lambda\mu} C^{\rho,\nu\eta} \\ + \eta^{\lambda\nu} C^{\rho,\mu\eta} - \eta^{\eta\nu} C^{\rho,\mu\lambda} + \eta^{\rho\lambda} C^{\eta,\mu\nu} - \eta^{\rho\eta} C^{\lambda,\mu\nu} , \quad (2.7.24)$$

$$0 = \eta^{\nu\rho} C^{\mu\sigma,\lambda\eta} - \eta^{\mu\rho} C^{\nu\sigma,\lambda\eta} - \eta^{\sigma\mu} C^{\rho\nu,\lambda\eta} + \eta^{\sigma\nu} C^{\rho\mu,\lambda\eta} \\ + \eta^{\eta\mu} C^{\lambda\nu,\rho\sigma} - \eta^{\lambda\mu} C^{\nu\eta,\rho\sigma} - \eta^{\nu\lambda} C^{\mu\eta,\rho\sigma} + \eta^{\nu\eta} C^{\mu\lambda,\rho\sigma} \\ + \eta^{\sigma\lambda} C^{\rho\eta,\mu\nu} - \eta^{\rho\lambda} C^{\sigma\eta,\mu\nu} - \eta^{\eta\rho} C^{\lambda\sigma,\mu\nu} + \eta^{\eta\sigma} C^{\lambda\rho,\mu\nu} . \quad (2.7.25)$$

Сворачивая (2.7.23) с $\eta_{\nu\rho}$, получаем:

$$C^{\mu,\sigma} = 0 . \quad (2.7.26)$$

С другой стороны, константы $C^{\mu,\lambda\eta}$ и $C^{\rho\sigma,\mu\nu}$ не обязательно равны нулю, но их алгебраическая структура достаточно проста, что позволяет устранить эти константы переопределением P^μ и $J^{\mu\nu}$, соответственно. Свертка (2.7.24) с $\eta_{\nu\rho}$ дает

$$C^{\mu,\lambda\eta} = \eta^{\mu\eta} C^{\lambda} - \eta^{\mu\lambda} C^{\eta} , \quad (2.7.27)$$

$$C^{\lambda} \equiv \frac{1}{3} \eta_{\rho\nu} C^{\rho,\lambda\nu} . \quad (2.7.28)$$

Аналогично, сворачивая (2.7.25) с $\eta_{\nu\rho}$, получаем:

$$C^{\mu\sigma,\lambda\eta} = \eta^{\eta\mu} C^{\lambda\sigma} - \eta^{\lambda\mu} C^{\eta\sigma} + \eta^{\sigma\lambda} C^{\eta\mu} - \eta^{\eta\sigma} C^{\lambda\mu} , \quad (2.7.29)$$

$$C^{\lambda\sigma} \equiv \frac{1}{2} \eta_{\nu\rho} C^{\lambda\nu,\sigma\rho} . \quad (2.7.30)$$

(Эти выражения автоматически удовлетворяют соотношениям (2.7.24) и (2.7.25), так что из тождеств Якоби уже нельзя извлечь дополнительной информации.) Теперь видно, что если константы C не равны нулю, их можно устранить, определяя новые генераторы

$$\tilde{P}^\mu \equiv P^\mu + C^\mu , \quad (2.7.31)$$

$$\tilde{J}^{\mu\sigma} \equiv J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma} , \quad (2.7.32)$$

и тогда перестановочные соотношения примут вид, который они должны иметь для обычного представления:

$$i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} \tilde{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \tilde{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} \tilde{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} \tilde{J}^{\rho\mu}, \quad (2.7.33)$$

$$i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{P}^\rho] = \eta^{\nu\rho} \tilde{P}^\mu - \eta^{\mu\rho} \tilde{P}^\nu, \quad (2.7.34)$$

$$i[\tilde{P}^\mu, \tilde{P}^\rho] = 0. \quad (2.7.35)$$

Мы всегда будем записывать перестановочные соотношения в виде (2.7.33)–(2.7.35), но с опущенными тильдами.

Между прочим, заметим, что отсутствие центральных зарядов в случае алгебры, порождаемой $J^{\mu\nu}$, можно немедленно вывести из того факта, что эта алгебра относится к типу *полупростых*. (Полупростые алгебры Ли не имеют *инвариантных абелевых подалгебр*, порождаемых коммутирующими друг с другом генераторами, коммутаторы которых с любыми другими генераторами алгебры также принадлежат этой подалгебре.) Имеется общая теорема¹¹, согласно которой любые центральные заряды в случае полупростых алгебр Ли всегда можно устранить переопределением генераторов, как в (2.7.32). С другой стороны, полная алгебра Пуанкаре, порождаемая коммутаторами $J^{\mu\nu}$ и P^μ , не является полупростой (генераторы P^μ образуют инвариантную абелеву подалгебру), и требуются специальные аргументы. чтобы показать, что ее центральные заряды можно устранить тем же способом. В самом деле, неполупростая алгебра Галилея, обсуждавшаяся в разделе 2.4, допускает существование центрального заряда — массы M .

Итак, неоднородная группа Лоренца удовлетворяет первому из двух условий, необходимых для исключения внутренне проективных представлений. Что можно сказать о втором условии?

(Б) Топология

Чтобы исследовать топологию неоднородной группы Лоренца, весьма удобно представить однородные лоренцовские преобразования 2×2 комплексными матрицами. Действительно, любой действительный 4-вектор V^μ можно использовать для построения эрмитовой 2×2 матрицы

$$v \equiv V^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}, \quad (2.7.36)$$

где σ_μ — обычные матрицы Паули, причем $\sigma_0 \equiv 1$. Обратное, всякая 2×2 эрмитова матрица может быть записана в этом виде и поэтому определяет действительный 4-вектор V^μ .

Свойство эрмитовости будет сохраняться при преобразованиях

$$v \rightarrow \lambda v \lambda^\dagger, \quad (2.7.37)$$

где λ — произвольная 2×2 матрица. Кроме того, инвариантный квадрат 4-вектора равен

$$V_\mu V^\mu = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 - (V^0)^2 = -\text{Det } v, \quad (2.7.38)$$

и этот детерминант сохраняется при преобразовании (2.7.37), если выполнено условие

$$|\text{Det } \lambda| = 1. \quad (2.7.39)$$

Каждая комплексная 2×2 матрица λ , удовлетворяющая (2.7.39), определяет таким образом действительное линейное преобразование V^μ , оставляющее инвариантным выражение (2.7.38), т. е. однородное преобразование Лоренца $\Lambda(\lambda)$:

$$\lambda V^\mu \sigma_\mu \lambda^\dagger = (\Lambda^\mu_\nu(\lambda) V^\nu) \sigma_\mu. \quad (2.7.40)$$

Далее, для двух таких матриц λ и $\bar{\lambda}$

$$\begin{aligned} (\lambda \bar{\lambda}) V^\mu \sigma_\mu (\lambda \bar{\lambda})^\dagger &= \lambda (\bar{\lambda} V^\mu \sigma_\mu \bar{\lambda}^\dagger) \lambda^\dagger = \\ &= \lambda \Lambda^\mu_\nu(\bar{\lambda}) V^\nu \sigma_\mu \lambda^\dagger = \Lambda^\mu_\rho(\lambda) \Lambda^\rho_\nu(\bar{\lambda}) V^\nu \sigma_\mu, \end{aligned}$$

так что

$$\Lambda(\lambda \bar{\lambda}) = \Lambda(\lambda) \Lambda(\bar{\lambda}). \quad (2.7.41)$$

Однако две матрицы λ , отличающиеся только общей фазой, одинаково действуют на v в (2.7.37) и поэтому соответствуют одному и тому же лоренцовскому преобразованию. Поэтому удобно

настроить фазу матриц λ так, чтобы

$$\text{Det } \lambda = 1, \quad (2.7.42)$$

что совместимо с (2.7.41). Комплексные 2×2 матрицы с детерминантом, равным единице, образуют группу, называемую $SL(2, C)$. (Символ SL означает «специальная линейная», причем слово «специальная» соответствует единичному детерминанту элементов группы, а C означает «комплексная».) Групповые элементы зависят от $4 - 1 = 3$ комплексных параметров или шести действительных параметров, т. е. от того же числа параметров, что и группа Лоренца. Однако группа $SL(2, C)$ не тождественна группе Лоренца: если λ — матрица из $SL(2, C)$, то и $-\lambda$ принадлежит этой группе, причем как λ , так и $-\lambda$ соответствуют одному и тому же преобразованию Лоренца в (2.3.37). Действительно, легко видеть, что матрица

$$\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

отвечает лоренцовскому преобразованию $\Lambda(\lambda(\theta))$, представляющему вращение на угол θ вокруг оси z , так что $\lambda = -1$ соответствует вращению на угол 2π . Таким образом группа Лоренца не совпадает с $SL(2, C)$, а равна $SL(2, C)/Z_2^*$, которая представляет группу комплексных 2×2 матриц с единичным детерминантом и с отождествлением пар элементов λ и $-\lambda$.

Какова же топология группы Лоренца? В силу теоремы о полярном разложении¹² всякая комплексная несингулярная матрица λ может быть представлена в виде

$$\lambda = ue^h,$$

где u — унитарная матрица, а h — эрмитова матрица,

$$u^\dagger u = 1, \quad h^\dagger = h.$$

* Группа Z_2 состоит из двух элементов $+1$ и -1 . В общем случае, когда мы пишем G/H , где H — инвариантная подгруппа группы G , подразумевается, что в группе G отождествлены элементы g и gh , где $g \in G$ и $h \in H$. Подгруппа Z_2 тривиально инвариантна, так как ее элементы коммутируют со всеми элементами $SL(2, C)$.

Так как $\text{Det } u$ является фазовым множителем, а $\text{Det}(\exp h) = \exp(\text{Tr } h)$ действителен и положителен, то из условия (2.7.42) вытекает одновременно, что

$$\text{Det } u = 1, \text{Tr } h = 0.$$

(Множитель u соответствует подгруппе вращений группы Лоренца: если u — унитарная матрица, то $\text{Tr}(uvu^\dagger) = \text{Tr } v$, так что $V^0 = \frac{1}{2} \text{Tr } v$ остается инвариантным под действием $\Lambda(u)$.) Далее, это разложение однозначно, так что группа $SL(2, \mathbb{C})$ топологически является просто прямым произведением (т. е. множеством пар элементов) пространства всех матриц u и пространства всех матриц h . Всякая эрмитова 2×2 матрица h со следом, равным нулю, может быть представлена в виде

$$h = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix},$$

где a, b, c действительны, но в остальном произвольны, так что пространство всех h топологически эквивалентно обычному трехмерному плоскому пространству R_3 . С другой стороны, всякая унитарная 2×2 матрица с единичным детерминантом может быть представлена в виде:

$$u = \begin{pmatrix} d + ie & f + ig \\ -f + ig & d - ie \end{pmatrix},$$

где d, e, f, g удовлетворяют единственному нелинейному ограничению

$$d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 1,$$

так что пространство $SU(2)$ всех u топологически эквивалентно пространству S_3 — трехмерной поверхности сферы в плоском четырехмерном пространстве. Таким образом $SL(2, \mathbb{C})$ топологически эквивалентна прямому произведению $R_3 \times S_3$. Эта группа является односвязной: всякая кривая, соединяющая две точки из R_3 или S_3 , может быть продеформирована в любую другую, и то же верно для прямого произведения. (Все сферы S_n за исключением окружности S_1 являются односвязными.) Однако нас интересует не $SL(2, \mathbb{C})$, а группа $SL(2, \mathbb{C})/Z_2$. Отождествление 1 и -1 эквивалентно отождествлению унитарных множителей u и $-u$ (так как e^h всегда положительно), так что топология группы Лоренца — это топология

$R_3 \times S_3 / Z_2$, где S_3 / Z_2 — трехмерная сферическая поверхность с отождествленными противоположными точками. Эта группа не является односвязной; например, на S_3 путь из u в u' нельзя непрерывно продеформировать в путь из u в $-u'$, тогда как в S_3 / Z_2 эти два пути соединяют одни и те же точки. Фактически, S_3 / Z_2 — *двусвязная* группа: пути между любыми двумя точками разделяются на два класса, в зависимости от того, включают ли они инверсию $u \rightarrow -u$, и каждый путь из одного класса можно продеформировать в другой путь того же класса. Эквивалентным является утверждение, что двойная петля, дважды проходящая один и тот же путь из какого-то элемента обратно в него же, может быть непрерывным образом сжата в точку. (Как показано в Приложении Б, математически это выражается в утверждении, что для группы S_3 / Z_2 фундаментальная или первая гомотопическая группа есть Z_2 .) Аналогично, неоднородная группа Лоренца имеет ту же топологию, что и группа $R_4 \times R_3 \times S_3 / Z_2$, и поэтому она также двусвязна.

Так как группа Лоренца (однородная или неоднородная) не односвязна, она имеет внутренне проективные представления. Однако поскольку двойная петля, дважды проходящая путь из 1 в Λ , из Λ в $\bar{\Lambda}$, и обратно в 1 , *может* быть сжата в точку, мы должны иметь

$$[U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda})]^2 = 1,$$

и поэтому фаза $e^{i\phi(\Lambda, \bar{\Lambda})}$ является просто знаковым множителем:

$$U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}). \quad (2.7.43)$$

Аналогично для неоднородной группы Лоренца

$$U(\Lambda, a)U(\bar{\Lambda}, \bar{a}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}, \Lambda\bar{a} + a). \quad (2.7.44)$$

Нам знакомы такие «представления с точностью до знака»: это состояния с целым спином, для которых знаки в (2.7.43) и (2.7.44) всегда равны $+1$, и состояния с полуцелым спином, для которых эти знаки равны $+1$ или -1 в зависимости от того, можно ли сжать в точку путь от 1 к Λ , затем к $\bar{\Lambda}$, и назад к единице. Это различие обусловлено тем, что вращение на угол 2π вокруг оси z , действуя на вектор состояния с проекцией углового момента на ось z , равную

σ , дает фазовый множитель $e^{2i\pi\sigma}$, и поэтому никак не влияет на состояние с целым спином и изменяет знак вектора состояния с полуцелым спином. (Два этих случая соответствуют двум неприводимым представлениям первой гомотопической группы Z_2 .) Итак, (2.7.43) и (2.7.44) выражают правило суперотбора: мы не должны смешивать состояния с целым и полуцелым спином.

Для случая конечных масс ограничения целым или полуцелым спином были ранее выведены чисто алгебраическими методами из хорошо известных представлений генераторов малой группы, которые в данном случае есть просто матрицы углового момента $\mathbf{J}^{(j)}$ с целым или полуцелым значением j . С другой стороны, для нулевых масс действие малой группы на физические одночастичные состояния сводится к вращению вокруг направления импульса, так что поэтому здесь нет *алгебраических* причин ограничиваться целыми или полуцелыми значениями спиральности. Однако существует топологическая причина: вращение на угол 4π вокруг направления импульса можно непрерывным образом продеформировать в тождественное преобразование, так что множитель $\exp(4\pi i\sigma)$ должен равняться единице, и поэтому величина σ должна быть либо целой, либо полуцелой.

Вместо того, чтобы иметь дело с проективными представлениями и накладывать правила суперотбора, можно расширить группу Лоренца, взяв ее равной $SL(2, \mathbb{C})$, а не $SL(2, \mathbb{C})/Z_2$, как ранее. Обычная инвариантность по отношению к вращениям запрещает переходы между состояниями с целым или полуцелым полным спином, так что единственной разницей будет теперь то, что группа односвязна и имеет поэтому только обычные, а не проективные представления, так что теперь нельзя потребовать выполнения правил суперотбора. Это означает не то, что теперь можно реально приготовить физическую систему в виде линейной комбинации состояний целого и полуцелого спина, а лишь то, что наблюдаемая в природе лоренцевская инвариантность не может быть использована для того, чтобы доказать невозможность таких суперпозиций.

Такие же соображения применимы к любой группе симметрии. Если алгебра Ли этой группы допускает существование центральных зарядов, всегда можно расширить такую алгебру, включив в нее генераторы, которые коммутируют с любым элементом алгебры и собственными значениями которых являются центральные заряды. Именно так мы действовали, когда

добавили оператормассы к алгебре Ли группы Галилея в конце раздела 2.4. Расширенная алгебра Ли теперь, конечно, свободна от центральных зарядов, так что часть группы в окрестности единицы имеет только обычные представления, и никаких правил суперотбора не требуется.

Аналогично, даже если группа Ли G не является односвязной, ее всегда можно представить в виде C/H , где C — односвязная группа, которую называют *универсальной накрывающей группой* группы G , а H — инвариантная подгруппа* группы C . В общем случае, можно взять в качестве группы симметрии вместо G группу C , так как нет никакой разницы в следствиях этого выбора, за исключением того, что G налагает правило суперотбора, а C — нет. Короче говоря, проблема правил суперотбора есть нечто ирреальное: *может быть, и можно приготовить физическую систему в виде произвольной суперпозиции состояний, но нельзя решить, так это или нет, ссылаясь на принципы симметрии, поскольку какую бы ни группу симметрии мы не приписывали природе, всегда существует другая группа, приводящая к тем же следствиям, но без правил суперотбора.*

Приложение А. Теорема о представлении симметрии

В этом приложении мы дадим доказательство фундаментальной теоремы Вигнера², утверждающей, что всякое преобразование симметрии может быть представлено в гильбертовом пространстве физических состояний линейным и унитарным или антилинейным и антиунитарным оператором. При этом главным для нас будет то, что преобразования симметрии являются преобразованиями T лучей, сохраняющими вероятности переходов в том смысле, что если Ψ_1 и Ψ_2 — векторы состояний, принадлежащие лучам \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 , то любые векторы состояний Ψ'_1 и Ψ'_2 , принадлежа-

* Первая гомотопическая группа C/H есть H . Мы видели, что накрывающая группа однородной группы Лоренца есть $SL(2, C)$, а накрывающая группа трехмерной группы вращений есть $SU(2)$. Подобная связь групп SL и SU справедлива для случая трех, четырех или шести измерений. Для общего случая d измерений накрывающая группа $SO(d)$ носит специальное наименование $Spin(d)$.

щие преобразованным лучам $T\mathcal{R}_1$ и $T\mathcal{R}_2$, удовлетворяют условию

$$|(\Psi'_1, \Psi'_2)|^2 = |(\Psi_1, \Psi_2)|^2. \quad (2.A.1)$$

Мы требуем также, чтобы преобразование симметрии имело обратное преобразование, сохраняющее вероятности переходов в указанном выше смысле.

Для начала рассмотрим некоторую полную ортонормированную систему векторов состояний Ψ_k , принадлежащих лучам \mathcal{R}_k , причем

$$(\Psi_k, \Psi_l) = \delta_{kl}. \quad (2.A.2)$$

Пусть Ψ'_k — некоторая произвольная выборка векторов состояний, принадлежащих преобразованным лучам $T\mathcal{R}_k$. Из (2.A.1) имеем:

$$|(\Psi'_k, \Psi'_l)|^2 = |(\Psi_k, \Psi_l)|^2 = \delta_{kl}.$$

Но величина (Ψ'_k, Ψ'_k) автоматически действительна и положительна, так что отсюда вытекает, что она должна иметь значение, равное единице. Поэтому

$$(\Psi'_k, \Psi'_k) = \delta_{kl}. \quad (2.A.3)$$

Легко видеть, что преобразованные состояния Ψ'_k также образуют полную систему, так как если бы существовал какой-нибудь ненулевой вектор состояния Ψ' , который был бы ортогонален ко всем Ψ'_k , то луч, полученный обратным преобразованием луча, к которому принадлежит Ψ' , состоял бы из ненулевых векторов Ψ'' , для которых

$$|(\Psi_k, \Psi'')|^2 = |(\Psi'_k, \Psi')|^2 = 0$$

для всех k . Это невозможно, так как предполагалось, что Ψ_k образуют полную систему.

Теперь следует принять соглашение о фазах для состояний Ψ'_k . С этой целью выделим одно из состояний Ψ_k , например, Ψ_1 , и рассмотрим векторы состояний

$$\Upsilon_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 + \Psi_k), \quad (2.A.4)$$

принадлежащие некоторым лучам \mathcal{R}_k с $k \neq 1$. Любой вектор

состояния Υ'_k , принадлежащий преобразованному лучу $T\mathcal{G}_k$, может быть разложен по векторам состояний Ψ'_l :

$$\Upsilon'_k = \sum_l c_{kl} \Psi'_l.$$

Из (2.A.1) следует, что

$$|c_{kk}| = |c_{k1}| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а для $l \neq k$ и $l \neq 1$

$$c_{kl} = 0.$$

Ясно, что для любого данного k подходящим выбором фаз двух векторов состояний Υ'_k и Ψ'_1 можно так настроить фазы двух ненулевых коэффициентов c_{kk} и c_{k1} , чтобы они равнялись $1/\sqrt{2}$. С этого момента векторы состояний Υ'_k и Ψ'_k , выбранные подобным образом, будут обозначаться $U\Upsilon_k$ и $U\Psi_k$. Как было показано,

$$U \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_k + \Psi_1) = U\Upsilon_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (U\Psi_k + U\Psi_1). \quad (2.A.5)$$

Однако нужно еще определить $U\Psi$ для произвольных векторов состояний Ψ .

Рассмотрим произвольный вектор состояния Ψ , принадлежащий произвольному лучу \mathcal{A} , и разложим его по Ψ_k :

$$\Psi = \sum_k C_k \Psi_k. \quad (2.A.6)$$

Любой вектор состояния Ψ' , принадлежащий преобразованному лучу $T\mathcal{A}$, может быть аналогичным образом разложен по полной ортонормированной системе векторов $U\Psi_k$:

$$\Psi' = \sum_k C'_k U\Psi_k. \quad (2.A.7)$$

Из равенства величин $|(\Psi_k, \Psi)|^2$ и $|(U\Psi_k, \Psi')|^2$ вытекает, что для всех k (включая $k = 1$)

$$|C_k|^2 = |C'_k|^2, \quad (2.A.8)$$

в то время как из равенства $|(Y_k, \Psi)|^2$ и $|(UY_k, \Psi')|^2$ вытекает, что для всех $k \neq 1$

$$|C_k + C_1|^2 = |C'_k + C'_1|^2. \quad (2.A.9)$$

Разделив (2.A.9) на (2.A.8), получаем соотношение

$$\operatorname{Re}(C_k / C_1) = \operatorname{Re}(C'_k / C'_1), \quad (2.A.10)$$

а с учетом (2.A.8)

$$\operatorname{Im}(C_k / C_1) = \pm \operatorname{Im}(C'_k / C'_1). \quad (2.A.11)$$

Поэтому либо

$$C_k / C_1 = C'_k / C'_1, \quad (2.A.12)$$

либо

$$C_k / C_1 = (C'_k / C'_1)^*. \quad (2.A.13)$$

Далее можно показать, что при всех k выбор должен быть один и тот же. (Этот этап доказательства был пропущен Вигнером.) Для этого предположим, что при некотором k имеем $C_k/C_1 = C'_k/C'_1$, а при некотором $l \neq k$, напротив, $C_l/C_1 = (C'_l/C'_1)^*$. Предположим также, что оба отношения комплексны, так что мы рассматриваем действительно два разных случая. (Это изначально требует, чтобы $k \neq 1$ и $l \neq 1$, а также $k \neq l$.) Покажем, что такое невозможно.

Определим вектор состояния $\Phi \equiv (\Psi_1 + \Psi_k + \Psi_l) / \sqrt{3}$. Так как все отношения коэффициентов в этом векторе состояния действительны, мы должны получить те же отношения в любом векторе состояния Φ' , принадлежащем преобразованному лучу:

$$\Phi' \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{3}} (U\Psi_1 + U\Psi_k + U\Psi_l),$$

где α — фазовый множитель, $|\alpha| = 1$. Но тогда из равенства вероятностей перехода $|(\Phi, \Psi)|^2$ и $|(\Phi', \Psi')|^2$ вытекает, что

$$\left| 1 + \frac{C'_k}{C'_1} + \frac{C'_l}{C'_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2,$$

и поэтому

$$\left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l^*}{C_1^*} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2.$$

Это возможно только в том случае, если

$$\operatorname{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \frac{C_l^*}{C_1^*} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \frac{C_l}{C_1} \right)$$

или, иными словами, если

$$\operatorname{Im} \left(\frac{C_k}{C_1} \right) \operatorname{Im} \left(\frac{C_l}{C_1} \right) = 0.$$

Отсюда, в противоречии с нашими предположениями, либо C_k/C_1 , либо C_l/C_1 должны быть действительны для любой пары k, l . Видим, что для заданного преобразования симметрии T , примененного к данному вектору состояний, для всех k должно быть выполнено либо условие (2.A.12), либо условие (2.A.13).

Вигнер исключил вторую возможность (2.A.13), поскольку, как он показал, всякое преобразование симметрии, для которого эта возможность реализуется, должно включать обращение времени, а в представленном доказательстве он рассматривал только симметрии типа вращений, не влияющие на направление времени. Мы изучаем здесь симметрии, включающие обращение времени на равных основаниях с другими симметриями, так что нам следует считать, что для каждого преобразования симметрии T и вектора состояния $\sum_k C_k \Psi_k$ выполнены либо (2.A.12), либо (2.A.13). В зависимости от того, какая из этих альтернатив выполняется, определим $U\Psi$ как тот из векторов состояний Ψ' , принадлежащих лучу $T\mathcal{L}$, фаза которого выбрана так, что либо $C_1 = C'_1$, либо $C_1 = C'_1^*$. Тогда либо

$$U \left(\sum_k C_k \Psi_k \right) = \sum_k C_k U \Psi_k, \quad (2.A.14)$$

либо

$$U \left(\sum_k C_k \Psi_k \right) = \sum_k C_k^* U \Psi_k. \quad (2.A.15)$$

Осталось доказать, что для данного преобразования симметрии мы должны сделать тот же выбор между формулами (2.A.14) и (2.A.15) в случае произвольных значений коэффициентов C_k . Предположим, что (2.A.14) выполнено для вектора состояния $\sum_k A_k \Psi_k$, а (2.A.15) — для вектора состояния $\sum_k B_k \Psi_k$. Тогда из инвариантности вероятностей переходов вытекает, что

$$\left| \sum_k B_k^* A_k \right|^2 = \left| \sum_k B_k A_k \right|^2.$$

или эквивалентно

$$\sum_{kl} \text{Im}(A_k^* A_l) \text{Im}(B_k^* B_l) = 0. \quad (2.A.16)$$

Нельзя исключить, что (2.A.16) выполнено для пары векторов состояний $\sum_k A_k \Psi_k$ и $\sum_k B_k \Psi_k$, принадлежащих разным лучам. Однако для любой пары таких векторов состояний, у которых ни A_k , ни B_k не имеют все одинаковой фазы (так что (2.A.14) и (2.A.15) не одинаковы), всегда можно найти третий вектор состояния, для которого *

$$\sum_{kl} \text{Im}(C_k^* C_l) \text{Im}(A_k^* A_l) \neq 0, \quad (2.A.17)$$

и также

$$\sum_{kl} \text{Im}(C_k^* C_l) \text{Im}(B_k^* B_l) \neq 0. \quad (2.A.18)$$

* Если для какой-то пары k, l и $A_k^* A_l$ и $B_k^* B_l$ комплексны, выбираем все C равными нулю, за исключением C_k и C_l , а эти коэффициенты выбираем с разными фазами. Если для какой-то пары k, l величина $A_k^* A_l$ комплексна, а $B_k^* B_l$ действительна, то должна существовать другая пара m, n (либо m , либо n , но не оба сразу, могут при этом равняться k или l), для которой $B_m^* B_n$ комплексна. Если к тому же $A_m^* A_n$ комплексна, выбираем все C равными нулю, за исключением C_m и C_n , а у этих коэффициентов выбираем разные фазы. Если $A_m^* A_n$ действительна, то выбираем все C равными нулю, за исключением C_k, C_l, C_m и C_n , а у этих четырех коэффициентов выбираем разные фазы. Случай, когда $B_k^* B_l$ комплексна, а $A_k^* A_l$ действительна, разбирается аналогично.

Как мы видели, из (2.A.17) следует, что для $\sum_k A_k \Psi_k$ и $\sum_k C_k \Psi_k$ должен быть сделан выбор между (2.A.14) и (2.A.15), а из (2.A.18) следует, что один и тот же выбор должен быть сделан и для $\sum_k B_k \Psi_k$ и $\sum_k C_k \Psi_k$. Таким образом, один и тот же выбор между (2.A.14) и (2.A.15) должен быть сделан для двух исходных векторов состояния $\sum_k A_k \Psi_k$ и $\sum_k B_k \Psi_k$. Итак, показано, что для данного преобразования симметрии T все векторы состояний удовлетворяют либо (2.A.14), либо (2.A.15).

Теперь нетрудно доказать, что квантово-механический оператор U может быть либо линейным и унитарным, либо антилинейным и антиунитарным. Сначала предположим, что для всех векторов состояний удовлетворяется (2.A.14). Любые два вектора состояния Ψ и Φ можно разложить по полной системе:

$$\Psi = \sum_k A_k \Psi_k, \quad \Phi = \sum_k B_k \Psi_k,$$

соответственно, используя (2.A.14), получаем:

$$\begin{aligned} U(\alpha\Psi + \beta\Phi) &= U \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) \Psi_k = \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) U \Psi_k \\ &= \alpha \sum_k A_k U \Psi_k + \beta \sum_k B_k U \Psi_k. \end{aligned}$$

Вновь используя (2.A.14), находим:

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha U\Psi + \beta U\Phi, \quad (2.A.19)$$

так что оператор U *линеен*. Пользуясь (2.A.2) и (2.A.3), находим, что скалярное произведение преобразованных состояний равно

$$(U\Psi, U\Phi) = \sum_{kl} A_k^* B_l (U\Psi_k, U\Psi_l) = \sum_k A_k^* B_k,$$

и, следовательно,

$$(U\Psi, U\Phi) = (\Psi, \Phi), \quad (2.A.20)$$

так что оператор U *унитарен*.

Случай симметрии, которая удовлетворяет (2.A.15) для всех векторов состояний, разбирается во многом аналогично. Возможно, читатель сам, без посторонней помощи воспроизведет доказательство. Однако, поскольку антилинейные операторы могут быть не слишком привычны, все же приведем здесь необходимые детали. Пусть (2.A.15) удовлетворяется для всех векторов состояний $\sum_k C_k \Psi_k$. Любые два вектора Ψ и Φ могут быть разложены как и ранее, так что

$$\begin{aligned} U(\alpha\Psi + \beta\Phi) &= U \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) \Psi_k = \sum_k (\alpha^* A_k^* + \beta^* B_k^*) U \Psi_k \\ &= \alpha^* \sum_k A_k^* U \Psi_k + \beta^* \sum_k B_k^* U \Psi_k. \end{aligned}$$

Вновь пользуясь (2.A.15), находим:

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha^* U\Psi + \beta^* U\Phi, \quad (2.A.21)$$

так что U *антилинеен*. Используя (2.A.2) и (2.A.3), получаем, что скалярное произведение преобразованных состояний

$$(U\Psi, U\Phi) = \sum_{kl} A_k B_l^* (U\Psi_k, U\Phi_l) = \sum_k A_k B_k^*,$$

и поэтому

$$(U\Psi, U\Phi) = (\Psi, \Phi)^*, \quad (2.A.22)$$

так что оператор U *антиунитарен*.

Приложение Б. Групповые операторы и гомотопические классы

В этом приложении мы докажем упомянутую в разделе 2.7 теорему, согласно которой фазы операторов $U(T)$ для конечных преобразований симметрии T можно выбрать так, чтобы эти операторы образовывали представление группы симметрии, а не проективное представление, если только: а) генераторы группы можно определить так, чтобы в алгебре Ли не было цент-

ральных зарядов; б) сама группа односвязна. Кроме того, обсудим проективные представления для неодносвязных групп и связь этих представлений с гомотопическими классами группы.

Для доказательства теоремы вспомним метод, с помощью которого были построены операторы, соответствующие преобразованиям симметрии. Как описано в разделе 2.2, для параметризации этих преобразований мы вводим набор действительных переменных θ^a , так чтобы сами преобразования удовлетворяли закону композиции (2.2.15):

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta)).$$

Мы хотим построить операторы $U(T(\theta)) \equiv U[\theta]$, удовлетворяющие соответствующему условию*:

$$U[\bar{\theta}]U[\theta] = U[f(\bar{\theta}, \theta)]. \quad (2.Б.1)$$

Чтобы сделать это, проведем произвольные «стандартные» пути $\Theta_\theta^a(s)$ в пространстве групповых параметров, идущие из начала в каждую точку θ , причем $\Theta_\theta^a(0) = 0$, $\Theta_\theta^a(1) = \theta^a$, и определим $U_\theta(s)$ вдоль каждого такого пути с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{d}{ds} U_\theta(s) = it_a U_\theta(s) h_b^a(\Theta_\theta(s)) \frac{d\Theta_\theta^b(s)}{ds} \quad (2.Б.2)$$

с начальным условием

$$U_\theta(0) = 1, \quad (2.Б.3)$$

где

$$[h^{-1}]_b^a(\theta) \equiv \left[\frac{\partial f^a(\bar{\theta}, \theta)}{\partial \bar{\theta}^b} \right]_{\bar{\theta}=0}. \quad (2.Б.4)$$

Мы намерены в конце концов отождествить операторы $U[\theta]$ с $U_\theta(1)$, но прежде следует выяснить некоторые свойства $U_\theta(s)$.

* Здесь и далее квадратные скобки используются для того, чтобы отличать операторы U , построенные как функции групповых параметров, от операторов, являющихся функциями самих групповых преобразований.

Чтобы проверить закон композиции, рассмотрим две точки θ_1 и θ_2 , и определим путь \mathcal{P} , идущий из 0 в θ_1 , а затем в $f(\theta_2, \theta_1)$:

$$\Theta_{\mathcal{P}}^a(s) \equiv \begin{cases} \Theta_{\theta_1}^a(2s), & 0 \leq s \leq 1/2, \\ f^a(\Theta_{\theta_2}(2s-1), \theta_1), & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (2.Б.5)$$

В конце первого отрезка пути мы попадаем в точку, где оператор $U_{\mathcal{P}}(\frac{1}{2}) = U_{\theta_1}(1)$. Чтобы вычислить $U_{\mathcal{P}}(s)$ вдоль второго отрезка пути, нам нужно знать производную от $f^a(\Theta_{\theta_2}(2s-1), \theta_1)$. Для этого используем фундаментальное условие ассоциативности

$$f^a(f(\theta_3, \theta_2), \theta_1) = f^a(\theta_3, f(\theta_2, \theta_1)). \quad (2.Б.6)$$

Сравнивая коэффициенты при θ_3^c в пределе $\theta_3 \rightarrow 0$, находим

$$\frac{\partial f^a(\theta_2, \theta_1)}{\partial \theta_2^b} h_a^c(f(\theta_2, \theta_1)) = h_b^c(\theta_2). \quad (2.Б.7)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (2.Б.2) для $U_{\mathcal{P}}(s)$ вдоль второго отрезка совпадает с дифференциальным уравнением для $U_{\theta_2}(2s-1)$. Начальные условия для этих величин различны, однако $U_{\mathcal{P}}(s)U_{\theta_1}^{-1}(1)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и $U_{\theta_2}(2s-1)$, но вдобавок удовлетворяет и тому же начальному условию: при $s = \frac{1}{2}$ обе величины равны единице. Отсюда мы заключаем, что для $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$

$$U_{\mathcal{P}}(s)U_{\theta_1}^{-1}(s) = U_{\theta_2}(2s-1).$$

и, в частности,

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U_{\theta_2}(1)U_{\theta_1}(1). \quad (2.Б.8)$$

Однако из этого *не* следует, что $U_{\theta}(1)$ удовлетворяет желаемому правилу композиции (2.Б.1), так как, хотя путь $\Theta_{\mathcal{P}}(s)$ идет из $\theta^a = 0$ в $\theta^a = f^a(\theta_2, \theta_1)$, он в общем случае не будет совпадать с тем выбранным нами «стандартным» путем $\Theta_{f(\theta_2, \theta_1)}$, который идет сразу из $\theta^a = 0$ в $\theta^a = f^a(\theta_2, \theta_1)$. Чтобы отождествить $U[\theta]$ с $U_{\theta}(1)$, нужно еще доказать, что $U_{\theta}(1)$ не зависит от пути из 0 в θ .

Для этого рассмотрим вариацию δU оператора $U_\theta(s)$, порожденную вариацией $\delta\Theta(s)$ пути из 0 в θ . Беря вариацию (2.Б.2), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{ds}\delta U = it_a \delta U h_b^a(\Theta) \frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h_{b,c}^a(\Theta) \delta\Theta^c \frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h_b^a(\Theta) \frac{d\delta\Theta^b}{ds},$$

где $h_{b,c}^a \equiv \partial h_b^a / \partial\Theta^c$. Используя коммутационные соотношения алгебры Ли (2.2.22) (без центральных зарядов) и совершая перегруппировку слагаемых, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(U^{-1}\delta U) &= \frac{d}{ds}(iU^{-1}t_a U h_b^a \delta\Theta^b) \\ &+ iU^{-1}t_a U \delta\Theta^b \frac{d\Theta^c}{ds} (h_{c,b}^a - h_{b,c}^a + C^a_{ed} h_b^e h_c^d) \end{aligned} \quad (2.Б.9)$$

Однако переходя к пределу $\theta_3, \theta_2 \rightarrow 0$ в условии ассоциативности (2.Б.6), находим для всех θ

$$h(\theta)_{b,c}^a = -f^a_{de} h(\theta)_b^d h(\theta)_c^e. \quad (2.Б.10)$$

где f^a_{de} – коэффициент, определенный формулой (2.2.19). Антисимметризация по b и c показывает, что последнее слагаемое в (2.Б.9) обращается в нуль:

$$h_{c,b}^a - h_{b,c}^a + C^a_{ed} h_b^e h_c^d = 0. \quad (2.Б.11)$$

Таким образом, из (2.Б.9) следует, что величина

$$U^{-1}\delta U - iU^{-1}t_a U h_b^a \delta\Theta^b$$

постоянна вдоль пути $\theta(s)$. Отсюда следует, что оператор $U_\theta(1)$ стационарен при любой бесконечно малой вариации пути, оставляющей закрепленными конечные точки $\Theta(0) = 0$ и $\Theta(1) = \theta$ (а также $U_\theta(0) = 1$). Однако из предположения б) вытекает, что любой путь от $\Theta(0) = 0$ до $\Theta(1) = \theta$ можно непрерывно деформировать в любой другой путь, так что теперь можно рассматривать $U_\theta(1)$ как не зависящую от пути функцию только переменной θ :

$$U_\theta(1) \equiv U[\theta]. \quad (2.Б.12)$$

В частности, так как путь \mathcal{P} приводит из 0 в $f(\theta_2, \theta_1)$, имеем

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U[f(\theta_2, \theta_1)], \quad (2.Б.13)$$

а тогда (2.Б.8) показывает, что $U[\theta]$ удовлетворяет закону группового умножения (2.Б.1), что и требовалось доказать.

Мы построили непроективное представление $U[\theta]$, и осталось показать, что любое проективное представление $\tilde{U}[\theta]$ той же группы с теми же генераторами представления t_a может отличаться от $U[\theta]$ только фазой:

$$\tilde{U}[\theta] = e^{i\alpha(\theta)}U[\theta],$$

так что фаза ϕ в законе умножения для $\tilde{U}[\theta]$

$$\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta] = e^{i\phi(\theta',\theta)}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]$$

может быть устранена простым изменением фазы $\tilde{U}[\theta]$. Чтобы показать это, рассмотрим оператор

$$U[\theta]^{-1}U[\theta']^{-1}\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta] = U[f(\theta',\theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]e^{i\phi(\theta',\theta)}.$$

Операторы $U[\theta]$ и $\tilde{U}[\theta]$ имеют одни и те же генераторы, поэтому производная левой части по θ^a обращается в нуль при $\theta' = 0$ и

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta^b} \{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\} + i\phi_b(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta],$$

где

$$\phi_b(\theta) \equiv h_b^a(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial\theta^b} \phi(\theta',\theta) \right]_{\theta'=0}.$$

Дифференцируя полученное равенство по θ^c и выполняя антисимметризацию по b и c , получаем сразу же

$$0 = \frac{\partial\phi_b(\theta)}{\partial\theta^c} - \frac{\partial\phi_c(\theta)}{\partial\theta^b}.$$

Согласно известной теореме¹³ из предыдущего равенства следует, что в односвязном пространстве ϕ_b есть просто градиент

некоторой функции β :

$$\phi_b(\theta) = \frac{\partial \beta(\theta)}{\partial \theta^b}.$$

Таким образом величина $U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]e^{i\beta(\theta)}$ является на самом деле постоянной по θ . Полагая эту величину равной ее значению при $\theta = 0$, видим, что \tilde{U} просто пропорционально U :

$$\tilde{U}[\theta] = U[\theta] \exp(-i\beta(\theta) + i\beta(0)),$$

что и утверждалось выше.

* * *

Приведенный выше анализ дает некоторую информацию о природе фазовых множителей, которые могут появляться в групповом законе умножения в случае, когда алгебра Ли не допускает центральных зарядов, но группа не является односвязной. Предположим, что путь \mathcal{P} из нуля в θ , а затем в $f(\theta, \theta)$ нельзя продеформировать в выбранный нами стандартный путь из 0 в $f(\theta, \theta)$, иными словами, предположим, что петля из нуля через θ в $f(\theta, \theta)$ и обратно в нуль не может быть непрерывно продеформирована в точку. Тогда выражение $U^{-1}(f(\theta_2, \theta_1))U(\theta_2)U(\theta_1)$ может являться фазовым множителем $\exp(i\phi(\theta_2, \theta_1)) \neq 1$, но f — одной и той же для всех других петель, в которые можно непрерывно продеформировать данную петлю. Множество, состоящее из всех петель, начинающихся и кончающихся в нулевой точке, которые могут быть непрерывно продеформированы в данную петлю, носит название *гомотопического класса*¹⁴ данной петли. Таким образом, мы видим, что $f(\theta_2, \theta_1)$ зависит только от гомотопического класса петли, идущей из нуля через θ в $f(\theta, \theta)$ и затем обратно в нуль. Множество гомотопических классов образует группу: «произведение» гомотопических классов для петель \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 есть гомотопический класс петли, получающейся обходом по \mathcal{P}_1 , а затем по \mathcal{P}_2 ; «обратный» гомотопический класс петли \mathcal{P} есть гомотопический класс петли, получающейся обходом \mathcal{P} в противоположном направлении; «единицей» является гомотопический класс петель,

которые можно продеформировать в начальную точку. Эта группа называется *первой гомотопической* или *фундаментальной группой* обсуждаемого пространства. Легко показать, что фазовые множители образуют представление этой группы: если обход по петле \mathcal{L} дает фазовый множитель $e^{i\phi}$, а обход по петле $\overline{\mathcal{L}}$ — фазовый множитель $e^{i\bar{\phi}}$, то обход по обеим петлям дает фазовый множитель $e^{i\phi}e^{i\bar{\phi}}$. Поэтому можно составить каталог всех возможных типов проективных представлений данной группы \mathcal{G} (без центральных зарядов), если известны одномерные представления первой гомотопической группы пространства параметров группы \mathcal{G} . Более подробно гомотопические группы обсуждаются в т. II.

Приложение В. Инверсии и вырожденные мультиплеты

Обычно предполагается, что инверсии T и P переводят одночастичные состояния в другие одночастичные состояния того же сорта, возможно, с зависящими от сорта частиц дополнительными фазовыми множителями. В разделе 2.6 мы мельком обратили внимание на то, что на вырожденные мультиплеты одночастичных состояний операторы инверсии могут действовать и более сложным образом. Эта возможность, по-видимому, была впервые отмечена в 1964 году Вигнером¹⁵. В данном Приложении рассматриваются обобщения операторов инверсии, в которых вместо фаз инверсии появляются конечные матрицы. При этом не делается ряда ограничительных предположений, использованных Вигнером.

Начнем с обращения времени. Вигнер ограничил возможное действие операторов инверсии, предположив, что их квадраты пропорциональны единичному оператору. Так как T — антиунитарный оператор, легко видеть, что множитель пропорциональности для T^2 может быть равен ± 1 , возможно, с разными знаками для подпространств, выделенных правилами суперотбора. В том случае, когда знак T^2 на пространстве состояний с четными или нечетными значениями $2j$ противоположен знаку $(-1)^{2j}$, найденному в разделе 2.6, физические состояния должны реализовывать более сложные, чем предполагалось до сих пор, представления оператора T . Если мы хотим принять такую гипотезу, уже не видно достаточных оснований для сохранения условия Вигнера, что T^2 пропорционален единице. Обращение к структуре расширенной группы Пуанкаре неубедительно. Единственное полезное

определение любого из операторов инверсии должно обеспечивать точное или приближенное сохранение этого оператора. Однако такое определение может противоречить условию, что T^2 пропорционален единичному оператору.

Чтобы рассмотреть более общие возможности для оператора обращения времени, предположим, что он действует на массивное одночастичное состояние по правилу

$$T\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{T}_{mn} \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,m}, \quad (2.B.1)$$

где \mathbf{p} , j и σ — импульс, спин и z -компонента спина, а n , m — индексы, которыми нумеруются члены вырожденного мультиплета частиц. (Появление множителя $(-1)^{j-\sigma}$ и изменение знака \mathbf{p} и σ выводятся так же, как в разделе 2.6.) Мы ничего не знаем о матрице \mathcal{T}_{mn} кроме того, что в силу антиунитарности T матрица \mathcal{T} должна быть унитарной.

Посмотрим теперь, как можно упростить это преобразование подходящим выбором базиса одночастичных состояний. Определяя новые состояния с помощью унитарного преобразования: $\Psi'_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{U}_{mn} \Psi_{\mathbf{p},\sigma,m}$, получаем то же преобразование (2.B.1) с изменившейся матрицей \mathcal{T}'_{mn} :

$$\mathcal{T}' = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{U}^*. \quad (2.B.2)$$

В общем случае с помощью такого выбора базиса одночастичных состояний не удастся сделать \mathcal{T}' диагональной, как это было бы возможно в случае унитарного оператора T . Однако можно сделать эту матрицу блочно-диагональной, причем блоки имеют вид либо 1×1 фазовых множителей, либо 2×2 матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi/2} \\ e^{-i\phi/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.B.3)$$

где ϕ — различные действительные фазы.

(Приведем доказательство. Во-первых, заметим, что из формулы (2.B.2) следует

$$\mathcal{T}' \mathcal{T}'^* = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{T}^* \mathcal{U}.$$

Это унитарное преобразование, и его можно выбрать так, чтобы диагонализировать унитарную матрицу $\mathcal{F}\mathcal{F}^*$. Считая, что это сделано, и опуская индексы, имеем

$$\mathcal{F} = D \cdot \mathcal{F}^T, \quad (2.B.4)$$

где D — унитарная диагональная матрица, имеющая на главной диагонали фазы $e^{i\phi_n}$. Немедленным следствием этого является то, что диагональная компонента \mathcal{F}_{nn} обращается в нуль, за исключением случая $e^{i\phi_n} = 1$. Далее, пусть $e^{i\phi_n} = 1$, но $e^{i\phi_m} \neq 1$. Тогда из (2.B.4) следует, что $\mathcal{F}_{mn} = \mathcal{F}_{nm} = 0$. Перебирая сначала все строки и столбцы, для которых $e^{i\phi_n} = 1$, приводим матрицу \mathcal{F} к виду

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \quad (2.B.5)$$

где \mathcal{A} — симметричная и унитарная матрица, а у \mathcal{B} все диагональные элементы равны нулю. Так как \mathcal{A} симметрична, она может быть представлена как экспонента от симметричной антиэрмитовой матрицы, поэтому ее можно диагонализировать преобразованием (2.B.2), действующим только на \mathcal{A} , причем соответствующая подматрица матрицы \mathcal{U} действительна и потому ортогональна.

Поэтому достаточно рассмотреть подматрицу \mathcal{B} , связывающую строки и столбцы, для которых $e^{i\phi_n} \neq 0$. Для значений $n \neq m$ из (2.B.4) имеем $\mathcal{F}_{nm} = e^{i\phi_n} \mathcal{F}_{mn}$ и $\mathcal{F}_{mn} = e^{i\phi_m} \mathcal{F}_{nm}$, так что $\mathcal{F}_{nm} = e^{i\phi_n} e^{i\phi_m} \mathcal{F}_{nm}$ и $\mathcal{F}_{mn} = e^{i\phi_n} e^{i\phi_m} \mathcal{F}_{mn}$. Отсюда $\mathcal{F}_{nm} = \mathcal{F}_{mn} = 0$, если только не выполнено $e^{i\phi_n} e^{i\phi_m} = 1$. Если сначала перебрать все строки и столбцы \mathcal{B} с данной фазой $e^{i\phi_1} \neq 1$, затем все строки и столбцы с противоположной фазой, затем все строки и столбцы с какой-то другой фазой $e^{i\phi_2} \neq 1$, не равной $e^{\pm i\phi_1}$, строки и столбцы с противоположной фазой и т. д., то матрица \mathcal{B} примет блочно-диагональный вид:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mathcal{B}_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.B.6)$$

где

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2} \mathcal{C}_i \\ e^{-i\phi_i/2} \mathcal{C}_i^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (2B7)$$

Далее, унитарность матрицы \mathcal{T} , а следовательно и \mathcal{B} , требует, чтобы $\mathcal{C}_i \mathcal{C}_i^\dagger = \mathcal{C}_i^\dagger \mathcal{C}_i = 1$, откуда \mathcal{C}_i – квадратная и унитарная матрица. Если применить преобразование (2.B.2) с матрицей \mathcal{U} , которая блочно-диагональна в том же смысле, что и \mathcal{T} , причем матрица в n -ом блоке имеет вид

$$\begin{pmatrix} V_i & 0 \\ 0 & W_i \end{pmatrix},$$

с унитарными матрицами V_i и W_i , то подматрицы \mathcal{C}_i подвергнутся преобразованию $\mathcal{C}_i \rightarrow V_i^{-1} \mathcal{C}_i W_i^*$. Отсюда ясно, что можно выбрать это преобразование так, чтобы $\mathcal{C}_i = 1$. Этим устанавливается соответствие между парами отдельных строк и столбцов внутри каждого блока с фазами $e^{i\phi_i}$ и $e^{-i\phi_i}$. Чтобы привести матрицу \mathcal{B} к блочно-диагональному виду с 2×2 блоками вида (2.B.3), необходимо всего лишь перегруппировать строки и столбцы с фазами $e^{i\phi_i}$ попеременно с соответствующими строками и столбцами с фазами $e^{-i\phi_i}$.

Важно подчеркнуть, что если $e^{i\phi} \neq 1$, невозможно выбрать состояния так, чтобы диагонализировать преобразование обращения времени. Если даны два состояния $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$, на которые оператор T действует матрицей (2.B.3), то

$$T\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\phi/2} (-1)^{j-\sigma} \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,\mp}. \quad (2B8)$$

Результатом действия преобразования обращения времени на произвольную линейную комбинацию этих состояний будет

$$T(c_+ \Psi_{\mathbf{p},\sigma,+} + c_- \Psi_{\mathbf{p},\sigma,-}) = (-1)^{j-\sigma} (e^{i\phi/2} c_+^* \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,-} + e^{-i\phi/2} c_-^* \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,+}).$$

Для того, чтобы выражение $c_+ \Psi_{\mathbf{p},\sigma,+} + c_- \Psi_{\mathbf{p},\sigma,-}$ под действием T приобрело фазу λ , необходимо, чтобы

$$e^{i\phi/2} c_+^* = \lambda c_-, \quad e^{-i\phi/2} c_-^* = \lambda c_+.$$

Комбинируя эти уравнения, имеем $e^{\pm i\phi/2} c_\pm^* = |\lambda|^2 c_\pm^* e^{\mp i\phi/2}$, что невозможно, если не выполнено хотя бы одно из двух условий:

либо $c_+ = c_- = 0$, либо $e^{i\phi} = 1$. Таким образом, при $e^{i\phi} \neq 1$ инвариантность по отношению к обращению времени требует двукратного вырождения этих состояний, не считая того, которое связано с их спинами.

Конечно, если имеется дополнительный оператор «внутренней» симметрии S , под действием которого состояния преобразуются по закону

$$S\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\phi/2}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp},$$

можно переопределить оператор обращения времени как $T' \equiv S^{-1}T$, и такой оператор не будет перемешивать состояния $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$ друг с другом. Только при отсутствии внутренней симметрии можно приписать удвоение состояний частиц самому обращению времени.

Вернемся к вопросу о квадрате T . Вторичное применение преобразования (2.В.8) дает

$$T^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = (-1)^{2j} e^{\mp i\phi}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}. \quad (2.В.9)$$

Если, следуя Вигнеру, предположить, что T^2 пропорционален единичному оператору, мы должны иметь $e^{i\phi} = e^{-i\phi}$, и так как отсюда следует, что фаза действительна, она может равняться только $+1$ или -1 . Выбор $e^{i\phi} = -1$ все еще будет требовать двукратного вырождения одночастичных состояний, помимо того вырождения, которое связано с их спином. В рамках гипотезы Вигнера все частицы должны проявлять такое удвоение числа состояний. Однако нет оснований не взять произвольную фазу ϕ в (2.В.8), которая могла бы равняться нулю для одних частиц, и быть отличной от нуля для других. Поэтому тот факт, что для наблюдаемых частиц не выявлено дополнительное двукратное вырождение, не исключает возможности, что для каких-то других частиц это вырождение существует.

Можно также рассмотреть возможность более сложных представлений оператора четности P , для которого

$$P\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{P}_{nm} \Psi_{-\mathbf{p},\sigma,m}, \quad (2.В.10)$$

где матрица \mathcal{P} унитарна и в остальном произвольна. В противоположность обращению времени, всегда можно диагонализировать

эту матрицу с помощью выбора базиса для состояний. Однако такой выбор базиса может оказаться не тем, в котором оператор обращения времени действует просто, так что в принципе операторы P и T совместно могут привести к дополнительным вырождениям, которые не требуются операциями P или T отдельности.

Как обсуждается в гл. 5, всякая квантовая теория поля считается удовлетворяющей симметрии CPT , действующей на одночастичные состояния по правилу

$$CPT\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma}\Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n^c}, \quad (2.B.11)$$

где n^c обозначает античастицу (или зарядово-сопряженную частицу) к частице n . В этом преобразовании не допускаются никакие фазы или матрицы (хотя, конечно, всегда можно ввести фазы или матрицы, объединив CPT с подходящими внутренними симметриями). Отсюда вытекает, что

$$(CPT)^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{2j}\Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n}, \quad (2.B.12)$$

так что предложенная Вигнером возможность появления знака $-(-1)^{2j}$ при действии оператора $(CPT)^2$ в квантовой теории поля не реализуется.

Пока T является хорошей симметрией для некоторого класса явлений, такой же хорошей симметрией является и комбинированная инверсия $CP \equiv (CPT)T^{-1}$. Для состояний, обычным образом преобразующихся под действием T ,

$$T\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,n}, \quad (2.B.13)$$

оператор CP также действует обычным образом:

$$CP\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},\sigma,n^c}, \quad (2.B.14)$$

Тогда оператор $C \equiv CPP^{-1}$ просто заменяет частицы на античастицы и наоборот:

$$C\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{\mathbf{p},\sigma,n^c}. \quad (2.B.15)$$

С другой стороны, если T имеет нестандартное представление (2.B.8), из (2.B.11) имеем:

$$CP\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\mp i\phi/2}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp^c}. \quad (2.B.16)$$

В частности, возможно, что вырождение, отмеченное значками \pm , может быть тем же самым, что и вырождение частица-античастица, так что античастица (определенная посредством СРТ) состояния Ψ_{\pm} есть Ψ_{\mp} . В этом случае CP имело бы необычное свойство не менять частицы на античастицы и обратно. До тех пор, пока рассматриваются подобные частицы, CP и T имеют тот же смысл, который обычно имеют P и CP. Но это не просто вопрос определения — на другие частицы CP и T действовали бы обычным образом.

Неизвестны примеры частиц, реализующих нестандартные представления инверсий, и мы далее такие возможности рассматривать не будем. Начиная с этого момента, будем считать, что инверсии действуют так, как было принято в разделе 2.6.

Задачи

1. Пусть наблюдатель θ видит W -бозон (спин 1 и масса $m \neq 0$) с импульсом \mathbf{p} , направленным вдоль оси y , и z -компонентой спина σ . Второй наблюдатель θ' движется относительно первого со скоростью \mathbf{v} в направлении оси z . Как наблюдатель θ' опишет состояние W -бозона?
2. Пусть наблюдатель θ видит фотон импульсом \mathbf{p} в направлении оси y и вектором поляризации в направлении оси z . Вторым наблюдатель θ' движется относительно первого со скоростью \mathbf{v} в направлении оси z . Как θ' опишет состояние фотона?
3. Получите перестановочные соотношения генераторов группы Галилея непосредственно из закона группового умножения (не используя результаты для группы Лоренца). Включите наиболее общий набор центральных зарядов, которые не могут быть устранены переопределением генераторов группы.
4. Покажите, что операторы $P_{\mu}P^{\mu}$ и $W_{\mu}W^{\mu}$, где $W_{\mu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}J^{\nu\rho}P_{\lambda}$, коммутируют с операторами лоренцевских преобразований $U(\Lambda, a)$.

5. Рассмотрите физику в двух пространственных и одном временном измерении, предполагая инвариантность по отношению к «группе Лоренца» $SO(2,1)$. Как можно было бы описать спиновые состояния отдельной *массивной* частицы? Как эти состояния вели бы себя по отношению к преобразованиям Лоренца? Что можно сказать об инверсиях P и T ?
6. Как и в задаче 5, рассмотрите физику в двух пространственных и одном временном измерениях, предполагая инвариантность по отношению к «группе Лоренца» $SO(2,1)$. Как можно было бы описать спиновые состояния отдельной *безмассовой* частицы? Как эти состояния вели бы себя по отношению к преобразованиям Лоренца? Что можно сказать об инверсиях P и T ?

Список литературы

1. Dirac, P.A.M. *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th edn (Oxford University Press, Oxford, 1958) (есть рус. пер.: Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. 2-е изд. М.: Наука, 1980).
2. Wigner, E.P. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* (Braunschweig, 1931), pp. 251-253. Для безмассовых частиц см.: Wigner, E.P., in *Theoretical Physics* (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963), p. 64.
3. Wick, G.C., Wightman, A.S., and Wigner, E.P., *Phys. Rev.*, **88**, 101 (1952).
- 3a. См., например, в книге: S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972), Section 2.1.
4. Inönü, E. and Wigner, E.P., *Nuovo Cimento*, **9**, 705 (1952).
5. Wigner, E.P., *Ann. Math.*, **40**, 149 (1939).
6. Mackey, G.W., *Ann. Math.*, 55, 101 (1952); 58, 193 (1953); *Acta Math.*, 99, 256 (1958); *Induced Representations of Groups and Quantum mechanics* (Benjamin, New York, 1968).

7. См., например, книги: Edmonds, A.R. *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1957), ch. 4 (есть рус. пер.: Эдмондс А. Угловой момент в квантовой механике. М.: Атомиздат, 1968); Rose, M.E. *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957), ch. 4; Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. Изд. 3-е. М.: Наука, 1974, § 58; Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics* (World Scientific, Singapore, 1985), Sections 7.3 and 8.1.
8. Lee, T.D. and Yang C.N., *Phys. Rev.*, **104**, 254 (1956); Wu, C.S. *et al.*, *Phys. Rev.*, **105**, 1413 (1957); Garwin, R., Lederman, L., and Weinrich, M., *Phys. Rev.*, **105**, 1415 (1957); Friedman, J.J. and Telegdi, V.V., *Phys. Rev.*, **105**, 1681 (1957).
9. Christenson, J.H., Cronin, J.W., Fitch, V.L., and Turlay, R., *Phys. Rev. Letters.*, **13**, 138 (1964).
10. Kramers, H., *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, **33**, 959 (1930); см. также: Dyson, F.J., *J. Math. Phys.*, **3**, 140 (1962).
11. Bargmann, V., *Ann. Math.*, **59**, 1 (1954), Theorem 7.1.
12. См., например, книгу: Turnbull, H.W. and Aitken, A.C. *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* (Dover Publications, New York, 1961), p. 164.
13. См., например, книгу: Flanders, H. *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963), Section 3.6.
14. Введение в теорию гомотопических классов и групп см., например, в книгах: Hocking, J.C. and Young, G.S. *Topology* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1961), Chapter 4; Nash, C. and Sen, S. *Topology and Geometry for Physicists* (Academic Press, London, 1983), Chapters 3 and 5.
15. Wigner, E.P., in: *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, ed. by F. Gürsey (Gordon & Breach, New York, 1964), p. 37.

Теория рассеяния

Общие принципы релятивистской квантовой механики, изложенные в предыдущей главе, применялись нами до сих пор только к состояниям отдельных стабильных частиц. Такие одночастичные состояния сами по себе не очень интересны. Что-то нетривиальное может случиться только в том случае, когда две или более частицы взаимодействуют друг с другом.

Однако реальные эксперименты в общем случае не описываются простой последовательностью взаимодействий частиц. Поэтому (по крайней мере, в ядерной физике и физике элементарных частиц) рассматривается базисный модельный эксперимент, в котором несколько частиц сближаются друг с другом с макроскопически больших расстояний и взаимодействуют в микроскопически малой области, после чего продукты взаимодействия вновь разлетаются на макроскопические расстояния.

Физические состояния до и после соударения образованы частицами, столь удаленными друг от друга, что их можно считать невзаимодействующими, так что эти состояния можно описывать прямыми произведениями обсуждавшихся в предыдущей главе одночастичных состояний. В таком эксперименте измеряемой величиной является распределение вероятностей, или «сечения», для переходов между начальным и конечным состояниями удаленных друг от друга фактически невзаимодействующих частиц.

В данной главе описан формализм¹, использующийся для вычисления этих вероятностей и сечений.

3.1. Состояния ин и аут

Если состояние образовано несколькими невзаимодействующими частицами, можно считать, что под действием преобразований неоднородной группы Лоренца оно преобразуется как прямое произведение одночастичных состояний. Чтобы пометить одночастичные состояния, будем использовать их 4-импульсы p^μ и z -компоненты спина (или спиральности для безмассовых частиц) σ . Кроме того, поскольку мы будем иметь дело с несколькими сортами частиц, введем дополнительную дискретную метку n , отмечающую тип частицы и включающую описание ее массы, спина, заряда и т. д. Общий закон преобразования имеет вид

$$\begin{aligned}
 U(\Lambda, a)\Psi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} &= \exp(-ia_\mu(p_1^\mu + p_2^\mu + \dots)) \\
 &\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \\
 &\times \Psi_{\Lambda p_1, \sigma'_1, n_1; \Lambda p_2, \sigma'_2, n_2; \dots}, \quad (3.1.1)
 \end{aligned}$$

где $W(\Lambda, p)$ — вигнеровское вращение (2.5.10), а $D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p))$ — известные $(2j+1)$ -мерные унитарные матрицы представления трехмерной группы вращений. (Такое правило верно для массивных частиц; для любой безмассовой частицы матрица заменяется на $\delta_{\sigma'\sigma} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p))$, где θ — угол, определенный формулой (2.5.43).) Состояния нормированы, как в (2.5.19):

$$\begin{aligned}
 &(\Psi_{p'_1, \sigma'_1, n'_1; p'_2, \sigma'_2, n'_2; \dots}, \Psi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots}) \\
 &= \delta^3(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{n'_1 n_1} \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} \delta_{n'_2 n_2} \dots \\
 &\pm \text{перестановки}, \quad (3.1.2)
 \end{aligned}$$

причем включено слагаемое « \pm перестановки», чтобы учесть возможность того, что произведена некоторая перестановка частиц n'_1, n'_2, \dots , принадлежащих такому же сорту, что и частицы n_1, n_2, \dots (Как подробнее обсуждается в гл. 4, если эта перестановка включает нечетную перестановку частиц с полуцелым спином, следует брать знак «минус», во всех остальных случаях — знак «плюс». В данной главе все это несущественно.

Мы часто используем сокращенное обозначение, заменяя весь набор $p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2, \dots$ какой-нибудь одной греческой буквой, например, α . Приняв такие обозначения, можно записать (3.1.2) в виде:

$$(\Psi_{\alpha'}, \Psi_{\alpha}) = \delta(\alpha' - \alpha), \quad (3.1.3)$$

где $\delta(\alpha' - \alpha)$ является суммой произведений дельта-функций и кронекеровских символов, стоящих в правой части (3.1.2). Кроме того, при суммировании по состояниям принимается, что

$$\int d\alpha \dots \equiv \sum_{n_1 \sigma_1 n_2 \sigma_2 \dots} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \dots \quad (3.1.4)$$

В частности, соотношение полноты для состояний, нормированных как в (3.1.3), имеет вид:

$$\Psi = \int d\alpha \Psi_{\alpha} (\Psi_{\alpha}, \Psi). \quad (3.1.5)$$

Закон преобразования (3.1.1) может быть справедлив только для частиц, которые по тем или иным причинам не взаимодействуют. Если положить $\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$ и $a^{\mu} = (0, 0, 0, \tau)$, то $U(\Lambda, a) = \exp(iH\tau)$, и среди прочего из (3.1.1) вытекает, что Ψ_{α} должно быть собственным состоянием энергии:

$$H\Psi_{\alpha} = E_{\alpha} \Psi_{\alpha}, \quad (3.1.6)$$

причем энергия есть просто сумма энергий отдельных частиц:

$$E_{\alpha} = p_1^0 + p_2^0 + \dots, \quad (3.1.7)$$

без каких-либо членов взаимодействия, т. е. слагаемых, которые определяли бы связь между несколькими частицами.

С другой стороны, закон преобразования (3.1.1) применим для процессов рассеяния в моменты времени $t \rightarrow \pm\infty$. Как пояснялось в начале этой главы, в типичном опыте по рассеянию начальные частицы в момент времени $t \rightarrow -\infty$ находятся так далеко друг от друга, что их можно считать еще не взаимодействующими, а в конечном состоянии при $t \rightarrow +\infty$ они разлетаются так далеко, что уже не взаимодействуют. Поэтому имеется не один, а два набора

состояний, преобразующихся по закону (3.1.1): ин-состояния Ψ_α^+ и аут-состояния Ψ_α^- — это такие состояния, что если над ними произвести наблюдения при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow \infty$, соответственно*, то будут обнаружены частицы, описываемые меткой α .

Поясним это определение. В том формализме, который используется здесь, для сохранения строгой лоренц-инвариантности векторы состояний не меняются со временем, т. е. вектор состояния Ψ описывает всю пространственно-временную историю системы частиц. (Такое описание известно как *гейзенберговская картина*, в противоположность *шредингеровской картине*, в которой операторы постоянны, а состояния меняются со временем.) Таким образом, мы не утверждаем, что Ψ_α^\pm являются пределами зависящего от времени вектора состояния $\Psi(t)$ при $t \rightarrow \mp\infty$.

Однако в определении состояний неявно присутствует выбор инерциальной системы отсчета, из которой наблюдается система; разные наблюдатели видят *эквивалентные* векторы состояний, но не *один и тот же* вектор. В частности, предположим, что стандартный наблюдатель \mathcal{O} устанавливает свои часы так, что значение $t = 0$ соответствует какому-то моменту времени, когда происходит процесс соударения. Другой наблюдатель \mathcal{O}' , покоящийся относительно первого, устанавливает часы так, что $t' = 0$ соответствует $t = \tau$, иными словами, временные координаты двух наблюдателей связаны соотношением $t' = t - \tau$. Тогда, если наблюдатель \mathcal{O} видит систему в состоянии Ψ , то наблюдатель \mathcal{O}' видит систему в состоянии $U(1, -\tau)\Psi = \exp(-iH\tau)\Psi$. Таким образом, то, как выглядит состояние системы в состоянии задолго до или намного позже соударения (какой бы базис не использовал бы наблюдатель \mathcal{O}) определяется применением оператора трансляции во времени $\exp(-iH\tau)$, взятом при $t \rightarrow -\infty$ или при $t \rightarrow +\infty$, соответственно. Конечно, если состояние действительно является собственным состоянием оператора энергии, оно не может быть локализовано во времени — применение оператора $\exp(-iH\tau)$ приводит к появлению несущественного фазового множителя $\exp(-iE_\alpha\tau)$. Поэтому мы должны рассматривать волновые пакеты, т. е. суперпозиции состояний,

* Индексы «+» и «-» для ин- и аут-состояний могут показаться перепутанными, но это дань традиции. Такой выбор определяется знаками в формуле (3.1.16).

с ненулевой амплитудой $g(\alpha)$, медленно изменяющейся в некотором интервале значений энергии ΔE . Состояния *ин* и *аут* определяются так, что суперпозиция

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha g(\alpha) \Psi_{\alpha}^{\pm} = \int d\alpha e^{-iE_n \tau} g(\alpha) \Psi_{\alpha}^{\pm}$$

при $\tau \ll -1/\Delta E$ или $\tau \gg +1/\Delta E$ имеет вид соответствующей суперпозиции состояний свободных частиц.

Чтобы конкретизировать сказанное, предположим, что генератор временных трансляций H можно разбить на два слагаемых — гамильтониан свободных частиц H_0 и гамильтониан взаимодействия V :

$$H = H_0 + V, \quad (3.1.8)$$

причем собственные состояния Φ_{α} гамильтониана H_0 описываются так же, как и собственные состояния Ψ_{α}^{+} и Ψ_{α}^{-} полного гамильтониана:

$$H_0 \Phi_{\alpha} = E_{\alpha} \Phi_{\alpha}, \quad (3.1.9)$$

$$(\Phi_{\alpha'}, \Phi_{\alpha}) = \delta(\alpha' - \alpha). \quad (3.1.10)$$

Подчеркнем, что спектр оператора H_0 предполагается совпадающим со спектром полного гамильтониана H . Из этого следует, что массы, входящие в H_0 , должны быть реально измеряемыми физическими массами, которые не обязательно совпадают с «голыми» массами, входящими в H . Разница, если она существует, должна быть включена не в H_0 , а в гамильтониан взаимодействия V . Кроме того, все возможные связанные состояния в спектре H должны быть введены в H_0 так, как будто они являются элементарными частицами*.

Теперь ин- и аут-состояния могут быть определены как собственные состояния не H_0 , а H :

* В нерелятивистских задачах можно включить потенциальную энергию связи в H_0 . Приложение такого метода к «соударениям с перестройкой», когда некоторое связанное состояние присутствует только в начальном, но не в конечном состоянии, или наоборот, требует различного разбиения H на H_0 и V в начальном и конечном состояниях.

$$H\Psi_\alpha^\pm = E_\alpha\Psi_\alpha^\pm, \quad (3.1.11)$$

удовлетворяющие условию:

$$\int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \rightarrow \int d\alpha e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha)\Phi_\alpha \quad (3.1.12)$$

при $\tau \rightarrow -\infty$ или $\tau \rightarrow +\infty$, соответственно.

Формулу (3.1.12) можно переписать как требование, что

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \rightarrow \exp(-iH_0\tau) \int d\alpha g(\alpha)\Phi_\alpha$$

для $\tau \rightarrow -\infty$ или $\tau \rightarrow +\infty$, соответственно. Иногда это соотношение переписывают как формулу для ин- и аут-состояний:

$$\Psi_\alpha^\pm = \Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha, \quad (3.1.13)$$

где

$$\Omega(\tau) \equiv \exp(+iH\tau) \exp(-iH_0\tau). \quad (3.1.14)$$

Однако следует иметь в виду, что $\Omega(\mp\infty)$ в (3.1.13) приводит к осмысленным результатам, только действуя на гладкую суперпозицию собственных состояний оператора энергии.

Немедленным следствием определения (3.1.12) является то, что ин- и аут-состояния нормированы точно так же, как состояния свободных частиц. Чтобы увидеть это, заметим, что поскольку левая часть в (3.1.12) получена действием унитарного оператора $\exp(-iH\tau)$ на не зависящее от времени состояние, его норма не зависит от времени и поэтому равна норме своего предельного значения при $\tau \rightarrow \infty$, т. е. норме в правой части формулы (3.1.12):

$$\begin{aligned} & \int d\alpha d\beta \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) (\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) \\ &= \int d\alpha d\beta \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) (\Phi_\beta, \Phi_\alpha). \end{aligned}$$

Так как это равенство предполагается выполненным для всех гладких функций $g(\alpha)$, то скалярные произведения должны быть равны друг другу:

$$(\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) = (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) = \delta(\beta - \alpha). \quad (3.1.15)$$

Для ряда приложений полезно получить явное, хотя и формальное решение уравнения (3.1.11) на собственные значения энергии, удовлетворяющее условиям (3.1.12). Запишем уравнение (3.1.11) в виде

$$(E_\alpha - H_0)\Psi_\alpha^\pm = V\Psi_\alpha^\pm.$$

Оператор $E_\alpha - H_0$ не является обратимым; он дает нуль при действии не только на свободное состояние частиц Φ_α , но и на континуум других состояний свободных частиц Φ_β той же энергии. Так как при $V \rightarrow 0$ ин- и аут-состояния как раз равны Φ_α , представляется естественным записать формальное решение как сумму Φ_α и слагаемого, пропорционального V :

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V\Psi_\alpha^\pm. \quad (3.1.16)$$

Иначе, производя разложение по полному набору состояний свободных частиц:

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + \int d\beta \frac{T_{\beta\alpha}^\pm \Phi_\beta}{(E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)}, \quad (3.1.17)$$

$$T_{\beta\alpha}^\pm \equiv (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm), \quad (3.1.18)$$

где ε – положительная бесконечно малая величина, введенная для того, чтобы придать смысл оператору, обратному к $E_\alpha - H_0$. Полученные уравнения носят название *уравнений Липпмана–Швингера*^{1а}. Мы используем (3.1.17) в конце следующего раздела, чтобы получить несколько более строгое доказательство ортонормированности ин- и аут-состояний.

Остается показать, что уравнение (3.1.17) с добавками $+i\varepsilon$ и $-i\varepsilon$ в знаменателе удовлетворяет условию (3.1.12) для ин- и аут-состояний, соответственно. Для этого рассмотрим суперпозиции

$$\Psi_g^\pm(t) \equiv \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm, \quad (3.1.19)$$

$$\Phi_g(t) \equiv \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Phi_\alpha. \quad (3.1.20)$$

Мы хотим показать, что при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ $\Psi_g^+(t)$ и $\Psi_g^-(t)$ стремятся соответственно к $\Phi_g(t)$. После подстановки (3.1.17) в (3.1.19) получаем:

$$\Psi_g^\pm(t) = \Phi_g(t) + \int d\alpha \int d\beta \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^\pm \Phi_\beta}{(E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)}. \quad (3.1.21)$$

Не задумываясь, поменяем местами порядок интегрирования и рассмотрим сначала интегралы

$$\mathcal{A}_\beta^\pm \equiv \int d\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^\pm}{(E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)}.$$

При $t \rightarrow -\infty$ можно замкнуть контур интегрирования по энергетической переменной E_α большой полуокружностью в верхней полуплоскости, причем вклад в интеграл от этой полуокружности обращается в нуль благодаря множителю $\exp(-iE_\alpha t)$, который экспоненциально мал при $t \rightarrow -\infty$ и $\text{Im} E_\alpha > 0$. Поэтому интеграл равен сумме вкладов от особенностей подынтегрального выражения в верхней полуплоскости. В общем случае, можно ожидать, что функции $g(\alpha)$ и $T_{\beta\alpha}^\pm$ имеют особенности при значениях E_α с положительными мнимыми частями, но, так же, как и для большой полуокружности, их вклад экспоненциально подавляется при $t \rightarrow -\infty$. (Конкретно, значение $-t$ должно быть много больше, чем временная неопределенность волнового пакета $g(\alpha)$ и длительность соударения; именно эти величины определяют, соответственно, положение особенностей $g(\alpha)$ и $T_{\beta\alpha}^\pm$ в комплексной плоскости E_α .) В результате остается особенность в $(E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)^{-1}$, которая лежит в верхней полуплоскости для \mathcal{A}_β^- , но не для \mathcal{A}_β^+ . Отсюда мы заключаем, что \mathcal{A}_β^+ обращается в нуль при $t \rightarrow -\infty$. Точно так же, при $t \rightarrow +\infty$ следует замкнуть контур интегрирования в нижней полуплоскости, и в этом пределе \mathcal{A}_β^- обращается в нуль. Мы приходим к выводу, что $\Psi_g^\pm(t)$ стремятся к $\Phi_g(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$, в согласии с основным условием (3.1.12).

* * *

В дальнейшем удобно использовать следующее представление множителя $(E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)^{-1}$ в (3.1.17). В общем случае

$$(E \pm i\varepsilon)^{-1} = \frac{\mathcal{P}}{E} \mp i\pi\delta_\varepsilon(E), \quad (3.1.22)$$

$$\frac{\mathcal{P}}{E} = \frac{E}{E^2 + \varepsilon^2}, \quad (3.1.23)$$

$$\delta_\varepsilon(E) \equiv \frac{\varepsilon}{\pi(E^2 + \varepsilon^2)}. \quad (3.1.24)$$

При $|E| \gg \varepsilon$ функция (3.1.23) ведет себя как $1/E$, и обращается в нуль при $E \rightarrow 0$, так что при $\varepsilon \rightarrow 0$ она ведет себя как «главное значение» \mathcal{P}/E . Это позволяет придать смысл интегралам от произведения $1/E$ на любую гладкую функцию от E , исключив бесконечно малую окрестность точки $E = 0$. При $|E| \gg \varepsilon$ функция (3.1.24) порядка ε , и при интегрировании по всем E дает единицу, так что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ она ведет себя как всем знакомая δ -функция $\delta(E)$. С учетом этого обстоятельства можно опустить метку ε в правой части (3.1.22) и записать просто

$$(E \pm i\varepsilon)^{-1} = \frac{\mathcal{P}}{E} \mp i\pi\delta(E). \quad (3.1.25)$$

3.2. S -матрица

В общем случае экспериментатор prepares при $t \rightarrow -\infty$ состояние, содержащее определенный набор частиц, и затем измеряет, во что превратится это состояние при $t \rightarrow +\infty$. Если при $t \rightarrow -\infty$ состояние подготовлено так, что содержит набор частиц α , то оно есть ин-состояние Ψ_α^+ ; если обнаружено, что при $t \rightarrow +\infty$ состояние содержит набор частиц β , то оно есть аут-состояние Ψ_β^- . Амплитуда вероятности перехода $\alpha \rightarrow \beta$ дается скалярным произведением

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+). \quad (3.2.1)$$

Этот набор комплексных амплитуд известен как S -матрица². Если взаимодействие отсутствует, ин- и аут-состояния совпадают,

и $S_{\beta\alpha} = \delta(\alpha - \beta)$. Таким образом, вероятность реакции $\alpha \rightarrow \beta$ пропорциональна $|S_{\beta\alpha} - \delta(\alpha - \beta)|^2$. В разделе 3.4 мы детально рассмотрим связь $S_{\beta\alpha}$ с измеряемыми вероятностями и сечениями.

Видимо, следует подчеркнуть, что ин- и аут-состояния живут в двух разных гильбертовых пространствах. Они отличаются только своими метками, тем, как они выглядят соответственно при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$. Всякое ин-состояние можно разложить по аут-состояниям, причем коэффициентами разложения и будут элементы S -матрицы (3.2.1).

Так как $S_{\beta\alpha}$ — матрица, связывающая два набора ортонормированных состояний, она должна быть унитарной. Чтобы подробнее показать это, применим условие полноты (3.1.5) к аут-состояниям и запишем

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\Psi_\gamma^+, \Psi_\beta^-) (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^+).$$

Используя (3.1.15), находим:

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma - \alpha), \quad (3.2.2)$$

или короче $S^\dagger S = 1$. Аналогично, используя полноту ин- состояний, получаем:

$$\int d\beta S_{\gamma\beta} S_{\alpha\beta}^* = \delta(\gamma - \alpha) \quad (3.2.3)$$

или иначе $SS^\dagger = 1$ *.

Часто удобно вместо S -матрицы иметь дело с оператором S , для которого по определению матричные элементы между состояниями *свободных частиц* равны соответствующим элементам S -матрицы:

$$(\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \equiv S_{\beta\alpha}. \quad (3.2.4)$$

Явное, хотя и крайне формальное выражение (3.1.13) для ин- и аут-состояний позволяет получить формулу для оператора S :

* Альтернативное доказательство приведено в конце этого раздела. Отметим, что для бесконечных матриц условия унитарности $S^\dagger S = 1$ и $SS^\dagger = 1$ не эквивалентны.

$$S = \Omega(\infty)^\dagger \Omega(-\infty) = U(+\infty, -\infty), \quad (3.2.5)$$

где

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \Omega(\tau)^\dagger \Omega(\tau_0) = \exp(iH_0\tau) \exp(-iH(\tau - \tau_0)) \exp(-iH_0\tau_0). \quad (3.2.6)$$

Мы используем это выражение в следующем разделе для проверки лоренц-инвариантности S -матрицы, и в разделе 3.5 при выводе формулы для S -матрицы в зависящей от времени теории возмущений.

Методы предыдущего раздела можно применить для вывода полезной альтернативной формулы для S -матрицы. Обратимся вновь к формуле (3.1.21) для ин- состояния Ψ^+ , перейдя на этот раз к пределу $t \rightarrow +\infty$. Теперь следует замкнуть контур интегрирования по E_α в *нижней* полуплоскости. Хотя, как и ранее, особенности в $T_{\beta\alpha}^+$ и $g(\alpha)$ не дают вклада при $t \rightarrow +\infty$, следует учесть вклад сингулярного множителя $(E_\alpha - E_\beta + i\epsilon)^{-1}$. Контур идет по действительной оси от $E_\alpha = -\infty$ до $E_\alpha = +\infty$, и замыкается по большой полуокружности в нижней полуплоскости, так что контур обходит особенность в направлении *по часовой стрелке*. Согласно известной формуле теории вычетов вклад в интеграл по E_α определяется значением подынтегрального выражения в точке $E_\alpha = E_\beta - i\epsilon$, умноженному на $(-2\pi i)$. Иными словами, в пределе $\epsilon \rightarrow 0^+$ и $t \rightarrow +\infty$ интеграл по α в (3.1.21) асимптотически ведет себя как

$$I_\beta^+ \rightarrow -2i\pi e^{-iE_\beta t} \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+$$

и поэтому при $t \rightarrow +\infty$

$$\Psi_g^+(t) \rightarrow \int d\beta e^{-iE_\beta t} \Phi_\beta \left[g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+ \right].$$

Однако разложение выражения (3.1.19) для Ψ_g^+ по полному набору аут-состояний дает:

$$\Psi_g^+(t) = \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \int d\beta \Psi_\beta^- S_{\beta\alpha}.$$

Так как $S_{\beta\alpha}$ содержит множитель $\delta(E_\beta - E_\alpha)$, это можно переписать в виде:

$$\Psi_g^+(t) = \int d\beta \Psi_\beta^- e^{-iE_\beta t} \int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha},$$

после чего, используя определяющее свойство (3.1.12) для аут- состояний, находим асимптотическое поведение при $t \rightarrow +\infty$:

$$\Psi_g^+(t) \rightarrow \int d\beta \Phi_\beta e^{-iE_\beta t} \int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha}.$$

Сравнивая с нашим предыдущим результатом, находим:

$$\int d\alpha g(\alpha) S_{\beta\alpha} = g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+$$

или иначе

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi \delta(E_\alpha - E_\beta) T_{\beta\alpha}^+. \quad (3.2.7)$$

Эта формула позволяет установить простое приближенное выражение для *S*-матрицы. В случае слабого взаимодействия *V* можно пренебречь разницей между ин- состояниями и состояниями свободных частиц в (3.1.18), так что (3.2.7) принимает вид:

$$S_{\beta\alpha} \approx \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi \delta(E_\alpha - E_\beta) (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha). \quad (3.2.8)$$

Формула (3.2.8) известна под названием *борновского приближения*³. Поправки более высокого порядка обсуждаются в разделе 3.5.

* * *

Уравнения Липпмана–Швингера (3.1.16) для ин- и аут- состояний можно использовать для доказательства⁴ ортонормированности этих состояний и унитарности *S*-матрицы, а также для вывода формулы (3.2.7), не используя при этом предельных переходов к $t \rightarrow \mp\infty$. Во-первых, подставляя соотношение (3.1.16) по очереди слева и справа в матричный элемент $(\Psi_\beta^\pm, V\Psi_\alpha^\pm)$ и приравнивая результаты, находим, что

$$\begin{aligned} & (\Psi_\beta^\pm, V\Phi_\alpha) + (\Psi_\beta^\pm, V(E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V\Psi_\alpha^\pm) \\ &= (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm) + (\Psi_\beta^\pm, V(E_\beta - H_0 \mp i\varepsilon)^{-1} V\Psi_\alpha^\pm). \end{aligned}$$

Суммируя по полному набору промежуточных состояний Φ_γ , приходим к уравнению:

$$T_{\alpha\beta}^{\pm*} - T_{\beta\alpha}^{\pm} = -\int d\gamma T_{\gamma\beta}^{\pm*} T_{\gamma\alpha}^{\pm} \left([E_{\alpha} - E_{\gamma} \pm i\epsilon]^{-1} - [E_{\beta} - E_{\gamma} \mp i\epsilon]^{-1} \right). \quad (3.2.9)$$

Для доказательства ортонормированности ин- и аут- состояний, разделим (3.2.9) на $E_{\alpha} - E_{\beta} \pm 2i\epsilon$. Получим:

$$\left(\frac{T_{\alpha\beta}^{\pm}}{E_{\beta} - E_{\alpha} \pm 2i\epsilon} \right)^* + \frac{T_{\beta\alpha}^{\pm}}{E_{\alpha} - E_{\beta} \pm 2i\epsilon} = -\int d\gamma \left(\frac{T_{\gamma\beta}^{\pm}}{E_{\beta} - E_{\gamma} \pm i\epsilon} \right)^* \frac{T_{\gamma\alpha}^{\pm}}{E_{\alpha} - E_{\gamma} \pm i\epsilon}.$$

Слагаемые 2ϵ в знаменателях левой части можно заменить на ϵ , так как главное в этих слагаемых – то, что они положительные бесконечно малые величины. Теперь видно, что величина

$$\delta(\beta - \alpha) + \frac{T_{\beta\alpha}^{\pm}}{(E_{\alpha} - E_{\beta} \pm i\epsilon)}$$

унитарна. С учетом (3.1.17) это соответствует утверждению, что Ψ_{α}^{\pm} образуют два ортонормированных набора векторов состояний. Унитарность S -матрицы можно доказать аналогично, умножив (3.2.9) не на $(E_{\alpha} - E_{\beta} \pm 2i\epsilon)^{-1}$, а на $\delta(E_{\beta} - E_{\alpha})$.

3.3. Симметрии S -матрицы

В этом разделе мы рассмотрим, во-первых, что означает инвариантность S -матрицы по отношению к различным симметриям, и, во-вторых, каковы условия, которые накладываются на гамильтониан, чтобы обеспечить эти свойства инвариантности.

Лоренц-инвариантность

Для любого собственного ортохронного преобразования Лоренца $x \rightarrow \Lambda x + a$ можно определить унитарный оператор $U(\Lambda, a)$, задав правило его действия на ин- или аут-состояния в соответствии с формулой (3.1.1). Когда говорится, что теория лоренц-инвариантна, подразумевается, что один и тот же оператор $U(\Lambda, a)$ действует по формуле (3.1.1) как на ин-, так и на аут-состояния. Поскольку оператор $U(\Lambda, a)$ унитарен, можно записать:

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) = (U(\Lambda, a)\Psi_{\beta}^{-}, U(\Lambda, a)\Psi_{\alpha}^{+}),$$

откуда, используя (3.1.1), получаем свойство лоренц-инвариантности (на самом деле, ковариантности) S -матрицы: для произвольных преобразований Лоренца Λ^{μ}_{ν} и преобразования трансляций a^{μ} S -матрица преобразуется по правилу:

$$\begin{aligned} & S_{p'_1, \sigma'_1, n'_1; p'_2, \sigma'_2, n'_2; \dots; p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} \\ &= \exp\left(ia_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} (p_1^{\mu} + p_2^{\mu} + \dots - p_1'^{\mu} - p_2'^{\mu} - \dots)\right) \\ & \times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots (\Lambda p'_1)^0 (\Lambda p'_2)^0}{p_1^0 p_2^0 \dots p_1'^0 p_2'^0 \dots}} \\ & \times \sum_{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \dots} D_{\bar{\sigma}_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \\ & \times \sum_{\bar{\sigma}'_1 \bar{\sigma}'_2 \dots} D_{\bar{\sigma}'_1 \sigma'_1}^{(j'_1)*}(W(\Lambda, p'_1)) D_{\bar{\sigma}'_2 \sigma'_2}^{(j'_2)*}(W(\Lambda, p'_2)) \dots \\ & \times S_{\Lambda p'_1, \bar{\sigma}'_1, n'_1; \Lambda p'_2, \bar{\sigma}'_2, n'_2; \dots; \Lambda p_1, \bar{\sigma}_1, n_1; \Lambda p_2, \bar{\sigma}_2, n_2; \dots} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

(Штрихи отличают конечные частицы от начальных; черта над индексом указывает переменные, по которым идет суммирование.)

В частности, поскольку левая часть этого выражения не зависит от a^{μ} , это же должно быть верно и для правой части, поэтому S -матрица обращается в нуль, если не выполнен закон сохранения 4-импульса. Следовательно, та часть S -матрицы, которая описывает реальные взаимодействия между частицами, может быть представлена в виде

$$S_{\beta\alpha} - \delta(\beta - \alpha) = -2\pi i M_{\beta\alpha} \delta^4(p_{\beta} - p_{\alpha}). \quad (3.3.2)$$

(Однако, как будет видно в следующей главе, амплитуда $M_{\beta\alpha}$ сама содержит слагаемые, включающие новые множители с дельта-функциями.)

Формулу (3.3.1) следует рассматривать не как теорему, а как определение того, что мы понимаем под инвариантностью S -матрицы, т. к. только для ряда специально выбранных гамильтонианов

существует унитарный оператор, действующий на ин- и аут-состояния по формуле (3.1.1). Следует сформулировать условия, которым должен удовлетворять гамильтониан, чтобы обеспечить инвариантность S -матрицы. Для этого удобно будет работать с оператором S , определенным формулой (3.2.4):

$$S_{\beta\alpha} = (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha).$$

По определению состояний свободных частиц Φ_α из гл. 2, эти состояния реализуют представление неоднородной группы Лоренца, так что всегда можно определить унитарный оператор $U_0(\Lambda, a)$, индуцирующий на этих состояниях преобразование (3.1.1):

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, a)\Phi_{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \dots} &= \exp(-ia_\mu \Lambda^\mu_\nu (p_1^\nu + p_2^\nu + \dots)) \\ &\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \sum_{\sigma'_1 \sigma'_2 \dots} D_{\sigma'_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\sigma'_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \\ &\times \Phi_{\Lambda p_1, \sigma_1, n_1; \Lambda p_2, \sigma_2, n_2; \dots}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (3.3.1) будет верна, если этот унитарный оператор коммутирует с оператором S :

$$U_0(\Lambda, a)^{-1} S U_0(\Lambda, a) = S.$$

Это условие можно выразить и с помощью инфинитезимальных преобразований Лоренца. Как и в разделе 2.4, должен существовать набор эрмитовых операторов — импульс \mathbf{P}_0 , угловой момент \mathbf{J}_0 и генератор бустов \mathbf{K}_0 — который, действуя вместе с H_0 на состояния свободных частиц, порождает бесконечно малые неоднородные преобразования Лоренца. Формула (3.3.1) эквивалентна утверждению, что S -матрица при таких преобразованиях не изменяется, или что оператор S коммутирует со всеми генераторами:

$$[H_0, S] = [\mathbf{P}_0, S] = [\mathbf{J}_0, S] = [\mathbf{K}_0, S] = 0. \quad (3.3.3)$$

Так как операторы H_0 , \mathbf{P}_0 , \mathbf{J}_0 и \mathbf{K}_0 порождают инфинитезимальные преобразования Лоренца состояний Φ_α , они автоматически удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.4.18)–(2.4.24):

$$[J_0^i, J_0^j] = i\varepsilon_{ijk} J_0^k, \quad (3.3.4)$$

$$[J_0^i, K_0^j] = i\varepsilon_{ijk} K_0^k, \quad (3.3.5)$$

$$[K_0^i, K_0^j] = -i\varepsilon_{ijk} J_0^k, \quad (3.3.6)$$

$$[J_0^i, P_0^j] = i\varepsilon_{ijk} P_0^k, \quad (3.3.7)$$

$$[K_0^i, P_0^j] = -iH_0 \delta_{ij}, \quad (3.3.8)$$

$$[J_0^i, H_0] = [P_0^i, H_0] = [P_0^i, P_0^j] = 0, \quad (3.3.9)$$

$$[K_0^i, H_0] = -iP_0^i, \quad (3.3.10)$$

где i, j, k и т. д. принимают значения 1, 2, 3, а ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123} = +1$.

Аналогично можно определить набор «точных генераторов» — операторов \mathbf{P} , \mathbf{J} , \mathbf{K} , которые вместе с полным гамильтонианом H порождают преобразования (3.1.1) при действии, скажем, на ин- состояниях. (Как уже отмечалось, не очевидно, что те же операторы, действуя на аут-состояниях, порождают те же преобразования.) Исходя из структуры группы, получаем, что эти точные генераторы удовлетворяют тем же самым перестановочным соотношениям:

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon_{ijk} J^k, \quad (3.3.11)$$

$$[J^i, K^j] = i\varepsilon_{ijk} K^k, \quad (3.3.12)$$

$$[K^i, K^j] = -i\varepsilon_{ijk} J^k, \quad (3.3.13)$$

$$[J^i, P^j] = i\varepsilon_{ijk} P^k, \quad (3.3.14)$$

$$[K^i, P^j] = -iH \delta_{ij}, \quad (3.3.15)$$

$$[J^i, H] = [P^i, H] = [P^i, P^j] = 0, \quad (3.3.16)$$

$$[K^i, H] = -iP^i. \quad (3.3.17)$$

Практически во всех известных теориях поля эффекты взаимодействия сводятся к добавлению слагаемого V в гамильтониан, без изменения импульса и углового момента:

$$H = H_0 + V, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0. \quad (3.3.18)$$

(Единственным известным исключением являются теории с топологически твистованными полями, например, теории с магнитными монополями, в которых угловой момент состояний зависит от взаимодействия.) Из соотношения (3.1.18) вытекает, что удовлетворяются перестановочные соотношения (3.3.11), (3.3.14) и (3.3.16), если считать, что оператор взаимодействия коммутирует с операторами импульса и углового момента свободных частиц:

$$[V, \mathbf{P}_0] = [V, \mathbf{J}_0] = 0. \quad (3.3.19)$$

Теперь из уравнения Липпмана–Швингера (3.1.16) или, эквивалентно, из (3.1.13) легко получить, что операторами, генерирующими трансляции и вращения при действии на ин- (и аут-) состояния действительно являются операторы \mathbf{P}_0 и \mathbf{J}_0 . Кроме того, видно, что \mathbf{P}_0 и \mathbf{J}_0 коммутируют с оператором $U(t, t_0)$, определенным формулой (3.2.6), а следовательно и с S -оператором $U(\infty, -\infty)$. Далее, мы уже знаем, что S -оператор коммутирует с H_0 , так как в обоих слагаемых в (3.2.7) содержатся дельта-функции, выражающие закон сохранения энергии. Таким образом, остается показать, что генератор буста \mathbf{K}_0 коммутирует с оператором S .

С другой стороны, нельзя приравнять генератор буста \mathbf{K} его аналогу для свободных частиц \mathbf{K}_0 , так как в этом случае из (3.3.15) и (3.3.8) будет следовать, что $H = H_0$, что очевидно неверно при наличии взаимодействий. Таким образом, добавляя взаимодействие V к H_0 , мы должны добавить также и поправку \mathbf{W} к генератору буста \mathbf{K}_0 :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{W}. \quad (3.3.20)$$

Из оставшихся перестановочных соотношений остановимся на (3.3.17), которое теперь принимает вид

$$[\mathbf{K}_0, V] = -[\mathbf{W}, H]. \quad (3.3.21)$$

Само по себе соотношение (3.3.21) бессодержательно, так как для любого V можно всегда определить \mathbf{W} , задав его матричные элементы между собственными состояниями Ψ_α и Ψ_β гамильтониана H в виде $-(\Psi_\beta, [\mathbf{K}_0, V] \Psi_\alpha) / (E_\beta - E_\alpha)$. Напомним, что ключевым моментом для лоренц-инвариантности теории является не то, что обязательно должен существовать набор точных генераторов, удовлетворяющих соотношениям (3.3.11)–(3.3.17), а то, что эти операторы должны одинаково действовать на ин- и аут-состояния. Просто найти оператор \mathbf{K} , удовлетворяющий (3.3.21), недостаточно. Это соотношение становится существенным, если добавить требование, что матричные элементы \mathbf{W} должны быть гладкими функциями энергий, в частности, не должны иметь особенностей вида $(E_\beta - E_\alpha)^{-1}$. Докажем теперь, что из (3.3.21) и подходящего условия гладкости \mathbf{W} действительно вытекает оставшееся условие лоренц-инвариантности $[\mathbf{K}_0, S] = 0$.

Чтобы показать это, рассмотрим коммутатор \mathbf{K}_0 с оператором $U(t, t_0)$ при конечных t и t_0 . Используя формулу (3.3.10) и тот факт, что \mathbf{P}_0 коммутирует с H , получим:

$$[\mathbf{K}_0, \exp(iH_0 t)] = -t \mathbf{P}_0 \exp(iH_0 t),$$

В то же время из перестановочного соотношения (3.3.21) (или, эквивалентно, из (3.3.17)) вытекает:

$$[\mathbf{K}, \exp(iHt)] = -t \mathbf{P} \exp(iHt) = -t \mathbf{P}_0 \exp(iHt).$$

В коммутаторе \mathbf{K}_0 с U операторы импульса сокращаются, так что

$$[\mathbf{K}_0, U(\tau, \tau_0)] = -\mathbf{W}(\tau)U(\tau, \tau_0) + U(\tau, \tau_0)\mathbf{W}(\tau_0), \quad (3.3.22)$$

где

$$\mathbf{W}(t) \equiv \exp(iH_0 t) \mathbf{W} \exp(-iH_0 t). \quad (3.3.23)$$

Если матричные элементы \mathbf{W} между собственными состояниями H_0 являются достаточно гладкими функциями энергии, матричные элементы $\mathbf{W}(t)$ между гладкими суперпозициями собственных состояний энергии обращаются при $t \rightarrow \pm\infty$ в нуль, так что из (3.3.22) в результате получается

$$0 = [\mathbf{K}_0, U(\infty, -\infty)] = [\mathbf{K}_0, S], \quad (3.3.24)$$

что и следовало доказать. Этот результат очень важен: соотношение (3.3.21) совместно с условием гладкости матричных элементов \mathbf{W} , обеспечивающих обращение в нуль $\mathbf{W}(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$, является достаточным условием лоренц-инвариантности S -матрицы. Условие гладкости довольно естественно, так как оно весьма напоминает условие на матричные элементы V , необходимое для того, чтобы $V(t)$ обращалось в нуль при $t \rightarrow \pm\infty$, как и требуется для подкрепления самой идеи S -матрицы.

Формулу (3.3.22) при $t = 0$ и $t_0 = \mp\infty$ можно использовать для доказательства того, что

$$\mathbf{K}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{K}_0, \quad (3.3.25)$$

где $\Omega(\pm\infty)$ является согласно (3.1.13) тем оператором, который переводит состояние свободной частицы Φ_α в соответствующее ин- или аут-состояние Ψ_α^\pm . Кроме того, из (3.3.18) и (3.3.19) тривиально следует, что это же верно для импульса и углового момента:

$$\mathbf{P}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{P}_0, \quad (3.3.26)$$

$$\mathbf{J}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{J}_0. \quad (3.3.27)$$

Наконец, так как все Φ_α и Ψ_α^\pm являются собственными состояниями H_0 и H , соответственно, с одним и тем же собственным значением E_α , то

$$H\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)H_0. \quad (3.3.28)$$

Из формул (3.3.25)–(3.3.28) следует, что в рамках наших предположений ин- и аут-состояния действительно преобразуются под действием преобразований Лоренца так же, как и состояния свободных частиц.

Кроме того, поскольку это преобразования подобия, мы видим, что точные генераторы \mathbf{K} , \mathbf{P} , \mathbf{J} и H удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и \mathbf{K}_0 , \mathbf{P}_0 , \mathbf{J}_0 и H_0 . Именно поэтому при доказательстве лоренц-инвариантности S -матрицы не требуется использовать другие включающие оператор \mathbf{K} перестановочные соотношения (3.3.12), (3.3.13) и (3.3.15).

Внутренние симметрии

Существуют различные симметрии, например, симметрия относительно взаимной перестановки нейтронов и протонов в ядерной физике или симметрия относительно операции «зарядового сопряжения» для частиц и античастиц, не имеющие никакого прямого отношения к лоренц-инвариантности и, более того, выглядящие одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Подобное преобразование симметрии T действует в гильбертовом пространстве физических состояний как некоторый унитарный оператор $U(T)$, который индуцирует линейные преобразования по индексам, отмечающим сорта частиц:

$$U(T)\Psi_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots} = \sum_{\bar{n}_1\bar{n}_2\dots} \mathcal{U}_{\bar{n}_1n_1}(T)\mathcal{U}_{\bar{n}_2n_2}(T) \times \Psi_{p_1\sigma_1\bar{n}_1;p_2\sigma_2\bar{n}_2;\dots} \quad (3.3.29)$$

В соответствии с общей дискуссией в гл. 2, оператор $U(T)$ должен удовлетворять групповому правилу умножения

$$U(\bar{T})U(T) = U(\bar{T}T), \quad (3.3.30)$$

где $\bar{T}T$ — преобразование, полученное сначала действием преобразования T , а затем другого преобразования \bar{T} . Действуя оператором $U(\bar{T})$ на (3.3.29), видим, что матрицы \mathcal{U} удовлетворяют тому же правилу:

$$\mathcal{U}(\bar{T})\mathcal{U}(T) = \mathcal{U}(\bar{T}T). \quad (3.3.31)$$

Кроме того, беря скалярное произведение состояний, полученных действием оператора $U(T)$ на два разных ин- или аут-состояния, и используя условие нормировки (3.1.2), находим, что матрица $\mathcal{U}(T)$ должна быть унитарной:

$$\mathcal{U}^\dagger(T) = \mathcal{U}^{-1}(T). \quad (3.3.32)$$

Наконец, вычисляя скалярное произведение состояний, полученных действием оператора $U(T)$ на одно аут- и одно ин-состояние, получаем, что $\mathcal{U}(T)$ коммутирует с S -матрицей в том смысле, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots \bar{N}'_1 \bar{N}'_2 \dots} \sum D_{\bar{N}'_1 n'_1}^*(T) D_{\bar{N}'_2 n'_2}^*(T) \dots D_{\bar{N}_1 n_1}^*(T) D_{\bar{N}_2 n_2}^*(T) \dots \\ & \times S_{p'_1 \sigma'_1 \bar{N}'_1; p'_2 \sigma'_2 \bar{N}'_2; \dots; p_1 \sigma_1 \bar{N}_1; p_2 \sigma_2 \bar{N}_2; \dots} = S_{p'_1 \sigma'_1 n'_1; p'_2 \sigma'_2 n'_2; \dots; p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots}. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Это есть определение того, что подразумевается под словами: «теория инвариантна по отношению к преобразованиям внутренней симметрии T », так как для вывода (3.3.33) все еще следует показать, что *один и тот же* унитарный оператор $U(T)$ индуцирует преобразование (3.3.29) как ин-, так и аут-состояний. Это будет выполнено, если существует «невозмущенный» оператор преобразования $U_0(T)$, индуцирующий такие преобразования состояний свободных частиц,

$$U_0(T) \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} = \sum_{\bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} \mathcal{U}_{\bar{N}_1 n_1}(T) \mathcal{U}_{\bar{N}_2 n_2}(T) \dots \Phi_{p_1 \sigma_1 \bar{N}_1; p_2 \sigma_2 \bar{N}_2; \dots}, \quad (3.3.34)$$

и коммутирующий как с гамильтонианом свободных частиц, так и с гамильтонианом взаимодействия:

$$U_0^{-1}(T) H_0 U_0(T) = H_0, \quad (3.3.35)$$

$$U_0^{-1}(T) V U_0(T) = V. \quad (3.3.36)$$

С помощью уравнения Липпмана–Швингера (3.1.17) или формулы (3.1.13) находим, что оператор $U_0(T)$ индуцирует преобразования (3.3.29) ин- и аут-состояний, а также состояний свободных частиц, так что можно вывести формулу (3.3.29), взяв $U_0(T)$ вместо оператора $U(T)$.

Очень важным с физической точки зрения частным случаем является преобразование симметрии, описываемое однопараметрической группой Ли, когда T — функция одного параметра θ , причем

$$T(\bar{\theta}) T(\theta) = T(\bar{\theta} + \theta). \quad (3.3.37)$$

Как показано в разделе 2.2, в этом случае соответствующие операторы в гильбертовом пространстве должны иметь вид:

$$U(T(\theta)) = \exp(iQ\theta), \quad (3.3.38)$$

где Q — эрмитов оператор. Аналогично, матрицы $\mathcal{U}(T)$ имеют вид

$$\mathcal{G}_{n'n}(\Gamma(\theta)) = \delta_{n'n} \exp(iq_n \theta), \quad (3.3.39)$$

где q_n – набор действительных, зависящих от сорта частиц чисел. В этом случае из формулы (3.3.33) следует, что q сохраняются: матричные элементы $S_{\beta\alpha}$ обращаются в нуль, кроме случая, когда

$$q_{n'_1} + q_{n'_2} + \dots = q_{n_1} + q_{n_2} + \dots \quad (3.3.40)$$

Классическим примером такого закона сохранения является сохранение электрического заряда. Кроме того, во всех известных процессах сохраняются барионное число (число барионов, т. е. протонов, нейтронов и гиперонов, минус число их античастиц) и лептонное число (число лептонов, т. е. электронов, мюонов, τ -лептонов и соответствующих нейтрино, минус число их античастиц). Правда, как мы увидим в т. II, считается, что эти законы сохранения выполняются лишь с очень хорошей степенью приближения к реальности. Существуют и другие аналогичные законы сохранения, определенно являющиеся приближенными. Примером может служить сохранение величины, названной странностью, которая была введена для объяснения относительно большого времени жизни ряда частиц, открытых в космических лучах Рочестером и Батлером ⁵ в 1947 году. Так, мезонам, называемым сейчас K^+ и K^0 , приписывается значение странности $+1$, а гиперонам Λ^0 , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- – значение -1 , а у более привычных протонов, нейтронов и π -мезонов (пионов) странность считается равной нулю *. Сохранение странности в сильных взаимодействиях объясняет, почему странные частицы рождаются всегда вместе, например, в реакции $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0$, в то время, как относительно медленные распады странных частиц в нестранные, например, $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ и $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ свидетельствуют, что взаимодействия, не сохраняющие странность, очень слабы.

Классическим примером «неабелевой» симметрии, генераторы которой не коммутируют друг с другом, является симметрия относительно преобразований изотопического спина, предложенная в

* Верхние индексы указывают на электрический заряд частиц в единицах абсолютного значения заряда электрона. «Гипероном» называют любую частицу, обладающую ненулевым значением странности и барионным числом, равным единице.

1937 году ⁶ на основании эксперимента ⁷, показавшего существование сильных протон–протонных взаимодействий, аналогичных взаимодействиям протонов с нейтронами. Математически группой симметрии является группа $SU(2)$, совпадающая с накрывающей группой для группы трехмерных вращений. Генераторы группы $SU(2)$ обозначаются t_i , $i = 1, 2, 3$, и удовлетворяют перестановочным соотношениям, аналогичным (2.4.18):

$$[t_i, t_j] = i\varepsilon_{ijk}t_k.$$

В ситуациях, когда имеет место симметрия по отношению к преобразованиям изотопического спина, частицы образуют вырожденные мультиплеты, характеризующиеся целым или полуцелым числом T , причем каждая из $(2T + 1)$ компонент такого мультиплета отличается значением t_3 , как в случае вырожденных спиновых мультиплетов, существование которых требуется инвариантностью относительно вращений. Такими мультиплетами являются: нуклоны p и n с $T = 1/2$ и $t_3 = 1/2, -1/2$; пионы π^+, π^0, π^- с $T = 1$ и $t_3 = 1, 0, -1$; Λ^0 -гиперон с $T = 0$ и $t_3 = 0$. Эти примеры иллюстрируют соотношение между электрическим зарядом Q , третьей компонентой изотопического спина t_3 , барионным числом B и странностью S :

$$Q = t_3 + \frac{B + S}{2}.$$

Это соотношение было первоначально выведено на основании наблюдавшихся правил отбора, однако Гелл-Манн и Неeman в 1960 году показали, что оно есть следствие того, что изоспин \mathbf{T} и «гиперзаряд» $Y \equiv B + S$ «погружаются» в алгебру Ли более широкой, но и более сильно нарушенной неабелевой внутренней симметрии, основанной на неабелевой группе $SU(3)$. Как мы увидим в т. II, в наши дни в рамках современной теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамики — изоспиновая и $SU(3)$ симметрия воспринимаются как случайные следствия, вытекающие из малых значений масс двух или трех легчайших кварков.

Следствия изотопической симметрии для реакций между сильно взаимодействующими частицами могут быть получены теми же знакомыми методами, которые были развиты для вывода следствий инвариантности относительно вращений. В частности, для двухчастичной реакции $A + B \rightarrow C + D$ из формулы (3.3.33) вытекает, что

S -матрица может быть представлена в виде (опущены все индексы, кроме изотопических):

$$S_{t_{C_3}t_{D_3}, t_{A_3}t_{B_3}} = \sum_{T, t_3} C_{T_C T_D}(T t_3; t_{C_3} t_{D_3}) C_{T_A T_B}(T t_3; t_{A_3} t_{B_3}) S_T,$$

где $C_{j_1 j_2}(j\sigma; \sigma_1 \sigma_2)$ — обычный коэффициент Клебша–Гордана для образования состояния со спином j и третьей проекцией σ из состояний со спинами j_1 и j_2 и третьими проекциями σ_1 и σ_2 ; S_T — «приведенная» S -матрица, зависящая от T и от всех опущенных импульсных и угловых переменных, но не от третьих проекций изоспина $t_{A_3}, t_{B_3}, t_{C_3}, t_{D_3}$. Конечно, это и все другие следствия изотопической инвариантности являются только приближенными, т. к. изотопическая симметрия не сохраняется в электромагнитных (и других) взаимодействиях, о чем свидетельствует то, что различные члены одного изоспинового мультиплета, например, p и n , имеют разные электрические заряды и немного отличаются по массе.

Четность

Если принять, что симметрия относительно преобразования $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ действительно имеет место, то должен существовать унитарный оператор P , под действием которого как ин-, так и аут-состояния преобразуются как прямые произведения одночастичных состояний:

$$P \Psi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots}^{\pm} = \eta_{n_1} \eta_{n_2} \dots \Psi_{\mathcal{P} p_1 \sigma_1 n_1; \mathcal{P} p_2 \sigma_2 n_2; \dots}^{\pm}, \quad (3.3.41)$$

где η_n — внутренняя четность частиц сорта n , а \mathcal{P} меняет знак у пространственных компонент p^i . (Это правило верно для массивных частиц; модификация для безмассовых частиц очевидна.)

Условие сохранения четности для S -матрицы принимает вид

$$S_{p'_1 \sigma'_1 n'_1; p'_2 \sigma'_2 n'_2; \dots; p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots} = \eta_{n'_1}^* \eta_{n'_2}^* \dots \eta_{n_1} \eta_{n_2} \dots \times S_{\mathcal{P} p'_1 \sigma'_1 n'_1; \mathcal{P} p'_2 \sigma'_2 n'_2; \dots; \mathcal{P} p_1 \sigma_1 n_1; \mathcal{P} p_2 \sigma_2 n_2; \dots} \quad (3.3.42)$$

Как и в случае внутренних симметрий, оператор P , удовлетворяющий (3.3.41), действительно существует, если оператор P_0 ,

который, по определению, точно так же действует на состояния свободных частиц, коммутирует с V и H_0 .

Фазы η_n могут быть найдены либо из динамических моделей, либо из эксперимента, но при этом их невозможно однозначно определить, так как всегда можно переопределить оператор P , скомбинировав его с любым сохраняющимся оператором внутренней симметрии. Например, если P сохраняется, то это же верно и для оператора

$$P' \equiv P \exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q),$$

где B , L и Q – барионное число, лептонное число и электрический заряд, соответственно, α , β , γ – произвольные действительные фазы; таким образом и P , и P' можно считать операторами четности. Нейтрон, протон и электрон обладают разными комбинациями значений B , L и Q , так что подходящим выбором фаз α , β и γ можно определить внутренние четности этих трех частиц равными $+1$. Однако, как только это сделано, внутренние четности других частиц, например, заряженного пиона (который может быть испущен в переходе $n \rightarrow p + \pi^-$) уже не могут быть произвольными. Кроме того, внутренняя четность любой частицы типа нейтрального пиона π^0 , не характеризующейся никакими сохраняющимися квантовыми числами, всегда имеет смысл.

Предыдущие замечания позволяют понять, почему внутренние четности должны всегда иметь значения ± 1 . Легко видеть, что оператор пространственной инверсии P удовлетворяет закону группового умножения $P^2 = 1$; однако сохраняющийся оператор четности может не совпадать с ним, а отличаться некоторым фазовым преобразованием. В любом случае, выполнено или нет условие $P^2 = 1$, оператор P^2 ведет себя как оператор преобразования внутренней симметрии:

$$P^2 \Psi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots}^{\pm} = \eta_{n_1}^2 \eta_{n_2}^2 \dots \Psi_{p_1 \sigma_1 n_1; p_2 \sigma_2 n_2; \dots}^{\pm}.$$

Если эта внутренняя симметрия есть часть непрерывной группы симметрии фазовых преобразований, подобных группе умножения на фазу $\exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q)$ с произвольными значениями α , β и γ , то обратное преобразование — квадратный корень I_P — тоже должно входить в эту группу, причем $I_P^2 P^2 = 1$, $[I_P, P] = 0$. (Например, если $P^2 = \exp(i\alpha B + \dots)$, то $I_P = \exp(-\frac{1}{2}i\alpha B + \dots)$.) Теперь можно

определить новый оператор четности $P' \equiv PI_P$, для которого $P'^2 = 1$. Этот оператор сохраняется не в меньшей степени, чем P , поэтому нет никаких причин, по которым его нельзя назвать настоящим оператором четности. В этом случае внутренние четности могут иметь только значения ± 1 .

Единственный тип теорий, в которых не всегда возможно определить четность таким образом, чтобы все внутренние четности имели значения ± 1 , это тот, в котором существует некоторая дискретная внутренняя симметрия, не являющаяся составной частью какой-то непрерывной группы симметрии фазовых преобразований¹⁰. Например, как следствие закона сохранения углового момента, полное число F всех частиц с полуцелым спином может изменяться только на четное число, так что сохраняется оператор внутренней симметрии $(-1)^F$. У всех известных частиц полуцелого спина сумма $B + L$ барионного и лептонного чисел принимает нечетные значения, поэтому, насколько мы знаем, $(-1)^F = (-1)^{B+L}$. Если это верно, то $(-1)^F$ есть часть непрерывной группы симметрии, состоящей из операторов $\exp(i\alpha(B+L))$ с произвольным действительным α , причем оператор обратного квадратного корня есть $\exp(-i\pi(B+L)/2)$. В этом случае, если $P^2 = (-1)^F$, то P можно переопределить так, чтобы все внутренние четности равнялись ± 1 . Однако, если когда-нибудь будут открыты частицы полуцелого спина с четным значением $B + L$ (например, так называемые майорановские нейтрино, у которых $j = \frac{1}{2}$ и $B + L = 0$), то можно будет построить оператор $P^2 = (-1)^F$, не имея при этом возможности переопределить сам оператор четности так, чтобы его собственные значения равнялись только ± 1 . Конечно, в этом случае $P^4 = 1$, так что все частицы имели бы внутренние четности либо ± 1 , либо $\pm i$ (как у майорановских нейтрино).

Из формулы (3.3.42) следует, что если произведение внутренних четностей в конечном состоянии равно произведению внутренних четностей в начальном состоянии или этому произведению, взятому со знаком «минус», то S -матрица должна быть соответственно четной или нечетной по отношению к замене знаков у всех 3-импульсов. Например, в 1951 году наблюдалось¹¹, что пион может поглощаться дейтроном из основного состояния π^-d атома с $l = 0$ в реакции $\pi^- + d \rightarrow n + n$. (В разделе 3.7 мы покажем, что квантовое число l орбитального углового момента можно использовать в релятивистской физике так же, как и в нерелятивистской квантовой

механике.) Полный угловой момент начального состояния $j = 1$ (спины пиона и дейтрона равны нулю и единице, соответственно), так что конечное состояние должно иметь орбитальный угловой момент $l = 1$ и суммарный спин нейтронов $s = 1$. (Другие возможности: $l = 1, s = 0$; $l = 0, s = 1$; $l = 2, s = 1$, разрешенные законом сохранения углового момента, запрещены требованием антисимметрии конечного состояния относительно перестановки двух нейтронов.) Так как $l = 1$ в конечном состоянии, матричный элемент нечетен относительно изменения направления всех 3-импульсов, так что можно сделать вывод, что внутренние четности частиц в этой реакции должны быть связаны соотношением

$$\eta_d \eta_{\pi^-} = -\eta_n^2.$$

Известно, что дейтрон является связанным состоянием протона и нейтрона с четным угловым моментом (в основном, $l = 0$), и, как мы видели, протону и нейтрону можно приписать одинаковую внутреннюю четность, так что $\eta_d = \eta_n^2$. Отсюда можно сделать вывод, что $\eta_{\pi^-} = -1$, т. е. пион является *псевдоскалярной* частицей. Было показано, что π^+ и π^0 также имеют отрицательную внутреннюю четность, как и следует ожидать, исходя из симметрии между этими частицами (изотопической инвариантности).

Наличие у пиона отрицательной внутренней четности приводит к некоторым удивительным следствиям. Частица со спином нуль, распадающаяся на три пиона, должна обладать внутренней четностью $\eta_{\pi^3} = -1$, так как в инерциальной системе, в которой распадающаяся частица покоится, в силу инвариантности по отношению к вращениям матричный элемент может зависеть только от взаимных скалярных произведений импульсов пионов, которые все четны относительно изменения знака всех импульсов. (Смешанное скалярное произведение $\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3)$, построенное из трех импульсов пионов, обращается в нуль, так как $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$.) По той же причине частица со спином нуль, распадающаяся на два пиона, должна иметь внутреннюю четность $\eta_{\pi^2} = +1$. В частности, среди странных частиц, открытых в конце 1940 годов, казалось, обнаружили две разные частицы с нулевым спином (что было установлено по угловому распределению продуктов их распада). Одна из частиц, названная τ , была идентифицирована по распаду на три пиона, и поэтому ей была приписана четность -1 , а другая частица

θ была обнаружена по распаду на два пиона, и ей была приписана четность $+1$. Открытие превратилось в проблему, так как более детальное изучение свойств τ и θ все яснее показывало, что эти частицы имеют одинаковые массы и времена жизни. После многих предлагавшихся решений этой загадки, Ли и Янг в 1956 году разрубили гордиев узел и предположили, что τ и θ представляют одну и ту же частицу (известную сейчас как K^+), но в слабых взаимодействиях, ответственных за распад этой частицы, просто не сохраняется четность¹².

Как мы детально покажем в следующем разделе этой главы, вероятность физического процесса $\alpha \rightarrow \beta$ (где $\alpha \neq \beta$) пропорциональна $|S_{\beta\alpha}|^2$, причем коэффициенты пропорциональности инвариантны относительно изменения знака всех 3-импульсов. До тех пор, пока состояния α и β содержат определенное число частиц каждого типа, фазовые множители в (3.3.42) несущественны при вычислении $|S_{\beta\alpha}|^2$, и из (3.3.42) вытекает, что вероятность процесса $\alpha \rightarrow \beta$ инвариантна по отношению к изменению знака всех 3-импульсов. Как мы видели, для распадов K -мезона на два или три пиона это свойство — тривиальное следствие инвариантности по отношению к вращениям, но в более сложных процессах оно дает нетривиальные ограничения на вероятности. Так, следуя теоретическим предложениям Ли и Янга, Ву вместе с группой исследователей из Национального Бюро стандартов США измерила угловое распределение электронов в конечном состоянии в β -распаде поляризованных ядер $\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ ¹³. (Импульсы антинейтрино или ядра никеля в этом эксперименте не измерялись.) Обнаружилось, что электроны предпочтительно вылетают в направлении, противоположном направлению спина распадающегося ядра, что было бы невозможно, если бы вероятность процесса была инвариантной относительно замены всех 3-импульсов на противоположные. Похожий результат был получен при изучении распада положительного мюона (поляризованного в процессе образования в реакции $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$) на позитрон, нейтрино и антинейтрино¹⁴. Таким образом, стало ясно, что четность действительно не сохраняется в процессах слабого взаимодействия, ответственного за эти распады. Тем не менее, по причинам, обсуждаемым в разделе 12.5, четность сохраняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях и поэтому продолжает играть важную роль в теоретической физике.

Обращение времени

Мы видели в разделе 2.6, что оператор обращения времени T , действуя на одночастичное состояние $\Psi_{p,\sigma,n}$, дает состояние $\Psi_{\mathcal{J}p,-\sigma,n}$ с перевернутыми спином и импульсом, умноженное на фазу $\zeta_n(-1)^{j-\sigma}$. Многочастичное состояние, как обычно, преобразуется как прямое произведение одночастичных состояний, не считая того, что поскольку речь идет о преобразовании обращения времени, следует ожидать, что ин- и аут- состояния поменяются местами:

$$T\Psi_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots}^{\pm} = \zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\zeta_{n_2}(-1)^{j_2-\sigma_2}\dots\Psi_{\mathcal{J}p_1-\sigma_1n_1;\mathcal{J}p_2-\sigma_2n_2;\dots}^{\mp} \quad (3.343)$$

(Опять же, это верно для массивных частиц; необходимые для безмассовых частиц модификации очевидны.) Далее будет удобно записывать эту формулу кратко в виде

$$T\Psi_{\alpha}^{\pm} = \Psi_{\mathcal{J}\alpha}^{\mp}, \quad (3.344)$$

где \mathcal{J} содержит в себе изменение знака 3-импульсов и спинов, а также умножение на фазовые множители, выписанные в (3.343). Так как T — антиунитарный оператор, то

$$(\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) = (T\Psi_{\alpha}^{+}, T\Psi_{\beta}^{-}), \quad (3.345)$$

и условие инвариантности S -матрицы по отношению к обращению времени принимает вид

$$S_{\beta,\alpha} = S_{\mathcal{J}\alpha,\mathcal{J}\beta}, \quad (3.346)$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} & S_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2';\dots;p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\dots} \\ &= \zeta_{n_1}(-1)^{j_1'-\sigma_1'}\zeta_{n_2}(-1)^{j_2'-\sigma_2'}\dots\zeta_{n_1}^*(-1)^{j_1-\sigma_1}\zeta_{n_2}^*(-1)^{j_2-\sigma_2}\dots \\ &\times S_{p_{p_1-\sigma_1n_1};p_{p_2-\sigma_2n_2};\dots;p_{p_1'-\sigma_1'n_1'};p_{p_2'-\sigma_2'n_2'};\dots}. \end{aligned} \quad (3.347)$$

Заметим, что в дополнение к обращению импульсов и спинов поменялись местами начальные и конечные состояния, как и следовало ожидать для симметрии, включающей обращение времени.

S -матрица будет удовлетворять этому закону преобразования, если оператор T_0 , индуцирующий преобразования обращения времени на состояниях свободных частиц,

$$T_0 \Phi_\alpha \equiv \Phi_{\mathcal{J}\alpha} \quad (3.3.48)$$

коммутирует не только с гамильтонианом свободных частиц (что выполняется автоматически), но и с гамильтонианом взаимодействия:

$$T_0^{-1} H_0 T_0 = H_0, \quad (3.3.49)$$

$$T_0^{-1} V T_0 = V. \quad (3.3.50)$$

В этом случае можно положить $T = T_0$ и воспользоваться соотношением (3.1.13) или (3.1.16), чтобы показать, что преобразования обращения времени действуют именно так, как утверждается в (3.3.44). Например, действуя оператором T на уравнение Липмана–Швингера (3.1.16) и пользуясь (3.3.48)–(3.3.50), имеем

$$T\Psi_\alpha^\pm = \Phi_{\mathcal{J}\alpha} + [E_\alpha - H_0 \mp i\varepsilon]^{-1} T\Psi_\alpha^\pm,$$

где из-за антиунитарности T изменен знак у фактора $\pm i\varepsilon$. Это уравнение Липмана–Швингера для $\Psi_{\mathcal{J}\alpha}^\mp$, что и подтверждает формулу (3.3.44). Аналогично, поскольку T – антиунитарный оператор, он изменяет знак i в экспоненте в выражении для $\Omega(t)$, так что

$$T\Omega(-\infty)\Phi_\alpha = \Omega(\infty)\Phi_{\mathcal{J}\alpha},$$

и опять получается формула (3.3.44).

В противоположность сохранению четности, условие инвариантности относительно обращения времени (3.3.46) не говорит нам в общем случае, что вероятность процесса $\alpha \rightarrow \beta$ совпадает с вероятностью процесса $\mathcal{J}\alpha \rightarrow \mathcal{J}\beta$. Однако нечто подобное имеет место в случаях, когда S -матрица имеет вид

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^{(0)} + S_{\beta\alpha}^{(1)}, \quad (3.3.51)$$

где матричные элементы $S^{(1)}$ малы, а матричные элементы $S^{(0)}$ для какого-то конкретного процесса равны нулю, хотя в общем случае

они много больше, чем матричные элементы $S^{(1)}$. (Например, можно рассмотреть процесс ядерного β -распада $N \rightarrow N' + e^- + \nu$, причем $S^{(0)}$ — та часть S -матрицы, которая определяется сильным ядерным и электромагнитным взаимодействиями, а слагаемое $S^{(1)}$ — поправка к S -матрице, целиком обусловленная слабыми взаимодействиями. В разделе 3.5 показывается, как можно в этих случаях получить выражение для S -матрицы в виде (3.3.51) с помощью «борновского приближения искаженных волн». В некоторых случаях $S^{(0)}$ — просто единичный оператор.) В первом порядке по $S^{(1)}$ условие унитарности для S -оператора записывается в виде

$$1 = S^\dagger S = S^{(0)\dagger} S^{(0)} + S^{(0)\dagger} S^{(1)} + S^{(1)\dagger} S^{(0)} .$$

Используя равенство нулевого порядка $S^{(0)\dagger} S^{(0)} = 1$, получаем для $S^{(1)}$ условие действительности:

$$S^{(1)} = - S^{(0)} S^{(1)\dagger} S^{(0)} . \quad (3.3.52)$$

Если матрица $S^{(1)}$, так же, как и $S^{(0)}$, удовлетворяет условию обращения времени (3.3.46), соотношение (3.3.52) можно представить в следующем виде:

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = - \int d\gamma \int d\gamma' S_{\beta\gamma'}^{(0)} S_{\mathcal{I}'\mathcal{I}}^{(1)*} S_{\gamma\alpha}^{(0)} . \quad (3.3.53)$$

Поскольку $S^{(0)}$ — унитарный оператор, вероятности процессов $\alpha \rightarrow \beta$ и $\mathcal{I}\alpha \rightarrow \mathcal{I}\beta$ оказываются одинаковыми, если просуммировать по наборам \mathcal{I} и \mathcal{F} начальных и конечных состояний, являющихся полными по отношению к $S^{(0)}$. (Под словом «полный» здесь подразумевается, что если матричные элементы $S_{\alpha'\alpha}^{(0)}$ не равны нулю и либо α , либо α' принадлежат \mathcal{I} , то оба состояния принадлежат \mathcal{I} ; аналогичное утверждение верно и для \mathcal{F} .) В простейшем случае «полные» наборы \mathcal{I} и \mathcal{F} содержат каждый одно состояние; это означает, что как начальное, так и конечное состояния являются собственными векторами $S^{(0)}$ с собственными значениями $e^{2i\delta_\alpha}$ и $e^{2i\delta_\beta}$, соответственно. (Величины δ_α и δ_β называются «сдвигами фаз»; они действительны, так как $S^{(0)}$ унитарна.) В этом случае формула (3.3.53) принимает простой вид

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -e^{2i(\delta_\alpha + \delta_\beta)} S_{\mathcal{I}\beta\mathcal{I}\alpha}^{(1)*} , \quad (3.3.54)$$

откуда ясно, что абсолютная величина S -матрицы для процесса $\alpha \rightarrow \beta$ такая же, как и для процесса $\mathcal{T}\alpha \rightarrow \mathcal{T}\beta$. Именно так обстоит дело в ядерном β -распаде (в приближении, когда можно пренебречь сравнительно слабым кулоновским взаимодействием между электроном и ядром в конечном состоянии), поскольку и начальное, и конечное состояние являются собственными состояниями S -матрицы сильного взаимодействия (с $\delta_\alpha = \delta_\beta = 0$). Отсюда, если принимается инвариантность относительно обращения времени, дифференциальная вероятность β -распада не должна изменяться, если изменить знаки импульсов и z -компонент σ спинов всех частиц. Это предсказание не противоречило экспериментам, проведенным в 1956 году^{13,14}, в которых было обнаружено несохранение четности; так, инвариантность относительно обращения времени совместима с наблюдением, что электроны от распада ядра $\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ преимущественно испускаются в направлении, противоположном направлению спина ядра Co^{60} . Как описано ниже, в 1964 году было получено косвенное подтверждение нарушения инвариантности относительно обращения времени, но она остается полезной приближенной симметрией в слабых, а также в сильных и электромагнитных взаимодействиях.

В ряде случаев можно использовать базис состояний, для которых $\mathcal{T}\alpha = \alpha$ и $\mathcal{T}\beta = \beta$ и формула (3.3.54) принимает вид

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -e^{2i(\delta_\alpha + \delta_\beta)} S_{\beta\alpha}^{(1)*}, \quad (3.3.55)$$

откуда следует, что $iS_{\beta\alpha}^{(1)}$ имеет фазу $\delta_\alpha + \delta_\beta$ по модулю π . Это утверждение известно как *теорема Ватсона*¹⁵. Фазы, входящие в (3.3.54) и (3.3.55), можно измерить в процессах, где наблюдается интерференция между разными конечными состояниями. Например, в распаде гиперона Λ со спином $1/2$ на нуклон и пион конечное состояние может иметь орбитальный угловой момент, равный только $l = 0$ или $l = 1$; угловое распределение пиона относительно направления спина гиперона Λ включает интерференцию этих состояний, и поэтому в силу теоремы Ватсона зависит от разности фаз $\delta_s - \delta_p$.

РТ

Хотя эксперименты 1957 года по несохранению четности не исключили инвариантности относительно обращения времени, они

ясно показали, что произведение \mathcal{PT} не сохраняется. Если бы этот оператор сохранялся, он должен был быть антиунитарным по тем же причинам, что и оператор \mathcal{T} , так что в процессах типа ядерного β -распада следствия такой инвариантности имели бы вид соотношений, аналогичных (3.3.54):

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -e^{2i(\delta_\alpha + \delta_\beta)} S_{\mathcal{PT}\beta\mathcal{PT}\alpha}^{(1)*},$$

где преобразование \mathcal{PT} изменяет знаки всех z -компонент спина, но не компонент импульсов. Пренебрегая кулоновским взаимодействием в конечном состоянии, получим, что электрон в β -распаде $\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ не может иметь преимущественного направления вылета по отношению к спину Co^{60} , что противоречит наблюдениям.

С, CP и CPT

Уже отмечалось, что существует преобразование внутренней симметрии, называемое зарядовым сопряжением, которое заменяет частицы на античастицы и наоборот. Формально это требует существования унитарного оператора \mathcal{C} , который следующим образом действует на многочастичные состояния:

$$\mathcal{C}\Psi_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots}^\pm = \xi_{n_1} \xi_{n_2} \dots \Psi_{p_1\sigma_1 n_1^c; p_2\sigma_2 n_2^c; \dots}^\pm \quad (3.3.56)$$

где n^c – античастица к частице типа n , а ξ_n – еще одна фаза. Если это верно как для ин-, так и для аут- состояний, то S -матрица удовлетворяет условиям инвариантности

$$\begin{aligned} & S_{p_1'\sigma_1' n_1'; p_2'\sigma_2' n_2'; \dots; p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots} \\ &= \xi_{n_1'}^* \xi_{n_2'}^* \dots \xi_{n_1} \xi_{n_2} \dots S_{p_1'\sigma_1' n_1'^c; p_2'\sigma_2' n_2'^c; \dots; p_1\sigma_1 n_1^c; p_2\sigma_2 n_2^c; \dots} \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

Как и в случае других внутренних симметрий, S -матрица будет удовлетворять этим условиям, если оператор \mathcal{C}_0 , действующий на состояния свободных частиц так, как указано в (3.3.56), коммутирует с гамильтонианом взаимодействия V и со свободным гамильтонианом H_0 ; в этом случае полагаем $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$.

Фазы ξ_n называются зарядовыми четностями. Как и в случае обычных четностей η_n , величины ξ_n в общем случае определены неоднозначно, так как для любого оператора C , удовлетворяющего (3.3.56), можно найти другой такой оператор с другими ξ_n , умножив C на любое фазовое преобразование внутренней симметрии, например, на $\exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q)$. Зарядовые четности могут быть индивидуально измерены только для полностью нейтральных частиц вроде фотона или нейтрального пиона, которые не характеризуются никакими сохраняющимися квантовыми числами и совпадают со своими античастицами. В реакциях, в которых участвуют только полностью нейтральные частицы, в силу (3.3.57) произведения зарядовых четностей в начальном и конечном состояниях должны быть равны. Например, как будет далее показано, в квантовой электродинамике требуется, чтобы фотон обладал зарядовой четностью $\eta_\gamma = -1$, так что из наблюдения распада нейтрального пиона $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ вытекает, что $\eta_\pi = +1$; отсюда же следует, что процесс $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ должен быть запрещен, что и наблюдается на самом деле. Для двух рассмотренных частиц зарядовые четности действительны и равны $+1$ или -1 . Как и в случае обычной четности, это будет всегда так, если все внутренние симметрии фазовых преобразований являются членами непрерывных групп фазовых преобразований, потому что тогда можно переопределить оператор C , умножив его на обратный квадратный корень внутренней симметрии, равной C^2 , так что после этого новый оператор C будет удовлетворять условию $C^2 = 1$.

Для произвольных реакций из формулы (3.3.57) вытекает, что вероятность некоторого процесса равна вероятности того же процесса, в котором все частицы заменены на соответствующие античастицы. Это утверждение непосредственно не противоречило экспериментам по несохранению четности, выполненным в 1957 году (еще долго придется ждать, прежде чем кто-нибудь сумеет наблюдать β -распад ядер антикобальта), однако эксперименты показали, что C не сохраняется в теории слабых взаимодействий, предложенной Ли и Янгом¹² для того, чтобы учесть несохранение четности. (Ниже будет доказано, что наблюдаемое нарушение сохранения TP влечет нарушение сохранения C в любой полевой теории слабых взаимодействий, а не только в том ее варианте, который рассмотрели Ли и Янг.) Сейчас уже стало понятно, что как C , так и P не сохраняются в слабых взаимодействиях, ответственных

за процессы типа β -распада или распадов пиона и мюона, однако и C , и P сохраняются в сильных и электромагнитных взаимодействиях.

Хотя ранние эксперименты по несохранению четности показали, что ни C , ни P не сохраняются в слабых взаимодействиях, оставалась все же возможность, что их произведение CP универсально сохраняется. В течение нескольких лет ожидалось (хотя и не с полной уверенностью), что будет экспериментально доказано универсальное сохранение CP . Такой закон сохранения приводит к особенно важным следствиям в отношении свойств нейтральных K -мезонов. В 1954 году Гелл-Манн и Пайс¹⁶ отметили, что поскольку K^0 не совпадает со своей античастицей (K^0 обладает ненулевым значением приближенно сохраняющейся величины, названной странностью), то частицами с определенным временем жизни будут не K^0 и \bar{K}^0 , а их линейные комбинации $K^0 \pm \bar{K}^0$. Сначала это объяснялось с помощью утверждения о сохранении C , но когда обнаружилось, что зарядовая четность C не сохраняется в слабых взаимодействиях, аналогичные аргументы были повторены на основе сохранения CP . Если произвольно определить фазы оператора CP так, что в состояниях K^0 и \bar{K}^0

$$CP\Psi_{K^0} = \Psi_{\bar{K}^0}, \quad CP\Psi_{\bar{K}^0} = \Psi_{K^0},$$

то можно определить зарядово-самосопряженные одночастичные состояния

$$\Psi_{K_1^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{K^0} + \Psi_{\bar{K}^0}], \quad \Psi_{K_2^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{K^0} - \Psi_{\bar{K}^0}],$$

имеющие собственные значения CP , равные $+1$ и -1 , соответственно. Наименьшее время жизни имеют эти частицы относительно распада на два пиона, однако сохранение произведения CP позволяет это только* для состояния K_1 , но не K_2 . Таким образом, следует ожидать, что K_2 распадается по более медленным модам в три пио-

*Спин нейтральных K -мезонов равен нулю, так что двухпионное конечное состояние имеет $l = 0$, а следовательно $P = +1$. Далее, для двух π^0 $C = +1$, так как $C = +1$ у отдельного π^0 , и для состояния $\pi^+\pi^-$ с $l = 0$ также $C = +1$, так как C переставляет два пиона.

на или в пион, мюон (электрон) и нейтрино. Тем не менее, в 1964 году Фитч и Кронин обнаружили, что долгоживущий нейтральный K -мезон с малой вероятностью все же распадается на два пиона ¹⁷. Вывод заключался в том, что в слабых взаимодействиях CP не сохраняется строго, хотя степень сохранения много больше, чем у C и P по отдельности.

Как мы увидим в гл. 5, есть серьезные основания полагать, что, хотя C и CP не сохраняются по отдельности, произведение CPT строго сохраняется во всех взаимодействиях, по крайней мере, в любой квантовой теории поля. Именно CPT обеспечивает строгое соответствие между частицами и античастицами, в частности, из того факта, что CPT коммутирует с гамильтонианом, вытекает строгое равенство масс стабильных частиц и их античастиц. Так как оператор CPT антиунитарен, это преобразование связывает S -матрицу произвольного процесса с S -матрицей обратного процесса, в котором изменен знак всех третьих проекций спина и частицы заменены на античастицы.

Однако в случае, когда S -матрица может быть разделена на малое слагаемое $S^{(1)}$, определяющее данную реакцию, и большое слагаемое $S^{(0)}$, действующее в начальном и конечном состояниях, можно использовать те же доводы, что и при рассмотрении сохранения T , чтобы показать, что вероятность всякого процесса равна вероятности того же процесса, в котором частицы заменены на античастицы и перевернуто направление третьей компоненты спина, если при этом проведено суммирование по наборам начальных и конечных состояний, полным по отношению к $S^{(0)}$. В частности, хотя парциальные вероятности распада частицы в два конечных состояния β_1 и β_2 с $S_{\beta_1\beta_2}^{(0)} \neq 0$ могут отличаться от парциальных вероятностей распада античастицы в два соответствующих конечных состояния $\mathcal{CPT}\beta_1$ и $\mathcal{CPT}\beta_2$, мы увидим в разделе 3.5, что (без всяких приближений) полная вероятность распада любой частицы равна полной вероятности распада ее античастицы.

Теперь можно понять, почему опыты 1957 года по несохранению четности можно было интерпретировать в рамках существующей теории слабых взаимодействий как свидетельство сильного нарушения сохранения C и P , но не CP . Все рассматривавшиеся теории были теориями поля и поэтому автоматически сохраняли CPT . Эксперименты показали, что в ядерном β -распаде сильно нарушается PT , но не T , поэтому любая совместимая с этими экспериментами

теория, сохраняющая СРТ, должна включать несохранение S , но не CP .

Аналогичное наблюдение в 1964 году малого нарушения закона сохранения CP в слабых взаимодействиях совместно с предполагаемой инвариантностью всех взаимодействий относительно СРТ сразу же привело к выводу, что слабые взаимодействия не сохраняют T строго. Более детальное изучение системы $K^0 - \bar{K}^0$ подтвердило этот вывод, но до сих пор не удалось найти других прямых свидетельств нарушения инвариантности относительно обращения времени.

3.4. Сечения и вероятности

Элемент S -матрицы $S_{\beta\alpha}$ является амплитудой вероятности перехода $\alpha \rightarrow \beta$. Как связана эта величина с теми вероятностями и сечениями, которые измеряют экспериментаторы? В частности, из (3.3.2) видно, что $S_{\beta\alpha}$ содержит множитель $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$, обеспечивающий сохранение полной энергии и импульса. Что должны мы делать с множителем $[\delta^4(p_\beta - p_\alpha)]^2$ в вероятности перехода $|S_{\beta\alpha}|^2$? Правильный способ разрешения этих проблем заключается в том, чтобы понять, как реально ставятся эксперименты, используя для этого волновые пакеты, описывающие локализованные вдали друг от друга частицы перед соударением, а затем прослеживая эволюцию во времени таких суперпозиций многочастичных состояний. Ниже мы вместо этого используем быстрый и простой способ вывода основных результатов, который скорее является даже не выводом, а мнемоническим правилом для запоминания. Извинением является то, что (насколько я знаю) разбирательство тонкостей, связанных с этими вопросами, не является необходимым для решения ни одной из интересных нерешенных физических проблем.

Пусть вся наша система физических частиц заключена в большой ящик макроскопического объема V . Например, можно рассматривать этот объем как куб с отождествленными точками на противоположных гранях, так что из требования единственности пространственной волновой функции вытекает квантованность импульса:

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad (3.4.1)$$

где n_i — целые числа, а $L^3 \equiv V$. Тогда все трехмерные дельта-функции можно записать в виде

$$\delta_V^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}, \quad (3.4.2)$$

где $\delta_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}$ — обычный дельта-символ Кронекера, равный единице, когда индексы совпадают, и нулю, когда они разные. Из условия нормировки (3.1.2) следует, что для используемых нами состояний скалярные произведения в ящике не равны просто суммам произведений кронекеровских дельта-символов, а содержат дополнительный множитель $[V/(2\pi)^3]^N$, где N — число частиц в состоянии. Чтобы вычислить вероятности переходов, нужно использовать состояния с единичной нормой, поэтому введем нормированные в ящике состояния как

$$\Psi_\alpha^{\text{ящик}} \equiv [(2\pi)^3/V]^{N_\alpha/2} \Psi_\alpha, \quad (3.4.3)$$

норма которых

$$(\Psi_\beta^{\text{ящик}}, \Psi_\alpha^{\text{ящик}}) = \delta_{\beta\alpha}, \quad (3.4.4)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — произведение кронекеровских дельта-символов для всех 3-импульсов, спинов и индексов сортов частиц плюс слагаемые с переставленными частицами. Соответственно, можно записать S -матрицу в виде

$$S_{\beta\alpha} = [V/(2\pi)^3]^{(N_\beta+N_\alpha)/2} S_{\beta\alpha}^{\text{ящик}}, \quad (3.4.5)$$

где $S_{\beta\alpha}^{\text{ящик}}$ вычисляется по состояниям (3.4.3).

Конечно, если оставить частицы в ящике навсегда, то каждый возможный переход будет повторяться вновь и вновь. Чтобы вычислить разумную вероятность перехода, следует заключить систему и в «ящик по времени». Предположим, что взаимодействие включается только на время T . Отсюда немедленно следует, что дельта-функция, выражающая закон сохранения энергии, заменяется на

$$\delta_T(E_\alpha - E_\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i(E_\alpha - E_\beta)t) dt. \quad (3.4.6)$$

Вероятность того, что многочастичная система, находившаяся до включения взаимодействия в состоянии α , окажется после выключения взаимодействия в состоянии β , равна

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |S_{\beta\alpha}^{\text{ящик}}|^2 = [(2\pi)^3/V]^{(N_\alpha+N_\beta)} |S_{\beta\alpha}|^2. \quad (3.4.7)$$

Это выражение представляет вероятность перехода в одно конкретное состояние β в ящике. Число одночастичных ящичных состояний в заданном элементе объема импульсного пространства d^3p равно $Vd^3p/(2\pi)^3$, т. к. это есть число тех троек целых чисел n_1, n_2, n_3 , для которых импульс (3.4.1) попадает в элемент объема импульсного пространства d^3p в окрестности \mathbf{p} . Можно определить интервал конечных состояний $d\beta$ как произведение d^3p для каждой конечной частицы, так что полное число состояний в этом интервале

$$d\iota_\beta = [V/(2\pi)^3]^{N_\beta} d\beta. \quad (3.4.8)$$

Отсюда полная вероятность того, что система окажется в интервале $d\beta$ конечных состояний, равна

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = P(\alpha \rightarrow \beta)d\iota_\beta = [(2\pi)^3/V]^{N_\alpha} |S_{\beta\alpha}|^2 d\beta. \quad (3.4.9)$$

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением таких конечных состояний β , которые не только отличаются (хотя и немного) от начального состояния α , но и удовлетворяют более жесткому ограничению, заключающемуся в том, что ни одно подмножество частиц в состоянии β (отличное от всего множества) не имеет точно того же 4-импульса, что и соответствующее подмножество частиц в состоянии α . (На языке, который будет введен в следующей главе, это на самом деле означает, что мы рассматриваем только связную часть S -матрицы.) Для таких состояний можно определить не содержащий дельта-функций матричный элемент $M_{\beta\alpha}$:

$$S_{\beta\alpha} \equiv -2\pi i \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha) \delta_T(E_\beta - E_\alpha) M_{\beta\alpha}. \quad (3.4.10)$$

Введение ящика позволяет интерпретировать квадраты дельта-функций в $|S_{\beta\alpha}|^2$ при $\beta \neq \alpha$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \left[\delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha) \right]^2 &= \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha) \delta_V^3(0) = \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha) V / (2\pi)^3, \\ \left[\delta_T(E_\beta - E_\alpha) \right]^2 &= \delta_T(E_\beta - E_\alpha) \delta_T(0) = \delta_T(E_\beta - E_\alpha) T / (2\pi), \end{aligned}$$

так что из (3.4.9) имеем дифференциальную вероятность перехода

$$\begin{aligned} dP(\alpha \rightarrow \beta) &= (2\pi)^2 \left[(2\pi)^3 / V \right]^{N_\alpha - 1} (T / 2\pi) |M_{\beta\alpha}|^2 \\ &\quad \times \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha) \delta_T(E_\beta - E_\alpha) d\beta. \end{aligned}$$

Если считать V и T очень большими, произведение дельта-функций можно рассматривать как обычную четырехмерную дельта-функцию $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$. В этом пределе вероятность перехода пропорциональна времени T , в течение которого включено взаимодействие, причем коэффициент пропорциональности можно интерпретировать как *дифференциальную вероятность перехода*

$$\begin{aligned} d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) &\equiv dP(\alpha \rightarrow \beta) / T \\ &= (2\pi)^{3N_\alpha - 2} V^{1 - N_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta, \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

где теперь

$$S_{\beta\alpha} \equiv -2\pi i \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\alpha}. \quad (3.4.12)$$

Это основная формула, применяемая для интерпретации вычислений элементов S -матрицы в терминах предсказаний для реальных экспериментов. Ниже в этом разделе мы еще вернемся к интерпретации множителя $\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta$.

Два случая особенно важны.

$N_\alpha = 1$. В этом случае объем V в формуле (3.4.11) сокращается, и получается вероятность распада одночастичного состояния α в произвольное многочастичное состояние β :

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi) |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta. \quad (3.4.13)$$

Конечно, эта формула имеет смысл только в случае, если время T , в течение которого происходит взаимодействие, много меньше среднего времени жизни τ_α частицы α , поэтому нельзя перейти

к пределу $T \rightarrow \infty$ в $\delta_T(E_\alpha - E_\beta)$. В этой дельта-функции остается неустранимая ширина $\Delta E \simeq 1/T \geq 1/\tau_\alpha$, так что формула (3.4.13) применима только в случае, когда полная ширина распада $1/\tau_\alpha$ много меньше, чем любая характерная энергия процесса.

$N_\alpha = 2$. В этом случае вероятность (3.4.11) пропорциональна $1/V$, иными словами, плотности какой-то из частиц в том месте, где находится другая. Экспериментаторы предпочитают измерять не вероятность, деленную на плотность, а вероятность, отнесенную к потоку частиц, или *сечение*. Поток каждой частицы в том месте, где находится другая, определяется как произведение плотности $1/V$ и относительной скорости u_α :

$$\Phi_\alpha = u_\alpha / V. \quad (3.4.14)$$

(Общее определение u_α дано ниже; пока что ограничимся частным случаем: если одна из частиц покоится, то u_α определяется как скорость другой частицы.) Таким образом, дифференциальное сечение равно:

$$d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) \equiv d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) / \Phi_\alpha = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta. \quad (3.4.15)$$

Хотя наиболее важны случаи $N_\alpha = 1$ и $N_\alpha = 2$, в принципе измеримы и вероятности переходов для $N_\alpha \geq 3$, причем некоторые из них играют важную роль в химии, астрофизике и т. п. (Например, в одной из основных реакций с высвобождением энергии на Солнце два протона и электрон превращаются в дейтрон и нейтрино.) В разделе 3.6 приведены примеры использования основной формулы для вероятностей переходов (3.4.11) в случае произвольного числа начальных частиц N_α .

Обсудим теперь вопрос о свойствах лоренцовских преобразований вероятностей и сечений. Это поможет дать более общее определение относительной скорости u_α в (3.4.15). Правило лоренцовского преобразования (3.3.1) для S -матрицы усложнено наличием зависящих от импульса матриц, связанных со спином каждой частицы. Чтобы обойти это усложнение, рассмотрим квадрат модуля (3.3.1) (выделив предварительно лоренц-инвариантную дельта-функцию согласно (3.4.12)) и просуммируем по всем спинам.

Тогда из унитарности матриц $D_{\sigma\alpha}^{(j)}(W)$ (или их аналогов для частиц нулевой массы) следует, что, если не считать энергетических множителей в (3.3.1), такая сумма лоренц-инвариантна. Иными словами, величина

$$\sum_{\text{спины}} |M_{\beta\alpha}|^2 \prod_{\beta} E \prod_{\alpha} E \equiv R_{\beta\alpha} \quad (3.4.16)$$

является скалярной функцией 4-импульсов частиц в состояниях α и β . (Символы произведений $\prod_{\alpha} E$ и $\prod_{\beta} E$ означают произведение энергий $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ всех частиц в состояниях α и β .)

Теперь можно записать просуммированную по спинам вероятность распада (3.4.13) в виде

$$\sum_{\text{спины}} d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi E_{\alpha}^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_{\beta} - p_{\alpha}) d\beta / \prod_{\beta} E.$$

Множитель $d\beta / \prod_{\beta} E$ представляет произведение лоренц-инвариантных элементов объема (2.5.15) в импульсном пространстве, поэтому он сам лоренц-инвариантен. Также инвариантными являются множители $R_{\beta\alpha}$ и $\delta^4(p_{\beta} - p_{\alpha})$, и остается единственный неинвариантный множитель $1/E_{\alpha}$, где E_{α} — энергия единственной начальной частицы. Отсюда можно сделать вывод, что под действием лоренцовских преобразований вероятность распада частицы преобразуется как $1/E_{\alpha}$. Конечно, это обычное релятивистское сокращение времени — чем быстрее частица, тем медленнее она распадается (с точки зрения неподвижного наблюдателя).

Аналогично, формула (3.4.15) для просуммированного по спинам сечения может быть записана в виде

$$\sum_{\text{спины}} d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = (2\pi)^4 u_{\alpha}^{-1} E_1^{-1} E_2^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_{\alpha} - p_{\beta}) d\beta / \prod_{\beta} E,$$

где E_1 и E_2 — энергии двух частиц в начальном состоянии α . Принято определять сечение (после суммирования по спинам) как лоренц-инвариантную функцию 4-импульсов. Множители $R_{\beta\alpha}$, $\delta^4(p_{\beta} - p_{\alpha})$ и $d\beta / \prod_{\beta} E$ уже лоренц-инвариантны, поэтому такое условие означает, что нужно так определить относительную скорость u_{α} , чтобы в произвольной инерциальной системе отсчета произведение $u_{\alpha} E_1 E_2$ было скаляром. Ранее отмечалось, что в инерциальной системе

отсчета, в которой одна из частиц (например, первая) покоится, u_α есть просто скорость другой частицы. Это однозначно определяет вид u_α в произвольных инерциальных системах отсчета*:

$$u_\alpha = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} / E_1 E_2, \quad (3.4.17)$$

где p_1 , p_2 и m_1 , m_2 — 4-импульсы и массы двух частиц в начальном состоянии α .

Попутно заметим, что в «системе центра масс», в которой полный 3-импульс равен нулю,

$$p_1 = (\mathbf{p}, E_1), \quad p_2 = (-\mathbf{p}, E_2)$$

из (3.4.17) получаем:

$$u_\alpha = \frac{|\mathbf{p}|(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right|, \quad (3.4.18)$$

как и следовало ожидать для относительной скорости. Однако в такой системе отсчета u_α не является физической скоростью; в частности, из (3.4.18) видно, что для ультрарелятивистских частиц эта величина может достигать значения 2.

Обратимся к интерпретации множителя $\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta$, называемого *фазовым объемом*. Он появляется в общей формуле (3.4.11) для вероятностей переходов, а также в формулах (3.4.13) и (3.4.15) для вероятностей распадов и сечений. Ограничимся случаем лоренцевской системы центра масс, в которой полный 3-импульс начального состояния равен нулю:

$$\mathbf{p}_\alpha = 0. \quad (3.4.19)$$

(Для $N_\alpha = 1$ это отвечает случаю распада покоящейся частицы.) Если импульсы частиц в конечном состоянии равны $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \dots$, то

*Из (3.4.17) очевидно, что $u_\alpha E_1 E_2$ — скаляр. Кроме того, когда частица 1 покоится, то $\mathbf{p}_1 = 0$, $E_1 = m_1$, и $p_1 \cdot p_2 = -m_1 E_2$, так что из (3.4.17) следует:

$$u_\alpha = \sqrt{E_2^2 - m_2^2} / E_2 = |\mathbf{p}_2| / E_2,$$

что есть просто скорость частицы 2.

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \dots)\delta(E'_1 + E'_2 + \dots - E)d^3p'_1 d^3p'_2 \dots, \quad (3.4.20)$$

где $E \equiv E_\alpha$ – полная энергия начального состояния. Каждый из интегралов по \mathbf{p}'_k , скажем, по \mathbf{p}'_1 , может быть тривиально взят, если просто опустить дельта-функцию от импульсов:

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \rightarrow \delta(E'_1 + E'_2 + \dots - E)d^3p'_2 \dots \quad (3.4.21)$$

понимая при этом, что, где бы не появился импульс \mathbf{p}'_1 (например, в E'_1), его следует заменить на

$$\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3 - \dots \quad (3.4.22)$$

Аналогично можно использовать оставшуюся дельта-функцию для вычисления еще одного любого из оставшихся интегралов.

В простейшем случае, когда в конечном состоянии находятся две частицы, формула (3.4.21) принимает вид

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \rightarrow \delta(E'_1 + E'_2 - E)d^3p'_2.$$

Подробнее, расписывая $d^3p'_2$ в сферических координатах в импульсном пространстве и выражая энергии частиц через модули их импульсов и массы, получим:

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \rightarrow \delta(\sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m_2'^2} - E)|\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| d\Omega, \quad (3.4.23)$$

где $\mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1$ и $d\Omega \equiv \sin\theta d\theta d\phi$ – дифференциал телесного угла для \mathbf{p}'_1 . Выражение (3.4.23) можно упростить, пользуясь стандартной формулой

$$\delta(f(x)) = \delta(x - x_0)/|f'(x_0)|,$$

где $f(x)$ – произвольная действительная функция с одним простым нулем в точке $x = x_0$. В нашем случае аргумент дельта-функции $E'_1 + E'_2 - E$ в (3.4.23) имеет единственный нуль при $|\mathbf{p}'_1| = k'$, где

$$k' = \sqrt{(E^2 - m_1'^2 - m_2'^2)^2 - 4m_1'^2 m_2'^2} / (2E), \quad (3.4.24)$$

$$E'_1 = \sqrt{k'^2 + m_1'^2} = \frac{E^2 - m_2'^2 + m_1'^2}{2E}, \quad (3.4.25)$$

$$E'_2 = \sqrt{k'^2 + m_2'^2} = \frac{E^2 - m_1'^2 + m_2'^2}{2E}, \quad (3.4.26)$$

а производная равна

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{d|\mathbf{p}'_1|} \left(\sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m_2'^2} - E \right) \right]_{|\mathbf{p}'_1|=k'} \\ &= \frac{k'}{E'_1} + \frac{k'}{E'_2} = \frac{k'E}{E'_1 E'_2}. \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

Таким образом, можно опустить дельта-функцию и дифференциал $d|\mathbf{p}'_1|$ в (3.4.23), разделив на (3.4.27):

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \rightarrow \frac{k'E'_1 E'_2}{E} d\Omega \quad (3.4.28)$$

и понимая при этом, что k' , E'_1 и E'_2 везде далее задаются формулами (3.4.24)–(3.4.26). В частности, дифференциальная вероятность (3.4.13) распада одночастичного состояния с нулевым импульсом и энергией E на две частицы равна

$$\frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = \frac{2\pi k'E'_1 E'_2}{E} |M_{\beta\alpha}|^2, \quad (3.4.29)$$

а дифференциальное сечение двухчастичного рассеяния $12 \rightarrow 1'2'$ дается формулой (3.4.15) в виде

$$\frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4 k'E'_1 E'_2}{Eu_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 = \frac{(2\pi)^4 k'E'_1 E'_2 E_1 E_2}{E^2 k} |M_{\beta\alpha}|^2, \quad (3.4.30)$$

где $k \equiv |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$.

Рассмотренный случай $N_\beta = 2$ особенно прост, но есть и один красивый результат для $N_\beta = 3$, который стоит упомянуть. Формула (3.4.21) при $N_\beta = 3$ принимает вид

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \rightarrow d^3p'_2 d^3p'_3 \times \delta(\sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_2|^2 + m_2'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_3|^2 + m_3'^2} - E).$$

Запишем элемент объема в импульсном пространстве как

$$d^3p'_2 d^3p'_3 = |\mathbf{p}'_2|^2 d|\mathbf{p}'_2| |\mathbf{p}'_3|^2 d|\mathbf{p}'_3| d\Omega_3 d\varphi_{23} d\cos\theta_{23},$$

где $d\Omega_3$ – дифференциал телесного угла для \mathbf{p}'_3 , а θ_{23} и φ_{23} – полярный и азимутальный углы \mathbf{p}'_2 относительно направления \mathbf{p}'_3 . Ориентация плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{p}'_2 и \mathbf{p}'_3 , определяется углом φ_{23} и направлением \mathbf{p}'_3 , а остающийся угол θ_{23} фиксируется законом сохранения энергии:

$$\sqrt{|\mathbf{p}'_2|^2 + 2|\mathbf{p}'_2||\mathbf{p}'_3|\cos\theta_{23} + |\mathbf{p}'_3|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_2|^2 + m_2'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_3|^2 + m_3'^2} = E.$$

Производная аргумента дельта-функции по $\cos\theta_{23}$ равна

$$\frac{\partial E_1'}{\partial \cos\theta_{23}} = \frac{|\mathbf{p}'_2||\mathbf{p}'_3|}{E_1'},$$

так что можно взять интеграл по $\cos\theta_{23}$, просто опустив дельта-функцию и разделив на эту производную:

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \rightarrow |\mathbf{p}'_2| d|\mathbf{p}'_2| |\mathbf{p}'_3| d|\mathbf{p}'_3| E_1' d\Omega_3 d\varphi_{23}.$$

Заменив импульсы на энергии, получим окончательно

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \rightarrow E_1' E_2' E_3' dE_2' dE_3' d\Omega_3 d\varphi_{23}. \quad (3.4.31)$$

Вспомним теперь, что величина (3.4.16), полученная суммированием $|M_{\beta\alpha}|^2$ по спинам и умножением на произведение энергий, является скалярной функцией 4-импульсов. Если приближенно заменить этот скаляр константой, то из (3.4.31) следует, что для фиксированного начального состояния распределение событий на плоскости E'_2, E'_3 однородно. Всякое отклонение реально наблюдаемого распределения событий от однородного — важное указание на динамику процесса распада, включая возможные центробежные барьеры или резонансные промежуточные состояния. Картинка этой

плоскости с нанесенными на ней точками экспериментальных событий носит название *диаграммы Далица* ¹⁹. Именно Далиц впервые использовал ее в 1953 году для анализа нелептонного распада $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$.

3.5. Теория возмущений

Исторически наиболее полезной техникой для вычисления элементов S -матрицы оказалась теория возмущений, т. е. разложение по степеням взаимодействия V в гамильтониане $H = H_0 + V$. Уравнениями (3.2.7) и (3.1.18) S -матрица задается в виде:

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi\delta(E_\beta - E_\alpha)T_{\beta\alpha}^+,$$

$$T_{\beta\alpha}^+ = (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^+),$$

где Ψ_α^+ удовлетворяет уравнению Липшиана–Швингера (3.1.17):

$$\Psi_\alpha^+ = \Phi_\alpha + \int d\gamma \frac{T_{\gamma\alpha}^+ \Phi_\gamma}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon}.$$

Поддействовав на это уравнение оператором V и взяв скалярное произведение с Φ_β , получим интегральное уравнение для T^+ :

$$T_{\beta\alpha}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} T_{\gamma\alpha}^+}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon}, \quad (3.5.1)$$

где

$$V_{\beta\alpha} \equiv (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha). \quad (3.5.2)$$

Ряд теории возмущений для $T_{\beta\alpha}^+$ получается из (3.5.1) с помощью итераций:

$$T_{\beta\alpha}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} + \int d\gamma d\gamma' \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon)(E_\alpha - E_{\gamma'} + i\varepsilon)} + \dots \quad (3.5.3)$$

Метод расчета, основанный на формуле (3.5.3) и преобладавший при вычислениях S -матрицы в 1930-х годах, называется сейчас *старой теорией возмущений*. Очевидным недостатком этого метода является то, что энергетические знаменатели в (3.5.3) маскируют лоренц-инвариантность S -матрицы. Все же метод иногда применяется в тех случаях, когда необходимо выяснить, каким образом различные промежуточные состояния порождают сингулярности S -матрицы. В большей части этой книги мы будем опираться на видоизмененную версию формулы (3.5.3), известную как *зависящая от времени теория возмущений* и обладающую тем преимуществом, что лоренц-инвариантность становится более очевидной, хотя несколько затемняется вклад отдельных промежуточных состояний.

Простейший способ вывода хронологически упорядоченного разложения по теории возмущений заключается в использовании формулы (3.2.5), согласно которой оператор S равен

$$S = U(\infty, -\infty),$$

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \exp(iH_0\tau) \exp(-iH(\tau - \tau_0)) \exp(-iH_0\tau_0).$$

Дифференцируя это выражение по τ , получаем дифференциальное уравнение

$$i \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_0) = V(\tau)U(\tau, \tau_0), \quad (3.5.4)$$

$$V(t) \equiv \exp(iH_0t)V \exp(-iH_0t). \quad (3.5.5)$$

(Говорят, что операторы с такой зависимостью от времени определены в *картине взаимодействия*, чтобы отличить их временную зависимость от зависимости $O_H(t) = \exp(iHt)O_H \exp(-iHt)$, предписываемой гейзенберговской картиной в квантовой механике.) Как уравнение (3.5.4), так и начальное условие $U(\tau_0, \tau_0) = 1$ очевидно удовлетворяются решением интегрального уравнения

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt V(t)U(t, \tau_0). \quad (3.5.6)$$

Итерируя это интегральное уравнение, получаем разложение $U(\tau, \tau_0)$ по степеням V :

$$\begin{aligned}
U(\tau, \tau_0) = & 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 V(t_1) + (-i)^2 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) \\
& + (-i)^3 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{t_1} dt_2 \int_{\tau_0}^{t_2} dt_3 V(t_1) V(t_2) V(t_3) + \dots
\end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Полагая $\tau = \infty$ и $\tau_0 = -\infty$, находим разложение в ряд теории возмущений для оператора S :

$$\begin{aligned}
S = & 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 V(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) \\
& + (-i)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 V(t_1) V(t_2) V(t_3) + \dots
\end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Это выражение можно также вывести с помощью разложения по старой теории возмущений (3.5.3), если воспользоваться фурье-представлением энергетических знаменателей:

$$(E_{\alpha} - E_{\gamma} + i\varepsilon)^{-1} = -i \int_0^{\infty} d\tau \exp(i(E_{\alpha} - E_{\gamma})\tau), \quad (3.5.9)$$

понимая при этом, что интегралы должны вычисляться путем включения обеспечивающего сходимость множителя $e^{-\varepsilon\tau}$ в подынтегральное выражение с последующим устремлением $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Существует способ представления (3.5.8) в виде, который очень полезен при проведении явно лоренц-инвариантных вычислений. Определим *хронологически упорядоченное произведение* любых зависящих от времени операторов как произведение, в котором множители расположены в таком порядке, что тот, который отвечает самому позднему моменту времени, располагается левее всех, следующим располагается множитель, отвечающий следующему моменту времени и т. д. Например,

$$\begin{aligned}
T\{V(t)\} &= V(t), \\
T\{V(t_1)V(t_2)\} &= \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1),
\end{aligned}$$

и т. д., где $\theta(\tau)$ — ступенчатая функция, равная +1 при $\tau > 0$ и 0 при $\tau < 0$. Хронологически упорядоченное произведение n множителей V есть сумма по всем $n!$ перестановкам V , каждая из которых дает

тот же интеграл по всем t_1, \dots, t_n . Поэтому можно переписать выражение (3.5.8) в виде

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n T\{V(t_1) \dots V(t_n)\}. \quad (3.5.10)$$

Иногда это выражение называют *рядом Дайсона* ²⁰. Если все $V(t)$ в разные моменты времени коммутируют, ряд можно просуммировать, и тогда

$$S = \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t)\right).$$

Ясно, что обычно так не бывает; в общем случае (3.5.10) даже не сходится и является в лучшем случае асимптотическим разложением по степеням входящей в V константы связи.

Однако иногда (3.5.10) записывают формально в виде

$$S = T \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t)\right),$$

где символ T указывает, что вычисление этого выражения следует производить, разложив его в ряд и хронологически упорядочив каждый член разложения.

Теперь можно сразу же указать один большой класс теорий, для которых S -матрица явно лоренц-инвариантна. Так как ее элементы являются матричными элементами оператора S между состояниями свободных частиц Φ_α, Φ_β и т. д., все, что требуется, это чтобы S -оператор коммутировал с генераторами $U_0(\Lambda, a)$: $H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0$ и \mathbf{K}_0 .

Чтобы удовлетворить этому требованию, предположим, что $V(t)$ можно записать как интеграл по трехмерному пространству:

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t), \quad (3.5.11)$$

где $\mathcal{H}(x)$ – скаляр в том смысле, что

$$U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a). \quad (3.5.12)$$

(Приравнивая коэффициенты при a^0 в бесконечно малых преобразованиях, можно убедиться, что зависимость $\mathcal{H}(t)$ от времени совместима с (3.5.5).)

Теперь можно записать S как сумму четырехмерных интегралов

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n T\{\mathcal{H}(x_1) \dots \mathcal{H}(x_n)\}. \quad (3.5.13)$$

Все выражение стало явно лоренц-инвариантным, если не считать процедуры хронологического упорядочивания произведения операторов.

Хронологическое упорядочивание двух мировых точек x_1, x_2 лоренц-инвариантно, если только разность $x_1 - x_2$ не является пространственноподобной, т. е. если $(x_1 - x_2)^2 > 0$. Таким образом, хронологическое упорядочивание в (3.5.13) не приводит к выделению специальной лоренцевской системы отсчета, если (хотя это и не единственное условие) все $\mathcal{H}(x)$ коммутируют на пространственноподобных или светоподобных расстояниях*:

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{при } (x - x')^2 \geq 0. \quad (3.5.14)$$

Результаты раздела 3.3 можно использовать для того, чтобы получить формальное, не основанное на теории возмущений доказательство, что взаимодействие (3.5.11), удовлетворяющее (3.5.12) и (3.5.14), действительно приводит к S -матрице с правильными свойствами относительно лоренцевских преобразований. Для бесконечно малого буста из (3.5.12) имеем

$$i[\mathbf{K}_0, \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)] = t \cdot \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}(\mathbf{x}, t), \quad (3.5.15)$$

так что, интегрируя по \mathbf{x} и полагая $t = 0$, получаем:

$$[\mathbf{K}_0, V] = \left[\mathbf{K}_0, \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0) \right] = [H_0, \mathbf{W}], \quad (3.5.16)$$

где

$$\mathbf{W} \equiv \int d^3x \mathbf{x} \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0). \quad (3.5.17)$$

* Мы записываем условие на x и x' в виде $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, а не $(x_1 - x_2)^2 > 0$, поскольку, как будет показано в гл. 6, лоренц-инвариантность может быть нарушена неприятными особенностями при $x = x'$.

Если (как это обычно имеет место) матричные элементы $\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0)$ между собственными состояниями H_0 являются гладкими функциями собственных значений энергии, то это же верно как для V , что необходимо для справедливости теории рассеяния, так и для \mathbf{W} , что необходимо для доказательства лоренц-инвариантности. Другие условия лоренц-инвариантности — перестановочные соотношения (3.3.21) — также выполнены, если и только если

$$0 = [\mathbf{W}, V] = \int d^3x \int d^3y \mathbf{x} [\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0), \mathcal{H}(\mathbf{y}, 0)]. \quad (3.5.18)$$

Это условие, конечно, следует и из условия «причинности» (3.5.14), но само по себе дает менее ограничительное достаточное условие лоренц-инвариантности S -матрицы.

Теории такого класса — не единственные лоренц-инвариантные теории. Однако и самые общие теории не слишком от них отличаются. В частности, всегда должно быть выполнено перестановочное соотношение, похожее на (3.5.14). Оно не имеет аналога в случае нерелятивистских систем, для которых хронологическое упорядочивание всегда инвариантно по отношению к преобразованиям Галилея. *Именно это условие столь жестко ограничивает возможность соединения лоренц-инвариантности с принципами квантовой механики.*

* * *

Методы, описанные в данном разделе, полезны лишь в том случае, когда оператор взаимодействия достаточно мал. Однако существует модифицированная версия такого приближения, известная под названием *борновского приближения искаженных волн* и применяемая в том случае, когда оператор взаимодействия содержит только два слагаемых

$$V = V_s + V_w, \quad (3.5.19)$$

причем V_w мало, а V_s велико. Можно определить Ψ_{sc}^\pm как те ин- и аут-состояния, которые были бы в случае, если бы взаимодействие описывалось только слагаемым V_s :

$$\Psi_{s\alpha}^{\pm} = \Phi_{\alpha} + (E_{\alpha} - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V_s \Psi_{s\alpha}^{\pm}. \quad (3.5.20)$$

Теперь можно переписать (3.1.16) в виде

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^+ &= (\Phi_{\beta}, V\Psi_{\alpha}^+) = \left(\left[\Psi_{s\beta}^- - (E_{\beta} - H_0 - i\varepsilon)^{-1} V_s \Psi_{s\beta}^- \right], (V_s + V_w)\Psi_{\alpha}^+ \right) \\ &= (\Psi_{s\beta}^-, V_w \Psi_{\alpha}^+) + (\Psi_{s\beta}^-, \left[V_s - V_s (E_{\beta} - H_0 + i\varepsilon)^{-1} (V_s + V_w) \right] \Psi_{\alpha}^+), \end{aligned}$$

так что

$$T_{\beta\alpha}^+ = (\Psi_{s\beta}^-, V_w \Psi_{\alpha}^+) + (\Psi_{s\beta}^-, V_s \Phi_{\alpha}). \quad (3.5.21)$$

Второе слагаемое в правой части как раз совпадает с оператором $T_{\beta\alpha}^+$, который должен был бы получиться при наличии только сильных взаимодействий:

$$T_{s\beta\alpha}^+ \equiv (\Phi_{\beta}, V_s \Psi_{s\alpha}^+) = (\Psi_{s\beta}^-, V_s \Phi_{\alpha}). \quad (3.5.22)$$

(Для доказательства следует при выводе (3.5.21) просто опустить везде V_w .) Формула (3.5.21) наиболее полезна в ситуации, когда это второе слагаемое обращается в нуль, т. е. когда процесс $\alpha \rightarrow \beta$ не может быть обусловлен только сильными взаимодействиями. (Например, в β -распаде ядер именно слабые ядерные силы превращают нейтроны в протоны, хотя и нельзя игнорировать наличие сильных ядерных сил, действующих как в начальном, так и в конечном состояниях.) Для подобных процессов матричный элемент (3.5.22) обращается в нуль, и уравнение (3.5.21) принимает вид

$$T_{\beta\alpha}^+ = (\Psi_{s\beta}^-, V_w \Psi_{\alpha}^+). \quad (3.5.23)$$

До сих пор все делалось точно. Однако подобный способ переписывания T -матрицы становится весьма полезным, когда оператор V_w настолько мал, что можно пренебречь влиянием этого взаимодействия на состояние Ψ_{α}^+ в (3.5.23) и заменить Ψ_{α}^+ на состояние $\Psi_{s\alpha}^+$, учитывающее только сильное взаимодействие V_s . В этом приближении уравнение (3.5.23) принимает вид

$$T_{\beta\alpha}^+ \simeq (\Psi_{s\beta}^-, V_w \Psi_{s\alpha}^+). \quad (3.5.24)$$

Эта формула верна в первом порядке по V_w , но во всех порядках по V_s . Такое приближение очень часто используется в физике; например, элемент S -матрицы для β - или γ -распада ядер вычисляется с помощью формулы (3.5.24), где V_s — сильное ядерное взаимодействие, V_w — слабое ядерное или электромагнитное взаимодействие, соответственно, а $\Psi_{s\beta}^-$ и $\Psi_{s\alpha}^+$ — конечное и начальное состояния ядер.

3.6. Следствия унитарности

Условие унитарности S -матрицы позволяет получить интересное и полезное соотношение, связывающее амплитуду $M_{\alpha\alpha}$ рассеяния вперед для произвольного многочастичного состояния α с полной вероятностью всех реакций в этом состоянии. Напомним, что в общем случае, когда состояния β и α могут как совпадать, так и не совпадать, S -матрица может быть записана в виде (3.3.2):

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\alpha}.$$

Тогда условие унитарности принимает вид

$$\begin{aligned} \delta(\gamma - \alpha) &= \int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma - \alpha) - 2\pi i \delta^4(p_\gamma - p_\alpha) M_{\gamma\alpha} \\ &\quad + 2\pi i \delta^4(p_\gamma - p_\alpha) M_{\alpha\gamma}^* + 4\pi^2 \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\gamma) \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\gamma}^* M_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Сокращая $\delta(\gamma - \alpha)$ и множитель $2\pi \delta^4(p_\gamma - p_\alpha)$, находим, что при $p_\gamma = p_\alpha$

$$0 = -i M_{\gamma\alpha} + i M_{\alpha\gamma}^* + 2\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\gamma}^* M_{\beta\alpha}. \quad (3.6.1)$$

Это соотношение особенно полезно в частном случае $\alpha = \gamma$, когда оно принимает вид

$$\text{Im } M_{\alpha\alpha} = -\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2. \quad (3.6.2)$$

Используя (3.4.11), это выражение можно представить в виде формулы для вероятности всех реакций, вызываемых данным начальным состоянием α в объеме V :

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha &\equiv \int d\beta \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} = (2\pi)^{3N_\alpha - 2} V^{1-N_\alpha} \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 \\ &= -\frac{1}{\pi} (2\pi)^{3N_\alpha - 2} V^{1-N_\alpha} \text{Im} M_{\alpha\alpha}.\end{aligned}\quad (3.6.3)$$

В частности, если α — двухчастичное состояние, можно переписать последнюю формулу как

$$\text{Im} M_{\alpha\alpha} = -\frac{u_\alpha \sigma_\alpha}{16\pi^3}, \quad (3.6.4)$$

где u_α — относительная скорость (3.4.17) в состоянии α и σ_α — полное сечение в этом состоянии, определяемое формулой (3.4.15) как

$$\sigma_\alpha \equiv \int d\beta d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) / d\beta = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} \int d\beta |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha). \quad (3.6.5)$$

Обычно эта формула записывается несколько иначе с помощью амплитуды рассеяния $f(\alpha \rightarrow \beta)$. Из формулы (3.4.30) следует, что дифференциальное сечение *двухчастичного* рассеяния в системе центра масс равно

$$\frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4 k' E_1' E_2' E_1 E_2}{k E^2} |M_{\beta\alpha}|^2, \quad (3.6.6)$$

где k' и k — величина импульсов начального и конечного состояний. Поэтому определим амплитуду рассеяния следующим образом*:

$$f(\alpha \rightarrow \beta) \equiv -\frac{4\pi^2}{E} \sqrt{\frac{k' E_1' E_2' E_1 E_2}{k}} M_{\beta\alpha}, \quad (3.6.7)$$

так что дифференциальное сечение записывается просто как

$$\frac{d\sigma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\Omega} = |f(\alpha \rightarrow \beta)|^2. \quad (3.6.8)$$

* Заметим, что фаза f условна и выбирается в соответствии с интерпретацией f в рамках волновой механики²¹ как коэффициента при расходящейся волне в решении стационарного уравнения Шредингера. Используемая нами нормировка f несколько отличается от общепринятой для неупругого рассеяния. Обычно f определяют так, что в выражении для дифференциального сечения появляется отношение конечной и начальной скоростей.

В частности, для упругого двухчастичного рассеяния

$$f(\alpha \rightarrow \beta) \equiv -\frac{4\pi^2 E_1 E_2}{E} M_{\beta\alpha}. \quad (3.6.9)$$

С помощью выражения (3.4.18) для относительной скорости u_α можно переписать условие унитарности (3.6.4) в виде

$$\text{Im } f(\alpha \rightarrow \alpha) = \frac{k}{4\pi} \sigma_\alpha. \quad (3.6.10)$$

Такая форма записи условия унитарности (3.6.4) носит название *оптической теоремы*²².

Можно получить любопытное следствие оптической теоремы, говорящее многое о картине рассеяния при высоких энергиях. Следует ожидать, что амплитуда рассеяния f есть гладкая функция угла, так что должен существовать некоторый телесный угол $\Delta\Omega$, в пределах которого величина $|f|^2$ почти равна (например, с точностью до множителя 2) своему значению при рассеянии вперед. Отсюда полное сечение ограничено величиной

$$\sigma_\alpha \geq \int |f|^2 d\Omega \geq \frac{1}{2} |f(\alpha \rightarrow \alpha)|^2 \Delta\Omega \geq \frac{1}{2} |\text{Im } f(\alpha \rightarrow \alpha)|^2 \Delta\Omega.$$

С помощью (3.6.10) находим верхний предел на $\Delta\Omega$:

$$\Delta\Omega \leq 32\pi^2/k^2 \sigma_\alpha. \quad (3.6.11)$$

Как мы увидим в следующем разделе, обычно полные сечения являются при больших энергиях постоянными или медленно растут с энергией. Поэтому из (3.6.11) вытекает, что телесный угол вокруг направления вперед, в пределах которого дифференциальное сечение примерно постоянно, сужается по меньшей мере как $1/k^2$ при $k \rightarrow \infty$. Этот все более узкий пик в направлении вперед при больших энергиях называется *дифракционным пиком*.

Возвращаясь к общему случаю реакций с участием произвольного числа частиц, можно использовать (3.6.2) совместно с СРТ инвариантностью, чтобы установить связь полных вероятностей взаимодействия частиц и античастиц. Так как оператор СРТ

антиунитарен, его сохранение не приводит в общем случае к каким-то простым соотношениям между процессом $\alpha \rightarrow \beta$ и процессом, в котором все частицы заменены на свои античастицы. Однако из этой инвариантности следует связь между процессом и *обратным* процессом с участием античастиц. Используя те же аргументы, что и при выводе формулы (3.3.46) из условия инвариантности по отношению к обращению времени, можно показать, что СРТ инвариантность требует, чтобы S -матрица удовлетворяла условию:

$$S_{\beta,\alpha} = S_{\overline{\mathcal{CPT}}\alpha, \overline{\mathcal{CPT}}\beta}, \quad (3.6.12)$$

где $\overline{\mathcal{CPT}}$ означает, что мы должны перевернуть все z -компоненты спинов, заменить все частицы на соответствующие античастицы и умножить матричный элемент на разные фазовые множители для частиц в начальном состоянии и на комплексно сопряженные множители для частиц в конечном состоянии. Так как из СРТ инвариантности следует, что массы частиц и соответствующих античастиц равны, это же соотношение выполняется и для коэффициента, стоящего при $\delta^4(p_\alpha - p_\beta)$ в $S_{\beta\alpha}$:

$$M_{\beta,\alpha} = M_{\overline{\mathcal{CPT}}\alpha, \overline{\mathcal{CPT}}\beta}. \quad (3.6.13)$$

В частности, когда начальное и конечное состояния одинаковы, все фазовые множители сокращаются и (3.6.13) принимает вид

$$\begin{aligned} & M_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots; p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots} \\ &= M_{p_1-\sigma_1 n_1^*; p_2-\sigma_2 n_2^*; \dots; p_1-\sigma_1 n_1^*; p_2-\sigma_2 n_2^*; \dots} \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

где верхний индекс s у n означает античастицу для n . Теперь из обобщенной оптической теоремы (3.6.2) следует, что *полная вероятность процесса из данного начального состояния, содержащего определенный набор частиц, равна полной вероятности процесса, в начальном состоянии которого содержатся соответствующие античастицы с противоположными значениями проекций спинов:*

$$\Gamma_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots} = \Gamma_{p_1-\sigma_1 n_1^*; p_2-\sigma_2 n_2^*; \dots} \quad (3.6.15)$$

Применяя это утверждение к одночастичным состояниям, видим, что вероятность распада любой частицы равна вероятности

распада античастицы с противоположной проекцией спина. Инвариантность по отношению к вращениям не позволяет вероятностям распада зависеть от z -компоненты спина распадающейся частицы, поэтому частным случаем общей формулы (3.6.15) является утверждение, что нестабильные частицы и их античастицы имеют строго равные времена жизни.

* * *

Те же рассуждения, которые от условия унитарности $S^\dagger S = 1$ привели к формуле (3.6.2), позволяют использовать другое условие унитарности $SS^\dagger = 1$, чтобы получить соотношение

$$\text{Im } M_{\alpha\alpha} = -\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\alpha\beta}|^2. \quad (3.6.16)$$

Объединяя его с (3.6.2), приходим к соотношению обратимости

$$\int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 = \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\alpha\beta}|^2. \quad (3.6.17)$$

или иначе

$$\int d\beta c_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} = \int d\beta c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha}, \quad (3.6.18)$$

где $c_\alpha \equiv [V / (2\pi)^3]^{N_\alpha}$. Этот результат можно использовать при выводе наиболее важных соотношений кинетической теории²³. Если $P_\alpha d\alpha$ — вероятность обнаружить систему в объеме $d\alpha$ пространства многочастичных состояний Φ_α , то скорость уменьшения P_α за счет переходов во все другие состояния равна $P_\alpha \int d\beta P_\beta d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha) / d\alpha$, а скорость увеличения P_α в результате переходов из всех других состояний равна интегралу $\int d\beta P_\beta d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha) / d\alpha$; поэтому полная скорость изменения P_α

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = \int d\beta P_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} - P_\alpha \int d\beta \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta}. \quad (3.6.19)$$

Отсюда немедленно вытекает, что $\int P_\alpha d\alpha$ не зависит от времени. (Для доказательства достаточно переобозначить переменные интегрирования во втором слагаемом (3.6.19).) С другой стороны, скорость изменения энтропии $-\int d\alpha P_\alpha \ln(P_\alpha / c_\alpha)$ равна

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln\left(\frac{P_\alpha}{c_\alpha}\right) = - \int d\alpha \int d\beta \ln\left(\frac{P_\alpha}{c_\alpha} + 1\right) \times \left[P_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} - P_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} \right].$$

Меняя обозначения переменных интегрирования во втором слагаемом, можно записать это выражение как

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln\left(\frac{P_\alpha}{c_\alpha}\right) = \int d\alpha \int d\beta P_\beta \ln\left(\frac{P_\beta c_\alpha}{P_\alpha c_\beta}\right) \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha}.$$

Далее, для любых положительных вероятностей x и y функция $y \ln(y/x)$ удовлетворяет неравенству *

$$y \ln\left(\frac{y}{x}\right) \geq y - x.$$

Поэтому скорость изменения энтропии ограничена:

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln\left(\frac{P_\alpha}{c_\alpha}\right) \geq \int d\alpha \int d\beta \left[\frac{P_\beta}{c_\beta} - \frac{P_\alpha}{c_\alpha} \right] c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha}.$$

Меняя обозначения переменных интегрирования во втором слагаемом, находим

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln\left(\frac{P_\alpha}{c_\alpha}\right) \geq \int d\alpha \int d\beta \frac{P_\beta}{c_\beta} \left[c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)}{d\alpha} - c_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{d\beta} \right].$$

* Разность левой и правой частей при $x \rightarrow y$ стремится к положительной величине $(x - y)^2/2y$ и имеет производную по x , которая положительна или отрицательна при всех $x > y$ или $x < y$, соответственно.

Но из условия унитарности (3.6.18) (в котором переставлены α и β) следует, что интеграл по α в правой части обращается в нуль, поэтому можно заключить, что энтропия всегда возрастает:

$$-\frac{d}{dt} \int d\alpha P_\alpha \ln \left(\frac{P_\alpha}{c_\alpha} \right) \geq 0. \quad (3.6.20)$$

Это соотношение носит название «*H-теоремы*» Больцмана. В учебниках по статистической механике ее часто выводят, либо используя борновское приближение, в котором $|M_{\beta\alpha}|^2$ симметрично по α и β , так что $c_\beta d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)/d\alpha = c_\alpha d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)/d\beta$, либо предполагая инвариантность относительно обращения времени, из которой следует, что $|M_{\beta\alpha}|^2$ не изменяется, если поменять местами α и β , одновременно обратив направления всех импульсов и спинов. Конечно, ни борновское приближение, ни инвариантность относительно обращения времени не являются точными, поэтому тот факт, что для вывода *H-теоремы* нужно только условие унитарности (3.6.18), является хорошей новостью.

Рост энтропии прекращается, если вероятность P_α становится функцией только сохраняющихся величин, таких, как полная энергия и заряд, умноженные на c_α . В этом случае из законов сохранения вытекает, что производная $d\Gamma(\beta \rightarrow \alpha)/d\alpha$ обращается в нуль всегда, кроме случая, когда выполнено равенство $P_\alpha/c_\alpha = P_\beta/c_\beta$, так что в первом слагаемом (3.6.19) можно заменить P_β на $P_\alpha c_\beta/c_\alpha$. Вновь используя (3.6.18), видим, что в этом случае P_α не зависит от времени. Опять же, для этого вывода нам понадобилось не борновское приближение или инвариантность по отношению к обращению времени, а только условие унитарности (3.6.18).

3.7. Разложения по парциальным волнам *

Часто удобно работать с *S*-матрицей в базисе состояний свободных частиц, где все переменные, кроме полного импульса и полной энергии, дискретны. Такое описание возможно, поскольку компоненты импульсов $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ *n*-частичного состояния с определенными

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

полным импульсом \mathbf{p} и энергией E заполняют $(3n - 4)$ -мерное компактное пространство. Так, в случае $n = 2$ в системе центра масс $\mathbf{p} = 0$ этим компактным пространством является двумерная поверхность сферы.

Любая функция на таком компактном пространстве может быть разложена в ряд по обобщенным «парциальным волнам» типа сферических гармоник, обычно используемых для представления функций на 2-сфере. Поэтому можно определить базис таких n -частичных состояний, который дискретен, за исключением непрерывных переменных \mathbf{p} и E .

Запишем состояния свободных частиц в этом базисе как $\Phi_{E\mathbf{p}N}$, причем индекс N включает все спиновые переменные и метки сортов частиц, а также те индексы, которые отмечают обобщенные парциальные волны. Удобно выбрать состояния нормированными так, что их скалярные произведения равны

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'N'}, \Phi_{E\mathbf{p}N}) = \delta(E' - E)\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{N'N}. \quad (3.7.1)$$

Матричные элементы оператора S в этом базисе имеют вид

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'N'}, S\Phi_{E\mathbf{p}N}) = \delta(E' - E)\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})S_{N',N}(E, \mathbf{p}), \quad (3.7.2)$$

где $S_{N',N}$ – унитарная матрица. Аналогично оператор T , матричные элементы которого $(\Phi_\beta, T\Phi_\alpha)$ совпадают с величинами $T_{\beta\alpha}^+$, определенными формулой (3.1.18), может быть согласно (3.4.12) записан в новом базисе в виде

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'N'}, T\Phi_{E\mathbf{p}N}) = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})M_{N',N}(E, \mathbf{p}), \quad (3.7.3)$$

так что соотношение (3.2.7) становится обычным матричным выражением:

$$S_{N',N}(E, \mathbf{p}) = \delta_{N',N} - 2\pi i M_{N',N}(E, \mathbf{p}). \quad (3.7.4)$$

В следующем разделе мы используем этот общий формализм, но пока что рассмотрим реакции с двумя частицами в начальном состоянии.

Например, рассмотрим состояние из двух нетождественных частиц сортов n_1 и n_2 с отличными от нуля массами M_1 и M_2 и произвольными спинами s_1, s_2 . В этом случае состояния можно пометить

их полным импульсом $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, энергией E , метками сортов частиц n_1, n_2 , z -компонентами спинов σ_1, σ_2 , и парой целых чисел l и m (где $|m| \leq l$), которые задают зависимость состояния от направления, скажем, вектора \mathbf{p}_1 . В качестве альтернативы можно построить удобный дискретный базис, объединив два спина в полный спин s с z -компонентой μ с помощью коэффициентов Клебша–Гордана⁹, а затем, вновь используя эти коэффициенты, сложить спин s с орбитальным угловым моментом l с третьей проекцией m , получив полный угловой момент j с третьей проекцией σ .

Так мы приходим к базису состояний $\Phi_{E\mathbf{p}j\sigma l s n}$ («индекс канала» n отмечает сорта двух частиц n_1 и n_2), которые определяются их скалярными произведениями с состояниями, имеющими определенные значения импульсов и третьих проекций спина отдельных частиц:

$$\begin{aligned} (\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1\mathbf{p}_2\sigma_2n'}, \Phi_{E\mathbf{p}j\sigma l s n}) &\equiv (|\mathbf{p}_1| E_1 E_2 / E)^{-1/2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\ &\times \delta(E - \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + M_1^2} - \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + M_2^2}) \delta_{n',n} \\ &\times \sum_{m,\mu} C_{s_1s_2}(s,\mu;\sigma_1,\sigma_2) C_{ls}(j,\sigma;m,\mu) Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}_1). \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

где Y_l^m — обычные сферические гармоники²⁴. Дополнительный множитель $(|\mathbf{p}_1| E_1 E_2 / E)^{-1/2}$ включен для того, чтобы эти состояния были правильно нормированы в системе центра масс:

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'j'\sigma'l's'n'}, \Phi_{E0j\sigma l s n}) = \delta^3(\mathbf{p}') \delta^3(E' - E) \delta_{j',j} \delta_{\sigma',\sigma} \delta_{s',s} \delta_{n',n}. \quad (3.7.6)$$

Чтобы избежать двойного счета для тождественных частиц, следует брать интеграл только по половине двухчастичного фазового объема в импульсном пространстве, так что в скалярном произведении (3.7.6) следует поделить на множитель $\sqrt{2}$.

В системе центра масс матричные элементы любого сохраняющего импульс инвариантного относительно вращений оператора O должны иметь вид

$$(\Phi_{E'\mathbf{p}'j'\sigma'l's'n'}, O\Phi_{E0j\sigma l s n}) = \delta^3(\mathbf{p}') O_{l's'n',l s n}^j(E) \delta_{j',j} \delta_{\sigma',\sigma}. \quad (3.7.7)$$

(Диагональность по j и σ следует из перестановочных соотношений O с \mathbf{J}^2 и J_3 , а тот факт, что коэффициент при $\delta_{\sigma\sigma'}$ не зависит от σ ,

следует из равенства нулю коммутатора оператора O с $J_1 \pm iJ_2$. Это частный случай общего утверждения, известного в литературе как теорема Вигнера–Экарта ²⁵.) Применяя полученные формулы к оператору M , матричные элементы которого равны $M_{\beta\alpha}$, получаем:

$$\begin{aligned}
& f(\mathbf{k}\sigma_1, -\mathbf{k}\sigma_2, n \rightarrow \mathbf{k}'\sigma'_1, -\mathbf{k}'\sigma'_2, n') \\
& \equiv -4\pi^2 \sqrt{\frac{k'E_1'E_2'E_1E_2}{E^2k}} M_{\mathbf{k}'\sigma'_1 - \mathbf{k}'\sigma'_2 n', \mathbf{k}\sigma_1 - \mathbf{k}\sigma_2 n} \\
& = -\frac{4\pi^2}{k} \sum_{j\sigma l' m' s' \mu' l m s \mu} C_{s_1 s_2}(s, \mu; \sigma_1, \sigma_2) C_{ls}(j, \sigma; m, \mu) \\
& \times C_{s'_1 s'_2}(s', \mu'; \sigma'_1, \sigma'_2) C_{l's'}(j, \sigma; m', \mu') Y_l^{m'}(\hat{\mathbf{k}}') Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) M_{l's'n', lsn}^j(E).
\end{aligned} \tag{3.7.8}$$

Дифференциальное сечение рассеяния равно $|f|^2$. Выберем направление начального импульса \mathbf{k} вдоль третьей оси, тогда

$$Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \tag{3.7.9}$$

Интегрируя $|f|^2$ по направлению конечного импульса \mathbf{k}' , а также суммируя и усредняя по конечным и начальным проекциям спина, получаем полное сечение* перехода из канала n в канал n' :

*При выводе этой формулы мы используем стандартные правила суммирования коэффициентов Клебша–Гордана ⁹: во-первых,

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} C_{s_1 s_2}(s, \mu; \sigma_1, \sigma_2) C_{s_1 s_2}(\bar{s}, \bar{\mu}; \sigma_1, \sigma_2) = \delta_{s\bar{s}} \delta_{\mu\bar{\mu}}$$

и то же самое со штрихованными величинами;

$$\sum_{m, \bar{m}} C_{ls}(j, \sigma; m, \bar{m}) C_{ls}(\bar{j}, \bar{\sigma}; m, \bar{m}) = \delta_{j\bar{j}} \delta_{\sigma\bar{\sigma}},$$

и наконец

$$\sum_{\sigma, \mu} C_{ls}(j, \sigma; 0, \mu) C_{\bar{l}\bar{s}}(j, \sigma; 0, \mu) = \frac{2j+1}{2l+1} \delta_{l\bar{l}}.$$

$$\begin{aligned} \sigma(n \rightarrow n'; E) &= \frac{\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jlsl's'} (2j + 1) \\ &\times \left| \delta_{l'l'} \delta_{s's'} \delta_{n'n} - S_{l's'n', lsn}^j(E) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Суммирование (3.7.10) по всем двухчастичным каналам дает полное сечение всех упругих или неупругих двухчастичных реакций:

$$\begin{aligned} \sum_{n'} \sigma(n \rightarrow n'; E) &= \frac{\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1) \\ &\times \left[(1 - S^j(E))^\dagger (1 - S^j(E)) \right]_{lsn, lsn}. \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

Для сравнения, с помощью формул (3.7.8), (3.7.9), (3.7.4) и правил сумм для коэффициентов Клебша–Гордана получаем усредненную по спинам амплитуду рассеяния вперед:

$$f(n; E) = \frac{i}{2k(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1) [1 - S_{lsn, lsn}^j].$$

Тогда с помощью оптической теоремы (3.7.10) находим полное сечение:

$$\sigma_{\text{total}}(n; E) = \frac{2\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1) \text{Re}[1 - S^j(E)]_{lsn, lsn}. \quad (3.7.12)$$

Если во входном канале n при энергии E открыты только двухчастичные каналы, то матрица $S^j(E)$ (или по крайней мере ее подматрица, включающая канал n) унитарна, и поэтому

$$\left[(1 - S^j(E))^\dagger (1 - S^j(E)) \right]_{lsn, lsn} = 2 \text{Re}[1 - S^j(E)]_{lsn, lsn}, \quad (3.7.13)$$

так что выражения (3.7.12) и (3.7.11) совпадают. С другой стороны, если открыты каналы, включающие три и более частиц, то разность выражений (3.7.12) и (3.7.11) определяет полное сечение рождения дополнительных частиц:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{образования}}(n; E) &= \frac{\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1) \\ &\times [1 - S^j(E)^\dagger S^j(E)]_{l'sn, l'sn}, \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

которое должно быть положительно.

Разложение по парциальным волнам особенно полезно для процессов, у которых соответствующая часть S -матрицы диагональна. Это имеет место, если, например, входной канал n содержит ровно две бесспиновые частицы, а все прочие каналы при данной энергии закрыты, как в процессах $\pi^+\pi^+$ или $\pi^+\pi^0$ рассеяния при энергиях ниже порога рождения дополнительных пионов (электромагнитными и слабыми взаимодействиями пренебрегаем). Для пары бесспиновых частиц $j = l$, и благодаря сохранению углового момента S -матрица диагональна. Может быть и так, что S -матрица диагональна в определенных процессах с участием частиц со спином. Так, в пион-нуклонном рассеянии полный момент системы может принимать значения $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$, но при заданном j эти два состояния имеют противоположную четность и не могут быть связаны ненулевыми матричными элементами S -матрицы. В любом случае, если для некоторых n и E все элементы S -матрицы $S_{N', jlsn}(E, 0)$ обращаются в нуль, кроме случая, когда N' – это двухчастичное состояние j, l, s, n , то из условия унитарности следует, что

$$S_{l's'n', l'sn}^j(E) = \exp[2i\delta_{jlsn}(E)] \delta_{l'l'} \delta_{s's} \delta_{n'n}, \quad (3.7.15)$$

где $\delta_{jlsn}(E)$ – действительная фаза, обычно именуемая *фазовым сдвигом*. Эта формула часто используется и в случае, когда двухчастичная часть S -матрицы диагональна, но открыты каналы, содержащие три и более частиц. В таких случаях фазовый сдвиг должен иметь положительную мнимую часть, чтобы обеспечить положительность (3.7.14). В случае действительных фазовых сдвигов упругое и полное сечения определяются из (3.7.10) и (3.7.12) в виде

$$\begin{aligned} \sigma(n \rightarrow n; E) &= \sigma_{\text{total}}(n; E) \\ &= \frac{4\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{jls} (2j + 1) \sin^2 \delta_{jlsn}(E). \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

Этот известный результат обычно выводится в рамках нерелятивистской квантовой механики путем исследования в координатном пространстве поведения волновой функции частицы в заданном потенциальном поле. Представленное здесь доказательство имеет целью, во-первых, показать, что разложение по парциальным волнам применимо для упругого рассеяния и при релятивистских скоростях, и, во-вторых, подчеркнуть, что оно не зависит от конкретных динамических предположений, а вытекает из условия унитарности и принципов инвариантности.

Часто полезно ввести фазовые сдвиги и в задачах, когда несколько открытых каналов образуют неприводимые представления какой-то внутренней группы симметрии. Классическим примером является изотопическая симметрия, при наличии которой индекс канала n включает значения изоспинов T_1, T_2 двух частиц и третьих проекций изоспина t_1, t_2 . Состояния в канале n можно выразить в виде линейных комбинаций неприводимых представлений со значением полного изоспина T и третьих проекций t , причем коэффициенты разложения определяются знакомыми коэффициентами Клебша–Гордана $C_{T_1 T_2}(T, t; t_1, t_2)$. Предположим, что для интересующих нас каналов при заданной энергии S -матрица диагональна по l, s, j, T, t . Условие унитарности и требование изотопической симметрии позволяют записать S -матрицу в виде:

$$S_{l's'T't',lsTt} = \exp[2i\delta_{jlsT}(E)]\delta_{l'l}\delta_{s's}\delta_{T'T}\delta_{t't}, \quad (3.7.17)$$

где $\delta_{jlsT}(E)$ – действительный фазовый сдвиг, который в соответствии с теоремой Вигнера–Эккарта не зависит от t . С помощью (3.7.10) можно вычислить парциальные сечения, а из (3.7.12) следует, что полное сечение

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{total}}(t_1, t_2; E) &= \frac{4\pi}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \\ &\times \sum_{jlsTt} (2j + 1) C_{T_1 T_2}^2(T, t; t_1, t_2) \sin^2 \delta_{jlsT}(E). \end{aligned} \quad (3.7.18)$$

Например, в пион–пионном рассеянии отличны от нуля фазовые сдвиги $\delta_{l\ 0T}(E)$ при $T = 0$ и $T = 2$ для каждого четного l и при $T = 1$ для нечетного l , а в пион–нуклонном рассеянии — фазовые сдвиги $\delta_{jj \pm \frac{1}{2} T}$ с $T = 1/2$ или $T = 3/2$.

Ряд полезных сведений о пороговом поведении амплитуд рассеяния и фазовых сдвигов можно получить из рассмотрения их аналитических свойств, которые почти не зависят от любых динамических предположений. Если отсутствуют особые обстоятельства, порождающие сингулярности в импульсном пространстве, можно ожидать, что матричный элемент $M_{\mathbf{k}'\sigma'_1 - \mathbf{k}'\sigma'_2 n', \mathbf{k}\sigma_1 - \mathbf{k}\sigma_2 n}$ процесса должен быть аналитической функцией * 3-импульсов \mathbf{k} и \mathbf{k}' в окрестности $\mathbf{k} = 0$ или $\mathbf{k}' = 0$ (при упругом рассеянии $\mathbf{k} = \mathbf{k}' = 0$).

Обращаясь к разложению (3.7.8) амплитуды M по парциальным волнам, заметим, что комбинация $k^l Y_l^m(\hat{\mathbf{k}})$ есть простая полиномиальная функция 3-вектора \mathbf{k} . Поэтому, для того, чтобы амплитуда $M_{\mathbf{k}'\sigma'_1 - \mathbf{k}'\sigma'_2 n', \mathbf{k}\sigma_1 - \mathbf{k}\sigma_2 n}$ была аналитической функцией 3-импульсов \mathbf{k} и \mathbf{k}' в окрестности $\mathbf{k} = 0$ или $\mathbf{k}' = 0$, коэффициенты $M_{l's'n', lsn}^j$ или эквивалентно $\delta_{l'l} \delta_{s's} \delta_{n'n} - S_{l's'n', lsn}^j$ должны вести себя как $k^{l+1/2} k'^{l+1/2}$ при k или k' , стремящихся к нулю. Отсюда, для малых k и/или k' существенный вклад в амплитуду рассеяния дает только низшая парциальная амплитуда в начальном и/или конечном состоянии.

Возможны три случая.

Экзотермические реакции

В этом случае k' стремится к конечному значению при $k \rightarrow 0$, и в таком пределе $\delta_{l'l} \delta_{s's} \delta_{n'n} - S_{l's'n', lsn}^j$ ведет себя как $k^{l+1/2}$. Сечение (3.7.11) ведет себя как k^{2l-1} , где l — *наименьший* орбитальный угловой момент, при котором идет реакция. Чаще всего $l = 0$, так что сечение реакции ведет себя как $1/k$. (Именно так ведет себя, например, сечение поглощения медленных нейтронов сложными ядрами или сечение аннигиляции электронно-позитронных пар в фотоны при низких энергиях, если отбросить эффекты более высокого порядка, связанные с кулоновскими силами.) Вероятность реакции равна сечению, умноженному на поток, пропорциональный k , так

* Например, в борновском приближении (3.2.8) амплитуда M пропорциональна фурье-образу матричных элементов взаимодействия в координатном пространстве и поэтому аналитична при нулевом импульсе, если только эти матричные элементы достаточно быстро убывают на больших расстояниях. Главным исключением является рассеяние, обусловленное дальнедействующими силами типа кулоновских.

что при $k \rightarrow 0$ вероятность экзотермической реакции ведет себя как константа. Однако вероятность поглощения при прохождении пучка через мишень заданной толщины определяется именно сечением, а не вероятностью реакции, так что для ряда веществ типа бора наличие множителя $1/k$ в сечении приводит к очень большой вероятности поглощения медленных нейтронов.

Эндотермические реакции

В этом случае реакция запрещена, пока k не достигнет определенного порогового значения, при котором $k' = 0$. В области чуть выше порога $\delta_{l'l'}\delta_{s's'}\delta_{n'n} - S_{l's'n',l'sn}^j$ ведет себя как $(k')^{l+\frac{1}{2}}$. Сечение (3.7.11) в этом случае ведет себя как $(k')^{2l'+1}$, где l' — наименьший угловой момент состояния, которое может возникнуть на пороге. Чаще всего $l' = 0$, так что сечение реакции растет над порогом как k' , т. е. как $\sqrt{E - E_{\text{порог}}}$. (Именно так обстоит дело в реакциях ассоциативного рождения странных частиц или образования электронно-позитронных пар при рассеянии фотонов.)

Упругие реакции

В этом случае $k = k'$, так что обе эти величины стремятся к нулю. (Так бывает в случае $n' = n$, или в случае, когда состояние n' содержит частицы из того же изоспинового мультиплетта, что и n .) В упругом рассеянии всегда участвуют парциальные волны с $l = l' = 0$, так что в пределе $k \rightarrow 0$ амплитуда рассеяния (3.7.8) стремится к константе:

$$f(\mathbf{k}, \sigma_1, -\mathbf{k}, \sigma_2, n \rightarrow \mathbf{k}', \sigma'_1, -\mathbf{k}', \sigma'_2, n') \rightarrow \sum_{s\sigma} C_{s_1 s_2}(s, \sigma; \sigma_1, \sigma_2) C_{s'_1 s'_2}(s, \sigma; \sigma'_1, \sigma'_2) a_s(n \rightarrow n'), \quad (3.7.19)$$

где a — постоянная величина, известная как *длина рассеяния* и определяемая как предел

$$S_{0sn',0sn}^s \rightarrow \delta_{n',n} + 2ika_s(n \rightarrow n'), \quad (3.7.20)$$

при $k = k' = 0$. Суммируя $4\pi|f|^2$ по спинам конечных частиц и усредняя по спинам начальных частиц, находим полное сечение перехода $n \rightarrow n'$ при $k = k' = 0$:

$$\sigma(n \rightarrow n'; k = 0) = \frac{4\pi}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_s (2s + 1) a_s^2(n \rightarrow n'). \quad (3.7.21)$$

Классическим примером использования этой формулы является нейтрон-протонное рассеяние, когда существуют две длины рассеяния, причем синглетная по спину длина рассеяния a_0 существенно больше триплетной по спину длины a_1 .

Разложение по парциальным волнам можно использовать и для грубой оценки поведения сечения при больших энергиях. Можно ожидать, что с уменьшением длин волн рассеяние все более должно описываться на классическом языке: прицельный параметр частицы с импульсом k и орбитальным угловым моментом l должен равняться l/k , так что при рассеянии частица попадает в диск радиусом R , если $l \leq kR$. Это можно интерпретировать как утверждение, что матричные элементы S -матрицы

$$S_{l'sn, l'sn}^j \rightarrow \begin{cases} 0, & l \ll kR_n \\ 1, & l \gg kR_n \end{cases}, \quad (3.7.22)$$

где R_n — нечто вроде радиуса взаимодействия для канала n . При заданном $l \gg s$ существуют $2s + 1$ значений j , причем все эти значения достаточно близки к l , так что приближенно $2j + 1 \approx 2l + 1$, и сумма по j и s в (3.7.12) сводится к множителю порядка

$$\sum_{js} (2j + 1) = (2l + 1) \sum_s (2s + 1) = (2l + 1)(2s_1 + 1)(2s_2 + 1).$$

Поэтому полное сечение при $k \gg 1/R_n$ определяется из (3.7.12) как

$$\sigma_{\text{total}}(n; E) \rightarrow \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l \leq kR_n} (2l + 1) \rightarrow 2\pi R_n^2. \quad (3.7.23)$$

Совершенно аналогично из соотношения (3.7.10) находим упругое сечение рассеяния

$$\sigma(n \rightarrow n; E) \rightarrow \pi R_n^2. \quad (3.7.24)$$

Разница между (3.7.23) и (3.7.24) равна неупругому сечению πR_n^2 , что и следовало ожидать при столкновениях с непрозрачным диском радиуса R_n . (Несколько удивительное появление упругого сечения рассеяния πR_n^2 связано с дифракцией на диске.) С другой стороны, если предположить в соответствии с (3.7.22), что $S_{l_{sn}, l_{sn}}^j$ комплексны только для значений прицельных параметров l/k в малой области шириной $\Delta_n \ll R_n$ в окрестности $l/k = R_n$, то, используя неравенство $|\operatorname{Im}(1 - S_{l_{sn}, l_{sn}}^j)| \leq 2$, получаем с помощью такого же анализа ограничение на действительную часть амплитуды рассеяния вперед:

$$|\operatorname{Re} f(n; E)| \leq 2kR_n\Delta_n \ll |\operatorname{Im} f(n; E)|. \quad (3.7.25)$$

Малая величина действительной части амплитуды рассеяния вперед при больших энергиях подтверждается экспериментом.

До сих пор мы ничего не сказали о том, может ли радиус взаимодействия R_n сам зависеть от энергии. Для очень грубой оценки предположим, что R_n есть расстояние, на котором множитель $\exp(-\mu r)$ в потенциале Юкавы (1.2.74) принимает значение, пропорциональное некоторой неизвестной степени E . В этом случае R_n ведет себя как $\ln E$ при $E \rightarrow \infty$, а сечение пропорционально $(\ln E)^2$. На основе очень общих предположений было строго показано²⁶, что полное сечение не может расти быстрее, чем $(\ln E)^2$ при $E \rightarrow \infty$. И действительно, наблюдаемое полное сечение протон-протонного рассеяния растет при больших энергиях по закону, близкому к $(\ln E)^2$, так что представленная грубая картина рассеяния при больших энергиях по-видимому имеет отношение к действительности.

3.8. Резонансы*

Часто бывает так, что частицы, принимающие участие в многочастичном соударении, могут образовать промежуточное состояние, состоящее из *одной* нестабильной частицы R , которая затем распадается на частицы в конечном состоянии. Если полная

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

вероятность распада R мала, сечение при значении энергии в окрестности промежуточного состояния R очень быстро изменяется (обычно появляется острый максимум), проявляя резонансное поведение.

Мы увидим, что поведение сечений вблизи резонанса достаточно хорошо определяется только одним условием унитарности. Это хорошее известие, поскольку механизмы образования почти стабильных состояний весьма различны.

а) Простейшая возможность заключается в том, что гамильтониан можно представить в виде суммы двух слагаемых: «сильного» гамильтониана $H_0 + V_s$, причем частица R является собственным состоянием этого гамильтониана, и слабого возмущения V_w , за счет которого R распадается по разным каналам, включая начальное и конечное состояния α и β рассматриваемого процесса соударения. Например, существует нейтральная частица Z^0 с $j = 1$ и массой 91 ГэВ, которая была бы стабильной в отсутствие электрослабых взаимодействий. Эти взаимодействия позволяют Z^0 распадаться на электрон-позитронные пары, мюон-антимюонные пары и т.д., однако полная ширина распада много меньше массы Z^0 . В 1989 году частица Z^0 наблюдалась как резонанс * в электрон-позитронных соударениях в ЦЕРНе и Станфорде в реакциях аннигиляции $e^+ + e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow e^+ + e^-$, $e^+ + e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ и т. п.

б) В ряде случаев частица имеет большое время жизни, потому что существует потенциальный барьер, не позволяющий составным частям разлететься. Классическим примером является альфа-распад ядер: энергетически допустим вылет из ядра альфа-частицы (ядра атома He^4), однако сильное электростатическое отталкивание между альфа-частицей и ядром образует запрещенную область вокруг дочернего ядра, в которой по классическим законам альфа-частица находиться не может. Распад тем не менее происходит за счет квантово-механического подбарьерного перехода и экспоненциально мал. Такое нестабильное состояние проявляется как

* Между прочим, этот пример показывает, что резонансное состояние должно распадаться всего лишь относительно медленно. Время жизни Z^0 -бозона равно $2,6 \times 10^{-25}$ с, и этого времени не хватает даже на то, чтобы Z^0 , двигаясь почти со скоростью света, пересек атомное ядро. Важно то, что скорость распада в 36 раз меньше, чем скорость осцилляций \hbar/M_Z волновой функции Z^0 в системе покоя.

резонанс при рассеянии альфа-частицы на дочернем ядре. Например, наименее по энергии состояние ядра Be^8 нестабильно по отношению к распаду на две альфа-частицы и проявляется как резонанс в $\text{He}^4\text{-He}^4$ рассеянии. (Помимо кулоновского барьера, существуют центробежные барьеры, позволяющие продлить время жизни альфа-, бета- и гамма-нестабильных ядер большого спина.)

в) Сложные системы могут быть почти стабильными по чисто статистическим причинам, в отсутствие каких-то потенциальных барьеров или слабых взаимодействий. Например, возбужденное состояние тяжелого ядра способно распасться только в случае, когда из-за статистической флуктуации основная часть энергии сконцентрируется на отдельном нейтроне. Такое состояние проявляется как резонанс при рассеянии нейтронов на дочернем ядре.

Описанные механизмы образования долгоживущих состояний весьма различны. Поэтому поистине счастливым обстоятельством является то, что большинство свойств резонансов следует только из условия унитарности безотносительно к динамическому механизму, приводящему к образованию данного резонанса.

Прежде всего, рассмотрим энергетическую зависимость матричного элемента реакции вблизи резонанса. Зависимость от времени волнового пакета $\int d\alpha g(\alpha)\Phi_\alpha^+ \exp(-iE_\alpha t)$ из ин-состояний определяется формулой (3.1.19):

$$\int d\alpha g(\alpha)\Psi_\alpha^+ e^{-iE_\alpha t} = \int d\alpha g(\alpha)\Phi_\alpha^+ e^{-iE_\alpha t} + \int d\beta \Phi_\beta \int d\alpha \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}^+}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon}.$$

Как было отмечено в разделе 3.1, полюс функции $T_{\beta\alpha}^+$ в нижней полуплоскости комплексной плоскости E_α дает вклад во второе слагаемое, которое экспоненциально затухает при $t \rightarrow \infty$. Конкретно, полюс в точке $E_\alpha = E_R - i\Gamma/2$ приводит к слагаемому в *амплитуде*, ведущему себя как $\exp(-iE_R t - \Gamma t/2)$. Оно отвечает некоторому состоянию, *вероятность* которого уменьшается со временем по закону $\exp(-\Gamma t)$. Мы заключаем отсюда, что долгоживущее состояние с энергией E_R и шириной Γ соответствует слагаемому в амплитуде рассеяния, меняющемуся как

$$T_{\beta\alpha}^+ \sim (E_\alpha - E_R + i\Gamma/2)^{-1} + \text{const.} \quad (3.8.1)$$

Далее будет удобно использовать в качестве базиса обсуждавшиеся в предыдущем разделе ортонормированные дискретные многочастичные состояния $\Phi_{\mathbf{p}EN}$; здесь \mathbf{p} и E — полные импульс и энергия, N — индекс, принимающий только дискретные значения (хотя их может быть бесконечно много). В этом базисе S -матрица может быть записана в следующем виде:

$$S_{\mathbf{p}'E'N', \mathbf{p}EN} = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta(E' - E)S_{N'N}(\mathbf{p}, E), \quad (3.8.2)$$

Мы считаем, что вблизи резонанса амплитуда в системе центра масс $S(0, E) \equiv \mathcal{G}(E)$ имеет вид

$$\mathcal{G}_{N'N}(E) \equiv S_{N'N}(0, E) = \mathcal{G}_{0N'N} + \frac{\mathcal{R}_{N'N}}{E - E_R + i\Gamma/2}, \quad (3.8.3)$$

где \mathcal{G}_0 и \mathcal{R} примерно постоянны, по крайней мере, в относительно узкой области энергий $|E - E_R| \leq \Gamma$.

В таком базисе условие унитарности S -матрицы принимает вид обычного матричного уравнения

$$\mathcal{G}(E)^\dagger \mathcal{G}(E) = 1. \quad (3.8.4)$$

Подстановка формулы (3.8.3) показывает, что нерезонансная фоновая S -матрица унитарна:

$$\mathcal{G}_0^\dagger \mathcal{G}_0 = 1, \quad (3.8.5)$$

а матрица вычетов \mathcal{R} удовлетворяет двум условиям:

$$\mathcal{G}_0^\dagger \mathcal{R} - \mathcal{R}^\dagger \mathcal{G}_0 = 0, \quad (3.8.6)$$

$$-\frac{i}{2} \Gamma \mathcal{G}_0^\dagger \mathcal{R} + \frac{i}{2} \Gamma \mathcal{R}^\dagger \mathcal{G}_0 + \mathcal{R}^\dagger \mathcal{R} = 0. \quad (3.8.7)$$

Эти условия можно записать в более ясной форме, полагая

$$\mathcal{R} \equiv -i\Gamma \mathcal{A} \mathcal{S}_0. \quad (3.8.8)$$

В терминах \mathcal{A} вышеприведенные условия унитарности имеют простой вид

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}. \quad (3.8.9)$$

Любая такая эрмитова идемпотентная матрица называется *проекционной матрицей*. Эти матрицы всегда можно выразить в виде суммы диад из ортонормированных векторов $u^{(r)}$:

$$t_{N'N} = \sum_r u_N^{(r)} u_N^{(r)*}, \quad \sum_N u_N^{(r)*} u_N^{(s)} = \delta_{rs}. \quad (3.8.10)$$

Тогда дискретная часть S -матрицы имеет вид

$$\mathcal{S}_{N'N}(E) = \sum_{N''} \left[\delta_{N'N''} - i \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \sum_r u_{N'}^{(r)} u_{N''}^{(r)*} \right] \mathcal{S}_{0N''N}. \quad (3.8.11)$$

Можно считать, что каждое слагаемое в сумме по r возникло от отдельного резонансного состояния, причем все эти состояния имеют одни и те же значения E_R и Γ .

Какое отношение эти выражения имеют к вероятностям и сечениям?

Для простоты не будем сначала учитывать нерезонансное фоновое рассеяние, положив $\mathcal{S}_{0N'N}$ равным $\delta_{N'N}$. К общему случаю мы вернемся чуть позже. Тогда для описанных в предыдущем разделе двухчастичных дискретных состояний в системе центра масс формула (3.8.11) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{j'\sigma'l's'n', j\sigma lsn}(E) &= \delta_{j'j} \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{l'l} \delta_{s's} \delta_{n'n} \\ &\quad - i \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \sum_r u_{j'\sigma'l's'n'}^{(r)} u_{j\sigma lsn}^{(r)*}. \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

Во всех случаях метка r включает индекс σ_R , задающий z -компоненту полного углового момента резонансного состояния; для состояния с полным моментом j_R величина σ_R принимает $2j_R + 1$ значение. Если нет других вырождений, индекс r сводится к значению σ_R , и

$$u_{j\sigma lsn}^{(\sigma_R)} = \delta_{j_R, j} \delta_{\sigma_R, \sigma} u_{lsn}, \quad (3.8.13)$$

где u_{lsn} — набор комплексных амплитуд (по теореме Вигнера–Эккарта не зависящих от σ). Представление (3.8.12) задает амплитуду S^j , определенную формулой (3.7.7):

$$S_{l's'n', lsn}(E) = \delta_{l'l} \delta_{s's} \delta_{n'n} - i \delta_{j, j_R} \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \sum_r u_{l's'n'} u_{lsn}^*. \quad (3.8.14)$$

Формула (3.8.10) теперь принимает вид

$$\sum_{lsn} |u_{lsn}|^2 + \dots = 1, \quad (3.8.15)$$

где точки означают положительный вклад любых состояний, содержащих три и более частиц. Как мы увидим, величины $|u_{lsn}|^2$ имеют смысл относительных вероятностей распада резонансного состояния в различные возможные двухчастичные состояния.

Теперь формула (3.7.12) дает полное сечение всех реакций в канале n :

$$\sigma_{\text{total}}(n; E) = \frac{\pi(2j_R + 1)}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{\Gamma \Gamma_n}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (3.8.16)$$

где

$$\Gamma_n \equiv \Gamma \sum_{ls} |u_{lsn}|^2. \quad (3.8.17)$$

Это одна из форм записи знаменитой формулы Брейта–Вигнера для одного уровня²⁷.

Те же результаты можно использовать и для вычисления сечения резонансного рассеяния из начального двухчастичного канала n в конечной двухчастичный канал n' . Подстановка формулы (3.8.14) в (3.7.10) дает:

$$\sigma(n \rightarrow n'; E) = \frac{\pi(2j_R + 1)}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{\Gamma_n \Gamma_{n'}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (3.8.18)$$

Отсюда видно, что вероятности распада резонансного состояния в любой из конечных двухчастичных каналов n' пропорциональны

Γ_n . Согласно (3.8.15) сумма всех Γ_n (включая вклады от конечных состояний, содержащих три и более частицы) просто равна полной вероятности распада Γ , поэтому можно заключить, что Γ_n есть вероятность распада резонансного состояния по каналу n .

Из формул (3.8.16) и (3.8.18) следует, что у соответствующих величин имеется характерный резонансный пик при значении энергии E_R с шириной (т. е. полной шириной пика на половине его высоты), равной вероятности распада Γ . (Индивидуальные Γ_n часто называют парциальными ширинами.) Так как $\Gamma_n \leq \Gamma$, полное сечение в пике резонанса, грубо говоря, ограничено квадратом длины волны $(2\pi/k)^2$. Это правило, что в области отдельного резонансного пика сечение ограничено квадратом длины волны, универсально и применимо даже в классической физике (где роль условия унитарности выполняет закон сохранения энергии), например, при резонансном взаимодействии звуковых волн с пузырьками воды в море, или гравитационных волн с гравитационной антенной. (В последнем случае относительный вклад колебаний в любой лабораторной массе, приводящих к потере энергии за счет гравитационного излучения, очень мал, поэтому даже в резонансе сечение неизмеримо меньше квадрата длины волны ²⁸.)

Наконец, часто бывает, что резонанс регистрируется, но измерения энергии недостаточно точны, чтобы разрешить его ширину. В этом случае экспериментально измеряется интеграл от полного сечения по области в окрестности резонансного пика. Для полного сечения это равно

$$\int \sigma_{\text{total}}(n; E) dE = \frac{2\pi^2(2j_R + 1)\Gamma_n}{k_R^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)}. \quad (3.8.19)$$

Таким образом, подобные эксперименты могут определить только парциальную ширину распада резонансного состояния в состоянии начальных частиц, но не полную ширину или относительные вероятности распадов.

Изложенный формализм можно применить и тогда, когда резонансные состояния с данным значением z -компоненты спина образуют мультиплет, связанный с какой-то группой симметрии. Например, если имеет место изоспиновая симметрия, то для резонанса с полным изоспином T_R индекс r , нумерующий резонансные состояния, включает не только z -компоненту σ_R углового момента, но и третью проекцию изоспина t_R , принимающую значения

$-T_R, -T_R + 1, \dots, T_R$. В этом случае предыдущие результаты для полного и парциальных сечений не изменяются, так как каждый двухчастичный канал n имеет определенные значения t_1, t_2 z -компонент изоспина двух частиц и поэтому резонансное состояние, возникающее в этом канале, может иметь единственное значение $t_R = t_1 + t_2$. Парциальные ширины Γ_n зависят от значений t_1 и t_2 только через множители $C_{T_1, T_2}(T_R, t_R; t_1, t_2)^2$.

Наличие резонанса проявляется в характерном поведении фазовых сдвигов вблизи резонанса. Если вернуться к общей формуле (3.8.11) (продолжая считать $\mathcal{S}_0 = 1$), то из (3.8.10) видно, что для каждого отдельного резонансного состояния r существует собственный вектор матрицы $\mathcal{S}_{N'N}(E)$ с собственным значением

$$\exp(2i\delta^{(r)}(E)) = 1 - i \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2},$$

или иначе

$$\operatorname{tg} \delta^{(r)}(E) = - \frac{\Gamma/2}{E - E_R}. \quad (3.8.20)$$

Видно, что в интервале энергий порядка Γ вокруг резонансного значения «собственная фаза» $\delta^{(r)}(E)$ скачком меняется от значения $v\pi$ (v — положительное или отрицательное целое число) ниже резонанса до значения $(v+1)\pi$ выше резонанса. Однако чтобы с помощью этого результата что-то узнать о вероятностях реакций, нужно знать собственные векторы $u_N^{(r)}$, которые, в общем случае, имеют компоненты с произвольным числом частиц с разными импульсами, спинами и другими характеристиками.

Полученные результаты оказываются значительно более полезными в тех частных случаях, когда частицам в некотором канале N запрещен (обычно законами сохранения) переход в любой другой канал. Отсюда нетрудно включить в общую формулу (3.8.11) эффекты нерезонансного фона, связанные с матрицей рассеяния \mathcal{S}_0 . Чтобы $\mathcal{S}_{N'N}$ обращались в нуль при некотором N и всех $N' \neq N$, необходимо, чтобы это же было верно для $\mathcal{S}_{0N'N}$, а также для $u_{N'}^{(r)}$ при всех r , для которых $u_N^{(r)} \neq 0$. Из условия унитарности (3.8.5) следует, что для такого N

$$\mathcal{S}_{0N'N} = \exp(2i\delta_{0N})\delta_{N'N}$$

а из уравнения (3.8.10) вытекает, что

$$u_N^{(r)*} u_N^{(s)} = \delta_{rs},$$

так что в (3.8.11) может быть только одно значение r , при котором $u_N^{(r)} \neq 0$. В этом случае из (3.8.11) находим:

$$\mathcal{S}_{N'N}(E) = \delta_{N'N} \left[1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \right] \exp(2i\delta_{0N}) \equiv \delta_{N'N} \exp(2i\delta_N(E)).$$

с полным фазовым сдвигом

$$\delta_N(E) = \delta_{0N} - \arctg\left(\frac{\Gamma/2}{E - E_R}\right). \quad (3.8.21)$$

Видно, что в интервале энергий порядка Γ вокруг значения резонансной энергии E_R фазовый сдвиг $\delta_N(E)$ совершает скачок от значения δ_{0N} ниже резонанса до значения $\delta_{0N} + \pi$ выше него. Как мы видели в предыдущем разделе, указанные предположения выполняются для различных двухчастичных реакций типа пион-пионного или пион-нуклонного рассеяния при энергиях ниже порога рождения дополнительных пионов. В этих случаях индекс N включает полный и орбитальный угловые моменты j , l (для пион-пионного рассеяния $j = l$), z -компоненту полного углового момента σ , а также полный изоспин T и его третью проекцию t . В силу теоремы Вигнера–Эккарта фазовые сдвиги могут зависеть только от j , l и T , но не от σ или t . В указанных каналах имеются знаменитые резонансы: в пион-пионном рассеянии при энергии 770 МэВ имеется резонанс, называемый ρ , с $j = l = 1$, $T = 1$ и $\Gamma = 150$ МэВ; в пион-нуклонном рассеянии при энергии 1232 МэВ имеется резонанс, называемый Δ , с $j = \frac{3}{2}$, $l = 1$, $T = \frac{3}{2}$ и шириной $\Gamma = 110$ –120 МэВ.

Из формул (3.7.12) или (3.7.18) следует, что когда резонансный фазовый сдвиг проходит через значение $\pi/2$ (или нечетное кратное $\pi/2$), полное сечение достигает максимума. Нерезонансные фазовые сдвиги обычно довольно малы, так что при энергии, близкой к E_R , когда фазовый сдвиг δ_l проходит через $\pi/2$, сечение σ_{total} имеет острый максимум. Однако иногда случается, что нерезонансный фоновый фазовый сдвиг δ_{0N} близок к $\pi/2$, и в этом случае, когда

фазовый сдвиг проходит через значение π в окрестности E_R , в сечении появляется узкий *провал*, обязанный деструктивной интерференции между резонансной и нерезонансной амплитудами. Подобные провалы впервые наблюдали в 1922 году Рамзауер и Таунсенд при изучении рассеяния электронов на атомах благородных газов.

Задачи

1. Рассмотрим теорию с сепарабельным взаимодействием, для которого

$$(\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) = g u_\beta u_\alpha^*,$$

где g – действительная константа связи, а u_α – набор комплексных величин, удовлетворяющих условию

$$\sum_\alpha |u_\alpha|^2 = 1.$$

С помощью уравнения Липпмана–Швингера (3.1.16) найдите явные решения для ин- и аут-состояний и постройте S -матрицу.

2. Предположим, что в реакции e^+e^- -рассеяния при полной энергии 150 ГэВ обнаружен резонанс со спином 1, причем сечение (в системе центра масс, усредненное по начальным и просуммированное по конечным спинам) упругого e^+e^- -рассеяния в пике резонанса равно 10^{-34} см². Чему равна относительная вероятность распада резонансного состояния R по каналу $R \rightarrow e^+ + e^-$? Чему равно полное сечение e^+e^- -рассеяния в пике резонанса? (При ответе на оба вопроса не учитывайте нерезонансного фонового рассеяния.)
3. Выразите дифференциальное сечение двухчастичного рассеяния в *лабораторной* системе (где одна из начальных частиц покоится) через кинематические переменные и матричный элемент $M_{\beta\alpha}$. (Получите формулу непосредственно, не используя результаты, полученные в этой главе для дифференциального сечения в системе центра масс.)

4. Выведите разложение по теории возмущений (3.5.8) непосредственно из формулы (3.5.3) старой теории возмущений.
5. Можно определить состояния «стоячих волн» Ψ_α^0 с помощью модифицированной версии уравнения Липпмана–Швингера

$$\Psi_\alpha^0 = \Phi_\alpha + \frac{P}{E_\alpha - H_0} V \Psi_\alpha^0.$$

Покажите, что матрица

$$K_{\beta\alpha} \equiv \pi \delta(E_\beta - E_\alpha) (\Phi_\beta, V \Phi_\alpha^0)$$

эрмитова. Покажите, как можно выразить S -матрицу через K -матрицу.

6. Выразите дифференциальные сечения упругого π^+p - и π^-p -рассеяния через фазовые сдвиги состояний с определенными значениями полного углового момента, четности и изоспина.
7. Покажите, что состояния $\Phi_{E_{p_j} \sigma_{sn}}$, определенные формулой (3.7.5), правильно нормированы, так что их скалярные произведения даются формулой (3.7.6).

Список литературы

1. Более подробно см.: Goldberger, M.L. and Watson, K.M. *Collision Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1964) (имеется рус. пер.: Гольдбергер М.Л., Ватсон К. *Теория рассеяния*. М.: Мир, 1967); Newton, R.G. *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd edn (Springer Verlag, New York, 1982) (имеется рус. пер. первого издания: Ньютон Р. *Теория рассеяния волн и частиц*. М.: Мир, 1972).
- 1a. Lippman, B. and Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **79**, 469 (1950).
2. Wheeler, J., *Phys. Rev.*, **52**, 1107 (1937); Heisenberg, W., *Z. f. Phys.*, **120**, 513, 673 (1943).
3. Born, M., *Z. Phys.*, **37**, 863 (1926); **38**, 803 (1926).

4. Moller, C., *Kgl. Danske Videnskab. Mat. Fys. Medd.*, **23**, No. 1 (1945); **22**, No. 19 (1946).
5. Rochester, G.D. and Butler, C.C., *Nature*, **160**, 855 (1947). Исторический обзор см. в статье: Rochester, G.D., in: *Pions to Quarks — Particle Physics in the 1950s*, ed. by L.M. Brown, M. Dresden, and L. Hoddeson (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989).
6. Breit, G., Condon, E.U., and Present, R.S., *Phys. Rev.*, **50**, 825 (1936); Cassen, B. and Condon, E.U., *Phys. Rev.*, **50**, 846 (1936); Breit, G. and Feenberg, E., *Phys. Rev.*, **50**, 850 (1936).
7. Tuve, M.A., Heydenberg, N., and Hafstad, L.R., *Phys. Rev.*, **50**, 806 (1936).
8. Gell-Mann, M., Cal. Tech. Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (1961); *Phys. Rev.*, **125**, 1067 (1962); Ne'eman, Y., *Nucl. Phys.*, **26**, 222 (1961).
9. См., например: Edmonds, A.R., *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1957), Ch. 3 (где $C_{j_1 j_2}(jm; m_1 m_2)$ обозначено как $(j_1 j_2 jm | j_1 m_1 j_2 m_2)$) (есть рус. пер.: Эдмондс А. *Угловой момент в квантовой механике*. М.: Атомиздат, 1968); Rose, M.E., *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957), Ch. 3 (где $C_{j_1 j_2}(jm; m_1 m_2)$ обозначено как $C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$).
10. Feinberg, G. and Weinberg, S., *Nuovo Cimento, Serie X*, **14**, 571 (1959).
11. Chinowsky, W. and Steinberger, J., *Phys. Rev.*, **95**, 1561 (1954); см. также: Ferretti, B., *Report of an International Conference on Fundamental Particles and Low Temperatures*, Cambridge, 1946 (The Physical Society, London, 1947).
12. Lee, T.D. and Yang, C.N., *Phys. Rev.*, **104**, 254 (1956).
13. Wu, C.S. et al., *Phys. Rev.*, **105**, 1413 (1957).

14. Garwin, R., Lederman, L., and Weinrich, M., *Phys. Rev.*, **105**, 1415 (1957); Friedman, J.I. and Telegdi, V.L., *Phys. Rev.*, **105**, 1681 (1957).
15. Watson, K.M., *Phys. Rev.*, **88**, 1163 (1952).
16. Gell-Mann, M. and Pais, A., *Phys. Rev.*, **97**, 1387 (1955); см. также: Pais, A. and Piccioni, O., *Phys. Rev.*, **100**, 1487 (1955).
17. Christenson, J.H., Cronin, J.W., Fitch, V.L., and Turlay, R., *Phys. Rev. Letters*, **13**, 138 (1964).
18. Schubert, K.R. et al., *Phys. Lett.*, **31B**, 662 (1970). В этой работе, не предполагая СРТ-инвариантности, анализируются данные по распадам нейтральных каонов. Показано, что та часть СР-нарушающей амплитуды, которая сохраняет СРТ и нарушает Т, имеет отличные от нуля действительную и мнимую части в пределах пяти стандартных отклонений, в то время как сохраняющая Т и нарушающая СРТ часть амплитуды равна нулю в пределах одного стандартного отклонения.
19. Dalitz, R.H., *Phil. Mag.*, **44**, 1068 (1953); Fabri, E., *Nuovo Cimento*, **11**, 479 (1954).
20. Dyson, F.J., *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949).
21. См. например: Schiff, L.I., *Quantum Mechanics*, 1st ed. (McGraw Hill, New York, 1949), Section 19 (есть рус. пер.: Шифф Л. *Квантовая механика*. М.: ИЛ, 1957).
22. Впервые это было доказано в классической электродинамике. См. например: Kramers, H.A., *Atti Congr. Intern. Fisici*, Como, 1927. Квантово-механическое доказательство см.: Feenberg, E., *Phys. Rev.*, **40**, 40 (1932); Bohr, N., Peierls, R.E., and Placzek, G., *Nature*, **144**, 200 (1939).
23. Более общее доказательство было дано в конце 1960-х гг. в неопубликованной работе Ч. Н. Янга и Ч.П. Янга. См. также: Aharonу, A., in: *Modern Developments in Thermodynamics* (Wiley, New York, 1973), pp. 95-114.

24. См., например: Edmonds, A.R., *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1957), Ch. 2 (есть рус. пер.: Эдмондс А. *Угловой момент в квантовой механике*. М.: Атомиздат, 1968); Rose, M.E., *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957), Appendix III; Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. М.: Наука, 1974, §28, 31.
25. Wigner, E.P., *Gruppentheorie* (Friedrich Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1931) (есть рус. пер.: Вигнер Г. *Теория групп*. М.: ИЛ, 1972); Eckart, C., *Rev. Mod. Phys.*, **2**, 305 (1930).
26. Froissart, M., *Phys. Rev.*, **49**, 1053 (1961).
27. Breit, G. and Wigner, E.P., *Phys. Rev.*, **49**, 519 (1936).
28. См. например: Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972), Section 10.7 (есть рус. пер.: Вейнберг С. *Гравитация и космология*. М.: Мир, 1974).
29. Kollath, R., *Phys. Zeit.*, **31**, 985 (1931).

Принцип кластерного разложения

До этого момента мы почти что не говорили о детальной структуре оператора Гамильтона H . Этот оператор можно определить, задав все его матричные элементы между состояниями с произвольным числом частиц. Эквивалентно, как будет показано ниже, любой такой оператор можно выразить как функцию определенных операторов, уничтожающих и рождающих отдельные частицы. В гл. 1 мы видели, что такие операторы рождения и уничтожения впервые появились на ранней стадии развития квантовой механики в схеме канонического квантования электромагнитного поля и других полей. Возник естественный формализм для теорий, в которых могут рождаться и уничтожаться как фотоны, так и массивные частицы, первой из которых в начале 1930-х годов стала теория β -распада Ферми.

Однако есть и более глубокая причина построения гамильтониана из операторов рождения и уничтожения, выходящая за рамки нужд квантования любой существовавшей до этого теории поля типа электродинамики и не имеющая отношения к тому, могут ли частицы реально рождаться и уничтожаться. Существенным преимуществом этого формализма является то, что если мы запишем гамильтониан как сумму произведений операторов рождения и уничтожения с подходящими несингулярными коэффициентами, то S -матрица будет автоматически удовлетворять ключевому физическому требованию, а именно, принципу кластерного разложения¹, сводящемуся к тому, что результаты удаленных друг от друга экспериментов не коррелируют. Именно по этой причине формализм операторов рождения и уничтожения широко используется в нерелятивистской квантовой статистической механике,

где в типичной ситуации число частиц фиксировано. В релятивистских квантовых теориях принцип кластерного разложения играет решающую роль в той системе рассуждений, которая делает теорию поля неизбежной. Было много попыток сформулировать релятивистски инвариантную теорию, не являющуюся локальной теорией поля. Действительно, можно построить теории, не являющиеся теориями поля, и тем не менее приводящие к лоренц-инвариантной S -матрице для двухчастичного рассеяния², но все эти попытки сталкиваются с трудностями в секторах с более чем двумя частицами: либо трехчастичная S -матрица оказывается неинвариантной по отношению к лоренцовским преобразованиям, либо нарушается принцип кластерного разложения.

В этой главе мы обсудим сначала базис состояний, содержащих произвольное число бозонов и фермионов, затем определим операторы рождения и уничтожения, и наконец покажем, как использование этих операторов облегчает построение гамильтонианов, приводящих к S -матрицам, удовлетворяющим принципу кластерного разложения.

4.1. Бозоны и фермионы

Гильбертово пространство физических состояний натянута на состояния, содержащие 0, 1, 2, ... свободных частиц. Это могут быть состояния свободных частиц, либо ин- или аут-состояния. Для определенности будем рассматривать ниже состояния свободных частиц $\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2, \dots}$, но все результаты будут применимы и для ин- или аут-состояний. Как обычно, индекс σ отмечает z -компоненты спина (или спиральности для безмассовых частиц), а n отмечает сорт частиц.

Нам предстоит рассмотреть вопрос, который был опущен в гл. 3, а именно, установить свойства симметрии таких состояний. Насколько мы знаем, все частицы являются либо *бозонами*, либо *фермионами*. Разница между ними состоит в том, что при перестановке двух тождественных бозонов вектор состояния не изменяется, а при перестановке двух тождественных фермионов вектор состояния меняет знак. Именно,

$$\Phi_{\dots p\sigma n \dots p'\sigma'n \dots} = \pm \Phi_{\dots p'\sigma'n \dots p\sigma n \dots} \quad (4.1.1)$$

причем верхний или нижний знак отвечает, соответственно, бозону или фермиону, а многоточием отмечены другие частицы, которые могут присутствовать в данном состоянии. Эти два случая часто называются *статистикой* Бозе или Ферми. В следующей главе мы увидим, что статистики Бозе или Ферми — единственно возможные случаи для частиц целого или полуцелого спина, соответственно. Однако сейчас эта информация нам не понадобится. В данной главе мы дадим нестрогое доказательство того, что все частицы должны быть либо бозонами, либо фермионами, а затем установим условия нормировки многобозонных и многофермионных состояний.

Заметим, во-первых, что если две частицы со спинами и импульсами \mathbf{p} , σ и \mathbf{p}' , σ' относятся к одному сорту n , то векторы состояний $\Phi_{\dots\mathbf{p}\sigma n\dots\mathbf{p}'\sigma'n\dots}$ и $\Phi_{\dots\mathbf{p}'\sigma'n\dots\mathbf{p}\sigma n\dots}$ представляют одно и то же физическое состояние. Если бы это было не так, то частицы можно было бы различить по тому, в каком порядке расставлены индексы в векторе состояний, т. е. первая из указанных частиц была бы не тождественна второй. Так как два вектора состояний физически неразличимы, они должны принадлежать одному лучу, так что

$$\Phi_{\dots\mathbf{p}\sigma n\dots\mathbf{p}'\sigma'n\dots} = \alpha_n \Phi_{\dots\mathbf{p}'\sigma'n\dots\mathbf{p}\sigma n\dots} \quad (4.1.2)$$

где α_n — комплексное число, по модулю равное единице. Можно считать эту формулу частью определения того, что мы подразумеваем под тождественными частицами.

Суть вопроса в том, чтобы решить, от чего может зависеть фазовый множитель α_n . Если он зависит только от индекса сорта частиц, то мы почти у цели. Вновь меняя местами две частицы в (4.1.2), получаем

$$\Phi_{\dots\mathbf{p}\sigma n\dots\mathbf{p}'\sigma'n\dots} = \alpha_n^2 \Phi_{\dots\mathbf{p}\sigma n\dots\mathbf{p}'\sigma'n\dots}$$

так что $\alpha_n^2 = 1$, откуда и возникают только две возможности в (4.1.1).

От чего же еще может зависеть α_n ? Этот коэффициент мог бы зависеть от числа и сортов других частиц в состоянии (отмечено многоточием в (4.1.1) и (4.1.2)), однако это привело бы к нежелательному результату, что симметрия векторов состояний относительно перестановки частиц здесь, на Земле, зависела бы от наличия частиц где-нибудь в другой части Вселенной. Подобное свойство исключается принципом кластерного разложения,

который обсуждается ниже в этой главе. Фаза α_n не может нетривиальным образом зависеть от спинов тех двух частиц, которые переставляются местами, поскольку такие зависящие от спина фазовые множители должны реализовать представление группы вращений. Однако известно, что не существует нетривиальных одномерных представлений трехмерной группы вращений, т. е. представлений в виде фазовых множителей. Фаза α_n могла бы существенным образом зависеть от импульсов обмениваемых частиц, однако из требования лоренц-инвариантности следует, что α_n может зависеть только от скаляра $p_1^\mu p_{2\mu}$. Этот скаляр симметричен относительно перестановки частиц 1 и 2, поэтому такая зависимость оставляет в силе предыдущие рассуждения, приводящие к заключению, что $\alpha_n^2 = 1$.

Логический пробел в приведенной выше аргументации состоит в том, что состояния $\Phi_{\mathbf{p}_1, \sigma_1, n, \mathbf{p}_2, \sigma_2, n, \dots}$ (хотя это и не отражено в обозначениях) могут содержать фазовый множитель, зависящий от пути в импульсном пространстве, по которому импульсы частиц получают значения $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, и т. д. В этом случае двойной обмен местами пары частиц может изменить состояние на фазовый множитель, причем $\alpha_n^2 \neq 1$. Мы увидим в гл. 9.7, что в двумерном случае такая возможность реальна, но это невозможно в случае трех и более пространственных измерений.

Как обстоит дело с перестановкой частиц разных сортов? Если угодно, можно снять проблему, просто согласившись с самого начала пометить вектор состояния, перечисляя сначала все импульсы и спиральности фотонов, затем все импульсы и проекции спина на ось z электронов, и так далее по всей таблице элементарных частиц. Альтернативно, можно принять, что метки частиц расположены в любом порядке, и *определить* векторы состояний с произвольно расположенными метками частиц равными вектору состояния со стандартным образом расположенными метками, умноженному на фазовые множители, зависимость которых от перестановки частиц разных сортов может быть любой.

Чтобы иметь дело с симметриями типа изоспиновой инвариантности, которые связывают частицы разных сортов, удобно принять соглашение, обобщающее (4.1.1):

вектор состояния будет считаться *симметричным* по отношению к перестановке бозонов или любого бозона с любым фермионом, и *антисимметричным* при перестановке двух фермионов во всех

случаях, независимо от того, принадлежат ли частицы одному сорту или нет*.

Нормировка этих состояний должна быть определена в согласии с указанными условиями симметрии. Чтобы сделать запись более компактной, будем использовать метку q для обозначения всех квантовых чисел отдельной частицы: ее импульса \mathbf{p} , z -компоненты спина (или спиральности в случае безмассовых частиц) σ и сорта n . Таким образом, N -частичное состояние будет обозначаться $\Phi_{q_1 \dots q_N}$ (вакуумному состоянию Φ_0 отвечает $N = 0$). Для случаев $N = 0$ и $N = 1$ вопрос о симметрии не возникает, поэтому

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1, \quad (4.1.3)$$

$$(\Phi_{q'}, \Phi_q) = \delta(q' - q), \quad (4.1.4)$$

где $\delta(q' - q)$ есть произведение всех дельта-функций и кронекеровских дельта-символов для квантовых чисел частиц:

$$\delta(q' - q) \equiv \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{n'n}. \quad (4.1.5)$$

С другой стороны, для $N = 2$ состояния $\Phi_{q'_1, q'_2}$ и $\Phi_{q'_2, q'_1}$ физически одинаковы, поэтому здесь следует положить

$$(\Phi_{q'_1, q'_2}, \Phi_{q_1, q_2}) = \delta(q'_1 - q_1) \delta(q'_2 - q_2) \pm \delta(q'_2 - q_1) \delta(q'_1 - q_2), \quad (4.1.6)$$

причем знак «минус» берется в случае, если обе частицы — фермионы, а знак «плюс» — во всех остальных случаях. Очевидно, что

* На самом деле, по тем же соображениям чисто условной является симметрия или антисимметрия вектора состояния при перестановке частиц одного сорта, но разных спиральностей или третьих проекций спина. Действительно, мы с самого начала можем договориться перечислять первыми импульсы всех фотонов со спиральностью $+1$, затем импульсы всех фотонов со спиральностью -1 , затем импульсы всех электронов с проекцией спина на ось z , равной $+\frac{1}{2}$, и т. д. Мы принимаем *соглашение*, что вектор состояния симметричен или антисимметричен при перестановке тождественных бозонов или фермионов разных спиральностей или z -компонент спина с целью облегчить использование инвариантности относительно вращений.

это совместимо с установленными выше свойствами симметрии состояний. В более общей форме

$$(\Phi_{q'_1 q'_2 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N}) = \delta_{NM} \sum_{\mathcal{P}} \delta_{\mathcal{P}} \prod_i \delta(q_i - q'_{\mathcal{P}i}). \quad (4.1.7)$$

Сумма здесь берется по всем перестановкам \mathcal{P} целых чисел $1, 2, \dots, N$. (Например, в первом слагаемом в (4.1.6) перестановка \mathcal{P} совпадает с тождественным преобразованием, $\mathcal{P}1 = 1, \mathcal{P}2 = 2$, а во втором слагаемом $\mathcal{P}1 = 2, \mathcal{P}2 = 1$.) Кроме того, $\delta_{\mathcal{P}}$ — знаковый множитель, равный -1 , если \mathcal{P} включает нечетную перестановку фермионов (т. е. нечетное число перестановок пар фермионов), и $+1$ во всех остальных случаях. Легко видеть, что (4.1.7) обладает желаемыми свойствами симметрии или антисимметрии по отношению к перестановке как q_i , так и q'_j .

4.2. Операторы рождения и уничтожения

Операторы рождения и уничтожения можно определить по их действию на нормированные многочастичные состояния, обсуждавшиеся в предыдущем разделе. *Оператор рождения* $a^\dagger(q)$ (или подробнее $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)$) определяется как оператор, который просто добавляет частицу с квантовыми числами q спереди в списке всех частиц в данном состоянии:

$$a^\dagger(q) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} \equiv \Phi_{q q_1 q_2 \dots q_N}. \quad (4.2.1)$$

В частности, N -частичное состояние можно получить, действуя на вакуум N операторами рождения:

$$a^\dagger(q_1) a^\dagger(q_2) \dots a^\dagger(q_N) \Phi_0 = \Phi_{q_1 q_2 \dots q_N}. \quad (4.2.2)$$

Этот оператор обозначают $a^\dagger(q)$ чисто условно; сопряженный ему оператор, который обозначается $a(q)$, можно вычислить, исходя из (4.1.7).

Как мы сейчас покажем, $a(q)$ удаляет частицу из любого состояния, на которое он действует, так что поэтому его называют *оператором уничтожения*. В частности, если частицы $q q_1 \dots q_N$ являются все либо бозонами, либо фермионами, то

$$a(q)\Phi_{q_1 q_2 \dots q_N} = \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1} \delta(q - q_r) \Phi_{q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N}, \quad (4.2.3)$$

где знаки +1 или -1 берутся, соответственно, для бозонов или фермионов.

(Вот доказательство. Мы намерены вычислить скалярное произведение $a(q)\Phi_{q_1 q_2 \dots q_N}$ с произвольным состоянием $\Phi_{q'_1 \dots q'_M}$. Используя (4.2.1), находим:

$$\left(\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, a(q)\Phi_{q_1 \dots q_N} \right) \equiv \left(a^\dagger(q)\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 \dots q_N} \right) = \left(\Phi_{qq'_1 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 \dots q_N} \right).$$

Теперь воспользуемся формулой (4.1.7). Сумма по перестановкам \mathcal{P} чисел 1, 2, ..., N может быть записана как сумма по целому числу r , которое переставляется на первое место, т. е. $\mathcal{P} = 1$, и по отображениям $\bar{\mathcal{P}}$ остальных целых чисел 1, ..., $r-1$, $r+1$, ..., N в 1, ..., $N-1$. Далее, знаковый множитель равен

$$\delta_{\mathcal{P}} = (\pm)^{r-1} \delta_{\bar{\mathcal{P}}},$$

где верхний и нижний знаки относятся соответственно к бозонам и фермионам. Отсюда, второй раз используя (4.1.7), получаем:

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, a(q)\Phi_{q_1 \dots q_N} \right) &= \delta_{N, M+1} \sum_{r=1}^N \sum_{\mathcal{P}} (\pm)^{r-1} \delta_{\bar{\mathcal{P}}} \delta(q - q_r) \prod_{i=1}^M \delta(q'_i - q_{\bar{\mathcal{P}}_i}) \\ &= \delta_{N, M+1} \sum_{r=1}^N (\pm)^{r-1} \delta(q - q_r) \left(\Phi_{q'_1 \dots q'_M}, \Phi_{q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_N} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, обе части (4.2.3) имеют одинаковый матричный элемент с любым состоянием, и поэтому равны друг другу, что и требовалось доказать.)

Как частный случай (4.2.3), отметим, что и для бозонов, и для фермионов оператор $a(q)$, действуя на вакуум, дает нуль:

$$a(q)\Phi_0 = 0. \quad (4.2.4)$$

Так определенные операторы рождения и уничтожения удовлетворяют важным соотношениям коммутации или антикоммутации. Применяя оператор $a(q')$ к состоянию (4.2.1) и используя (4.2.3), получаем:

$$a(q')a^\dagger(q)\Phi_{q_1\dots q_N} = \delta(q' - q)\Phi_{q_1\dots q_N} + \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+2}\delta(q' - q_r)\Phi_{qq_1\dots q_{r-1}q_{r+1}\dots q_N}.$$

(Знак во втором слагаемом равен $(\pm)^{r+2}$, так как q_r находится на $(r+1)$ -м месте в $\Phi_{qq_1\dots q_N}$.) С другой стороны, применяя оператор $a^\dagger(q)$ к (4.2.3), находим:

$$a^\dagger(q)a(q')\Phi_{q_1\dots q_N} = \sum_{r=1}^N (\pm)^{r+1}\delta(q' - q_r)\Phi_{qq_1\dots q_{r-1}q_{r+1}\dots q_N}.$$

Вычитая или складывая, получаем

$$\left[a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') \right] \Phi_{q_1\dots q_N} = \delta(q' - q)\Phi_{q_1\dots q_N}.$$

Но это верно для всех состояний (и, как нетрудно показать, верно также для состояний, содержащих и бозоны, и фермионы). Поэтому отсюда вытекает операторное соотношение

$$a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') = \delta(q' - q). \quad (4.2.5)$$

Кроме того, из (4.2.2) немедленно следует, что

$$a^\dagger(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a^\dagger(q') = 0, \quad (4.2.6)$$

а также

$$a(q')a(q) \mp a(q)a(q') = 0. \quad (4.2.7)$$

Как всегда, верхний и нижний знаки относятся к бозонам и фермионам, соответственно. Согласно обсуждавшимся в предыдущем разделе условиям, операторы рождения и/или уничтожения для

частиц двух разных сортов коммутируют, если частицы — бозоны, и антикоммутируют, если обе частицы — фермионы.

Приведенные рассуждения можно воспроизвести в обратном порядке (и в большинстве учебников именно так и делается). Иными словами, можно было бы начать с коммутационных или антикоммутационных соотношений (4.2.5)–(4.2.7), выведенных путем канонического квантования некоторой полевой теории. Затем следовало бы с помощью (4.2.2) определить многочастичные состояния и из соотношений коммутации или антикоммутации вычислить их скалярные произведения (4.1.7). В сущности, как обсуждалось в гл. 1, такой подход был бы значительно ближе к тому, по которому исторически развивался этот формализм. Мы следуем не по историческому пути, так как хотим быть свободными от любой зависимости от существовавших до этого теорий поля и стремимся понять, почему эти теории такие, какие они есть.

Докажем теперь фундаментальную теорему, сформулированную в начале этой главы: *любой* оператор θ можно представить как сумму произведений операторов рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned} \theta = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M \\ \times a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) C_{NM}(q'_1 \dots q'_N q_1 \dots q_M). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Иными словами, мы хотим показать, что можно выбрать коэффициенты C_{NM} так, чтобы матричные элементы этого выражения приняли бы любое желаемое значение. Докажем это по индукции. Во-первых, тривиально доказываем, что при должном выборе C_{00} можно придать матричному элементу $(\Phi_0, \theta \Phi_0)$ любое значение, независимо от значений C_{NM} при $N > 0$ и/или $M > 0$. Для этого нужно только воспользоваться формулой (4.2.4) и убедиться, что среднее по вакууму от (4.2.8) равно

$$(\Phi_0, \theta \Phi_0) = C_{00}.$$

Предположим теперь, что это же верно для всех матричных элементов θ между N -частичными и M -частичными состояниями с $N < L$, $M \leq K$ или $N \leq L$, $M < K$. Иначе говоря, эти матричные

элементы получают определенные желаемые значения путем подходящего выбора соответствующих коэффициентов C_{NM} . Чтобы показать, что это же верно для матричных элементов θ между любыми L -частичными и K -частичными состояниями, используем (4.2.8) для вычисления матричного элемента

$$\begin{aligned} (\Phi_{q'_1 \dots q'_L}, O \Phi_{q_1 \dots q_K}) &= L! K! C_{LK}(q'_1 \dots q'_L q_1 \dots q_K) \\ &+ \text{слагаемые, содержащие } C_{NM} \text{ с } N < L, M \leq K, \text{ либо } N \leq L, M < K. \end{aligned}$$

Какие бы значения не имели коэффициенты C_{NM} с $N < L, M \leq K$ или $N \leq L, M < K$, ясно, что при определенном выборе C_{LK} этот матричный элемент может принять любое значение.

Конечно, оператор не обязательно должен иметь вид (4.2.8), где все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения. (Часто говорят, что в этом случае операторы записаны в *нормальном* порядке.) Однако, если в формуле для разложения какого-то оператора по операторам рождения и уничтожения они записаны в каком-то ином порядке, можно всегда с помощью многократного использования соотношений коммутации или антикоммутации перетащить операторы рождения налево от операторов уничтожения, приобретая за счет этого новые слагаемые от дельта-функции в (4.2.5).

Рассмотрим, например, аддитивный оператор Φ любого типа (импульс, заряд и т. п.), для которого

$$F \Phi_{q_1 \dots q_N} = (f(q_1) + \dots + f(q_N)) \Phi_{q_1 \dots q_N}. \quad (4.2.9)$$

Такой оператор можно записать в виде (4.2.8), используя только одно слагаемое с $N = M = 1$:

$$F = \int dq a^\dagger(q) a(q) f(q). \quad (4.2.10)$$

В частности, гамильтониан свободных частиц всегда имеет вид:

$$H_0 = \int dq a^\dagger(q) a(q) E(q), \quad (4.2.11)$$

где $E(q)$ — энергия отдельной частицы:

$$E(\mathbf{p}, \sigma, n) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}.$$

Нам потребуются свойства преобразования операторов рождения и уничтожения по отношению к различным симметриям. Во-первых, рассмотрим неоднородные собственные ортохронные преобразования Лоренца. Напомним, что под действием лоренцовских преобразований N -частичные состояния преобразуются по закону:

$$U_0(\Lambda, \alpha) \Phi_{\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2, \dots} = e^{-i(\Lambda p_1) \cdot \alpha} e^{-i(\Lambda p_2) \cdot \alpha} \dots \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \dots}{p_1^0 p_2^0 \dots}} \\ \times \sum_{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \dots} D_{\bar{\sigma}_1 \sigma_1}^{(j_1)}(W(\Lambda, p_1)) D_{\bar{\sigma}_2 \sigma_2}^{(j_2)}(W(\Lambda, p_2)) \dots \Phi_{\mathbf{p}_{1\Lambda} \bar{\sigma}_1 n_1, \mathbf{p}_{2\Lambda} \bar{\sigma}_2 n_2, \dots}$$

Здесь \mathbf{p}_Λ — трехмерная часть Λp , $D_{\sigma\sigma}^{(j)}(R)$ — то же самое унитарное представление со спином j трехмерной группы вращений, которое использовалось в разделе 2.5, а $W(\Lambda, p)$ — специальное вращение

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p),$$

где $L(p)$ — стандартный «буст», переводящий частицу массой m из системы, где она покоится, в систему, где она имеет 4-импульс p^μ . (Конечно, m и j зависят от индекса сорта частиц n . Все это относится к случаю $m \neq 0$; безмассовые частицы мы обсудим в следующей главе.) Эти состояния можно записать, как в (4.2.2), в виде

$$\Phi_{\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2, \dots} = a^\dagger(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) \dots \Phi_0,$$

где Φ_0 — лоренц-инвариантное вакуумное состояние,

$$U_0(\Lambda, \alpha) \Phi_0 = \Phi_0.$$

Для того, чтобы состояние (4.2.2) преобразовывалось должным образом, необходимо и достаточно, чтобы оператор рождения преобразовывался по правилу:

$$U_0(\Lambda, \alpha) a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, \alpha) = e^{-i(\Lambda p) \cdot \alpha} \sqrt{(\Lambda p)^0 / p^0} \times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda \sigma n). \quad (4.2.12)$$

Аналогично можно установить, что под действием операторов \mathbf{C} , \mathbf{P} и \mathbf{T} , реализующих преобразования зарядового сопряжения, пространственной инверсии и обращения времени на состояниях свободных частиц *, операторы рождения преобразуются по законам:

$$\mathbf{C} a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n) \mathbf{C}^{-1} = \xi_n a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n^c), \quad (4.2.13)$$

$$\mathbf{P} a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n) \mathbf{P}^{-1} = \eta_n a^\dagger(-\mathbf{p}\sigma n), \quad (4.2.14)$$

$$\mathbf{T} a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n) \mathbf{T}^{-1} = \zeta_n (-1)^{j-\sigma} a^\dagger(-\mathbf{p} -\sigma n), \quad (4.2.15)$$

Как отмечалось в предыдущем разделе, хотя мы и рассматривали операторы, рождающие и уничтожающие частицы в свободном состоянии, весь формализм может быть применен к ин- и аут-состояниям. В этом случае можно ввести операторы a_{in} и a_{out} , действие которых на такие состояния определяется совершенно аналогично. Эти операторы подчиняются закону лоренцовских преобразований вида (4.2.12), но с заменой оператора преобразования $U_0(\Lambda, a)$ свободных частиц на истинный оператор лоренцовского преобразования $U(\Lambda, a)$.

4.3. Кластерное разложение и связанные амплитуды

Одним из самых фундаментальных принципов физики (а, может быть, и всей науки) является утверждение, что результа-

* Мы опустили индекс 0 у этих операторов, так как практически во всех случаях, когда \mathbf{C} , \mathbf{P} и/или \mathbf{T} сохраняются, операторы, реализующие эти преобразования на «ин» или «аут» состояниях, совпадают с операторами, определенными аналогично на состояниях свободных частиц. Для непрерывных преобразований Лоренца это не так, и следует различать операторы $U(\Lambda, a)$ и $U_0(\Lambda, a)$.

ты экспериментов, выполненных на достаточном удалении друг от друга, являются независимыми. Вероятности различных соударений, измеренные в Лаборатории им. Э. Ферми, не должны зависеть от того, какие эксперименты в это время проводятся в ЦЕРНе. Если этот принцип неверен, мы никогда не смогли бы предсказать результаты какого-либо эксперимента, не зная все про всю Вселенную.

В теории S -матрицы принцип кластерного разложения утверждает, что если многочастичные процессы $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$, $\alpha_2 \rightarrow \beta_2$, ..., $\alpha_i \rightarrow \beta_i$ изучаются в A удаленных друг от друга лабораториях, то элемент S -матрицы для всего процесса факторизуется. Иначе говоря *,

$$S_{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_i, \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_i} \rightarrow S_{\beta_1\alpha_1} S_{\beta_2\alpha_2} \dots S_{\beta_i\alpha_i}, \quad (4.3.1)$$

если для всех $i \neq j$ все частицы в состояниях α_i и β_j находятся на большом пространственном удалении от всех частиц в состояниях α_j и β_i . Такая факторизация элементов S -матрицы обеспечит факторизацию соответствующих вероятностей переходов, отвечающих нескоррелированным экспериментальным результатам.

Существует комбинаторный трюк, позволяющий более наглядно записать формулу (4.3.1).

Определим связную часть S -матрицы $S_{\beta\alpha}^C$ формулой:

$$S_{\beta\alpha}^C = \sum_{\text{PART}} (\pm) S_{\beta_1\alpha_1}^C S_{\beta_2\alpha_2}^C \dots \quad (4.3.2)$$

Здесь сумма берется по всем различным способам разбиения частиц в состоянии α на кластеры $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, и частиц в состоянии β на кластеры β_1, β_2, \dots , причем не считаются различными разбиения, отличающиеся только порядком частиц внутри данного кластера или перестановкой самих кластеров. Знак $+$ или $-$ соответствует тому, совершается ли при перегруппировках $\alpha \neq \alpha_1\alpha_2\dots$ и $\beta \neq \beta_1\beta_2\dots$ четное или нечетное число перестановок фермионов. Термин *связная часть* соответствует обсуждаемой в следующем разделе интерпретации на языке фейнмановских диаграмм, представляющих

* Мы возвращаемся здесь к обозначениям гл. 3. Греческие буквы α и β отвечают множеству частиц с указанием значений импульса, спина и сорта каждой частицы. Кроме того, сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$ обозначает состояние, образованное комбинацией всех частиц в состояниях $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ (аналогично $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_i$).

разные вклады в ряд теории возмущений *.

Данное определение является рекуррентным. Для каждого α и β сумма в правой части (4.3.2) содержит слагаемое $S_{\beta\alpha}^C$ и сумму Σ' произведений двух и более элементов S^C -матрицы с полным числом частиц в каждом состоянии α_i и β_j , которое меньше числа частиц в состояниях α и β :

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^C + \sum_{\text{PART}} (\pm) S_{\beta_1\alpha_1}^C S_{\beta_2\alpha_2}^C \dots$$

Предположим, что элементы S^C -матрицы в этой сумме уже выбраны так, что формула (4.3.2) удовлетворяется для состояний β , α , содержащих вместе меньше, чем, скажем, N частиц. Тогда, независимо от того, какие значения элементов S -матрицы в сумме Σ' получены таким способом, всегда можно выбрать оставшееся слагаемое $S_{\beta\alpha}^C$ так, чтобы формула (4.3.2) выполнялась для состояний α , β , содержащих всего N частиц **. Таким образом,

* Это разложение было использовано Урселлом, Майером и др. в классической статистической механике, и Ли, Янгом и др.³ в квантовой статистической механике. Кроме того, Голдстоун⁴ и Гугенгольц⁵ применяли его для вычисления энергий многочастичных основных состояний. Во всех этих приложениях целью выделения связанных частей функций Грина, функций распределения, резольвент и т. п. является желание иметь дело с объектами, простым образом зависящими от объема. Эта цель совпадает и с нашей, поскольку ниже будет показано, что ключевым свойством связанных частей S -матрицы является то, что они пропорциональны единственной дельта-функции сохранения импульса, а в ящике дельта-функция превращается в кронекеровский дельта-символ, умноженный на объем. Формально кластерное разложение похоже на то, которое используется в теории шума⁶ для разложения корреляционной функции нескольких случайных переменных на «кумулянты». Если случайная переменная получает вклады от большого числа N независимых флуктуаций, то каждый кумулянт пропорционален N .

** Следует отметить техническую деталь. Рассуждение верно только в том случае, когда мы пренебрегаем возможностью, что для одного или более связанных элементов S -матрицы в (4.3.2) состояния α_j и β_j оба вообще не содержат частиц. Поэтому мы должны определить связанный элемент между состояниями вакуума $S_{0,0}^C$ равным нулю. Мы не используем формулу (4.3.2) для матричного элемента S -матрицы между состояниями вакуума $S_{0,0}$, который в отсутствие меняющихся во времени внешних полей просто определяется равным единице, $S_{0,0} = 1$. Мы расскажем несколько больше об амплитудах перехода вакуум-вакуум во внешних полях в т. II.

формула (4.3.2) не содержит никакой информации. Это есть просто определение S^C .

Если каждое из состояний α и β является одночастичным с квантовыми числами q и q' , соответственно, то единственным остающимся в правой части (4.3.2) слагаемым будет $S_{\beta\alpha}^C$, так что для одночастичных состояний

$$S_{q'q}^C \equiv S_{q'q} = \delta(q' - q). \quad (4.3.3)$$

(Если не считать возможных вырождений, пропорциональность $S_{q'q}$ дельта-функции $\delta(q - q')$ следует из законов сохранения. Отсутствие в (4.3.3) какого-то коэффициента пропорциональности связано с подходящим выбором относительной фазы «ин» и «аут» состояний.) Мы предполагаем здесь, что одночастичные состояния стабильны, так что переходы между этими состояниями и любыми другими, например, вакуумным, отсутствуют.

Для переходов между двухчастичными состояниями формула (4.3.2) принимает вид

$$S_{q'_1q'_2, q_1q_2} = S_{q'_1q'_2, q_1q_2}^C + \delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2) \pm \delta(q'_1 - q_2)\delta(q'_2 - q_1). \quad (4.3.4)$$

(Здесь использована формула (4.3.3)). Знак «минус» берется в случае, если обе частицы – фермионы, во всех остальных случаях берется знак «плюс». Обратим внимание, что слагаемые с двумя дельта-функциями просто добавляются к норме (4.1.6), так что $S_{\beta\alpha}^C$ в этом случае равна $(S - 1)_{\beta\alpha}$.

Общий случай более сложен.

Для переходов между трехчастичными состояниями формула (4.3.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{q'_1q'_2q'_3, q_1q_2q_3} &= S_{q'_1q'_2q'_3, q_1q_2q_3}^C \\ &+ \delta(q'_1 - q_1)S_{q'_2q'_3, q_2q_3}^C \pm \text{перестановки} \\ &\delta(q'_1 - q_1)\delta(q'_2 - q_2)\delta(q'_3 - q_3) \pm \text{перестановки}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

В случае же четырехчастичных состояний

$$\begin{aligned}
S_{q'_1 q'_2 q'_3 q'_4, q_1 q_2 q_3 q_4} &= S_{q'_1 q'_2 q'_3 q'_4, q_1 q_2 q_3 q_4}^C \\
&+ S_{q'_1 q'_2, q_1 q_2}^C S_{q'_3 q'_4, q_3 q_4}^C \pm \text{перестановки} \\
&+ \delta(q'_1 - q_1) S_{q'_2 q'_3 q'_4, q_2 q_3 q_4}^C \pm \text{перестановки} \\
&\delta(q'_1 - q_1) \delta(q'_2 - q_2) S_{q'_3 q'_4, q_3 q_4}^C \pm \text{перестановки} \\
&\delta(q'_1 - q_1) \delta(q'_2 - q_2) \delta(q'_3 - q_3) \delta(q'_4 - q_4) \pm \text{перестановки}.
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

(Учитывая все перестановки, всего получаем $1 + 9 + 6 = 16$ слагаемых в (4.3.5) и $1 + 18 + 16 + 72 + 24 = 131$ слагаемое в (4.3.6). Если отказаться от предположения о стабильности одночастичных состояний, число слагаемых станет еще больше.) Как объяснено выше, определение является рекуррентным: мы используем (4.3.4), определяя $S_{\beta\alpha}^C$ для двухчастичных состояний, затем используем это определение в (4.3.5), где определяются $S_{\beta\alpha}^C$ для трехчастичных состояний, наконец, используем оба эти определения в (4.3.6), где определяются $S_{\beta\alpha}^C$ в случае четырехчастичных состояний, и т. д.

Суть такого определения связной части S -матрицы заключается в том, что принцип кластерного разложения эквивалентен требованию обращения в нуль $S_{\beta\alpha}^C$, если одна или более частиц в состояниях β и/или α находятся на большом расстоянии от других частиц*.

Чтобы увидеть это, предположим, что частицы в состояниях β и α сгруппированы в кластеры β_1, β_2, \dots и $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, и что все частицы из набора $\alpha_i + \beta_i$ находятся на большом расстоянии от всех частиц из набора $\alpha_j + \beta_j$ для всех $j \neq i$. Тогда, если $S_{\beta'\alpha'}^C$ обращается в нуль, когда любые частицы в β' и α' далеки друг от друга, этот матричный элемент обращается в нуль, если любые частицы в указанных состояниях принадлежат разным кластерам, так что из определения (4.3.2) следует

$$S_{\beta\alpha} \rightarrow \sum^{(1)} (\pm) S_{\beta_{11}\alpha_{11}}^C S_{\beta_{12}\alpha_{12}}^C \dots \times \sum^{(2)} (\pm) S_{\beta_{21}\alpha_{21}}^C S_{\beta_{22}\alpha_{22}}^C \dots \times \dots, \tag{4.3.7}$$

* Чтобы придать смысл словам «на большом расстоянии», следует осуществить фурье-преобразование S^C , так что каждая метка \mathbf{p} трехмерного импульса заменяется трехмерным вектором координаты \mathbf{x} .

где $\sum^{(j)}$ – сумма по всем разным способам разбиения кластеров β_j и α_j на субкластеры $\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots$ и $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots$. Возвращаясь назад к (4.3.2), видим, что это и есть желаемое свойство факторизации (4.3.1).

Например, предположим, что в четырехчастичной реакции вида $1234 \neq 1'2'3'4'$ частицы 1, 2, 1' и 2' находятся очень далеко от частиц 3, 4, 3' и 4'. Тогда, если $S_{\beta\alpha}^C$ обращается в нуль, когда любые частицы в β и/или α далеки от других частиц, единственные остающиеся в (4.3.6) слагаемые (в еще более компактных обозначениях) имеют вид:

$$\begin{aligned} S_{1'2'3'4',1234} &\rightarrow S_{1'2',12}^C S_{3'4',34}^C \\ &+ (\delta_{1'1}\delta_{2'2} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1}) S_{3'4',34}^C \\ &+ (\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3}) S_{1'2',12}^C \\ &+ (\delta_{1'1}\delta_{2'2} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1})(\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3}). \end{aligned}$$

Сравнение с (4.3.4) показывает, что это и есть требуемое свойство факторизации (4.3.1):

$$S_{1'2'3'4',1234} \rightarrow S_{1'2',12}^C S_{3'4',34}^C.$$

Мы сформулировали принцип кластерного разложения в координатном пространстве как условие обращения в нуль $S_{\beta\alpha}^C$, если любые частицы в состояниях β или α находятся далеко от любых других частиц. Для дальнейшего удобно переформулировать это в импульсном пространстве. Пространственные матричные элементы определены как фурье-образы

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\dots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\dots}^C &\equiv \int d^3\mathbf{p}'_1 d^3\mathbf{p}'_2 \dots d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \dots S_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\dots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots}^C \\ &\times e^{i\mathbf{p}'_1\cdot\mathbf{x}'_1} e^{i\mathbf{p}'_2\cdot\mathbf{x}'_2} \dots e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2}. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

(Мы временно опустили спиновые индексы и метки сортов частиц, которые сопровождают пространственные или импульсные индексы.) Если величины $|S_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\dots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots}^C|$ ведут себя достаточно хорошо (точнее, если они интегрируемы по Лебегу), то согласно теореме Римана–Лебега ⁷ интеграл (4.3.8) должен обращаться в нуль, если

любая комбинация пространственных координат стремится к бесконечности.

На самом деле, это слишком сильное требование. Из трансляционной инвариантности следует, что связная часть S -матрицы, как и сама S -матрица, может зависеть только от разностей векторов координат и поэтому вообще не изменяется, если все x_i и x'_j изменяются совместно, так что их разность остается постоянной. Отсюда вытекает, что элементы S^C в импульсном пространстве, как и аналогичные элементы S , должны быть пропорциональны трехмерной дельта-функции, обеспечивающей сохранение импульса (в результате чего $|S^C_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots}|$ становится *неинтегрируемой* по Лебегу), а также дельта-функции, отвечающей закону сохранения энергии. Таким образом, можно записать:

$$S^C_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots} = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \dots - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \dots) \times \delta(E'_1 + E'_2 + \dots - E_1 - E_2 - \dots) C_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots} \quad (4.3.9)$$

Казалось бы, нет никаких проблем: принцип кластерного разложения требует лишь, чтобы величина (4.3.8) обращалась в нуль, когда *разности* некоторых координат \mathbf{x}_i и/или \mathbf{x}'_j становятся большими. Однако если сама величина C в (4.3.9) содержит дополнительные дельта-функции от линейных комбинаций трехмерных импульсов, этот принцип не будет удовлетворяться.

Например, пусть в C имеется дельта-функция, требующая, чтобы сумма \mathbf{p}'_j и $-\mathbf{p}_i$ обращалась бы в нуль для некоторого подмножества частиц. Тогда выражение (4.3.8) не будет изменяться, если все \mathbf{x}'_i и \mathbf{x}_j для частиц в этом подмножестве будут изменяться с постоянной разностью и удаляться от всех других значений \mathbf{x}'_k и \mathbf{x}_l , что противоречит принципу кластерного разложения. Грубо говоря, этот принцип утверждает, что *в отличие от самой S -матрицы ее связная часть содержит только одну дельта-функцию закона сохранения импульса.*

Чтобы сделать это утверждение более точным, можно сказать, что коэффициентная функция в (4.3.9) является гладкой функцией своих импульсных меток. Но насколько гладкой? Проще всего было бы потребовать, чтобы $C_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots}$ была аналитической функцией всех импульсов при $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \dots = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \dots = 0$. Такое требование действительно гарантировало бы, что $C_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots}$ экспо-

ненциально быстро убывает, если любые \mathbf{x} и \mathbf{x}' очень далеки от любых других \mathbf{x} и \mathbf{x}' . Однако экспоненциальное убывание S^C не является существенной частью принципа кластерного разложения, а требование аналитичности выполняется не во всех теориях. Особенно это проявляется в теориях с безмассовыми частицами, где S^C может иметь полюса при определенных значениях \mathbf{p} и \mathbf{p}' .

Например, как будет видно в гл. 10, если безмассовая частица может испускаться в переходе $1 \rightarrow 3$ и поглощаться в переходе $2 \rightarrow 4$, $S_{34,12}^C$ будет содержать слагаемое, пропорциональное множителю $1/(p_1 - p_3)^2$. После преобразования Фурье такие полюсы породят в $S_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots}^C$ слагаемые, убывающие лишь как отрицательная степень разности координат¹. Нет нужды формулировать принцип кластерного разложения столь жестко, чтобы исключить подобное поведение. Таким образом, условие «гладкости» S^C следует понимать так, что допускаются различные полюсы и разрезы при определенных значениях \mathbf{p} и \mathbf{p}' , но не столь серьезные сингулярности, как дельта-функции.

4.4. Структура взаимодействия

Зададимся вопросом, какого типа гамильтониан приводит к S -матрице, удовлетворяющей принципу кластерного разложения. Именно здесь полностью раскрывает свои возможности формализм операторов рождения и уничтожения. Ответ может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

S -матрица удовлетворяет принципу кластерного разложения, если (и насколько я знаю, только если) гамильтониан может быть записан в виде разложения (4.2.8):

$$H = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M \times a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) h_{NM}(q'_1 \dots q'_N, q_1 \dots q_M), \quad (4.4.1)$$

где коэффициентные функции h_{NM} содержат *единственную* дельта-функцию закона сохранения трехмерного импульса (мы на короткое время используем более развернутые обозначения):

На правах рукописи. Экземпляр Л. М. Лапиной для личного пользования

$$\begin{aligned}
& h_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots \mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots \mathbf{p}_M \sigma_M n_M) \\
&= \delta^3(p'_1 + \dots + p'_N - p_1 - \dots - p_M) \\
&\times \tilde{h}_{NM}(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots \mathbf{p}'_N \sigma'_N n'_N, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots \mathbf{p}_M \sigma_M n_M),
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

причем \tilde{h}_{NM} не содержит дельта-функций. Подчеркнем, что формула (4.4.1) сама по себе бессодержательна — мы видели в разделе 4.2, что *любой* оператор можно представить в такой форме. Только когда формула (4.4.1) объединяется с требованием, что коэффициентные функции h_{NM} содержат единственную дельта-функцию, выписанную в (4.4.2), можно гарантировать, что S -матрица удовлетворяет принципу кластерного разложения.

Справедливость этой теоремы в рамках теории возмущений станет очевидной, когда мы в гл. 6 разовьем формализм фейнмановских диаграмм. Доверчивый читатель может предпочесть пропустить остаток данной главы и перейти к рассмотрению приложений этой теоремы в гл. 5. Однако доказательство содержит ряд поучительных моментов и поможет понять, в каком смысле теория поля, обсуждаемая в следующей главе, является неизбежной.

Для доказательства теоремы используем теорию возмущений в форме, явно зависящей от времени. (Одним из преимуществ зависящей от времени теории возмущений является то, что намного яснее становится содержащаяся в формулировке принципа кластерного разложения комбинаторика; если E — сумма энергий отдельных частиц, то e^{-iEt} есть произведение функций от отдельных энергий, в то время как для $(E - E_\alpha + i\epsilon)^{-1}$ это неверно.) Формула (3.5.10) определяет S -матрицу в виде *

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1), \dots, V(t_n)\} \Phi_\alpha), \tag{4.4.3}$$

где функция Гамильтона разделяется на функцию Гамильтона свободных частиц H_0 и взаимодействие V , причем

* Мы принимаем соглашение, что для $n = 0$ хронологическое произведение в (4.4.3) рассматривается как единичный оператор, так что слагаемое с $n = 0$ в сумме просто соответствует слагаемому $\delta(\beta - \alpha)$ в $S_{\beta\alpha}$.

$$V(t) \equiv \exp(iH_0 t)V \exp(-iH_0 t). \quad (4.4.4)$$

Состояния Φ_α и Φ_β можно представить, как и в (4.2.2), в виде произведения операторов рождения, действующих на вакуум Φ_0 , а оператор $V(t)$ сам есть сумма произведений операторов рождения и уничтожения, так что каждое слагаемое в сумме (4.4.3) можно записать как сумму средних по вакууму от произведений операторов рождения и уничтожения. Используя соотношения коммутации или антикоммутации (4.2.5), можно переместить по очереди каждый оператор уничтожения направо, так, чтобы он оказался правее всех операторов рождения. При каждой перестановке оператора уничтожения правее оператора рождения возникают два слагаемых, что видно, если записать (4.2.5) как

$$a(q')a^\dagger(q) = \pm a^\dagger(q)a(q') + \delta(q' - q).$$

Перемещение других операторов рождения правее оператора уничтожения в первом слагаемом порождает все больше новых слагаемых. Однако из формулы (4.2.4) следует, что любой оператор уничтожения, переместившийся до конца направо, действует на Φ_0 , что дает нуль, так что в конце концов останутся только слагаемые с дельта-функциями. Таким образом, среднее по вакууму от произведения операторов рождения и уничтожения дается суммой различных слагаемых, каждое из которых равно произведению дельта-функций и знаков \pm , происходящих от коммутаторов или антикоммутаторов. Отсюда следует, что каждое слагаемое в (4.4.3) можно представить как сумму членов, каждый из которых является произведением дельта-функций и знаков \pm , происходящих от коммутаторов или антикоммутаторов, а также тех множителей, которые вносят операторы $V(t)$, проинтегрированным по всем временам, а также проинтегрированным и просуммированным по импульсам, спинам и сортам частиц в аргументах дельта-функций.

Каждое возникающее таким образом слагаемое можно символически изобразить в виде диаграммы. (Это еще не полный формализм диаграмм Фейнмана, поскольку мы еще не собираемся сопоставлять элементам диаграмм конкретные числовые величины. В данном контексте мы используем диаграммы только как способ проследить за возникающими дельта-функциями от 3-импульсов.) Нарисуем n точек, называемых *вершинами*, по одной для каждого

оператора $V(t)$. Для каждой дельта-функции, возникающей при протаскивании оператора уничтожения, находящегося в одном из операторов $V(t)$, направо через оператор рождения, отвечающий состоянию Φ_α , нарисуем линию, идущую снизу и входящую в соответствующую вершину диаграммы. Для каждой дельта-функции, возникающей при протаскивании оператора уничтожения, отвечающего состоянию, сопряженному конечному состоянию Φ_β , направо через оператор рождения в одном из операторов $V(t)$, нарисуем линию, исходящую из соответствующей вершины и идущую вверх. Для каждой дельта-функции, возникающей при протаскивании оператора уничтожения из одного $V(t)$ через оператор рождения в другом $V(t)$, нарисуем линию между соответствующими вершинами. Наконец, для каждой дельта-функции, получающейся при протаскивании оператора уничтожения, отвечающего сопряженному конечному состоянию, через оператор рождения в начальном состоянии, нарисуем линию, идущую снизу вверх прямо сквозь диаграмму. Каждая из дельта-функций, связанных с одной из этих линий, выражает равенство импульсов пары операторов рождения и уничтожения, отвечающих этой линии. Кроме того, есть по крайней мере одна дельта-функция, которую вносит каждая из вершин и которая выражает сохранение полного 3-импульса в вершине.

Подобная диаграмма либо связна (каждая точка связана с другой точкой системой линий), либо несвязна, но может быть разбита на некоторое число связных кусков. Оператор $V(t)$, ассоциированный с вершиной в какой-то связной компоненте диаграммы, фактически коммутирует с оператором $V(t)$, ассоциированным с любой вершиной в любой другой связной компоненте, поскольку для такой диаграммы отсутствуют какие-либо члены, отвечающие тому, что оператор уничтожения в одной вершине уничтожает частицу, порожденную оператором рождения в другой вершине – в противном случае эти две вершины оказались бы в одной связной компоненте. Итак, матричный элемент в (4.4.3) можно выразить как сумму произведений вкладов от каждой связной компоненты диаграммы:

$$\begin{aligned} & (\Phi_\beta, T\{V(t_1), \dots, V(t_n)\} \Phi_\alpha) \\ &= \sum_{\substack{\text{разбиение} \\ \text{на кластеры}}} (\pm) \prod_{j=1}^v (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j1}), \dots, V(t_{jn})\} \Phi_{\alpha_j})_C. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Здесь сумма берется по всем способам разбиения начальных и конечных частиц и операторов $V(t)$ на ν кластеров (включая сумму по ν от 1 до n). Каждый j -ый кластер включает n_j операторов $V(t_{j1}), \dots, V(t_{jn})$ и некоторые подмножества начальных частиц α_j и конечных частиц β_j . Конечно, это означает, что

$$n = n_1 + \dots + n_\nu,$$

а также что множество α есть объединение всех частиц в подмножествах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$, и аналогично для конечного состояния. В некоторых кластерах в (4.4.5) может вообще не быть вершин, т. е. $n_j = 0$. Тогда необходимо, чтобы соответствующий множитель в матричном элементе (4.4.5) обращался в нуль всегда, кроме случая, когда β_j и α_j являются одночастичными состояниями (и тогда сам множитель есть просто дельта-функция $\delta(\alpha_j - \beta_j)$), так как единственные связные диаграммы без вершин имеют вид прямых линий, идущих снизу вверх через всю диаграмму. Самое важное: индекс C в (4.4.5) означает, что мы исключаем любые вклады, соответствующие несвязным диаграммам, т. е. такие вклады, в которых какой-то оператор $V(t)$ или любая начальная или конечная частица не связана с каждой другой последовательностью рождений и уничтожений частиц.

Подставим теперь (4.4.5) в сумму (4.4.3). Интеграл по каждой временной переменной берется в пределах от $-\infty$ до ∞ , так что не имеет значения, как переменные t_1, t_2, \dots, t_n рассортированы по кластерам. Сумма по разбиениям на кластеры дает множитель $n!/n_1!n_2!\dots n_\nu!$, равный числу способов разбиения n вершин на ν кластеров, в каждом из которых содержится n_1, n_2, \dots вершин:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_\beta, T\{V(t_1), \dots, V(t_n)\} \Phi_\alpha) \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_\nu!} \sum_{\text{PART}} (\pm) \sum_{\substack{n_1 \dots n_\nu \\ n_1 + \dots + n_\nu = n}} \prod_{j=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j1} \dots dt_{jn_j} \\ & \times (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j1}), \dots, V(t_{jn_j})\} \Phi_{\alpha_j})_C. \end{aligned}$$

Первая сумма здесь берется по всем способам разбиения частиц в начальном и конечном состояниях на кластеры $\alpha_1 \dots \alpha_\nu$ и $\beta_1 \dots \beta_\nu$ (включая сумму по числу кластеров ν). Множитель $n!$ сокращается с множителем $1/n!$ в (4.4.3), а множитель $(-i)^n$ в ряде теории возмущений (4.4.5) можно записать как произведение $(-i)^{n_1} \dots (-i)^{n_\nu}$, так что вместо суммирования по n и последующего отдельного суммирования по n_1, \dots, n_ν , ограниченного условием $n_1 + \dots + n_\nu = n$, можно просто независимо суммировать по n_1, \dots, n_ν . Окончательно

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{\text{PART}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n_j}}{n_j!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j1} \dots dt_{jn_j} (\Phi_{\beta_j}, T\{V(t_{j1}), \dots, V(t_{jn_j})\} \Phi_{\alpha_j})_C.$$

Сравнивая это выражение с определением (4.3.2) связанных матричных элементов, мы видим, что эти матричные элементы равны как раз множителям под знаком произведения:

$$S_{\beta\alpha}^C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n (\Phi_{\beta}, T\{V(t_1), \dots, V(t_n)\} \Phi_{\alpha})_C. \quad (4.4.6)$$

(Индекс j опущен у всех t и n , так как теперь это просто переменные интегрирования и суммирования.) Итак, $S_{\beta\alpha}^C$ вычисляется по очень простому рецепту: *эта величина есть сумма всех связанных вкладов в S -матрицу, т. е. отбрасываются все слагаемые, в которых любая начальная или конечная частица или любой оператор $V(t)$ не связаны со всеми другими некоторой последовательностью рождений и уничтожений частиц.* Этим объясняется прилагательное «связная» для матрицы S^C .

Как мы видели, в каждой вершине и вдоль каждой линии импульс сохраняется, поэтому он сохраняется по-отдельности и в связанных частях S -матрицы, т. е. $S_{\beta\alpha}^C$ содержит множитель $\delta^3(\mathbf{p}_{\beta} - \mathbf{p}_{\alpha})$. Мы хотим доказать, что $S_{\beta\alpha}^C$ не содержит других дельта-функций.

Предположим, что коэффициентные функции h_{NM} в разложении (4.4.1) функции Гамильтона по операторам рождения и уничтожения пропорциональны *единственной* трехмерной дельта-функции, обеспечивающей сохранение импульса. Это автоматически выполняется для свободной функции Гамильтона H_0 , и поэтому

в силу высказанного предположения верно и для оператора взаимодействия V . Возвращаясь к использованной выше графической интерпретации матричных элементов, это означает, что каждая вершина вносит одну трехмерную дельта-функцию. (Другие дельта-функции в матричных элементах $V_{\gamma\delta}$ просто сохраняют неизменным импульс любой частицы, не рождающейся и не уничтожающейся в соответствующей вершине.) Далее, наличие большей части этих дельта-функций сводится к фиксации импульсов промежуточных частиц. Единственные импульсы, остающиеся незафиксированными этими дельта-функциями, — это импульсы в петлях из внутренних линий. (Всякая линия, разрезание которой оставляет диаграмму несвязной, несет импульс, который фиксирован законом сохранения как некоторая линейная комбинация импульсов линий, входящих или выходящих из диаграммы. Если у диаграммы L линий, которые можно одновременно разрезать, и при этом сама диаграмма не становится несвязной, то говорят, что в диаграмме содержится L независимых петель и, соответственно, имеется L импульсов, не зафиксированных законом сохранения.) В диаграмме с V вершинами, I внутренними линиями и L петлями имеется V дельта-функций, из которых $I - L$ требуются для фиксации внутренних импульсов, а остающиеся $V - I + L$ дельта-функций связывают импульсы входящих и выходящих частиц. Однако хорошо известное топологическое тождество* утверждает, что для любой диаграммы, состоящей из C связных кусков, число вершин, внутренних линий и петель связано соотношением

$$V - I + L = C. \quad (4.4.7)$$

Отсюда в связном матричном элементе типа $S_{\beta\alpha}^C$, возникающим от диаграмм с $C = 1$, содержится только одна трехмерная дельта-функция $\delta^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)$, что и требовалось доказать.

* У диаграммы, состоящей из одной вершины, $V = 1$, $L = 0$ и $C = 1$. Если добавить $V - 1$ вершину с ровно таким количеством внутренних линий, чтобы диаграмма осталась связной, то $I = V - 1$, $L = 0$ и $C = 1$. Все добавочные внутренние линии, проведенные (без появления новых вершин) в той же связной диаграмме, дают равное количество петель, так что $I = V + L - 1$ и $C = 1$. Если несвязная диаграмма состоит из C таких связных частей, то суммы I , V и L от каждой связной части будут удовлетворять равенству $\sum I = \sum V + \sum L - C$.

В приведенном рассуждении было несущественно, что производится интегрирование по временным переменным от $-\infty$ до ∞ . Таким образом, можно использовать те же аргументы, чтобы показать, что, если коэффициенты $h_{N,M}$ в гамильтониане содержат ровно одну дельта-функцию, то $U(t, t_0)$ также можно разложить на связные части, в каждой из которых будет содержаться одна дельта-функция, выражающая закон сохранения импульса.

С другой стороны, связная часть S -матрицы содержит также дельта-функцию, отвечающую сохранению энергии. Когда в гл. 6 мы подойдем к диаграммам Фейнмана, будет видно, что $S_{\beta\alpha}^C$ содержит лишь одну дельта-функцию закона сохранения энергии $\delta(E_\beta - E_\alpha)$, в то время, как $U(t, t_0)$ вообще не содержит дельта-функций, отражающих закон сохранения энергии.

Следует подчеркнуть, что требование, чтобы h_{NM} в (4.4.1) содержало лишь одну дельта-функцию, отражающую закон сохранения трехмерного импульса, весьма нетривиально и приводит к далеко идущим выводам.

Например, предположим, что V имеет исчезающие матричные элементы между двухчастичными состояниями. Тогда в формуле (4.4.1) должно содержаться слагаемое с $N = M = 2$ и коэффициентом

$$v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) = V_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}. \quad (4.4.8)$$

(Мы временно опустили индексы спинов и сортов частиц). Но тогда матричный элемент взаимодействия между трехчастичными состояниями равен

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3} &= v_{3,3}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) \\ &+ v_{2,2}(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3) \pm \text{перестановки}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

В начале главы отмечалось, что можно попытаться построить релятивистскую квантовую теорию, не являющуюся теорией поля, выбрав $v_{2,2}$ так, чтобы двухчастичная S -матрица была лоренц-инвариантной, и подобрав оставшийся гамильтониан так, чтобы в состояниях с тремя или более частицами не было рассеяния. Поэтому следует выбрать $v_{3,3}$ так, чтобы сократить другие слагаемые в (4.4.9):

$$v_{3,3}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3) = -v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)\delta^3(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3) \mp \text{перестановки.} \quad (4.4.10)$$

Однако это означало бы, что каждое слагаемое в $v_{3,3}$ содержит два дельта-функционных множителя (напомним, что $v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)$ уже содержит множитель $\delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$), что нарушает принцип кластерного разложения. Итак, в теории, удовлетворяющей этому принципу, существование процессов рассеяния с участием двух частиц делает неизбежным существование процессов рассеяния с участием трех и более частиц.

* * *

Обращаясь к решению задач трех тел в квантовых теориях, удовлетворяющих принципу кластерного разложения, следует заметить, что слагаемое $v_{3,3}$ в формуле (4.4.9) не причиняет особого беспокойства, но дополнительные дельта-функции в других слагаемых осложняют непосредственное решение уравнения Липпмана–Швингера. Проблема заключается в том, что появление дельта-функций делает ядро $[E_\alpha - E_\beta + i\epsilon]^{-1}V_{\beta\alpha}$ этого уравнения квадратично неинтегрируемым, даже если исключить все дельта-функции, отражающие общий закон сохранения импульса. Как следствие, ядро нельзя аппроксимировать конечной матрицей даже очень большого ранга. Чтобы решить задачу взаимодействия трех или более частиц, необходимо заменить уравнение Липпмана–Швингера таким уравнением, которое содержало бы связную правую часть. Подобные уравнения для рассеяния трех или более частиц были построены ^{8,9}, и их удалось рекурсивно решить для ряда задач нерелятивистской теории рассеяния, но эти уравнения оказались мало пригодными в релятивистских теориях. Поэтому мы их здесь не будем рассматривать.

Такая переформулировка уравнения Липпмана–Швингера оказывается полезной в другом отношении. Наши рассуждения в этом разделе основывались на теории возмущений. Мне неизвестно какое-либо непertурбативное доказательство основной теоремы этого раздела. Однако было показано ⁹, что переформулированные непertурбативные динамические уравнения *совместимы* с требованием, что $U^C(t, t_0)$ (а следовательно и S^C) должны содержать требуемую

принципом кластерного разложения единственную дельта-функцию закона сохранения импульса, если только гамильтониан удовлетворяет условию, что каждая коэффициентная функция $h_{N,M}$ тоже содержит лишь одну такую дельта-функцию.

Задачи

1. Определим производящие функционалы для S -матрицы и ее связанной части:

$$F[v] \equiv 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{N!M!} \int v^*(q'_1) \dots v^*(q'_N) v(q_1) \dots v(q_M) \\ \times S_{q'_1 \dots q'_N, q_1 \dots q_M} dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M,$$

$$F^C[v] \equiv 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{N!M!} \int v^*(q'_1) \dots v^*(q'_N) v(q_1) \dots v(q_M) \\ \times S_{q'_1 \dots q'_N, q_1 \dots q_M}^C dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M.$$

Выведите формулу, связывающую $F[v]$ и $F^C[v]$. (Можно рассмотреть чисто бозонный случай.)

2. Рассмотрим взаимодействие

$$V = g \int d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \\ \times a^\dagger(\mathbf{p}_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2) a(\mathbf{p}_3) a(\mathbf{p}_4),$$

где g – действительная константа, а $a(\mathbf{p})$ – оператор уничтожения бесспиновой бозона массой $M > 0$. С помощью теории возмущений найдите матричный элемент S -матрицы для рассеяния этих частиц в с. ц. и. в порядке g^2 . Чему равно соответствующее дифференциальное сечение?

3. Когерентное состояние Φ_λ определяется как собственное состояние операторов уничтожения $a(q)$ с собственными значениями $\lambda(q)$. Постройте такие состояния как суперпозицию многочастичных состояний $\Phi_{q_1 q_2 \dots q_N}$.

Список литературы

1. Принцип кластерного разложения в квантовой теории поля, по-видимому, впервые был явно высказан в работе: Wichmann, E.H. and Crichton, J.H., *Phys. Rev.*, **132**, 2788 (1963).
2. См., например: Wakamijan, B. and Thomas, L.H., *Phys. Rev.*, **92**, 1300 (1953).
3. Ссылки можно найти в работе: Lee, T.D. and Yang, C.N., *Phys. Rev.*, **113**, 1165 (1959).
4. Goldstone, G., *Proc. Roy. Soc. London*, **A239**, 267 (1957).
5. Hugenholtz, N.M., *Physica*, **23**, 481 (1957).
6. См., например: Kubo, R., *J. Math. Phys.*, **4**, 174 (1963).
7. Titchmarsh, E.C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford University Press, Oxford, 1937), Section 1.8.
8. Faddeev, L.D., *Zh. Eksper. i Teor. Fiz.*, **39**, 1459 (1961); *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **138**, 565 (1961); **145**, 30 (1962).
9. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **133**, B232 (1964).

Квантовые поля и античастицы

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы обосновать введение квантовых полей.¹ В процессе этого построения мы увидим наиболее примечательные и универсальные следствия союза теории относительности с квантовой механикой: связь спина и статистики, существование античастиц, различные соотношения между частицами и античастицами, включая знаменитую *CPT*-теорему.

5.1. Свободные поля

В гл. 3 было показано, что если взаимодействие можно записать в виде

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t), \quad (5.1.1)$$

где \mathcal{H} — скаляр в том смысле, что

$$U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a), \quad (5.1.2)$$

удовлетворяющий дополнительному условию

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{для } (x - x')^2 \geq 0, \quad (5.1.3)$$

то S -матрица оказывается лоренц-инвариантной. Мы увидим далее, что существуют и более общие возможности, но все они мало отличаются от этой. (Оставляем пока что открытым вопрос,

ограничены ли преобразования Λ собственными ортохронными преобразованиями Лоренца, или они могут включать пространственные отражения.) Чтобы легче было удовлетворить принципу кластерного разложения, мы собираемся строить $\mathcal{H}(x)$ из операторов рождения и уничтожения. Однако здесь мы сталкиваемся с проблемой. Как следует из формулы (4.2.12), в результате преобразований Лоренца каждый такой оператор умножается на матрицу, зависящую от того импульса, который несет этот оператор. Как нужно объединять такие операторы, чтобы получить скаляр? Решение заключается в том, чтобы строить $\mathcal{H}(x)$ из *полей* уничтожения $\psi_l^+(x)$ и рождения $\psi_l^-(x)$:

$$\psi_l^+(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.4)$$

$$\psi_l^-(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.5)$$

с коэффициентами * $u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ и $v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$, выбранными так, чтобы под действием лоренцовских преобразований каждое поле умножалось бы на матрицу, не зависящую от координат:

$$U_0(\Lambda, a) \psi_l^+(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_l D_{ll}(\Lambda^{-1}) \psi_l^+(\Lambda x + a), \quad (5.1.6)$$

$$U_0(\Lambda, a) \psi_l^-(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_l D_{ll}(\Lambda^{-1}) \psi_l^-(\Lambda x + a). \quad (5.1.7)$$

(В принципе, можно было бы написать для полей уничтожения и рождения разные матрицы D^\pm , однако мы увидим, что всегда можно выбрать поля так, что эти матрицы будут одинаковыми.) Применяя вторично преобразование Лоренца $\bar{\Lambda}$, получаем

$$D(\Lambda^{-1}) D(\bar{\Lambda}^{-1}) = D((\bar{\Lambda}\Lambda)^{-1}),$$

так что, обозначив $\Lambda_1 = (\Lambda)^{-1}$ и $\Lambda_2 = (\bar{\Lambda})^{-1}$, видим, что D -матрицы реализуют *представление* однородной группы Лоренца:

* Напомним, что индексы n и σ нумеруют соответственно типы частиц и z -компоненты их спинов.

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2). \quad (5.1.8)$$

Существует много таких представлений, в том числе, скаляр $D(\Lambda) = 1$, вектор $D(\Lambda)^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu$ и уйма тензорных и спинорных представлений. Все они неприводимы в том смысле, что с помощью выбора базиса невозможно привести все $D(\Lambda)$ к одной и той же блочно-диагональной форме с двумя или более блоками. Однако мы пока что не требуем, чтобы $D(\Lambda)$ была неприводимой; в общем случае это блочно-диагональная матрица с произвольным набором неприводимых представлений в каждом блоке. Иными словами, индекс l включает метки, различающие типы описываемых частиц и неприводимые представления в разных блоках, а также индекс, нумерующий компоненты отдельных неприводимых представлений. Ниже мы разделим такие поля на неприводимые, так что каждое поле будет описывать один единственный сорт частиц (и античастиц) и преобразовываться по неприводимому представлению группы Лоренца.

Раз уж мы научились строить поля, удовлетворяющие законам преобразования Лоренца (5.1.6) и (5.1.7), то теперь можно построить и плотность гамильтониана взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) = & \sum_{NM} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \\ & \times \psi_{l'_1}^-(x) \dots \psi_{l'_N}^-(x) \psi_{l_1}^+(x) \dots \psi_{l_M}^+(x) \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

причем это выражение будет скаляром в смысле (5.1.2), если постоянные коэффициенты $g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M}$ выбраны лоренц-ковариантными, т. е. для всех Λ

$$\begin{aligned} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} D_{l'_1 \bar{l}'_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{l'_N \bar{l}'_N}(\Lambda^{-1}) D_{l_1 \bar{l}_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{l_M \bar{l}_M}(\Lambda^{-1}) \\ \times g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} = g_{\bar{l}'_1 \dots \bar{l}'_N, \bar{l}_1 \dots \bar{l}_M}. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

В принципе, задача нахождения коэффициентов $g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M}$, удовлетворяющих (5.1.10), ничем не отличается (и ничем не сложнее на практике) от использования коэффициентов Клебша-Гордана для объединения разных неприводимых представлений трехмерной группы вращений в скаляры по отношению к вращениям. Ниже мы

сумеем объединить поля уничтожения и рождения так, чтобы плотность гамильтониана коммутировала сама с собой в точках, разделенных пространственноподобным интервалом.

Как выбрать коэффициентные функции $u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ и $v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$? Уравнение (4.2.12) и сопряженное ему уравнение определяют законы преобразования * операторов уничтожения и рождения:

$$U_0(\Lambda, b)a(\mathbf{p}, \sigma, n)U_0^{-1}(\Lambda, b) = \exp(i(\Lambda p) \cdot b)\sqrt{(\Lambda p)^0 / p^0} \\ \times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p))a(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n), \quad (5.1.11)$$

$$U_0(\Lambda, b)a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)U_0^{-1}(\Lambda, b) = \exp(-i(\Lambda p) \cdot b)\sqrt{(\Lambda p)^0 / p^0} \\ \times \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)^*}(W^{-1}(\Lambda, p))a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n), \quad (5.1.12)$$

где j_n — спин частицы типа n , а \mathbf{p}_Λ — трехмерная компонента 4-вектора Λp . (Чтобы привести (5.1.11) и (5.1.12) к указанному виду, мы использовали условие унитарности матриц вращения $D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}$.) Кроме того, как мы видели в разделе 2.5, элемент объема d^3p/p^0 лоренц-инвариантен, так что можно заменить d^3p в формулах (5.1.4) и (5.1.5) на $d^3(\Lambda p)p^0/(\Lambda p)^0$. Объединяя все это, находим:

$$U_0(\Lambda, b)\psi_l^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, b) = \sum_{\sigma\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \\ \times \exp(i(\Lambda p) \cdot b)D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p))\sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} a(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) \\ U_0(\Lambda, b)\psi_l^-(x)U_0^{-1}(\Lambda, b) = \sum_{\sigma\bar{\sigma}n} \int d^3(\Lambda p) v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \\ \times \exp(-i(\Lambda p) \cdot b)D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)^*}(W^{-1}(\Lambda, p))\sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n).$$

Для того, чтобы поля удовлетворяли законам лоренцовских преобразований (5.1.6) и (5.1.7), необходимо и достаточно, чтобы

*Эти законы приведены для массивных частиц. Случай нулевой массы рассмотрен в разделе 5.9.

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n) \\ &= \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) \exp(+i(\Lambda p) \cdot b) u_{\bar{l}}(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}}(\Lambda^{-1}) v_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n) \\ &= \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)*}(W^{-1}(\Lambda, p)) \exp(-i(\Lambda p) \cdot b) v_{\bar{l}}(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n), \end{aligned}$$

или в несколько более удобной форме

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) \\ &= \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} \sum_l D_{\bar{l}}(\Lambda) \exp(i(\Lambda p) \cdot b) u_l(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n), \quad (5.1.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\Lambda x + b; \mathbf{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)*}(W(\Lambda, p)) \\ &= \sqrt{p^0 / (\Lambda p)^0} \sum_l D_{\bar{l}}(\Lambda) \exp(-i(\Lambda p) \cdot b) v_l(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n). \quad (5.1.14) \end{aligned}$$

Эти фундаментальные требования позволяют определить коэффициентные функции u_l и v_l через конечное число свободных параметров.

Мы используем формулы (5.1.13) и (5.1.14) в три этапа, рассматривая по очереди три разных типа собственных ортохронных преобразований Лоренца.

Трансляции

Сначала рассмотрим формулы (5.1.13) и (5.1.14) при $\Lambda = 1$ и произвольном b . Сразу получаем, что $u_l(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n)$ и $v_l(x; \mathbf{p}, \bar{\sigma}, n)$ имеют следующий вид:

$$u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) = (2\pi)^{-3/2} e^{ip \cdot x} u_l(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.15)$$

$$v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip \cdot x} v_l(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.16)$$

так что поля являются преобразованиями Фурье:

$$\Psi_l^+(x) = \sum_{\sigma, n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p u_l(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.17)$$

$$\Psi_l^-(x) = \sum_{\sigma, n} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p v_l(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \quad (5.1.18)$$

(Множители $(2\pi)^{-3/2}$ можно было бы включить в определение u_l и v_l , но принято выписывать их явно перед интегралами.) С учетом (5.1.15) и (5.1.16) получаем, что условия (5.1.13) и (5.1.14) удовлетворяются, если и только если для произвольного преобразования Лоренца Λ

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \sum_l D_{ll}(\Lambda) u_l(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (5.1.19)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(\mathbf{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*}(W(\Lambda, p)) = \sqrt{p^0/(\Lambda p)^0} \sum_l D_{ll}(\Lambda) v_l(\mathbf{p}, \sigma, n). \quad (5.1.20)$$

Бусты

Положим теперь $\mathbf{p} = 0$ в (5.1.19) и (5.1.20). Пусть Λ — стандартный буст $L(q)$, переводящий частицу массой m из состояния покоя в состояние с некоторым 4-импульсом q^μ . Тогда $L(p) = 1$ и

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) = L^{-1}(q) L(q) = 1.$$

Отсюда в этом частном случае из формул (5.1.19) и (5.1.20) получаем

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{q}, \sigma, n) = (m/q^0)^{1/2} \sum_l D_{ll}(L(q)) u_l(0, \sigma, n), \quad (5.1.21)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{q}, \sigma, n) = (m / q^0)^{1/2} \sum_l D_{\bar{l}l}(L(q)) v_l(0, \sigma, n). \quad (5.1.22)$$

Иными словами, если нам известны величины $u_l(0, \sigma, n)$ и $v_l(0, \sigma, n)$ для нулевого импульса, то для заданного представления $D(\Lambda)$ однородной группы Лоренца мы знаем и функции $u_l(\mathbf{p}, \sigma, n)$ и $v_l(\mathbf{p}, \sigma, n)$ для всех \mathbf{p} . (Явные выражения матриц $D_{\bar{l}l}(L(q))$ для произвольных представлений однородной группы Лоренца будут выписаны в разделе 5.7.)

Вращения

Далее, положим $\mathbf{p} = 0$, но будем теперь считать, что Λ — преобразование Лоренца с $\mathbf{p}_\Lambda = 0$. Иными словами, будем рассматривать Λ как чистое вращение R . Очевидно, что $W(\Lambda, p) = R$, так что формулы (5.1.19) и (5.1.20) принимают вид

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(0, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(R) = \sum_l D_{\bar{l}l}(R) u_l(0, \sigma, n), \quad (5.1.23)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(0, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*}(R) = \sum_l D_{\bar{l}l}(R) v_l(0, \sigma, n), \quad (5.1.24)$$

или эквивалентно

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{l}}(0, \bar{\sigma}, n) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)} = \sum_l \mathcal{J}_{\bar{l}l} u_l(0, \sigma, n), \quad (5.1.25)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{l}}(0, \bar{\sigma}, n) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*} = - \sum_l \mathcal{J}_{\bar{l}l} v_l(0, \sigma, n), \quad (5.1.26)$$

где $\mathbf{J}^{(j)}$ и \mathcal{J} — матрицы углового момента в представлениях $D^{(j)}(R)$ и $D(R)$, соответственно. Если Λ ограничены вращениями R , то любое представление $D(\Lambda)$ однородной группы Лоренца очевидно становится и представлением группы вращений. Тогда из формул (5.1.25) и (5.1.26) следует, что если поле $\Psi_l^\pm(x)$ должно описывать частицы

определенного спина j , то это представление $D(R)$ должно содержать среди своих неприводимых компонент отвечающее спину j представление $D^{(j)}(R)$, причем коэффициенты $u_i(0, \sigma, n)$ и $v_i(0, \sigma, n)$ описывают то, каким образом представление группы вращений со спином j погружено в $D(R)$.

В разделе 5.5 мы увидим, что каждое *неприводимое* представление собственной ортохронной группы Лоренца содержит любое заданное неприводимое представление группы вращений не более одного раза, так что если поля $\Psi_l^+(x)$ и $\Psi_l^-(x)$ преобразуются по неприводимому представлению, то они единственны с точностью до общего масштабного множителя. В более общей форме утверждается, что число свободных параметров в полях уничтожения или рождения (включая их общие масштабные множители) равно числу неприводимых представлений, входящих в поле.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что коэффициентные функции $u_i(\mathbf{p}, \sigma, n)$ и $v_i(\mathbf{p}, \sigma, n)$, определяемые формулами (5.1.21) и (5.1.22), причем $u_i(0, \sigma, n)$ и $v_i(0, \sigma, n)$ удовлетворяют соотношениям (5.1.23) и (5.1.24), автоматически удовлетворяют и более общим требованиям (5.1.19) и (5.1.20). Мы оставляем проверку этого утверждения читателю.

Вернемся к принципу кластерного разложения. Подставляя (5.1.17) и (5.1.18) в (5.1.9) и интегрируя по \mathbf{x} , находим, что гамильтониан взаимодействия равен

$$\begin{aligned}
 V = & \sum_{NM} \int d^3 \mathbf{p}'_1 \dots d^3 \mathbf{p}'_N d^3 \mathbf{p}_1 \dots d^3 \mathbf{p}_M \sum_{\sigma'_1 \dots \sigma'_N} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_M} \sum_{n'_1 \dots n'_N} \sum_{n_1 \dots n_M} \\
 & \times a^\dagger(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1) \dots a^\dagger(\mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N) a(\mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M) \dots a(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1) \\
 & \times \gamma_{NM}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1 \dots \mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N, \mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1 \dots \mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M),
 \end{aligned} \tag{5.1.27}$$

причем коэффициентные функции даются выражением

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{NM}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1 \dots, \mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1 \dots) \\
 & = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \dots - \mathbf{p}_1 - \dots) \bar{\gamma}_{NM}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1 \dots, \mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1 \dots),
 \end{aligned} \tag{5.1.28}$$

где

$$\begin{aligned}
& \tilde{Y}_{NM}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1 \dots \mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N, \mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1 \dots \mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M) \\
&= (2\pi)^{3-3N/2-3M/2} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} v_{l'_1}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1) \dots v_{l'_N}(\mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N) \\
& \quad \times u_{l_1}(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1) \dots u_{l_M}(\mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M). \quad (5.1.29)
\end{aligned}$$

Это взаимодействие имеет точно такую форму, которая гарантирует, что S -матрица удовлетворяет принципу кластерного разложения: Y_{NM} содержит единственную дельта-функцию, а коэффициент \tilde{Y}_{NM} имеет (по крайней мере в случае конечного числа сортов частиц) не более чем точки ветвления при нулевых импульсах частиц.

На самом деле, утверждение можно обратить. Всякий оператор можно представить в виде (5.1.27), и из принципа кластерного разложения вытекает, что коэффициент Y_{NM} можно записать в виде (5.1.28) как произведение единственной дельта-функции на гладкую коэффициентную функцию. Любая достаточно гладкая коэффициентная функция (не содержащая дополнительных дельта-функций) может быть записана в виде (5.1.29) *. *Итак, из принципа кластерного разложения совместно с лоренц-инвариантностью естественно вытекает, что плотность гамильтониана взаимодействия должна быть построена из полей рождения и уничтожения.*

Если бы все, что нам требуется, сводилось к построению скалярного гамильтониана взаимодействия, удовлетворяющего принципу кластерного разложения, то мы могли бы скомбинировать операторы уничтожения и рождения в произвольные полиномы (5.1.9), коэффициенты которых $g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M}$ подчинялись бы только условию инвариантности (5.1.10) (и подходящему условию действительности). Однако для лоренц-инвариантности S -матрицы необходимо также, чтобы гамильтониан взаимодействия удовлетворял коммутационному соотношению (5.1.3). Для произвольных функций от полей рождения и уничтожения это условие не выполняется, поскольку

*В общем случае индексы l и l' могут изменяться в бесконечных пределах. Ограничение конечным интервалом изменения l и l' связано с обсуждаемым в гл. 12 принципом перенормируемости.

$$\left[\psi_l^+(x), \psi_l^-(y) \right]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \sum_{\sigma n} \int d^3 p u_l(\mathbf{p}, \sigma, n) v_l^*(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot (x-y)} \quad (5.1.30)$$

(знак \mp соответствует выбору коммутатора или антикоммутатора, если частицы, уничтожаемые или рождаемые компонентами ψ_l^+ и ψ_l^- , являются бозонами или фермионами, соответственно), и в общем случае это выражение не обращается в нуль даже для пространственноподобных $x - y$. Очевидно, эту проблему не удастся разрешить, если построить плотность гамильтониана взаимодействия только из полей рождения или уничтожения по отдельности, так как в этом случае взаимодействие не будет эрмитовым. Единственный путь преодоления трудности — в том, чтобы образовать линейные комбинации полей рождения и уничтожения

$$\psi_l(x) \equiv \kappa_l \psi_l^+(x) + \lambda_l \psi_l^-(x), \quad (5.1.31)$$

подобрав константы κ и λ и любые другие произвольные константы в полях так, чтобы при пространственноподобных интервалах $x - y$

$$\left[\psi_l(x), \psi_{l'}(y) \right]_{\mp} = \left[\psi_l(x), \psi_{l'}^{\dagger}(y) \right]_{\mp} = 0. \quad (5.1.32)$$

Ниже в этой главе мы покажем, как это можно сделать для разных полей, преобразующихся по неприводимым представлениям. (Включив в явном виде константы κ и λ в (5.1.31), мы сохраняем свободу выбора общего масштабного множителя для полей рождения и уничтожения в любой удобной нам форме.) Плотность гамильтониана $\mathcal{H}(x)$ будет удовлетворять перестановочным соотношениям (5.1.3), если она будет построена из таких полей и им сопряженных, причем будет входить четное число любых компонент полей, уничтожающих и рождающих фермионы.

Условие (5.1.32) часто называют *условием причинности*, т. к. если $x - y$ является пространственноподобным интервалом, ни один сигнал из x не может попасть в y , и измерение ψ_l в точке x не может интерферировать с измерениями $\psi_{l'}$ или $\psi_{l'}^{\dagger}$ в точке y . Подобные соображения приемлемы для электромагнитного поля, поскольку, как показано в классической работе Бора и Розенфельда², в данной пространственно-временной точке может быть измерена любая его компонента. Однако нам предстоит иметь дело с полями типа дираковского поля электрона, которые не кажутся

измеримыми ни в каком смысле. Точка зрения, принимаемая в этой книге, заключается в том, что соотношение (5.1.32) необходимо для лоренц-инвариантности S -матрицы без дополнительных предположений об измеримости или причинности.

Есть еще одно обстоятельство, связанное с построением полей (5.1.31), удовлетворяющих условию (5.1.32). Может оказаться так, что частицы, уничтожаемые и рождаемые полями, обладают ненулевыми значениями одного или более сохраняющихся квантовых чисел типа электрического заряда. Например, если частицы типа n обладают значением $q(n)$ электрического заряда Q , то

$$\begin{aligned} [Q, a(\mathbf{p}, \sigma, n)] &= -q(n)a(\mathbf{p}, \sigma, n), \\ [Q, a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)] &= +q(n)a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \end{aligned}$$

Для того, чтобы $\mathcal{H}(x)$ коммутировал с оператором заряда Q (или другими генераторами симметрии), необходимо, чтобы он был построен из полей, имеющих простые коммутационные соотношения с оператором Q :

$$[Q, \psi_l(x)] = -q_l \psi_l(x). \quad (5.1.33)$$

Тогда можно построить $\mathcal{H}(x)$, который будет коммутировать с Q , взяв его как сумму произведений полей $\psi_{l_1} \psi_{l_2} \dots$ и сопряженных полей $\psi_{m_1}^\dagger \psi_{m_2}^\dagger \dots$, причем

$$q_{l_1} + q_{l_2} + \dots - q_{m_1} - q_{m_2} - \dots = 0.$$

Однако соотношение (5.1.33) выполняется для некоторой конкретной компоненты ψ_l^\dagger поля уничтожения, если и только если все типы частиц n , уничтожаемые этим полем, несут один и тот же заряд $q(n) = q_l$; аналогично, оно удовлетворяется для конкретной компоненты ψ_l^- поля рождения, если и только если все сорта частиц \bar{n} , рождаемые этим полем, несут заряд $q(\bar{n}) = -q_l$. Мы видим, что для того, чтобы такая теория сохраняла квантовые числа типа электрического заряда, необходимо удвоение числа сортов частиц с ненулевыми значениями этих квантовых чисел: если конкретная компонента поля уничтожения уничтожает частицу типа n , то та же компонента поля рождения должна рождать

частицы сорта \bar{n} , которые называются *античастицами* к частицам типа n и обладают противоположными значениями всех сохраняющихся квантовых чисел. В этом заключается обоснование существования античастиц.

Если представление $D(\Lambda)$ приводимо, можно использовать базис для полей, в котором $D(\Lambda)$ разбивается на блоки вдоль главной диагонали, причем поля, принадлежащие разным блокам, не переходят друг в друга при преобразованиях Лоренца. К тому же преобразования Лоренца не влияют на тип частиц. Поэтому вместо рассмотрения одного большого поля, содержащего много неприводимых компонент и много типов частиц, можно с этого момента ограничиться рассмотрением полей, которые уничтожают только один определенный тип частиц (при этом индекс n будем опускать) и рождают только соответствующие античастицы. Такие поля преобразуются по неприводимому представлению группы Лоренца (как отмечалось выше, это представление может как включать, так и не включать пространственное отражение). Следует понимать, что в общем случае нужно рассматривать много разных полей такого типа, причем некоторые из них могут быть образованы из производных других полей. В последующих разделах мы собираемся завершить определение коэффициентов $u_i(\mathbf{p}, \sigma)$ и $v_i(\mathbf{p}, \sigma)$, зафиксировать относительные значения констант κ и λ и вывести соотношения, связывающие свойства частиц и античастиц, проделав это последовательно для полей, принадлежащих простейшим неприводимым представлениям группы Лоренца — скалярному, векторному и дираковскому спинорному. После этого мы повторим анализ для совершенно произвольного неприводимого представления.

Сделаем замечание по поводу уравнений поля. Как следует из формул (5.1.31), (5.1.17) и (5.1.18), все компоненты поля данной массы m удовлетворяют уравнению Клейна–Гордона:

$$(\square - m^2)\psi_i(x) = 0. \quad (5.1.34)$$

Некоторые поля удовлетворяют одновременно и другим уравнениям поля, в зависимости от того, превышает или нет число компонент поля число независимых состояний частицы. Традиционно в квантовой теории поля сначала рассматривают полевые уравнения или тот лагранжиан, из которого они могут быть получены, а затем выводят разложение полей по одночастичным операторам уничтожения

и рождения. В излагаемом ниже подходе мы начинаем с частиц и выводим вид полей, исходя из требований лоренц-инвариантности. При этом уравнения поля возникают почти случайно как побочный продукт такого построения.

* * *

Следует отметить одно техническое обстоятельство. Согласно теореме, доказанной в разделе 4.4, условие, гарантирующее, что теория будет удовлетворять принципу кластерного разложения, заключается в том, что взаимодействие можно представить в виде суммы произведений операторов рождения и уничтожения, расположенных так, что все операторы рождения находятся левее всех операторов уничтожения. При этом коэффициенты разложения содержат только одну дельта-функцию закона сохранения импульса. Поэтому взаимодействие должно быть записано в «нормальной» форме

$$V = \int d^3x : \mathcal{F}(\psi(x), \psi^\dagger(x)) :, \quad (5.1.35)$$

где двоеточия означают, что выражение между ними должно быть переписано так, чтобы все операторы рождения стояли левее операторов уничтожения (игнорируя при этой перестановке все ненулевые коммутаторы или антикоммутаторы, но учитывая знаки минус от перестановки фермионных операторов). С помощью соотношений коммутации или антикоммутации полей всякая такая нормально упорядоченная функция полей может быть записана и как сумма обычных произведений полей с c -числовыми коэффициентами. После такого переписывания $:\mathcal{F}:$ становится очевидным, что несмотря на нормальное упорядочивание, $:\mathcal{A}(\psi(x), \psi^\dagger(x)):$ будет коммутировать с $:\mathcal{A}(\psi(y), \psi^\dagger(y)):$ при пространственноподобных $x - y$, если эти функции построены из полей, удовлетворяющих (5.1.32), и содержат четное число любых фермионных операторов.

5.2. Причинные скалярные поля

Рассмотрим сначала однокомпонентные поля уничтожения и рождения $\phi^+(x)$ и $\phi^-(x)$, преобразующиеся по простейшему из

возможных скалярному представлению группы Лоренца с $D(\Lambda) = 1$. Если ограничиться вращениями, то такое представление будет скалярным представлением группы вращений с $\mathcal{J} = 0$, так что уравнения (5.1.25) и (5.1.26) не имеют других решений, кроме $j = 0$, в этом случае σ , $\bar{\sigma}$ могут принимать только нулевые значения. Таким образом, скалярное поле может описывать только частицы с нулевым спином. Предполагая на время, что поле описывает лишь один сорт частиц, не имеющих отличных от самих себя античастиц, и опуская индекс сорта n , спиновый индекс σ и индекс поля l , находим, что величины $u_l(0, \sigma, n)$ и $v_l(0, \sigma, n)$ равны числам $u(0)$ и $v(0)$. Общепринято подбирать общий масштаб полей уничтожения и рождения так, чтобы обе эти константы имели значение $(2m)^{-1/2}$. Тогда из формул (5.1.21) и (5.1.22) находим:

$$u(\mathbf{p}) = (2p^0)^{-1/2}, \quad (5.2.1)$$

$$v(\mathbf{p}) = (2p^0)^{-1/2}. \quad (5.2.2)$$

Отсюда в скалярном случае поля (5.1.17) и (5.1.18) равны

$$\phi^+(x) = \int d^3p (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} a(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \quad (5.2.3)$$

$$\phi^-(x) = \int d^3p (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} a^\dagger(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} = \phi^{+\dagger}(x). \quad (5.2.4)$$

Гамильтониан $\mathcal{H}(x)$, построенный как полином по полям $\phi^+(x)$ и $\phi^-(x)$, будет автоматически удовлетворять требованию (5.1.9), т. е. будет скаляром. Остается удовлетворить другому условию лоренц-инвариантности S -матрицы — коммутации $\mathcal{H}(x)$ и $\mathcal{H}(y)$, взятых в точках, разделенных пространственноподобным расстоянием $x - y$. Если бы $\mathcal{H}(x)$ был полиномом только по $\phi^+(x)$, то не возникало бы никаких трудностей. Все операторы уничтожения либо коммутируют, либо антикоммутируют, так что $\phi^+(x)$ коммутирует или антикоммутирует с $\phi^+(y)$ для всех x и y , в соответствии с тем, является ли частица бозоном или фермионом:

$$[\phi^+(x), \phi^+(y)]_{\mp} = 0. \quad (5.2.5)$$

Поэтому любой оператор $\mathcal{H}(x)$, являющийся полиномом по $\phi^+(x)$ (для фермионов он должен быть четным), будет коммутировать

с $\mathcal{H}(y)$ при всех x и y . Проблема, конечно, в том, что $\mathcal{H}(x)$ должен быть эрмитовым, а для этого должен содержать наряду с $\Phi^+(x)$ и поле $\Phi^{+\dagger}(x) = \Phi^-(x)$. Но $\Phi^+(x)$ не коммутирует или антикоммутирует с $\Phi^-(y)$ в точках, разделенных пространственноподобным расстоянием. Используя соотношения коммутации (для бозонов) или антикоммутации (для фермионов) (4.2.5), находим:

$$[\Phi^+(x), \Phi^-(y)]_{\mp} = \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^3 (2p^0 \cdot 2p'^0)^{1/2}} e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot y} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

что сводится к одному интегралу

$$[\Phi^+(x), \Phi^-(y)]_{\mp} = \Delta_+(x - y), \quad (5.2.6)$$

где Δ_+ — стандартная функция

$$\Delta_+(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p^0} e^{ip \cdot x}. \quad (5.2.7)$$

Эта функция явно лоренц-инвариантна, поэтому при пространственноподобных x она может зависеть только от инварианта $x^2 > 0$. Можно вычислить $\Delta_+(x)$ для пространственноподобных x , выбрав систему координат так, чтобы

$$x^0 = 0, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2}.$$

Тогда выражение (5.2.7) можно представить в виде

$$\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{\sin(p\sqrt{x^2})}{p\sqrt{x^2}}.$$

Заменяя переменную интегрирования на $u \equiv p/m$, находим

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{x^2}} \int_0^\infty \frac{u du}{\sqrt{u^2 + 1}} \sin(m\sqrt{x^2} u) \quad (5.2.8)$$

или, используя стандартную функцию Ганкеля,

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{x^2}} K_1(m\sqrt{x^2}). \quad (5.2.9)$$

Это выражение не равно нулю. Что же с ним делать? Заметим, что хотя $\Delta_+(x)$ и не равна нулю, но при $x^2 > 0$ эта функция четна по x^μ . Попробуем построить $\mathcal{H}(x)$ не из одних полей $\varphi^+(x)$, а из линейной комбинации полей

$$\varphi(x) \equiv \kappa\varphi^+(x) + \lambda\varphi^-(x).$$

Используя (5.2.6), имеем при пространственноподобных $x - y$

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi^\dagger(y)]_{\mp} &= |\kappa|^2 [\varphi^+(x), \varphi^-(y)]_{\mp} + |\lambda|^2 [\varphi^-(x), \varphi^+(y)]_{\mp} \\ &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \Delta_+(x - y), \\ [\varphi(x), \varphi(y)]_{\mp} &= \kappa\lambda ([\varphi^+(x), \varphi^-(y)]_{\mp} + [\varphi^-(x), \varphi^+(y)]_{\mp}) \\ &= \kappa\lambda(1 \mp 1) \Delta_+(x - y). \end{aligned}$$

Оба эти выражения будут обращаться в нуль тогда и только тогда, когда частица является бозоном (т. е. когда берется верхний знак), а величины κ и λ равны:

$$|\kappa| = |\lambda|.$$

Относительную фазу κ и λ можно изменить путем переопределения фаз состояний, так что $a(\mathbf{p}) \rightarrow e^{i\alpha}a(\mathbf{p})$, $a^\dagger(\mathbf{p}) \rightarrow e^{-i\alpha}a^\dagger(\mathbf{p})$, откуда $\kappa \rightarrow \kappa e^{i\alpha}$, $\lambda \rightarrow \lambda e^{-i\alpha}$. Выбирая $\alpha = \text{Arg}(\lambda/\kappa)/2$, можно таким образом сделать равными фазы κ и λ , а следовательно, и сами эти величины.

Переопределяя $\varphi(x)$, чтобы поглотить общий множитель $\kappa = \lambda$, имеем окончательно

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^{+\dagger}(x) = \varphi^\dagger(x). \quad (5.2.10)$$

Итак, гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}(x)$ будет коммутировать с $\mathcal{H}(y)$ на пространственноподобных расстояниях $x - y$, если он будет построен как нормально упорядоченный полином по самосопряженному скалярному полю $\varphi(x)$.

Хотя выбор относительной фазы двух слагаемых в (5.2.10) есть вопрос соглашения, но приняв его, мы должны использовать это соглашение везде, где бы не появилось скалярное поле данной частицы в плотности гамильтониана взаимодействия. Например, предположим, что плотность гамильтониана взаимодействия включает не только поле (5.2.10), но и другое скалярное поле такой же частицы

$$\tilde{\varphi}(x) = e^{i\alpha}\varphi^+(x) + e^{-i\alpha}\varphi^{+\dagger}(x),$$

где α — произвольная фаза. Поле $\tilde{\varphi}$, как и φ , будет причинным в том смысле, что $\tilde{\varphi}(x)$ коммутирует с $\tilde{\varphi}(y)$ на пространственноподобных расстояниях $x - y$, но $\tilde{\varphi}(x)$ не будет при этом коммутировать с $\varphi(y)$. Поэтому в одной теории не могут появиться оба таких поля.

Если частицы, уничтожающиеся и рождающиеся полем $\varphi(x)$, обладают некоторым сохраняющимся квантовым числом типа электрического заряда, то $\mathcal{H}(x)$ будет сохранять это число только в том случае, если каждое слагаемое в $\mathcal{H}(x)$ содержит равное число операторов $a(\mathbf{p})$ и $a(\mathbf{p})^\dagger$. Но это невозможно, если $\mathcal{H}(x)$ построен как полином по полю $\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^{+\dagger}(x)$. Иными словами, для того, чтобы $\mathcal{H}(x)$ коммутировал с оператором заряда Q (или каким-то другим генератором симметрии), необходимо, чтобы оператор взаимодействия был построен из полей, имеющих простые перестановочные соотношения с Q . Это верно для $\varphi^+(x)$ и сопряженного ему поля, для которых

$$\begin{aligned} [Q, \varphi^+(x)]_- &= -q\varphi^+(x), \\ [Q, \varphi^{+\dagger}(x)]_- &= +q\varphi^{+\dagger}(x). \end{aligned}$$

Но это не выполняется для самосопряженного поля (5.2.10).

Выход из положения заключается в том, чтобы предположить существование *двух* бесспиновых бозонов одинаковой массой m , но зарядами $+q$ и $-q$, соответственно. Пусть $\varphi^+(x)$ и $\varphi^{+c}(x)$ — поля уничтожения для этих двух частиц, так что *

* Индекс «с» означает «зарядовое сопряжение». Следует помнить, что частица, не несущая никакого сохраняющегося квантового числа, может как быть, так и не быть своей собственной античастицей с $a^c(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$

$$\begin{aligned} [\mathcal{Q}, \varphi^+(x)]_- &= -q\varphi^+(x), \\ [\mathcal{Q}, \varphi^{+c}(x)]_- &= +q\varphi^{+c}(x). \end{aligned}$$

Определим $\varphi(x)$ как линейную комбинацию

$$\varphi(x) = \kappa\varphi^+(x) + \lambda\varphi^{+c}(x),$$

имеющую явно тот же коммутатор с \mathcal{Q} , как и отдельное поле $\varphi^+(x)$:

$$[\mathcal{Q}, \varphi(x)]_- = -q\varphi(x).$$

Тогда на пространственных расстояниях коммутатор или антикоммутатор $\varphi(x)$ с сопряженным ему полем равен

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi^\dagger(y)]_{\mp} &= |\kappa|^2 [\varphi^+(x), \varphi^{\dagger+}(y)]_{\mp} + |\lambda|^2 [\varphi^{+c}(x), \varphi^{\dagger c}(y)]_{\mp} \\ &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \Delta_+(x - y), \end{aligned}$$

в то время как $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ автоматически коммутируют или антикоммутируют друг с другом для всех x и y , так как φ^+ и φ^{+c} уничтожают и рожают разные частицы. При получении этого результата мы молчаливо предполагали, что массы частиц и античастиц одинаковы, так что коммутаторы или антикоммутаторы содержат одну и ту же функцию $\Delta_+(x - y)$. Случай статистики Ферми снова исключается, так как $\varphi(x)$ может антикоммутировать с $\varphi^\dagger(y)$ на пространственноподобных расстояниях только при $\kappa = \lambda = 0$, а при этом поля обращаются в нуль. Таким образом бесспиновая частица должна быть бозоном.

В случае бозе-статистики, для того, чтобы комплексное поле $\varphi(x)$ коммутировало с $\varphi^\dagger(y)$ на пространственноподобных расстояниях, необходимо и достаточно, чтобы $|\kappa|^2 = |\lambda|^2$ и массы частиц и античастиц были бы одинаковы. Переопределяя относительную фазу состояний этих двух частиц, снова можно сделать равными фазы κ и λ , и тогда $\kappa = \lambda$. Этот общий множитель можно исключить переопределением поля φ , так что

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^{+c}(x),$$

или, подробнее,

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} (2p^0)^{1/2}} [a(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + a^{c^\dagger}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}]. \quad (5.2.11)$$

Мы построили единственно возможное причинное скалярное поле. Эта формула годится как в случае полностью нейтральных бесспиновых частиц, совпадающих со своими античастицами (тогда $a^c(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$), так и в случае, когда частица и античастица не совпадают (тогда $a^c(\mathbf{p}) \neq a(\mathbf{p})$).

Для будущих применений заметим, что коммутатор комплексного скалярного поля со своим сопряженным равен

$$[\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] = \Delta(x - y), \quad (5.2.12)$$

где

$$\Delta(x - y) \equiv \Delta_+(x - y) - \Delta_+(y - x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} [e^{ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (x-y)}]. \quad (5.2.13)$$

Рассмотрим теперь действие на это поле разных преобразований инверсии. Во-первых, из результатов раздела 4.2 можно сразу получить, что действие оператора пространственной инверсии на операторы уничтожения и рождения имеет вид *:

$$P a(\mathbf{p}) P^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p}), \quad (5.2.14)$$

$$P a^{c^\dagger}(\mathbf{p}) P^{-1} = \eta^c a^{c^\dagger}(-\mathbf{p}), \quad (5.2.15)$$

где η и η^c — внутренние четности частиц и античастиц, соответственно. Применяя эти формулы к полю уничтожения (5.2.3) и к полю, зарядовосопряженному к полю рождения (5.2.4), а также меняя переменную интегрирования \mathbf{p} на $-\mathbf{p}$, находим, что

* Мы опускаем здесь индекс 0 у операторов инверсии P, C и T, так как практически во всех случаях, когда эти инверсии являются хорошими симметриями, одни и те же операторы индуцируют преобразования инверсии как ин- и ауг-состояний, так и состояний свободных частиц.

$$P\varphi^+(x)P^{-1} = \eta^* \varphi^+(\mathcal{P}x), \quad (5.2.16)$$

$$P\varphi^{+c^\dagger}(x)P^{-1} = \eta^c \varphi^{+c^\dagger}(\mathcal{P}x), \quad (5.2.17)$$

где, как и ранее, $\mathcal{P}x = (-\mathbf{x}, x^0)$. Таким образом, действие пространственной инверсии в общем случае переводит скалярное поле $\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^{+c^\dagger}(x)$ в другое поле $\varphi_P = \eta^* \varphi^+ + \eta^c \varphi^{+c^\dagger}$. Оба поля по отдельности являются причинными, но если допустить, что φ и φ_P^\dagger входят в одно взаимодействие, то возникают трудности, так как эти поля в общем случае не коммутируют на пространственноподобных расстояниях. Единственный способ не нарушить лоренц-инвариантность, сохранение четности и эрмитовость взаимодействия заключается в требовании, чтобы φ_P было пропорциональным φ , откуда

$$\eta^c = \eta^*. \quad (5.2.18)$$

Итак, *внутренняя четность $\eta\eta^c$ системы, состоящей из бесспиновой частицы и ее античастицы, равна +1 (другими словами, такая система является четной)*. Теперь

$$P\varphi(x)P^{-1} = \eta^* \varphi(\mathcal{P}x). \quad (5.2.19)$$

Эти результаты применимы и в случае, когда бесспиновая частица совпадает со своей античастицей. В этом случае $\eta^c = \eta$, откуда следует, что внутренняя четность такой частицы действительна, $\eta = \pm 1$.

Рассмотрение зарядового сопряжения во многом аналогично. Из результатов раздела 4.2 имеем

$$C a(\mathbf{p}) C^{-1} = \xi^* a^c(\mathbf{p}), \quad (5.2.20)$$

$$C a^{c^\dagger}(\mathbf{p}) C^{-1} = \xi^c a^\dagger(\mathbf{p}), \quad (5.2.21)$$

где ξ и ξ^c — фазы, связанные с зарядовым сопряжением одночастичных состояний. Отсюда следует, что

$$C \varphi^+(x) C^{-1} = \xi^* \varphi^{+c}(x), \quad (5.2.22)$$

$$C \varphi^{+c^\dagger}(x) C^{-1} = \xi^c \varphi^{+\dagger}(x). \quad (5.2.23)$$

Поле $C\phi(x)C^{-1}$ должно быть пропорционально полю $\phi(x)$, с которым оно коммутирует на пространственноподобных расстояниях. Очевидно, для этого необходимо, чтобы

$$\xi^c = \xi^*. \quad (5.2.24)$$

Как и в случае обычной четности, внутренняя зарядовая четность $\xi\xi^c$ состояния, содержащего бесспиновую частицу и ее античастицу, является четной. Теперь

$$C\phi(x)C^{-1} = \xi^* \phi^\dagger(x). \quad (5.2.25)$$

Как и выше, эти результаты применимы в случае, когда частица совпадает со своей античастицей, и $\xi^c = \xi$. Зарядовая четность должна быть при этом действительна, $\xi = \pm 1$.

Обратимся, наконец, к обращению времени. Из результатов раздела 4.2 находим:

$$T a(\mathbf{p}) T^{-1} = \zeta^* a(-\mathbf{p}), \quad (5.2.26)$$

$$T a^{c\dagger}(\mathbf{p}) T^{-1} = \zeta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}). \quad (5.2.27)$$

Вспоминая, что оператор T антиунитарен, и вновь меняя переменную интегрирования \mathbf{p} на $-\mathbf{p}$, находим:

$$T \phi^+(x) T^{-1} = \zeta^* \phi^+(-\mathcal{P}x), \quad (5.2.28)$$

$$T \phi^{+c\dagger}(x) T^{-1} = \zeta^c \phi^{+c\dagger}(-\mathcal{P}x). \quad (5.2.29)$$

Чтобы $T\phi(x)T^{-1}$ было простым образом связано с полем ϕ в обращенной по времени точке $-\mathcal{P}x$, должно выполняться равенство

$$\zeta^c = \zeta^*, \quad (5.2.30)$$

и поэтому

$$T\phi(x)T^{-1} = \zeta^* \phi(-\mathcal{P}x). \quad (5.2.31)$$

5.3 Причинные векторные поля

Рассмотрим следующее по простоте поле, преобразующееся как четырехмерный вектор, т. е. по простейшему нетривиальному представлению однородной группы Лоренца. В современной физике элементарных частиц все большую роль играют массивные частицы W^\pm и Z^0 , которые при низких энергиях описываются такими полями. Поэтому наше рассмотрение представляет не только педагогический интерес. (Кроме того, хотя мы и рассматриваем массивные частицы, в квантовой электродинамике возможен подход, при котором фотон описывается как массивное векторное поле в пределе очень малой массы.) Сначала будем считать, что векторное поле описывает только один тип частиц (опуская при этом индекс n). Затем мы учтем возможность того, что поле описывает как частицу, так и соответствующую античастицу.

В 4-векторном представлении группы Лоренца строки и столбцы матриц представления $D(\Lambda)$ помечены индексами μ, ν и т. д., принимающими четыре значения, причем

$$D(\Lambda)^\mu{}_\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu. \quad (5.3.1)$$

Части векторного поля, отвечающие уничтожению и рождению частиц, записываются в виде:

$$\varphi^{+\mu}(x) = \sum_{\sigma} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p u^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x}, \quad (5.3.2)$$

$$\varphi^{-\mu}(x) = \sum_{\sigma} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p v^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}. \quad (5.3.3)$$

Коэффициентные функции $u^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ и $v^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ при произвольном импульсе с помощью формул (5.1.21) и (5.1.22) выражаются через эти же функции при нулевом импульсе:

$$u^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = (m/p^0)^{1/2} L(p)^\mu{}_\nu u^\nu(0, \sigma), \quad (5.3.4)$$

$$v^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = (m/p^0)^{1/2} L(p)^\mu{}_\nu v^\nu(0, \sigma) \quad (5.3.5)$$

(здесь используется стандартное соглашение о суммировании по повторяющимся пространственно-временным индексам μ, ν и т. д.). Кроме того, коэффициентные функции при нулевом значении импульса подчиняются условиям (5.1.25) и (5.1.26):

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^{\mu}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} = \mathcal{J}^{\mu}{}_{\nu} u^{\nu}(0, \sigma), \quad (5.3.6)$$

$$-\sum_{\bar{\sigma}} v^{\mu}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \mathcal{J}^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}(0, \sigma). \quad (5.3.7)$$

В 4-векторном представлении генераторы вращения определяются с помощью (5.3.1) в виде

$$(\mathcal{J}_k)^0_0 = (\mathcal{J}_k)^0_i = (\mathcal{J}_k)^i_0 = 0, \quad (5.3.8)$$

$$(\mathcal{J}_k)^i_j = -\varepsilon_{ijk}, \quad (5.3.9)$$

где индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3. Отметим в частности, что \mathcal{J}^2 принимает вид:

$$(\mathcal{J}^2)^0_0 = (\mathcal{J}^2)^0_i = (\mathcal{J}^2)^i_0 = 0, \quad (5.3.10)$$

$$(\mathcal{J}^2)^i_j = 2\delta^i_j. \quad (5.3.11)$$

Из формул (5.3.6) и (5.3.7) следует тогда, что

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^0(0, \bar{\sigma}) (\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 0, \quad (5.3.12)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^i(0, \bar{\sigma}) (\mathbf{J}^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 2u^i(0, \sigma), \quad (5.3.13)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v^0(0, \bar{\sigma}) (\mathbf{J}^{(j)*})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 0, \quad (5.3.14)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v^i(0, \bar{\sigma}) (\mathbf{J}^{(j)*})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 2v^i(0, \sigma). \quad (5.3.15)$$

Напомним к тому же известную формулу: $(\mathbf{J}^{(j)})_{\sigma\sigma}^2 = j(j+1)\delta_{\sigma\sigma}$. Из формул (5.3.12)–(5.3.15) вытекает, что существуют две возможности для значений спина частицы, которая описывается векторным полем: либо $j = 0$, и тогда при $\mathbf{p} = 0$ только u^0 и v^0 отличны от нуля, либо $j = 1$ (и $j(j+1) = 2$), и при этом при $\mathbf{p} = 0$ отличны от нуля только пространственные компоненты u^i и v^i .

Рассмотрим эти возможности детальнее.

Спин нуль

Подходящим выбором нормировки полей можно записать единственные ненулевые компоненты 4-векторов $u^\mu(0)$ и $v^\mu(0)$ в общепринятом виде:

$$u^0(0) = i(m/2)^{1/2},$$

$$v^0(0) = -i(m/2)^{1/2}.$$

(Индекс s принимает в этом случае единственное значение нуль и поэтому опущен.) В случае произвольного импульса из формул (5.3.4) и (5.3.5) следует:

$$u^\mu(\mathbf{p}) = ip^\mu(2p^0)^{-1/2}, \quad (5.3.16)$$

$$v^\mu(\mathbf{p}) = -ip^\mu(2p^0)^{-1/2}. \quad (5.3.17)$$

Векторные поля уничтожения и рождения в данном случае являются не чем иным, как производными от скалярных полей уничтожения и рождения для рассмотренных выше бесспиновых частиц:

$$\varphi^{+\mu}(x) = \partial^\mu \varphi^+(x), \quad \varphi^{-\mu}(x) = \partial^\mu \varphi^-(x). \quad (5.3.18)$$

Очевидно, что причинное векторное поле для скалярной частицы есть производная причинного скалярного поля:

$$\varphi^\mu(x) = \varphi^{+\mu}(x) + \varphi^{-\mu}(x) = \partial^\mu \varphi(x). \quad (5.3.19)$$

Таким образом, этот случай можно далее не рассматривать.

Спин единица

Из формул (5.3.6) и (5.3.7) сразу же следует, что при $\sigma = 0$ векторы $u^i(0,0)$ и $v^i(0,0)$ направлены вдоль третьей оси. При подходящей нормировке полей можно выбрать эти векторы в виде

$$u^\mu(0,0) = v^\mu(0,0) = (2m)^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3.20)$$

где 4-компоненты перечислены в порядке 1, 2, 3, 0. Чтобы найти другие компоненты, используем формулы (5.3.6), (5.3.7) и (5.3.9) и вычислим результат действия повышающих и понижающих операторов $J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)}$ на u и v . Получим:

$$u^\mu(0,+1) = -v^\mu(0,-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2m)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3.21)$$

$$u^\mu(0,-1) = -v^\mu(0,+1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2m)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3.22)$$

С помощью формул (5.3.4) и (5.3.5) находим:

$$u^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = v^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) = (2p^0)^{-1/2} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.3.23)$$

где

$$e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) \equiv L^\mu{}_\nu(\mathbf{p})e^\nu(0, \sigma), \quad (5.3.24)$$

$$e^\mu(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^\mu(0,+1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e^\mu(0,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3.25)$$

Теперь поля уничтожения и рождения принимают вид

$$\varphi^{+\mu}(x) = \varphi^{-\mu\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} e^{i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}} a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip\cdot x}. \quad (5.3.26)$$

Конечно, поля $\varphi^{+\mu}(x)$ и $\varphi^{+\nu}(y)$ коммутируют (или антикоммутируют) для всех x и y . Но это не относится к полям $\varphi^{+\mu}(x)$ и $\varphi^{-\nu}(y)$. Коммутатор (для бозонов) или антикоммутатор (для фермионов) этих полей равен

$$[\varphi^{+\mu}(x), \varphi^{-\nu}(y)]_{\mp} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} e^{ip\cdot(x-y)} \Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}), \quad (5.3.27)$$

где

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) e^{\nu*}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.3.28)$$

Непосредственное вычисление с помощью (5.3.25) показывает, что $\Pi^{\mu\nu}(0)$ является проекционной матрицей на пространство, ортогональное направлению временной оси. Тогда из (5.3.24) следует, что $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$ есть проекционная матрица на пространство, ортогональное 4-вектору p^{μ} :

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) = \eta^{\mu\nu} + p^{\mu} p^{\nu} / m^2. \quad (5.3.29)$$

Коммутатор (или антикоммутатор) (5.3.27) можно выразить через функцию Δ_+ , которую мы определили в предыдущем разделе:

$$[\varphi^{+\mu}(x), \varphi^{-\nu}(y)]_{\mp} = \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu} \partial^{\nu}}{m^2} \right] \Delta_+(x-y). \quad (5.3.30)$$

Важное свойство этого выражения заключается в том, что оно не обращается в нуль при пространственноподобных $x-y$ и *четно* относительно $x-y$. Поэтому можно повторить рассуждения предыдущего раздела для построения причинного поля. Образует линейную комбинацию полей уничтожения и рождения

$$v^{\mu}(x) \equiv \kappa \varphi^{+\mu}(x) + \lambda \varphi^{-\mu}(x),$$

для которой при пространственноподобных $x - y$

$$[v^\mu(x), v^\nu(y)]_{\mp} = \kappa\lambda[1 \mp 1] \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta_+(x - y),$$

$$[v^\mu(x), v^{\nu\dagger}(y)]_{\mp} = (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2) \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta_+(x - y).$$

Для обращения в нуль обоих выражений при пространственноподобных $x - y$ необходимо и достаточно, чтобы частицы со спином единица были бозонами, и $|\kappa| = |\lambda|$. Подходящим выбором фазы одночастичных состояний можно добиться, чтобы κ и λ имели одинаковую фазу, так что $\kappa = \lambda$, а затем устранить общий множитель κ , переопределив общую нормировку поля. В результате причинное векторное поле массивной частицы со спином единица имеет вид:

$$v^\mu(x) = \varphi^{+\mu}(x) + \varphi^{+\mu\dagger}(x). \quad (5.3.31)$$

Заметим, что поле действительно:

$$v^\mu(x) = v^{\mu\dagger}(x). \quad (5.3.32)$$

Однако если частицы, которые описываются этим полем, обладают ненулевым значением какого-то сохраняющегося квантового числа Q , то невозможно построить из такого поля сохраняющее Q взаимодействие. Следует предположить, что существует другой бозон той же массы и спина, обладающий противоположным значением Q , и построить причинное поле как

$$v^\mu(x) = \varphi^{+\mu}(x) + \varphi^{+c\mu\dagger}(x), \quad (5.3.33)$$

или, подробнее,

$$v^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \times [e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}], \quad (5.3.34)$$

где верхний индекс «с» отмечает операторы, рождающие античастицу, которая зарядово сопряжена к частице, уничтожаемой полем $\phi^{\mu}(x)$. Полученное поле причинно, но более не действительно. Эта же формула применима и в случае полностью нейтральной частицы со спином единица, совпадающей со своей античастицей, если положить $a^c(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$. В любом случае коммутатор векторного поля и сопряженного ему поля равен

$$[v^{\mu}(x), v^{\nu\dagger}(y)] = \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^2} \right] \Delta(x-y), \quad (5.3.35)$$

где $\Delta(x-y)$ — функция (5.2.13).

Построенные нами для массивной частицы со спином единица действительные и комплексные поля удовлетворяют интересным полевым уравнениям. Во-первых, так как p^{μ} в экспоненте в формуле (5.3.26) удовлетворяет условию $p^2 = -m^2$, поле удовлетворяет такому же, как и для скалярного поля, уравнению Клейна-Гордона

$$(\square - m^2)v^{\mu}(x) = 0, \quad (5.3.36)$$

Кроме того, поскольку из (5.3.24) следует, что

$$e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma)p_{\mu} = 0, \quad (5.3.37)$$

имеем еще одно уравнение:

$$\partial_{\mu}v^{\mu}(x) = 0. \quad (5.3.38)$$

В пределе малой массы уравнения (5.3.36) и (5.3.38) превращаются в уравнения электродинамики для 4-вектора потенциала в так называемой калибровке Лоренца.

Однако никакая теория массивных частиц со спином единица при устремлении массы к нулю не превращается в электродинамику. Причину этого можно увидеть, рассмотрев вероятность образования частицы со спином единица за счет взаимодействия с плотностью гамильтониана $\mathcal{H} = J_{\mu}v^{\mu}$, где J_{μ} — произвольный 4-вектор тока. Возводя матричный элемент в квадрат и суммируя по проекциям

спина частицы на ось z , получаем, что вероятность пропорциональна величине

$$\sum_{\sigma} |\langle J_{\mu} \rangle e^{\mu}(\mathbf{p}, \sigma)^*|^2 = \langle J_{\mu} \rangle \langle J_{\nu} \rangle^* \Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}),$$

где \mathbf{p} — импульс испускаемой частицы со спином единица, а $\langle J_{\mu} \rangle$ — матричный элемент тока (взятый, скажем, при $x = 0$) между начальным и конечным состояниями всех других частиц. Слагаемое $p^{\mu}p^{\nu}/m^2$ в $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$ приводит в общем случае к бесконечному возрастанию вероятности процесса при $m \rightarrow 0$. Единственный способ предотвратить катастрофу — предположить обращение в нуль произведения $\langle J_{\mu} \rangle p^{\mu}$. В координатном пространстве это сводится к *сохранению* тока J^{μ} в том смысле, что $\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$. На самом деле, необходимость сохранения тока можно увидеть после простого подсчета числа состояний. У массивной частицы со спином единица имеется три спиновых состояния, которые можно считать состояниями со спиральностью $+1$, 0 и -1 . В то же время любая безмассовая частица со спином единица типа фотона может иметь только две спиральности $+1$ и -1 . Условие сохранения тока как раз и гарантирует, что в пределе нулевой массы частицы со спином 1 в состояниях с нулевой спиральностью не будут излучаться.

Преобразования инверсий можно рассмотреть во многом аналогично случаю скалярного поля. Чтобы вычислить результат действия преобразования пространственной инверсии, нужна формула для $e^{\mu}(-\mathbf{p}, \sigma)$. Используя равенство $L^{\mu}_{\nu}(-\mathbf{p}) = \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} L^{\rho}_{\tau}(\mathbf{p}) \mathcal{P}^{\tau}_{\nu}$ и формулу (5.3.24), находим

$$e^{\mu}(-\mathbf{p}, \sigma) = -\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} e^{\nu}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.3.39)$$

Далее, чтобы вычислить результат действия операции обращения времени, нужна формула для $(-1)^{1+\sigma} e^{\mu*}(-\mathbf{p}, -\sigma)$. Используя равенство $e^{\mu*}(-\sigma) = -e^{\mu}(\sigma)$ и предыдущую формулу для $L^{\mu}_{\nu}(-\mathbf{p})$, получаем

$$(-1)^{1+\sigma} e^{\mu*}(-\mathbf{p}, -\sigma) = \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} e^{\nu}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.3.40)$$

С помощью этих формул и свойств преобразования операторов уничтожения и рождения, выписанных в разделе 4.2, можно непосредственными вычислениями найти законы преобразования полей

уничтожения и рождения под действием преобразований инверсии. Мы вновь обнаруживаем, что для того, чтобы причинные поля преобразовывались бы в другие поля, с которыми они коммутируют на пространственноподобных расстояниях, необходимо, чтобы внутренние фазовые множители, отвечающие пространственной инверсии, зарядовому сопряжению и обращению времени для частиц со спином единица и их античастиц, были связаны соотношениями:

$$\eta^c = \eta^*, \quad (5.341)$$

$$\xi^c = \xi^*, \quad (5.342)$$

$$\zeta^c = \zeta^*. \quad (5.343)$$

(В частности, в случае, когда частицы со спином 1 совпадает со своей античастицей, все фазы должны быть действительны.) С учетом этих условий на фазы находим, что причинное векторное поле (5.3.34) обладает следующими трансформационными свойствами относительно инверсий:

$$Pv^\mu(x)P^{-1} = -\eta^* \mathcal{P}^\mu_\nu v^\nu(\mathcal{P}x), \quad (5.344)$$

$$Cv^\mu(x)C^{-1} = \xi^* v^{\mu\dagger}(x), \quad (5.345)$$

$$Tv^\mu(x)T^{-1} = \zeta^* \mathcal{P}^\mu_\nu v^\nu(-\mathcal{P}x). \quad (5.346)$$

В частности, знак «минус» в (5.344) означает, что векторное поле, преобразующееся как полярный вектор без дополнительных фаз или знаков, связанных с матрицей \mathcal{P}^μ_ν , описывает частицу со спином 1 и внутренней четностью $\eta = -1$.

5.4. Дираковский формализм

Среди всех представлений однородной группы Лоренца существует одно, играющее особую роль в физике. Как мы видели в разделе 1.1, это представление было впервые рассмотрено Дираком в теории электрона³. Но, как часто случается, оно было уже известно математикам⁴, так как при любом числе измерений это

представление лежит в основе одного из двух больших классов представлений группы вращений или группы Лоренца (точнее, их накрывающих групп; см. раздел 2.7). Согласно рассматриваемому здесь подходу, структура и свойства любого квантового поля диктуется тем представлением однородной группы Лоренца, по которому это поле преобразуется. Поэтому для нас более естественно сначала описать дираковский формализм в том виде, как он возник в математике, а не так, как его ввел Дирак.

Представлением однородной группы Лоренца мы называем множество матриц $D(\Lambda)$, удовлетворяющих закону группового умножения

$$D(\bar{\Lambda})D(\Lambda) = D(\bar{\Lambda}\Lambda).$$

Как и для унитарных операторов $U(\Lambda)$, можно изучать свойства этих матриц, рассматривая бесконечно малые преобразования

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (5.4.1)$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad (5.4.2)$$

для которых

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}, \quad (5.4.3)$$

где $\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}$ — множество матриц, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (2.4.12):

$$i[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} \mathcal{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \mathcal{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} \mathcal{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} \mathcal{J}^{\rho\mu}. \quad (5.4.4)$$

Чтобы найти эти матрицы, предположим, что сначала мы построили матрицы γ^μ , удовлетворяющие соотношениям антикоммутации,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (5.4.5)$$

и попробуем определить

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (5.4.6)$$

С помощью (5.4.5) нетрудно показать, что

$$[g^{\mu\nu}, \gamma^{\rho}] = -i\gamma^{\mu}\eta^{\nu\rho} + i\gamma^{\nu}\eta^{\mu\rho}. \quad (5.4.7)$$

Отсюда вытекает, что (5.4.6) действительно удовлетворяет требуемому коммутационному соотношению (5.4.4). Предположим далее, что матрицы γ_{μ} неприводимы. Это означает, что не существует собственного подпространства, остающегося инвариантным под действием всех этих матриц. В противном случае можно было бы выбрать меньшее количество компонент поля, которые преобразовывались бы по формулам (5.4.3) и (5.4.6) с неприводимым набором матриц γ_{μ} .

Всякий набор матриц, удовлетворяющих соотношению вида (5.4.5) (или его евклидовому аналогу, в котором $\eta_{\mu\nu}$ заменено на кронекеровский дельта-символ), называется *алгеброй Клиффорда*. Важность этого представления однородной группы Лоренца (точнее, ее накрывающей группы) связана с тем, что наиболее общее неприводимое представление группы Лоренца является тензором либо спинором, преобразующимися по формулам (5.4.3), (5.4.6), или прямым произведением спинора и тензора (доказательство приведено в разделе 5.6).

Смысл перестановочного соотношения (5.4.7) заключается в том, что γ^{ρ} является *вектором*, т. е. с учетом формулы (5.4.3) выполнено равенство

$$D(\Lambda)\gamma^{\rho}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\sigma}^{\rho}\gamma^{\sigma}. \quad (5.4.8)$$

Точно так же единичная матрица тривиально является *скаляром*:

$$D(\Lambda)1D^{-1}(\Lambda) = 1, \quad (5.4.9)$$

и из (5.4.4) следует, что $g^{\rho\sigma}$ есть антисимметричный тензор:

$$D(\Lambda)g^{\rho\sigma}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\mu}^{\rho}\Lambda_{\nu}^{\sigma}g^{\mu\nu}. \quad (5.4.10)$$

С помощью матриц γ^{μ} можно построить другие полностью антисимметричные тензоры

$$\epsilon^{\rho\sigma\tau} \equiv \gamma^{[\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau]}, \quad (5.4.11)$$

$$\varphi^{\rho\sigma\tau\eta} = \gamma^{[\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau}\gamma^{\eta]}. \quad (5.4.12)$$

Квадратные скобки в этих выражениях являются стандартным обозначением того, что производится суммирование по всем перестановкам индексов внутри скобок, а знаки «плюс» или «минус» определяются четностью перестановки. Например, формула (5.4.11) есть сокращенная запись выражения

$$\not{A}^{\rho\sigma\tau} \equiv \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau - \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\tau + \gamma^\tau \gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\rho - \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\rho.$$

Множественно используя формулу (5.4.5), можно записать любое произведение γ -матриц как сумму антисимметризованных произведений γ -матриц, умноженных на произведение метрических тензоров, так что полностью антисимметричные тензоры образуют полный базис множества всех матриц, которые можно построить из матриц Дирака.

Этот формализм автоматически содержит преобразование четности, которое принято выбирать в виде

$$\beta \equiv i\gamma^0. \quad (5.4.13)$$

В применении к матрицам Дирака имеем:

$$\beta \gamma^i \beta^{-1} = -\gamma^i, \quad \beta \gamma^0 \beta^{-1} = +\gamma^0. \quad (5.4.14)$$

(Индексы выбраны так, что μ пробегает значения 0, 1, 2, ...) Такое же преобразование подобия, примененное к любому произведению γ -матриц, приведет к появлению дополнительного знака «плюс» или «минус» в зависимости от того, содержит ли произведение четное или нечетное число γ -матриц с пространственными индексами. В частности,

$$\beta g^{ij} \beta^{-1} = g^{ij}, \quad (5.4.15)$$

$$\beta g^{i0} \beta^{-1} = -g^{i0}. \quad (5.4.16)$$

Все, что до сих пор говорилось в этом разделе, применимо для любого числа пространственно-временных измерений и для любой «метрики» $\eta_{\mu\nu}$. Однако в четырехмерном пространстве-времени существует дополнительное ограничение, что ни один полностью антисимметричный тензор не может иметь более четырех индексов, так что последовательность тензоров $\mathbf{1}$, γ^ρ , $g^{\rho\sigma}$, $\not{A}^{\rho\sigma\tau}$, ... обрывается на тензоре

(5.4.12). Далее, каждый из этих тензоров преобразуется по-разному под действием преобразований Лоренца и/или четности, так что все они линейно независимы*. Число линейно независимых компонент этих тензоров равно единице для $\mathbf{1}$, четырем для γ^{ρ} , шести для $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$, четырем для $\mathcal{I}^{\rho\sigma}$, и единице для $\mathcal{P}^{\mu\nu\rho\sigma}$, т. е. всего шестнадцать компонент. (По общему правилу полностью антисимметричный тензор с n индексами в пространстве d измерений имеет число компонент, равное биномиальному коэффициенту $d!/n!(d-n)!$) Существуют не более чем v^2 независимых $v \times v$ матриц, так что наши матрицы должны иметь не меньше, чем $\sqrt{16} = 4$ строк и столбцов. Матрицы Дирака минимальной размерности с необходимостью неприводимы; если бы это было не так, то подпространство, оставляемое инвариантным этими матрицами, реализовало бы представление меньшей размерности. Поэтому примем, что γ^{μ} есть матрицы 4×4 .

(В более общем случае, при любом четном числе d пространственно-временных измерений, можно построить антисимметричные тензоры с $0, 1, \dots, d$ индексами и с общим числом независимых компонент, равным

$$\sum_{n=0}^d \frac{d!}{n!(d-n)!} = 2^d.$$

Тогда γ -матрицы должны иметь как минимум $2^{d/2}$ строк и столбцов. Для пространства или пространства-времени нечетной размерности полностью антисимметричные тензоры ранга n и $d-n$ могут быть связаны линейными условиями

$$\gamma^{[\mu_1 \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_r}]} \propto \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d} \gamma_{[\mu_{r+1} \gamma_{\mu_{r+2}} \dots \gamma_{\mu_d}],}$$

при $r = 1, 2, \dots, d-1$, где $\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d}$ — полностью антисимметричный тензор, а при $r = 0$ левая часть равна единичной матрице. При

* То, что эти матрицы линейно независимы, можно показать другим способом, заметив, что они образуют ортогональное множество со скалярным произведением двух матриц, определенным, как след от их произведения. Заметим, что ни одна из матриц не может равняться нулю, т. к. каждая компонента каждого тензора пропорциональна произведению разных γ -матриц, а квадрат такого произведения равен с точностью до знака произведению соответствующих квадратов, т. е. равен ± 1 .

таких условиях* есть только 2^{d-1} независимых тензоров, откуда минимальная размерность γ -матриц равна $2^{(d-1)/2}$.

Возвращаясь к четырехмерному пространству-времени, выберем явно набор 4×4 γ -матриц. Удобным является следующий выбор:

$$\gamma^0 = -i \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = -i \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4.17)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная 2×2 матрица, а компоненты вектор-матрицы $\boldsymbol{\sigma}$ — обычные матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.18)$$

(Матрицы σ_i как раз являются 2×2 γ -матрицами в трех измерениях.) Можно показать⁵, что любой другой неприводимый набор γ -матриц связан с этими матрицами преобразованием подобия. С помощью формул (5.4.17) без труда вычисляются генераторы группы Лоренца:

$$J^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix}, \quad (5.4.19)$$

$$J^{i0} = +\frac{i}{2} \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix}. \quad (5.4.20)$$

* Это ограничение не мешает включению пространственной инверсии в дираковское представление группы Лоренца в нечетномерном пространстве-времени, т. к. тензор $\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d}$ четен по отношению к инверсии пространственных координат. Если нас не заботит пространственная инверсия, можно построить $2^{(d-2)/2}$ -мерные неприводимые представления собственной ортохронной группы Лоренца в пространстве-времени четного числа измерений, наложив упомянутые выше ограничения, связывающие антисимметризованные произведения r и $d-r$ матриц Дирака. Примером могут служить подматрицы в нижеприведенных формулах (5.4.19) и (5.4.20)

(Здесь ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор в трех измерениях, причем $\varepsilon_{123} \equiv +1$.) Заметим, что они блочно-диагональны, так что матрицы Дирака реализуют *приводимое* представление собственной ортохронной группы Лоренца, являющееся прямой суммой двух неприводимых представлений с $g^{ij} = \pm \varepsilon_{ijk} g^{k0}$.

Удобно записать полностью антисимметричные тензоры (5.4.11) и (5.4.12) в несколько более простом виде. Матрица (5.4.12) полностью антисимметрична, следовательно, пропорциональна псевдотензору $\varepsilon^{\rho\sigma\tau\eta}$, определенному как полностью антисимметричная величина с $\varepsilon^{0123} = +1$. Полагая индексы ρ, σ, τ, η последовательно равными 0, 1, 2, 3, видим, что

$$\mathcal{J}^{\rho\sigma\tau\eta} = 4! i \varepsilon^{\rho\sigma\tau\eta} \gamma_5, \quad (5.4.21)$$

где

$$\gamma_5 \equiv -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (5.4.22)$$

Матрица γ_5 является псевдоскаляром в том смысле, что

$$[\mathcal{J}^{\rho\sigma}, \gamma_5] = 0, \quad (5.4.23)$$

$$\beta \gamma_5 \beta^{-1} = -\gamma_5. \quad (5.4.24)$$

Аналогично, $\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}$ должна быть пропорциональна тензору $\varepsilon^{\rho\sigma\tau\eta}$, свернутому с некоторой матрицей \mathcal{A}_η . Полагая индексы ρ, σ, τ по очереди равными 0, 1, 2, или 0, 1, 3, или 0, 2, 3, или 1, 2, 3, находим:

$$\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} = 3! i \varepsilon^{\rho\sigma\tau\eta} \gamma_5 \gamma_\eta. \quad (5.4.25)$$

Шестнадцать независимых 4×4 матриц могут быть поэтому выбраны как компоненты скаляра 1, вектора γ^ρ , антисимметричного тензора $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$, «аксиального» вектора $\gamma_5 \gamma_\eta$ и псевдоскаляра γ_5 . Легко видеть, что квадрат матрицы γ_5 равен единице:

$$\gamma_5^2 = 1, \quad (5.4.26)$$

а сама эта матрица антикоммутирует со всеми γ^μ :

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (5.4.27)$$

Обозначение γ_5 особенно удобно, т. к. соотношения антикоммутиации (5.4.26) и (5.4.27) вместе с формулой (5.4.5) показывают, что $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma_5$ реализуют алгебру Клиффорда в пяти пространственно-временных измерениях. В конкретном 4×4 представлении γ -матриц (5.4.17) матрица γ_5 имеет вид

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.28)$$

Удобство такого представления состоит в том, что в нем $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ и γ_5 имеют блочно-диагональный вид. Мы увидим далее, что это свойство окажется особенно полезным при рассмотрении частиц в ультрарелятивистском пределе, когда $v \rightarrow c$. (Однако, это представление не совпадает с тем, которое описано в разделе 1.1 и которое ввел Дирак, поскольку он интересовался, главным образом, поведением атомных электронов, для которых $v \ll c$. В этом случае удобнее использовать представление, в котором диагональна не матрица γ_5 , а матрица γ^0 .)

Построенное здесь представление однородной группы Лоренца не унитарно, т. к. не все генераторы $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ являются эрмитовыми матрицами. В частности, в представлении (5.4.17) матрицы \mathcal{J}^{ij} эрмитовы, но \mathcal{J}^{i0} антиэрмитовы. Условия действительности удобно записать в явно лоренц-инвариантной форме, введя матрицу $\beta \equiv i\gamma^0$ (5.4.13), которая в представлении (5.4.17) принимает вид

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4.29)$$

Из (5.4.17) следует, что

$$\beta \gamma^{\mu\dagger} \beta = -\gamma^\mu, \quad (5.4.30)$$

откуда

$$\beta \mathcal{J}^{\rho\sigma\dagger} \beta = \mathcal{J}^{\rho\sigma}. \quad (5.4.31)$$

Следовательно, хотя матрицы $D(\Lambda)$ не унитарны, они удовлетворяют соотношению псевдоунитарности:

$$\beta D(\Lambda)^\dagger \beta = D(\Lambda)^{-1}. \quad (5.4.32)$$

Далее, γ_5 эрмитова и антикоммутирует с β , так что

$$\beta\gamma_5^\dagger\beta = -\gamma_5, \quad (5.4.33)$$

откуда следует, что

$$\beta(\gamma_5\gamma_\mu)^\dagger\beta = -\gamma_5\gamma_\mu. \quad (5.4.34)$$

Матрицы Дирака и связанные с ними матрицы обладают рядом важных свойств симметрии. Из формул (5.4.17) и (5.4.18) вытекает, что γ_μ симметричны при $\mu = 0, 2$ и антисимметричны при $\mu = 1, 3$, так что

$$\gamma_\mu^T = -\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}, \quad (5.4.35)$$

где T означает транспонирование, и

$$\mathcal{C} \equiv \gamma_2\beta = -i \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (5.4.36)$$

Отсюда сразу же следует, что

$$J_{\mu\nu}^T = -\mathcal{C}J_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1}, \quad (5.4.37)$$

$$\gamma_5^T = +\mathcal{C}\gamma_5\mathcal{C}^{-1}, \quad (5.4.38)$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^T = +\mathcal{C}\gamma_5\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}. \quad (5.4.39)$$

Полученные знаки окажутся важными, когда мы в следующем разделе будем рассматривать свойства разных токов по отношению к зарядовому сопряжению. Конечно, можно объединить полученные результаты для сопряжения и транспонирования, и получить правила комплексного сопряжения дираковских и связанных с ними матриц:

$$\gamma_\mu^* = \beta\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}\beta, \quad (5.4.40)$$

$$J_{\mu\nu}^* = -\beta\mathcal{C}J_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1}\beta, \quad (5.4.41)$$

$$\gamma_5^* = -\beta \epsilon \gamma_5 \epsilon^{-1} \beta, \quad (5.4.42)$$

$$(\gamma_5 \gamma_\mu)^* = -\beta \epsilon \gamma_5 \gamma_\mu \epsilon^{-1} \beta. \quad (5.4.43)$$

5.5. Причинные дираковские поля

Мы хотим теперь построить поля уничтожения и рождения частиц, преобразующиеся по обсуждавшемуся в предыдущем разделе дираковскому представлению группы Лоренца. Эти поля имеют общий вид, задаваемый формулами (5.1.17) и (5.1.18):

$$\psi_l^+(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.1)$$

$$\psi_l^{-c}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p v_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.2)$$

(метка сорта частиц опущена). Чтобы вычислить входящие в эти формулы коэффициентные функции $u_l(\mathbf{p}, \sigma)$ и $v_l(\mathbf{p}, \sigma)$, необходимо сначала использовать (5.1.25) и (5.1.26) и найти u_l и v_l для нулевого импульса, а затем с помощью (5.1.21) и (5.1.22) вычислить их для произвольных импульсов. В обоих случаях $D_{ll}(\Lambda)$ следует брать как 4×4 дираковское представление однородной группы Лоренца. С помощью (5.4.19) условия при нулевом импульсе (5.1.25) и (5.1.26) принимают вид *

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{m}\pm}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j)} = \sum_m \frac{1}{2} \sigma_{\bar{m}m} u_{m\pm}(0, \sigma),$$

* Мы опустили индекс сорта частиц n и заменили 4-компонентный индекс l на пару индексов: принимающий два значения индекс m , нумерующий строки и столбцы подматриц в (5.4.19) и (5.4.20), и второй индекс, принимающий значения \pm и отмечающий строки и столбцы суперматрицы в (5.4.19) и (5.4.20).

$$-\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{m}\pm}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \sum_m \frac{1}{2} \sigma_{\bar{m}m} v_{m\pm}(0, \sigma).$$

Иными словами, если рассматривать $u_{m\pm}(0, \sigma)$ и $v_{m\pm}(0, \sigma)$ как m, σ элементы матриц U_{\pm} и V_{\pm} , то в матричных обозначениях

$$U_{\pm} \mathbf{J}^{(j)} = \frac{1}{2} \sigma U_{\pm}, \quad (5.5.3)$$

$$-V_{\pm} \mathbf{J}^{(j)*} = \frac{1}{2} \sigma V_{\pm}. \quad (5.5.4)$$

Далее, $(2j + 1)$ -мерные матрицы $\mathbf{J}^{(j)}$ и $-\mathbf{J}^{(j)*}$, а также 2×2 матрицы $\sigma/2$ реализуют неприводимые представления алгебры Ли группы вращений. Общая теорема теории групп, известная как лемма Шура⁶, утверждает, что если матрица вида U_{\pm} или V_{\pm} связывает два таких представления, как в (5.5.3) и (5.5.4), эта матрица должна либо равняться нулевой матрице (случай, не представляющий интереса), либо быть квадратной и несингулярной. Поэтому дираковское поле может описывать только частицы со спином $j = \frac{1}{2}$ (так что $2j + 1 = 2$), а матрицы $\mathbf{J}^{(1/2)}$ и $-\mathbf{J}^{(1/2)*}$ должны совпадать с $\sigma/2$ с точностью до преобразования подобия. На самом деле, в стандартном представлении генераторов вращений (2.5.1) и (2.5.2) матрицы $\mathbf{J}^{(1/2)} = \frac{1}{2} \sigma$ и $-\mathbf{J}^{(1/2)*} = \frac{1}{2} \sigma_2 \sigma \sigma_2$. Тогда получаем, что U_{\pm} и $V_{\pm} \sigma_2$ должны коммутировать с σ , следовательно, они должны быть пропорциональны единичной матрице:

$$u_{m,\pm}(0, \sigma) = c_{\pm} \delta_{m\sigma}, \quad v_{m,\pm}(0, \sigma) = id_{\pm} (\sigma_2)_{m\sigma}. \quad (5.5.5)$$

Иначе говоря,

$$u(0, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} c_+ \\ 0 \\ c_- \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(0, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_+ \\ 0 \\ c_- \end{bmatrix},$$

$$v(0, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ d_+ \\ 0 \\ d_- \end{bmatrix}, \quad v(0, -\frac{1}{2}) = - \begin{bmatrix} d_+ \\ 0 \\ d_- \\ 0 \end{bmatrix}.$$

и спиноры при конечном импульсе равны

$$u(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} D(L(p)) u(0, \sigma), \quad (5.5.6)$$

$$v(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} D(L(p)) v(0, \sigma). \quad (5.5.7)$$

Остается выяснить, чему равны константы c_{\pm} и d_{\pm} . Вообще говоря, они совершенно произвольны — можно даже выбрать c_{-} и d_{-} или c_{+} и d_{+} равными нулю, так что дираковское поле будет иметь лишь две отличные от нуля компоненты. Единственное физическое условие, которое может как-то определить относительные значения c_{\pm} и d_{\pm} , это сохранение четности. Напомним, что в результате пространственной инверсии операторы уничтожения частиц и рождения античастиц подвергаются преобразованию

$$Pa(\mathbf{p}, \sigma)P^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.8)$$

$$Pa^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)P^{-1} = \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.9)$$

так что

$$P\Psi_l^{\dagger}(x)P^{-1} = \eta^* (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_l(-\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot \mathcal{P}x} a(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.10)$$

$$P\Psi_l^{-c}(x)P^{-1} = \eta^c (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p v_l(-\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot \mathcal{P}x} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.11)$$

Кроме того, из формул (5.4.16), (5.1.21) и (5.1.22) следует, что

$$u(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} \beta D(L(\mathbf{p})) \beta u(0, \sigma), \quad (5.5.12)$$

$$v(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{m/p^0} \beta D(L(\mathbf{p})) \beta v(0, \sigma). \quad (5.5.13)$$

(Поскольку $\beta^2 = 1$, мы более не делаем различия между β и β^{-1} .) Для того, чтобы оператор четности переводил поля уничтожения и рождения в точке x в нечто, пропорциональное этим полям в точке $\mathcal{P}x$, необходимо, чтобы $\beta u(0, \sigma)$ и $\beta v(0, \sigma)$ были бы пропорциональны $u(0, \sigma)$ и $v(0, \sigma)$, соответственно:

$$\beta u(0, \sigma) = b_u u(0, \sigma), \quad \beta v(0, \sigma) = b_v v(0, \sigma), \quad (5.5.14)$$

где b_u и b_v — знаковые множители, квадраты которых равны единице, $b_u^2 = b_v^2 = 1$. В таком случае поля будут простым образом преобразовываться при пространственной инверсии:

$$P\psi^+(x)P^{-1} = \eta^* b_u \beta \psi^+(\mathcal{P}x), \quad (5.5.15)$$

$$P\psi^{-c}(x)P^{-1} = \eta^c b_v \beta \psi^{-c}(\mathcal{P}x). \quad (5.5.16)$$

Подбором общего масштаба полей можно добиться, чтобы коэффициентные функции при нулевом импульсе имели вид

$$u(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(0, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_u \end{bmatrix}, \quad (5.5.17)$$

$$v(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_v \end{bmatrix}, \quad v(0, -\frac{1}{2}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5.18)$$

Попробуем теперь объединить поля уничтожения и рождения в линейную комбинацию

$$\Psi(x) = \kappa \psi^+(x) + \lambda \psi^{-c}(x), \quad (5.5.19)$$

которая коммутирует или антикоммутирует сама с собой и с сопряженной величиной в точках, разделенных пространственноподобным интервалом. Прямое вычисление дает:

$$[\Psi_l(x), \Psi_l^\dagger(y)]_{\mp} = \int d^3p \left[|\kappa|^2 N_{ll}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot (x-y)} \mp |\lambda|^2 M_{ll}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot (x-y)} \right], \quad (5.5.20)$$

где

$$N_{\bar{l}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} u_l(\mathbf{p}, \sigma) u_l^*(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.21)$$

$$M_{\bar{l}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} v_l(\mathbf{p}, \sigma) v_l^*(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.22)$$

Используя либо условия на собственные значения (5.5.14), либо явные формулы (5.5.17) и (5.5.18), находим, что при нулевом импульсе

$$N(0) = \frac{1 + b_u \beta}{2(2\pi)^3}, \quad M(0) = \frac{1 + b_v \beta}{2(2\pi)^3}. \quad (5.5.23)$$

Тогда из (5.5.6) и (5.5.7) получаем:

$$N(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0} D(L(p)) [1 + b_u \beta] D^\dagger(L(p)), \quad (5.5.24)$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0} D(L(p)) [1 + b_v \beta] D^\dagger(L(p)). \quad (5.5.25)$$

Из условия псевдоунитарности (5.4.32) следует:

$$D(L(p)) \beta D^\dagger(L(p)) = \beta,$$

$$D(L(p)) D^\dagger(L(p)) = D(L(p)) \beta D^{-1}(L(p)) \beta.$$

Напомним также, что $\beta = -i\gamma^0$, так что с помощью закона лоренцовского преобразования (5.4.8) находим:

$$D(L(p)) \beta D^{-1}(L(p)) = -i L_\mu^0(p) \gamma^\mu = -i p_\mu \gamma^\mu / m. \quad (5.5.26)$$

Собирая результаты, получаем *:

* Иногда в дираковские спиноры включают дополнительный множитель $(p^0/m)^{1/2}$, так что в знаменателях формул суммирования по спинам (5.5.27) и (5.5.28) появляется m вместо p^0 . Используемое здесь условие нормировки имеет то преимущество, что оно выдерживает плавный переход к случаю $m = 0$.

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + b_u m] \beta, \quad (5.5.27)$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + b_v m] \beta. \quad (5.5.28)$$

Подставляя в формулу (5.5.20), находим окончательно:

$$[\Psi_l(x), \Psi_l^\dagger(y)]_{\mp} = \left(|\kappa|^2 [-\gamma^\mu \partial_\mu + b_u m] \beta \Delta_+(x-y) \mp |\lambda|^2 [-\gamma^\mu \partial_\mu + b_v m] \beta \Delta_+(y-x) \right)_{\bar{l}}, \quad (5.5.29)$$

где Δ_+ — введенная в разделе 5.2 функция

$$\Delta_+(x) \equiv \int \frac{d^3 p}{2p^0 (2\pi)^3} e^{ip \cdot x}.$$

В разделе 5.2 было показано, что при пространственноподобных $x-y$ функция $\Delta_+(x-y)$ является четной, поэтому, конечно, ее первые производные — нечетные функции $x-y$. Отсюда, для того, чтобы и обе производные, и слагаемые, не содержащие производных, в коммутаторе или антикоммутаторе обратились бы в нуль на пространственноподобных расстояниях, необходимо и достаточно, чтобы

$$|\kappa|^2 = \mp |\lambda|^2, \quad (5.5.30)$$

$$|\kappa|^2 b_u = \pm |\lambda|^2 b_v. \quad (5.5.31)$$

Ясно, что условие (5.5.30) будет выполнено только, если выбрать нижний знак «плюс». Иными словами, *частицы, описываемые дираковским полем, должны быть фермионами*. Отсюда с необходимостью следует, что $|\kappa|^2 = |\lambda|^2$ и $b_u = -b_v$. Как и в случае скалярного поля, можно переопределить относительную фазу операторов уничтожения и рождения так, чтобы отношение κ/λ стало действительным. В этом случае $\kappa = \lambda$ и подбором общего масштабного множителя и фазы поля Ψ можно выбрать

$$\kappa = \lambda = 1. \quad (5.5.32)$$

Наконец, при желании можно заменить Ψ на $\gamma_5\Psi$, что одновременно меняет знаки у b_u и b_v , так что можно всегда выбрать

$$b_u = -b_v = +1. \quad (5.5.33)$$

Для будущих применений выпишем окончательный вид дираковского поля:

$$\Psi_l(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p [u_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + v_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)], \quad (5.5.34)$$

где коэффициентные функции при нулевом импульсе равны:

$$u(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(0, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.5.35)$$

$$v(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v(0, -\frac{1}{2}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5.36)$$

Суммирование по спинам осуществляется по формулам

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu + m] \beta, \quad (5.5.37)$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0} [-ip^\mu \gamma_\mu - m] \beta, \quad (5.5.38)$$

так что антикоммутатор (5.5.20) имеет вид:

$$[\Psi_l(x), \Psi_l^\dagger(y)]_+ = \{[-\gamma^\mu \partial_\mu + m] \beta\}_{ll} \Delta(x-y). \quad (5.5.39)$$

Вернемся теперь к требованию, что в результате пространственной инверсии поле $\psi(x)$ должно переходить в нечто, пропорциональное $\psi(\mathcal{A}x)$. Чтобы это было возможным, фазы в формулах (5.5.15) и (5.5.16) должны быть равны друг другу, откуда внутренние четности частиц и их античастиц должны быть связаны соотношением:

$$\eta^c = -\eta^*. \quad (5.5.40)$$

Иными словами, *внутренняя четность $\eta\eta^c$ системы, состоящей из частицы со спином $1/2$ и ее античастицы, равна -1* . Именно по этой причине мезоны с отрицательной внутренней четностью, такие как ρ^0 и J/ψ , можно интерпретировать как s -волновые связанные состояния кварк-антикварковых пар. Из формул (5.5.15) и (5.5.16) находим закон преобразования дираковского поля в результате пространственной инверсии:

$$P\psi(x)P^{-1} = \eta^*\beta\psi(\mathcal{A}x). \quad (5.5.41)$$

Прежде чем переходить к другим инверсиям, уместно заметить, что формулы (5.5.14), (5.5.33) и (5.5.26) показывают, что $u(\mathbf{p},s)$ и $v(\mathbf{p},s)$ являются собственными векторами оператора $-ip^\mu\gamma_\mu/m$ с собственными значениями $+1$ и -1 , соответственно:

$$(ip^\mu\gamma_\mu + m)u(\mathbf{p},\sigma) = 0, \quad (-ip^\mu\gamma_\mu + m)v(\mathbf{p},\sigma) = 0. \quad (5.5.42)$$

Отсюда вытекает, что поле (5.5.33) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0. \quad (5.5.43)$$

Это знаменитое уравнение Дирака для свободной частицы со спином $1/2$. С принятой здесь точки зрения, уравнение Дирака для свободной частицы есть не что иное, как лоренц-инвариантная запись использованного нами условия, чтобы объединение двух неприводимых представлений собственной ортохронной группы Лоренца давало поле, простым образом преобразующееся при пространственной инверсии.

Чтобы установить свойства дираковского поля по отношению к преобразованиям зарядового сопряжения и обращения времени,

нам нужны выражения для комплексно сопряженных коэффициентов функций u и v . При нулевом импульсе эти функции действительны, но чтобы получить коэффициентные функции при конечном импульсе, мы должны умножить их на комплексную матрицу $D(L(p))$. Из формулы (5.441) следует, что для произвольных действительных $\omega_{\mu\nu}$

$$[\exp(\frac{1}{2} i\mathcal{G}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})]^* = \beta\mathcal{C}\exp(\frac{1}{2} i\mathcal{G}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})\mathcal{C}^{-1}\beta,$$

так что, в частности,

$$D(L(p))^* = \beta\mathcal{C}D(L(p))\mathcal{C}^{-1}\beta.$$

Заметим также, что $\mathcal{C}^{-1}\beta u(0,\sigma) = -v(0,\sigma)$ и $\mathcal{C}^{-1}\beta v(0,\sigma) = -u(0,\sigma)$, так что

$$u_l^*(\mathbf{p},\sigma) = -\beta\mathcal{C}v_l(\mathbf{p},\sigma), \quad (5.544)$$

$$v_l^*(\mathbf{p},\sigma) = -\beta\mathcal{C}u_l(\mathbf{p},\sigma). \quad (5.545)$$

Для того, чтобы поле, получающееся при зарядовом сопряжении, коммутировало бы с исходным полем на пространственноподобных расстояниях, нужно, чтобы зарядовые четности частицы и античастицы были бы связаны соотношением

$$\xi^c = \xi^*. \quad (5.546)$$

В этом случае поле преобразуется по правилу

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = -\xi^*\beta\mathcal{C}\psi^*(x). \quad (5.547)$$

(Мы обозначаем эрмитово сопряженное поле в правой части ψ^* , а не ψ^\dagger , с тем чтобы подчеркнуть, что это все еще вектор-столбец, а не строка.)

Мы все время различали частицы и их античастицы, но не исключена возможность, что они на самом деле тождественны. Подобные частицы со спином 1/2 называются *майорановскими фермионами*. Рассуждая по той же схеме, которая привела

к (5.5.47), получаем, что дираковское поле такой частицы должно удовлетворять условию действительности:

$$\psi(x) = -\beta \mathcal{C} \psi^*(x). \quad (5.5.48)$$

Внутренняя пространственная четность майорановских фермионов должна быть мнимой, $\eta = \pm i$, а четность относительно зарядового сопряжения — действительной, $\xi = \pm 1$.

Существует важное различие между фермионами и бозонами, касающееся внутренней фазы, возникающей при зарядовом сопряжении состояний системы, состоящей из частицы и ее античастицы. Такое состояние имеет вид

$$\Phi \equiv \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3 p \int d^3 p' \chi(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}', \sigma') \Phi_0,$$

где Φ_0 — вакуумное состояние. При зарядовом сопряжении такое состояние преобразуется в

$$C\Phi \equiv \xi^* \xi^{c*} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3 p \int d^3 p' \chi(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma') \Phi_0.$$

Меняя местами переменные интегрирования и суммирования и используя соотношения антикоммутации операторов рождения и формулу (5.5.46), можно переписать последнее выражение как

$$C\Phi \equiv - \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3 p \int d^3 p' \chi(\mathbf{p}', \sigma'; \mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}', \sigma') \Phi_0.$$

Отсюда находим, что *внутренняя зарядовая четность системы, состоящей из частицы, описываемой дираковским полем, и ее античастицы, равна -1* . Это означает следующее: если волновая функция χ состояния четна или нечетна по отношению к перестановке импульсов и спинов частицы и античастицы, то оператор зарядового сопряжения при действии на такое состояние дает соответственно -1 или $+1$. Классическим примером использования этих правил является позитроний, связанное состояние электрона и позитрона. Два низших энергетических состояния являются почти вырожденными s -волновыми состояниями с полным спином $s = 0$ и $s = 1$.

Их называют соответственно пара- и ортопозитронием. Волновая функция обоих состояний четна по отношению к перестановке импульсов, и нечетна или четна при перестановке z -компонент спина, так что паразитроний и ортопозитроний имеют зарядовую четность $C = +1$ и $C = -1$, соответственно. Такие значения решающим образом влияют на возможные моды распада позитрония: паразитроний быстро распадается на пару фотонов (у каждого из которых $C = -1$), а ортопозитроний может только значительно медленнее распадаться на три или более фотонов. Точно так же, одиночные мезоны ρ^0 и ω^0 рождаются как резонансы при аннигиляции электрон-позитронных пар больших энергий через однофотонное промежуточное состояние, так что у этих мезонов должно быть $C = -1$. Это совместимо с интерпретацией таких мезонов как кварк-антикварковых связанных состояний с нулевым орбитальным моментом и суммарным спином кварков, равным единице.

Перейдем, наконец, к обращению времени. Напомним свойства преобразований операторов уничтожения частиц и рождения античастиц (формула (4.2.15)):

$$T a(\mathbf{p}, \sigma) T^{-1} = \zeta^* (-1)^{1/2-\sigma} a(-\mathbf{p}, -\sigma), \quad (5.5.49)$$

$$T a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) T^{-1} = \zeta^c (-1)^{1/2-\sigma} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma). \quad (5.5.50)$$

Тогда при обращении времени поле (5.5.34) преобразуется как

$$\begin{aligned} T \psi_l(x) T^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3 p (-1)^{1/2-\sigma} \\ &\times [\zeta^* u_l^*(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a(-\mathbf{p}, -\sigma) + \zeta^c v_l^*(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma)]. \end{aligned}$$

Чтобы записать это выражение в такой же форме как ψ , следует заменить переменные интегрирования и суммирования на $-\mathbf{p}$ и $-\sigma$, так что нам нужны формулы, связывающие $u_l^*(-\mathbf{p}, -s)$ и $v_l^*(-\mathbf{p}, -s)$ с $u_l(\mathbf{p}, s)$ и $v_l(\mathbf{p}, s)$, соответственно. Для этого можно использовать то, что \not{y}^{i0} антикоммутирует с β и коммутирует с γ_5 . С учетом предыдущего выражения для $D(L(\mathbf{p}))^*$ можно записать:

$$D^*(L(-\mathbf{p})) = \gamma_5 \beta D^*(L(\mathbf{p})) \beta \gamma_5 = \gamma_5 \not{e} D(L(\mathbf{p})) \not{e}^{-1} \gamma_5.$$

Далее, из формул (5.4.36) и (5.5.35)–(5.5.36) следует

$$\gamma_5 \mathcal{C}^{-1} u(0, -\sigma) = (-1)^{1/2-\sigma} u(0, \sigma),$$

$$\gamma_5 \mathcal{C}^{-1} v(0, -\sigma) = (-1)^{1/2-\sigma} v(0, \sigma),$$

так что

$$(-1)^{1/2+\sigma} u^*(-\mathbf{p}, -\sigma) = -\gamma_5 \mathcal{C} u(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.5.51)$$

$$(-1)^{1/2+\sigma} v^*(-\mathbf{p}, -\sigma) = -\gamma_5 \mathcal{C} v(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.5.52)$$

Итак, чтобы операция обращения времени перевела дираковское поле в нечто, пропорциональное самому себе в обращенной по времени точке (причем чтобы эти поля антикоммутировали на пространственноподобных расстояниях), необходимо, чтобы внутренние фазовые множители, возникающие при обращении времени, были связаны соотношением

$$\zeta^c = \zeta^*. \quad (5.5.53)$$

В этом случае

$$T\psi(x)T^{-1} = -\zeta^* \gamma_5 \mathcal{C} \psi(-\mathcal{P}x). \quad (5.5.54)$$

Рассмотрим вопрос о том, как построить скалярные плотности гамильтониана взаимодействия из дираковских полей и сопряженных им полей. Как отмечалось, дираковское представление не унитарно, так что $\psi^\dagger \psi$ не является скаляром. Чтобы обойти эту трудность, удобно определить новый тип сопряженной величины:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \beta. \quad (5.5.55)$$

Используя условие псевдоунитарности (5.4.32), видим, что фермионные билинейные комбинации, построенные с помощью $\bar{\psi}$, под действием преобразований Лоренца изменяются по закону

$$U_0(\Lambda)[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]U_0^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(\Lambda x)D^{-1}(\Lambda)MD(\Lambda)\psi(\Lambda x). \quad (5.5.56)$$

Кроме того, при пространственной инверсии

$$P[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]P^{-1} = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\beta M\beta\psi(\mathcal{P}x). \quad (5.5.57)$$

Беря матрицу M в виде $\mathbf{1}$, γ^μ , $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma^\mu$, γ_5 , получаем билинейные комбинации $\bar{\psi}M\psi$, преобразующиеся как скаляр, вектор, тензор, аксиальный вектор и псевдоскаляр, соответственно. (Слово «аксиальный» и приставка «псевдо» означают, что эти комбинации преобразуются по отношению к пространственным отражениям противоположно тому, как преобразуются векторы и скаляры: четность псевдоскаляра отрицательна, а пространственные и временная компоненты аксиального вектора имеют, соответственно, положительную и отрицательную четности.) Эти результаты сохраняются, если два фермионных поля в билинейной комбинации принадлежат частицам разных сортов, не считая того, что в этом случае возникает отношение внутренних четностей.

Например, в первоначальной теории β -распада Ферми рассматривалась плотность гамильтониана взаимодействия, пропорциональная $\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu$. Позднее стало понятно, что наиболее общее лоренц-инвариантное, сохраняющее четность и не содержащее производных взаимодействие в β -распаде имеет вид линейной комбинации произведений указанного вида, в которых γ_μ заменено на любой из пяти ковариантов, образованных с помощью 4×4 матриц $\mathbf{1}$, γ^μ , $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma^\mu$, или γ_5 . (Как обсуждалось в гл. 2, оператор пространственной инверсии определен так, что внутренняя четность протона, нейтрона и электрона равна $+1$. Если нейтрино не имеет массы, то его четность также можно принять равным $+1$, заменив при необходимости поле нейтрино на $\gamma_5\psi_\nu$.) Когда в 1956 году Ли и Янг усомнились в справедливости закона сохранения четности, они расширили список возможных взаимодействий без производных, включив в него десять слагаемых, пропорциональных $\bar{\psi}_pM\psi_n\bar{\psi}_eM\psi_\nu$, а также $\bar{\psi}_pM\psi_n\bar{\psi}_eM\gamma_5\psi_\nu$, где M — одна из матриц $\mathbf{1}$, γ^μ , $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma^\mu$, γ_5 . Определенный интерес представляют свойства этих билинейных комбинаций по отношению к зарядовому сопряжению. Используя формулы (5.5.47) и (5.5.35)–(5.5.39), имеем:

$$\begin{aligned} C(\bar{\psi}M\psi)C^{-1} &= (\beta\psi)^T\beta M(\beta\psi^*) = -(\beta\psi^*)^T M^T\psi \\ &= \bar{\psi}C^{-1}M^T\psi = \pm\bar{\psi}M\psi, \end{aligned} \quad (5.5.58)$$

где в последнем выражении берется знак $+$ для матриц $\mathbf{1}$, $\gamma_5\gamma_\mu$ и γ_5 , и знак $-$ для γ_μ и $J_{\mu\nu}$. (Знак «минус» в первой строчке возникает за счет статистики Ферми. Мы игнорируем s -числовой антикоммутирующей.) Таким образом, бозонное поле, взаимодействующее с током $\bar{\psi}M\psi$, должно иметь $C = +1$ для скаляров, псевдоскаляров и аксиальных векторов, и $C = -1$ для векторов и антисимметричных тензоров. Это — один из способов понять, почему π^0 (взаимодействующий с псевдоскалярным или аксиальным током нуклонов) имеет $C = +1$, в то время как у фотона $C = -1$.

5.6. Общие неприводимые представления однородной группы Лоренца *

Перейдем от частных случаев векторного и дираковского полей к общему случаю поля, преобразующегося по общему неприводимому представлению однородной группы Лоренца. Все поля могут быть построены как прямые суммы таких неприводимых полей. Общее представление собственной ортохронной однородной группы Лоренца (точнее, ее инфинитезимальной части) реализуется множеством матриц $J_{\mu\nu}$, удовлетворяющих тем же коммутационным соотношениям (5.4.4), что и генераторы группы:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(J_{\rho\nu}\eta_{\sigma\mu} + J_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - J_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} - J_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}), \quad (5.6.1)$$

(Конечно, $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$ и индексы в $J_{\mu\nu}$ поднимаются и опускаются, как обычно, сверткой с тензорами $\eta^{\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}$.) Чтобы понять метод построения таких матриц, разделим сначала шесть независимых компонент $J_{\mu\nu}$ на два 3-вектора: матрицу углового момента

$$J_1 = J_{23}, \quad J_2 = J_{31}, \quad J_3 = J_{12} \quad (5.6.2)$$

и буст

$$K_1 = J_{10}, \quad K_2 = J_{20}, \quad K_3 = J_{30}. \quad (5.6.3)$$

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

Тогда формула (5.6.1) может быть записана в виде:

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k, \quad (5.6.4)$$

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k, \quad (5.6.5)$$

$$[\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] = -i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k, \quad (5.6.6)$$

где i, j, k принимают значения 1,2,3, а ϵ_{ijk} — полностью антисимметричная величина с $\epsilon_{123} \equiv +1$. Формула (5.6.4) указывает на то, что матрицы \mathcal{J} являются генераторами представления подгруппы вращений группы Лоренца, а формула (5.6.5) отражает тот факт, что \mathcal{K} есть 3-вектор. Знак «минус» в правой части формулы (5.6.6) возникает из-за того, что $\eta_{00} = -1$. Этот знак играет в дальнейшем решающую роль.

Очень удобно заменить матрицы \mathcal{J} и \mathcal{K} двумя независимыми спиновыми 3-векторами, записав

$$\mathcal{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{J} + i\mathcal{K}), \quad (5.6.7)$$

$$\mathcal{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{J} - i\mathcal{K}). \quad (5.6.8)$$

Легко видеть, что коммутационные соотношения (5.6.4)–(5.6.6) эквивалентны равенствам

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{A}_k, \quad (5.6.9)$$

$$[\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{B}_k, \quad (5.6.10)$$

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j] = 0. \quad (5.6.11)$$

Матрицы, удовлетворяющие соотношениям (5.6.9)–(5.6.11), можно найти так же, как это было сделано для матриц, представляющих спины пары невзаимодействующих частиц, т. е. в виде прямой суммы. Иначе говоря, отметим строки и столбцы этих матриц парой целых и/или полуцелых чисел a, b , пробегающих ряд значений

$$a = -A, -A + 1, \dots, +A, \quad (5.6.12)$$

$$b = -B, -B + 1, \dots, +B \quad (5.6.13)$$

и примем

$$(\mathcal{A})_{a'b',ab} = \delta_{b'b} \mathbf{J}_{a'a}^{(A)}, \quad (5.6.14)$$

$$(\mathcal{B})_{a'b',ab} = \delta_{a'a} \mathbf{J}_{b'b}^{(B)}, \quad (5.6.15)$$

где $\mathbf{J}^{(A)}$ и $\mathbf{J}^{(B)}$ – стандартные спиновые матрицы для спинов A и B :

$$\left(J_3^{(A)} \right)_{a'a} = a \delta_{a'a}, \quad (5.6.16)$$

$$\left(J_1^{(A)} \pm i J_2^{(A)} \right)_{a'a} = \delta_{a',a\pm 1} \sqrt{(A \mp a)(A \pm a + 1)}, \quad (5.6.17)$$

(аналогично для $\mathbf{J}^{(B)}$). Представление отмечается значениями положительных целых или полуцелых чисел A и B . Таким образом, представление (A, B) имеет размерность $(2A + 1)(2B + 1)$ *.

Конечномерные представления однородной группы Лоренца не унитарны, т. к. \mathcal{A} и \mathcal{B} эрмитовы, и поэтому \mathcal{J} эрмитова, но \mathcal{K} антиэрмитова. Причиной является присутствие i в формулах (5.6.7) и (5.6.8), что требуется наличием отрицательного знака в (5.6.6). Все это вытекает из того, что однородная группа Лоренца — не четырехмерная группа вращений $SO(4)$, которая компактна, а некомпактная группа $SO(3, 1)$. Только компактные группы имеют конечномерные унитарные представления (если не считать представлений, в которых некомпактная часть представлена тривиальной единицей). Однако при работе с неунитарными представлениями не возникает особых проблем, т. к. нас интересуют не волновые функции, а поля, которые не обязаны иметь лоренц-инвариантную положительную норму.

* Существует альтернативный формализм⁸, основанный на том факте, что представление группы вращений со спином j можно записать как симметризованное тензорное произведение $2j$ представлений со спином $1/2$, т. е. как симметричный тензор группы $SU(2)$ с $2j$ двузначными индексами. Поэтому можно записать поля, принадлежащие представлению (A, B) , с помощью $2A$ двузначных индексов представления $(1/2, 0)$ и $2B$ двузначных индексов представления $(0, 1/2)$, снабженных точками, чтобы отличать их от первой пары.

Напротив, группа вращений имеет унитарные представления, генераторы которых являются эрмитовыми матрицами

$$\mathcal{J} = \mathcal{A} + \mathcal{B}. \quad (5.6.18)$$

С помощью обычных правил сложения векторов можно убедиться, что поле, преобразующееся по представлению (A, B) однородной группы Лоренца, имеет компоненты, преобразующиеся при вращениях как объекты со спином j , причем

$$j = A + B, A + B - 1, \dots, |A - B|.$$

Этого достаточно, чтобы отождествить представления (A, B) с, по-видимому, более знакомыми тензорами и спинорами. Например, поле $(0, 0)$ является скаляром с единственной компонентой $j = 0$. Поля $(\frac{1}{2}, 0)$ или $(0, \frac{1}{2})$ могут иметь только $j = \frac{1}{2}$; они соответствуют двум верхним (т. е. $\gamma_5 = +1$) и двум нижним ($\gamma_5 = -1$) компонентам дираковского спинора. Поле $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ имеет компоненты с $j = 1$ и $j = 0$, соответствующие пространственной части \mathbf{v} и временной компоненте v^0 4-вектора v^μ . В общем случае поле (A, A) содержит слагаемые только с целыми спинами $2A, 2A-1, \dots, 0$, и соответствует бесследовому симметричному тензору ранга $2A$. (Заметим, что число независимых компонент симметричного тензора ранга $2A$ в четырех измерениях равно

$$\frac{4 \cdot 5 \dots (4 + 2A - 1)}{(2A)!} = \frac{(3 + 2A)!}{6(2A)!}$$

и условие бесследовости сводит это число к

$$\frac{(3 + 2A)!}{6(2A)!} - \frac{(1 + 2A)!}{6(2A - 2)!} = (2A + 1)^2,$$

как и следует ожидать для поля (A, A) .) Еще один пример: поля $(1, 0)$ и $(0, 1)$ могут иметь только компоненты $j = 1$ и соответствуют антисимметричным тензорам $F^{\mu\nu}$, удовлетворяющим дополнительным, обеспечивающим неприводимость, условиям «дуальности»

$$F^{\mu\nu} = \pm \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$$

соответственно; такие тензоры называются соответственно «самодуальными» и «антисамодуальными». Естественно, что разделение антисимметричного тензора $F^{\mu\nu}$ с двумя индексами на подобные «самодуальную» и «антисамодуальную» части возможно только в случае четырех измерений.

Произвольный тензор ранга N преобразуется как тензорное произведение N 4-векторных представлений $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Поэтому путем подходящих симметризации, антисимметризации и вычитания следа можно разложить его на неприводимые части (A, B) , где $A = N/2, N/2-1, \dots$ и $B = N/2, N/2-1, \dots$. Таким способом можно построить любое неприводимое представление (A, B) , для которого $A + B$ является целым числом. Спинорные представления, у которых $A + B$ — полуцелое, могут быть построены аналогичным образом из тензорных произведений тензорных представлений и дираковского представления $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Например, тензорное произведение векторного представления $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и дираковского представления $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ дает спин-вектор Ψ^μ , преобразующийся по приводимому представлению

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})] = (\frac{1}{2}, 1) \oplus (\frac{1}{2}, 0) \oplus (1, \frac{1}{2}) \oplus (0, \frac{1}{2}).$$

Величина $\gamma_\mu \Psi^\mu$ преобразуется как обычное дираковское поле $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, так что можно выделить представление $^*(\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2})$, потребовав выполнения условия $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$. Это поле *Рариты–Швингера* ⁹.

До сих пор в этом разделе мы рассматривали только представления собственной ортохронной группы Лоренца. В любом представлении группы Лоренца, включающей пространственную инверсию, должна существовать матрица β , изменяющая знаки тензоров с нечетным количеством пространственных индексов. В частности

$$\beta \mathcal{J} \beta^{-1} = +\mathcal{J}, \quad \beta \mathcal{K} \beta^{-1} = -\mathcal{K}. \quad (5.6.19)$$

* Согласно (5.6.18), такое поле преобразуется под действием обычных вращений как прямая сумма двух компонент с $j = 3/2$ и двух компонент с $j = 1/2$. Удвоение компонент устраняется требованием, чтобы выполнялось уравнение Дирака $[\gamma^\nu \partial_\nu + m]\Psi^\mu = 0$, а оставшаяся компонента с $j = 1/2$ устраняется наложением условия $\partial_\mu \Psi^\mu = 0$. При таких условиях поле описывает одну частицу со спином $j = 3/2$.

Записывая это равенство через матрицы (5.6.7) и (5.6.8), имеем

$$\beta \mathcal{A} \beta^{-1} = \mathcal{B}, \quad \beta \mathcal{B} \beta^{-1} = \mathcal{A}. \quad (5.6.20)$$

Таким образом, неприводимое представление (A, B) собственной ортохронной однородной группы Лоренца является представлением группы Лоренца, включающей пространственную инверсию, только в случае $A = B$. Как мы видели, такие представления (A, A) являются скалярами, векторами и симметричными тензорами со следом нуль. При $A \neq B$ неприводимые представления группы Лоренца, включающей пространственную инверсию, являются прямыми суммами $(A, B) \oplus (B, A)$ с размерностью $2(2A+1)(2B+1)$. Одним из них является дираковское представление $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, обсуждавшееся в разделе (5.4). Для этого представления матрицей β является 4×4 матрица (5.4.29). Другой знакомый пример — представление $(1, 0) \oplus (0, 1)$, которое, как мы видели, есть антисимметричный тензор второго ранга, содержащий как самодуальную, так и антисамодуальную части.

5.7. Причинные поля. Общий случай *

Попытаемся построить причинные поля, преобразующиеся по описанному в предыдущем разделе общему неприводимому представлению (A, B) группы Лоренца. Индекс l заменен ниже парой индексов a, b , принимающих значения в интервале (5.6.12), (5.6.13), так что поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{ab}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p & \left[\kappa a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \right. \\ & \left. + \lambda a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \right], \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

где κ и λ — произвольные константы. Мы оставляем открытой возможность, что такая частица совпадает со своей античастицей и $a^c(\mathbf{p}, \sigma) = a(\mathbf{p}, \sigma)$.

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

Первоочередной задачей является нахождение коэффициентных функций с нулевым импульсом $u_{ab}(0, \sigma)$ и $v_{ab}(0, \sigma)$. основополагающие условия (5.1.25)–(5.1.26), которым подчиняются $u(0, \sigma)$ и $v(0, \sigma)$, принимают вид:

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j)} = \sum_{a,b} \mathcal{J}_{\bar{a}\bar{b}, ab} u_{ab}(0, \sigma),$$

$$-\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j)*} = \sum_{a,b} \mathcal{J}_{\bar{a}\bar{b}, ab} v_{ab}(0, \sigma),$$

или, после использования соотношений (5.6.14)–(5.6.15),

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j)} = \sum_a \mathbf{J}_{\bar{a}\bar{a}}^{(A)} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \sigma) + \sum_b \mathbf{J}_{\bar{b}\bar{b}}^{(B)} u_{\bar{a}\bar{b}}(0, \sigma), \quad (5.7.2)$$

$$-\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j)*} = \sum_a \mathbf{J}_{\bar{a}\bar{a}}^{(A)} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \sigma) + \sum_b \mathbf{J}_{\bar{b}\bar{b}}^{(B)} v_{\bar{a}\bar{b}}(0, \sigma). \quad (5.7.3)$$

Но соотношение (5.7.2) есть не что иное, как условие, определяющее коэффициенты Клебша–Гордана $C_{AB}(j\sigma; ab)$! Действительно, эти коэффициенты определены требованием, что если Ψ_{ab} — состояния, преобразующиеся при бесконечно малых вращениях по правилу

$$\delta\Psi_{ab} = i \sum_a \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{\bar{a}\bar{a}}^{(A)} \Psi_{\bar{a}\bar{b}} + i \sum_b \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{\bar{b}\bar{b}}^{(B)} \Psi_{\bar{a}\bar{b}},$$

то под действием тех же вращений состояние

$$\Psi^j_{\bar{\sigma}} \equiv \sum_{ab} C_{AB}(j\sigma; ab) \Psi_{ab}$$

преобразуется по правилу

$$\delta\Psi^j_{\bar{\sigma}} = i \sum_{\bar{\sigma}} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j)} \Psi^j_{\bar{\sigma}}.$$

Рассмотрение формулы (5.7.2) показывает, что коэффициенты $u_{ab}(0, \sigma)$ удовлетворяют этому требованию, и поэтому $u_{ab}(0, \sigma)$ равны

$C_{AB}(j\sigma; ab)$ с точностью до возможного коэффициента пропорциональности. Принято выбирать эту константу так, что

$$u_{ab}(0, \sigma) = (2m)^{-1/2} C_{AB}(j\sigma; ab). \quad (5.7.4)$$

Этот результат единственен, поскольку каждое неприводимое представление (A, B) однородной группы Лоренца содержит данное представление группы вращений со спином j не более одного раза. Аналогично, изучение формул (5.6.16)–(5.6.17) показывает, что комплексно сопряженные матрицы углового момента равны

$$-\mathbf{J}_{\sigma\sigma'}^{(j)*} = (-1)^{\sigma-\sigma'} \mathbf{J}_{-\sigma, -\sigma'}^{(j)}. \quad (5.7.5)$$

Таким образом, если записать формулу (5.7.3) через $(-1)^{j-\sigma} v_{ab}(0, -\sigma)$, она примет тот же вид, что и формула (5.7.2). После подбора постоянного множителя единственное решение для $v(0, \sigma)$ принимает вид

$$v_{ab}(0, \sigma) = (-1)^{j+\sigma} u_{ab}(0, -\sigma). \quad (5.7.6)$$

Чтобы вычислить коэффициентные функции при конечном импульсе, следует совершить преобразование буста. Для заданного направления $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ буст (2.5.24) можно представить как функцию параметра θ , определенных равенствами

$$\text{ch}\theta = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} / m, \quad \text{sh}\theta = |\mathbf{p}|/m \quad (5.7.7)$$

и писать $L^\mu_\nu(\theta)$ вместо $L^\mu_\nu(p)$:

$$\begin{aligned} L^i_k(\theta) &= \delta_{ik} + (\text{ch}\theta - 1) \hat{p}_i \hat{p}_k, \\ L^i_0(\theta) &= L^0_i(\theta) = \hat{p}_i \text{sh}\theta, \\ L^0_0 &= \text{ch}\theta. \end{aligned} \quad (5.7.8)$$

Преимущество такой параметризации заключается в том, что

$$L(\bar{\theta})L(\theta) = L(\bar{\theta} + \theta). \quad (5.7.9)$$

В случае бесконечно малых θ $[L(\theta)]^\mu_\nu \rightarrow \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$, где $\omega^i_0 = \omega^0_i = \hat{p}_i \theta$ и $\omega^i_j = \omega^0_0 = 0$. Следуя тем же рассуждениям, которые привели от формулы (2.2.24) к формуле (2.2.26), получим:

$$D(L(p)) = \exp(-i\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{K}\theta). \quad (5.7.10)$$

Это верно для любого представления однородной группы Лоренца. Для неприводимых представлений (A,B) из формул (5.6.7) и (5.6.8) следует, что

$$i\mathcal{K} = \mathcal{A} - \mathcal{B}, \quad (5.7.11)$$

а так как \mathcal{A} и \mathcal{B} — коммутирующие матрицы, то

$$D(L(p)) = \exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{A}\theta) \exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{B}\theta). \quad (5.7.12)$$

Подробнее, используя (5.6.14) и (5.6.15), имеем:

$$D(L(p))_{a'b',ab} = \left(\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta) \right)_{a'a} \left(\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta) \right)_{b'b}. \quad (5.7.13)$$

Тогда из формул (5.7.4) и (5.7.6) следует, что коэффициентные функции при конечном импульсе равны

$$u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{a'b'} \left(\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta) \right)_{a'a} \left(\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta) \right)_{b'b} C_{AB}(j\sigma; a'b'), \quad (5.7.14)$$

$$v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) = (-1)^{j+\sigma} u_{ab}(\mathbf{p}, -\sigma). \quad (5.7.15)$$

Эти формулы дают явные выражения для поля при заданном типе преобразования (A,B) , так что поле (5.1.31) этого типа единственно с точностью до выбора постоянных множителей κ и λ .

В рамках такого формализма очень легко построить плотности гамильтониана взаимодействия, являющиеся лоренцовскими скалярами. Представление (A,B) однородной группы лоренца есть прямое произведение представлений $(A,0)$ и $(0,B)$, так что общие формулы преобразований Лоренца (5.1.6) и (5.1.7) принимают вид

$$U_0(\Lambda)\Psi_{ab}(x)U_0^{-1}(\Lambda) = \sum_{a'b'} D_{a,a'}^{A0}(\Lambda^{-1}) D_{b,b'}^{0B}(\Lambda^{-1}) \Psi_{a'b'}(\Lambda x). \quad (5.7.16)$$

Далее, из формул (5.6.14) и (5.6.15) следует, что матричные генераторы представлений $(A,0)$ и $(0,B)$ являются просто спиновыми матрицами для спинов A и B , соответственно. Таким образом, можно построить скаляры вида

$$\sum_{a_1 a_2 \dots a_n} \sum_{b_1 b_2 \dots b_n} g_{a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 \dots b_n} \Psi_{a_1 b_1}^{(1)}(x) \Psi_{a_2 b_2}^{(2)}(x) \dots \Psi_{a_n b_n}^{(n)}(x) \quad (5.7.17)$$

взяв $g_{a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 \dots b_n}$ как произведение коэффициентов объединения спинов A_1, A_2, \dots, A_n в скаляр и спинов B_1, B_2, \dots, B_n – в другой скаляр. (Хотя мы и не рассматриваем явно взаимодействия, содержащие производные, подобным способом можно построить наиболее общее взаимодействие n полей, так как производная поля типа (A,B) всегда может быть разложена на поля других типов без производных.) Например, самый общий лоренцовский скаляр, построенный из произведения трех полей, преобразующихся по представлениям (A_1, B_1) , (A_2, B_2) и (A_3, B_3) , имеет вид

$$g \sum_{a_1 a_2 a_3} \sum_{b_1 b_2 b_3} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \Psi_{a_1 b_1}^{(1)} \Psi_{a_2 b_2}^{(2)} \Psi_{a_3 b_3}^{(3)} \quad (5.7.18)$$

и содержит единственный свободный параметр g . Это самое общее трехполевое взаимодействие. (Скобки в (5.7.18) обозначают $3j$ -символы Вигнера¹⁰:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \sum_{m'_3} C_{j_1 j_2}(j_3 m'_3, m_1 m_2) C_{j_3 j_3}(00, m'_3 m_3),$$

которые определяют связь трех спинов, образующую скаляр по отношению к вращениям.)

Для того, чтобы S -матрица была лоренц-инвариантной, недостаточно, чтобы плотность гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}(x)$ была скаляром типа (5.7.18). Другим необходимым условием является то, что $\mathcal{H}(x)$ должна коммутировать с $\mathcal{H}(y)$ на пространственноподобных расстояниях $x - y$. Чтобы увидеть, как можно удовлетворить такому условию, рассмотрим коммутатор или антикоммутатор двух полей частиц одного сорта: поле Ψ типа (A,B) и сопряженное поле $\tilde{\Psi}^\dagger$ к полю $\tilde{\Psi}$ типа (\tilde{A}, \tilde{B}) . Находим:

$$\begin{aligned} [\Psi_{ab}(x), \tilde{\Psi}_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)]_{\mp} &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3p (2p^0)^{-1} \pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \\ &\times [\kappa \tilde{\kappa}^* e^{ip \cdot (x-y)} \mp \lambda \tilde{\lambda}^* e^{-ip \cdot (x-y)}], \end{aligned} \quad (5.7.19)$$

где $\pi(\mathbf{p})$ — сумма по спинам:

$$(2p^0)^{-1} \pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \tilde{u}_{\tilde{a}\tilde{b}}^*(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{\sigma} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \tilde{v}_{\tilde{a}\tilde{b}}^*(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.20)$$

и, как обычно, верхние и нижние знаки отвечают, соответственно, бозонам и фермионам. (Мы допускаем другие коэффициенты $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\lambda}$ в поле $\tilde{\Psi}$.) Более подробно:

$$\begin{aligned} \pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) &= \sum_{a'b'} \sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'} \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma; a'b') C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma; \tilde{a}'\tilde{b}') \\ &\times (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta))_{aa'} (\exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta))_{bb'} \\ &\times (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}\theta))_{\tilde{a}\tilde{a}'}^* (\exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}\theta))_{\tilde{b}\tilde{b}'}^*. \end{aligned} \quad (5.7.21)$$

Функция $\pi(\mathbf{p})$ была вычислена явно.¹¹ Нам важно сейчас, что она оказывается равной значению на массовой оболочке некоторой полиномиальной функции P от \mathbf{p} и p^0 :

$$\pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}), \quad (5.7.22)$$

и эта функция P четна или нечетна в зависимости от того, четно или нечетно целое число $2A + 2\tilde{B}$:

$$P(-\mathbf{p}, -p^0) = (-1)^{2A+2\tilde{B}} P(\mathbf{p}, p^0). \quad (5.7.23)$$

Проверим здесь это равенство лишь для одного конкретного направления вектора \mathbf{p} . Выбирая \mathbf{p} вдоль третьей оси, имеем из (5.7.21)

$$\pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma; ab) C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma; \tilde{a}\tilde{b}) \exp([-a + b - \tilde{a} + \tilde{b}]\theta).$$

Коэффициенты Клебша–Гордана отличны от нуля только при значениях $\sigma = a + b$ и $\sigma = \tilde{a} + \tilde{b}$, так что можно сделать замену

$$-a + b - \tilde{a} + \tilde{b} = -2a + \sigma + 2\tilde{b} - \sigma = 2\tilde{b} - 2a.$$

Выражение $\exp(\pm\theta)$ можно записать как $(p^0 \pm p^3)/m$, так что

$$\begin{aligned} \pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) &= \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma; ab) C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma; \tilde{a}\tilde{b}) \\ &\times \begin{cases} [(p^0 + p^3)/m]^{2\tilde{b}-2a} & (\tilde{b} \geq a) \\ [(p^0 + p^3)/m]^{2\tilde{b}-2a} & (a \geq \tilde{b}) \end{cases}, \end{aligned}$$

где $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Видим, что $\pi(\mathbf{p})$ действительно можно записать как значение полинома $P(\mathbf{p}, p^0)$ на массовой оболочке. Кроме того, $2\tilde{b} - 2a$ равно $2\tilde{B} + 2A$ минус четное целое число, так что полином удовлетворяет условию отражения (5.7.23).

Всякий полином по \mathbf{p} и $(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ можно записать в виде, линейном по $(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ (выразив четные степени $(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ через \mathbf{p}), так что $\pi(\mathbf{p})$ можно записать в виде

$$\pi_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) + 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} Q_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}), \quad (5.7.24)$$

где теперь P и Q – полиномы только по \mathbf{p} , причем

$$P(-\mathbf{p}) = (-)^{2A+2\tilde{B}} P(\mathbf{p}), \quad (5.7.25)$$

$$Q(-\mathbf{p}) = -(-)^{2A+2\tilde{B}} Q(\mathbf{p}). \quad (5.7.26)$$

Для пространственноподобных промежутков $x - y$ можно выбрать лоренцовскую систему отсчета, в которой $x^0 = y^0$, и записать (5.7.19) в следующем виде:

$$\begin{aligned} [\Psi_{ab}(x), \Psi_{\tilde{a}\tilde{b}}^{\dagger}(y)]_{\mp} &= [\kappa\tilde{\kappa}^* \mp (-)^{2A+2\tilde{B}} \lambda\tilde{\lambda}^*] P_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(-i\nabla) \Delta_{+}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) \\ &+ [\kappa\tilde{\kappa}^* \pm (-)^{2A+2\tilde{B}} \lambda\tilde{\lambda}^*] Q_{ab, \tilde{a}\tilde{b}}(-i\nabla) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Чтобы это выражение обращалось в нуль при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, должно выполняться равенство

$$\tilde{\kappa}^* = \pm(-1)^{2A+2\bar{B}} \tilde{\lambda} \tilde{\lambda}^*. \quad (5.7.27)$$

Рассмотрим частный случай одинаковых Ψ и $\tilde{\Psi}$, так что $A = \bar{A}$ и $B = \bar{B}$. (Подобные коммутаторы или антикоммутаторы неизбежно появляются в $[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)]$, т. к. из эрмитовости гамильтониана вытекает, что если $\mathcal{H}(x)$ содержит Ψ , он обязательно содержит и Ψ^\dagger .) В этом случае из (5.7.27) следует, что

$$|\kappa|^2 = \pm(-1)^{2A+2B} |\lambda|^2.$$

Такое возможно тогда и только тогда, когда

$$\pm(-1)^{2A+2B} = +1, \quad (5.7.28)$$

$$|\kappa|^2 = |\lambda|^2. \quad (5.7.29)$$

Конечно, $2A + 2B$ отличается от $2j$ на *четное* целое число, так что из (5.7.28) следует утверждение: *рассматриваемая частица является бозоном или фермионом в зависимости от того, четно или нечетно число $2j$* . Этим устанавливается общая связь между спином и статистикой.¹² Мы видели, как выполняется эта связь на частных примерах частиц, описываемых скалярными, дираковскими и векторными полями.

Вернемся к общему случаю разных полей Ψ и $\tilde{\Psi}$. Деля обе части (5.7.27) на $|\tilde{\kappa}|^2 = |\lambda|^2$, получаем:

$$\frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} = (-1)^{2B+2\bar{B}} c \kappa,$$

Отсюда вытекает, что для любого поля

$$\lambda = (-1)^{2B} c \kappa, \quad (5.7.30)$$

где c — один и тот же множитель для всех полей данной частицы. Далее, из (5.7.29) следует, что c есть просто фазовый множитель, $|c| = 1$. Поэтому можно устранить c для всех полей, переопределив

относительную фазу операторов $a(\mathbf{p}, \sigma)$ и $a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)$ так, чтобы $c = 1$, откуда $\lambda = (-)^{2B}k$. Наконец, множитель k для каждого типа поля можно устранить переопределением общего масштаба поля. Таким образом, приходим к формуле для преобразующегося по представлению (A, B) поля данной частицы, которое единственно с точностью до общего масштабного фактора:

$$\begin{aligned} \Psi_{ab}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p [u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} \\ + (-)^{2B} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) a^{c\dagger}(\mathbf{p}, -\sigma) e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.7.31)$$

Для данной частицы разные поля реально не отвечают физически различным возможностям. Например, для $j = 0$ возможными являются поля типа (A, A) (поскольку из неравенства треугольника $|A - B| \leq j \leq A + B$ в данном случае следует $A = B$). Начав со скалярного $(0, 0)$ поля Φ , можно без труда построить поля (A, A) с помощью $2A$ -ой производной:

$$\{\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{2A}}\} \Phi, \quad (5.7.32)$$

здесь фигурные скобки $\{\}$ обозначают бесследовую часть, например,

$$\{\partial_{\mu} \partial_{\nu}\} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \square.$$

(Напомним, что бесследовый симметричный тензор ранга N преобразуется по представлению $(N/2, N/2)$.) Однако формула (5.7.31) представляет *единственное* причинное поле (A, B) для частицы данного спина j , так что для $j = 0$ поля (A, A) (5.7.31) могут быть только линейными комбинациями $2A$ -ых производных (5.7.32) скалярного поля.

В более общей формулировке *любое* поле (A, B) для данной частицы со спином j может быть представлено как дифференциальный оператор ранга $2B$, действующий на поле $\Phi_{\sigma}(x)$ типа $(j, 0)$ (или дифференциальный оператор ранга $2A$, действующий на поле $(0, j)$)¹³. Чтобы увидеть это, рассмотрим поле

$$\{\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{2B}}\} \Phi_{\sigma}. \quad (5.7.33)$$

Оно преобразуется как тензорное произведение представлений (B, B) и $(j, 0)$, поэтому по обычным правилам векторного сложения это поле можно разложить по полям, преобразующимся по всем неприводимым представлениям (A, B) , где $|j - B| \leq A \leq j + B$, или эквивалентно $|A - B| \leq j \leq A + B$. Так как для данной частицы со спином j формула (5.7.31) описывает единственное поле типа (A, B) , оно может быть только * полем (A, B) , полученным с помощью производных (5.3.33).

Рассмотрим поведение построенных полей относительно инверсий. Начнем с пространственной инверсии. Как следует из результатов раздела 4.2, свойства операторов уничтожения частиц и рождения античастиц по отношению к пространственной инверсии выражаются формулами

$$Pa(\mathbf{p}, \sigma)P^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.34)$$

$$Pa^{c^+}(\mathbf{p}, \sigma)P^{-1} = \eta^c a^{c^+}(-\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.35)$$

где η и η^c — внутренние четности частицы и античастицы, соответственно. Следовательно, общее причинное (A, B) поле (5.7.31) преобразуется под действием оператора четности P следующим образом:

$$\begin{aligned} P\Psi_{ab}^{AB}(x)P^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p [\eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} u_{ab}^{AB} \\ &+ \eta^c (-)^{2B} a^{c^+}(-\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} v_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma)]. \end{aligned} \quad (5.7.36)$$

* Единственный пробел в этом рассуждении связан с гипотетической возможностью, что некоторые полученные таким способом поля (A, B) , на самом деле, обращаются в нуль. Но в этом случае поле ϕ_{σ} , отвечающее представлению $(j, 0)$ должно удовлетворять полевому уравнению $\sum_{\sigma} M_{\sigma}(\partial / \partial x) \phi_{\sigma}(x) = 0$, следовательно, для каждого $\bar{\sigma}$ должно быть $\sum_{\sigma} M_{\sigma}(ip) u_{\sigma}(\mathbf{p}, \bar{\sigma}) = 0$. Для представления (j, σ) коэффициент Клебша–Гордана $C_{j0}(j\bar{\sigma}; \sigma 0)$ равен просто кронекеровскому дельта-символу $\delta_{\bar{\sigma}\sigma}$, откуда $\sum_{\sigma} M_{\sigma}(ip) D_{\sigma\sigma'}(L(p)) = 0$. Но это возможно только, если все $M_{\sigma}(ip) = 0$, т. к. $D(\Lambda)$ имеет обратную матрицу $D(\Lambda^{-1})$. Таким образом, поля $\phi_{\sigma}(x)$, отвечающие представлению $(j, 0)$, могут удовлетворять только уравнению Клейна–Гордона $(\square - m^2)\phi_{\sigma}(x) = 0$. Следовательно, ни одно из полей (A, B) , полученных с помощью (5.3.33), не может быть равным нулю.

Мы хотим сделать замену переменной интегрирования \mathbf{p} на $-\mathbf{p}$, а для этого нужно вычислить $u_{ab}(-\mathbf{p}, \sigma)$ и $v_{ab}(-\mathbf{p}, \sigma)$. Чтобы получить необходимые выражения, достаточно вернуться к формулам (5.7.14) и (5.7.15) и использовать свойство симметрии коэффициентов Клебша–Гордана¹⁴

$$C_{AB}(j\sigma; ab) = (-)^{A+B-j} C_{BA}(j\sigma; ba). \quad (5.7.37)$$

Находим:

$$u_{ab}^{AB}(-\mathbf{p}, \sigma) = (-)^{A+B-j} u_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.38)$$

$$v_{ab}^{AB}(-\mathbf{p}, \sigma) = (-)^{A+B-j} v_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.39)$$

так что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Psi_{ab}^{AB}(x)\mathbf{P}^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p (-1)^{A+B-j} \\ &\times [\eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot \mathcal{X}x} u_{ab}^{BA} + \eta^c (-)^{2B} a^{c+}(-\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot \mathcal{X}x} v_{ab}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma)], \end{aligned} \quad (5.7.40)$$

где, как и ранее, $\mathcal{X}x \equiv (-\mathbf{x}, x^0)$. Мы получили причинное поле $\Psi_{ab}^{BA}(x)$, взятое в точке $\mathcal{X}x$, если не считать того, что коэффициенты при слагаемых с операторами уничтожения и рождения могут отличаться от тех, которые выписаны в (5.7.31). Однако эти коэффициенты *должны* быть теми же самыми, что и в (5.7.31), с точностью до общего постоянного множителя, так как формула (5.7.31) представляет с точностью до масштаба единственное причинное поле любого типа. Отсюда отношение коэффициентов при двух слагаемых в (5.7.40) должно быть таким же, как и в (5.7.31) (с заменой B на A , так как предполагается, что (5.7.40) дает (B, A) поле):

$$\eta^c (-)^{2B} / \eta^* = (-)^{2A}. \quad (5.7.41)$$

Однако разность $A - B$ отличается от спина j только на целое число, так что

$$\eta^c = \eta^* (-)^{2j}. \quad (5.7.42)$$

Частные случаи этого равенства мы анализировали в разделах 5.2, 5.3 и 5.5 для $j = 0$, $j = 1$ и $j = 1/2$. Теперь видно, что результат имеет общий характер: *внутренняя четность $\eta^c \eta$ пары частица–античастица равна +1 для бозонов и –1 для фермионов*. Подставляя (5.7.42) в (5.7.40), получаем окончательно для пространственной инверсии:

$$\mathbf{P}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathbf{P}^{-1} = \eta^*(-1)^{A+B-j}\psi_{ba}^{BA}(-\mathbf{x}, x^0). \quad (5.7.43)$$

Рассмотрим применение этой формулы к дираковскому полю. Для верхних $(\frac{1}{2}, 0)$ и нижних $(0, \frac{1}{2})$ компонент дираковского поля знак $(-1)^{A+B-j}$ равен +1, так что оператор четности просто переводит \mathbf{x} в $-\mathbf{x}$, меняет местами верхние и нижние компоненты и умножает поле на η^* . Замена верхних компонент на нижние у дираковского поля осуществляется матрицей β в (5.5.41).

Рассмотрим теперь операцию зарядового сопряжения. Действие \mathbf{C} на операторы уничтожения частиц и рождения античастиц определяется формулами

$$\mathbf{C}a(\mathbf{p}, \sigma)\mathbf{C}^{-1} = \xi^* a^c(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.44)$$

$$\mathbf{C}a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)\mathbf{C}^{-1} = \xi^c a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.7.45)$$

где ξ и ξ^c — зарядовые четности частицы и античастицы, соответственно. Применяя это преобразование к полю (5.7.31), находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathbf{C}^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \\ &\times [\xi^* a^c(\mathbf{p}, \sigma)e^{ip \cdot x} + \xi^c (-1)^{2B} a^\dagger(\mathbf{p}, -\sigma)(-1)^{j-\sigma} e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.7.46)$$

Полезно сравнить эту формулу для зарядово-сопряженного поля к полю (A, B) с формулой сопряженного (B, A) поля той же частицы:

$$\begin{aligned} \psi_{ba}^{BA\dagger}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_{ab}^{AB*}(\mathbf{p}, \sigma) \\ &\times [(-1)^{2A} (-1)^{j-\sigma} a^c(\mathbf{p}, -\sigma)e^{ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.7.47)$$

Чтобы вычислить u^* , используем предыдущий результат:

$$\mathbf{J}^{(j)*} = -\mathcal{C}\mathbf{J}^{(j)}\mathcal{C}^{-1}, \quad \mathcal{C}_{\bar{\sigma}\sigma} \propto (-1)^{j-\sigma}\delta_{\bar{\sigma},-\sigma}.$$

Коэффициенты Клебша–Гордана в (5.7.14) действительны, так что

$$u_{ba}^{BA}(\mathbf{p}, \sigma)^* = \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{a'b'} (\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}(\theta))_{-a,-a'} (\exp(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}(\theta))_{-b,-b'}) \\ \times (-1)^{a'-a} (-1)^{b'-b} C_{BA}(j\sigma; a'b').$$

Используем свойство отражения для коэффициентов Клебша–Гордана¹⁴:

$$C_{BA}(j, -\sigma; -b, -a') = C_{AB}(j\sigma; a'b') \quad (5.7.48)$$

и то, что эти коэффициенты равны нулю во всех случаях, кроме $a' + b' = \sigma$. Тогда

$$u_{-b,-a}^{BA}(\mathbf{p}, -\sigma)^* = (-1)^{a+b-\sigma} u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.7.49)$$

Отсюда сопряженное поле (5.7.47) принимает вид (мы делаем замену $a \rightarrow -a$, $b \rightarrow -b$, $\sigma \rightarrow -\sigma$):

$$\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p (-1)^{a+b-\sigma} u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \\ \times [(-1)^{2A} (-1)^{j+\sigma} a^c(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}].$$

Используя соотношение между знаками $(-1)^{-2A-j} = (-1)^{2B+j}$, получаем:

$$(-1)^{-2A-a-b-j} \psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_{ab}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma) \\ \times [a^c(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + (-1)^{j-\sigma+2B} a^\dagger(\mathbf{p}, -\sigma) e^{-ip \cdot x}]. \quad (5.7.50)$$

Для того, чтобы поле $\mathcal{C}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathcal{C}^{-1}$ коммутировало или антикоммутировало со всеми обычными полями на пространственноподобных

расстояниях, необходимо, чтобы оно было пропорционально $\Psi_{-b,-a}^{BA+}$, так как это поле сопряжено к единственному причинному полю типа (A, B) . Сравнивая (5.7.50) с (5.7.46), видим, что это возможно только в случае, если зарядовые четности связаны соотношением

$$\xi^* = \xi^c \quad (5.7.51)$$

и тогда

$$\mathbf{C}\Psi_{ab}^{AB}(x)\mathbf{C}^{-1} = \xi^* (-1)^{-2A-a-b-j} \Psi_{-b,-a}^{BA+}(x). \quad (5.7.52)$$

Мы уже обсуждали соотношение (5.7.51) для спинов 0, 1 и 1/2 в разделах 5.2, 5.3 и 5.5, а также рассмотрели некоторые применения этого правила для анализа состояний электрон-позитронных и кварк-антикварковых пар.

В частности, для частицы, совпадающей со своей античастицей, в формуле (5.7.52) следует опустить оператор зарядового сопряжения в левой части и множитель ξ^* в правой:

$$\Psi_{ab}^{AB}(x) = (-1)^{-2A-a-b-j} \Psi_{-b,-a}^{BA+}(x). \quad (5.7.53)$$

Пример такого условия действительности уже рассматривался в разделе 5.5. для майорановских частиц.

Перейдем, наконец, к обращению времени. Действие на операторы уничтожения частиц и рождения античастиц имеет вид

$$\mathbf{T}a(\mathbf{p}, \sigma)\mathbf{T}^{-1} = \zeta^* (-1)^{j-\sigma} a(-\mathbf{p}, -\sigma), \quad (5.7.54)$$

$$\mathbf{T}a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)\mathbf{T}^{-1} = \zeta^c (-1)^{j-\sigma} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma). \quad (5.7.55)$$

Отсюда неприводимое поле (5.7.31) преобразуется по правилу

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\Psi_{ab}^{AB}(x)\mathbf{T}^{-1} &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p u_{ab}^{AB*}(\mathbf{p}, \sigma) (-1)^{j-\sigma} \\ &\times [\zeta^* a^c(-\mathbf{p}, -\sigma) e^{-ip \cdot x} + \zeta^c (-1)^{2B} a^{c\dagger}(-\mathbf{p}, -\sigma) e^{ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.7.56)$$

Чтобы вычислить комплексно сопряженные коэффициентные функции, используем (5.7.14) и стандартную формулу¹⁴

$$C_{AB}(j, \sigma; a, b) = (-1)^{A+B-j} C_{AB}(j, -\sigma; -a, -b), \quad (5.7.57)$$

Тогда

$$u_{ab}^{AB*}(-\mathbf{p}, -\sigma) = (-1)^{a+b+\sigma+A+B-j} u_{-a, -b}^{AB}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.7.58)$$

Меняя переменные интегрирования и суммирования в (5.7.56) на $-\mathbf{p}$ и $-\sigma$, находим, что для того, чтобы поле (A, B) при обращении времени преобразовывалось в поле, пропорциональное другому (A, B) полю, необходимо выполнение условия

$$\zeta^c = \zeta^{*c}, \quad (5.7.59)$$

и в этом случае

$$T \Psi_{ab}^{AB}(x) T^{-1} = (-1)^{a+b+A+B-2j} \Psi_{-a, -b}^{AB}(\mathbf{x}, -x^0). \quad (5.7.60)$$

* * *

Следует отметить, что время от времени сообщается о разных трудностях в теории частиц со спином $\geq 3/2$ ¹⁵. В общем случае они проявляются при изучении распространения полей с высшими спинами в присутствии s -числового внешнего поля. В зависимости от деталей теории, возникающие трудности включают отсутствие причинности, несовместность уравнений, нефизические массовые состояния и нарушение унитарности. Я не собираюсь подробно анализировать эти проблемы, поскольку мне кажется, что они не имеют отношения к той расчетной схеме, которая описана в данной главе, по следующим причинам.

1. Поля $\Psi_{ab}(x)$ были построены здесь непосредственно из операторов уничтожения и рождения физических частиц, так что не может возникать никаких вопросов о несовместности с уравнениями или о нефизических массовых состояниях. Построенные поля свободны, но включив их в плотность гамильтониана взаимодействия в картине взаимодействия, мы можем использовать теорию возмущений для расчета элементов S -матрицы, автоматически удовлетворяющих принципу кластерного разложения. До тех пор, пока гамильтониан взаимодействия эрмитов, не будет никаких трудностей с унитарностью. В рамках теории возмущений гаранти-

рована и лоренц-инвариантность, пока мы добавляем в плотность гамильтониана подходящие локальные, пусть и нековариантные слагаемые. Хотя строгое доказательство этого отсутствует, нет оснований сомневаться в том, что это всегда возможно. Таким образом, любые трудности с высшими спинами могут возникать только при попытках выйти за рамки теории возмущений.

2. Как обсуждается в разделе 13.6, решение полевых уравнений в присутствии s -числового фонового поля (именно в подобных задачах были обнаружены все проблемы с высшими спинами) действительно требует выхода за рамки теории возмущений, так как результаты соответствуют суммированию бесконечного подмножества слагаемых в ряде теории возмущений. Это частичное суммирование обосновано, даже в случае слабых внешних полей, только если поля достаточно медленно изменяются, причем малость энергетических знаменателей компенсируется слабостью полей. Но полученные таким способом результаты зависят от всех деталей взаимодействия частицы с большим спином с внешними полями — не только от мультипольных моментов частицы, но и от возможных слагаемых во взаимодействии, которые нелинейны по внешним полям. Проблемы с высшими спинами¹⁵ возникали только для таких частиц больших спинов, у которых произвольно предполагалось очень простое взаимодействие с внешними полями. Никто не доказал, что при учете произвольных взаимодействий проблема сохранится, а как мы увидим в гл. 12, следует ожидать, что частицы с высшими спинами обладают всеми возможными взаимодействиями, которые дозволены принципами симметрии.

3. На самом деле, есть серьезные основания полагать, что проблемы с высшими спинами исчезнут, если взаимодействие с внешними полями будет достаточно сложным. С одной стороны, нет ни малейших сомнений в существовании *частиц* с высокими спинами, в том числе, различных стабильных ядер и адронных резонансов. Если и существует какая-то проблема, связанная с большим значением спина, она может касаться только «точечных» частиц, т. е. тех частиц, которые особенно просто взаимодействуют с внешним полем. Следует не забывать, что требование простоты зависит от сделанного нами выбора того поля, которое представляет частицу с высшим спином. Напомним, что любые типы свободных полей для данной частицы могут быть записаны как результат действия оператора производной на любые другие типы полей,

так что в картине взаимодействия всякое взаимодействие с внешними полями можно записать с помощью любого желательного нам типа поля. Однако взаимодействия, выглядящие просто в случае использования поля одного типа, могут выглядеть сложно, если выразить их через поля другого типа. По этой причине требование простоты, похоже, не имеет никакого реального содержания.

4. Наконец, как многомерные теории типа Калуцы–Клейна, так и теории струн дают примеры самосогласованных теорий массивных заряженных частиц со спином 2, взаимодействующих с фоновым электромагнитным полем¹⁶. (Показано, что согласованность теории зависит от предположения о реалистичных внешних полях, удовлетворяющих полевым уравнениям. Этот момент не учитывался в ранних работах.) Если переформулировать такие теории в картине взаимодействия, то частица со спином 2 представляется свободным $(1, 1)$ полем. Однако, как отмечено выше, взаимодействия можно выразить в этой картине с помощью любого поля типа (A, B) , содержащего представление группы вращений с $j = 2$.

5.8. СРТ-теорема

Мы видели, что сочетание требований теории относительности и квантовой механики приводит к необходимости существования античастиц. Однако необходимо не только то, что каждая частица имеет свою античастицу (в частном случае истинно нейтральные частицы совпадают со своими античастицами). Существует точное соотношение между свойствами частиц и античастиц, которое может быть сформулировано в виде утверждения, что при подходящем выборе фаз произведение СРТ всех инверсий сохраняется. Это знаменитая СРТ-теорема*.

* Первое доказательство этой теоремы принадлежит Людерсу и Паули¹⁷. Строгое доказательство было дано в рамках аксиоматической теории поля¹⁸. В нем предположения о коммутативности использовались для того, чтобы расширить лоренцовскую инвариантность теории до комплексной группы Лоренца, затем с помощью комплексных преобразований Лоренца доказать свойства вакуумных средних от произведений полей относительно отражений, и, наконец, используя эти свойства, вывести существование антиунитарного оператора, индуцирующего СРТ-преобразования полей.

В качестве первого шага в доказательстве рассмотрим, как произведение СРТ действует на свободные поля разных типов. Из результатов разделов 5.2, 5.3 и 5.5 для скалярного, векторного и дираковского полей получаем:

$$\text{СРТ } \varphi(x) [\text{СРТ}]^{-1} = \zeta^* \xi^* \eta^* \varphi^\dagger(-x), \quad (5.8.1)$$

$$\text{СРТ } \varphi_\mu(x) [\text{СРТ}]^{-1} = -\zeta^* \xi^* \eta^* \varphi_\mu^\dagger(-x), \quad (5.8.2)$$

$$\text{СРТ } \psi(x) [\text{СРТ}]^{-1} = -\zeta^* \xi^* \eta^* \gamma_5 \psi^*(-x). \quad (5.8.3)$$

(Конечно, фазы ζ , ξ и η зависят от сортов частиц, описываемых каждым полем.) Мы выбираем фазы так, чтобы для всех частиц

$$\zeta \xi \eta = 1. \quad (5.8.4)$$

Тогда всякий тензор $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}$, образованный любой совокупностью скалярных и векторных полей и их производных, преобразуется как

$$\text{СРТ } \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) [\text{СРТ}]^{-1} = (-1)^n \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}^\dagger(-x). \quad (5.8.5)$$

(Так как СРТ — антиунитарный оператор, то всякий комплексный численный коэффициент, возникающий в этих тензорах, преобразуется в комплексно сопряженный.) Нетрудно показать, что такое же правило преобразования применимо для тензоров, построенных из билинейных комбинаций дираковских полей. Применяя к ним формулу (5.8.3), находим:

$$\begin{aligned} \text{СРТ } [\bar{\psi}_1(x) M \psi_2(x)] [\text{СРТ}]^{-1} &= \psi_1^T(-x) \gamma_5 \beta M^* \gamma_5 \psi_2^*(-x) \\ &= [\bar{\psi}_1(-x) \gamma_5 M \gamma_5 \psi_2(-x)]^\dagger. \end{aligned} \quad (5.8.6)$$

(Знак «минус» от антикоммутиации β и γ_5 компенсируется знаком «минус» от антикоммутиации фермионных операторов.) Если билинейный ковариант есть тензор ранга n , то M равно произведению n по модулю 2 дираковских матриц, так что $\gamma_5 M \gamma_5 = (-1)^n M$, и поэтому билинейный ковариант удовлетворяет соотношению (5.8.5).

Эрмитова скалярная плотность гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}(x)$ должна строиться из тензоров с четным полным числом пространственно-временных индексов, поэтому

$$\text{CPT } \mathcal{H}(x) [\text{CPT}]^{-1} = \mathcal{H}(-x). \quad (5.8.7)$$

Более общее (и в чем-то более легкое) доказательство теоремы можно дать для эрмитовых скаляров, построенных из полей $\Psi_{ab}^{AB}(x)$, принадлежащих одному или нескольким общим неприводимым представлениям однородной группы Лоренца. Собирая результаты предыдущего раздела для результатов инверсии таких полей, получаем

$$\text{CPT } \Psi_{ab}^{AB}(x) [\text{CPT}]^{-1} = (-1)^{2B} \Psi_{ab}^{AB\dagger}(-x). \quad (5.8.8)$$

(Для дираковского поля множитель $(-1)^{2B}$ в (5.8.8) сопровождается матрицей γ_5 .) Чтобы образовать скаляр $\mathcal{H}(x)$ из произведений $\Psi_{a_1 b_1}^{A_1 B_1}(x) \Psi_{a_2 b_2}^{A_2 B_2}(x) \dots$, необходимо, чтобы как $A_1 + A_2 + \dots$, так и $B_1 + B_2 + \dots$ были целыми, так что $(-1)^{2B_1 + 2B_2 + \dots} = 1$, и эрмитов скаляр $\mathcal{H}(x)$ будет автоматически удовлетворять соотношению (5.8.7).

Из этой формулы немедленно вытекает, что CPT коммутирует с оператором взаимодействия $V \equiv \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0)$:

$$\text{CPT } V [\text{CPT}]^{-1} = V. \quad (5.8.9)$$

Кроме того, в любой теории CPT коммутирует с гамильтонианом свободных частиц \mathcal{H}_0 . Таким образом, оператор CPT, который был определен здесь своим действием на операторы свободных частиц, действует на ин- и аут-состояния так, как описано в разделе 3.3. Физические следствия этого принципа симметрии уже обсуждались в разделах 3.3 и 3.6.

5.9. Поля безмассовых частиц

До сих пор мы рассматривали только поля массивных частиц. Для некоторых из них, например, для скалярного или дираковского полей, не возникает никаких проблем при переходе к пределу нулевой массы. С другой стороны, в разделе 5.3 мы видели, что для векторного поля частицы со спином 1 такой переход действительно сопряжен с трудностями: по крайней мере один из векторов поляризации в таком пределе обращается в бесконечность. Мы увидим ниже, что все неприводимые поля (A, B) , которые могут быть построены в случае конечной массы, нельзя построить из операторов

рождения и уничтожения физических безмассовых частиц со спином $j \geq 1$. Такое любопытное ограничение на типы полей естественно приведет нас к понятию калибровочной инвариантности.

Как и для массивных частиц, попытаемся записать произвольное свободное поле безмассовой частицы как линейную комбинацию операторов уничтожения $a(\mathbf{p}, \sigma)$ частиц с импульсом \mathbf{p} и спиральностью σ и соответствующих операторов рождения $a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)$ для античастиц*:

$$\begin{aligned} \Psi_l(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} [& \kappa a(\mathbf{p}, \sigma) u_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} \\ & + \lambda a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) v_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}], \end{aligned} \quad (5.9.1)$$

где теперь $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$. Операторы рождения преобразуются так же, как одночастичные состояния в (2.5.42):

$$U(\Lambda) a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) a^{\dagger}(\mathbf{p}_{\Lambda}, \sigma), \quad (5.9.2)$$

$$U(\Lambda) a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) a^{c\dagger}(\mathbf{p}_{\Lambda}, \sigma), \quad (5.9.3)$$

и поэтому

$$U(\Lambda) a(\mathbf{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda)) a(\mathbf{p}_{\Lambda}, \sigma), \quad (5.9.4)$$

где $\mathbf{p}_{\Lambda} \equiv \Lambda \mathbf{p}$, а угол θ определен формулами (2.5.43). Таким образом, если мы хотим, чтобы поле преобразовывалось по некоторому представлению $D(\Lambda)$ однородной группы Лоренца,

* Мы рассматриваем только один сорт частиц и опускаем соответствующую метку n . Кроме того, κ и λ – постоянные коэффициенты, которые определяются из требования причинности при некотором подходящем выборе нормировки коэффициентных функций u_l и v_l .

$$U(\Lambda)\Psi_l(x)U^{-1}(\Lambda) = \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda^{-1})\Psi_{\bar{l}}(\Lambda x), \quad (5.9.5)$$

мы должны потребовать, чтобы коэффициентные функции u и v удовлетворяли вместо (5.1.19) и (5.1.20) соотношениям

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma) \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) u_l(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.9.6)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma) \exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\Lambda) v_l(\mathbf{p}, \sigma). \quad (5.9.7)$$

(Вновь $p_\Lambda \equiv \Lambda p$.) Как и в случае массивных частиц, этим требованиям можно удовлетворить, положив (вместо (5.1.21) и (5.1.22)), что

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\mathcal{L}(p)) u_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.8)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}} \sum_l D_{\bar{l}l}(\mathcal{L}(p)) v_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.9)$$

где \mathbf{k} — стандартный импульс, например, $(0, 0, k)$, а $\mathcal{L}(p)$ — стандартное преобразование Лоренца, переводящее безмассовую частицу из состояния с импульсом \mathbf{k} в состояние с импульсом \mathbf{p} . Кроме того, вместо (5.1.23) и (5.1.24) коэффициентные функции при стандартном импульсе должны удовлетворять соотношениям

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) \exp(i\sigma\theta(k, W)) = \sum_l D_{\bar{l}l}(W) u_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.10)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) \exp(-i\sigma\theta(k, W)) = \sum_l D_{\bar{l}l}(W) v_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.11)$$

где W_v^μ — произвольный элемент «малой группы» для 4-импульса $k = (\mathbf{k}, |\mathbf{k}|)$, т. е. произвольное преобразование Лоренца, оставляющее этот 4-импульс инвариантным.

Суть формул (5.9.10) и (5.9.11) можно понять, рассмотрев отдельно два типа элементов малой группы в формуле (2.5.28). Для вращения $R(\theta)$ на угол θ вокруг оси z , которое дается формулой (2.5.27),

$$R^{\mu\nu}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

находим из (5.9.10) и (5.9.11)

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\sigma\theta} = \sum_l D_{\bar{l}l}(R(\theta)) u_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.12)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) e^{-i\sigma\theta} = \sum_l D_{\bar{l}l}(R(\theta)) v_l(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.13)$$

Для комбинации $S(\alpha, \beta)$ вращений и бустов в плоскости $x-y$, даваемых формулой (2.5.26),

$$S^{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma & 1+\gamma \end{bmatrix},$$

$$\gamma \equiv (\alpha^2 + \beta^2) / 2.$$

из формул (5.9.10) и (5.9.11) получаем

$$u_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) = \sum_l D_{\bar{l}l}(S(\alpha, \beta)) u_l(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.14)$$

$$v_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) = \sum_l D_{\bar{l}l}(S(\alpha, \beta)) v_l(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.15)$$

Формулы (5.9.12)–(5.9.15) представляют условия, определяющие коэффициентные функции u и v при стандартном импульсе \mathbf{k} .

Тогда формулы (5.9.8) и (5.9.9) определяют их при произвольных импульсах. Уравнения для v являются комплексно сопряженными к уравнениям для u , так что при подходящем выборе постоянных κ и λ можно отнормировать коэффициентные функции так, чтобы

$$v_l(\mathbf{p}, \sigma) = u_l(\mathbf{p}, \sigma)^* . \quad (5.9.16)$$

Проблема в том, что для произвольных представлений однородной группы Лоренца не удастся найти u_l , удовлетворяющие (5.9.14). Более того, это не удастся сделать даже для тех представлений, для которых при $m \neq 0$ можно построить поля частиц данной спиральности.

Чтобы понять, в чем сложность, попробуем построить 4-векторное поле $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ для безмассовой частицы со спиральностью ± 1 . В 4-векторном представлении имеем просто:

$$D^\mu{}_\nu(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu .$$

Принято записывать коэффициентные функции через «вектор поляризации» e_μ :

$$u_\mu(\mathbf{p}, \sigma) \equiv (2p^0)^{-1/2} e_\mu(\mathbf{p}, \sigma), \quad (5.9.17)$$

так что из формулы (5.9.8) получаем

$$e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = \mathcal{P}(\mathbf{p})^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.18)$$

Далее, формулы (5.9.12) и (5.9.14) принимают вид:

$$e^\mu(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\sigma\theta} = R(\theta)^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k}, \sigma), \quad (5.9.19)$$

$$e^\mu(\mathbf{k}, \sigma) = S(\alpha, \beta)^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k}, \sigma). \quad (5.9.20)$$

Из (5.9.19) следует, что с точностью до константы, которую можно включить в коэффициенты κ и λ ,

$$e^\mu(\mathbf{k}, \pm 1) = (1, \pm i, 0, 0) / \sqrt{2}. \quad (5.9.21)$$

Но тогда из (5.9.20) вытекает, что одновременно $\alpha \pm i\beta = 0$, что невозможно для произвольных действительных α и β . Поэтому

мы не можем удовлетворить фундаментальному требованию (5.9.14) или (5.9.10). Вместо этого имеем:

$$\begin{aligned} D^\mu{}_\nu(W(\theta, \alpha, \beta))e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1) &= S^\mu{}_\lambda(\alpha, \beta)R^\lambda{}_\nu(\theta)e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1) \\ &= \exp(\pm i\theta) \left\{ e^\mu(\mathbf{k}, \pm 1) + \frac{(\alpha \pm i\beta)}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|} k^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (5.9.22)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что невозможно построить 4-векторное поле из операторов уничтожения и рождения частицы нулевой массы со спиральностью ± 1 .

Закроем временно глаза на эту проблему, и попробуем продвинуться далее, используя формулы (5.9.18) и (5.9.21) для определения вектора поляризации при произвольном импульсе и записав поле в виде

$$\begin{aligned} a_\mu(x) &= \int d^3p (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \left[e_\mu(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + e_\mu(\mathbf{p}, \sigma)^* e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}, -\sigma) \right]. \end{aligned} \quad (5.9.23)$$

Позднее мы вернемся к вопросу о том, как можно использовать такое поле в качестве составной части физической теории.

Поле (5.9.23) очевидно удовлетворяет уравнению

$$\square a^\mu(x) = 0. \quad (5.9.24)$$

Другие свойства поля вытекают из свойств вектора поляризации. (Эти свойства понадобятся нам позднее при изучении квантовой электродинамики.) Заметим, что лоренцовское преобразование $\Lambda(\mathbf{p})$, переводящее импульс \mathbf{k} безмассовой частицы в импульс \mathbf{p} , может быть записано как «буст» $\mathcal{B}(|\mathbf{p}|)$ вдоль оси z , переводящий энергию частицы $|\mathbf{k}|$ в $|\mathbf{p}|$, и стандартизованное вращение $R(\hat{\mathbf{p}})$, переводящее ось z в ось, направленную вдоль \mathbf{p} . Поскольку $e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1)$ является чисто пространственным вектором, имеющим только x - и y -компоненты, он не изменяется при бусте вдоль оси z , так что

$$e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}})^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1). \quad (5.9.25)$$

В частности, $e^0(\mathbf{k}, \pm 1) = 0$ и $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, \pm 1) = 0$, поэтому

$$e^0(\mathbf{p}, \pm 1) = 0 \quad (5.9.26)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{p}, \pm 1) = 0. \quad (5.9.27)$$

Отсюда

$$a^0(x) = 0, \quad (5.9.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(x) = 0. \quad (5.9.29)$$

Как мы увидим в гл. 9, этим условиям удовлетворяет вакуумный вектор-потенциал электродинамики в так называемой кулоновской или радиационной калибровке.

Обращение в нуль a^0 во всех лоренцовских системах отсчета ярко показывает, что \mathbf{a}^μ не может быть 4-вектором. Из (5.9.22) следует, что для произвольного импульса \mathbf{p} и произвольного преобразования Лоренца Λ мы вместо (5.9.6) получаем

$$e^\mu(\mathbf{p}_\Lambda, \pm 1) \exp(\pm i\theta(\mathbf{p}, \Lambda)) = D^\mu{}_\nu(\Lambda) e^\nu(\mathbf{p}, \pm 1) + p^\mu \Omega_\pm(\mathbf{p}, \Lambda), \quad (5.9.30)$$

так что при произвольном преобразовании Лоренца

$$U(\Lambda) a_\mu(x) U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu \Omega(x, \Lambda), \quad (5.9.31)$$

где $\Omega(x, \Lambda)$ — линейная комбинация операторов уничтожения и рождения, точный вид которой нам не важен. Как будет детальнее показано в гл. 8, поле типа $a^\mu(x)$ можно включать в состав лоренц-инвариантных физических теорий, если взаимодействие поля a^μ с другими полями будут не только формально лоренц-инвариантны (т. е. инвариантны относительно формальных преобразований Лоренца, при которых $a^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$), но инвариантны и относительно «калибровочных» преобразований $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \Omega$. Это достигается, если эти взаимодействия брать в виде $a_\mu j^\mu$, где j^μ — 4-вектор тока, для которого $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Хотя не существует обычного 4-векторного поля безмассовых частиц со спиральностью ± 1 , нетрудно построить для таких частиц антисимметричное тензорное поле. Из формулы (5.9.22) и условия инвариантности k^μ относительно малой группы немедленно получаем:

$$\begin{aligned} & D^\mu{}_\rho(W(\theta, \alpha, \beta))D^\nu{}_\sigma(W(\theta, \alpha, \beta))(k^\rho e^\sigma(\mathbf{k}, \pm 1) - k^\sigma e^\rho(\mathbf{k}, \pm 1)) \\ &= e^{\pm i\theta}(k^\mu e^\nu(\mathbf{k}, \pm 1) - k^\nu e^\mu(\mathbf{k}, \pm 1)). \end{aligned} \quad (5.9.32)$$

Это показывает, что коэффициентная функция, удовлетворяющая соотношению (5.9.6) для антисимметричного тензорного представления однородной группы Лоренца при подходящем выборе нормировки имеет вид

$$u_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \pm 1) = i(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-3/2}[p^\mu e^\nu(\mathbf{p}, \pm 1) - p^\nu e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1)], \quad (5.9.33)$$

где $e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1)$ дается формулой (5.9.25). Используя это равенство вместе с (5.9.23), получаем произвольное антисимметричное тензорное поле безмассовой частицы со спиральностью ± 1 в виде

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu. \quad (5.9.34)$$

Заметим, что эта комбинация является тензором даже в том случае, когда a^μ не является 4-вектором, поскольку лишнее слагаемое в (5.9.31) выпадает из (5.9.34). Заметим также, что из формул (5.9.34), (5.9.24), (5.9.28) и (5.9.29) следует, что $f^{\mu\nu}$ удовлетворяет вакуумным уравнениям Максвелла

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0, \quad (5.9.35)$$

$$\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\partial_\sigma f_{\mu\nu} = 0. \quad (5.9.36)$$

Для того, чтобы установить коммутационные соотношения для тензорных полей, нам нужны формулы суммирования по спиральностям билинейных форм $e^\mu e^{\nu*}$. Используя явную формулу (5.9.21), получаем

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^i(\mathbf{k}, \sigma)e^j(\mathbf{k}, \sigma)^* = \delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2},$$

откуда с помощью (5.9.25) находим:

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^i(\mathbf{p}, \sigma)e^j(\mathbf{p}, \sigma)^* = \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2}. \quad (5.9.37)$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что

$$[f_{\mu\nu}(x), f_{\rho\sigma}(y)^\dagger] = (2\pi)^{-3} [-\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma + \eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho - \eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho] \\ \times \int d^3p(2p^0)^{-1} [|\kappa|^2 e^{ip \cdot x} - |\lambda|^2 e^{-ip \cdot x}]. \quad (5.9.38)$$

Очевидно, что это выражение обращается в нуль при $x^0 = y^0$ тогда и только тогда, когда

$$|\kappa|^2 = |\lambda|^2. \quad (5.9.39)$$

В этом случае, поскольку $f^{\mu\nu}$ — тензор, коммутатор обращается в нуль для всех пространственноподобных интервалов. Из формулы (5.9.39) следует также, что коммутатор a^μ обращается в нуль при равных временах. Как будет видно в гл. 8, этого достаточно, чтобы получить лоренц-инвариантную S -матрицу. Относительные фазы операторов рождения и уничтожения можно подобрать так, чтобы $\kappa = 1$. Тогда в случае, когда частицы совпадают со своими зарядово-сопряженными, как у фотона, поля становятся эрмитовыми.

Почему при построении теорий безмассовых частиц со спином 1 желательно использовать поля типа $a^\mu(x)$, а не ограничиться полями типа $f^{\mu\nu}(x)$ с простыми свойствами лоренцовских преобразований? Наличие производных в (5.9.34) означает, что плотность гамильтониана взаимодействия, построенная только из $f_{\mu\nu}$ и его производных, будет иметь матричные элементы, более быстро убывающие при малых энергиях и импульсах безмассовых частиц, чем те, которые построены с помощью векторного поля a_μ . Соответственно, взаимодействия в такой теории будут убывать на больших расстояниях быстрее, чем по обычному закону обратных квадратов. Такое вполне возможно, однако калибровочно-инвариантные теории, использующие векторные поля для описания безмассовых частиц со спином 1, представляют более общий класс теорий, включающий те, которые в действительности реализуются в природе.

Аналогичные замечания применимы к гравитонам — безмассовым частицам со спиральностью ± 2 . Из операторов уничтожения и рождения таких частиц можно построить тензор $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ с алгебраическими свойствами тензора кривизны Римана–Кристоффеля: антисимметричностью по перестановкам внутри пар μ, ν и ρ, σ ,

и симметрией относительно перестановок самих этих пар. Однако, чтобы включить обычные гравитационные взаимодействия по закону обратных квадратов, необходимо ввести поле $h_{\mu\nu}$, преобразующееся как симметричный тензор с точностью до калибровочных преобразований, относящихся к типу, связанному в общей теории относительности с произвольными преобразованиями координат. Таким образом, чтобы построить теорию безмассовых частиц со спиральностью ± 2 , включающую дальнее действие, необходимо, чтобы эта теория обладала симметрией, похожей на общую ковариантность. Как и в случае электромагнитной калибровочной инвариантности, этого можно добиться, введя взаимодействие поля $h_{\mu\nu}$ с сохраняющимся «током» $\theta^{\mu\nu}$, теперь уже несущим два пространственно-временных индекса и удовлетворяющим условию $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$. Единственным таким сохраняющимся тензором является тензор энергии-импульса, если не учитывать возможные слагаемые, имеющие вид полной производной и не влияющие на поведение порождаемых подобным взаимодействием сил на больших расстояниях.* Поля безмассовых частиц со спином $j \geq 3$ должны были бы взаимодействовать с сохраняющимися тензорами с тремя и более пространственно-временными индексами. Однако таких тензоров не существует, если не считать полных производных, поэтому *безмассовые частицы с большими спинами не могут породить дальнедействующие силы.*

* * *

Проблемы, с которыми мы столкнулись при построении 4-векторных полей для спиральностей ± 1 и симметричных тензорных полей для спиральностей ± 2 , являются частными случаями более общих ограничений. Чтобы увидеть это, рассмотрим проблему построения полей

* Если $\theta^{\mu_1 \dots \mu_N}$ — тензорный ток, удовлетворяющий условию $\partial_{\mu_1} \theta^{\mu_1 \dots \mu_N} = 0$, то $\int d^3x \theta^{\mu_1 \dots \mu_N}$ — сохраняющаяся величина, преобразующаяся как тензор ранга $N - 1$. Единственными сохраняющимися тензорами такого рода являются скалярные «заряды», связанные с различными непрерывными симметриями, и 4-вектор энергии-импульса. Сохранение любого другого 4-вектора или любого тензора более высокого ранга исключило бы возможность рассеяния на любые углы, кроме нулевого.

безмассовых частиц, принадлежащих произвольным представлениям однородной группы Лоренца. Как мы видели в разделе 5.6, всякое представление $D(\Lambda)$ однородной группы Лоренца можно разложить на $(2A+1)(2B+1)$ -мерные представления (A, B) , для которых генераторы однородной группы Лоренца представляются в виде

$$\begin{aligned} (J_{ij})_{a'b', ab} &= \varepsilon_{ijk} \left[(J_k^{(A)})_{a'a} \delta_{b'b} + (J_k^{(B)})_{b'b} \delta_{a'a} \right], \\ (J_{i0})_{a'b', ab} &= -i \left[(J_k^{(A)})_{a'a} \delta_{b'b} - (J_k^{(B)})_{b'b} \delta_{a'a} \right], \end{aligned}$$

где $\mathbf{J}^{(j)}$ — матрицы углового момента для спина j . Для бесконечно малых θ имеем $D(R(\theta)) = 1 + i\mathcal{J}_{23}\theta$, так что из формул (5.9.12) и (5.9.13) получаем

$$\begin{aligned} \sigma u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) &= (a + b) u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma), \\ -\sigma v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) &= (a + b) v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma). \end{aligned}$$

Таким образом, $u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ и $v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ должны обращаться в нуль во всех случаях, кроме $\sigma = a + b$ и $\sigma = -a - b$. Далее, полагая α и β в (5.9.14) бесконечно малыми, находим:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{J}_{31} + \mathcal{J}_{01})_{ab, a'b'} u_{a'b'}(\mathbf{k}, \sigma) \\ &= (J_2^{(A)} + iJ_1^{(A)})_{aa'} u_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) + (J_2^{(B)} - iJ_1^{(B)})_{bb'} u_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma), \\ 0 &= (\mathcal{J}_{32} + \mathcal{J}_{02})_{ab, a'b'} u_{a'b'}(\mathbf{k}, \sigma) \\ &= (-J_1^{(A)} + iJ_2^{(A)})_{aa'} u_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) + (-J_1^{(B)} - iJ_2^{(B)})_{bb'} u_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma), \end{aligned}$$

или проще

$$\begin{aligned} (J_1^{(A)} - iJ_2^{(A)})_{aa'} u_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) &= 0, \\ (J_1^{(B)} + iJ_2^{(B)})_{bb'} u_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ обращается в нуль, кроме случаев

$$a = -A, \quad b = +B, \quad (5.9.40)$$

и это же очевидно верно для $v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$. Собирая вместе эти результаты, видим, что поле типа (A, B) можно построить только из операторов

уничтожения безмассовой частицы со спиральностью σ и операторов рождения античастицы со спиральностью $-\sigma$, где

$$\sigma = B - A. \quad (5.9.41)$$

Например, компоненты $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$ дираковского поля безмассовой частицы могут только уничтожать частицы со спиральностью $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$ и, соответственно, рождать античастицы со спиральностью $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. В «двухкомпонентной» теории нейтрино рассматриваются только поле $(\frac{1}{2}, 0)$ и сопряженное ему поле, так что в этой теории спиральность нейтрино равна $-\frac{1}{2}$, а спиральность антинейтрино равна $+\frac{1}{2}$.

Теми же методами, что и в разделе 5.7, можно показать, что $(j, 0)$ и $(0, j)$ поля безмассовых частиц со спином j (т. е. со спиральностью $\mp j$) коммутируют друг с другом и со своими сопряженными на пространственноподобных расстояниях, если коэффициенты у слагаемых с операторами уничтожения и рождения в (5.9.1) удовлетворяют соотношению (5.9.39). После этого можно так подобрать относительную фазу операторов уничтожения и рождения, чтобы эти коэффициенты стали равными. Легко видеть, что поля безмассовых частиц со спином j типа $(A, A + j)$ или $(B + j, B)$ являются просто производными порядка $2A$ или $2B$ полей типа $(0, j)$ или $(j, 0)$, соответственно, так что нет нужды рассматривать здесь такие более общие поля.

Теперь можно понять, почему нельзя построить векторное поле для безмассовых частиц со спиральностью ± 1 . Векторное поле преобразуется по представлению $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, поэтому согласно (5.9.19) может описывать только спиральность нуль. (Конечно, можно построить векторное поле для нулевой спиральности — для этого достаточно просто взять производную $\partial_\mu \phi$ безмассового скалярного поля ϕ .) Простейшее ковариантное безмассовое поле для спиральности ± 1 преобразуется по представлению $(1, 0) \oplus (0, 1)$.

Иными словами, это антисимметричный тензор $f_{\mu\nu}$. Аналогично, простейшее ковариантное безмассовое поле для спиральности ± 2 преобразуется по представлению $(2, 0) \oplus (0, 2)$, т. е. это тензор четвертого ранга, который, как тензор кривизны Римана–Кристоффеля, антисимметричен при перестановке внутри каждой пары индексов и симметричен при перестановке самих этих пар.

Обсуждение операций инверсий P , C , T , проведенное в предыдущем разделе, с очевидными модификациями переносится на случай нулевой массы.

Задачи

1. Покажите, что если коэффициентные функции при нулевом импульсе удовлетворяют условиям (5.1.23) и (5.1.24), то коэффициентные функции (5.1.21) и (5.1.22) для произвольного импульса удовлетворяют определяющим условиям (5.1.19) и (5.1.20).
2. Рассмотрите свободное поле $\psi_l^\mu(x)$, которое уничтожает и рождает зарядово самосопряженные частицы со спином $3/2$ и массой $m \neq 0$. Вычислите коэффициентные функции $u_l^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$, на которые умножаются операторы уничтожения $a(\mathbf{p}, \sigma)$ в выражении для этого поля, при условии, что под действием лоренцовских преобразований поле преобразуется как дираковское поле ψ_l с дополнительным 4-векторным индексом μ . Каким полевым уравнениям, алгебраическим условиям и условиям действительности удовлетворяет это поле? Найдите матрицу $P^{\mu\nu}(p)$, которая при $p^2 = -m^2$ определена равенством

$$\sum_{\sigma} u_l^\mu(\mathbf{p}, \sigma) u_m^{*\nu}(\mathbf{p}, \sigma) \equiv (2p^0)^{-1} P_{lm}^{\mu\nu}(p).$$

Каковы коммутационные соотношения для этого поля? Как оно преобразуется под действием инверсий P , C и T ?

3. Рассмотрите свободное поле $h^{\mu\nu}(x)$, удовлетворяющее условиям $h^{\mu\nu}(x) = h^{\nu\mu}(x)$ и $h^\mu{}_\mu(x) = 0$, которое уничтожает и рождает частицу спина 2 и массой $m \neq 0$. Вычислите коэффициентные функции $u^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \sigma)$, на которые умножаются операторы уничтожения $a(\mathbf{p}, \sigma)$ в выражении для этого поля, чтобы под действием лоренцовских преобразований поле преобразуется как тензор. Каким полевым уравнениям удовлетворяет это поле? Найдите функцию $P^{\mu\nu, \kappa\lambda}(p)$, определенную равенством

$$\sum_{\sigma} u^{\mu\nu}(\mathbf{p}, \sigma) u^{\kappa\lambda*}(\mathbf{p}, \sigma) \equiv (2p^0)^{-1} P^{\mu\nu, \kappa\lambda}(p).$$

Каковы коммутационные соотношения для этого поля? Как оно преобразуется под действием инверсий P , C и T ?

4. Покажите, что для безмассовой частицы со спином j поля типа $(A, A+j)$ или $(B+j, B)$ являются производными порядка $2A$ или $2B$ полей типа $(0, j)$ или $(j, 0)$, соответственно.
5. Выясните трансформационные свойства полей типа $(j, 0) + (0, j)$ безмассовых частиц со спиральностью $\pm j$ под действием операций инверсии P , C и T .
6. Рассмотрите обобщенное дираковское поле u , которое преобразуется по представлению $(j, 0) + (0, j)$ однородной группы Лоренца. Перечислите тензоры, которые можно образовать из произведений компонент ψ и ψ^\dagger . Проверьте результат, сравнив с найденными нами выражениями для $j = \frac{1}{2}$.
7. Рассмотрите обобщенное поле ψ_{ab} , описывающее частицы со спином j и массой $m \neq 0$, которое преобразуется по (A, B) представлению однородной группы Лоренца. Предположим, что гамильтониан взаимодействия этого поля имеет вид

$$V = \int d^3x [\psi_{ab}(x) J^{ab}(x) + J^{ab\dagger}(x) \psi_{ab}^\dagger(x)],$$

где J^{ab} — внешний s -числовой ток. Каково асимптотическое поведение матричных элементов испускания этих частиц с энергией $E \gg m$ и определенной спиральностью? (Предположите, что фурье-образ тока при разных a, b имеет значения одного порядка величины и не зависит сильно от E .)

Список литературы

1. Подход, излагаемый в этой главе, был представлен в серии работ: Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **133**, D1318 (1964); **134**, B882 (1964); **138**, B988 (1965); **181**, 1893 (1969). Аналогичный подход был

изложен в неопубликованных лекциях Ю. Вихмана.

2. Bohr, N. and Rosenfeld, L., *Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mat.-Fys. Medd.*, No. 12 (1933) (перевод в сборнике: *Selected papers of Leon Rosenfeld*, ed. by R.S. Cohen and J. Stachel (Reidel, Dordrecht, 1979)); *Phys. Rev.*, **78**, 794 (1950).
3. Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A117**, 610 (1928).
4. Cartan, E., *Bull. Soc. Math. France*, **41**, 53 (1913).
5. См., например, Jauch, J.M. and Rorlich, F. *The Theory of Photons and Electrons* (Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1955), Appendix A2; Georgi, H. *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin-Cummings, Reading, VA, 1982), pp. 15, 198. Исходная ссылка: Schur, I., *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406 (1905).
6. См., например, Georgi, H. *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin-Cummings, Reading, VA, 1982), pp. 15, 198. Исходная ссылка: Schur, I., *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406 (1905).
7. Lee, T.D. and Yang, C.N., *Phys. Rev.*, **104**, 254 (1956).
8. См., например, Van der Waerden, B.L. *Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* (Springer Verlag, Berlin, 1932); Любарский, Г.Я. *Теория групп и ее применение в физике* (М.: Гостехиздат, 1957).
9. Rarita, W. and Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **60**, 61 (1941).
10. См., например, Edmonds, A.R., *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1957), Chapter 3 (есть рус. пер.: Эдмондс, А. *Угловой момент в квантовой механике*. М.: ИЛ, 1968).
11. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **181**, 1893 (1969); Section V.
12. Fierz, M., *Helv. Phys. Acta*, **12**, 3 (1939); Pauli, W., *Phys. Rev.*, **58**, 716 (1940). Не основанные на теории возмущений доказа-

- тельства в аксиоматической теории поля были даны в работах: Lüders, G. and Zumino, B., *Phys. Rev.*, **110**, 1450 (1958); Burgoyne, N., *Nuovo Cimento*, **8**, 807 (1958). См. также: Streater, R.F. and Wightman, A.S. *PCT, Spin & Statistics, and All That* (Benjamin, New York, 1968) (есть рус. пер.: Стритер Р., Вайтман А. *PCT, спин и статистика и все такое*. М.: Мир, 1970).
13. Поля в представлении $(j,0) + (0,j)$ были введены в работе: Joos, H., *Fortschr. Phys.*, **10**, 65 (1962); Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **133**, B1318 (1964).
 14. Edmonds, A.R. [10], или Rose, M.E. *Elementary Theory of Angular Momentum* (Wiley & Sons, New York, 1957), Chapter III.
 15. Velo, G. and Zwanziger, D., *Phys. Rev.*, **186**, 1337 (1969); **188**, 2218 (1969); Wightman, A.S., in: *Proceedings of the Fifth Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High Energy*, ed. by T. Gudehus, G. Kaiser, and A. Perlmutter (Gordon and Breach, New York, 1969); Schroer, B., Seiler, R., and Swieca, A., *Phys. Rev.*, **D2**, 2927 (1970) и другие ссылки в этих работах.
 16. Nappi, C.R. and Witten, E., *Phys. Rev.*, **D40**, 1095 (1989); Argyres, P.C. and Nappi, C.R., *Phys. Lett.*, **B224**, 89 (1989). Вывод согласованной теории частиц со спином $j = 3/2$ во внешних полях из теории Калуцы–Клейна см. в работах: Rindani, S.D. and Sivakumar, M., *J. Phys. G: Nucl. Phys.*, **12**, 1335 (1986); *J. Phys. C: Particles & Fields*, **49**, 601 (1991).
 17. Lüders, G., *Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mat.-Fys. Medd.*, **28**, 5 (1954); *Ann. Phys.*, **2**, 1 (1957); Pauli, W., *Nuovo Cimento*, **6**, 204 (1957). Когда Людере впервые рассмотрел вопрос о том, как связаны инверсии, считалось общепризнанным, что P сохраняется, так что его теорема утверждала, что сохранение C эквивалентно T -инвариантности.
 18. Jost, R., *Helv. Phys. Acta*, **30**, 409 (1957); Dyson, F.J., *Phys. Rev.*, **110**, 579 (1958). См. также книгу Стритера и Вайтмана [12].

Фейнмановские правила

В предыдущих главах использование ковариантных свободных полей для построения плотности гамильтониана мотивировалось требованием, чтобы S -матрица удовлетворяла условиям лоренц-инвариантности и кластерного разложения. Если мы построили таким способом плотность гамильтониана, уже не имеет значения, какую форму теории возмущений использовать для вычисления S -матрицы. Результаты будут автоматически удовлетворять указанным условиям в каждом порядке по плотности гамильтониана взаимодействия. Тем не менее, очевидны практические преимущества использования такого варианта теории возмущений, в котором лоренц-инвариантность и свойства кластерного разложения S -матрицы явно сохраняются на каждом этапе вычислений.

В той теории возмущений, которую использовали в 1930-е годы и которая сейчас известна под названием «старой» (мы описали ее в начале раздела 3.5), указанные свойства не выполнялись. Большим достижением Фейнмана, Швингера и Томонаги в конце 1940-х годов было развитие такой техники теории возмущений для вычисления S -матрицы, в которой на каждом шаге прослеживались лоренц-инвариантность и свойства кластерного разложения.

В этой главе мы опишем диаграммную технику вычислений, впервые предложенную Фейнманом на конференции в Поконо в 1948 году. Фейнман пришел к этим диаграммным правилам, развивая предложенный им подход, основанный на функциональном интеграле. Этот подход будет рассмотрен в гл. 9. Здесь же мы воспользуемся подходом, предложенным в 1949 году Дайсоном¹.

Вплоть до 1970-х годов именно он был основой любого анализа теории возмущений в квантовой теории поля, да и до сих пор этот подход позволяет дать особенно ясное введение в фейнмановские правила*.

6.1. Вывод правил

Исходной для нас является формула для S -матрицы, полученная объединением дайсоновского ряда (3.5.10) с выражением (4.2.2) для состояний свободных частиц:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2\dots\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2\dots} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int d^4x_1\dots d^4x_N (\Phi_0, \dots a(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2)a(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) \\ &\times T\{H(x_1)\dots H(x_N)\} a^\dagger(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)\dots\Phi_0). \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Напоминание: метки \mathbf{p} , σ и n отмечают импульсы частиц, их спин и тип; штрихи относятся к меткам частиц в конечном состоянии; Φ_0 — вакуумное состояние свободных частиц; a и a^\dagger — операторы уничтожения и рождения; T означает хронологическое упорядочивание, располагающее все $\mathcal{H}(x)$ в таком порядке, что аргументы x^0 уменьшаются слева направо; $\mathcal{H}(x)$ — плотность гамильтониана взаимодействия, рассматриваемая как полином по полям и сопряженным полям,

$$\mathcal{H}(x) = \sum_i g_i \mathcal{H}_i(x), \quad (6.1.2)$$

причем каждое слагаемое \mathcal{H}_i является произведением определенного числа полей и им сопряженных полей каждого типа. Поле

* Мы используем современную версию *функциональный интеграл* русского перевода английского термина *path integral*, предпочитая ее первоначальным и до сих пор используемым версиям «интеграл по путям» или «интеграл по траекториям». Это отвечает более широкому современному содержанию понятия. — *Прим. ред.*

частицы типа n , преобразующееся по определенному представлению однородной группы Лоренца (с учетом или без учета пространственных инверсий), дается выражением

$$\begin{aligned} \psi_l(x) = \sum_{\sigma} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p [u_l(\mathbf{p}, \sigma, n) a(\mathbf{p}, \sigma, n) e^{ip \cdot x} \\ + v_l(\mathbf{p}, \sigma, n) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n^c) e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Здесь n^c — индекс античастицы типа n , а в показателе $\exp(\pm i p \cdot x)$ компонента p^0 равна $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}$. Коэффициентные функции u_l и v_l зависят от свойств поля по отношению к преобразованиям Лоренца и от спина частицы, которая описывается этим полем. Эти функции были вычислены в гл. 5. (Например, в случае скалярного поля коэффициент u_l для частицы с энергией E равен $(2E)^{-1/2}$, а для дираковского поля u_l и v_l — нормированные дираковские спиноры, введенные в разделе 5.5.) Индекс l у поля следует понимать как указатель типа частицы и того представления группы Лоренца, по которому поле преобразуется. Кроме того, в него включается бегущий индекс, отмечающий компоненты поля в данном представлении.

Нет нужды рассматривать отдельно взаимодействия, содержащие производные полей; с нашей точки зрения, производная поля (6.1.3) есть просто другое поле, описываемое той же формулой, но с другими коэффициентами u_l и v_l . Ниже мы будем делать различие между некоторыми типами частиц, которые мы произвольно будем называть «частицами», например, электроны, протоны, и т. д., и типами частиц, которые будем называть «античастицами» (позитроны, антипротоны и т. д.). Полевые операторы, уничтожающие частицы и рождающие античастицы, будут называться просто «полями»; сопряженные им операторы, уничтожающие античастицы и рождающие частицы, будут называться «сопряженными полями». Конечно, у некоторых типов частиц, вроде фотона и π^0 -мезона, античастицы тождественны частицам. В этом случае сопряженные поля пропорциональны самим полям.

Начнем перемещать все операторы уничтожения в формуле (6.1.1) направо, используя на каждом шаге соотношения коммутации или антикоммутации:

$$a(\mathbf{p} \sigma n) a^\dagger(\mathbf{p}' \sigma' n') = \pm a^\dagger(\mathbf{p}' \sigma' n') a(\mathbf{p} \sigma n) + \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\sigma' \sigma} \delta_{n' n}, \quad (6.1.4)$$

$$a(\mathbf{p} \sigma n) a(\mathbf{p}' \sigma' n') = \pm a(\mathbf{p}' \sigma' n') a(\mathbf{p} \sigma n), \quad (6.1.5)$$

$$a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n) a^\dagger(\mathbf{p}' \sigma' n') = \pm a^\dagger(\mathbf{p}' \sigma' n') a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n). \quad (6.1.6)$$

(аналогично для античастиц). При этом из знаков \pm справа выбирается знак «минус», если обе частицы n, n' — фермионы, и знак «плюс», если одна или обе частицы — бозоны. Как только оператор уничтожения оказывается крайним справа (или оператор рождения — крайним слева), соответствующий вклад в (6.1.1) обращается в нуль, так как действие этих операторов на вакуумное состояние дает нуль:

$$a(\mathbf{p} \sigma n) \Phi_0 = 0, \quad (6.1.7)$$

$$\Phi_0^\dagger a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n) = 0. \quad (6.1.8)$$

Ненулевые вклады в (6.1.1) возникают от слагаемых с дельта-функциями в правой части (6.1.4), после того, как каждый оператор рождения и уничтожения в начальном или конечном состоянии или в плотности гамильтониана взаимодействия спарится с каким-то другим оператором уничтожения или рождения.

Таким образом, вклад в (6.1.1) данного порядка по каждому из слагаемых \mathcal{H}_i в полиноме $\mathcal{H}(\Psi(x), \Psi^\dagger(x))$ дается суммой по всем способам спаривания операторов рождения и уничтожения², каждый член суммы является интегралом от произведений множителей, которые находятся по следующим правилам.

а) Спаривание конечной частицы с квантовыми числами \mathbf{p}', σ', n' с сопряженным полем $\Psi_i^\dagger(x)$ в $\mathcal{H}_i(x)$ дает множитель

$$\left[a(\mathbf{p}' \sigma' n'), \Psi_i^\dagger(x) \right]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{-i\mathbf{p}' \cdot x} u_i^*(\mathbf{p}' \sigma' n'). \quad (6.1.9)$$

б) Спаривание конечной античастицы с квантовыми числами $\mathbf{p}', \sigma', n'^c$ с полем $\Psi_i(x)$ в $\mathcal{H}_i(x)$ дает множитель

$$\left[a(\mathbf{p}' \sigma' n'^c), \Psi_i(x) \right]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{-i\mathbf{p}' \cdot x} v_i(\mathbf{p}' \sigma' n'). \quad (6.1.10)$$

в) Спаривание начальной частицы с квантовыми числами \mathbf{p}, σ, n с полем $\Psi_i(x)$ в $\mathcal{H}_i(x)$ дает множитель

$$\left[\Psi_l(x), a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n) \right]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{ip \cdot x} u_l(\mathbf{p} \sigma n). \quad (6.1.11)$$

г) Спаривание начальной античастицы с квантовыми числами \mathbf{p} , σ , n^c с сопряженным полем $\Psi_l^\dagger(x)$ в $\mathcal{H}_i(x)$ дает множитель

$$\left[\Psi_l^\dagger(x), a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n^c) \right]_{\mp} = (2\pi)^{-3/2} e^{ip \cdot x} v_l^*(\mathbf{p} \sigma n). \quad (6.1.12)$$

д) Спаривание конечной частицы (или античастицы) с квантовыми числами \mathbf{p}' , σ' , n' с начальной частицей (или античастицей) с квантовыми числами \mathbf{p} , σ , n дает множитель

$$\left[a(\mathbf{p}' \sigma' n'), a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n) \right]_{\mp} = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\sigma' \sigma} \delta_{n' n}. \quad (6.1.13)$$

е) Спаривание поля $\Psi_l(x)$ в $\mathcal{H}_i(x)$ с сопряженным полем $\Psi_m^\dagger(y)$ в $\mathcal{H}_j(y)$ дает множитель *

$$\theta(x - y) \left[\Psi_l^\dagger(x), \Psi_m^\dagger(y) \right]_{\mp} \pm \theta(y - x) \left[\Psi_m^\dagger(y), \Psi_l^-(y) \right]_{\mp} \equiv -i\Delta_{lm}(x, y), \quad (6.1.14)$$

где Ψ^+ и Ψ^- — слагаемые в Ψ , которые уничтожают частицы и рождают античастицы, соответственно:

$$\Psi_l^\dagger(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} u_l(\mathbf{p} \sigma n) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p} \sigma n), \quad (6.1.15)$$

$$\Psi_l^-(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} v_l(\mathbf{p} \sigma n) e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p} \sigma n^c), \quad (6.1.16)$$

Напомним, что $\theta(x - y)$ — ступенчатая функция, равная +1 при $x^0 > y^0$ и нулю при $x^0 < y^0$. Такие ступенчатые функции возникают в (6.1.14) из-за хронологического упорядочивания в (6.1.1); спаривание поля уничтожения $\Psi^+(x)$ в $\mathcal{H}(x)$ с полем рождения $\Psi^{+\dagger}(y)$ в $\mathcal{H}(y)$ можно учитывать, только если $\mathcal{H}(x)$ изначально находится левее $\mathcal{H}(y)$ в формуле (6.1.1), т. е. если $x^0 > y^0$. Аналогич-

* Если взаимодействие $\mathcal{H}(x)$ записано в нормальной форме, как в (5.1.33), то отсутствует спаривание полей с сопряженными полями в одном и том же операторе взаимодействия. В противном случае необходима некоторая процедура регуляризации для придания смысла величине $\Delta_{lm}(0)$.

но, мы учитываем спаривание поля уничтожения $\Psi^{\dagger}(y)$ в $\mathcal{H}(y)$ с полем рождения $\Psi(x)$ в $\mathcal{H}(x)$, только если $\mathcal{H}(y)$ изначально находится левее $\mathcal{H}(x)$, т. е. если $y^0 > x^0$. (Знак \pm во втором слагаемом в (6.1.14) будет объяснен чуть ниже.) Выражение (6.1.14) называется *пропагатором* и вычисляется в следующем разделе.

S -матрица получается путем перемножения всех этих множителей с учетом дополнительных численных множителей, обсуждаемых ниже, затем интегрирования по $x_1 \dots x_N$, суммирования по всем спариваниям и затем по числу взаимодействий каждого типа.

Прежде чем погружаться в детали, удобно описать диаграммный формализм, позволяющий проследить за всеми этими спариваниями.

Правила вычисления S -матрицы удобно сформулировать на языке *фейнмановских диаграмм* (рис. 6.1). Диаграмма содержит точки, называемые *вершинами*, причем каждая вершина соответствует одному из операторов $\mathcal{H}_i(x)$, и *линии*, каждая из которых соответствует спариванию операторов рождения и уничтожения. Сформулируем правила более подробно.

а) Спаривание конечной частицы с сопряженным полем в одном из операторов $\mathcal{H}(x)$ изображается линией, идущей вверх из вершины, соответствующей данному $\mathcal{H}(x)$, и имеющей стрелку, направленную вверх.

б) Спаривание конечной античастицы с полем в одном из операторов $\mathcal{H}(x)$ также изображается линией, идущей вверх из вершины, соответствующей данному $\mathcal{H}(x)$, но со стрелкой, направленной вниз. (Для частиц типа γ и π^0 , совпадающих со своими античастицами, стрелки на линиях не указываются.)

в) Спаривание начальной частицы с полем в одном из операторов $\mathcal{H}(x)$ изображается линией, входящей снизу в вершину, соответствующую данному $\mathcal{H}(x)$, и имеющей стрелку, направленную вверх.

г) Спаривание начальной античастицы с полем в одном из операторов $\mathcal{H}(x)$ также изображается линией, входящей снизу в вершину, соответствующую данному $\mathcal{H}(x)$, но имеющей стрелку, направленную вниз.

д) Спаривание конечной частицы или античастицы с начальной частицей или античастицей представляется не связанной ни с какими вершинами линией, проходящей снизу вверх через всю диаграмму, со стрелкой направленной вверх или вниз для частиц и античастиц, соответственно.

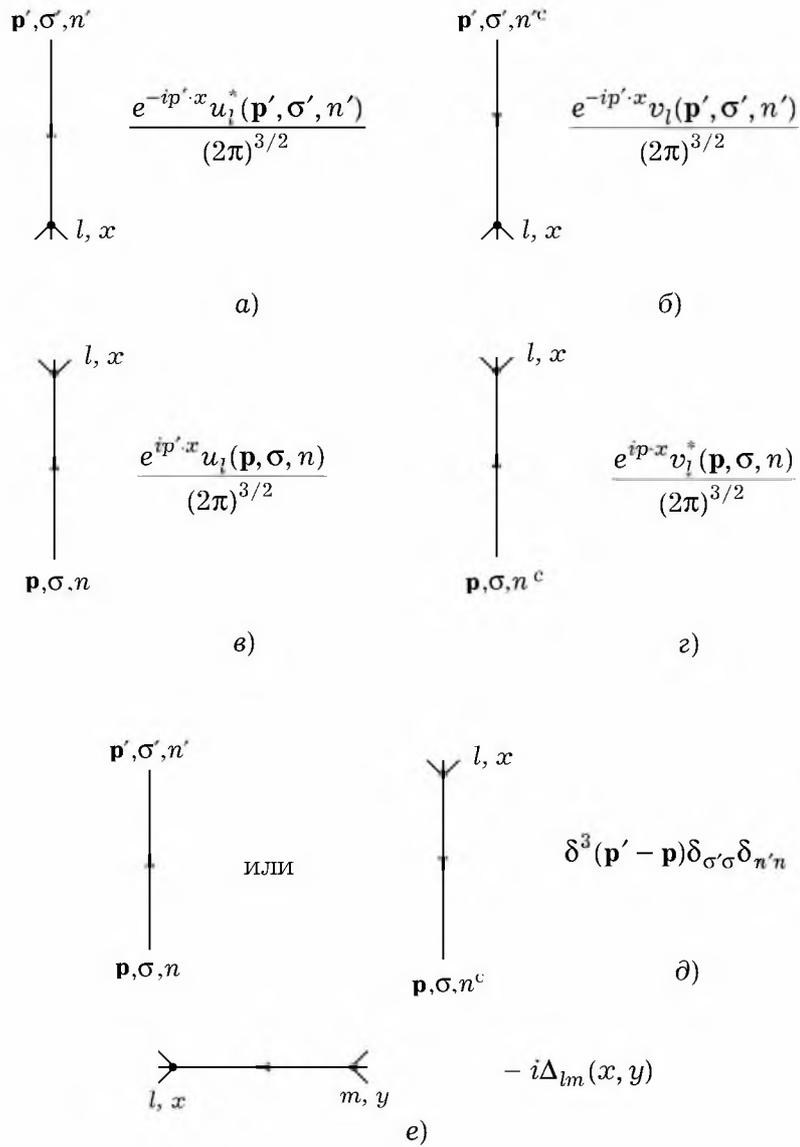


Рис. 6.1. Графическое изображение спариваний операторов, возникающих при вычислении S -матрицы в координатном представлении. Выражения справа — множители, отвечающие каждой линии фейнмановской диаграммы, которые должны включаться в подынтегральное выражение координатного представления S -матрицы

е) Спаривание поля в $\mathcal{H}(x)$ с сопряженным полем в $\mathcal{H}(y)$ представляется линией, соединяющей вершины $\mathcal{H}(x)$ и $\mathcal{H}(y)$, и имеющей стрелку, направленную от y к x .

Обратим внимание, что стрелки всегда указывают направление движения частицы, и противоположны направлению движения античастицы. (Как отмечено выше, для частиц типа фотона, совпадающих со своими античастицами, стрелки следует опустить.) Направление стрелки в правиле е) совместимо с этим соглашением, так как сопряженное поле в $\mathcal{H}_j(y)$ может либо рождасть частицу, уничтожаемую полем в $\mathcal{H}_i(x)$, либо уничтожать античастицу, рождаемую этим полем. Заметим также, что поскольку каждое поле или сопряженное поле в $\mathcal{H}_i(x)$ должно с чем-нибудь спариться, полное число линий в вершине типа i , соответствующей слагаемому $\mathcal{H}_i(x)$ в (6.1.2), в точности равно полному числу полей или сопряженных полей в $\mathcal{H}_i(x)$. При этом число линий со стрелками, направленными в вершину или из нее, равно, соответственно, числу полей или сопряженных полей в соответствующем члене взаимодействия.

Чтобы вычислить вклад в S -матрицу данного процесса в данном порядке N_i по каждому из членов взаимодействия $\mathcal{H}_i(x)$ в (6.1.2), нужно проделать следующие операции.

1. Следует нарисовать все фейнмановские диаграммы, содержащие N_i вершин каждого типа i . Эти диаграммы должны иметь линии, входящие в них снизу, и отвечающие каждой частице и античастице в начальном состоянии, линии, выходящие вверх и отвечающие каждой частице или античастице в конечном состоянии, и такое число соединяющих вершины внутренних линий, чтобы к каждой вершине подсоединялось нужное число линий. Стрелки на линиях выбираются по указанным выше правилам в направлении либо вверх, либо вниз. Каждая вершина помечается индексом типа взаимодействия i и пространственно-временной координатой x^{μ} . Каждая внутренняя или внешняя линия помечается на том конце, который соединен с вершиной, индексом типа поля l (что соответствует полям $\psi_l(x)$ или $\psi_l^{\dagger}(x)$, рождающим или уничтожающим частицу или античастицу в этой вершине). Кроме того, каждая внешняя линия помечается на конце, откуда она входит в диаграмму или выходит из нее, квантовыми числами \mathbf{p} , σ , n или \mathbf{p}' , σ' , n' начальной или конечной частицы (или античастицы).

2. Каждой вершине типа i следует сопоставить множитель $-i$ (он возникает из множителя $(-i)^N$ в (6.1.1)) и множитель g_i (константа связи, на которую умножается произведение полей в $\mathcal{H}_i(x)$).^{*} Каждой линии, выходящей вверх из диаграммы, сопоставляется множитель (6.9.9) или (6.9.10) в зависимости от направления стрелки на линии. Аналогично, каждой линии, входящей в диаграмму снизу, сопоставляется множитель (6.1.11) или (6.1.12), опять же, в зависимости от направления стрелки. Каждой линии, проходящей снизу вверх насквозь через диаграмму, сопоставляется множитель (6.1.13). Наконец, каждой внутренней линии, соединяющей две вершины, сопоставляется множитель (6.1.14).

3. Следует произвести интегрирование произведения всех этих множителей по координатам x_1, x_2, \dots всех вершин.

4. Результаты, полученные таким образом для каждой фейнмановской диаграммы, следует сложить. Полное выражение ряда теории возмущений для S -матрицы получается сложением вкладов от каждого порядка теории возмущений по каждому из типов взаимодействий (реально мы ограничиваемся тем порядком, который в состоянии вычислить в данный момент).

Заметим, что мы не включили в эти правила множитель $1/N!$ из (6.1.1), так как хронологически упорядоченное произведение в (6.1.1) является суммой по $N!$ перестановкам координат $x_1 x_2 \dots x_N$, дающим одинаковый вклад в окончательный результат. Чтобы понять это другим способом, заметим, что фейнмановская диаграмма с N вершинами есть одна из $N!$ идентичных диаграмм, отличающихся только перестановками меток в вершинах. Учет этого дает множитель $N!$, сокращающийся с $1/N!$ в (6.1.1). (Из этого правила существуют исключения, обсуждаемые ниже.) По этой причине далее мы *не будем* рассматривать более одного набора фейнмановских диаграмм, отличающихся только перестановкой меток в вершинах.

В ряде случаев возникают добавочные комбинаторные множители или знаки, которые следует учитывать в отдельных диаграммах.

^{*} Мы сохранили авторские обозначения. Надеемся, что читатель в дальнейшем не перепутает индекс i , нумерующий тип вершин взаимодействия, с мнимой единицей, входящей как множитель в каждую вершину взаимодействия. — *Прим. пер.*

5. Предположим, что взаимодействие $\mathcal{H}_i(x)$ содержит (помимо других полей и сопряженных полей) произведение M одинаковых полей. Пусть каждое из этих полей спаривается со своим сопряженным полем в другой вершине взаимодействия (причем другой для каждого спаривания), а также в начальном или конечном состоянии. Первое из сопряженных полей можно спарить с любым из M тождественных полей в $\mathcal{H}_i(x)$, второе — с любым из оставшихся $M-1$ тождественных полей, и так далее, что приводит к дополнительному множителю $M!$ Для компенсации этого множителя принято определять константу связи g_i так, чтобы в каждом $\mathcal{H}_i(x)$, содержащем M тождественных полей (или сопряженных полей), явно возникал множитель $1/M!$. Например, взаимодействие M -ого порядка по скалярному полю $\phi(x)$ следует записывать как $g\phi^M/M!$. (В более общем случае, часто выписывают явный множитель $1/M!$, когда взаимодействие содержит сумму M произведений полей из одного мультиплета внутренней группы симметрии, или когда по этой или любой другой причине константа связи полностью симметрична или антисимметрична относительно перестановки M бозонных или фермионных полей.)

Однако такое сокращение множителя $M!$ не всегда бывает полным. Например, рассмотрим фейнмановскую диаграмму, в которой M тождественных полей в одном взаимодействии $\mathcal{H}_i(x)$ спариваются с M соответствующими сопряженными полями в единственном другом взаимодействии $\mathcal{H}_j(y)$ (рис. 6.2). Следуя изложенному выше, мы находим только $M!$ разных спариваний (поскольку нет никакой разницы, какое из сопряженных полей мы назовем первым, вторым и т. д.). В результате, сокращается только один из двух множителей $1/M!$ в разных взаимодействиях. В этом случае лишний множитель $1/M!$ следует «руками» включать во вклад такой диаграммы.

Другие комбинаторные множители возникают в ситуации, когда перестановки вершин не влияют на диаграмму. Выше отмечалось, что множитель $1/N!$ в ряде (6.1.1) обычно сокращается из-за суммирования $N!$ диаграмм, отличающихся только переобозначением индексов у N вершин. Однако такое сокращение неполно, если при переобозначении вершин мы не получаем новой диаграммы. Чаще всего это происходит при вычислении матричных элементов S -матрицы между вакуумными состояниями в теории с квадратичным взаимодействием $\mathcal{H} = \psi_l^\dagger M_{ll'} \psi_{l'}$, где M может зависеть от

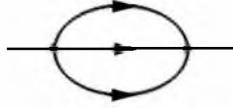


Рис. 6.2. Пример диаграммы, вклад которой в S -матрицу содержит дополнительный комбинаторный множитель. Если, например, в вершине взаимодействия имеются три множителя, содержащих какое-то поле (наряду с другими полями), то в гамильтониан взаимодействия обычно включают коэффициент $1/3!$, чтобы сократить множители, возникающие от сумм по способам спаривания этих полей с сопряженными им полями в других вершинах. Однако в приведенной диаграмме имеются два таких коэффициента $1/3!$ и лишь $3!$ различных спариваний, поэтому остается лишний множитель $1/3!$

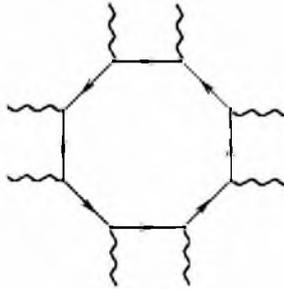


Рис. 6.3. Диаграмма восьмого порядка амплитуды перехода вакуум-вакуум, когда частицы взаимодействуют только с внешним полем. В этой диаграмме внешнее поле представлено волнистыми линиями. Существует $7!$ таких диаграмм, отличающихся только переобозначением вершин, причем те переобозначения, которые приводят к простому повороту кольца, не считаются различными. Поэтому множитель $1/8!$ в формуле Дайсона (6.1.1) сокращается не полностью, и остается множитель $1/8$

внешних полей. (Физическое значение таких диаграмм вакуумных флуктуаций детально обсуждается в т. II). Фейнмановская диаграмма N -ого порядка по \mathcal{H} есть замкнутое кольцо с N углами (рис. 6.3). В этом случае имеется только $(N-1)!$ разных диаграмм, поскольку перестановка индексов, передвигающая каждый из них к следую-

щей вершине по кольцу, приводит к той же диаграмме. Поэтому подобная диаграмма должна приводить к множителю

$$\frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}. \quad (6.1.17)$$

6. В теориях с фермионными полями использование формул (6.1.4)–(6.1.6) для перемещения операторов уничтожения и рождения направо и налево приводит к появлению дополнительных знаков «минус» во вкладах разных спариваний. Конкретно, мы получаем отрицательный знак каждый раз, когда перестановка операторов в (6.1.1), необходимая для того, чтобы собрать все спариваемые операторы рядом друг с другом (помещая при этом операторы уничтожения слева от спариваемых с ними операторов рождения), включает нечетное число перестановок фермионных операторов. (Это происходит потому, что при вычислении вклада конкретного спаривания, можно сначала переставить все операторы в (6.1.1) так, чтобы каждый оператор уничтожения оказался слева от спариваемого с ним оператора рождения, игнорируя при этом все коммутаторы или антикоммутаторы с неспариваемыми операторами, а затем заменить каждое произведение спаренных операторов на их коммутатор или антикоммутатор.) Из этого правила немедленно вытекает появление относительного отрицательного знака между двумя слагаемыми в выражении (6.1.14) для фермионного пропагатора. Какая бы перестановка не переводила содержащую операторы уничтожения часть $\Psi^+(x)$ поля в $\mathcal{H}(x)$ налево от содержащей операторы рождения части $\Psi^{+\dagger}(y)$ сопряженного поля в $\mathcal{H}(y)$, перестановка, переводящая содержащую операторы уничтожения часть $\Psi^{-\dagger}(x)$ сопряженного поля налево от содержащей операторы рождения части $\Psi^-(y)$ поля включает одну лишнюю переменную мест фермионных операторов, что и приводит к отрицательному знаку перед вторым слагаемым в (6.1.4) для фермионов.

Наконец, отрицательные знаки могут возникать во вкладе всех фейнмановских диаграмм. Например, рассмотрим теорию, в которой единственно возможное взаимодействие фермионов имеет вид:

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{lmk} g_{lmk} \Psi_l^\dagger(x) \Psi_m(x) \Phi_k(x), \quad (6.1.18)$$

где g_{lmk} — произвольные константы, $\Psi_l(x)$ — совокупность комплексных фермионных полей, а $\Phi_m(x)$ — совокупность действительных

бозонных (не обязательно скалярных) полей. (Не только квантовая электродинамика, но и вся «стандартная модель» слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий имеет фермионные взаимодействия, которые можно привести к указанному виду.) Рассмотрим сначала процесс фермион-фермионного рассеяния $12 \rightarrow 1'2'$ во втором порядке по \mathcal{H} . В слагаемом второго порядка в (6.1.1) фермионные операторы возникают в следующем порядке (сделаны очевидные упрощения формы записи):

$$a(2')a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2). \quad (6.1.19)$$

В данном порядке существуют две связанные диаграммы, отвечающие спариваниям

$$[a(2')\psi^\dagger(x)][a(1')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi(x)a^\dagger(2)], \quad (6.1.20)$$

$$[a(1')\psi^\dagger(x)][a(2')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi(x)a^\dagger(2)] \quad (6.1.21)$$

(рис. 6.4). Для перехода от (6.1.19) к (6.1.20) необходима *четная* перестановка фермионных операторов. (Например, можно переставить $\psi(x)$ направо с тремя операторами, а затем переставить $a(1')$ через один оператор направо.) Таким образом, во вкладе спаривания (6.1.20) не возникает никакого дополнительного знака «минус». Само по себе это не имеет значения; *общий* знак S -матрицы не влияет на вероятности переходов и в любом случае зависит от соглашений о знаках для начальных и конечных состояний. Суще-

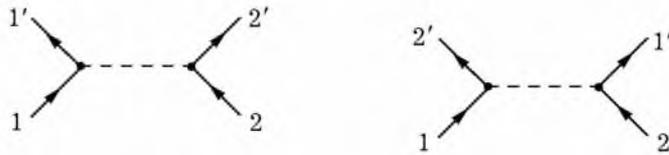


Рис. 6.4. Связные диаграммы второго порядка для фермион-фермионного рассеяния в теории с взаимодействием (6.1.18). Сплошные линии соответствуют фермионам, пунктирные — нейтральным бозонам. Вклады этих диаграмм отличаются знаком, который возникает от дополнительной перестановки фермионных операторов в спариваниях, соответствующих второй диаграмме

венно то, что вклады спариваний (6.1.20) и (6.1.21) имеют противоположный знак. Легче всего это видно, если заметить, что единственной разницей между двумя спариваниями является перестановка двух фермионных операторов $a(1')$ и $a(2')$. На самом деле, относительный знак «минус» требуется статистикой Ферми: при таком знаке амплитуда рассеяния становится антисимметричной относительно перестановки частиц $1'$ и $2'$ (или 1 и 2).

Однако не следует думать, что все знаки можно так просто связать с антисимметрией конечных или начальных состояний даже в низшем порядке теории возмущений. Чтобы стало ясно, о чем идет речь, рассмотрим фермион-антифермионное рассеяние $12^c \rightarrow 1'2'^c$ во втором порядке теории возмущений по тому же взаимодействию (6.1.18). Фермионные операторы следующим образом входят в слагаемое второго порядка в (6.1.1):

$$a(2'^c)a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2^c). \quad (6.1.22)$$

В этом порядке имеются две диаграммы Фейнмана (рис. 6.5), отвечающие спариваниям:

$$[a(2'^c)\psi(x)][a(1')\psi^\dagger(x)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi^\dagger(y)a^\dagger(2^c)], \quad (6.1.23)$$

$$[a(2'^c)\psi(x)][a(1')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi^\dagger(x)a^\dagger(2^c)]. \quad (6.1.24)$$

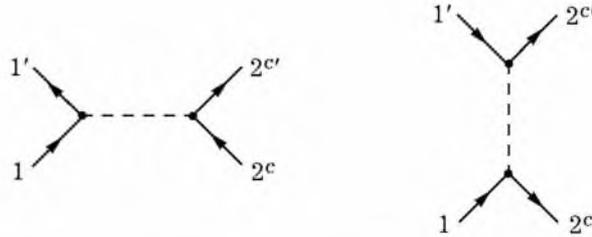


Рис. 6.5. Связные диаграммы второго порядка для фермион-антифермионного рассеяния в теории с взаимодействием (6.1.18). Сплошные линии соответствуют фермионам или антифермионам в зависимости от направления стрелок, пунктирные — нейтральным бозонам. Вклады этих диаграмм снова отличаются знаком, который возникает от дополнительной перестановки фермионных операторов в спариваниях, соответствующих второй диаграмме

При переходе от (6.1.22) к (6.1.23) требуется совершить четную перестановку фермионных операторов (например, переместить $\Psi(x)$ через два оператора налево, а $\Psi^\dagger(y)$ через два оператора направо), так что во вкладе от спаривания (6.1.23) не возникает никакого лишнего знака «минус». С другой стороны, переход от (6.1.22) к (6.1.24) требует нечетной перестановки фермионных операторов (такой же, как в (6.1.23), и дополнительной перемены местами $\Psi^\dagger(x)$ с $\Psi^\dagger(y)$). Поэтому вклад от этого спаривания входит с дополнительным отрицательным знаком*.

Дополнительные знаки возникают при рассмотрении вкладов более высоких порядков. В теориях рассматриваемого здесь типа, где все взаимодействия фермионов имеют вид (6.1.18), фермионные линии в произвольной фейнмановской диаграмме образуют либо цепочки линий, проходящих через всю диаграмму, с произвольным числом взаимодействий с бозонными полями (рис. 6.6), либо образуют фермионные *петли* типа показанной на рис. 6.7.

Рассмотрим результат добавления к фейнмановской диаграмме любого процесса фермионной петли с M вершинами. Это соответствует спариванию фермионных операторов:

$$[\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)][\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_3)]\dots[\Psi(x_M)\bar{\Psi}(x_1)]. \quad (6.1.25)$$

С другой стороны, эти операторы возникают в (6.1.1) в следующем порядке:

$$\bar{\Psi}(x_1)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)\Psi(x_2)\dots\bar{\Psi}(x_M)\Psi(x_M). \quad (6.1.26)$$

* На самом деле, появление этого знака имеет некоторую связь со статистикой Ферми. Одно и то же поле может уничтожить частицу или родить античастицу, так что существует соотношение, известное как «кросс-симметрия» между процессами, в которых начальные частицы или античастицы обмениваются местами с конечными античастицами или частицами. В частности, амплитуды процесса $12^c \rightarrow 1'2'^c$ связаны с амплитудами кросс-процесса $12' \rightarrow 1'2$; два спаривания (6.1.23) и (6.1.24) соответствуют двум диаграммам, отличающимся перестановкой 1 и 2' (или 1' и 2), так что антисимметрия амплитуды рассеяния относительно перестановки начальных (или конечных) частиц естественно требует наличия знака минус в относительном вкладе этих спариваний. Однако кросс-симметрия не является обычной симметрией (она включает аналитическое продолжение по кинематическим переменным), так что для произвольных процессов ее трудно использовать с какой-то определенной точностью.

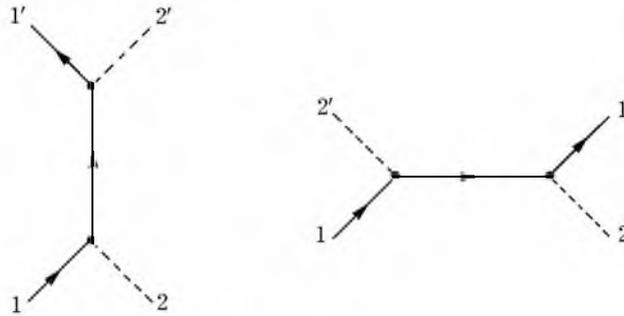


Рис. 6.6. Связные диаграммы второго порядка для бозон-фермионного рассеяния в теории с взаимодействием (6.1.18). Прямые линии — фермионы, пунктирные — нейтральные бозоны

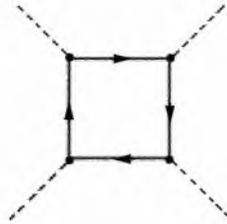


Рис. 6.7. Связная диаграмма низшего порядка для бозон-бозонного рассеяния в теории с взаимодействием (6.1.18). Подобные диаграммы с фермионными петлями приводят к дополнительному знаку «минус», возникающему от перестановок спариваемых фермионных полей

Чтобы перейти от (6.1.26) к (6.1.25), необходимо совершить нечетную перестановку фермионных операторов (передвинуть $\bar{\psi}(x_1)$ направо через $2M-1$ оператор). Поэтому вклад каждой такой фермионной петли сопровождается дополнительным отрицательным знаком.

Эти правила приводят к полной S -матрице, включающей вклады от процессов, в которых взаимодействуют далеко разнесенные в пространстве и времени различные кластеры частиц. Как обсуждалось в гл. 4, для вычисления той части S -матрицы, которая не содержит указанных вкладов, нужно рассматривать только *связные* фейнмановские диаграммы. В частности, это исключает проходящие насквозь через диаграмму без взаимодействия линии, которым соответствуют множители (6.1.13).

Чтобы полностью прояснить фейнмановские правила, вычислим вклады низшего порядка в S -матрицу для рассеяния частиц в двух разных теориях.

Теория I

Рассмотрим теорию фермионов и зарядово самосопряженных бозонов с гамильтонианом взаимодействия (6.1.18). Связные диаграммы низшего порядка для фермион-бозонного рассеяния показаны на рис. 6.6. Следуя перечисленным на рис. 6.1 правилам, получаем матричный элемент S -матрицы:

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1, \mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= (2\pi)^{-6} \sum_{k'l'm'klm} g_{l'm'k'} g_{mlk} u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) u_l(\mathbf{p}'_1\sigma_1n_1) \\
&\times \int d^4x \int d^4y (-i\Delta_{m'm}(y, x)) e^{-ip'_1 \cdot y} e^{ip_1 \cdot x} \\
&\times (e^{-ip'_2 \cdot y} u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) e^{ip_2 \cdot x} u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \\
&+ e^{-ip'_2 \cdot x} u_k^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) e^{ip_2 \cdot y} u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)).
\end{aligned} \tag{6.1.27}$$

(Индексы 1 и 2 используются здесь для обозначения фермионов и бозонов, соответственно.) Для фермион-фермионного рассеяния также есть две диаграммы второго порядка, показанные на рис. 6.4. Им соответствует матричный элемент S -матрицы

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1, \mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2, \mathbf{p}_1\sigma_1n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= (2\pi)^{-6} \sum_{k'l'm'klm} (-i)^2 g_{m'mk'} g_{l'l'k} \\
&\times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) u_m(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\
&\times \int d^4x \int d^4y e^{-ip'_2 \cdot x} e^{-ip'_1 \cdot y} e^{ip_2 \cdot x} e^{ip_1 \cdot y} (-i)\Delta_{k'k}(x, y) - [1' \Leftrightarrow 2'],
\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

причем последнее слагаемое означает вычитание предыдущего выражения с перестановкой частиц $1'$ и $2'$ (или 1 и 2). В такой теории не существует диаграмм второго порядка для бозон-бозонного рассеяния. Простейшими являются диаграммы четвертого порядка типа показанных на рис. 6.7.

Более конкретные примеры использования формул (6.1.27) и (6.1.28) будут приведены в разделе 6.3, после того, как мы вычислим пропагаторы и перейдем в импульсное пространство.

В предыдущем примере все три поля в гамильтониане взаимодействия (6.1.18) различны. Полезно рассмотреть пример также с трилинейным взаимодействием, но в котором все три поля одинаковы или, по крайней мере, входят симметричным образом.

Теория II

Пусть плотность гамильтониана взаимодействия есть сумма слагаемых, *трилинейных* по действительным бозонным полям $\Phi_i(x)$:

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{3!} \sum_{lmn} g_{lmn} \Phi_l(x) \Phi_m(x) \Phi_n(x), \quad (6.1.29)$$

где g_{lmn} – действительная полностью симметричная константа связи.

Пусть мы хотим рассмотреть процесс рассеяния $12 \rightarrow 1'2'$ во втором порядке по этому взаимодействию. К каждой из двух вершин должны быть подсоединены по две из четырех внешних линий. (Единственная другая возможность – в том, чтобы к одной вершине была подсоединена одна из внешних линий, а три другие были подсоединены ко второй вершине. Но в этом случае у вершины с тремя внешними линиями не останется больше линий, чтобы соединить ее с первой вершиной, т. е. получится несвязная диаграмма.) Третья линия при каждой вершине должна соединять вершины друг с другом. Имеются три диаграммы такого типа (рис. 6.8), отличающиеся тем, какая внешняя линия подсоединена к той же вершине, что и линия 1. Это могут быть линии 2, $1'$ или $2'$.

Следуя сформулированным правилам, запишем вклад в S -матрицу от этих трех диаграмм:

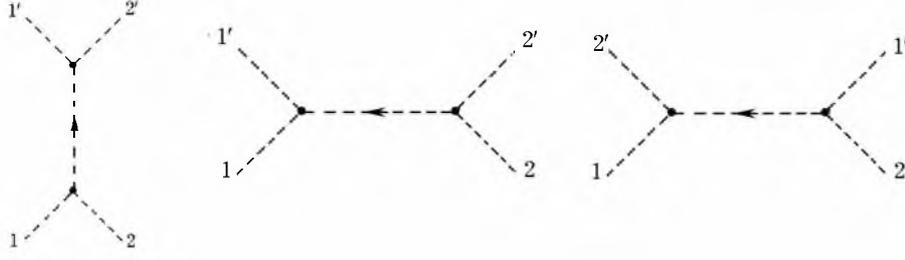


Рис. 6.8. Связные диаграммы второго порядка для бозон-бозонного рассеяния в теории с взаимодействием (6.1.29)

$$\begin{aligned}
& S_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1 \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} \\
&= (-i)^2 (2\pi)^{-6} \sum_{ll'mm'm''} g_{ll'm} g_{mm'm''} \int d^4x \int d^4y (-i\Delta_{l'm''}(x, y)) \\
&\times [u_l^*(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) e^{-ip'_1 \cdot x} u_{l'}^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) e^{-ip'_2 \cdot x} \\
&\quad \times u_m(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) e^{ip_1 \cdot y} u_{m'}(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) e^{ip_2 \cdot y} \\
&+ u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) e^{-ip'_1 \cdot x} u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) e^{ip_1 \cdot x} \\
&\quad \times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) e^{-ip'_2 \cdot y} u_m(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) e^{ip_2 \cdot y} \\
&+ u_{l'}^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) e^{-ip'_2 \cdot x} u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) e^{ip_1 \cdot x} \\
&\quad \times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) e^{-ip'_1 \cdot y} u_m(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) e^{ip_2 \cdot y}]. \quad (6.1.30)
\end{aligned}$$

Более того, если бозоны в этой теории – бесспиновые частицы одного типа, то взаимодействие (6.1.29) имеет вид

$$\mathcal{H} = g\phi^3 / 3! \quad (6.1.31)$$

и матричный элемент (6.1.30) рассеяния скаляра на скаляре равен:

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} &= \frac{ig^2}{(2\pi)^6 \sqrt{16E'_1 E'_2 E_1 E_2}} \int d^4x \int d^4y \Delta_F(x - y) \\
&[\exp(-i(p'_1 + p'_2) \cdot x) \exp(i(p_1 + p_2) \cdot y) \\
&+ \exp(i(p_1 - p'_1) \cdot x) \exp(i(p_2 - p'_2) \cdot y) \\
&+ \exp(i(p_1 - p'_2) \cdot x) \exp(i(p_2 - p'_1) \cdot y)],
\end{aligned}$$

где $\Delta_F(x-y)$ – пропагатор скалярного поля, вычисленный в следующем разделе. В этой теории не существует вкладов третьего или любого нечетного порядка по $\mathcal{H}(x)$.

6.2. Вычисление пропагатора

Перейдем к вычислению пропагатора (6.1.14). Пропагатор — существенная составляющая фейнмановских правил, возникающая в результате спаривания поля $\Psi_l(x)$ с сопряженным полем $\Psi_m^\dagger(y)$. Подставляя (6.1.15) и (6.1.16) в (6.1.14) и пользуясь соотношениями коммутации и антикоммутации для операторов уничтожения и рождения, находим:

$$\begin{aligned} -i\Delta_{lm}(x,y) &= \theta(x-y)(2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} u_l(\mathbf{p}\sigma n) u_m^*(\mathbf{p}\sigma n) e^{ip\cdot(x-y)} \\ &\quad \pm \theta(y-x)(2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} v_m^*(\mathbf{p}\sigma n) v_l(\mathbf{p}\sigma n) e^{ip\cdot(y-x)}. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Вычисляя в гл. 5 коммутаторы и антикоммутаторы, мы показали, что

$$\sum_{\sigma} u_l(\mathbf{p}\sigma n) u_m^*(\mathbf{p}\sigma n) = \left(2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}\right)^{-1} P_{lm}(\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}), \quad (6.2.2)$$

$$\sum_{\sigma} v_l(\mathbf{p}\sigma n) v_m^*(\mathbf{p}\sigma n) = \pm \left(2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}\right)^{-1} P_{lm}(-\mathbf{p}, -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}), \quad (6.2.3)$$

где $P_{lm}(\mathbf{p}, \omega)$ – полином по \mathbf{p} и ω . (Здесь, как и в (6.2.1), верхние и нижние знаки относятся, соответственно, к бозонным и фермионным полям.) Например, если $\Psi_l(x)$ и $\Psi_m^\dagger(y)$ – скалярные поля $\phi(x)$ и $\phi(y)$ частицы спина 0, то

$$P(p) = 1. \quad (6.2.4)$$

Если $\Psi_l(x)$ и $\Psi_m^\dagger(y)$ – дираковские поля частицы спина 1/2, то

$$P_{lm}(p) = \left[(-i\gamma_{\mu} p^{\mu} + m)\beta\right]_{lm}, \quad (6.2.5)$$

где l, m – принимающие четыре значения дираковские индексы. (Матрица β возникает здесь потому, что мы рассматриваем спаривание $\psi_l(x)$ и $\psi_m^\dagger(y)$. При спаривании $\psi_l(x)$ с $\psi(y) \equiv \psi_m^\dagger(y)\beta$ она не появляется.) Если $\psi_l(x)$ и $\psi_m(y)$ – векторные поля $V_\mu(x)$ и $V_\nu(y)$ частицы спина 1, то

$$P_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} + m^{-2}p_\mu p_\nu. \quad (6.2.6)$$

В более общем случае, если $\psi_l(x)$ и $\psi_m(y)$ – компоненты полей $\Psi_{ab}(x)$ и $\Psi_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)$ частицы спина j в неприводимых представлениях (A, B) и (\tilde{A}, \tilde{B}) однородной группы Лоренца, то

$$\begin{aligned} P_{ab, \tilde{a}\tilde{b}} &= \sum_{a'b'} \sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'} \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma, a'b') C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma, \tilde{a}'\tilde{b}') \\ &\times \left[\exp(-\theta \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)}) \right]_{aa'} \left[\exp(+\theta \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)}) \right]_{bb'} \\ &\times \left[\exp(-\theta \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(\tilde{A})}) \right]_{\tilde{a}\tilde{a}'} \left[\exp(+\theta \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(\tilde{B})}) \right]_{\tilde{b}\tilde{b}'}, \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

где $\text{sh } \theta = |\mathbf{p}|/m$, а индексы $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$ так же, как и индексы $a', b', \tilde{a}', \tilde{b}'$, по которым идет суммирование, пробегают через единицу значения от $-A$ до $+A$, от $-B$ до $+B$, от $-\tilde{A}$ до $+\tilde{A}$ и от $-\tilde{B}$ до $+\tilde{B}$, соответственно.

Подстановка формул (6.2.2) и (6.2.3) в (6.2.1) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} -i\Delta_{lm}(x, y) &= \theta(x-y) P_{lm} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_+(x-y) \\ &+ \theta(y-x) P_{lm} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_+(y-x), \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

где $\Delta_+(x)$ – введенная в гл. 5 функция

$$\Delta_+(x) \equiv (2\pi)^{-3} \int d^3p (2p^0)^{-1} e^{ip \cdot x}, \quad (6.2.9)$$

в которой $p^0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Чтобы продвинуться далее, необходимо сказать несколько слов о том, как расширить определение полинома $P(p)$. Формулы

(6.2.2) и (6.2.3) определяют $P(p)$ только для 4-импульсов «на массовой оболочке», т. е. при значениях $p^0 \equiv \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Любая полиномиальная функция таких 4-импульсов всегда может рассматриваться как линейная по p^0 , так как любая степень $(p^0)^{2\nu}$ или $(p^0)^{2\nu+1}$ может быть записана как $(\mathbf{p}^2 + m^2)^\nu$ или $p^0(\mathbf{p}^2 + m^2)^\nu$, соответственно. Поэтому можно определить полином $P^{(L)}(q)$ условиями, что

$$\begin{aligned} P^{(L)}(p) &= P(p) && (\text{для } p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}), \\ P^{(L)}(q) &= P^{(0)}(\mathbf{q}) + q^0 P^{(1)}(\mathbf{q}) && (\text{для произвольных } q^\mu), \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

где $P^{(0,1)}$ – полиномы, зависящие только от \mathbf{q} . Теперь можно воспользоваться соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \theta(x^0 - y^0) = -\frac{\partial}{\partial x^0} \theta(y^0 - x^0) = \delta(x^0 - y^0) \quad (6.2.11)$$

(напомним, что $\theta(x)$ имеет единичный скачок при $x^0 = 0$ и постоянна в остальных точках), и переставить операторы производных в (6.2.8) и θ -функции:

$$\begin{aligned} \Delta_{lm}(x, y) &= P_{lm}^{(L)} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_F(x - y) \\ &+ \delta(x^0 - y^0) P_{lm}^{(1)}(-i\nabla) [\Delta_+(x - y) - \Delta_+(y - x)], \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

где Δ_F — фейнмановский пропагатор, равный

$$-i\Delta_F(x) \equiv \theta(x)\Delta_+(x) + \theta(-x)\Delta_+(-x). \quad (6.2.13)$$

Однако при $x^0 = 0$ функция $\Delta_+(x)$ четна по \mathbf{x} , так как замена $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ в (6.2.9) может быть скомпенсирована заменой $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ переменной интегрирования. Поэтому можно опустить второе слагаемое в (6.2.12) и записать просто

$$\Delta_{lm}(x, y) = P_{lm}^{(L)} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_F(x - y). \quad (6.2.14)$$

Полезнее всего использовать выражение для фейнмановского пропагатора в виде интеграла Фурье. Ступенчатые функции

в (6.2.13) имеют следующее фурье–представление*:

$$\theta(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ist)}{s + i\varepsilon} ds. \quad (6.2.15)$$

Это выражение можно объединить с интегралом Фурье (6.2.9) для $\Delta_+(x)$. Введем в этом интеграле в (6.2.13) новые переменные интегрирования $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$, $q^0 = p^0 + s$, тогда

$$\begin{aligned} -i\Delta_F(x) = & -\frac{1}{2\pi i} \int d^3q \int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - iq^0 x^0)}{(2\pi)^3 \sqrt{2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}} \\ & \times \left[(q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} - i\varepsilon)^{-1} + (-q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} - i\varepsilon)^{-1} \right] \end{aligned}$$

Комбинируя знаменатели и переходя к четырехмерным обозначениям, находим:

$$\Delta_F(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{\exp(iq \cdot x)}{q^2 + m^2 - i\varepsilon}, \quad (6.2.16)$$

где $q^2 \equiv \mathbf{q}^2 - (q^0)^2$. (В знаменателе мы заменили $2\varepsilon\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ на ε , так как все, что требуется от этой величины – это быть положительной и бесконечно малой.) Теперь, между прочим, видно, что Δ_F является функцией Грина дифференциального оператора Клейна–Гордона, в том смысле, что

$$(\square - m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x), \quad (6.2.17)$$

и граничные условия определяются добавкой $-i\varepsilon$ в знаменателе. Как следует из (6.2.13), функция $\Delta_F(x)$ при $x^0 \rightarrow +\infty$ или $x^0 \rightarrow -\infty$

* Чтобы доказать это, заметим, что при $t > 0$ контур интегрирования можно замкнуть большим полукругом в нижней полуплоскости, двигаясь по часовой стрелке, так что вклад в интеграл от полюса в точке $s = -i\varepsilon$ равен $-2\pi i$. Если же $t < 0$, контур можно замкнуть большим полукругом в верхней полуплоскости, двигаясь против часовой стрелки, но в верхней полуплоскости подынтегральная функция не имеет особенностей, и поэтому интеграл равен нулю.

содержит только положительно- или только отрицательно-частотные слагаемые $\exp(-ix^0\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$ или $\exp(+ix^0\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$, соответственно.

Подстановка (6.2.16) в (6.2.14) приводит к выражению для пропагатора:

$$\Delta_{lm}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{P_{lm}^{(L)}(q) e^{iq \cdot (x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (6.2.18)$$

В связи с этим выражением возникает одна очевидная проблема. Полином $P(p)$ лоренц-ковариантен, когда p находится на массовой оболочке, $p^2 = -m^2$, но интегрирование в (6.2.18) производится по всем q^μ , не ограниченным массовой оболочкой. Полином $P^{(L)}(q)$ определен для произвольных q^μ таким образом, что он линеен по q^0 . Очевидно, это условие не лоренц-ковариантно, если только полином не линеен и по каждой пространственной компоненте q^i . Однако всегда можно определить расширение полинома $P(p)$ на произвольные 4-импульсы q^μ , которое мы обозначим просто $P(q)$, таким образом, чтобы при любых q^μ полином $P(q)$ был *явно* лоренц-ковариантен:

$$P_{lm}(\Lambda q) = D_{ll'}(\Lambda) D_{mm'}^*(\Lambda) P_{l'm'}(q),$$

где Λ^μ_ν – общее преобразование Лоренца, а $D(\Lambda)$ – соответствующее представление группы Лоренца. Например, для скалярного, дираковского и 4-векторного полей эти ковариантные расширения получаются очевидной заменой p^μ на произвольный 4-вектор q^μ в (6.2.4), (6.2.5) и (6.2.6). Для скалярного и дираковского полей полиномы уже линейны по q^0 , и в этих случаях нет разницы между $P^{(L)}(q)$ и $P(q)$:

$$P_{lm}^{(L)}(q) = P_{lm}(q) \quad (\text{скалярное и дираковское поля}). \quad (6.2.19)$$

В то же время для векторного поля частицы спина 1 00-компонента ковариантного полинома $P_{\mu\nu}(q) \equiv \eta_{\mu\nu} + m^{-2}q_\mu q_\nu$ квадратична по q^0 , так что в этом случае *есть* разница:

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}^{(L)}(q) &= \eta_{\mu\nu} + m^{-2}[q_\mu q_\nu - \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2)] \\ &= P_{\mu\nu}(q) + m^{-2}(q^2 + m^2) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

(Здесь дополнительное слагаемое определяется двумя условиями: оно должно компенсировать слагаемое $(q_0)^2$ в $P_{00}(q)$ и должно обращаться в нуль, если q^μ находится на массовой оболочке.) Подстановка последнего выражения в (6.2.18) приводит к следующему виду пропагатора векторного поля:

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{P_{\mu\nu}(q)e^{iq \cdot (x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} + m^{-2}\delta^4(x-y)\delta_\mu^0\delta_\nu^0. \quad (6.2.21)$$

Первое слагаемое явно ковариантно, а второе, хотя и нековариантно, но локально, так что его можно компенсировать добавлением локального нековариантного слагаемого в плотность гамильтониана. Конкретно, если взаимодействие $V_\mu(x)$ с другими полями описывается слагаемым $V_\mu(x)J^\mu(x)$ в $\mathcal{H}(x)$, то наличие второго слагаемого в (6.2.21) сведется к появлению эффективного взаимодействия

$$-i\mathcal{H}_{\text{эфф}}(x) = \frac{1}{2}[-iJ^\mu(x)][-iJ^\nu(x)][-im^{-2}\delta_\mu^0\delta_\nu^0].$$

(Множители $-i$ всегда сопровождают вклады вершин и пропагаторов. Множитель $\frac{1}{2}$ необходим потому, что возможны два способа спаривания других полей с $\mathcal{H}_{\text{эфф}}(x)$, отличающиеся перестановкой J^μ и J^ν .) Итак, вклад нековариантного второго слагаемого в (6.2.21) можно компенсировать, добавив к $\mathcal{H}(x)$ нековариантное слагаемое

$$\mathcal{H}_{\text{неков}}(x) = -\mathcal{H}_{\text{эфф}}(x) = \frac{1}{2m^2}[J^0(x)]^2. \quad (6.2.22)$$

Именно сингулярность одновременных коммутаторов векторных полей на малых расстояниях заставляет использовать более широкий класс взаимодействий, чем те, которые описываются скалярной плотностью. Детальное непертурбативное доказательство лоренц-инвариантности S -матрицы в этой теории будет дано в следующей главе.

Не нужно думать, что описанное явление связано только со спинами $j \geq 1$. Рассмотрим, например, векторное поле, связанное с частицей спина $j = 0$ и равное (как обсуждалось в гл. 5) производ-

ной $\partial_\lambda \Phi(x)$ скалярного поля. Для спаривания этого поля со скаляром $\Phi^\dagger(y)$ полином $P(p)$ на массовой оболочке равен

$$P_\lambda(p) = ip_\lambda, \quad (6.2.23)$$

в то время, как спаривание $\partial_\lambda \Phi(x)$ с $\partial_\eta \Phi^\dagger(x)$ приводит к полиному

$$P_{\lambda,\eta}(p) = p_\lambda p_\eta. \quad (6.2.24)$$

Для произвольных 4-импульсов q^μ вне массовой поверхности ковариантные полиномы получаются подстановкой q^μ вместо p^μ в формулы (6.2.23) и (6.2.24). Полином $P_l(q)$ уже линеен по q_0 , так что в этом случае не возникает никакой разницы между $P_l(q)$ и $P_l^{(L)}(q)$. Однако в случае (6.2.24) разница есть:

$$P_{\lambda,\eta}^{(L)} = q_\lambda q_\eta - (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2) \delta_\lambda^0 \delta_\eta^0 = P_{\lambda,\eta}(q) + (q^2 + m^2) \delta_\lambda^0 \delta_\eta^0, \quad (6.2.25)$$

поэтому пропагатор равен

$$\Delta_{\lambda,\eta}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{q_\lambda q_\eta e^{iq \cdot (x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} + \delta_\lambda^0 \delta_\eta^0 \delta^4(x-y). \quad (6.2.26)$$

Как и выше, нековариантные вклады от второго слагаемого можно сократить, добавив к взаимодействию нековариантное слагаемое

$$\mathcal{H}_{\text{неков}}(x) = \frac{1}{2} [J^0(x)]^2. \quad (6.2.27)$$

где $J^\mu(x)$ — в данном случае ток, на который умножается $\partial_\mu \Phi(x)$ в ковариантной части $\mathcal{H}(x)$.

Должно быть ясно, что (по крайней мере для массивных частиц) вклады нековариантных частей пропагатора всегда могут быть сокращены описанным способом путем добавления нековариантных локальных слагаемых в плотность гамильтониана. Это происходит потому, что числитель $P_{lm}^{(L)}(q)$ в пропагаторе должен равняться ковариантному полиному $P_{lm}(q)$, когда q^μ находится на массовой оболочке, поэтому разность между $P_{lm}^{(L)}(q)$ и $P_{lm}(q)$ должна содержать множитель $q^2 + m^2$. Этот множитель сокращает знаменатель $(q^2 + m^2 - i\epsilon)$ во вкладе этой разности в (6.2.18),

поэтому выражение (6.2.18) всегда равно сумме ковариантного слагаемого и слагаемого, пропорционального дельта-функции $\delta^4(x - y)$ или ее производным. Вклад последнего слагаемого можно компенсировать добавлением во взаимодействие слагаемого, квадратичного по токам, с которыми связаны спариваемые поля, или по их производным.

Далее мы будем молчаливо предполагать, что подобное слагаемое уже было включено во взаимодействие, и использовать *ковариантный* полином $P_{lm}(q)$ в пропагаторе (6.2.18), опуская индекс L .

Может показаться, что такая процедура достаточно произвольна. К счастью, в обсуждаемом в следующей главе каноническом формализме те нековариантные слагаемые в плотности гамильтониана, которые нужны для сокращения нековариантных добавок в пропагаторах, возникают автоматически. На самом деле, это является одной из причин введения канонического формализма

* * *

Прежде чем завершить этот раздел, полезно отметить некоторые другие определения пропагатора, эквивалентные (6.2.1), которые часто встречаются в литературе. Во-первых, взяв среднее по вакууму от (6.1.14), имеем:

$$\begin{aligned} -i\Delta_{lm}(x, y) &= \theta(x - y) \langle [\psi_l^+(x), \psi_m^{++}(y)]_{\mp} \rangle_0 \\ &\quad \pm \theta(y - x) \langle [\psi_m^{-+}(y), \psi_l^-(x)]_{\mp} \rangle_0. \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

(Здесь $\langle AB \dots \rangle_0$ означает среднее по вакууму ($\Phi_0, AB \dots \Phi_0$.) Как $\psi_l^+(x)$, так и $\psi_m^{-+}(y)$ при действии на вакуум дают нуль, поэтому реально в пропагатор дает вклад только одно слагаемое в каждом коммутаторе или антикоммутаторе:

$$-i\Delta_{lm}(x, y) = \theta(x - y) \langle \psi_l^+(x), \psi_m^{++}(y) \rangle_0 \pm \theta(y - x) \langle \psi_m^{-+}(y), \psi_l^-(x) \rangle_0. \quad (6.2.29)$$

Далее, ψ^- и ψ^+ будут давать нуль, действуя на вакуум справа, а ψ^- и ψ^{++} будут делать то же самое слева, поэтому везде в (6.2.29) можно заменить ψ^+ и ψ^- на полное поле $\psi = \psi^+ + \psi^-$:

$$-i\Delta_{lm}(x, y) = \theta(x - y) \langle \psi_l(x), \psi_m^\dagger(y) \rangle_0 \pm \theta(y - x) \langle \psi_m^\dagger(y), \psi_l(x) \rangle_0. \quad (6.2.30)$$

Часто эту формулу записывают в виде:

$$-i\Delta_{lm}(x, y) = \langle T\{\psi_l(x)\psi_m^\dagger(y)\} \rangle_0, \quad (6.2.31)$$

где T — хронологическое произведение, определение которого распространено* теперь на все поля с учетом знака «минус» для любой нечетной перестановки фермионных операторов.

6.3. Правила в импульсном представлении

Изложенные в разделе 6.1. фейнмановские правила указывают, как вычислить вклад в S -матрицу данной диаграммы N -го порядка, который представляется в виде интеграла по N пространственно-временным координатам от произведения зависящих от этих координат множителей. Линии конечной частицы (или античастицы) с импульсом p^μ , выходящей из вершины с пространственно-временной координатой x^μ , отвечает множитель, пропорциональный $\exp(-ip \cdot x)$. Линии начальной частицы с импульсом p^μ , входящей в вершину с координатой x^μ , отвечает множитель $\exp(+ip \cdot x)$. В разделе 6.2 мы показали, что множитель, отвечающий внутренней линии, идущей от точки x к точке y , можно записать как интеграл Фурье по 4-импульсам q^μ вне массовой поверхности, причем под интегралом стоит множитель $\exp(iq \cdot (x - y))$. Величину q^μ можно понимать как 4-импульс, текущий вдоль внутренней линии в направлении стрелки от y к x . Таким образом, интеграл по пространственно-временной координате в каждой вершине приводит к множителю

$$(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p + \Sigma q - \Sigma p' - \Sigma q'), \quad (6.3.1)$$

где $\Sigma p'$ и Σp означают полный 4-импульс всех конечных или начальных частиц, выходящих или входящих в вершину, а $\Sigma q'$ и Σq обозначает полный 4-импульс всех внутренних линий со стрелками,

* Это не противоречит предыдущему определению хронологически упорядоченных произведений плотностей гамильтониана в гл. 3, так как эти плотности могут содержать только четное число фермионных полей.

направленными от вершины и к вершине, соответственно. Конечно, вместо интегралов по x^μ теперь необходимо брать интегралы по фурье-переменным q^μ для каждой из внутренних линий.

Эти соображения приводят к новому набору фейнмановских правил для вычисления вклада в S -матрицу в виде интегралов по импульсным переменным (рис. 6.9).

1. Следует нарисовать все фейнмановские диаграммы желаемого порядка, как описано в разделе 6.1. Однако вместо того, чтобы пометить каждую вершину пространственно-временной координатой, нужно пометить каждую внутреннюю линию 4-импульсом вне массовой поверхности, текущим, по соглашению, в направлении стрелки (или в любом направлении для линий нейтральных частиц без стрелок).

2. Каждой вершине типа i следует сопоставить множитель

$$-i(2\pi)^4 g_i \delta^4(\Sigma p + \Sigma q - \Sigma p' - \Sigma q'), \quad (6.3.2)$$

где суммы по импульсам имеют тот же смысл, что и в (6.3.1). Дельта-функция обеспечивает сохранение 4-импульса в любой точке диаграммы. Каждой внешней линии, выходящей вверх из диаграммы, сопоставляется множитель $(2\pi)^{-3/2} u_l^*(\mathbf{p}' \sigma' n')$ или множитель $(2\pi)^{-3/2} v_l(\mathbf{p}' \sigma' n')$ в зависимости от направления стрелки вверх или вниз. Каждой внешней линии, входящей снизу в диаграмму, сопоставляется либо множитель $(2\pi)^{-3/2} u_l(\mathbf{p} \sigma n)$, либо множитель $(2\pi)^{-3/2} v_l^*(\mathbf{p} \sigma n)$, также в зависимости от направления стрелки вверх или вниз. Каждой внутренней линии, концы которой помечены индексами l и m , причем стрелка направлена от m к l , и которая несет 4-импульс q^m , сопоставляется множитель, равный подынтегральному выражению в интеграле фурье-представления (6.2.18) для $i\Delta_{lm}(x, y)$:

$$-i(2\pi)^{-4} P_{lm}(q) / (q^2 + m_l^2 - i\epsilon). \quad (6.3.3)$$

Напомним, что для скаляров или антискаляров с 4-импульсом q величины u и v равны просто $(2q^0)^{-1/2}$, а полином $P(q)$ равен единице. Для дираковских спиноров с 4-импульсом p и массой M величины u и v равны нормированным дираковским спинорам, описанным в разделе 5.5, а полином $P(p)$ равен матрице $(-i\gamma_\mu p^\mu + M)\beta$.

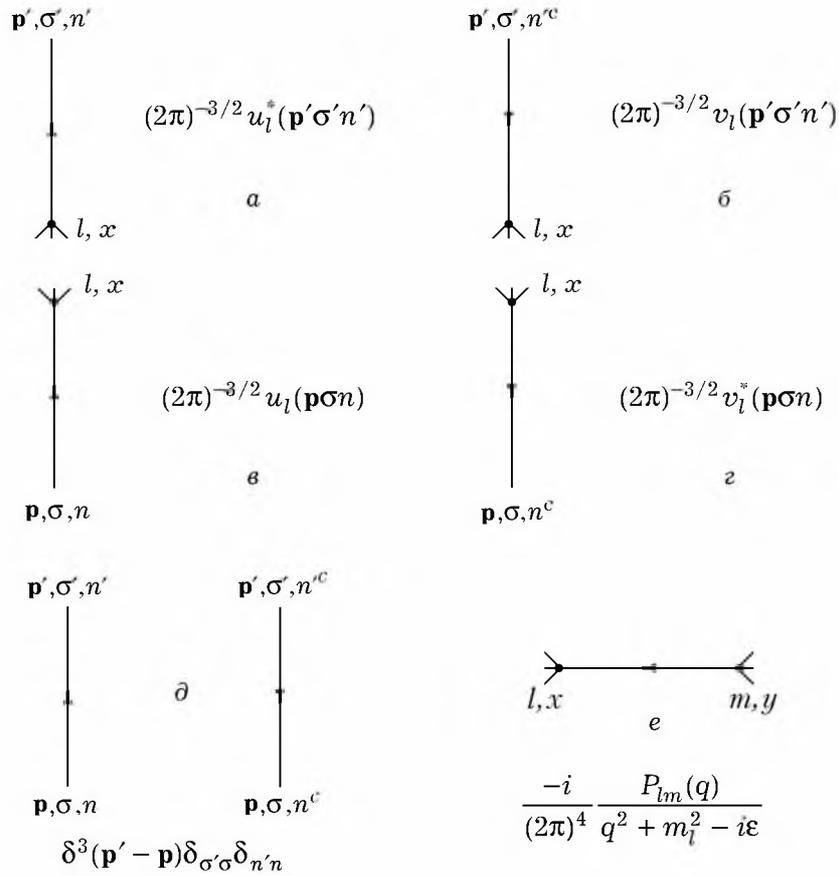


Рис. 6.9. Графическое изображение спариваний операторов при вычислении S-матрицы в импульсном представлении. Выражения справа — те множители, которые отвечают каждой линии фейнмановской диаграммы в импульсном представлении

3. Произведение всех указанных множителей интегрируется по 4-импульсам всех внутренних линий и суммируется по всем полевым индексам l, m и т. д.

4. Результаты, полученные таким образом для каждой фейнмановской диаграммы, следует сложить.

Могут понадобиться дополнительные комбинаторные множители и связанные с фермионами знаки; соответствующие правила перечислены в пунктах 5 и 6 раздела 6.1. Примеры использования этих правил мы приведем в конце раздела.

Каждой внутренней линии соответствует 4-импульс, по которому проводится интегрирование. Однако многие из этих интегрирований снимаются дельта-функциями, отвечающими вершинам. Так как энергия и импульс сохраняются для каждой связанной части фейнмановской диаграммы по-отдельности, то в диаграмме с C связными частями останется C дельта-функций. Отсюда в диаграмме с I внутренними линиями и V вершинами число независимых 4-импульсов, не зафиксированных дельта-функциями, равно $I - (V - C)$. Очевидно, этому же равно число L независимых петель,

$$L = I - V + C, \quad (6.3.4)$$

которое определяется как максимальное число внутренних линий, которые можно разрезать, оставляя связанной каждую связанную часть полной фейнмановской диаграммы, поскольку любым таким и только таким внутренним линиям можно приписать независимый 4-импульс. Можно считать, что независимые импульсные переменные характеризуют импульсы, циркулирующие в каждой петле. В частности, *древесная* диаграмма не содержит петель. В такой диаграмме после учета всех дельта-функций не остается интегралов по импульсам.

Например, в теории с взаимодействием (6.1.18) матричный элемент (6.1.27) фермион-бозонного рассеяния согласно правилам Фейнмана в импульсном представлении будет иметь вид

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1, \mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2, \mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2} &= \\ &= \sum_{k'l'm'klm} (-i)^2 (2\pi)^8 g_{l'm'k'} g_{lmk} u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) u_l(\mathbf{p}_1 \sigma_1 n_1) \\ &\times \int d^4 q \left(-i(2\pi)^{-4} \frac{P_{m'm}(q)}{q^2 + m_m^2 - i\epsilon} \right) \\ &\times (2\pi)^{-6} [u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) u_k(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) \delta^4(q - p_{l'} - p_2) \delta^4(p_1 + p_2 - q) \\ &\quad + u_k^*(\mathbf{p}'_2 \sigma'_2 n'_2) u_{k'}(\mathbf{p}_2 \sigma_2 n_2) \delta^4(p_2 - p_{l'} + q) \delta^4(p_1 - p_2 - q)], \end{aligned}$$

где индексы 1 и 2 относятся к фермионам и бозонам, соответственно.

Интеграл по импульсам в данном случае тривиален, так что

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_{1'}-p_{2'}) \\
&\times \sum_{k'l'm'klm} g_{l'm'k'}g_{mlk}u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\
&\times \left[\frac{P_{m'm}(p_1+p_2)}{(p_1+p_2)^2+m_m^2-i\epsilon} u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2)u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{P_{m'm}(p_1-p_{2'})}{(p_1-p_{2'})^2+m_m^2-i\epsilon} u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2)u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right]. \tag{6.3.5}
\end{aligned}$$

Аналогично, матричный элемент (6.1.28) фермион–фермионного рассеяния в той же теории равен

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_{1'}-p_{2'}) \\
&\times \sum_{k'l'm'klm} g_{m'nk'}g_{l'lk} \frac{P_{k'k}(p_1-p_{1'})}{(p_1-p_{1'})^2+m_k^2-i\epsilon} \\
&\times u_{m'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2)u_{l'}^*(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)u_m(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) - [1' \leftrightarrow 2']. \tag{6.3.6}
\end{aligned}$$

Из вида этих результатов вытекает необходимость более компактных обозначений. Можно определить фермион–бозонную матрицу констант связи

$$[\Gamma_k]_{lm} \equiv g_{lmk}. \tag{6.3.7}$$

Матричные элементы (6.3.5) и (6.3.6) для фермион–бозонного и фермион–фермионного рассеяния соответственно переписываются в матричных обозначениях следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_{1'}-p_{2'}) \\
&\times \sum_{k'k} \left[\left(u^\dagger(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\Gamma_{k'} \frac{P(p_1+p_2)}{(p_1+p_2)^2+M^2-i\epsilon} \Gamma_k u(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \right) \right. \\
&\quad \times u_{k'}^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2)u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \\
&\quad \left. + \left(u^\dagger(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\Gamma_{k'} \frac{P(p_1-p_{2'})}{(p_1-p_{2'})^2+M^2-i\epsilon} \Gamma_k u(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \right) \right. \\
&\quad \left. \times u_k^*(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2)u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right], \tag{6.3.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_{1'}-p_{2'}) \\
&\times \sum_{k'k} \frac{P_{k'k}(p_1-p_{1'})}{(p_1-p_{1'})^2+m_k^2-i\epsilon} \\
&\times \left(u^\dagger(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2)\Gamma_{k'}u(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \right) \left(u^\dagger(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\Gamma_k u(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \right) - [1' \Leftrightarrow 2'],
\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

где M^2 и m^2 — диагональные массовые матрицы фермионов и бозонов в формулах (6.3.8) и (6.3.9). Общее правило состоит в том, что при использовании матричных обозначений следует выписывать коэффициентные функции, матрицы констант связи и пропагаторы в порядке, который определяется движением вдоль линий *против* направления, указанного стрелками. В тех же обозначениях S -матрица для бозон-бозонного рассеяния в этой теории будет даваться суммой однопетлевых диаграмм, показанных на рис. 6.7:

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= -(2\pi)^{-6}\delta^4(p_1+p_2-p_{1'}-p_{2'}) \\
&\times \sum_{k_1k_2k'_1k'_2} u_{k'_1}^*(\mathbf{p}'_1,\sigma'_1,n'_1)u_{k'_2}^*(\mathbf{p}'_2,\sigma'_2,n'_2)u_{k_1}(\mathbf{p}_1,\sigma_1,n_1)u_{k_2}(\mathbf{p}_2,\sigma_2,n_2) \\
&\times \int d^4q \operatorname{Tr} \left\{ \Gamma_{k'_2} \frac{P(q)}{q^2+M^2-i\epsilon} \Gamma_{k'_1} \frac{P(q+p_{1'})}{(q+p_{1'})^2+M^2-i\epsilon} \right. \\
&\times \left. \Gamma_{k_1} \frac{P(q+p_{1'}-p_1)}{(q+p_{1'}-p_1)^2+M^2-i\epsilon} \Gamma_{k_2} \frac{P(q-p_{2'})}{(q-p_{2'})^2+M^2-i\epsilon} \right\} + \dots,
\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

где многоточие в конце означает слагаемые, получающиеся перестановкой бозонов $1'$, $2'$ и 2 . Знак минус перед всем выражением справа связан с числом фермионных петель.

Отметим, что после снятия интегрирований с помощью дельта-функций остается только один интеграл по импульсам, как и должно быть для диаграммы с одной петлей. В гл. 11 мы увидим, как вычисляются подобные интегралы по импульсам.

Приведем еще один конкретный пример. Рассмотрим теорию, в которой дираковское спинорное поле $\psi(x)$ массой M взаимодействует с псевдоскалярным полем $\phi(x)$ массой m , причем гамильтониан

взаимодействия имеет вид $-ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$. (Множитель $-i$ включен для того, чтобы гамильтониан взаимодействия был эрмитовым при действительных константах связи g .)

Напомним, что для скаляра полином $P(q)$ равен единице, а для спинора он равен $[-i\gamma_\mu q^\mu + M]\beta$. Кроме того, множитель u для скаляра с энергией E равен $(2E)^{-1/2}$, а для спинора u есть обычным образом нормированный дираковский спинор, рассмотренный в разделе 5.5.

Из формул (6.3.8)–(6.3.10) в низшем порядке получаем:

$$S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1\mathbf{p}_2} = -i(2\pi)^{-2}g^2(4E'_2E_2)^{-1/2}\delta^4(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \\ \times \left[\left(\bar{u}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1)\gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^\mu + M}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1) \right) \right. \\ \left. + \left(\bar{u}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1)\gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)^\mu + M}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1) \right) \right],$$

(фермион-бозонное рассеяние);

$$S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1\mathbf{p}'_2\sigma'_2,\mathbf{p}_1\sigma_1\mathbf{p}_2\sigma_2} = i(2\pi)^{-2}g^2\delta^4(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \\ \times (\bar{u}(\mathbf{p}'_2\sigma'_2)\gamma_5 u(\mathbf{p}_2\sigma_2))(\bar{u}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1)\gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1)) \frac{1}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + m^2 - i\epsilon} \\ - [1' \leftrightarrow 2'],$$

(фермион-фермионное рассеяние);

$$S_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} = -(2\pi)^{-6}g^2(16E_1E_2E'_1E'_2)^{-1/2}\delta^4(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \\ \times \int d^4q \text{Tr} \left\{ \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu q^\mu + M}{q^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(q + \mathbf{p}'_1)^\mu + M}{(q + \mathbf{p}'_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \right. \\ \left. \times \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(q + \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1)^\mu + M}{(q + \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1)^2 + M^2 - i\epsilon} \gamma_5 \frac{-i\gamma_\mu(q - \mathbf{p}'_2)^\mu + M}{(q - \mathbf{p}'_2)^2 + M^2 - i\epsilon} \right\} + \dots,$$

(бозон-бозонное рассеяние), где в последней формуле многоточие означает сумму по перестановкам частиц 2, 1' и 2'. Множители β в числителях фермионных пропагаторов были использованы для того, чтобы заменить u^\dagger на u .

* * *

Еще один полезный топологический результат выражает нечто вроде закона сохранения линий. Представим, что все внутренние и внешние линии рождаются в вершинах и затем уничтожаются парами в центрах каждой внутренней линии и поодиночке на концах каждой внешней линии. (Это не имеет отношения к направлению стрелок на линиях.) Приравнивая число рождающихся и уничтожающихся линий, получаем

$$2I + E = \sum_i n_i V_i, \quad (6.3.11)$$

где I и E — числа внутренних и внешних линий, V_i — число вершин разных типов i , а n_i — число линий, подсоединенных к каждой вершине. (Это выполняется и по-отдельности для полей каждого типа.) В частности, если все взаимодействия содержат одинаковое число $n_i = n$ полей, то

$$2I + E = nV, \quad (6.3.12)$$

где V — полное число вершин. В этом случае можно исключить I из (6.3.4) и (6.3.11) и получить, что для связной ($C = 1$) диаграммы число вершин дается формулой

$$V = \frac{2L + E - 2}{n - 2}. \quad (6.3.13)$$

Например, для трилинейного взаимодействия диаграммы процесса рассеяния ($E = 4$) с $L = 0, 1, 2, \dots$ имеют $V = 2, 4, 6, \dots$ вершин. В общем случае разложение по степеням констант связи есть разложение по увеличивающемуся числу петель.

6.4. Выход с массовой оболочки

В фейнмановских диаграммах, отвечающих любому матричному элементу S -матрицы, все внешние линии находятся «на массовой оболочке». Иначе говоря, связанный с внешней линией 4-импульс частицы массой m удовлетворяет условию $p_\mu p^\mu = -m^2$. Однако часто необходимо рассматривать фейнмановские диаграммы «вне массовой оболочки». Для них энергии, отвечающие внешним линиям, как и энергии, сопоставляемые внутренним линиям, являются свободными параметрами, не связанными жестко с каким-то трехмерным импульсом. Например, подобные ситуации возникают, когда диаграммы являются частями большей фейнмановской диаграммы. Так, петля на некоторой внутренней линии диаграммы может рассматриваться как диаграмма с двумя внешними линиями, находящимися вне массовой оболочки.

Конечно, если мы вычислили вклад данной фейнмановской диаграммы вне массовой оболочки, нетрудно вычислить и соответствующие элементы S -матрицы, совершив переход на массовую оболочку, т. е. положив компоненты текущего по линии 4-импульса p^μ , который *входит* в диаграмму, равными $p^0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ для частиц в начальном состоянии и $p^0 = -(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ для частиц в конечном состоянии, и включив необходимые множители для внешних линий: $(2\pi)^{-3/2}u_i$ и $(2\pi)^{-3/2}v_i^*$ для начальных частиц или античастиц, и $(2\pi)^{-3/2}u_i^*$ и $(2\pi)^{-3/2}v_i$ для конечных частиц или античастиц. Когда мы перейдем к обсуждению в гл. 8 подхода, основанного на функциональных интегралах, будет видно, что проще всего сначала вывести фейнмановские правила для диаграмм, *все* внешние линии которых лежат вне массовой оболочки, а затем получить матричные элементы S -матрицы, устремив импульсы внешних линий к их значениям на массовой оболочке.

Фейнмановские диаграммы с линиями вне массовой оболочки являются частным случаем более общих фейнмановских правил, учитывающих эффекты различных возможных внешних полей. Предположим, что мы добавили к гамильтониану сумму слагаемых, включающих внешние поля $\varepsilon_a(x)$, так что взаимодействие $V(t)$, входящее в дайсоновское разложение (3.5.10) для S -матрицы, заменяется на

$$V_\varepsilon(t) = V(t) + \sum_a \int d^3x \varepsilon_a(\mathbf{x}, t) o_a(\mathbf{x}, t). \quad (6.4.1)$$

«Токи» $o_a(t)$ зависят от времени так, как полагается в представлении взаимодействия:

$$o_a(t) = \exp(iH_0 t) o_a(0) \exp(-iH_0 t), \quad (6.4.2)$$

но в остальном являются вполне произвольными операторами. S -матрица для любого перехода $\alpha \rightarrow \beta$ становится в этом случае функционалом $S_{\alpha\beta}[\epsilon]$ от c -числовой функции $\epsilon_a(t)$. Фейнмановские правила для вычисления этого функционала определяются очевидным обобщением обычных правил Фейнмана. В дополнение к получаемым из $V(t)$ вершинам, следует включить новые вершины: если $o_a(x)$ есть произведение n_a полевых множителей, то всякая вершина o_a с координатой x и с n_a подсоединенными к ней линиями соответствующего типа согласно правилам Фейнмана в координатном представлении дает вклад, равный $-i\epsilon_a(x)$, умноженный на содержащиеся в $o_a(x)$ числовые факторы. Отсюда следует, что r -ая вариационная производная $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ по $\epsilon_a(x)$, $\epsilon_b(y)$... при $\epsilon = 0$ дается в координатном представлении диаграммами с r дополнительными вершинами, к которым подсоединены соответственно n_a , n_b , ... внутренних линий, а внешние линии отсутствуют. Указанные вершины имеют координаты x , y , ..., по которым не производится интегрирование. Вклад каждой такой вершины равен произведению $-i$ на тот числовой фактор, который содержится в соответствующем токе o_a .

В частности, если все токи представляют собой поля, т. е.

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_a \int d^3x \epsilon_a(\mathbf{x}, t) o_a(\mathbf{x}, t),$$

то r -ая вариационная производная $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ по $\epsilon_l(x)$, $\epsilon_m(y)$, ... при $\epsilon = 0$ изображается в координатном представлении диаграммами, имеющими r дополнительных вершин с координатами x , y , ..., причем к каждой из них подсоединена одна единственная внутренняя линия типа l , m , ... Такие линии можно рассматривать как внешние линии вне массовой оболочки, с той только разницей, что их вклад в матричный элемент равен не коэффициентной функции типа $(2\pi)^{-3/2} u_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$ или $(2\pi)^{-3/2} u_l^*(\mathbf{p}, \sigma) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$, а *пропатору*, умноженному на множитель $-i$ от вершины в конце линии. В импульсном представлении фейнмановская диаграмма с частицами на массовой обо-

лочке в состояниях α и β и r внешними линиями типа l, m, \dots с импульсами p, p', \dots , получается из вариационной производной

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_l(x)\delta\epsilon_m(y)\dots} \right]_{\epsilon=0}$$

путем отбрасывания пропагаторов на каждой из линий вне массовой оболочки, взятия соответствующего фурье-образа и умножения на коэффициентные функции u_l, u_l^* и т. д., а также на $(-i)^r$.

Во многих случаях полезным оказывается простое соотношение между суммой вкладов всех диаграмм теории возмущений для любой амплитуды вне массовой поверхности и матричным элементом между собственными состояниями полного гамильтониана от хронологически упорядоченного произведения соответствующих операторов в гейзенберговском представлении. Это соотношение вытекает из теоремы³, утверждающей, что во всех порядках теории возмущений *

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_a(x)\delta\epsilon_b(y)\dots} \right]_{\epsilon=0} = (\Psi_\beta^-, T\{-iO_a(x), -iO_b(y)\dots\} \Psi_\alpha^+), \quad (6.4.3)$$

где $O_a(x)$ и т. д. являются аналогами $o_a(x)$ в гейзенберговском представлении:

$$O_a(\mathbf{x}, t) = \exp(iHt)o_a(\mathbf{x}, 0)\exp(-iHt) = \Omega(t)o_a(\mathbf{x}, t)\Omega^{-1}(t), \quad (6.4.4)$$

$$\Omega(t) \equiv e^{iHt}e^{-iH_0t}, \quad (6.4.5)$$

а Ψ_α^+ и Ψ_β^- – собственные «ин» и «аут» состояния полного гамильтониана.

Дадим доказательство. Из формулы (3.5.10) следует, что левая часть (6.4.3) равна

*Для единственного оператора O это утверждение составляет швингеровский принцип действия⁴.

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\varepsilon]}{\delta\varepsilon_{a_1}(x_1)\dots\delta\varepsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\varepsilon=0} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^{N+r}}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \dots d\tau_N \quad (6.4.6)$$

$$\times \left(\Phi_{\beta}, T \left\{ V(\tau_1) \dots V(\tau_N) o_{a_1}(x_1) \dots o_{a_r}(x_r) \right\} \Phi_{\alpha} \right).$$

Для определенности положим $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \dots \geq x_r^0$. Тогда все τ , большие x_1^0 , можно обозначить $\tau_{01} \dots \tau_{0N_0}$, все τ между x_1^0 и $x_2^0 - \tau_{11} \dots \tau_{1N_1}$, и т. д. Наконец, все τ , меньшие x_r^0 , можно обозначить $\tau_{r1} \dots \tau_{rN_r}$. После этого (6.4.6) принимает вид:

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\varepsilon]}{\delta\varepsilon_{a_1}(x_1)\dots\delta\varepsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\varepsilon=0} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^{N+r}}{N!} \sum_{N_0 N_1 \dots N_r} \frac{N! \delta_{N, N_0 + N_1 + \dots + N_r}}{N_0! N_1! \dots N_r!}$$

$$\times \int_{x_1^0}^{\infty} d\tau_{01} \dots d\tau_{0N_0} \int_{x_2^0}^{x_1^0} d\tau_{11} \dots d\tau_{1N_1} \dots \int_{-\infty}^{x_r^0} d\tau_{r1} \dots d\tau_{rN_r}$$

$$\left(\Phi_{\beta}, T \left\{ V(\tau_{01}) \dots V(\tau_{0N_0}) \right\} o_{a_1}(x_1) T \left\{ V(\tau_{11}) \dots V(\tau_{1N_1}) \right\} o_{a_2}(x_2) \dots \right.$$

$$\left. \times \dots o_{a_r}(x_r) T \left\{ V(\tau_{r1}) \dots V(\tau_{rN_r}) \right\} \Phi_{\alpha} \right).$$

Множитель $N!/N_0!N_1!\dots N_r!$ равен числу способов рассортировать N переменных τ по $r+1$ подмножествам, содержащим N_0, N_1, \dots, N_r этих переменных. Вместо суммирования по N_0, N_1, \dots, N_r с учетом условия $N_0 + N_1 + \dots + N_r = N$, а затем суммирования по N , можно просто суммировать независимо по N_0, N_1, \dots, N_r , полагая N в множителе $(-i)^N$ равным $N_0 + N_1 + \dots + N_r$. Получаем:

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\varepsilon]}{\delta\varepsilon_{a_1}(x_1)\dots\delta\varepsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\varepsilon=0} = (-i)^r \left(\Phi_{\beta}, U(\infty, x_1^0) o_{a_1}(x_1) \right. \quad (6.4.7)$$

$$\left. \times U(x_1^0, x_2^0) o_{a_2}(x_2) U(x_2^0, x_3^0) \dots o_{a_r}(x_r) U(x_r^0, -\infty) \Phi_{\alpha} \right),$$

где

$$U(t', t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int_t^{t'} d\tau_1 \dots d\tau_N T \left\{ V(\tau_1) \dots V(\tau_N) \right\}. \quad (6.4.8)$$

Оператор $U(t', t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt'} U(t', t) = -iV(t')U(t', t) \quad (6.4.9)$$

с очевидным начальным условием

$$U(t, t) = 1. \quad (6.4.10)$$

Оно имеет решение

$$U(t', t) = \exp(iH_0 t') \exp(-iH(t' - t)) \exp(-iH_0 t) = \Omega^{-1}(t') \Omega(t), \quad (6.4.11)$$

где Ω дается формулой (6.4.5). Подставляя (6.4.11) в (6.4.7) и пользуясь формулой (6.4.4), находим:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\varepsilon]}{\delta\varepsilon_{a_1}(x_1) \dots \delta\varepsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\varepsilon=0} \\ &= (-i)^r \left(\Omega(\infty) \Phi_\beta, O_{a_1}(x_1) \dots O_{a_r}(x_r) \Omega(-\infty) \Phi_\alpha \right). \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

При получении этой формулы было сделано предположение, что $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \dots \geq x_r^0$, поэтому произведение операторов справа можно заменить на хронологически упорядоченное произведение

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\varepsilon]}{\delta\varepsilon_{a_1}(x_1) \dots \delta\varepsilon_{a_r}(x_r)} \right]_{\varepsilon=0} \\ &= (-i)^r \left(\Omega(\infty) \Phi_\beta, T\{O_{a_1}(x_1) \dots O_{a_r}(x_r)\} \Omega(-\infty) \Phi_\alpha \right). \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

Но теперь обе стороны равенства полностью симметричны (или антисимметричны в случае фермионов) по a и x , так что это соотношение выполняется при любом порядке следования моментов времени $x_1^0 \dots x_r^0$. Кроме того, в разделе 3.1 мы видели, что

$$\Psi_\beta^\pm = \Omega(\mp\infty) \Phi_\beta. \quad (6.4.14)$$

(в смысле соотношения (3.1.12)). Таким образом, формула (6.4.13) и есть желаемый результат (6.4.3).

Задачи

1. Рассмотрите теорию действительного скалярного поля ϕ со взаимодействием

$$V = \frac{g}{3!} \int d^3x \phi(x)^3$$

(в представлении взаимодействия). Вычислите связный элемент S -матрицы для скаляр–скалярного рассеяния во втором порядке по g , взяв все интегралы. Используя этот результат, вычислите дифференциальное сечение скаляр–скалярного рассеяния в с. ц. и.

2. Рассмотрите теорию, включающую нейтральное скалярное поле $\phi(x)$ для бозона B и комплексное дираковское поле $\Psi(x)$ для фермиона F , взаимодействующих по закону

$$V = ig \int d^3x \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \Psi(x) \phi(x).$$

(в представлении взаимодействия). Нарисуйте все связные фейнмановские диаграммы в порядке g^2 и вычислите соответствующие матричные элементы S -матрицы для процессов $F^c + B \rightarrow F^c + B$, $F + F^c \rightarrow F + F^c$ и $F^c + F \rightarrow B + B$ (здесь F^c — античастица F). Вычислите все интегралы.

3. Рассмотрите теорию действительного скалярного поля $j(x)$ со взаимодействием

$$V = \frac{g}{4!} \int d^3x \phi(x)^4.$$

Вычислите S -матрицу для скаляр–скалярного рассеяния в порядке g и с помощью этого результата найдите дифференциальное сечение. Рассчитайте поправочные слагаемые в S -матрице для скаляр–скалярного рассеяния в порядке g^2 , взяв все интегралы по x и выразив результат в виде интеграла по единственному 4-импульсу.

4. Каков вклад в фейнмановские диаграммы от свертки производной дираковского поля $\partial_\mu \Psi_l(x)$ с сопряженным полем $\Psi_m^\dagger(y)$?

5. С помощью теоремы из раздела 6.4 найдите выражения для средних по вакууму от гейзенберговских операторов $(\Psi_0, \Phi(x)\Psi_0)$ и $(\Psi_0, T\{\Phi(x), \Phi(y)\}\Psi_0)$ в теории, рассмотренной в задаче 1, в порядках g и g^2 , соответственно.

Список литературы

1. Dyson, F.J., *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949).
2. Формальное утверждение носит название *теоремы Вика*; см.: Wick, G.C., *Phys. Rev.*, **80**, 268 (1950).
3. Я не знаю, кто первым доказал эту теорему. Она была известна в начале 50-х годов ряду теоретиков, включая М. Гелл-Манна и Ф. Лоу.
4. Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **82**, 914 (1951).

Канонический формализм

С конца 1920-х годов, когда квантовая теория поля родилась в работах Борна, Дирака, Ферми, Гейзенберга, Иордана и Паули, ее развитие исторически было настолько тесно связано с каноническим формализмом, что и в наши дни считается вполне естественным начинать любое рассмотрение с постулирования лагранжиана и применения к нему правил канонического квантования. Такой подход используется в большинстве книг по квантовой теории поля. Однако исторический прецедент — не самый убедительный довод в пользу этого формализма. Если нам удастся построить квантовую теорию поля, приводящую к физически удовлетворительной S -матрице, то какое нам дело до того, что эту теорию нельзя, может быть, получить квантованием какого-то лагранжиана?

Поставленный вопрос до некоторой степени спорный, так как в разделе 7.1 мы увидим, что все самые известные квантовые теории поля представляют собой канонические системы, которые легко могут быть представлены в лагранжевой форме. Однако никто не доказал, что любая приемлемая квантовая теория поля может быть сформулирована таким образом. Но даже если это так, то сам этот факт не объясняет, почему в качестве отправной точки при построении разных квантовых теорий поля следует предпочитать именно лагранжевый формализм.

Преимущество лагранжевого формализма заключается в том, что он позволяет легко удовлетворить требованиям инвариантности относительно преобразований Лоренца и других симметрий: классическая теория с лоренц-инвариантным лагранжианом в результате канонического квантования приводит к лоренц-инвариантной квантовой теории. Иначе говоря, мы покажем ниже, что

такая теория позволяет построить подходящие квантово-механические операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Пуанкаре и приводящие поэтому к лоренц-инвариантной S -матрице.

Это далеко не тривиально. В предыдущей главе мы видели, что в теориях со связью с производными или со спином $j \geq 1$ недостаточно записать гамильтониан взаимодействия в виде интеграла по пространству от скалярной плотности. Необходимо добавить к плотности гамильтониана взаимодействия нескаллярные слагаемые для компенсации нековариантных слагаемых в пропагаторах. Канонический формализм со скалярной плотностью лагранжиана автоматически приводит к нужным дополнительным слагаемым. Позднее, когда мы перейдем в т. II к обсуждению неабелевых калибровочных теорий, это дополнительное удобство превратится в необходимость. Безнадёжно пытаться угадать форму гамильтониана в таких теориях, если не начать с лоренц-инвариантного и калибровочно инвариантного лагранжиана.

7.1. Канонические переменные

В этом разделе мы покажем, что различные построенные нами до сих пор квантовые теории поля удовлетворяют коммутационным соотношениям и уравнениям движения гамильтонова формализма*. Для вычисления S -матрицы (операторным методом или с помощью функционального интеграла) нужен именно гамильтонов формализм, однако далеко не просто выбрать гамильтонианы, приводящие к лоренц-инвариантной S -матрице. В остальной части этой главы мы будем рассматривать в качестве отправной точки лагранжев формализм, и получим с его помощью физически приемлемые гамильтонианы. Цель данного раздела —

* Мы используем русскую терминологию. Автор употребляет термин *Hamiltonian (Lagrangian) version of canonical formalism*, в дословном переводе: *гамильтонов (лагранжев) вариант канонического формализма*. В русской физической литературе используют термины *лагранжев формализм* и *гамильтонов, или канонический, формализм*. Лагранжев и гамильтонов формализмы однозначно связаны и эквивалентны; иногда говорят о «гамильтонизации» лагранжевой теории. — *Прим. ред.*

определить канонические поля и им сопряженные в различных теориях поля, показать, как выделять слагаемые в лагранжиане, относящиеся к свободным полям, и, наконец, подтвердить, что канонический формализм действительно применим к физически реалистичным теориям.

Прежде всего, покажем, что построенные в гл. 5 свободные поля автоматически образуют систему квантовых операторов $q^n(\mathbf{x}, t)$ и канонически сопряженных им импульсов $p_n(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих известным каноническим соотношениям коммутации или антикоммутации:

$$[q^n(\mathbf{x}, t), p_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\bar{n}}^n, \quad (7.1.1)$$

$$[q^n(\mathbf{x}, t), q^{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0, \quad (7.1.2)$$

$$[p_n(\mathbf{x}, t), p_{\bar{n}}(\mathbf{y}, t)]_{\mp} = 0, \quad (7.1.3)$$

где индекс \mp указывает, что если хотя бы один из двух операторов рождает или уничтожает частицы, являющиеся бозонами, следует брать коммутатор, а если оба оператора рождают или уничтожают фермионы, то следует брать антикоммутатор. Например, в разделе 5.2 было показано, что действительное скалярное поле $\phi(x)$ зарядово самосопряженной частицы нулевого спина подчиняется коммутационному соотношению

$$[\phi(x), \phi(y)]_- = \Delta(x - y),$$

где функция

$$\Delta(x) = \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} [e^{ik \cdot (x-y)} - e^{-ik \cdot (x-y)}],$$

причем $k^0 \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Заметим, что

$$\Delta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{\Delta}(\mathbf{x}, 0) = -i\delta^3(\mathbf{x}).$$

(Точка означает производную по x^0 .) Легко показать, что поле ϕ и его производная по времени $\dot{\phi}$ удовлетворяют одновременным коммутационным соотношениям

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{y}, t)]_- = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.1.4)$$

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, t)]_- = 0, \quad (7.1.5)$$

$$[\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{y}, t)]_- = 0. \quad (7.1.6)$$

Поэтому можно определить канонические переменные

$$q(\mathbf{x}, t) \equiv \varphi(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.7)$$

удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям (7.1.1)–(7.1.3).

В случае комплексного скалярного поля частицы спина нуль, не совпадающей со своей античастицей, коммутационные соотношения имеют вид

$$[\varphi(x), \varphi^\dagger(y)]_- = \Delta(x - y), \quad [\varphi(x), \varphi(y)]_- = 0.$$

Отсюда можно определить канонические переменные для свободных частиц как комплексные операторы

$$q(\mathbf{x}, t) \equiv \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.8)$$

$$p(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}, t). \quad (7.1.9)$$

Эквивалентно, записав $\varphi \equiv (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$ с эрмитовыми φ_k , $k = 1, 2$, получаем канонические переменные

$$q^k(\mathbf{x}, t) = \varphi^k(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.10)$$

$$p_k(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\varphi}_k(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.11)$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям (7.1.1)–(7.1.3).

Для действительного векторного поля частицы спина единица коммутационные соотношения были выписаны в разделе 5.3:

$$[v^\mu(x), v^\nu(y)]_- = \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{m^2} \right] \Delta(x - y).$$

(Мы пишем v^μ вместо V^μ , так как хотим сохранить заглавные буквы для обозначения полей в гейзенберговском представлении.) В данном случае канонические переменные для свободных частиц можно выбрать в виде:

$$q^i(\mathbf{x}, t) = v^i(\mathbf{x}, t), \quad (7.1.12)$$

$$p_i(\mathbf{x}, t) = \dot{v}^i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v^0(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i}, \quad (7.1.13)$$

где $i = 1, 2, 3$. Читатель может проверить, что величины (7.1.12) и (7.1.13) удовлетворяют перестановочным соотношениям (7.1.1)–(7.1.3). Полевые уравнения (5.3.36) и (5.3.38) вместе с формулой (7.1.13) позволяют выразить v^0 через другие переменные:

$$v^0 = m^{-2} \nabla \cdot \mathbf{p}, \quad (7.1.14)$$

поэтому v^0 не рассматривается в качестве независимой переменной q . На случай комплексного векторного поля эти результаты обобщаются точно так же, как и в случае комплексного скалярного поля.

Для дираковского поля немайорановских частиц спина 1/2 из результатов раздела 5.6 следует, что антикоммутирует полей равен

$$[\Psi_n(x), \Psi_n^\dagger(y)]_+ = [(-\gamma^\mu \partial_\mu + m)\beta]_{n, \bar{n}} \Delta(x - y),$$

$$[\Psi_n(x), \Psi_{\bar{n}}(y)]_+ = 0.$$

Было бы непоследовательно выбрать Ψ_n и Ψ_n^\dagger в качестве независимых канонических переменных, так как их антикоммутирует не обращается в нуль при равных временах. Вместо этого принято определять

$$q^n(x) \equiv \Psi_n(x), \quad (7.1.15)$$

$$p_n(x) \equiv i\Psi_n^\dagger(x). \quad (7.1.16)$$

Легко видеть, что (7.1.15) и (7.1.16) удовлетворяют каноническим антикоммутирующим соотношениям (7.1.1)–(7.1.3).

Для любой системы операторов, удовлетворяющих коммутационным или антикоммутирующим соотношениям типа (7.1.1)–(7.1.3),

можно определить квантово-механическую функциональную производную. Именно, для произвольного бозонного функционала $F[q(t), p(t)]$ от операторов $q^n(\mathbf{x}, t)$ и $p_n(\mathbf{x}, t)$ при фиксированном времени t мы определяем*

$$\frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x}, t)} \equiv i[p_n(\mathbf{x}, t), F[q(t), p(t)]], \quad (7.1.17)$$

$$\frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta p_n(\mathbf{x}, t)} \equiv i[F[q(t), p(t)], q^n(\mathbf{x}, t)]. \quad (7.1.18)$$

Это определение мотивируется тем, что если записать $F[q(t), p(t)]$ так, что все q окажутся слева от всех p , то (7.1.17) и (7.1.18) являются, соответственно, левыми и правыми производными по q^n и p_n . Иначе говоря, для произвольной c -числовой** вариации δq и δp операторов q и p имеем:

$$\delta F[q(t), p(t)] = \int d^3x \sum_n \left(\delta q^n(\mathbf{x}, t) \frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x}, t)} + \frac{\delta F[q(t), p(t)]}{\delta p_n(\mathbf{x}, t)} \delta p_n(\mathbf{x}, t) \right).$$

Для более общих функционалов следует дополнить определения (7.1.17) и (7.1.18) различными знаками и коммутаторами при равных временах.

В частности, H_0 является генератором трансляций по времени, действующим на свободные частицы в следующем смысле:

$$q^n(\mathbf{x}, t) = \exp(iH_0 t) q^n(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t), \quad (7.1.19)$$

* Здесь используются обозначения, употребляемые далее по всей книге. Если $f(x, y)$ есть функция двух классов переменных, коллективно обозначенных x и y , то $F[f(y)]$ означает функционал, зависящий от значений $f(x, y)$ при всех x , но при фиксированном y . Бозонным мы называем такой функционал, в котором каждое слагаемое содержит только четное число фермионных полей.

** Если q^n и p_n – бозонные или фермионные операторы, то считается, что δq^n и δp_n соответственно коммутируют или антикоммутируют со всеми фермионными операторами и коммутируют со всеми бозонными операторами.

$$p_n(\mathbf{x}, t) = \exp(iH_0 t) p_n(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t), \quad (7.1.20)$$

так что операторы свободных частиц зависят от времени по закону:

$$\dot{q}^n(\mathbf{x}, t) = i[H_0, q^n(\mathbf{x}, t)] = \frac{\delta H_0}{\delta p_n(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.1.21)$$

$$\dot{p}_n(\mathbf{x}, t) = i[H_0, p_n(\mathbf{x}, t)] = -\frac{\delta H_0}{\delta q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.1.22)$$

Мы узнаем в этих выражениях всем известные динамические уравнения гамильтонова формализма.

Гамильтониан свободных частиц задается, как всегда, выражением

$$H_0 = \sum_{n, \sigma} \int d^3k a^\dagger(\mathbf{k}, \sigma, n) a(\mathbf{k}, \sigma, n) \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_n^2}. \quad (7.1.23)$$

Его можно переписать через q и p , взятые в момент времени t . Например, легко видеть, что для действительного скалярного поля выражение (7.1.23) с точностью до постоянного слагаемого равно функционалу

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} (\nabla q)^2 + \frac{1}{2} m^2 q^2 \right]. \quad (7.1.24)$$

Более аккуратно, используя (7.1.7) и фурье-разложение скалярного поля ϕ , находим, что (7.1.24) принимает вид

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3k k^0 [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})]_+ = \int d^3k k^0 \left(a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}) \right) \quad (7.1.25)$$

Это выражение совпадает с (7.1.23), если не считать бесконечного постоянного слагаемого. Подобные слагаемые влияют только на выбор начала отсчета энергии, и в отсутствие гравитации не имеют физического значения*.

* Однако изменения таких слагаемых, обусловленные *изменением* граничных условий на поля, как например, при квантовании полей не во всем пространстве, а в пространстве между параллельными пластинами, не только физически значимы, но и были измерены¹.

Явный вид H_0 как функционала от переменных q и p для других полей приведен в разделе 7.5.

В книгах по квантовой теории поля формула (7.1.25) обычно выводится из формулы (7.1.24), которая, в свою очередь, выводится из заданной плотности лагранжиана. С моей точки зрения, все должно быть наоборот, так как формула (7.1.25) обязана иметь место. Если предполагаемый лагранжиан свободных частиц не приводит к (7.1.25) с точностью до постоянного слагаемого, можно сделать вывод, что этот лагранжиан неправильный. Вопрос следует поставить иначе: какой лагранжиан свободных полей приводит к формуле (7.1.25) для бесспиновых частиц, или, в более общем случае, к гамильтониану свободных частиц (7.1.23). Ответ можно получить с помощью хорошо известного преобразования Лежандра от гамильтониана к лагранжиану. Для свободного поля лагранжиан дается формулой:

$$L_0[q(t), \dot{q}(t)] = \sum_n \int d^3x p_n(\mathbf{x}, t) \dot{q}(\mathbf{x}, t) - H_0, \quad (7.1.26)$$

причем подразумевается, что p_n везде заменяются своими выражениями через q^n и \dot{q}^n (и возможно, как будет видно ниже, через некоторые вспомогательные поля). Например, исходя из гамильтониана (7.1.24) и формулы (7.1.7), можно вывести лагранжиан свободного скалярного поля:

$$\begin{aligned} L_0 &= \int d^3x \left[p\dot{q} - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} (\nabla q)^2 - \frac{1}{2} m^2 q^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

Каким бы не оказался лагранжиан скалярного поля, это слагаемое должно быть отделено от всех остальных и рассматриваться как нулевое приближение теории возмущений. Аналогичное упражнение можно проделать для всех других канонических систем, рассматриваемых в данном разделе. Однако с этого момента мы сосредоточимся на угадывании формы лагранжиана свободных полей, после чего будем проверять, что она приводит к правильному гамильтониану свободных частиц.

Мы видели, что различные теории свободных полей можно сформулировать в терминах канонических переменных. Нетрудно

продвинуться далее и показать, что это же верно для взаимодействующих полей. Можно ввести канонические переменные в так называемом «гейзенберговском представлении», определяемом соотношениями

$$Q^n(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iHt)q^n(\mathbf{x}, 0)\exp(-iHt), \quad (7.1.28)$$

$$P_n(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iHt)p_n(\mathbf{x}, 0)\exp(-iHt), \quad (7.1.29)$$

где H – полный гамильтониан. Поскольку это преобразование подобия, коммутирующее с H , то полный гамильтониан является таким же функционалом от операторов в гейзенберговском представлении, каким он был как функционал от q и p :

$$H[Q, P] = e^{iHt}H[q, p]e^{-iHt} = H[q, p].$$

Кроме того, поскольку (7.1.28)–(7.1.29) определяют преобразование подобия, операторы в гейзенберговском представлении вновь удовлетворяют каноническим коммутационным или антикоммутационным соотношениям:

$$[Q^n(\mathbf{x}, t), P_{\bar{n}}(\mathbf{x}, t)]_{\mp} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{\bar{n}}^n, \quad (7.1.30)$$

$$\left[Q^n(\mathbf{x}, t), Q^{\bar{n}}(\mathbf{x}, t) \right]_{\mp} = 0, \quad (7.1.31)$$

$$\left[P_n(\mathbf{x}, t), P_{\bar{n}}(\mathbf{x}, t) \right]_{\mp} = 0. \quad (7.1.32)$$

Однако зависимость от времени этих операторов имеет вид

$$\dot{Q}^n(\mathbf{x}, t) = i[H, Q^n(\mathbf{x}, t)] = \frac{\delta H}{\delta P_n(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.1.33)$$

$$\dot{P}_n(\mathbf{x}, t) = i[H, P_n(\mathbf{x}, t)] = -\frac{\delta H}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.1.34)$$

Например, можно выбрать гамильтониан действительного скалярного поля в виде суммы гамильтониана (7.1.24) свободных частиц

и интеграла от скалярной плотности гамильтониана \mathcal{H} , так что в терминах гейзенберговского представления гамильтониан запишется в виде:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} (\nabla Q)^2 + \frac{1}{2} m^2 Q^2 + \mathcal{H}(Q) \right]. \quad (7.1.35)$$

В этом случае канонически сопряженный к Q импульс дается той же формулой, что и для свободных полей:

$$P = \dot{Q}. \quad (7.1.36)$$

Однако далее мы увидим, что в общем случае соотношение между канонически сопряженными импульсами $P_n(x)$ и полевыми переменными и их производными по времени не такое, как для операторов свободных полей, а должно выводиться из уравнений (7.1.33) и (7.1.34)*.

7.2. Лагранжев формализм

Как мы видели, многие реалистичные теории укладываются в рамки канонического формализма. Поэтому возникает вопрос о выборе гамильтониана. В следующем разделе будет показано, что простейший способ обеспечить лоренц-инвариантность и другие симметрии заключается в том, чтобы выбрать подходящей лагранжиан и получить из него гамильтониан. При такой процедуре не происходит потери общности. Имея реалистичный гамильтониан, мы, как правило, можем реконструировать тот лагранжиан, из которого данный гамильтониан выводится, обратив описанный ниже процесс перехода от лагранжиана к гамильтониану. (Вывод формулы (7.1.26) – один из примеров такой реконструкции.) Но хотя мы и можем переходить от гамильтонианов к лагранжианам и наоборот, все же проще исследовать физически удовлетворительные теории, перебирая не гамильтонианы, а возможные лагранжианы.

* Предполагается, что уравнения движения заданы в гамильтоновой форме. — *Прим. ред.*

В общем случае лагранжиан есть функционал $* L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]$ от множества произвольных полей $\Psi^l(\mathbf{x}, t)$ и их производных по времени $\dot{\Psi}^l(t)$. Сопряженные поля $\Pi_l(\mathbf{x}, t)$ определяются как вариационные производные $**$

$$\Pi_l(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.2.1)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{\Pi}_l(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.2.2)$$

Полезно переформулировать эти полевые уравнения в форме вариационного принципа. Определим функционал от поля $\Psi^l(x)$ во всем пространстве–времени, называемый *действием*:

$$I[\Psi] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]. \quad (7.2.3)$$

В результате произвольной вариации $\Psi(x)$ изменение $I[\Psi]$ записывается в виде:

$$\delta I[\Psi] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \left[\frac{\delta L}{\delta \Psi^l(x)} \delta \Psi^l(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^l(x)} \delta \dot{\Psi}^l(x) \right].$$

* Напомним, что в используемых нами обозначениях функционал типа L , в котором явно указывается переменная t , понимается как зависящий от полей $\Psi^l(\mathbf{x}, t)$ и $\dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)$, причем не выписанные переменные l и \mathbf{x} пробегают все возможные значения при фиксированном значении указанной переменной t . Мы используем заглавные буквы Ψ и Π , чтобы подчеркнуть, что это не свободные, а взаимодействующие поля.

** Так как в общем случае Ψ и $\dot{\Psi}$ не удовлетворяют простым соотношениям коммутации или антикоммутации, мы не можем дать простого определения возникающих здесь функциональных производных по аналогии с функциональными производными по Q и P в предыдущем разделе. Вместо этого договоримся, что вариационные производные таковы, какие они должны быть для c -числовых переменных, с добавлением знаков «минус» и коммутаторов или антикоммутаторов при равных временах, необходимых для того, чтобы формулы стали квантово-механически корректными. Насколько я знаю, с деталями этого вопроса не связано никаких особых проблем.

Предполагая, что $\delta\Psi^l(x)$ обращается в нуль при $t \rightarrow \pm\infty$, можно произвести интегрирование по частям и записать

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left[\frac{\delta L}{\delta\Psi^l(x)} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta\dot{\Psi}^l(x)} \right] \delta\Psi^l(x). \quad (7.2.4)$$

Мы видим, что действие стационарно по отношению ко всем вариациям $\delta\Psi^l$, исчезающим при $t \rightarrow \pm\infty$, в том и только в том случае, когда поля удовлетворяют уравнениям (7.2.2)*.

Так как полевые уравнения определяются функционалом $I[\Psi]$, то при попытках построить лоренц-инвариантную теорию естественно считать этот функционал скаляром. В частности, поскольку $I[\Psi]$ равен интегралу по времени от $L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]$, мы предполагаем, что L должен быть интегралом по пространственным переменным от обычной скалярной функции переменных $\Psi(x)$ и $\partial\Psi/\partial x^\mu$, называемой *плотностью лагранжиана* \mathcal{L} :

$$L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)] = \int d^3x \mathcal{L}(\Psi(\mathbf{x}, t), \nabla\Psi(\mathbf{x}, t), \dot{\Psi}(\mathbf{x}, t)), \quad (7.2.5)$$

так что действие равно

$$I[\Psi] = \int d^4x \mathcal{L}(\Psi(x), \partial\Psi(x) / \partial x^\mu). \quad (7.2.6)$$

Все теории поля, используемые в современных теориях элементарных частиц, имеют лагранжианы указанного вида.

Варьируя $\Psi^l(x)$ на величину $\delta\Psi^l(x)$ и интегрируя по частям, находим для вариации лагранжиана:

$$\begin{aligned} \delta L &= \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^l} \delta\Psi^l + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\Psi^l)} \nabla\delta\Psi^l + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}^l} \delta\dot{\Psi}^l \right] \\ &= \int d^3x \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^l} - \nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\Psi^l)} \right) \delta\Psi^l + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}^l} \delta\dot{\Psi}^l \right], \end{aligned}$$

так что (опуская очевидные аргументы у функций)

* Строго говоря, излагаемая здесь формулировка вариационного принципа предполагает, что искомые поля — решения полевых уравнений (7.2.2) — являются «стационарной точкой» действия (7.2.3), т. е. входят в область определения последнего (соответствующие интегралы (7.2.5), (7.2.6) сходятся). — *Прим. ред.*

$$\frac{\delta L}{\delta \Psi^l} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^l} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \Psi^l)}, \quad (7.2.7)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^l} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^l}. \quad (7.2.8)$$

В результате полевые уравнения (7.2.1) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Psi^l / \partial x^\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^l}. \quad (7.2.9)$$

Они называются *уравнениями Эйлера–Лагранжа*. Как и ожидалось, если \mathcal{L} – скаляр, то эти уравнения лоренц-инвариантны.

В дополнение к тому, что действие должно быть лоренц-инвариантным, оно должно быть *действительным*. Это требование связано с тем, что мы хотим иметь ровно столько же полевых уравнений, сколько имеется самих полей. Разбивая всякое комплексное поле на действительную и мнимую части, можно всегда считать I функционалом только некоторого числа, скажем, N , *действительных* полей. Если бы действие I было комплексным с независимыми действительной и мнимой частями, то действительная и мнимая части условий стационарности I (уравнения Эйлера–Лагранжа) приводили бы к $2N$ уравнениям для N полей. Это слишком много, за исключением специальных случаев. Кроме того, в следующем разделе мы увидим, что действительность действия обеспечивает эрмитовость генераторов различных преобразований симметрии.

Хотя лагранжев формализм позволяет легко строить теории, являющиеся инвариантными относительно преобразований Лоренца и других симметрий, для вычисления S -матрицы все же нужна формула для гамильтониана взаимодействия. В общем случае гамильтониан определяется *преобразованием Лежандра*:

$$H = \sum_l \int d^3x \Pi_l(\mathbf{x}, t) \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t) - L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]. \quad (7.2.10)$$

Хотя формула (7.2.1) в общем случае не позволяет однозначно выразить $\dot{\Psi}^l$ через Ψ^l и Π_l , легко видеть, что вариационные производные (7.2.10) по $\dot{\Psi}^l$ обращаются в нуль для любых $\dot{\Psi}^l$, удовлетворяющих (7.2.1).

Поэтому функция Гамильтона является функционалом только от Ψ^l и Π_l . Ее вариационные производные по этим переменным равны*:

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Pi} = \int d^3 y \sum_{l'} \Pi_{l'}(\mathbf{y}, t) \left. \frac{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Pi} - \left. \frac{\delta L}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\dot{\Psi}} - \int d^3 y \sum_{l'} \left. \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)} \right|_{\Psi} \left. \frac{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Pi},$$

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \Pi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Psi} = \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t) + \int d^3 y \sum_{l'} \Pi_{l'}(\mathbf{y}, t) \left. \frac{\delta \Psi^{l'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Psi} - \int d^3 y \sum_{l'} \left. \frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)} \right|_{\Psi} \left. \frac{\delta \dot{\Psi}^{l'}(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Psi},$$

где нижние индексы указывают на те величины, которые считаются постоянными при взятии вариационных производных. Используя определение (7.2.1) для Π_l , можно упростить полученные выражения:

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Pi} = - \left. \frac{\delta L}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\dot{\Psi}}, \quad (7.2.11)$$

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \Pi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Psi} = \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t). \quad (7.2.12)$$

Тогда уравнения движения (7.2.2) эквивалентны уравнению

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \right|_{\Pi} = -\dot{\Pi}_l(\mathbf{x}, t). \quad (7.2.13)$$

Возникает искушение отождествить исходные полевые переменные Ψ^l и сопряженные им импульсы Π_l с каноническими переменными Q^n и P_n из предыдущего раздела и потребовать выполнения тех же самых коммутационных соотношений (7.1.30)–(7.1.32). При этом уравнения (7.2.12) и (7.2.13) совпадают с гамильтоновыми

* Строго говоря, нижеследующие формулы справедливы в предположении, что $\dot{\Psi}^l$ однозначно выражаются через Ψ^l и Π_l . — *Прим. ред.*

уравнениями движения (7.1.33) и (7.1.34). Именно так обстоит дело в простом случае действительного скалярного поля Φ со связью без производных. Рассмотрим плотность лагранжиана *

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - \mathcal{H}(\Phi), \quad (7.2.14)$$

которую можно получить добавлением действительной функции $-\mathcal{H}(\Phi)$ поля Φ к найденной в предыдущем разделе плотности лагранжиана свободного поля. В данном случае уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид:

$$(\square - m^2)\Phi = \mathcal{H}'(\Phi), \quad (7.2.15)$$

Исходя из этой плотности лагранжиана, вычисляем канонически сопряженный к полю Φ импульс:

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi}, \quad (7.2.16)$$

который совпадает с (7.1.36), если отождествить Φ и Π с каноническими переменными Q и P . Теперь согласно (7.2.10) находим гамильтониан **:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathcal{H}(\Phi) \right], \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

* Мы не включаем в слагаемое $-\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$ произвольный множитель, поскольку всякую такую положительную постоянную можно убрать в нормировку Φ . Если бы постоянная была отрицательной, то, как мы увидим, это привело бы к неограниченному снизу гамильтониану. Постоянную m в этом выражении называют голой массой. Наиболее общий лагранжиан, удовлетворяющий принципу перенормируемости (см. гл.12), имеет указанный вид, где $\mathcal{H}(\Phi)$ – полином четвертой степени по Φ .

** Для интерпретации H как энергии необходима ограниченность этой функции снизу. Положительность двух первых слагаемых показывает, что мы правильно угадали знак первого слагаемого в (7.2.14). Остается условие, что комбинация $\frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathcal{H}(\Phi)$ должна быть ограничена снизу как функция Φ .

что совпадает с гамильтонианом (7.1.35). Это маленькое упражнение следует рассматривать не как еще один вывод этого гамильтониана, а как оправдание пригодности лагранжиана (7.2.14)* для теории скалярных полей.

Однако не всегда дело обстоит так просто. Мы уже видели в предыдущем разделе, что существуют полевые переменные типа временной компоненты векторного поля или эрмитово сопряженного дираковского поля, которые не являются каноническими полевыми переменными Q^n и не имеют канонически сопряженных им величин. Однако в силу лоренц-инвариантности эти переменные обязаны содержаться в лагранжиане векторного и дираковского полей.

С точки зрения лагранжевого формализма, особый характер полевых переменных типа временной компоненты векторного поля или эрмитово сопряженного дираковского поля возникает из-за того, что сами они входят в лагранжиан, а их производные по времени — нет. Обозначим через C^r те полевые переменные Ψ^l , чьи производные по времени не входят в лагранжиан. Остальные независимые полевые переменные являются каноническими переменными Q^n . Для Q^n канонически сопряженными импульсами будут

$$P_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)]}{\delta \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.2.18)$$

причем выполняются коммутационные соотношения (7.1.30)–(7.1.32). Однако для C^r канонически сопряженных импульсов нет. Так как $\delta L / \delta \dot{C}^r = 0$, гамильтониан в общем случае имеет вид:

$$H = \sum_m \int d^3x P_n \dot{Q}^n - L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)], \quad (7.2.19)$$

однако пользы от этого выражения мало, пока мы не выразим C^r и \dot{Q}^l через Q и P . Уравнения движения для C^r содержат только поля и их первые производные по времени:

* Здесь и иногда ниже автор употребляет один и тот же термин «лагранжиан» как для собственно лагранжиана L , так и для плотности лагранжиана \mathcal{L} (см. (7.2.5)). Это смешение общепринято в современной литературе; содержание термина обычно явно следует из контекста. — *Прим. ред.*

$$0 = \frac{\delta L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)]}{\delta C^r(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.2.20)$$

В простейших случаях, рассматриваемых в этой главе, полученные уравнения вместе с уравнениями (7.2.18) можно решить, и найти C^r и \dot{Q}^l как функции Q и P . В разделе 7.6 показано, каким образом можно на самом деле избежать реального решения уравнений для C^r и \dot{Q}^l . В калибровочных теориях типа электродинамики следует использовать другие методы: либо выбирать конкретную калибровку, как это сделано в гл. 8, либо применять обсуждаемые в т. II более современные ковариантные методы.

Так как мы вывели выражение для гамильтониана как функционала от Q и P в гейзенберговском представлении, то для использования теории возмущений необходимо совершить переход к представлению взаимодействия. Гамильтониан не зависит от времени, поэтому его можно записать через операторы P_n и Q^n при $t = 0$, которые совпадают с операторами p_n и q^n , взятыми в тот же момент времени в представлении взаимодействия. Полученный таким образом гамильтониан можно выразить через q и p в представлении взаимодействия и разбить на две части: должным образом выбранный гамильтониан H_0 для свободных частиц и оператор взаимодействия V . Наконец, используются уравнения (7.1.21) и (7.1.22), устанавливающие зависимость от времени, и коммутационные или антикоммутационные соотношения (7.1.1)–(7.1.2), чтобы выразить q и p в $V(t)$ в виде линейных комбинаций операторов уничтожения и рождения.

Несколько примеров этой процедуры приведено в разделе 7.5. Сейчас ограничимся только одним простейшим примером — скалярным полем с гамильтонианом (7.2.17). Разбиваем H на два слагаемых — гамильтониан свободных частиц, и гамильтониан взаимодействия:

$$H = H_0 + V, \quad (7.2.21)$$

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right], \quad (7.2.22)$$

$$V = \int d^3x \mathcal{H}(\Phi). \quad (7.2.23)$$

Здесь Φ и Π берутся в один момент времени t , а H не зависит от t , хотя обычно это неверно для H_0 и V .

Теперь переходим к представлению взаимодействия. Полагая $t = 0$ в формулах (7.2.22) и (7.2.23), можно просто заменить Φ , Π на переменные в представлении взаимодействия ϕ , π , так как согласно (7.1.28) и (7.1.29) эти величины совпадают друг с другом при $t = 0$. Чтобы получить оператор взаимодействия $V(t)$ в представлении взаимодействия, применим преобразование подобия (3.5.5):

$$V(t) = \exp(iH_0 t) V \exp(-iH_0 t) = \int d^3x \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, t)). \quad (7.2.24)$$

Такое же преобразование, примененное к H_0 , оставляет его постоянным:

$$H_0 = \exp(iH_0 t) H_0 \exp(-iH_0 t) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} (\nabla\phi(\mathbf{x}, t))^2 \right]. \quad (7.2.25)$$

Связь между π и $\dot{\phi}$ определяется формулой (7.1.21)

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta H_0}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} = \pi(\mathbf{x}, t). \quad (7.2.26)$$

(Полученное соотношение совпало с (7.2.16), но как будет видно дальше, в общем случае это не так.) Кроме того, уравнение движения для ϕ определяется формулой (7.1.22):

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\delta H_0}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} = +\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) - m^2 \phi(\mathbf{x}, t), \quad (7.2.27)$$

что вместе с (7.2.26) приводит к полемому уравнению

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0. \quad (7.2.28)$$

Общее действительное решение этого уравнения можно записать в виде

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p (2p^0)^{-1/2} [e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}) - e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p})], \quad (7.2.29)$$

где подразумевается, что $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, а $a(\mathbf{p})$ – некоторая пока что неизвестная операторная функция \mathbf{p} . С помощью (7.2.26) получаем канонически сопряженный импульс

$$\pi(x) = -i(2\pi)^{-3/2} \int d^3p (2p^0)^{-1/2} [e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}) - e^{-ip \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p})]. \quad (7.2.30)$$

Чтобы получить желаемые коммутационные соотношения

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_- = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.2.31)$$

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, t)]_- = 0, \quad (7.2.32)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_- = 0, \quad (7.2.33)$$

следует принять, что операторы a удовлетворяют известным коммутационным соотношениям

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (7.2.34)$$

$$[a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] = 0. \quad (7.2.35)$$

Кроме того, мы уже показали в предыдущем разделе, что с помощью этих выражений формула (7.2.25) с точностью до неопределенной аддитивной константы переходит в обычную формулу (4.2.11) для гамильтониана свободных частиц. Как было отмечено, эти результаты не следует рассматривать как альтернативный вывод формул (7.2.29), (7.2.34) и (7.2.35), полученных в гл. 5 из совершенно иных соображений, а как проверку того, что первые два слагаемых в (7.2.14) являются правильным лагранжианом свободных частиц для действительного скалярного поля. Теперь можно использовать теорию возмущений для вычисления S -матрицы, взяв за $V(t)$ выражение (7.2.24), где поле $\varphi(x)$ дается формулой (7.2.29).

Описанная здесь процедура будет рассмотрена в разделе 7.5 на более сложных и интересных примерах.

* * *

При изучении различных возможных плотностей лагранжианов физических теорий часто приходится применять интегрирование по частям, рассматривая плотности лагранжианов, отличающиеся на полную дивергенцию $\partial_\mu \mathcal{F}^\mu$, как эквивалентные. Очевидно, что такие полные дивергенции не дают вклада в действие и поэтому не влияют на полевые уравнения. Столь же очевидно, что слагаемые с пространственной производной $\nabla \cdot \mathcal{F}$ в плотности лагранжиана не дают вклада в лагранжиан и поэтому не влияют на определяемую им квантовую теорию*. Менее очевидно и заслуживает упоминания, что добавление производной по времени $\partial_0 \mathcal{F}^0$ в лагранжиан также не влияет на квантовую структуру теории. Чтобы увидеть это, рассмотрим сначала результат добавления к лагранжиану слагаемого более общего вида

$$\Delta L(t) = \int d^3x D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]\dot{Q}^n(\mathbf{x}, t), \quad (7.2.36)$$

где D – зависящий от n и \mathbf{x} произвольный функционал от значений Q в данный момент времени. Это приводит к следующей добавке к сопряженным величинам $P(t)$ как функционалам от $Q(t)$ и $\dot{Q}(t)$:

$$\Delta P_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \Delta L(t)}{\delta \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t)} = D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]. \quad (7.2.37)$$

Отсюда следует, что гамильтониан, записанный как функционал от $Q(t)$ и $\dot{Q}(t)$, не изменяется:

$$\int d^3x \Delta P_n(\mathbf{x}, t)\dot{Q}^n(\mathbf{x}, t) - \Delta L(t) = 0. \quad (7.2.38)$$

Поэтому гамильтониан как функционал старых канонических переменных Q^n и P_n не изменяется, но как функционал новых канонических переменных Q^n и $P_n + \Delta P_n$ он имеет *другой* вид, а в теории, описываемой новым лагранжианом $\mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}$, каноническим коммутационным соотношениям должны удовлетворять не Q^n и P_n ,

* Утверждение верно при обычном предположении, что поля исчезают на бесконечности. При рассмотрении полей разной топологии (см. т. II) эти результаты не всегда применимы.

а новые канонические переменные Q^n и $P_n + \Delta P_n$. Коммутаторы Q^n друг с другом и с P_m даются обычными каноническими соотношениями, но коммутаторы P_n друг с другом равны теперь

$$\begin{aligned} [P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t)] &= [P_n(\mathbf{x}, t) + \Delta P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t) + \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] \\ &- [P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t) + \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] - [P_n(\mathbf{x}, t) + \Delta P_n(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t)] \\ &+ [\Delta P_n(\mathbf{x}, t), \Delta P_m(\mathbf{y}, t)] = -i \frac{\delta D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]}{\delta Q^m(\mathbf{y}, t)} + i \frac{\delta D_{m,\mathbf{y}}[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

В общем случае, это не равно нулю, однако если добавочное слагаемое в лагранжиане является полной производной по времени,

$$\Delta L = \frac{dG}{dt} = \int d^3x \frac{\delta G[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)} \dot{Q}^n(\mathbf{x}, t), \quad (7.2.40)$$

то D в (7.2.36) имеет специальный вид

$$D_{n,\mathbf{x}}[Q] = \frac{\delta G[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.2.41)$$

В этом случае коммутатор (7.2.39) обращается в нуль, и переменные Q^n и P_n удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям. Мы уже видели, что изменение лагранжиана вида (7.2.36) не изменяет формы гамильтониана как функционала от Q^n и P_n . Как только что было показано, коммутационные соотношения для этих величин также не изменяются, поэтому добавление слагаемого (7.2.36) к лагранжиану не влияет на квантовую структуру теории. Таким образом, разные плотности лагранжианов, получающиеся друг из друга интегрированием по частям, могут рассматриваться как эквивалентные и в классической, и в квантовой теории поля.

7.3. Глобальные симметрии

Мы подошли к главному свойству лагранжева формализма: он представляется наиболее естественным для квантово-механической

реализации принципов симметрии. Дело в том, что динамические уравнения в лагранжевом формализме имеют форму, следующую из вариационного принципа — принципа стационарности действия. Рассмотрим любое бесконечно малое преобразование полей

$$\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x) + i\varepsilon \mathcal{F}^l(x), \quad (7.3.1)$$

оставляющее действие инвариантным*:

$$0 = \delta I = i\varepsilon \int d^4x \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^l(x)} \mathcal{F}^l(x). \quad (7.3.2)$$

(Если ε — постоянная величина, такие симметрии называются *глобальными*. В общем случае \mathcal{F}^l зависит от полей и их производных в точке x .) Конечно, соотношение (7.3.2) автоматически выполняется для *всех* бесконечно малых вариаций полей, если сами поля удовлетворяют динамическим уравнениям. Бесконечно малые преобразования симметрии — это такие преобразования, которые оставляют инвариантным действие даже тогда, когда динамические уравнения *не* удовлетворяются. Если теперь мы рассмотрим то же самое преобразование, считая ε произвольной функцией точки пространства-времени,

$$\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x) + i\varepsilon(x) \mathcal{F}^l(x), \quad (7.3.3)$$

то в общем случае вариация действия не обратится в нуль. Однако она должна иметь вид

$$\delta I = - \int d^4x J^\mu(x) \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x^\mu}, \quad (7.3.4)$$

для того, чтобы быть равной нулю, когда $\varepsilon(x)$ действительно постоянна. Если *теперь* принять, что поля в $I[\Psi]$ удовлетворяют полевым уравнениям, тогда I будет стационарным по отношению к

* Нижеследующее рассмотрение (неявно) содержит два тонких пункта. Во-первых, поля $\Psi^l(x)$ в (7.3.1) должны включать решения динамических уравнений, т. е. последние должны входить в область определения действия $I[\Psi]$ (см. примечание редактора на с. 397). Во-вторых, чтобы было верно (7.3.2), вариация симметрии $i\varepsilon \mathcal{F}^l(x)$ должна быть *допустимой* (исчезать на бесконечности), — *Прим. ред.*

произвольным вариациям полей, обращающимся в нуль на больших пространственно-временных расстояниях, включая и вариации вида (7.3.3), так что в этом случае (7.3.4) должно обращаться в нуль. Интегрируя по частям, видим, что $J^\mu(x)$ должен удовлетворять закону сохранения

$$0 = \frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x^\mu}. \quad (7.3.5)$$

Отсюда немедленно следует, что

$$0 = \frac{dF}{dt}, \quad (7.3.6)$$

где

$$F \equiv \int d^3x J^0. \quad (7.3.7)$$

Каждому независимому бесконечно малому преобразованию симметрии соответствует только один сохраняющийся ток J^μ и один интеграл движения F . Это общее свойство канонического формализма, часто называемое теоремой Нетер: *наличие симметрий влечет существование законов сохранения* *.

Многие преобразования симметрии оставляют инвариантным не только действие, но и лагранжиан. Например, так обстоит дело в случае пространственных трансляций и поворотов, а также изоспиновых преобразований и других преобразований внутренних симметрий, хотя для общих преобразований Лоренца это не выполняется. Если лагранжиан инвариантен, можно продвинуться дальше и написать явную формулу для сохраняющейся величины F . Рассмотрим вариацию поля (7.3.3), в которой $\varepsilon(x)$ зависит от t , но не от \mathbf{x} . В этом случае вариация действия равна

$$\begin{aligned} \delta I = i \int dt \int d^3x \left[\frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \varepsilon(t) \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t) \right. \\ \left. + \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)} \frac{d}{dt} (\varepsilon(t) \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t)) \right]. \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

* Стандартно понимаемая теорема Нетер утверждает не только существование законов сохранения, но и их конкретный вид, т. е. явный вид сохраняющегося нетеровского тока J^μ и интеграла движения F , отвечающих данному действию I и данной симметрии (7.3.1) (см. ниже на с. 409). — *Прим. ред.*

Требование инвариантности лагранжиана под действием этого преобразования при постоянном ϵ приводит к равенству:

$$0 = \int d^3x \left[\frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \Psi^l(\mathbf{x}, t)} \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)} \frac{d}{dt} \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t) \right], \quad (7.3.9)$$

Поэтому для произвольных полей (удовлетворяющих или не удовлетворяющих полевым уравнениям) вариация действия равна

$$\delta I = i \int dt \int d^3x \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)} \dot{\epsilon}(t) \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.10)$$

Сравнивая это с формулой (7.3.4), получаем:

$$F = -i \int d^3x \frac{\delta L[\Psi(t), \dot{\Psi}(t)]}{\delta \dot{\Psi}^l(\mathbf{x}, t)} \mathcal{F}^l(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.11)$$

Используя условие симметрии (7.3.9), читатель может легко убедиться, что полученная величина F действительно не зависит от времени для любых полей, удовлетворяющих динамическим уравнениям (7.2.2).

Другие преобразования симметрии, например, изоспиновые вращения, оставляют инвариантными не только действие и лагранжиан, но и плотность лагранжиана. В таких случаях можно продвинуться еще дальше и записать явную формулу для тока $J^\mu(x)$ *. Если представить действие в виде интеграла от плотности лагранжиана, как в (7.2.6), то вариация действия при преобразовании (7.3.3) с произвольным бесконечно малым параметром $\epsilon(x)$ имеет вид

* Явную формулу для тока $J^\mu(x)$ можно написать и в общем случае. В этом и состоит конструктивное содержание теоремы Нетер. Именно, при общем преобразовании симметрии (7.3.1) плотность лагранжиана $\mathcal{L}(\psi(x), \partial\psi(x)/\partial x^\mu)$ изменяется на полную дивергенцию, $\delta \mathcal{L} = i \partial_\mu (\epsilon \Sigma^\mu(x))$, откуда, при постоянном ϵ , следует явный вид сохраняющегося нетеровского тока:

$$J^\mu(x) = i \left(\Sigma^\mu(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi^l/\partial x^\mu)} \mathcal{F}^l \right).$$

— Прим. ред.

$$\delta I[\Psi] = i \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial \Psi^l(x)} \mathcal{F}^l(x) \varepsilon(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial (\partial_\mu \Psi^l(x))} \partial_\mu (\mathcal{F}^l(x) \varepsilon(x)) \right]. \quad (7.3.12)$$

Из инвариантности плотности лагранжиана при постоянном ε следует, что

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial \Psi^l(x)} \mathcal{F}^l(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial (\partial_\mu \Psi^l(x))} \partial_\mu \mathcal{F}^l(x), \quad (7.3.13)$$

так что для произвольных полей эта вариация имеет вид

$$\delta I[\Psi] = i \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))}{\partial (\partial_\mu \Psi^l(x))} \partial_\mu \varepsilon(x). \quad (7.3.14)$$

Сравнение с (7.3.4) показывает, что *

$$J^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Psi^l / \partial x^\mu)} \mathcal{F}^l. \quad (7.3.15)$$

С помощью условия симметрии (7.3.13) нетрудно показать, что если поля удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа (7.2.9), то выполняется равенство $\partial_\mu J^\mu = 0$. Заметим также, что интеграл от временной компоненты тока (7.3.15) имеет ранее полученное значение (7.3.11).

До сих пор все сказанное было применимо как для классической, так и для квантово-механической теорий поля. Квантовые свойства сохраняющихся величин F проще всего видны для симметрий функции Лагранжа (не обязательно лагранжиана), преобразующих канонические поля $Q^n(\mathbf{x}, t)$ (т. е. те из полей Ψ^l , производные по времени от которых входят в функцию Лагранжа) в зависящие

* Ср. с выражением в примечании на с. 409 при $\Sigma^\mu = 0$. — *Прим. ред.*

от \mathbf{x} функционалы от самих этих полей в тот же момент времени. При таких преобразованиях

$$\mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^n[Q(t); \mathbf{x}]. \quad (7.3.16)$$

Как мы увидим, бесконечно малые пространственные трансляции и вращения, а также все бесконечно малые преобразования внутренних симметрий имеют вид (7.3.1), (7.3.16), где \mathcal{F}^n — линейный функционал от Q^m . Однако в данный момент не потребуются предположение, что симметрия линейна. Для всех подобных симметрий оператор F не только сохраняется. В рамках квантовой механики он также действует как *генератор* такой симметрии.

Чтобы увидеть это, прежде всего заметим, что в случае, когда Ψ^i есть каноническое поле Q^n , функциональная производная $\delta\mathcal{L}/\delta\Psi^i$ равна канонически сопряженному импульсу P_n , тогда как если Ψ^i есть вспомогательное поле C^r , эта функциональная производная равна нулю. Поэтому можно переписать (7.3.11) в виде:

$$F = -i \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t) = -i \int d^3x \int d^3y P_n(\mathbf{x}, t) \mathcal{F}^n[Q(t); \mathbf{x}]. \quad (7.3.17)$$

Чтобы вычислить коммутатор (но не антикоммутатор) F с каноническим полем $Q^m(\mathbf{x}, t)$ в произвольный момент времени t , достаточно сослаться на закон сохранения (7.3.6), согласно которому в (7.3.17) можно подставлять Q и P в произвольный момент времени t , а затем использовать канонические коммутационные соотношения при равных временах (7.1.30)–(7.1.32). В результате получаем*:

$$[F, Q^n(\mathbf{x}, t)]_- = -\mathcal{F}^n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.18)$$

Именно в этом смысле F является генератором преобразования (7.3.16). Из формулы (7.3.17) и канонических коммутационных соотношений следует также, что

* Мы предполагаем, что для бозонных или фермионных Q^n вариация \mathcal{F}^n также является, соответственно, бозонной или фермионной, так что F — бозонный оператор. Единственным исключением являются так называемые суперсимметрии, для которых F — фермионный оператор. Тогда, если Q^n — фермионный оператор, то в левой части (7.3.18) стоит антикоммутатор.

$$[F, P_n(\mathbf{x}, t)]_- = \int d^3y P_m(\mathbf{y}, t) \frac{\delta F^m(Q(t); \mathbf{y})}{\delta Q^n(\mathbf{x}, t)}. \quad (7.3.19)$$

Если F^m линеен, то из (7.3.19) вытекает, что P_n преобразуется контраградиентно по отношению к Q^n .

В качестве первого примера преобразования симметрии рассмотрим пространственно-временные трансляции

$$\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x + \varepsilon) = \Psi^l(x) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \Psi^l(x). \quad (7.3.20)$$

Оно имеет вид (7.3.1) с четырьмя независимыми параметрами ε^μ и соответствующими четырьмя функциями преобразования

$$\mathcal{F}_\mu^l = -i \partial_\mu \Psi^l. \quad (7.3.21)$$

Как следствие имеем четыре независимых сохраняющихся тока, которые принято объединять в *тензор энергии-импульса* T^μ_ν :

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0. \quad (7.3.22)$$

Отсюда можно вывести выражения для не зависящих от времени величин, равных интегралам по пространству от временных компонент отвечающих трансляциям «токов» (не путать с канонически сопряженными полевыми переменными $P_n(\mathbf{x}, t)$):

$$P_\nu = \int d^3x T^0_\nu, \quad (7.3.23)$$

$$\frac{d}{dt} P_\nu = 0. \quad (7.3.24)$$

Лагранжиан инвариантен относительно пространственных трансляций, так что в соответствии с изложенными выше общими результатами можно сделать вывод, что пространственные компоненты P_ν имеют вид

$$\mathbf{P} \equiv - \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) \nabla Q^n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.25)$$

Используя одновременные коммутационные соотношения (7.1.30)–(7.1.32) находим коммутаторы этого оператора с каноническими переменными — полями и сопряженными им импульсами:

$$[\mathbf{P}, Q^n(\mathbf{x}, t)] = i\nabla Q^n(\mathbf{x}, t), \quad (7.3.26)$$

$$[\mathbf{P}, P_n(\mathbf{x}, t)] = i\nabla P_n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.27)$$

Отсюда следует, что для любой функции \mathcal{G} от Q и P , которая не зависит явно от \mathbf{x} , выполнено равенство

$$[\mathbf{P}, \mathcal{G}(x)] = i\nabla \mathcal{G}(x). \quad (7.3.28)$$

Эти результаты показывают, что \mathbf{P} действительно является оператором пространственных трансляций.

В противоположность этому, трансляции по времени не оставляют лагранжиан $L(t)$ инвариантным. Однако мы уже знаем вид генератора временных трансляций. Это гамильтониан $P^0 \equiv H$, который, как известно, удовлетворяет коммутационному соотношению

$$[H, \mathcal{G}(\mathbf{x}, t)] = -i\dot{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.29)$$

для любой функции \mathcal{G} от гейзенберговских операторов.

Если предположить далее, что лагранжиан равен интегралу от плотности лагранжиана, то можно получить явную формулу для тензора энергии-импульса T^μ_ν . Однако плотность лагранжиана $\mathcal{L}(x)$ неинвариантна относительно пространственно-временных трансляций, так что в этом случае нельзя использовать формулу (7.3.15). Вместо этого заметим, что при трансляции, зависящей от пространственно-временной точки,

$$\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x + \varepsilon(x)) = \Psi^l(x) + \varepsilon^\mu(x) \partial_\mu \Psi^l(x), \quad (7.3.30)$$

изменение действия имеет вид

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^l} \varepsilon^\mu \partial_\mu \Psi^l + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi^l)} \partial_\nu [\varepsilon^\mu \partial_\mu \Psi^l] \right). \quad (7.3.31)$$

В силу уравнений Эйлера–Лагранжа (7.2.9) слагаемые, пропорциональные ϵ , собираются в выражение $^* \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$, так что

$$\delta I[\Psi] = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \epsilon^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi^l)} \partial_\mu \Psi^l \partial_\nu \epsilon^\mu \right). \quad (7.3.32)$$

Интегрируя по частям, видим, что это соотношение принимает форму (7.3.4):

$$\delta I = - \int d^4x T^\nu{}_\mu \partial_\nu \epsilon^\mu, \quad (7.3.33)$$

где «токи» имеют вид ** :

$$T^\nu{}_\mu = \delta_\mu^\nu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi^l)} \partial_\mu \Psi^l. \quad (7.3.34)$$

В качестве проверки заметим, что пространственные компоненты интегралов движения (7.3.23) совпадают с нашей прежней формулой (7.3.25) для \mathbf{P} , а для $\mu = 0$ формула (7.3.23) приводит к обычному выражению для гамильтониана:

$$H \equiv -P_0 = \int d^3x \left[\sum_n P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L} \right]. \quad (7.3.35)$$

(Предупреждение: тензор $T^{\mu\nu}$, полученный поднятием индекса в (7.3.34), в общем случае несимметричен, и поэтому не может

* Здесь, видимо, недоразумение: слагаемые, пропорциональные ϵ , собираются в выражение $\epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$, где ∂_μ символизирует полную производную $\mathcal{L}(x)$ как сложной функции x , *безотносительно* к уравнениям движения (7.2.9). Если же воспользоваться этими уравнениями с самого начала, то подинтегральное выражение собирается в полную дивергенцию

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^l} \epsilon^\mu \partial_\mu \Psi^l \right),$$

и вариация δI исчезает, как и положено. — *Прим. ред.*

** Этот вид нетеровских токов $T^\nu{}_\mu$ непосредственно следует из теоремы Нетер в той формулировке, которая дана в прим. ред. на с. 409. Достаточно заметить, что при трансляциях с постоянным ϵ^μ вариация \mathcal{L} имеет вид полной дивергенции: $\delta \mathcal{L} = \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu (\epsilon^\mu \mathcal{L}) = \partial_\nu (\epsilon^\mu \delta_\mu^\nu \mathcal{L})$. — *Прим. ред.*

входить в правую часть полевых уравнений общей теории относительности. Правильный симметричный тензор энергии-импульса $\Theta^{\mu\nu}$, который можно использовать как источник гравитационного поля, вводится в следующем разделе.)

Во многих теориях имеется один или несколько дополнительных принципов симметрии, утверждающих инвариантность действия относительно некоторых линейных не зависящих от координат преобразований как канонических полей

$$Q^n(x) \rightarrow Q^n(x) + i\varepsilon^a (t_a)^n_m Q^m(x), \quad (7.3.36)$$

так и любых вспомогательных полей C^r :

$$C^r(x) \rightarrow C^r(x) + i\varepsilon^a (\tau_a)^r_s C^s(x). \quad (7.3.37)$$

Здесь t_a и τ_a – наборы эрмитовых матриц, реализующих некоторые представления алгебры Ли группы симметрии, и подразумевается суммирование по повторяющимся групповым индексам a, b , и т. д. (Например, подобная симметрия существует в электродинамике, когда единственная матрица t^n_m диагональна, причем на главной диагонали стоят заряды соответствующего поля.) Каждая такая симметрия порождает свой набор сохраняющихся токов J_a^μ :

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad (7.3.38)$$

временные компоненты которых являются плотностями не зависящих от времени операторов

$$T_a = \int d^3x J_a^0. \quad (7.3.39)$$

Если не только действие, но и лагранжиан инвариантны относительно преобразований (7.3.36), то из (7.3.11) вытекает явная формула для T_a :

$$T_a = -i \int d^3x P_n(\mathbf{x}, t) (t_a)^n_m Q^m(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.40)$$

Тогда из одновременных коммутационных соотношений следует, что

$$[T_a, Q^n(x)] = -(t_a)^n_m Q^m(x), \quad (7.3.41)$$

$$[T_a, P_n(x)] = -(t_a)^m_n P_m(x). \quad (7.3.42)$$

(В случае, когда оператор t_a диагонален, отсюда следует, что операторы Q^n и P_n , соответственно, понижают и повышают значение T_a на величину, равную n -ому диагональному элементу t_a .) Эти формулы позволяют вычислить коммутаторы генераторов друг с другом:

$$[T_a, T_b]_- = i \int d^3x \left[-P_m(t_a)^m_n (t_b)^n_k Q^k + P_n(t_b)^n_k (t_a)^k_m Q^m \right]. \quad (7.3.43)$$

Соответственно, если матрицы t_a образуют алгебру Ли со структурными константами f_{ab}^c ,

$$[t_a, t_b]_- = if_{ab}^c t_c, \quad (7.3.44)$$

это же верно и для квантовых операторов T_a :

$$[T_a, T_b]_- = if_{ab}^c T_c. \quad (7.3.45)$$

Этот результат подтверждает правильную нормировку операторов (7.3.40) как генераторов группы симметрии.

Если лагранжиан есть интеграл от плотности лагранжиана, которая инвариантна относительно преобразований (7.3.36) и (7.3.37), можно продвинуться дальше и получить с помощью (7.3.15) явные формулы для токов, соответствующих этим глобальным симметриям:

$$J_a^\mu \equiv -i \frac{\partial L}{\partial(\partial Q^n / \partial x^\mu)} (t_a)^n_m Q^m - i \frac{\partial L}{\partial(\partial C^r / \partial x^\mu)} (\tau_a)^r_s C^s. \quad (7.3.46)$$

В качестве иллюстрации предположим, что у нас имеется два действительных скалярных поля равной массы с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \Phi_1^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \Phi_2^2 - H(\Phi_1^2 + \Phi_2^2). \quad (7.3.47)$$

Она инвариантна относительно линейного преобразования вида (7.3.36):

$$\delta\Phi_1 = -\epsilon\Phi_2, \quad \delta\Phi_2 = +\epsilon\Phi_1,$$

так что существует сохраняющийся ток (7.3.46)

$$J^\mu = \Phi_2 \partial^\mu \Phi_1 - \Phi_1 \partial^\mu \Phi_2.$$

Явную формулу (7.3.46) для тока можно использовать для вывода других полезных коммутационных соотношений. В частности, поскольку плотность лагранжиана не содержит производных по времени от вспомогательных полей, имеем:

$$J_a^0 = -iP_n(t_a)^n{}_m Q^m. \quad (7.3.48)$$

Поэтому можно получить одновременные коммутаторы канонических полей и сопряженных им импульсов не только с генераторами симметрии T_a , но и с плотностями J_a^0 :

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), Q^n(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})(t_a)^n{}_m Q^m(\mathbf{x}, t), \quad (7.3.49)$$

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), P_m(\mathbf{y}, t)] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})(t_a)^n{}_m P_n(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.50)$$

Если вспомогательные поля построены как локальные функции от P и Q таким образом, что они преобразуются по представлению алгебры симметрии с генераторами τ_a , то для них

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), C^r(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\tau_a)^r{}_s C^s(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.51)$$

Мы часто будем объединять (7.3.49) и (7.3.51) в одно коммутационное соотношение

$$[J_a^0(\mathbf{x}, t), \Psi^l(\mathbf{y}, t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})(t_a)^l{}_r \Psi^r(\mathbf{x}, t). \quad (7.3.52)$$

В гл. 10 коммутационные соотношения вида (7.3.49)–(7.3.51) будут использованы для вывода соотношений, известных как тождества Уорда, для матричных элементов операторов, включающих ток J^μ .

7.4. Лоренцевская инвариантность

Мы собираемся теперь показать, что лоренц-инвариантность плотности лагранжиана влечет за собой лоренц-инвариантность S -матрицы. Рассмотрим бесконечно малое преобразование Лоренца

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (7.4.1)$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (7.4.2)$$

Согласно проведенному в предыдущем разделе анализу, инвариантность действия относительно таких преобразований немедленно влечет существование набора сохраняющихся «токов» $\mathcal{H}^{\rho\mu\nu}$:

$$\partial_\rho \mathcal{H}^{\rho\mu\nu} = 0, \quad (7.4.3)$$

$$\mathcal{H}^{\rho\mu\nu} = -\mathcal{H}^{\rho\nu\mu}, \quad (7.4.4)$$

по одному току на каждую независимую компоненту $\omega_{\mu\nu}$. Интегралы от временных компонент этих «токов» дают набор не зависящих от времени тензоров:

$$J^{\mu\nu} \equiv \int d^3x \mathcal{H}^{0\mu\nu}, \quad (7.4.5)$$

$$\frac{d}{dt} J^{\mu\nu} = 0. \quad (7.4.6)$$

Окажется, что величины $J^{\mu\nu}$ являются генераторами однородной группы Лоренца.

Хотелось бы получить явные формулы для тензора $\mathcal{H}^{\rho\mu\nu}$, однако преобразования Лоренца действуют на координаты и поэтому не могут оставить инвариантной плотность лагранжиана*.

* Для сравнения укажем, что формулировка теоремы Нетер, приведенная в прим. ред. на с. 409, немедленно приводит к результату. Достаточно заметить, что вариация \mathcal{L} , отвечающая бесконечно малым преобразованиям Лоренца $\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, имеет вид полной дивергенции:

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\omega^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L} \right). \quad \text{— Прим. ред.}$$

Следовательно нельзя сразу же воспользоваться результатами предыдущего раздела. Однако трансляционная инвариантность позволяет сформулировать лоренцевскую инвариантность как симметрию плотности лагранжиана только относительно некоторых преобразований полей и их производных*. Поля испытывают матричное преобразование

$$\delta\Psi^l = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^l{}_m \Psi^m, \quad (7.4.7)$$

где $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ — набор матриц, удовлетворяющих соотношениям алгебры однородной группы Лоренца:

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\rho\sigma}] = i\mathcal{J}_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma} - i\mathcal{J}_{\sigma\nu}\eta_{\mu\rho} - i\mathcal{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} + i\mathcal{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}. \quad (7.4.8)$$

Например, для скалярного поля ϕ имеем $\delta\phi = 0$, так что $\mathcal{J}_{\mu\nu} = 0$, в то время, как для неприводимого поля типа (A, B)

$$\mathcal{J}_{ij} = \varepsilon_{ijk}(\mathcal{A}_k + \mathcal{B}_k), \quad \mathcal{J}_{k0} = -i(\mathcal{A}_k - \mathcal{B}_k),$$

где \mathcal{A} и \mathcal{B} — спиновые матрицы для спина A и B , соответственно. Специально отметим, что для ковариантного векторного поля $\delta V_\kappa = \omega_\kappa{}^\lambda V_\lambda$, так что

$$(\mathcal{J}_{\rho\sigma})_\kappa{}^\lambda = -i\eta_{\rho\kappa}\delta_\sigma{}^\lambda + i\eta_{\sigma\kappa}\delta_\rho{}^\lambda.$$

Производная поля, преобразующегося по закону (7.4.7), сама преобразуется как другое такое поле, но с лишним векторным индексом:

$$\delta(\partial_\kappa \Psi_l) = \frac{1}{2}i\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^l{}_m \partial_\kappa \Psi^m + \omega_\kappa{}^\lambda \partial_\lambda \Psi_l. \quad (7.4.9)$$

Предполагается, что плотность лагранжиана инвариантна относительно совместных преобразований (7.4.7) и (7.4.9), так что

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi'} \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^l{}_m \Psi^m + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa \Psi')} \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathcal{J}_{\mu\nu})^l{}_m \partial_\kappa \Psi^m + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa \Psi')} \omega_\kappa{}^\lambda \partial_\lambda \Psi^l.$$

* Не затрагивающих координат. — Прим. ред.

Полагая равным нулю коэффициент при $\omega^{\mu\nu}$, находим:

$$0 = \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi'} (\mathcal{J}_{\mu\nu})^l{}_m \Psi^m + \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\kappa \Psi')} (\mathcal{J}_{\mu\nu})^l{}_m \partial_\kappa \Psi^m \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\kappa \Psi')} (\eta_{\kappa\mu} \partial_\nu - \eta_{\kappa\nu} \partial_\mu) \Psi^l.$$

Используя уравнения Эйлера–Лагранжа (7.2.9) и нашу формулу (7.3.34) для тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, можно записать последнюю формулу как

$$0 = \partial_\kappa \left[\frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\kappa \Psi')} (\mathcal{J}_{\mu\nu})^l{}_m \Psi^m \right] - \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (7.4.10)$$

Она немедленно подсказывает определение нового тензора энергии-импульса, известного как *тензор Белинфанте*²:

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \partial_\kappa \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\kappa \Psi^l)} (\mathcal{J}^{\mu\nu})^l{}_m \Psi^m \right. \\ \left. - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^l)} (\mathcal{J}^{\kappa\nu})^l{}_m \Psi^m - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi^l)} (\mathcal{J}^{\kappa\mu})^l{}_m \Psi^m \right]. \quad (7.4.11)$$

Величина в квадратных скобках явно антисимметрична по μ и κ , так что $\Theta^{\mu\nu}$ удовлетворяет тому же закону сохранения, что и $T^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (7.4.12)$$

По той же причине, когда мы полагаем $\mu = 0$ в (7.4.11), индекс κ принимает значения, отвечающие только пространственным компонентам, поэтому после интегрирования по всему пространству слагаемые с производными выпадают:

$$\int \Theta^{0\nu} d^3x = \int T^{0\nu} d^3x = P^\nu, \quad (7.4.13)$$

где $P^0 \equiv H$. Таким образом, наряду с $T^{\mu\nu}$, тензор $\Theta^{\mu\nu}$ также можно рассматривать как тензор энергии-импульса. Однако из (7.4.10)

следует, что тензор Белинфанте $\Theta^{\mu\nu}$, в отличие от тензора $T^{\mu\nu}$, не только сохраняется, но и симметричен:

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}. \quad (7.4.14)$$

Именно $\Theta^{\mu\nu}$, а не $T^{\mu\nu}$, выступает как источник гравитационного поля.³ Как следствие симметрии $\Theta^{\mu\nu}$, можно построить еще одну сохраняющуюся тензорную плотность

$$\mathcal{H}^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu \Theta^{\lambda\nu} - x^\nu \Theta^{\lambda\mu}. \quad (7.4.15)$$

Она сохраняется в том смысле, что

$$\partial_\lambda \mathcal{H}^{\lambda\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} = 0. \quad (7.4.16)$$

Таким образом, лоренцовская инвариантность позволяет определить еще один не зависящий от времени тензор

$$J^{\mu\nu} = \int \mathcal{H}^{0\mu\nu} d^3x = \int d^3x (x^\mu \Theta^{0\nu} - x^\nu \Theta^{0\mu}). \quad (7.4.17)$$

Генератор вращений $J_k = \varepsilon_{ijk} J^{ij}/2$ не просто не зависит от времени, но не имеет *явной* зависимости от времени, поэтому он коммутирует с гамильтонианом:

$$[H, \mathbf{J}] = 0. \quad (7.4.18)$$

Кроме того, применяя (7.3.28) к функции $\Theta^{0\nu}$, находим

$$\begin{aligned} [P_j, J_k] &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ilk} [P_j, J^{lk}] = \frac{i}{2} \varepsilon_{ilk} \int d^3x \left(x^l \frac{\partial}{\partial x^j} \Theta^{0k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^j} \Theta^{0l} \right) \\ &= -\varepsilon_{ijk} \int d^3x \Theta^{0k} \end{aligned}$$

и поэтому

$$[P_j, J_i] = -i \varepsilon_{ijk} P_k. \quad (7.4.19)$$

С другой стороны, генератор «буста» $K_k \equiv J^{k0}$ хотя и не зависит от времени, но явно содержит временную координату:

$$K_k = \int d^3x (x^k \Theta^{00} - x^0 \Theta^{0k}),$$

или подробнее

$$\mathbf{K} = -t\mathbf{P} + \int d^3x \mathbf{x} \Theta^{00}(\mathbf{x}, t). \quad (7.4.20)$$

Так как эта величина постоянна, имеем $0 = \dot{\mathbf{K}} = -\dot{\mathbf{P}} + i[H, \mathbf{K}]$, откуда

$$[H, \mathbf{K}] = -i\dot{\mathbf{P}}. \quad (7.4.21)$$

Кроме того, еще раз применяя (7.3.28), находим:

$$[P_j, K_k] = i \int d^3x x^k \frac{\partial}{\partial x^j} \Theta^{00} = -i\delta_{jk} \int d^3x \Theta^{00}$$

и поэтому

$$[P_j, K_k] = -i\delta_{jk} H. \quad (7.4.22)$$

Для любой разумной плотности лагранжиана оператор (7.4.20) будет «гладким» в смысле раздела 3.3, т. е. члены взаимодействия в $e^{iH_0 t} \int d^3x \mathbf{x} \Theta^{00}(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0 t}$ обращаются в нуль* при $t \rightarrow \pm\infty$. (Заметим, что члены взаимодействия в $e^{iH_0 t} \int d^3x \mathbf{x} \Theta^{00}(\mathbf{x}, 0) e^{-iH_0 t}$ должны обращаться в нуль при $t \rightarrow \pm\infty$ для того, чтобы можно было ввести понятия «ин» и «аут» состояний и S -матрицы.) С учетом предположения о гладкости и коммутационных соотношений (7.4.21) можно повторить аргументы раздела 3.3 и заключить, что S -матрица лоренц-инвариантна.

* * *

Те же аргументы были использованы в разделе 3.3, чтобы убедиться, что остающиеся коммутационные соотношения группы Лоренца для компонент $J^{\mu\nu}$ друг с другом имеют нужный вид. Это можно

* Когда говорят, что какой-то оператор в представлении взаимодействия обращается в нуль при $t \rightarrow \pm\infty$, подразумевается, что в этом пределе обращаются в нуль матричные элементы этого оператора между состояниями, являющимися гладкими суперпозициями собственных состояний оператора энергии.

проверить и непосредственно для коммутаторов генераторов вращений, которые имеют вид

$$J^{ij} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \Psi^l} (x^i \partial_j \Psi^l - x^j \partial_i \Psi^l - i(g^{ij})^l_m \Psi^m). \quad (7.4.23)$$

Так как плотность лагранжиана не зависит от производных по времени вспомогательных полей, а генераторы вращений не смешивают канонические и вспомогательные поля, можно записать это выражение как сумму только по каноническим полям:

$$J^{ij} = \int d^3x P_n (x^i \partial_j Q^n - x^j \partial_i Q^n - i(g^{ij})^n_{n'} \Psi^{n'}). \quad (7.4.24)$$

Тогда из канонических коммутационных соотношений немедленно вытекает, что

$$[J^{ij}, Q^n(x)]_- = -i(x_i \partial_j - x_j \partial_i) Q^n(x) - (g^{ij})^n_{n'} Q^{n'}(x), \quad (7.4.25)$$

$$[J^{ij}, P_n(x)]_- = -i(x_i \partial_j - x_j \partial_i) P_n(x) + (g^{ij})^n_{n'} P_{n'}(x), \quad (7.4.26)$$

Эти результаты можно использовать для вывода обычных коммутационных соотношений J^{ij} друг с другом и с остальными генераторами*. Если нет никаких вспомогательных полей, те же аргументы можно использовать и для генераторов «буста», завершив тем самым доказательство, что P^μ и $J^{\mu\nu}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям неоднородной группы Лоренца. Однако матрицы «буста» J^{i0} в общем случае перемешивают канонические и вспомогательные поля (так же, как в случае компонент V^i и V^0 векторного поля), поэтому прямое доказательство коммутационных соотношений J^{i0} друг с другом приходится проводить отдельно в каждом случае. К счастью, это не требуется для приведенного в разделе 3.3 доказательства лоренц-инвариантности S -матрицы.

* Кроме того, поскольку операторы J^{ij} коммутируют с H и $P_n \dot{Q}^n$, они коммутирует с \mathcal{L} . Таким образом, коммутатор J^{ij} со вспомогательными полями должен быть совместим с инвариантностью \mathcal{L} относительно вращений.

7.5. Переход к представлению взаимодействия. Примеры

В конце раздела 7.2 мы показали, как можно использовать лагранжиан простой теории скалярного поля для вывода структуры взаимодействия и тех свободных полей, которые содержатся в нем в представлении взаимодействия. Обратимся к более сложным и поучительным примерам.

Скалярное поле. Связь с производной

Прежде всего, рассмотрим скалярное поле, но на этот раз с взаимодействием с производными. Выберем лагранжиан в виде:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - J^\mu \partial_\mu \Phi - \mathcal{H}(\Phi), \quad (7.5.1)$$

где J^μ – либо с-числовой внешний ток (не имеющий отношения к введенным выше токам J^μ), либо функционал от некоторых других, отличных от Φ , полей (в этом случае к (7.5.1) следует добавить слагаемые, содержащие эти поля). Канонически сопряженный к полю Φ импульс имеет вид

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi} - J^0, \quad (7.5.2)$$

а гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x [\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}] \\ &= \int d^3x \left[\Pi(\Pi + J^0) + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{2} (\Pi + J^0)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathbf{J} \cdot \nabla \Phi + J^0 (\Pi + J^0) + \mathcal{H}(\Phi) \right]. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые, можно записать его в виде

$$H = H_0 + V, \quad (7.5.3)$$

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right], \quad (7.5.4)$$

$$V = \int d^3x \left[\Pi J^0 + \mathbf{J} \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} (J^0)^2 + \mathcal{H}(\Phi) \right]. \quad (7.5.5)$$

Как объяснялось в разделе 7.2, переход к представлению взаимодействия осуществляется простой заменой Π и Φ на π и ϕ (аналогично следует поступить и для всех полей, входящих в ток J^μ , но мы не будем это явно выписывать):

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathbf{x}, t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\mathbf{x}, t) \right], \quad (7.5.6)$$

$$V(t) = \int d^3x \left[\pi(\mathbf{x}, t) J^0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} (J^0(\mathbf{x}, t))^2 + \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, t)) \right]. \quad (7.5.7)$$

Гамильтониан свободных частиц совпадает с (7.2.25) и приводит, как и в разделе 7.2, к уравнениям (7.2.26)–(7.2.35). Какой бы ни был полный гамильтониан, мы *должны* выделить в нем слагаемое (7.5.6), называемое гамильтонианом свободных частиц, а оставшуюся часть считать взаимодействием, поскольку, как мы видели, именно эта форма гамильтониана свободных частиц приводит к правильному разложению (7.2.29) скалярного поля по операторам рождения и уничтожения, удовлетворяющим коммутационным соотношениям (7.2.34), (7.2.35). Заключительный шаг состоит в замене π в гамильтониане взаимодействия на его значение $\dot{\phi}$ в представлении взаимодействия (но не на его значение $\dot{\phi} - J^0$ в гейзенберговском представлении):

$$V(t) = \int d^3x \left[J^\mu(\mathbf{x}, t) \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} (J^0(\mathbf{x}, t))^2 + \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, t)) \right]. \quad (7.5.8)$$

Как мы видели в разделе 6.2, дополнительное неинвариантное слагаемое в (7.5.8) необходимо для сокращения неинвариантного слагаемого в пропагаторе поля $\bar{\delta}\phi$.

Векторное поле, спин единица

Аналогичные результаты получаются при каноническом квантовании векторного поля V^μ для частицы спина единица. Не будем

вводить сначала никаких ограничений и запишем лагранжиан в достаточно общей форме

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\alpha\partial_\mu V_\nu\partial^\mu V^\nu - \frac{1}{2}\beta\partial_\mu V_\nu\partial^\nu V^\mu - \frac{1}{2}m^2V_\mu V^\mu - J_\mu V^\mu, \quad (7.5.9)$$

где α , β и m^2 — пока что произвольные константы, а J^μ — либо с-числовой внешний ток, либо оператор, зависящий от полей, отличных от V^μ (в этом случае в \mathcal{L} следует добавить слагаемые, содержащие эти поля). Полевые уравнения Эйлера–Лагранжа для V_μ имеют вид

$$\alpha\Box V^\nu + \beta\partial^\nu(\partial_\mu V^\mu) + m^2V^\nu = -J^\nu.$$

После взятия дивергенции получаем

$$(\alpha + \beta)\Box\partial_\lambda V^\lambda + m^2\partial_\lambda V^\lambda = -\partial_\lambda J^\lambda. \quad (7.5.10)$$

Это уравнение для обычного скалярного поля массой $m^2/(\alpha+\beta)$ с источником $\partial_\lambda J^\lambda/(\alpha+\beta)$. Мы хотим описать теорию, содержащую только частицы спина единица, но не спина нуль. Поэтому, чтобы избежать появления $\partial_\lambda V^\lambda$ как независимо распространяющегося скалярного поля, нужно выбрать $\alpha = -\beta$. Тогда $\partial_\lambda V^\lambda$ можно выразить через внешний ток или другие поля в виде $-\partial_\lambda J^\lambda/m^2$. Константу α можно включить в нормировку поля V_μ , так что положим $\alpha = -\beta = 1$. В результате получим:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2V_\mu V^\mu - J_\mu V^\mu, \quad (7.5.11)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \quad (7.5.12)$$

Производная лагранжиана по производной по времени векторного поля имеет вид

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{V}^\mu} = -F^{0\mu}. \quad (7.5.13)$$

Это выражение не равно нулю, если μ принимает пространственные значения i , так что V^i являются каноническими полями, а сопряженные им импульсы имеют вид

$$\Pi^i = F^{i0} = \dot{V}^i + \partial_i V^0. \quad (7.5.14)$$

С другой стороны, $F^{00} = 0$, так что \dot{V}^0 не входит в лагранжиан. Поэтому V^0 является вспомогательным полем. Это не приводит к особым трудностям: обращение в нуль $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{V}^0$ означает, что полевое уравнение для V^0 не содержит вторых производных, и поэтому может использоваться как связь, исключая некоторую полевую переменную*. Конкретно, уравнение Эйлера–Лагранжа при $\mathbf{v} = 0$ имеет вид

$$\partial_i F^{i0} = m^2 V^0 + J^0, \quad (7.5.15)$$

так что с помощью (7.5.14) находим

$$V^0 = \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \mathbf{\Pi} - J^0). \quad (7.5.16)$$

Вычислим теперь гамильтониан $H = \int d^3x (\mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{V}} - \mathcal{L})$ в этой теории. В силу уравнения (7.5.14) можно записать $\dot{\mathbf{V}}$ через $\mathbf{\Pi}$ и J^0 :

$$\dot{\mathbf{V}} = -\nabla V^0 + \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} - \frac{1}{m^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{\Pi} - J^0),$$

так что

$$\begin{aligned} H = \int d^3x & \left[\mathbf{\Pi}^2 + m^{-2} (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) (\nabla \cdot \mathbf{\Pi} - J^0) - \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{V}^2 - m^{-2} (\nabla \cdot \mathbf{\Pi} - J^0)^2 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} - m^{-2} J^0 (\nabla \cdot \mathbf{\Pi} - J^0) \right]. \end{aligned}$$

Вновь мы разбиваем это выражение на слагаемое H_0 , отвечающее свободным частицам, и взаимодействие V :

$$H = H_0 + V, \quad (7.5.17)$$

и переходим к представлению взаимодействия, заменяя величины в гейзенберговском представлении \mathbf{V} и \mathbf{P} на их аналоги в представлении взаимодействия \mathbf{v} и \mathbf{p} (так же следует поступить для всех полей и сопряженных им импульсов, входящих в \mathcal{J}^μ , хотя мы не выписываем этого явно):

* В контексте лагранжева и гамильтонова формализма английскому термину *constraint* соответствует русский термин *связь*. — Прим. пер.

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})^2 + \frac{m^2}{2} \mathbf{v}^2 \right], \quad (7.5.18)$$

$$V = \int d^3x \left[\mathbf{J} \cdot \mathbf{v} - m^{-2} J^0 \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2m^2} (J^0)^2 \right]. \quad (7.5.19)$$

Тогда \mathbf{v} и $\boldsymbol{\pi}$ связаны соотношением

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\delta H_0(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})}{\delta \boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - m^{-2} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) \quad (7.5.20)$$

а «полевые уравнения» имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = - \frac{\delta H_0(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})}{\delta \mathbf{v}} = +\nabla^2 \mathbf{v} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - m^2 \mathbf{v}. \quad (7.5.21)$$

Поскольку V^0 не является независимой полевой переменной, она не связана преобразованием подобия ни с каким объектом v^0 в представлении взаимодействия. Напротив, мы можем *ввести* величину

$$v^0 \equiv m^{-2} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}. \quad (7.5.22)$$

Тогда с помощью формулы (7.5.20) можно записать $\boldsymbol{\pi}$ в виде

$$\boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{v}} + \nabla v^0. \quad (7.5.23)$$

Подставляя это выражение в (7.5.22) и (7.5.21), получаем полевые уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 v^0 + \nabla \cdot \dot{\mathbf{v}} - m^2 v^0 &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \ddot{\mathbf{v}} - \nabla \dot{v}_i^0 - m^2 \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Их можно записать в ковариантной форме

$$\square v^\mu - \partial^\mu \partial_\nu v^\nu - m^2 v^\mu = 0. \quad (7.5.24)$$

После взятия дивергенции получаем:

$$\partial_\mu v^\mu = 0, \quad (7.5.25)$$

следовательно,

$$(\square - m^2)v^\mu = 0. \quad (7.5.26)$$

Действительное векторное поле, удовлетворяющее уравнениям (7.5.25) и (7.5.26), можно представить в виде фурье-разложения

$$v^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int d^3p (2p^0)^{-1/2} \left\{ e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} \right\}, \quad (7.5.27)$$

где $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ при $\sigma = +1, 0, -1$ — три независимых вектора, удовлетворяющих условию

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (7.5.28)$$

и нормированных так, что

$$\sum_{\sigma} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) e^{\nu*}(\mathbf{p}, \sigma) = \eta^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu / m^2, \quad (7.5.29)$$

а $a(\mathbf{p}, \sigma)$, $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)$ — операторные коэффициенты. С помощью (7.5.23), (7.5.27) и (7.5.29) можно непосредственно убедиться, что \mathbf{v} и $\boldsymbol{\pi}$ удовлетворяют правильным коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [v^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] &= i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [v^i(\mathbf{x}, t), v^j(\mathbf{y}, t)] &= [\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] = 0, \end{aligned} \quad (7.5.30)$$

если операторы $a(\mathbf{p}, \sigma)$ и $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям вида

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')] = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}, \quad (7.5.31)$$

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a(\mathbf{p}', \sigma')] = 0. \quad (7.5.32)$$

Мы уже знаем, что векторное поле частиц спина единица должно иметь вид (7.5.27), так что представленный вывод этих результатов

служит лишь для проверки, что (7.5.18) дает правильный гамильтониан свободных массивных частиц спина единица. Легко проверить также, что (7.5.18) можно записать (с точностью до постоянного слагаемого) в стандартной форме $\sum_{\sigma} \int d^3p p^0 a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma)$ энергии свободных частиц. Наконец, пользуясь (7.5.22), можно записать выражение (7.5.19) для гамильтониана взаимодействия в представлении взаимодействия в виде

$$V(t) = \int d^3x \left[J_{\mu} v^{\mu} + \frac{1}{2m^2} (J^0)^2 \right]. \quad (7.5.33)$$

Дополнительное неинвариантное слагаемое в (7.5.33) имеет как раз тот вид, который, как мы установили в гл. 6, необходим для сокращения неинвариантного слагаемого в пропагаторе векторного поля.

Дираковское поле, спин 1/2

Для дираковского поля частицы со спином 1/2 попробуем взять лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)\Psi - \mathcal{H}(\bar{\Psi}, \Psi), \quad (7.5.34)$$

где \mathcal{H} — действительная функция $\bar{\Psi}$ и Ψ . Такое выражение не является действительным, однако действие удовлетворяет этому требованию, так как

$$\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi - (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi)^{\dagger} = \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi + (\partial_{\mu} \bar{\Psi}) \gamma^{\mu} \Psi = \partial_{\mu} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Psi).$$

Таким образом, полевые уравнения, получаемые из требования стационарности действия относительно вариаций $\bar{\Psi}$ и Ψ , являются сопряженными друг к другу. Это и требуется, если мы не хотим иметь слишком большое число уравнений поля. Импульс, канонически сопряженный к Ψ , есть

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = -\bar{\Psi} \gamma^0, \quad (7.5.35)$$

поэтому мы не должны рассматривать $\bar{\Psi}$ как поле наравне с Ψ , а считать его пропорциональным импульсу, канонически сопряженному к Ψ .

Гамильтониан имеет вид

$$H = \int d^3x [\Pi \dot{\Psi} - \mathcal{L}] = \int d^3x [\Pi \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \Psi + \mathcal{H}].$$

Запишем это выражение в виде

$$H = H_0 + V, \quad (7.5.36)$$

где

$$H_0 = \int d^3x \Pi \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \Psi, \quad (7.5.35)$$

$$V = \int d^3x H(\bar{\Psi}, \Psi). \quad (7.5.38)$$

Переходим к представлению взаимодействия. Так как (7.5.35) не содержит времени, преобразование подобия (7.1.28), (7.1.29) немедленно приводит к соотношению:

$$\pi = -\bar{\Psi} \gamma^0. \quad (7.5.39)$$

Аналогично можно записать H_0 и $V(t)$, заменив Ψ и Π на ψ и π в уравнениях (7.5.37) и (7.5.38). Отсюда приходим к уравнению движения*:

$$\dot{\psi} = \frac{\delta H_0}{\delta \pi} = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi, \quad (7.5.40)$$

или более компактно

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0. \quad (7.5.41)$$

(Другое уравнение движения, $\dot{\pi} = -\delta H_0 / \delta \psi$, просто совпадает с сопряженным к уравнению (7.5.41).) Всякое поле, удовлетворяющее уравнению (7.5.41), можно записать в виде фурье-разложения:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} \{u(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + v(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} b^\dagger(\mathbf{p}, \sigma)\}, \quad (7.5.42)$$

* Следует иметь в виду, что производные по полю ψ — левые, тогда как производные по импульсу π — правые. — *Прим. ред.*

где $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $a(\mathbf{p}, s)$ и $b^\dagger(\mathbf{p}, s)$ — операторные коэффициенты, а $u(\mathbf{p}, \pm \frac{1}{2})$ и $v(\mathbf{p}, \pm \frac{1}{2})$ — два набора из двух независимых решений уравнений

$$(i\gamma^\mu p_\mu + m)u(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (7.5.43)$$

$$(-i\gamma^\mu p_\mu + m)v(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (7.5.44)$$

соответственно, нормированных так, что *

$$\sum_{\sigma} u(\mathbf{p}, \sigma)\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{(-i\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}, \quad (7.5.45)$$

$$\sum_{\sigma} v(\mathbf{p}, \sigma)\bar{v}(\mathbf{p}, \sigma) = -\frac{(i\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}. \quad (7.5.46)$$

Чтобы получить желаемые антикоммутаторы

$$\begin{aligned} [\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}_\beta(\mathbf{y}, t)]_+ &= [\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\gamma(\mathbf{y}, t)]_+(\gamma^0)_{\gamma\beta} \\ &= i(\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (7.5.47)$$

$$[\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \Psi_\beta(\mathbf{y}, t)]_+ = 0, \quad (7.5.48)$$

следует принять антикоммутационные соотношения

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')]_+ = [b(\mathbf{p}, \sigma), b^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')]_+ = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}, \quad (7.5.49)$$

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{p}, \sigma), a(\mathbf{p}', \sigma')]_+ &= [b(\mathbf{p}, \sigma), b(\mathbf{p}', \sigma')]_+ = \\ [a(\mathbf{p}, \sigma), b(\mathbf{p}', \sigma')]_+ &= [a(\mathbf{p}, \sigma), b^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')]_+ = 0. \end{aligned} \quad (7.5.50)$$

* Матрица $i\gamma^\mu p_\mu$ имеет собственные значения $\pm m$, так что $\sum u\bar{u}$ и $\sum v\bar{v}$ должны быть пропорциональными проекционным матрицам $(-i\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$ и $(i\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$, соответственно. Коэффициент пропорциональности можно подобрать с точностью до знака, включив его в определение u и v . Общий знак определяется условием, что $\text{Tr} \sum u\bar{u}\beta = \sum u^\dagger u$ и $\text{Tr} \sum v\bar{v}\beta = \sum v^\dagger v$ положительны.

и им сопряженные. Эти соотношения согласуются с результатами гл. 5, что подтверждает правильность выражения (7.5.37) как гамильтониана свободных частиц спина 1/2. Записанный через операторы a и b , гамильтониан имеет вид:

$$H_0 = \sum_{\sigma} \int d^3p p^0 (a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)a(\mathbf{p}, \sigma) - b(\mathbf{p}, \sigma)b^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)). \quad (7.5.51)$$

Полученное выражение отличается от общепринятого гамильтониана свободных частиц на бесконечное s -числовое слагаемое*:

$$H_0 = \sum_{\sigma} \int d^3p p^0 (a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)a(\mathbf{p}, \sigma) + b^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)b(\mathbf{p}, \sigma) - \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})). \quad (7.5.52)$$

Это s -числовое слагаемое в (7.5.52) важно только тогда, когда мы учитываем гравитационные явления. В противном случае, как и для скалярного поля, можно отбросить это слагаемое, поскольку оно влияет только на выбор начала отсчета энергии. После этого H_0 оказывается положительным оператором, как и для бозонов.

7.6. Связи и скобки Дирака

Главная проблема при выводе гамильтониана из лагранжиана заключается в появлении связей. Стандартный анализ этой проблемы принадлежит Дираку⁵, и мы будем следовать его терминологии. Анализ Дирака реально не требуется для обсуждаемых в этой главе простых теорий, в которых нетрудно идентифицировать свободные от связей канонические переменные. Для иллюстрации мы будем использовать теорию действительного массивного поля, вернувшись к дираковскому подходу в следующей главе, где он окажется действительно полезным.

Первичные связи либо накладываются на систему (как например, в следующей главе, когда мы выберем калибровку электро-

* Заметим, что s -числовое слагаемое в данном случае имеет отрицательный знак. Гипотетическая симметрия, известная под названием *суперсимметрии*⁴, связывает между собой числа бозонных и фермионных полей таким образом, что все s -числовые слагаемые в H_0 взаимно сокращаются.

магнитного поля), либо возникают как следствие структуры самого лагранжиана. В качестве примера такого рода рассмотрим лагранжиан (7.5.11) массивного векторного поля V^μ , взаимодействующего с током J_μ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu - J_\mu V^\mu, \quad (7.6.1)$$

где

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \quad (7.6.2)$$

Допустим, мы пытаемся рассматривать все четыре компоненты V^μ как равноправные. Тогда мы должны определить канонически сопряженные им импульсы

$$\Pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = -F^{0\mu}. \quad (7.6.3)$$

Отсюда немедленно получаем первичную связь вида

$$\Pi_0 = 0. \quad (7.6.4)$$

Вообще, мы сталкиваемся с первичными связями всякий раз, когда уравнения $\Pi_l = \delta L / \delta(\partial_0 \Psi^l)$ не могут быть разрешены относительно $\partial_0 \Psi^l$, т. е. не позволяют выразить все $\partial_0 \Psi^l$ через Π_l и Ψ^l (по крайней мере, локально). Такая ситуация возникает тогда и только тогда, когда матрица $\delta^2 L / \delta(\partial_0 \Psi^l) \delta(\partial_0 \Psi^m)$ будет имеет нулевой детерминант. Подобные лагранжианы называются *нерегулярными*.

Затем могут существовать *вторичные связи*, возникающие из требования совместности первичных связей с уравнениями движения. Для массивного векторного поля такой связью является как раз уравнение Эйлера–Лагранжа (7.5.16) для V^0 :

$$\partial_i \Pi_i = m^2 V^0 + J^0. \quad (7.6.5)$$

В данном случае этим все заканчивается, однако в других теориях могут встретиться новые независимые связи, возникающие из требования совместности вторичных связей с полевыми уравнениями

ми и т. д. Разница между первичными связями, вторичными связями и т. п. несущественна, мы будем рассматривать их все одновременно*.

Но есть другое, более важное различие между определенными типами связей. Те связи, которые мы нашли для массивного векторного поля, относятся к так называемым связям *второго рода*, для которых существуют универсальное предписание для коммутационных соотношений. Чтобы пояснить разницу между связями первого и второго рода, а также то предписание, которые используется в случае связей второго рода, полезно сначала напомнить определение скобок Пуассона в классической механике.

Рассмотрим любой лагранжиан $L(\Psi, \dot{\Psi})$, зависящий от набора переменных $\Psi^a(t)$ и их производных по времени $\dot{\Psi}^a(t)$. (Лагранжианы квантовой теории поля относятся к специальному случаю, когда индекс a пробегает все пары значений l и \mathbf{x} .) Для *всех* этих переменных можно определить канонические импульсы равенством

$$\Pi_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^a}. \quad (7.6.6)$$

Величины Π и Ψ в общем случае не независимы, и могут подчиняться различным связям, как первичным, так и вторичным. Скобка Пуассона определяется равенством

$$[A, B]_P \equiv \frac{\partial A}{\partial \Psi^a} \frac{\partial B}{\partial \Pi_a} - \frac{\partial B}{\partial \Psi^a} \frac{\partial A}{\partial \Pi_a}, \quad (7.6.7)$$

где при вычислении производных по Ψ^a и Π_a связи не учитываются. В частности, всегда $[\Psi^a, \Pi_b]_P = \delta^a_b$ (здесь и ниже все поля берутся в один и тот же момент времени, а временной аргумент опущен). Такие скобки имеют те же алгебраические свойства, что и коммутаторы:

$$[A, B]_P = -[B, A]_P, \quad (7.6.8)$$

$$[A, BC]_P = [A, B]_P C + B[A, C]_P, \quad (7.6.9)$$

* Строго говоря, здесь предполагается, что таким образом получаются *все* связи. — *Прим. ред.*

включая тождество Якоби

$$[A, [B, C]_P]_P + [B, [C, A]_P]_P + [C, [A, B]_P]_P = 0. \quad (7.6.10)$$

Если можно было бы принять обычные коммутационные соотношения $[\Psi^a, \Pi_b] = \delta^a_b$, $[\Psi^a, \Psi^b] = [\Pi_a, \Pi_b] = 0$, то коммутатор любых двух функций Ψ и Π был бы просто равен $[A, B] = i[A, B]_P$. Однако связи не всегда позволяют это сделать.

Связи в общем случае можно выразить в виде уравнений $\chi_N = 0$, где χ_N — набор функций от Ψ и Π . Поскольку мы включаем в рассмотрение все связи, как первичные, так и вторичные, множество всех связей с необходимостью совместно с уравнениями движения $\dot{A} = [A, H]_P$. Поэтому, при условии, что все

$$[\chi_N, H]_P = 0, \quad (7.6.11)$$

уравнения связи $\chi_N = 0$ удовлетворяются*. Некоторая связь** называется связью *первого рода*, если ее скобка Пуассона со всеми остальными связями обращается в нуль на поверхности связей (после вычисления скобок Пуассона). Мы столкнемся в следующей главе с простым примером такой связи при квантовании электромагнитного поля, где связь первого рода возникает из симметрии действия — электромагнитной калибровочной инвариантности. На самом деле, множество связей первого рода $s_N = 0$ всегда связано с группой преобразований симметрии для произвольной величины A . Бесконечно малое преобразование из этой группы имеет вид

* В современной терминологии для последнего условия используется также, в частности, автором, термин «при наложении связей». Но наиболее употребителен термин «на поверхности связей». Имеется в виду, что уравнения связи $\chi_N = 0$ определяют в фазовом пространстве (Ψ^a, Π_a) некоторую поверхность. Ниже будет использоваться именно этот последний термин. Кроме того, гамильтониан H содержит дополнительные вспомогательные поля — лагранжевы множители к связям. Уравнения (7.6.11) могут определить некоторые из них как функции Ψ^a, Π_a . — *Прим. ред.*

** Согласно современной терминологии любая функция χ_N из набора, определяющего поверхность связей $\chi_N = 0$, называется функцией связи, или коротко связью. Поэтому под связью в зависимости от контекста понимается как уравнение связи $\chi_N = 0$, так и сама функция связи χ_N . В данном контексте термин связь понимается во втором смысле, как функция связи. — *Прим. ред.*

$$\delta_N A \equiv \sum_N \varepsilon_N [\chi_N, A]_{\mathbb{P}}. \quad (7.6.12)$$

(В теории поля такие преобразования локальны, поскольку индекс N включает пространственно-временную координату.) Из формулы (7.6.11) следует, что такое преобразование оставляет гамильтониан инвариантным^{**}; инвариантной остается также поверхность связей. Теорию со связями первого рода можно рассматривать либо с помощью выбора калибровки, либо калибровочно-инвариантными методами, описанными в т. II.

Связи χ_N , дополнительные к связям первого рода, обладают тем свойством, что никакая нетривиальная линейная комбинация $\sum_N u_N [\chi_N, \chi_M]_{\mathbb{P}}$ скобок Пуассона этих связей друг с другом не обращается в нуль. Это означает, что матрица скобок Пуассона оставшихся связей неособенная,

$$\text{Det } C \neq 0, \quad (7.6.13)$$

где

$$C_{NM} \equiv [\chi_N, \chi_M]_{\mathbb{P}}. \quad (7.6.14)$$

Такие связи называются связями *второго рода*. Заметим, что число связей второго рода всегда должно быть четным, поскольку антисимметричная матрица нечетной размерности по необходимости имеет детерминант, равный нулю.

Как мы видели, в случае массивного действительного векторного поля связи имеют вид

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \chi_{2\mathbf{x}} = 0, \quad (7.6.15)$$

где

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \Pi_0(\mathbf{x}), \quad \chi_{2\mathbf{x}} = \partial_i \Pi_i(\mathbf{x}) - m^2 V^0(\mathbf{x}) - J^0(\mathbf{x}). \quad (7.6.16)$$

Скобка Пуассона этих связей равна

* Преобразования (7.6.12) сопровождаются также определенными преобразованиями лагранжевых множителей. — *Прим. ред.*

** На поверхности связей. — *Прим. ред.*

$$C_{1x,2y} = -C_{2y,1x} = [\chi_{1x}, \chi_{2y}]_P = m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.6.17)$$

и, конечно,

$$C_{1x,1y} = C_{2x,2y} = 0. \quad (7.6.18)$$

Эта «матрица» очевидно неособенная, так что связи (7.6.15) относятся ко второму роду.

Согласно Дираку, в случае, когда все связи являются связями второго рода, коммутационные соотношения имеют вид:

$$[A, B] = i[A, B]_D, \quad (7.6.19)$$

где $[A, B]_D$ — обобщение скобки Пуассона, известное как *скобка Дирака*:

$$[A, B]_D \equiv [A, B]_P - [A, \chi_N]_P (C^{-1})^{NM} [\chi_M, B]_P. \quad (7.6.20)$$

(Здесь N и M — составные индексы, включающие пространственную координату*, и принимающие в нашем примере векторного поля значения типа $1, \mathbf{x}$ и $2, \mathbf{x}$.) Дирак заметил, что дираковская скобка, как и скобка Пуассона, удовлетворяет тем же алгебраическим соотношениям, что и коммутаторы:

$$[A, B]_D = -[B, A]_D, \quad (7.6.21)$$

$$[A, BC]_D = [A, B]_D C + B[A, C]_D, \quad (7.6.22)$$

$$[A, [B, C]_D]_D + [B, [C, A]_D]_D + [C, [A, B]_D]_D = 0, \quad (7.6.23)$$

и, кроме того, соотношениям

$$[\chi_N, B]_D = 0, \quad (7.6.24)$$

* Автор употребляет здесь термин *compound indices* — *составные индексы*, а ниже в Приложении общий термин *compact notation* — *компактные обозначения*. В современной литературе более употребителен общий термин *condensed notation* — *конденсированные (сжатые) обозначения*. — Прим. ред.

благодаря которым коммутационные соотношения становятся совместными со связями $\chi_N = 0$. Кроме того, скобки Дирака не изменяются, если заменить χ_N любыми другими функциями χ'_N , для которых уравнения $\chi'_N = 0$ и $\chi_N = 0$ определяют одну и ту же поверхность связей в фазовом пространстве. Однако все эти приятные свойства не доказывают, что коммутаторы действительно следует задавать формулой (7.6.19), куда входят скобки Дирака.

Вопрос был, если и не разрешен до конца, то прояснен с помощью мощной теоремы, доказанной Маскавой и Накаямой⁶. Они показали, что для любого набора канонических переменных Ψ^a , Π_a , подчиняющихся связям второго рода, всегда можно с помощью некоторого канонического преобразования* построить два набора переменных Q^n , \mathcal{Q}^r и соответствующих им канонических импульсов P_n , \mathcal{P}_r , так что уравнения связей будут иметь вид $\mathcal{Q}^r = \mathcal{P}_r = 0$. Используя эти координаты для вычисления скобок Пуассона и переопределяя функции связей, так что $\chi_{1r} = \mathcal{Q}^r$, $\chi_{2r} = \mathcal{P}_r$, получим

$$C_{1r,2s} = [\mathcal{Q}^r, \mathcal{P}_s]_{\text{P}} = \delta_s^r,$$

$$C_{1r,1s} = [\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}_s]_{\text{P}} = 0, \quad C_{2r,2s} = [\mathcal{P}^r, \mathcal{P}_s]_{\text{P}} = 0,$$

а для любых функций A, B

* Напомним, что каноническим мы называем преобразование от одного набора координат Ψ^a, Π_a фазового пространства к другому набору $\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_a$, причем $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_b]_{\text{P}} = \delta_b^a$ и $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Psi}^b]_{\text{P}} = [\tilde{\Pi}_a, \tilde{\Pi}_b]_{\text{P}} = 0$, где скобки Пуассона вычисляются по Ψ^a и Π_a . Отсюда следует, что скобки Пуассона любых функций A, B одинаковы, независимо от того, вычислены ли они по Ψ^a и Π_a , или по $\tilde{\Psi}^a$ и $\tilde{\Pi}_a$. Отсюда следует также, что если Ψ^a и Π_a удовлетворяют гамильтоновым уравнениям движения, это же верно для $\tilde{\Psi}^a$ и $\tilde{\Pi}_a$ с тем же гамильтонианом**. При каноническом преобразовании лагранжиан изменяется, но только на полную производную по времени, что не меняет величины действия.

** Конечно, в новых переменных гамильтониан, являющийся скалярной функцией, имеет другой вид. — *Прим. ред.*

$$[A, \chi_{1r}]_P = -\frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r}, [A, \chi_{2r}]_P = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}.$$

Выписанная S -матрица имеет обратную матрицу $S^{-1} = -S$, так что скобки Дирака (7.6.20) имеют вид:

$$\begin{aligned} [A, B]_D &= [A, B]_P + [A, \chi_{1r}]_P [\chi_{2r}, B]_P - [A, \chi_{2r}]_P [\chi_{1r}, B]_P \\ &= [A, B]_P - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} = \frac{\partial A}{\partial Q^n} \frac{\partial B}{\partial P_n} - \frac{\partial B}{\partial Q^n} \frac{\partial A}{\partial P_n}. \end{aligned} \quad (7.6.25)$$

Иными словами, *дираковская скобка равна скобке Пуассона, вычисленной с помощью редуцированного набора независимых канонических переменных Q^n, P_n .*

Если предположить, что эти независимые переменные удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям, то коммутаторы произвольных операторов A, B выражаются через скобки Дирака формулой (7.6.19)*.

Вернемся к массивному векторному полю, чтобы показать, как его можно проквантовать с помощью скобок Дирака. В этом случае легко выразить зависимые переменные V^0 и Π_0 через независимые переменные V_i и Π_i^{**} : имеем просто $\Pi_0 = 0$, а V^0 задается формулой (7.6.5). Из (7.6.15) и (7.6.17) следует, что S_{NM} имеет в данном случае обратную матрицу вида:

* Все еще открытым остается вопрос, можно ли принять канонические коммутационные соотношения для независимых переменных Q^n, P_n , построенных с помощью канонического преобразования Маскавы–Накаямы. В конечном счете, проверкой таких коммутационных соотношений будет их совместимость с выведенными в гл. 5 коммутационными соотношениями для свободных полей, но чтобы воспользоваться этим тестом, нужно знать, чему равны Q^n и P_n . В Приложении к этой главе мы описываем два больших класса теорий, в которых можно установить набор таких независимых величин Q^n и P_n , что дираковские коммутационные соотношения (7.6.19) будут следовать из обычных канонических коммутационных соотношений для Q^n и P_n . Мы покажем также, что в этих случаях гамильтониан, определенный через независимые переменные Q и P , может быть с тем же успехом записана и через все переменные Ψ и Π .

** Это частный случай теорий, обсуждаемых в части А Приложения к этой главе.

$$(C^{-1})^{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} = -(C^{-1})^{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} = -m^{-2}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.6.26)$$

$$(C^{-1})^{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} = (C^{-1})^{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0. \quad (7.6.27)$$

Поэтому предписание Дирака (7.6.19), (7.6.20) приводит к одновременным коммутаторам следующего вида:

$$\begin{aligned} [A, B] &= i[A, B]_{\text{P}} \\ &+ im^{-2} \int d^3z ([A, \Pi_0(\mathbf{z})]_{\text{P}} [\partial_i \Pi_i(\mathbf{z}) - m^2 V^0(\mathbf{z}) - J^0(\mathbf{z}), B]_{\text{P}} - A \leftrightarrow B). \end{aligned} \quad (7.6.28)$$

По определению, имеем:

$$[V^\mu(\mathbf{x}), \Pi_\nu(\mathbf{y})]_{\text{P}} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_\nu^\mu, \quad [V^\mu(\mathbf{x}), V^\nu(\mathbf{y})]_{\text{P}} = [\Pi_\mu(\mathbf{x}), \Pi_\nu(\mathbf{y})]_{\text{P}} = 0. \quad (7.6.29)$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} [V^i(\mathbf{x}), V^j(\mathbf{y})] &= [V^0(\mathbf{x}), V^0(\mathbf{y})]_{\text{P}} = 0, \\ [V^i(\mathbf{x}), V^0(\mathbf{y})] &= -im^{-2} \partial_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [V^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] &= i\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [V^0(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] &= [V^\mu(\mathbf{x}), \Pi_0(\mathbf{y})] = 0, \\ [\Pi_\mu(\mathbf{x}), \Pi_\nu(\mathbf{y})] &= 0. \end{aligned} \quad (7.6.30)$$

Это в точности те коммутационные соотношения, которые мы получили бы, предположив, что независимые переменные удовлетворяют обычным каноническим коммутационным соотношениям

$$[V^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [V^i(\mathbf{x}), V^j(\mathbf{y})] = [\Pi_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = 0,$$

и используя связи для вычисления коммутаторов, содержащих Π_0 и V^0 .

7.7. Переопределения полей и несущественные константы взаимодействия *

В любое действие входят некоторые параметры взаимодействия, от которых не зависят наблюдаемые, например, массы или матричные элементы S -матрицы. Эти параметры называют *несущественными* **. Такое имя они получили потому, что изменение этих параметров можно устранить простым переопределением полевых переменных.

Непрерывное переопределение полей, например, бесконечно малое локальное преобразование $\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x) + \varepsilon F^l(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), \dots)$, очевидно не может влиять на любую *наблюдаемую* в теории ***, хотя, конечно, может изменить значения матричных элементов самих полей.

Как узнать, может ли какое-то изменение параметров теории быть скомпенсировано переопределением полей? Непрерывное локальное переопределение поля приводит к изменению действия вида

$$\delta I[\Psi] = \varepsilon \sum_l \int d^4x \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^l(x)} F^l(\Psi(x), \partial \Psi(x), \dots). \quad (7.7.1)$$

Поэтому любое изменение δg_i параметров взаимодействия g_i , для которого изменение действия имеет вид:

$$\sum_i \frac{\partial I}{\partial g_i} \delta g_i = -\varepsilon \sum_l \int d^4x \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^l(x)} F^l(\Psi(x), \partial \Psi(x), \dots) \quad (7.7.2)$$

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

** Автор употребляет здесь английский термин *redundant*, дословно — *излишний*. — *Прим. пер.*

*** Например, теорема из раздела 10.2 показывает, что до тех пор, пока мы умножаем на правильные константы перенормировки полей, элементы S -матрицы могут быть получены из среднего по вакууму от хронологически упорядоченного произведения любых операторов, имеющих неисчезающие матричные элементы между вакуумом и одночастичными состояниями участвующих в реакции частиц.

может быть скомпенсировано переопределением полей

$$\Psi^l(x) \rightarrow \Psi^l(x) + \varepsilon F^l(\Psi(x), \partial\Psi(x), \dots),$$

и, таким образом, не влияет ни на какую наблюдаемую. Иными словами, параметр взаимодействия является несущественным, если при вариации этого параметра изменение действия обращается в нуль на уравнениях движения* $\delta I / \delta \Psi^l = 0$.

Например, предположим, что лагранжиан теории скалярного поля имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z (\partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi + m^2 \Phi^2) - \frac{1}{24} g Z^2 \Phi^4.$$

Константа Z является лишней, поскольку

$$\frac{\partial I}{\partial Z} = \frac{1}{2} \int d^4x \Phi (\square \Phi - m^2 \Phi - \frac{1}{6} g Z \Phi^3),$$

и это выражение обращается в нуль на уравнениях движения

$$\square \Phi - m^2 \Phi = \frac{1}{6} g Z \Phi^3.$$

С другой стороны, ни голая масса m , ни голая константа связи g не являются несущественными, как и любая функция m и g .

В этом примере переопределение поля, требуемое для компенсации изменения Z , является простым изменением масштаба, когда F просто пропорционально Φ . (По этой причине Z называют константой перенормировки поля.) Это самое общее преобразование поля, оставляющее инвариантной общую форму такого действия. Однако для рассматриваемых в разделах 12.3 и 12.4 действий более общего вида, содержащих произвольное число полей и их произ-

* Дословно автор пишет: «...когда мы пользуемся полевыми уравнениями», что в развернутой форме означает: «при условии, что поля в действии удовлетворяют полевым уравнениям». В современной русской терминологии для этого условия общепринят термин «на уравнениях движения», который мы используем здесь и ниже. — *Прим. ред.*

водных, нам придется рассматривать как линейные, так и нелинейные переопределения полей, и в результате несущественным оказывается бесконечное подмножество параметров теории.

Приложение

Вывод скобок Дирака из канонических коммутаторов

В этом Приложении для теорий двух типов мы покажем, что формула для коммутаторов в виде дираковских скобок, умноженных на i , следует из обычных канонических коммутационных соотношений для редуцированного набора переменных.

A

Предположим (как это имеет место в случае массивного векторного поля V^μ), что квантовые переменные Ψ^a и Π_a , возникающие из лагранжиана L , можно разделить на два класса*: один набор Q^n независимых канонических переменных (типа $V^i(\mathbf{x})$) с независимыми канонически сопряженными импульсами $P_n = \partial L / \partial \dot{Q}^n$, и другой набор переменных \mathcal{Q}^r (типа V^0), производные по времени которых не входят в функцию Лагранжа. Первичные связи имеют вид $\chi_{1r} = 0$, где

$$\chi_{1r} = \mathcal{P}_r \quad (7.A.1)$$

— импульсы, канонически сопряженные к \mathcal{Q}^r . Вторичные связи возникают из уравнений движения $0 = \partial L / \partial \mathcal{P}^r$ для \mathcal{P}^r . Предположим, что эти связи могут быть «разрешены», т. е. их можно записать в виде $\chi_{2r} = 0$, где χ_{2r} имеет вид

* Мы вновь используем компактные обозначения, в которых метки a , n и r включают пространственные координаты \mathbf{x} , а также дискретные индексы. По повторяющимся индексам проводится суммирование и интегрирование. Считается, что все квантовые переменные вычисляются в один и тот же момент времени, причем общий временной аргумент везде опущен. Величины Q^r тождественны введенным в разделе 7.2 величинам C^r .

$$\chi_{2r} = \varrho^r - f^r(Q, P). \quad (7.A.2)$$

(Примером может служить формула (7.6.5), где V^0 выражается через независимые импульсы P (в данном случае Π_i) и переменные Q .) Предположим, что независимые канонические переменные Q и P удовлетворяют обычным каноническим коммутационным соотношениям:

$$[Q^n, P_m] = i\delta_m^n, [Q^n, Q^m] = [P_n, P_m] = 0. \quad (7.A.3)$$

Связь $\chi_{2r} = 0$ приводит к следующим коммутаторам, включающим ϱ :

$$[\varrho^r, Q^n] = -i \frac{\partial f^r}{\partial P_n}, [\varrho^r, P_n] = i \frac{\partial f^r}{\partial Q^n}, \quad (7.A.4)$$

$$[\varrho^r, \varrho^s] = i\Gamma^{rs}, \quad (7.A.5)$$

где Γ^{rs} – скобка Пуассона

$$\Gamma^{rs} \equiv [f^r, f^s]_P, \quad (7.A.6)$$

а все коммутаторы, включающие \mathcal{P}_r , естественно, равны нулю:

$$[\mathcal{P}_r, Q^n] = [\mathcal{P}_r, P_n] = [\mathcal{P}_r, \varrho^s] = [\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_s] = 0. \quad (7.A.7)$$

Сравним эти коммутаторы со скобками Дирака. Скобки Пуассона от связей имеют вид:

$$C_{1r,1s} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{1s}]_P = 0, \quad (7.A.8)$$

$$C_{1r,2s} \equiv -C_{2s,1r} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{2s}]_P = -\delta_r^s, \quad (7.A.9)$$

$$C_{2r,2s} \equiv [\chi_{2r}, \chi_{2s}]_P = [f^r(Q, P), f^s(Q, P)]_P \equiv \Gamma^{rs}. \quad (7.A.10)$$

(В примере с массивным векторным полем величины Γ^{rs} обращаются в нуль, но приведенная аргументация верна и для ненулевых Γ^{rs} .) Легко видеть, что матрица C имеет обратную:

$$\begin{aligned} (C^{-1})^{1r,1s} &= \Gamma^{rs}, & (C^{-1})^{2r,2s} &= 0, \\ (C^{-1})^{1r,2s} &= -(C^{-1})^{2s,1r} = \delta_s^r. \end{aligned} \quad (7.A.11)$$

Кроме того, скобки Пуассона любой функции A со связями имеют вид

$$[A, \chi_{1r}]_P = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r}, \quad [A, \chi_{2r}]_P = -\frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} - [A, f^r(Q, P)]_P.$$

Отсюда дираковская скобка имеет вид

$$\begin{aligned} [A, B]_D &= [A, B]_P - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_r} \\ &+ \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} \Gamma^{rs} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^s} - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{Q}^r} [B, f^r]_P - [A, f^r]_P \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r}. \end{aligned} \quad (7.A.12)$$

Если A и B являются функциями только независимых канонических переменных Q^n и P_n , тогда $\partial A/\partial \mathcal{Q}^r = \partial B/\partial \mathcal{Q}^r = 0$, и скобка Дирака равна скобке Пуассона. В частности,

$$[Q^n, P_m]_D = \delta_m^n, \quad [Q^n, Q^m]_D = [P_n, P_m]_D = 0. \quad (7.A.13)$$

Если A есть \mathcal{Q}^r , а B есть функция переменных Q и P , то вклад дает только пятое слагаемое в правой части (7.A.12). В частности,

$$[\mathcal{Q}^r, Q^n]_D = -\frac{\partial f^r}{\partial P_n}, \quad [\mathcal{Q}^r, P_n]_D = +\frac{\partial f^r}{\partial Q^n}. \quad (7.A.14)$$

Если и A , и B суть переменные \mathcal{Q}^r , остается только четвертое слагаемое

$$[\mathcal{Q}^r, \mathcal{Q}^s]_D = \Gamma^{rs}. \quad (7.A.15)$$

Наконец, если A есть \mathcal{P}_r , а B – любое, остаются только первое и третье слагаемые, которые сокращаются:

$$[\mathcal{P}_r, B]_D = [\mathcal{P}_r, B]_P + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{Q}^r} = 0. \quad (7.A.16)$$

Сравнение формул (7.A.13)–(7.A.16) с (7.A.3)–(7.A.7) показывает, что во всех случаях коммутаторы равны скобкам Дирака, умноженным на i .

Этого и следовало ожидать, поскольку, как отмечалось в разделе 7.6, все дираковские скобки, включающие функции связей, обращаются в нуль, а дираковские скобки, включающие \mathcal{Q}^r и/или \mathcal{P}_s , можно вычислить, используя уравнения связи для выражения \mathcal{Q}^r и/или \mathcal{P}_s через независимые переменные Q и P .

B

Рассмотрим теперь случай, когда связи принимают вид условий $\chi_{1r}(\Psi) = 0$ на Ψ^a , которые можно разрешить, выразив все Ψ^a через меньший набор независимых переменных Q^n , и такое же число отдельных условий $\chi_{2r}(\Pi) = 0$ на Π_a , которые также можно разрешить, выразив Π_a через меньший набор независимых переменных P_n . (Соответствующий пример будет рассмотрен в следующей главе, где связи на Ψ^a представляют собой условия, фиксирующие калибровку, а связи на Π_a — вторичные связи, возникающие из условия совместности связей первого рода с полевыми уравнениями.) Предположим, что независимые переменные удовлетворяют обычным каноническим коммутационным соотношениям $[Q^n, P_m] = i\delta^n_m$, $[Q^n, Q^m] = [P_n, P_m] = 0$. Зависимые и независимые импульсы связаны соотношениями

$$P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^n} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^b} \frac{\partial \Psi^b}{\partial \dot{Q}^n} = \Pi_b \frac{\partial \Psi^b}{\partial \dot{Q}^n}, \quad (7.A.17)$$

Отсюда следует, что

$$[\Psi^a, \Pi_b] \frac{\partial \Psi^b}{\partial \dot{Q}^n} = [\Psi^a, P_n] = i \frac{\partial \Psi^a}{\partial \dot{Q}^n}$$

или, иными словами,

$$\{[\Psi^a, \Pi_b] - i\delta_b^a\} \frac{\partial \Psi^b}{\partial \dot{Q}^n} = 0. \quad (7.A.18)$$

Связи $\chi_{1r}(\Psi) = 0$ удовлетворяются для $\Psi^a = \Psi^a(Q)$ при всех Q , так что

$$\frac{\partial \chi_{1r}}{\partial \Psi^b} \frac{\partial \Psi^b}{\partial \dot{Q}^n} = 0. \quad (7.A.19)$$

Далее, векторы $(V_r)_b \equiv \partial\chi_{1r}/\partial\Psi^b$ образуют полный набор векторов, перпендикулярных ко всем векторам $(U_n)^b \equiv \partial\Psi^b/\partial Q^n$, поскольку, если бы существовал какой-то другой вектор V_b , удовлетворяющий условию $V_b(U_n)^b = 0$ для всех n , то это означало бы наличие дополнительных ограничений на Ψ^a . Поэтому из (7.A.18) вытекает, что

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i\delta_b^a + ic_r^a \frac{\partial\chi_{1r}}{\partial\Psi^b} \quad (7.A.20)$$

с некоторыми неизвестными коэффициентами c_r^a . Чтобы определить эти коэффициенты, используем другие связи, а именно, что $\chi_{2r}(\Pi) = 0$. Из них следует, что

$$0 = [\Psi^a, \chi_{2r}(\Pi)] = i[\Psi^a, \Pi_b] \frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b}.$$

Используя (7.A.20), получаем тогда

$$\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_a} = -c_s^a \frac{\partial\chi_{1s}(\Psi)}{\partial\Psi^b} \frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b}. \quad (7.A.21)$$

Множитель при c_s^a есть скобка Пуассона

$$\frac{\partial\chi_{1s}(\Psi)}{\partial\Psi^b} \frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b} = [\chi_{1s}, \chi_{2r}]_P \equiv C_{1s,2r}.$$

Кроме того, поскольку χ_{1s} зависит только от Ψ , а χ_{2r} — только от Π , это единственные отличные от нуля скобки Пуассона связей, тогда как

$$C_{1r,1s} = C_{2r,2s} = 0.$$

Таким образом, можно переписать (7.A.21) в виде

$$\frac{\partial\chi_N}{\partial\Pi_a} = -c_s^a C_{1s,N}, \quad (7.A.22)$$

где N нумерует все связи. Для связей второго рода это уравнение имеет единственное решение

$$c_s^a = -\frac{\partial \chi_N}{\partial \Pi_a} (C^{-1})^{N,1s} = -\frac{\partial \chi_{2r}}{\partial \Pi_a} (C^{-1})^{2r,1s}. \quad (7.A.23)$$

Подстановка его в (7.A.20) показывает, что

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i \left[\delta_b^a - \frac{\partial \chi_{2r}}{\partial \Pi_a} (C^{-1})^{2r,1s} \frac{\partial \chi_{1s}}{\partial \Psi^b} \right]. \quad (7.A.24)$$

Скобки Пуассона Ψ^a и Π_b с функциями связей имеют вид

$$\begin{aligned} [\Psi^a, \chi_{1r}]_P &= 0, & [\Psi^a, \chi_{2r}]_P &= \frac{\partial \chi_{2r}}{\partial \Pi_a}, \\ [\chi_{1r}, \Pi_b]_P &= \frac{\partial \chi_{1r}}{\partial \Psi^b}, & [\chi_{2r}, \Pi_b]_P &= 0, \end{aligned} \quad (7.A.25)$$

так что величина в квадратных скобках в правой части формулы (7.A.24) есть скобка Дирака

$$[\Psi^a, \Pi_b] = i[\Psi^a, \Pi_b]_D, \quad (7.A.26)$$

что и требовалось показать. Кроме того, легко видеть, что поскольку «диагональные» 11- и 22-компоненты матрицы C^{-1} равны нулю, остальные скобки Дирака имеют вид

$$[\Psi^a, \Psi^b]_D = [\Pi_a, \Pi_b]_D = 0, \quad (7.A.27)$$

так что тривиальным образом получаем:

$$[\Psi^a, \Psi^b] = i[\Psi^a, \Psi^b]_D, \quad [\Pi_a, \Pi_b] = i[\Pi_a, \Pi_b]_D. \quad (7.A.28)$$

* * *

В дополнение к правилам коммутации нам нужна явная формула для гамильтониана. Согласно обычному каноническому формализму гамильтониан следует взять в виде

$$H = P_n \dot{Q}^n - L, \quad (7.A.29)$$

где сумма берется по независимым каноническим переменным. В теориях обоих типов, рассмотренных в этом Приложении, такой гамильтониан можно записать через все переменные в виде

$$H = \Pi_a \dot{\Psi}^a - L. \quad (7.A.30)$$

Для теорий типа *A* это утверждение тривиально: сумма по *a* берется по значениям *n*, для которых $\Psi^n = Q^n$ и $\Pi_n = P_n$ – независимые канонические переменные, а также по значениям *r*, для которых $\Pi_r = \mathcal{P}_r = 0$. Для теорий типа *B* заметим, что из (7.A.17) следует

$$P_n \dot{Q}^n = \Pi_b \frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n} \dot{Q}^n = \Pi_b \dot{\Psi}^b.$$

что вновь приводит к (7.A.30).

Задачи

1. Рассмотрите теорию нескольких действительных скалярных полей Φ^n с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{mn} \partial_\mu \Phi^n \partial^\mu \Phi^m f_{nm}(\Phi),$$

где $f_{nm}(\Phi)$ – произвольная действительная матричная функция поля. (Такая теория называется нелинейной σ -моделью.) Проведите каноническое квантование этой теории. Получите вид взаимодействия $V[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]$ в представлении взаимодействия.

2. Рассмотрите теорию действительных скалярных полей Φ^n и дираковских полей Ψ^i с лагранжианом $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$, где \mathcal{L}_0 – обычный лагранжиан свободных полей, а \mathcal{L}_1 – взаимодействие, содержащее поля Φ^n и Ψ^i , но не их производные. Получите явное выражение для симметричного тензора энергии–импульса $\Theta^{\mu\nu}$.
3. Пусть в теории, описанной в задаче 2, плотность лагранжиана инвариантна относительно глобального инфинитезимального преобразования

$$\delta\Phi^n = i\varepsilon \sum_m t^n{}_m \Phi^m, \delta\Psi^i = i\varepsilon \sum_j \tau^i{}_j \Psi^j.$$

Получите явные выражения для сохраняющихся токов, связанных с этой симметрией.

4. Рассмотрите теорию комплексного скалярного поля Φ и действительного векторного поля V^μ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu - \mathcal{H}(\Phi^\dagger \Phi),$$

где $D_\mu \equiv \partial_\mu - igV_\mu$ и $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$, а \mathcal{H} — произвольная функция. Проведите каноническое квантование этой теории. Получите вид взаимодействия в представлении взаимодействия.

5. В теории, рассмотренной в задаче 4, получите выражения для симметричного тензора энергии–импульса $\Theta^{\mu\nu}$ и сохраняющегося тока, связанного с преобразованием симметрии, при котором $\delta\Phi = i\varepsilon\Phi$, $\delta V^\mu = 0$.
6. Докажите, что скобки Дирака удовлетворяют тождеству Якоби (7.6.23).
7. Докажите, что скобки Дирака не зависят от выбора связи χ_N , задающих данное подмногообразие фазового пространства.

Список литературы

1. Casimir, H.B.G., *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, **51**, 635 (1948); Spaarnay, M.J., *Nature*, **180**, 334 (1957).
2. Belinfante, F., *Physica*, **6**, 887 (1939); см. также: Rosenfeld, L., *Memoires de l'Academie Roy. Belgique*, **6**, 30 (1930).
3. См., например: Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972), ch. 12 (есть рус. пер.: С. Вейнберг. *Гравитация и космология*. М.: Наука, 1972).

4. См., например: Wess, J. and Bagger, J., *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton, 1983) и цитированные в этой книге оригинальные работы (есть рус. пер.: Дж. Весс, Дж. Баггер. *Суперсимметрия и супергравитация*. М.: Мир, 1985).
5. Dirac, P.A.M., *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964). См. также: Dirac, P.A.M., *Canad. J. Math.*, **2**, 129 (1950); *Proc. Roy. Soc. London, ser. A*, **246**, 326 (1958); Bergmann, P.G., *Helv. Phys. Acta Suppl.* IV, 79 (1956).
6. Maskawa, T. and Nakaјima, H., *Progr. Theor. Phys.*, **56**, 1295 (1976). Я благодарен Дж. Фейнбергу, обратившему мое внимание на эту ссылку.

Электродинамика

Первоначальный подход к квантовой электродинамике заключался в том, чтобы принять как данное максвелловскую классическую теорию электромагнетизма и проквантовать ее. Вероятно, читатель уже не удивится тому, что в этой книге мы пойдем другим путем.

Сначала, анализируя специфические трудности, возникающие при формулировке квантовой теории безмассовых частиц со спином, мы придем к необходимости принципа калибровочной инвариантности, и затем выведем основные свойства электродинамики. Далее мы будем следовать более привычным современным путем, и исходя из калибровочной инвариантности выведем существование векторного потенциала, описывающего безмассовые частицы спина единица.

Слишком рано говорить, какая из этих альтернатив отвечает логическому порядку природы. Большинство теоретиков предпочитает брать за отправную точку калибровочную инвариантность, однако в современных теориях струн¹ аргументация иная: сначала среди нормальных мод струны обнаруживается состояние нулевой массы и спина единица, а затем из этого выводится калибровочная инвариантность эффективной теории поля, описывающей такие частицы.

Во всяком случае, как мы увидим, и тот, и другой подход приводят к квантованной версии максвелловской теории, все еще остающейся образцовым примером успешной квантовой теории поля.

8.1 Калибровочная инвариантность

Начнем с напоминания тех проблем, которые связаны с построением ковариантных свободных полей для безмассовой частицы спиральности ± 1 . Мы видели в разделе 5.9, что для таких частиц не составляет труда построить свободное антисимметричное тензорное поле $f_{\mu\nu}(x)$. Это поле можно выразить через 4-потенциал $a_\mu(x)$ (5.9.23) с помощью известного соотношения

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x). \quad (8.1.1)$$

Однако из формулы (5.9.23) следует, что $a_\mu(x)$ преобразуется как 4-вектор только с точностью до калибровочного преобразования

$$U_0(\Lambda)a_\mu(x)U_0^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu \Omega(x, \Lambda). \quad (8.1.2)$$

На самом деле, нельзя построить истинный 4-вектор как линейную комбинацию операторов рождения и уничтожения частицы спиральности ± 1 . Это объясняет наличие сингулярностей при $m = 0$ в пропагаторе массивного векторного поля

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4x e^{iq \cdot (x-y)} \frac{\eta_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / m^2}{q^2 + m^2 - i\varepsilon},$$

которые не позволяют рассматривать безмассовые частицы спиральности ± 1 , просто переходя к пределу $m \rightarrow 0$ в теории массивных частиц спина единица.

Можно обойти эти проблемы, потребовав, чтобы все взаимодействия включали не $A_\mu(x)$, а только * $F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ и их производные, однако это и не самая общая возможность, и не та, которая реализуется в природе. Вместо изгнания $A_\mu(x)$ из действия, потребуем, чтобы действие материи I_M , т. е. слагаемое в действии, описывающее материю и ее взаимодействия с излучением, было инвариантным относительно общего калибровочного преобразования

* Мы теперь используем обозначения A_μ и $F_{\mu\nu}$ для вектора электромагнитного потенциала и тензора напряженности поля, так как это взаимодействующие поля.

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon(x) \quad (8.1.3)$$

(по крайней мере, если поля материи удовлетворяют полевым уравнениям), чтобы дополнительное слагаемое в правой части формулы (8.1.2) не оказывало никакого влияния. Изменение действия для материи в результате преобразования (8.1.3) можно записать в виде

$$\delta I_M = \int d^4x \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} \partial_\mu \varepsilon(x). \quad (8.1.4)$$

Поэтому из лоренцевской инвариантности I_M вытекает, что

$$\partial_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 0. \quad (8.1.5)$$

Это тривиально верно, если I_M содержит наряду с полями материи только $F_{\mu\nu}(x)$ и его производные. В этом случае

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 2\partial^\nu \frac{\delta I_M}{\delta F_{\mu\nu}(x)}.$$

Однако если в I_M входит само поле $A_\mu(x)$, уравнение (8.1.5) становится нетривиальным ограничением на теорию.

Обсудим теперь, теории какого типа приводят к сохраняющимся токам, с которыми может взаимодействовать поле $A^\mu(x)$. В разделе 7.3 мы видели, что наличие непрерывных внутренних симметрий действия влечет за собой существование сохраняющихся токов. В частности, если бесконечно малое преобразование *

$$\delta \Psi^l(x) = i\varepsilon(x) q_l \Psi^l(x) \quad (8.1.6)$$

оставляет инвариантным действие материи при постоянном ε , то в случае произвольной функции $\varepsilon(x)$ изменение действия материи должно иметь вид

* Поскольку в данном случае матрица преобразования поля взята диагональной, соглашение о суммировании для сумм по повторяющимся индексам здесь неудобно, так что в формуле (8.1.6) нет суммирования по l .

$$\delta I_M = - \int d^4x J^\mu(x) \partial_\mu \varepsilon(x). \quad (8.1.7)$$

Если поля материи удовлетворяют своим полевым уравнениям, действие материи стационарно по отношению к *любьим* вариациям Ψ^l , так что в этом случае правая часть формулы (8.1.7) должна обратиться в нуль, откуда

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (8.1.8)$$

В частности, в разделе 7.3 мы видели, что если I_M есть интеграл от функции \mathcal{L}_M , зависящей от Ψ^l и $\partial_\mu \Psi^l$, то сохраняющийся ток дается формулой*

$$J^\mu = -i \sum_l \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \Psi^l)} q_l \Psi^l,$$

и он порождает преобразования (8.1.6) в том смысле, что

$$[Q, \Psi^l(x)] = -q_l \Psi^l(x), \quad (8.1.9)$$

где Q — не зависящий от времени оператор заряда

$$Q = \int d^3x J^0. \quad (8.1.10)$$

Поэтому можно построить лоренц-инвариантную теорию, где векторное поле A_μ взаимодействует с сохраняющимся током J^μ в том смысле, что вариационная производная $\delta I_M / \delta A_\mu(x)$ пропорциональна $J^\mu(x)$. Любая константа пропорциональности может быть поглощена переопределением общего масштаба зарядов q_l , так что можно просто приравнять эти величины друг другу:

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = J^\mu(x). \quad (8.1.11)$$

* Здесь считается, что Ψ^l пробегает множество всех независимых полей, кроме A^μ . Мы используем заглавное Ψ , чтобы отметить, что это поля в гейзенберговском представлении, зависимость от времени которых включает эффекты взаимодействия. Конечно, эти Ψ^l не следует путать с вектором состояния или волновой функцией.

Сохранение электрического заряда позволяет зафиксировать значения всех зарядов, выразив их через значение любого из них. Принято выбирать за основу значение заряда электрона, обозначаемое $-e$. Именно формула (8.1.11) придает значению e определенный смысл*.

Требование, выражаемое формулой (8.1.11), можно теперь сформулировать как принцип инвариантности относительно совместных преобразований вида

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x), \quad (8.1.12)$$

$$\delta \Psi^l = i\epsilon(x)q_l \Psi^l(x). \quad (8.1.13)$$

Симметрия такого типа с произвольной функцией $\epsilon(x)$ называется *локальной симметрией* или калибровочной инвариантностью второго рода. Симметрия относительно преобразований с постоянным ϵ называется *глобальной симметрией* или калибровочной инвариантностью первого рода. В настоящее время известно несколько точных локальных симметрий, однако чисто глобальные симметрии, по видимому, являются следствием других принципов (см. раздел 12.5). Мы еще ничего не сказали о действии для самих фотонов. В качестве догадки можно попытаться взять его таким же, как и для массивных векторных полей, положив только $m = 0$:

$$I_\gamma = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (8.1.14)$$

Это действие совпадает с тем, которое используется в классической электродинамике, однако истинным оправданием выбора такого действия является то, что оно (с точностью до константы) представляет единственный калибровочно-инвариантный функционал, квадратичный по $F_{\mu\nu}$ и не содержащий высших производных. Кроме того, как мы увидим в следующем разделе, оно приводит к согласованной квантовой теории. Любые слагаемые в действии более высокого порядка по производным и/или по $F_{\mu\nu}$, могут быть

* Конечно, (8.1.11) фиксирует определение e только после того, как определена нормировка $A_\mu(x)$. Вопрос о нормировке электромагнитного поля обсуждается в разделе 10.4.

включены в то, что мы назвали действием материи. С учетом формул (8.1.11) и (8.1.14) уравнения электромагнитного поля имеют вид

$$0 = \frac{\delta}{\delta A_\nu} [I_\gamma + I_M] = \partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu. \quad (8.1.15)$$

Видно, что это обычные неоднородные уравнения Максвелла с током J^ν . Есть и другие, однородные, уравнения Максвелла

$$0 = \partial_\mu F_{\nu\epsilon} + \partial_\epsilon F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\epsilon\mu}, \quad (8.1.16)$$

которые непосредственно вытекают из определения $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Выше мы исходили из существования безмассовых частиц спина единица и были вынуждены потребовать инвариантности действия материи относительно локального калибровочного преобразования (8.1.12), (8.1.13).

Обычно этот вывод производится в обратном направлении. Иными словами, исходят из глобальной внутренней симметрии

$$\delta\Psi^l = i\epsilon q_l \Psi^l(x) \quad (8.1.17)$$

и задают вопрос, что нужно сделать, чтобы расширить ее до локальной симметрии

$$\delta\Psi^l = i\epsilon(x) q_l \Psi^l(x). \quad (8.1.18)$$

Если лагранжиан \mathcal{L} зависит только от полей $\Psi^l(x)$, но не от их производных, то нет никакой разницы в том, постоянна величина ϵ или нет. Инвариантность с постоянной ϵ влечет инвариантность и в случае, когда ϵ есть функция пространственно-временных координат. Однако все реалистические лагранжианы содержат производные, и мы сталкиваемся с проблемой, что производные полей преобразуются не так, как сами поля:

$$\delta\partial_\mu \Psi^l(x) = i\epsilon(x) q_l \partial_\mu \Psi^l(x) + i q_l \Psi^l(x) \partial_\mu \epsilon(x). \quad (8.1.19)$$

Чтобы второе слагаемое в этом выражении сократилось, мы «руками» вводим векторное поле $A_\mu(x)$, преобразующееся по правилу

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \varepsilon(x), \quad (8.1.20)$$

и требуем, чтобы лагранжиан зависел от $\partial_\mu \Psi^l$ и A_μ только в определенной комбинации

$$D_\mu \Psi^l \equiv \partial_\mu \Psi^l - iq_l A_\mu \Psi^l, \quad (8.1.21)$$

которая преобразуется так же, как и поле Ψ^l :

$$\delta D_\mu \Psi^l(x) = i\varepsilon(x)q_l D_\mu \Psi^l(x). \quad (8.1.22)$$

Если лагранжиан материи $\mathcal{L}_M(\Psi, D\Psi)$, построенный только из Ψ^l и $D_\mu \Psi^l$, инвариантен относительно преобразования с постоянной величиной ε , то он будет инвариантным и относительно преобразований (8.1.18), (8.1.20) с произвольной функцией $\varepsilon(x)$. Для такого лагранжиана имеем

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} = \sum_l \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\mu \Psi^l} (-iq_l \Psi^l) = -i \sum_l \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu \Psi^l} q_l \Psi^l.$$

что совпадает с (8.1.11). (Можно было бы включить в \mathcal{L}_M также и $F_{\mu\nu}$ и его производные.) С этой точки зрения, безмассовость частиц, описываемых потенциалом A_μ , есть не предположение, а следствие калибровочной инвариантности: слагаемое $-\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ в лагранжиане нарушало бы калибровочную инвариантность.

8.2. Связи и калибровочные условия

Электродинамика обладает рядом особенностей, препятствующих квантованию этой теории по типу рассмотренных в предыдущей главе теорий массивных частиц. Как обычно, можно определить канонический импульс для электромагнитного векторного потенциала равенством

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}. \quad (8.2.1)$$

Квантование по обычным правилам приводило бы к формуле

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Но в данном случае это равенство невозможно, поскольку A_μ и Π^ν подчиняются ряду связей.

Первая из них следует из того факта, что лагранжиан не зависит * от производной величины A_0 по времени, и поэтому

$$\Pi^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.2.2)$$

Это *первичная связь*, так как она следует непосредственно из структуры лагранжиана. Но здесь есть и *вторичная связь*, вытекающая из уравнения поля для величины, фиксированной первичной связью **:

$$\partial_i \Pi^i = -\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = -J^0. \quad (8.2.3)$$

так как слагаемое с производной по времени выпадает из-за равенства $F_{00} = 0$. Хотя лагранжиан материи может в общем случае зависеть от A^0 , плотность заряда зависит только от полей материи *** Q^n и канонически сопряженных им импульсов P_n :

$$J^0 = -i \sum_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Psi^l)} q_l \Psi^l = -i \sum_n P_n q_n Q^n. \quad (8.2.4)$$

Следовательно (8.2.3) есть функциональное соотношение между каноническими переменными. Оба соотношения (8.2.2) и (8.2.3) несовместимы с обычными предположениями, что

* В случае $\mathcal{L}_\nu = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/4$ имеем $\partial \mathcal{L}_\nu / \partial (\partial_\nu A_\mu) = -F^{0\mu}$, что равно нулю при $\mu = 0$, так как $F^{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор. Для лагранжиана материи \mathcal{L}_M , включающего только Ψ^l и $D_\mu \Psi^l$, предписание (8.1.21) утверждает, что \mathcal{L}_M не зависит от любых производных любых компонент A^ν . Даже если лагранжиан материи зависит от $F_{\mu\nu}$, производная $\partial \mathcal{L}_M / \partial (\partial_\nu A_\mu)$ будет также антисимметрична по μ и ν и, следовательно, обратится в нуль при $\mu = \nu = 0$.

** Как обычно, i, j , и т. д. принимают значения 1, 2, 3.

*** Ввиду истощения ресурсов алфавита, я вынужден использовать здесь иные, чем в предыдущей главе, обозначения. Символы Q^n и P_n сохранены для обозначения полей материи и канонически сопряженных им импульсов, соответственно, а электромагнитные поля и сопряженные им канонические импульсы обозначены соответственно через A_i и Π^i .

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$[Q^n(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = [P_n(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = 0.$$

Мы сталкивались с аналогичной проблемой в теории массивного векторного поля. В том случае было предложены два эквивалентных пути ее решения: либо методом скобок Дирака, либо более непосредственно, принимая в качестве канонических переменных только A_i и Π^i и разрешая аналог уравнения (8.2.3) относительно A^0 , что позволяет выразить A^0 через эти переменные. Ясно, что в данном случае нельзя использовать скобки Дирака. Функциями связей χ здесь являются Π^0 и $\partial_i \Pi_i - J^0$ (вместо $\partial_i \Pi_i - m^2 A^0 - J^0$), и их скобки Пуассона очевидно равны нулю. По терминологии Дирака, связи (8.2.2) и (8.2.3) относятся к *первому роду*. Кроме того, мы не можем устранить A^0 как динамическую переменную, выразив ее через другие переменные. Вместо того, чтобы определять A^0 во все моменты времени, уравнение (8.2.3) играет роль начального условия: если оно выполнено в один момент времени, то оно удовлетворяется во все моменты, поскольку (в силу уравнений для других полей A^i)

$$\begin{aligned} \partial_0 \left[\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} - J^0 \right] &= -\partial_i \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} - \partial_0 J^0 \\ &= +\partial_i \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{ij}} - \partial_i J_i - \partial_0 J^0 \end{aligned}$$

и условие сохранения тока дает

$$\partial_0 \left[\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} - J^0 \right] = 0. \quad (8.2.5)$$

Не следует удивляться, что у нас имеются четыре компоненты A^μ и только три полевых уравнения. Дело в том, что эта теория обладает локальной калибровочной симметрией, что делает в принципе невозможным определить значения полей в произвольные моменты времени, зная их величину и скорость изменения в любой определенный момент. Зная любое решение $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ уравнений

поля, всегда можно найти другое решение $A_\mu(\mathbf{x}, t) + \partial_\mu \varepsilon(\mathbf{x}, t)$, имеющее те же значения поля и его производной по времени при $t = 0$ (для этого нужно выбрать ε так, чтобы ее первая и вторая производные обращались в этот момент в нуль), но отличающееся от $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ в последующие моменты времени.

Из-за такой частичной произвольности $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ невозможно применить процедуру канонического квантования непосредственно к A_μ (или к \mathbf{A} , как в случае конечной массы). Из множества подходов к разрешению этой трудности особенно полезны два. Первый — современный метод калибровочно-инвариантного квантования, который обсуждается в т. II. Второй, которому мы здесь следуем, заключается в использовании калибровочной инвариантности теории для того, чтобы «выбрать калибровку». Именно, мы совершаем конечное калибровочное преобразование

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x), \quad \Psi^l(x) \rightarrow \exp(iq_l \lambda(x)) \Psi^l(x),$$

чтобы наложить на поле $A_\mu(x)$ условие, позволяющее применить методы канонического квантования. С точки зрения различных приложений полезными оказываются различные калибровки, например *

калибровка Лоренца (или Ландау): $\partial_\mu A^\mu = 0$;
 кулоновская калибровка: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$;
 временная калибровка: $A^0 = 0$;
 аксиальная калибровка: $A^3 = 0$;
 унитарная калибровка: поле Φ действительно.

Процедура канонического квантования легче всего реализуется в аксиальной или кулоновской калибровках. Преимущество кулоновской калибровки перед аксиальной состоит в том, что она сохраняет явную инвариантность относительно вращений, поэтому здесь мы предпочтем кулоновскую калибровку ².

Чтобы убедиться, что она возможна, заметим, что если A^μ не удовлетворяет условию кулоновской калибровки, то калибровочно

* Здесь Φ — любое комплексное скалярное поле с $q \neq 0$. Такое калибровочное условие используется в ситуации, когда калибровочная симметрия спонтанно нарушается за счет ненулевого вакуумного среднего поля Φ .

преобразованное поле $A^\mu + \partial^\mu \lambda$ будет ему удовлетворять, если выбрать λ таким, что $\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}$. Начиная с этого момента, предполагаем это преобразование выполненным, так что

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (8.2.6)$$

Далее удобно ограничиться теориями, в которых лагранжиан материи \mathcal{L}_M зависит от полей материи и их производных по времени, а также от поля A^μ , но не от его производных. (Стандартные скалярная и спинорная электродинамики имеют лагранжианы именно этого типа.) Тогда единственным слагаемым в лагранжиане, зависящим от $F_{\mu\nu}$, является кинетический член $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$, так что уравнение связи (8.2.3) имеет вид:

$$-\partial_i F^{i0} = J^0. \quad (8.2.7)$$

В сочетании с условием кулоновской калибровки (8.2.6) получаем:

$$-\nabla^2 A^0 = J^0, \quad (8.2.8)$$

решение которого имеет вид:

$$A^0(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \frac{J^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (8.2.9)$$

Оставшиеся степени свободы — поля A^i , $i = 1, 2, 3$, подчиняющиеся условию $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

Как отмечено выше, плотность заряда зависит только от полей материи Q^n и канонически сопряженных им импульсов P_n , так что формула (8.2.9) дает явное решение для вспомогательного поля A^0 .

8.3. Квантование в кулоновской калибровке

Все же есть еще одно препятствие, мешающее каноническому квантованию электродинамики в кулоновской калибровке. Даже после использования формулы (8.2.9) для исключения A^0 (и Π^0) из списка канонических переменных, мы не можем использовать обычные канонические коммутационные соотношения для A^i и Π_i , так

как остались еще две связи, наложенные на эти переменные*. Одна из них — условие кулоновской калибровки:

$$\chi_{1\mathbf{x}} \equiv \partial_i A^i(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.3.1)$$

Другая — вторичная связь (8.2.3), требующая, чтобы

$$\chi_{2\mathbf{x}} \equiv \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) + J^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.3.2)$$

Ни одна из этих связей не совместима с обычными коммутационными соотношениями $[A_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, поскольку действие производных $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial y^j$ на правую часть дает ненулевой результат.

Указанные связи относятся к типу, известному как *связи второго рода*. Для них существует универсальный рецепт построения коммутационных соотношений, обсуждавшийся в разделе 7.6. Заметим, что скобки Пуассона функций связи имеют вид:

$$\begin{aligned} C_{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} &= -C_{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} \equiv [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_{\text{P}} = -\nabla^2 \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ C_{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} &\equiv [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{1\mathbf{y}}]_{\text{P}} = 0, \\ C_{2\mathbf{x},1\mathbf{y}} &\equiv [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{1\mathbf{y}}]_{\text{P}} = 0, \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

где подразумевается, что для любых функционалов U и V

$$[U, V]_{\text{P}} \equiv \int d^3x \left[\frac{\delta U}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta V}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta V}{\delta A^i(\mathbf{x})} \frac{\delta U}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} \right].$$

«Матрица» C_{NM} неособенная, что как раз и отличает связи второго рода. Кроме того, полевые переменные A^i можно выразить через независимые канонические переменные, за которые можно взять, например, $Q_{1\mathbf{x}} = A^1(\mathbf{x})$, $Q_{2\mathbf{x}} = A^2(\mathbf{x})$, в то время, как A^3 дается решением уравнения (8.3.1)

* В этом разделе i, j и т. д. пробегает значения 1, 2, 3. Мы продолжаем считать все операторы взятыми в один момент времени и опускаем временной аргумент.

$$A^3(\mathbf{x}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} ds [\partial_1 A^1(x^1, x^2, s) + \partial_2 A^2(x^1, x^2, s)].$$

Аналогично, с помощью уравнения связи (8.3.2) можно выразить импульсы Π_i , канонически сопряженные полям A^i , через импульсы $P_{1\mathbf{x}}$ и $P_{2\mathbf{x}}$, канонически сопряженные переменным $Q_{1\mathbf{x}}$ и $Q_{2\mathbf{x}}$. В таких случаях, как показано в части В Приложения к предыдущей главе, если независимые переменные $Q_{1\mathbf{x}}$, $Q_{2\mathbf{x}}$, $P_{1\mathbf{x}}$ и $P_{2\mathbf{x}}$ удовлетворяют обычным каноническим коммутационным соотношениям, то коммутаторы подчиняющихся связям канонических переменных даются (с точностью до множителя i) соответствующими скобками Дирака (7.6.20). Большое преимущество этого рецепта заключается в том, что мы не должны использовать явные выражения для зависимых переменных через независимые.

Чтобы вычислить скобки Дирака, заметим, что матрица C имеет обратную:

$$(C^{-1})_{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} = -(C^{-1})_{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} = - \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|},$$

$$(C^{-1})_{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} = (C^{-1})_{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0.$$
(8.3.4)

Кроме того, неисчезающие скобки Пуассона переменных A^i и Π_i с функциями связи имеют вид

$$[A^i(\mathbf{x}), \chi_{1\mathbf{y}}]_{\text{P}} = - \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$[\Pi_i(\mathbf{x}), \chi_{2\mathbf{y}}]_{\text{P}} = + \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Отсюда, согласно (7.6.19) и (7.6.20), одновременные коммутаторы имеют вид

$$[A^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = i\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right),$$

$$[A^i(\mathbf{x}), A^j(\mathbf{y})] = [\Pi_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = 0.$$
(8.3.5)

Заметим, что эти выражения совместны с условиями кулоновской калибровки (8.3.1) и (8.3.2), что и гарантируется общими свойствами скобок Дирака.

Но что такое $\mathbf{\Pi}$ в электродинамике? Для того класса теорий, который обсуждался в предыдущем разделе, от $\dot{\mathbf{A}}$ в лагранжиане зависит только кинетический член $-\int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/4$, варьирование лагранжиана по $\dot{\mathbf{A}}$ без учета связи $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ дает:

$$\Pi_j = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^j(\mathbf{x})} = \dot{A}^j(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^j} A^0(\mathbf{x}). \quad (8.3.6)$$

Однако, если \mathbf{A} ограничено условием $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, то вариационные производные по $\dot{\mathbf{A}}$, на самом деле, плохо определены. Если при изменении $\dot{\mathbf{A}}$ на $\delta \dot{\mathbf{A}}$ вариация L равна $\delta L = \int d^3x \mathcal{P} \cdot \delta \dot{\mathbf{A}}$, то, поскольку $\nabla \cdot \delta \dot{\mathbf{A}} = 0$, верно и равенство $\delta L = \int d^3x [\mathcal{P} + \nabla F] \cdot \delta \dot{\mathbf{A}}$, где $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ — любая скалярная функция. Поэтому все, что удастся выяснить из исследования лагранжиана, сводится к тому, что $\mathbf{\Pi}$ равно $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \nabla A^0(\mathbf{x})$ плюс градиент некоторого скаляра. Эта неоднозначность устраняется условием (8.3.2), требующим, чтобы $\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = -J^0 = \nabla^2 A^0$. Так как $\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = 0$, приходим к выводу, что формула (8.3.6) действительно дает правильное выражение для $\mathbf{\Pi}$.

Хотя коммутационные соотношения (8.3.5) сравнительно просты, мы сталкиваемся с той трудностью, что $\mathbf{\Pi}$ не коммутирует с полями материи и соответствующими им каноническими импульсами. Если F — любой функционал этих степеней свободы материи, то его скобка Дирака с \mathbf{A} обращается в нуль, но скобка Дирака с $\mathbf{\Pi}$ равна

$$\begin{aligned} [F, \mathbf{\Pi}(\mathbf{z})]_{\text{D}} &= - \int d^3x d^3y [F, \chi_{2\mathbf{x}}]_{\text{P}} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} [\chi_{1\mathbf{y}}, \mathbf{\Pi}(\mathbf{z})]_{\text{P}} \\ &= - \int d^3x d^3y [F, J^0(\mathbf{x})]_{\text{P}} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \nabla \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ &= - \int d^3y [F, A^0(\mathbf{y})]_{\text{P}} \nabla \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ &= [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_{\text{P}} = [F, \nabla A^0(\mathbf{z})]_{\text{D}}. \end{aligned}$$

Чтобы упростить переход к представлению взаимодействия, мы запишем гамильтониан не через переменные \mathbf{A} и \mathbf{P} , а через переменные \mathbf{A} и $\mathbf{\Pi}_{\perp}$, где $\mathbf{\Pi}_{\perp}$ — соленоидальная часть \mathbf{P} :

$$\mathbf{\Pi}_\perp \equiv \mathbf{\Pi} - \nabla A^0 = \dot{\mathbf{A}}, \quad (8.3.7)$$

для которой $[F, \mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{z})] = 0$. Используя то, что $\mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{x})$ коммутирует с $\mathbf{\Pi}(\mathbf{y}) - \mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{y}) = \nabla A^0(\mathbf{y})$, и что $\partial_i A^0(\mathbf{x})$ коммутирует с $\partial_j A^0(\mathbf{y})$, легко убедиться, что $\mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{x})$ удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям (8.3.5), что и $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x})$, а также простому уравнению связи

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_\perp = 0. \quad (8.3.8)$$

Теперь нужно построить гамильтониан. Согласно общим результатам Приложения к гл. 7, можно, не выписывая гамильтониан явно через независимые переменные Q и P , использовать обычное соотношение между гамильтонианом и лагранжианом, записанное через подчиняющиеся связям переменные \mathbf{A} и $\mathbf{\Pi}_\perp$. В электродинамике это приводит к формуле

$$H = \int d^3x [\mathbf{\Pi}_\perp \dot{\mathbf{A}} + P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L}], \quad (8.3.9)$$

где, как упоминалось выше, Q^n и P_n — поля материи и соответствующие им канонические импульсы. (В формуле (8.3.9) можно использовать $\mathbf{\Pi}_\perp$ вместо $\mathbf{\Pi}$, так как $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.)

Для определенности, рассмотрим теорию с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{\text{материи}}, \quad (8.3.10)$$

где J_μ — ток, не содержащий A^μ , а $\mathcal{L}_{\text{материи}}$ — лагранжиан любых других полей, входящих в J_μ , кроме их электромагнитного взаимодействия, которое задается в лагранжиане (8.3.10) явно слагаемым $J_\mu A^\mu$. (Такой вид имеет лагранжиан электродинамики частиц спина 1/2, тогда как электродинамика частиц спина нуль более сложна.) Заменяя везде $\dot{\mathbf{A}}$ на $\mathbf{\Pi}_\perp$, приходим к следующему виду гамильтониана (8.3.9):

$$H = \int d^3x \left[\mathbf{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi}_\perp + \nabla A^0)^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + J^0 A^0 \right] + H_M,$$

где H_M — гамильтониан полей материи за вычетом их электромагнитного взаимодействия,

$$H_M \equiv \int d^3x (P_n \dot{Q}^n - \mathcal{L}_{\text{материи}}).$$

Используя представление (8.2.9) для A^0 , находим

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi_{\perp}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{2} J^0 A^0 \right] + H_M. \quad (8.3.11)$$

Слагаемое $J^0 A^0/2$ выглядит несколько необычно, но это не что иное, как знакомая кулоновская энергия

$$V_{\text{кулон}} = \frac{1}{2} \int d^3x J^0 A^0 = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{J^0(\mathbf{x}) J^0(\mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (8.3.12)$$

С помощью коммутационных соотношений (8.3.5) читатель может проверить, что скорость изменения любой операторной функции F от \mathbf{A} и Π дается, как и положено, формулой $i\dot{F} = [F, H]$.

8.4. Электродинамика в представлении взаимодействия

Разобьем теперь гамильтониан (8.3.11) на слагаемое H_0 , описывающее свободные частицы, и взаимодействие V :

$$H = H_0 + V, \quad (8.4.1)$$

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi_{\perp}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] + H_{\text{материи},0}, \quad (8.4.2)$$

$$V = - \int d^3x \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + V_{\text{кулон}} + V_{\text{материи}}. \quad (8.4.3)$$

где $H_{\text{материи},0}$ и $V_{\text{материи}}$ — входящие в $H_{\text{материи}}$ гамильтониан свободных частиц материи и их взаимодействия, а $V_{\text{кулон}}$ — кулоновское взаимодействие (8.3.12). Полный гамильтониан (8.4.1) не зависит от времени, поэтому выражения (8.4.2) и (8.4.3) могут быть вычислены в любой желаемый момент времени (но один и тот же для обеих слагаемых), в частности, при $t = 0$. Как и в гл. 7, переход к представлению взаимодействия производится с помощью преобразования подобия

$$\begin{aligned} V(t) &= \exp(iH_0 t) V[\mathbf{A}, \mathbf{\Pi}_\perp, Q, P]_{t=0} \exp(-iH_0 t) \\ &= V[\mathbf{a}(t), \boldsymbol{\pi}(t), q(t), p(t)], \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

где P означает здесь импульсы, канонически сопряженные полям материи Q , а любой оператор $o(\mathbf{x}, t)$ в представлении взаимодействия связан с оператором $O(\mathbf{x}, t)$ в гейзенберговском представлении при $t = 0$ равенством

$$o(\mathbf{x}, t) = \exp(iH_0 t) O(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t), \quad (8.4.5)$$

так что

$$i\dot{o}(\mathbf{x}, t) = [o(\mathbf{x}, t), H_0]. \quad (8.4.6)$$

(Мы опустили индекс \perp у $\boldsymbol{\pi}(x)$.) Так как (8.4.5) есть преобразование подобия, коммутационные соотношения при равных временах имеют тот же вид, что и в гейзенберговской картине:

$$[a^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] = i \left[\delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right], \quad (8.4.7)$$

$$[a^i(\mathbf{x}, t), a^j(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (8.4.8)$$

$$[\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)] = 0. \quad (8.4.9)$$

и аналогично для полей материи и соответствующих им канонических импульсов. По тем же причинам остаются в силе уравнения связей (8.2.6) и (8.3.8):

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (8.4.10)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = 0. \quad (8.4.11)$$

Чтобы установить соотношение между $\boldsymbol{\pi}$ и $\dot{\mathbf{a}}$, следует вычислить $\dot{\mathbf{a}}$ согласно формуле (8.4.6):

$$\begin{aligned} i\dot{a}_i(t) &= [a_i(\mathbf{x}, t), H_0] \\ &= i \int d^3 y \left[\delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] \pi_j(\mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Можно заменить $\partial/\partial x^j$ во втором слагаемом на $-\partial/\partial y^j$, проинтегрировать по частям и воспользоваться (8.4.11), что дает в результате

$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\pi}, \quad (8.4.12)$$

как и в представлении Гейзенберга. Аналогично, полевое уравнение определяется равенством

$$\begin{aligned} i\dot{\pi}_i(t) &= [\pi_i(\mathbf{x}, t), H_0] \\ &= -i \int d^3y \left[\delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] (\nabla \times \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{y}, t))_j. \end{aligned}$$

которое после использования соотношений (8.4.10) и (8.4.12) принимает вид обычного волнового уравнения

$$\square \mathbf{a} = 0. \quad (8.4.13)$$

Поскольку A^0 не является независимой полевой переменной в гейзенберговском представлении, а представляет собой функционал (8.2.9) полей материи и соответствующих им импульсов, обращаясь в нуль в пределе нулевых зарядов, то в представлении взаимодействия мы просто полагаем

$$a^0 = 0. \quad (8.4.14)$$

Наиболее общее действительное решение уравнений (8.4.10), (8.4.13) и (8.4.14) можно записать в виде

$$a^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \sum_{\sigma} \left[e^{ip \cdot x} e^\mu(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) + e^{-ip \cdot x} e^{\mu*}(\mathbf{p}, \sigma) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) \right] \quad (8.4.15)$$

где $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$, $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ — два произвольных независимых «вектора поляризации», удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (8.4.16)$$

$$e^0(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (8.4.17)$$

а $a(\mathbf{p}, \sigma)$ — пара операторных коэффициентов, отвечающих двум значениям индекса σ . Подобрать нормировку $a(\mathbf{p}, \sigma)$, можно нормировать $e^\mu(\mathbf{p}, \sigma)$ так, чтобы условие полноты имело вид

$$\sum_{\sigma} e^i(\mathbf{p}, \sigma) e^j(\mathbf{p}, \sigma)^* = \delta_{ij} - p_i p_j / |\mathbf{p}|^2. \quad (8.4.18)$$

Например, можно выбрать $e(\mathbf{p}, \sigma)$ в таком же виде, как в разделе 5.9:

$$e^\mu(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.4.19)$$

где $R(\hat{\mathbf{p}})$ — стандартное вращение, поворачивающее третью ось по направлению \mathbf{p} . Используя формулы (8.4.18) и (8.4.12), можно без труда убедиться, что коммутационные соотношения (8.4.7)–(8.4.9) будут выполнены, если (и, на самом деле, только если) операторные коэффициенты в (8.4.15) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (8.4.20)$$

$$[a(\mathbf{p}, \sigma), a(\mathbf{p}', \sigma')] = 0. \quad (8.4.21)$$

Как отмечалось выше для случая массивных частиц, этот результат следует рассматривать не столько как альтернативный вывод соотношений (8.4.20) и (8.4.21), а как проверку, что (8.4.2) дает правильный гамильтониан свободных безмассовых частиц спиральности ± 1 . Действуя в том же духе, можно подставить формулы (8.4.12) и (8.4.15) в формулу (8.4.2) и вычислить гамильтониан свободных фотонов

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d^3 p \sum_{\sigma} \frac{1}{2} p^0 [a(\mathbf{p}, \sigma), a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')]_+ \\ &= \int d^3 p \sum_{\sigma} p^0 \left(a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) + \frac{1}{2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}) \right). \end{aligned} \quad (8.4.22)$$

который получается таким, какой и следовало ожидать (если не считать несущественного бесконечного c -числового слагаемого).

Наконец, находим, что взаимодействие (8.4.4) в представлении взаимодействия имеет вид

$$V(t) = - \int d^3x j_\mu(\mathbf{x}, t) a^\mu(\mathbf{x}, t) + V_{\text{кулон}}(t) + V_{\text{материи}}(t), \quad (8.4.23)$$

где $j_\mu(x)$ выражается через ток J в представлении взаимодействия:

$$j_\mu(\mathbf{x}, t) \equiv \exp(iH_0 t) J_\mu(\mathbf{x}, 0) \exp(-iH_0 t), \quad (8.4.24)$$

кулоновское слагаемое имеет вид

$$\begin{aligned} V_{\text{кулон}}(t) &= \exp(iH_0 t) V_{\text{кулон}} \exp(-iH_0 t) \\ &= \int d^3x d^3y \frac{j^0(\mathbf{x}, t) j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \end{aligned} \quad (8.4.25)$$

а $V_{\text{материи}}(t)$ есть неэлектромагнитная часть взаимодействия полей материи в представлении взаимодействия:

$$V_{\text{материи}}(t) = \exp(iH_0 t) V_{\text{материи}} \exp(-iH_0 t). \quad (8.4.26)$$

Заметим, что в выражении (8.4.23) написано $j_\mu a^\mu$ вместо $\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}$, однако это одно и то же, поскольку мы определили 4-вектор a^μ так, что $a^0 = 0$.

8.5. Пропагатор фотона

Согласно описанным в гл. 6 фейнмановским правилам, внутренняя фотонная линия в диаграмме Фейнмана вносит в соответствующее слагаемое в S -матрице множитель, равный пропагатору

$$-i\Delta_{\mu\nu}(x - y) \equiv (\Phi_{VAC}, T\{a_\mu(x), a_\nu(y)\}\Phi_{VAC}), \quad (8.5.1)$$

где T , как обычно, обозначает хронологическое произведение. Подставляя формулу (8.4.15) для электромагнитного потенциала, находим:

$$-i\Delta_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} P_{\mu\nu}(\mathbf{p}) [e^{ip\cdot(x-y)}\theta(x-y) + e^{ip\cdot(y-x)}\theta(y-x)],$$

где

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma=\pm 1} e_{\mu}(\mathbf{p}, \sigma) e_{\nu}(\mathbf{p}, \sigma)^*, \quad (8.5.3)$$

а p^{μ} в показателях экспоненты берется с $p^0 = |\mathbf{p}|$. Напомним, что согласно формулам (8.4.17) и (8.4.18)

$$P_{ij}(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2}, \quad (8.5.4)$$

$$P_{0i}(\mathbf{p}) = P_{i0}(\mathbf{p}) = P_{00}(\mathbf{p}) = 0.$$

Как мы видели в гл. 6, тета-функции в (8.5.2) можно записать как интегралы по независимой временной компоненте q^0 4-вектора q^{μ} , лежащего вне массовой поверхности, так что формулу (8.5.2) можно переписать в виде

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon} e^{iq\cdot(x-y)}, \quad (8.5.5)$$

Таким образом, при использовании фейнмановских правил в импульсном пространстве, вклад внутренней фотонной линии, несущей 4-импульс q и соединяющей две вершины, в которых фотон рождается и уничтожается полями a^{μ} и a^{ν} , дается выражением:

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2 - i\epsilon}. \quad (8.5.6)$$

Очень полезно (хотя и кажется на первый взгляд извращением) переписать (8.5.4) в виде

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \eta_{\mu\nu} + \frac{q^0 q_{\mu} n_{\nu} + q^0 q_{\nu} n_{\mu} - q_{\mu} q_{\nu} + q^2 n_{\mu} n_{\nu}}{|\mathbf{q}|^2}, \quad (8.5.7)$$

где $n^{\mu} \equiv (0, 0, 0, 1)$ — фиксированный времениподобный вектор, q^2 как обычно равно $\mathbf{q}^2 - (q^0)^2$, но q^0 полностью произвольно. Мы

выберем q^0 в представлении (8.5.7) так, чтобы эта компонента определялась законом сохранения 4-импульса: это есть разность компонент p^0 импульсов частиц материи, входящих и выходящих из той вершины, откуда исходит фотонная линия*. Поэтому слагаемые, пропорциональные q_μ и/или q_ν , не дают вклада в S -матрицу, так как множители q_μ и q_ν действуют как производные ∂_μ и ∂_ν , а фотонные поля a_μ и a_ν связаны с токами j^μ и j^ν , которые удовлетворяют условию сохранения $\partial_\mu j^\mu = 0$ ** . Слагаемое, пропорциональное $n_\mu n_\nu$, содержит множитель q^2 , который сокращается с q^2 в знаменателе пропагатора. В результате получается выражение, совпадающее с тем, которое возникло бы от следующего слагаемого в действии:

$$-i \frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y [-ij^0(x)][-ij^0(y)] \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{|\mathbf{q}|^2} e^{iq \cdot (x-y)} .$$

Здесь интеграл по q^0 дает дельта-функцию по времени, так что это выражение эквивалентно следующей поправке к гамильтониану взаимодействия $V(t)$:

$$-\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{j^0(\mathbf{x}, t) j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} .$$

* В авторском тексте, если переводить дословно, говорится об отвечающих материи импульсах, «втекающих» и «вытекающих» из вершины. В русскоязычных текстах более употребительна другая терминология, которой мы здесь в основном придерживаемся. Именно, принято не только внешние линии, отвечающие реальным частицам на массовой поверхности, но и внутренние линии, отвечающие пропагатору некоторой частицы, отождествлять с самой частицей (называя ее виртуальной, т. е. лежащей вне массовой поверхности). Соответственно говорят: частица входит и выходит из вершины, импульс частицы и т. д. Говорят также (в частности, и автор книги), что импульс соответствующей частицы входит в вершину или выходит из вершины. — *Прим. пер.*

** Приведенные здесь аргументы не многим лучше простого размахивания руками. Результат доказывается путем детального анализа фейнмановских диаграмм,³ но простейший способ анализа проблемы связан с обсуждающимися в разделе 9.6 методами функционального интегрирования.

Она в точности сокращается со вкладом кулоновского взаимодействия (8.4.25). Таким образом, эффективно в качестве фотонного пропагатора можно взять ковариантное выражение:

$$\Delta_{\mu\nu}^{\text{эфф}}(x-y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} e^{iq \cdot (x-y)}, \quad (8.5.8)$$

причем кулоновское взаимодействие выпадает. Мы видим, что кажущееся нарушение лоренц-инвариантности в мгновенном кулоновском взаимодействии компенсируется другим кажущимся нарушением лоренц-инвариантности, заключающимся, как отмечено в разделе 5.9, в том, что поля $a^\mu(x)$ не являются 4-векторами и поэтому имеют нековариантный пропагатор. С практической точки зрения важно то, что в правилах Фейнмана в импульсном пространстве вклад внутренней фотонной линии дается выражением

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon}, \quad (8.5.9)$$

а кулоновское взаимодействие отбрасывается.

8.6. Правила Фейнмана для спинорной электродинамики

Наконец мы можем сформулировать фейнмановские правила для расчета S -матрицы в квантовой электродинамике. Для определенности рассмотрим электродинамику одного сорта частиц со спином $1/2$, зарядом $q = -e$ и массой m . Назовем эти фермионы электронами, но тот же формализм применим и для мюонов и прочих подобных частиц. Простейший калибровочно- и лоренц-инвариантный лагранжиан этой теории имеет вид *

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\Psi}(\gamma^\mu [\partial_\mu + ieA_\mu] + m)\Psi. \quad (8.6.1)$$

Тогда 4-вектор электрического тока дается простой формулой:

* В гл. 12 мы обсудим причины, по которым в лагранжиан не включаются более сложные слагаемые.

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -ie\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \quad (8.6.2)$$

Взаимодействие (8.4.23) в представлении взаимодействия здесь имеет вид:

$$V(t) = +ie \int d^3x (\bar{\Psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^\mu\Psi(\mathbf{x}, t)) a_\mu(\mathbf{x}, t) + V_{\text{кулон}}(t). \quad (8.6.3)$$

(В это выражение не входит $V_{\text{материи}}$.) Как было показано, кулоновское слагаемое $V_{\text{кулон}}(t)$ нужно только для того, чтобы сократить нековариантную и локальную по времени часть фотонного пропагатора.

Следуя общим результатам раздела 6.3, можно сформулировать фейнмановские правила в импульсном пространстве для связанной части S -матрицы в такой теории.

1. Рисуются все фейнмановские диаграммы с числом вершин вплоть до некоторого заданного. Диаграммы содержат электронные линии со стрелками и фотонные линии без стрелок, которые подсоединяются к вершинам, причем в каждой вершине есть одна входящая и одна выходящая электронные линии и одна фотонная линия. Каждой частице в начальном или конечном состоянии отвечает внешняя линия, соответственно входящая в диаграмму снизу или выходящая из диаграммы вверх. При этом электронам отвечают внешние линии со стрелками, направленными вверх, соответственно, в диаграмму или из диаграммы, позитронам отвечают внешние линии со стрелками, направленными вниз, соответственно, из диаграммы или в диаграмму. Кроме того, имеется столько внутренних линий, сколько необходимо, чтобы к каждой вершине подсоединялось нужное число линий. Каждой внутренней линии приписывается (и рисуется рядом с ней) 4-импульс вне массовой поверхности*, определенным образом направленный вдоль линии (по соглашению, импульс направлен вдоль стрелок на электронных линиях). Каждой внешней линии приписывается (и рисуется рядом с ней) импульс частицы и z -компонента спина (для электрона) или спиральность (для фотона) в начальном и конечном состояниях.

2. Элементом диаграммы сопоставляются определенные множители по следующим правилам.

* Говорят также, что линия несет на себе 4-импульс, который, как уже отмечалось в прим. пер. на с. 474, отождествляют с 4-импульсом соответствующей (виртуальной) частицы. — *Прим. пер.*

Вершины

Каждой вершине приписывается (и рисуется рядом с ней) четырехкомпонентный дираковский индекс α около электронной линии со стрелкой, входящей в вершину, дираковский индекс β около электронной линии со стрелкой, выходящей из вершины, и пространственно-временной индекс μ около фотонной линии. Каждой такой вершине сопоставляется множитель

$$(2\pi)^4 e(\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \delta^4(k - k' + q), \quad (8.6.4)$$

где k и k' — 4-импульсы электронов, входящие в вершину и выходящие из вершины, а q — 4-импульс фотона, входящий в вершину (или взятый с обратным знаком импульс фотона, выходящий из вершины).

Внешние линии

Каждой внешней линии приписывается (и рисуется рядом с ней) 3-импульс \mathbf{p} и z -компонента спина или спиральность σ частицы в начальном или конечном состоянии.

Каждой линии, отвечающей электрону в конечном состоянии и выходящей из вершины с дираковским индексом β около этой линии, сопоставляется множитель *

$$\frac{\bar{u}_\beta(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}} \quad (8.6.5)$$

Каждой линии, отвечающей позитрону в конечном состоянии и входящей в вершину с дираковским индексом α около этой линии, сопоставляется множитель

$$\frac{v_\alpha(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}} \quad (8.6.6)$$

Каждой линии, отвечающей электрону в начальном состоянии и входящей в вершину с дираковским индексом α около этой линии, сопоставляется множитель

$$\frac{u_\alpha(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}} \quad (8.6.7)$$

* Из выражения для взаимодействия (8.6.4) была предварительно выделена матрица β , так что вместо u^\dagger и v^\dagger возникли \bar{u} и \bar{v} .

Каждой линии, отвечающей позитрону в начальном состоянии и выходящей из вершины с дираковским индексом β около этой линии, сопоставляется множитель

$$\frac{\bar{v}_\beta(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (8.6.8)$$

Здесь u и v — четырехкомпонентные спиноры, свойства которых обсуждались в разделе 5.5.

Каждой линии, отвечающей фотону в конечном состоянии и подсоединенной к вершине с пространственно-временным индексом μ около этой линии, сопоставляется множитель

$$\frac{e_\mu^*(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}}. \quad (8.6.9)$$

Каждой линии, отвечающей фотону в начальном состоянии и подсоединенной к вершине с пространственно-временным индексом μ около этой линии, сопоставляется множитель

$$\frac{e_\mu(\mathbf{p}, \sigma)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}}. \quad (8.6.10)$$

Здесь e_μ — 4-вектор поляризации фотона, обсуждавшийся в предыдущем разделе.

Внутренние линии

Каждой внутренней электронной линии с 4-импульсом k , идущей от вершины с дираковским индексом β к другой вершине с дираковским индексом α , сопоставляется множитель

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{[-ik + m]_{\alpha\beta}}{k^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (8.6.11)$$

(Мы используем здесь очень удобное восходящее к Дираку «перечеркивание»: для любого 4-вектора v^μ символ \bar{v} означает произведение $\gamma_\mu v^\mu$.)

Каждой внутренней фотонной линии с 4-импульсом q и соединяющей две вершины с пространственно-временными индексами μ и ν , следует сопоставить множитель

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon}. \quad (8.6.12)$$

3. Произведение всех указанных множителей интегрируется по 4-импульсам всех внутренних линий и суммируется по всем дираковским и пространственно-временным индексам.

4. Все результаты, полученные таким образом для каждой фейнмановской диаграммы, складываются. Могут понадобиться дополнительные комбинаторные множители и фермионные знаки, описанные в пп. 5 и 6 раздела 6.1.

Трудности при вычислении вкладов фейнмановских диаграмм резко нарастают с ростом числа внутренних линий и вершин, поэтому важно иметь представление о том, какие численные факторы подавляют вклады более сложных диаграмм. Мы оценим эти численные факторы, учитывая не только степени электрического заряда e , входящего в вершины, но и множители 2 и π от вершин, пропагаторов и интегралов по импульсному пространству.

Рассмотрим связную фейнмановскую диаграмму с V вершинами, I внутренними линиями, E внешними линиями и L петлями. Эти величины не являются независимыми, а связаны соотношениями, уже использованными в разделе 6.3:

$$L = I - V + 1, \quad 2I + E = 3V.$$

От каждой вершины имеем множитель $e(2\pi)^4$, от каждой внутренней линии – множитель $(2\pi)^{-4}$, кроме того, каждой петле соответствует интеграл по четырехмерному импульсному пространству. Элемент объема в четырехмерном евклидовом пространстве, выраженный через радиальный параметр k , равен $\pi^2 k^2 dk^2$ *, так что каждая петля вносит множитель π^2 . Таким образом, диаграмма содержит множитель

* Предполагается, что выполнен так называемый евклидов (виковский) поворот (см. ниже раздел 11.2), и интегрирование ведется по евклидову импульсному пространству. Кроме того, предполагается, что результат интегрирования не зависит от углов и по ним проведено усреднение (объем единичной сферы равен $2\pi^2$). — *Прим. ред.*

$$(2\pi)^{4V} e^V (2\pi)^{-4I} \pi^{2L} = (2\pi)^4 e^{E-2} \left(\frac{e^2}{16\pi^2} \right)^L.$$

Число E внешних линий в данном процессе фиксировано, поэтому видно, что параметр разложения, определяющий подавление вклада фейнмановских диаграмм с каждой дополнительной петлей, равен

$$\frac{e^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha}{4\pi} = 5,81 \times 10^{-4}.$$

К счастью, эта величина мала, так что можно добиться достаточной точности, рассчитав вклад фейнмановских диаграмм с небольшим числом петель.

* * *

Следует добавить несколько слов о спиновых состояниях фотонов и электронов в реальных экспериментах, когда не каждая из частиц в начальном и конечном состояниях обладает определенной спиральностью или z -компонентой спина. Особенно это относится к фотонам, которые на практике часто находятся не в состоянии с определенной спиральностью, а в состоянии с поперечной или эллиптической поляризацией. Как показано в предыдущем разделе, векторы поляризации фотонов со спиральностью ± 1 равны

$$e(\mathbf{p}, \pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $R(\hat{\mathbf{p}})$ – стандартное вращение, переводящее ось z по направлению вектора \mathbf{p} . Эти состояния фотонов не единственно возможные; в общем случае состояние фотона есть линейная комбинация спиральных состояний $\Psi_{\mathbf{p}, \pm 1}$,

$$\alpha_+ \Psi_{\mathbf{p}, +1} + \alpha_- \Psi_{\mathbf{p}, -1}, \quad (8.6.13)$$

должным образом нормированная:

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1. \quad (8.6.14)$$

Чтобы вычислить матричный элемент поглощения или испускания такого фотона, нужно просто заменить $e_\mu(\mathbf{p}, \pm 1)$ в фейнмановских правилах на

$$e_\mu(\mathbf{p}) = \alpha_+ e_\mu(\mathbf{p}, +1) + \alpha_- e_\mu(\mathbf{p}, -1). \quad (8.6.15)$$

Векторы поляризации с определенной спиральностью удовлетворяют условию нормировки

$$e_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda') e^\mu(\mathbf{p}, \lambda) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (8.6.16)$$

и поэтому в общем случае

$$e_\mu^*(\mathbf{p}) e^\mu(\mathbf{p}) = 1. \quad (8.6.17)$$

Предельными случаями являются *круговая поляризация*, для которой $\alpha_- \ll 0$ или $\alpha_+ = 0$, и *линейная поляризация*, для которой $|\alpha_+| = |\alpha_-| = 1/\sqrt{2}$. В последнем случае, подобрав общую фазу состояния (8.6.13), можно сделать α_+ и α_- комплексно сопряженными друг другу, так что

$$\alpha_\pm = \exp(\mp i\phi) / \sqrt{2}. \quad (8.6.18)$$

Тогда в правилах Фейнмана нужно использовать вектор поляризации

$$e(\mathbf{p}) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.6.19)$$

Здесь ϕ – азимутальный угол вектора поляризации фотона в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{p} . Заметим, что в данном случае вектор поляризации фотона *действителен*, что возможно только

для линейной поляризации. Между крайними случаями круговой и линейной поляризации находятся состояния *эллиптической* поляризации, для которых $|\alpha_+|$ и $|\alpha_-|$ не равны нулю и друг другу.

В более общем случае, начальный фотон может быть приготовлен как статистическая смесь спиновых состояний. В самом общем случае эта смесь может содержать любое число состояний произвольных поляризаций $e_\mu^{(r)}(\mathbf{p})$, входящих с вероятностью P_r . Вероятность поглощения такого фотона в данном процессе имеет вид

$$\Gamma = \sum_r P_r |e_\mu^{(r)}(\mathbf{p}) M^\mu|^2 = M^{\mu*} M^\nu \rho_{\nu\mu}, \quad (8.6.20)$$

где ρ — матрица плотности

$$\rho_{\nu\mu} \equiv \sum_r P_r e_\nu^{(r)}(\mathbf{p}) e_\mu^{(r)*}(\mathbf{p}). \quad (8.6.21)$$

Поскольку очевидно, что ρ — эрмитова положительная матрица с единичным следом (так как $\sum_r P_r = 1$), причем $\rho_{\nu 0} = \rho_{0\mu} = 0$ и $\rho_{\nu\mu} p^\nu = \rho_{\nu\mu} p^\mu = 0$, ее можно записать в виде

$$\rho_{\nu\mu} = \sum_{s=1,2} \lambda_s e_\nu(\mathbf{p}; s) e_\mu^*(\mathbf{p}; s), \quad (8.6.22)$$

где $e_\mu(\mathbf{p}; s)$ — два ортонормированных собственных вектора матрицы ρ , для которых

$$e_0(\mathbf{p}; s) = e_\mu(\mathbf{p}; s) p^\mu = 0, \quad (8.6.23)$$

а λ_s — соответствующие собственные значения, причем

$$\lambda_s \geq 0, \quad \sum_{s=1,2} \lambda_s = 1.$$

Теперь можно записать вероятность процесса поглощения фотона в следующем виде

$$\Gamma = \sum_{s=1,2} \lambda_s |e_\nu(\mathbf{p}; s) M^\nu|^2. \quad (8.6.24)$$

Отсюда следует, что любая статистическая смесь начальных состояний фотона всегда эквивалентна смеси всего двух ортонормированных поляризаций $e_\nu(\mathbf{p}; s)$ с вероятностями λ_s .

В частности, если мы совершенно ничего не знаем о поляризации начального фотона, то две вероятности λ_s для векторов $e_\nu(\mathbf{p}; s)$ равны, так что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, и матрица плотности (а отсюда и вероятность поглощения) есть среднее значение по начальным поляризациям:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{s=1,2} e_i(\mathbf{p}; s) e_j^*(\mathbf{p}; s) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) . \quad (8.6.25)$$

К счастью, этот результат не зависит от конкретной пары векторов поляризации $e_i(\mathbf{p}; s)$, по которым мы проводим усреднение. Для неполяризованных фотонов можно усреднять вероятность поглощения по любой паре ортонормированных векторов поляризации. Аналогично, если не делается попыток измерить поляризацию фотона в конечном состоянии, тогда вероятность можно рассчитать путем суммирования по любой паре ортонормированных векторов поляризации конечного фотона.

Аналогичные замечания применимы к электронам и позитронам. Если, как это обычно имеет место, не делается попыток приготовить электрон или позитрон так, чтобы одни спиновые состояния были предпочтительнее других, тогда вероятность должна вычисляться путем *усреднения* по любым двум ортонормированным начальным спиновым состояниям, например, по состояниям с z -компонентами спина $\sigma = \pm 1/2$. Если не пытаются измерить спиновые состояния конечных электрона или позитрона, то нужно *суммировать* вероятность по любым двум ортонормированным конечным спиновым состояниям, например, по состояниям с z -компонентами спина $\sigma = \pm 1/2$. Такие суммы можно вычислить с помощью соотношений (5.5.37) и (5.5.38):

$$\sum_{\sigma} u_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma) = \left(\frac{-i\not{p} + m}{2p^0} \right)_{\alpha\beta} , \quad (8.6.26)$$

$$\sum_{\sigma} v_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{v}_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma) = \left(\frac{-i\not{p} - m}{2p^0} \right)_{\alpha\beta} , \quad (8.6.27)$$

где $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Например, если начальное состояние содержит электрон с импульсом \mathbf{p} и z -компонентой спина σ и позитрон с импульсом \mathbf{p}' и z -компонентой спина σ' , то матричный элемент этого процесса будет иметь вид $\bar{v}_\alpha(\mathbf{p}', \sigma') \cdot \mathcal{M}_{\alpha\beta} u_\beta(\mathbf{p}, \sigma)$. Поэтому, если не наблюдаются спиновые состояния ни электрона, ни позитрона, вероятность будет пропорциональна

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{\sigma', \sigma} |(\bar{v}_\alpha(\mathbf{p}', \sigma') \cdot \mathcal{M}_{\alpha\beta} u_\beta(\mathbf{p}, \sigma))|^2 \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ \beta \cdot \mathcal{M}^\dagger \beta \left(\frac{-i\not{p} - m}{2p^0} \right) \cdot \mathcal{M} \left(\frac{-i\not{p} + m}{2p^0} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Техника вычисления таких следов описана в Приложении к этой главе.

8.7. Комptonовское рассеяние

В качестве примера использования методов, изложенных в этой главе, рассмотрим рассеяние фотона на электроне (или другой частице со спином $1/2$ и зарядом $-e$) в низшем порядке по e . Пусть начальные и конечные импульсы и векторы поляризации фотонов равны соответственно k^μ, e^μ и k'^μ, e'^μ , где $k^0 = |\mathbf{k}|$ и $k'^0 = |\mathbf{k}'|$,

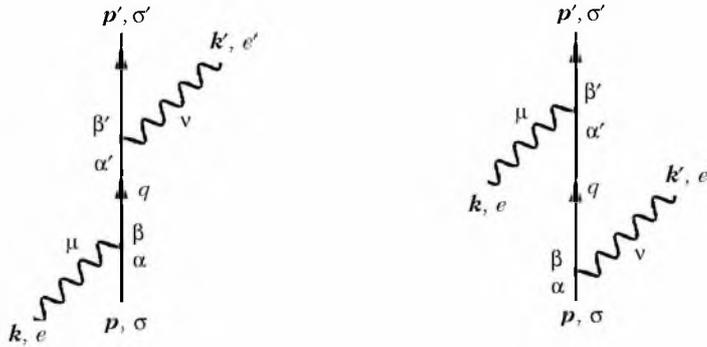


Рис. 8.1. Две фейнмановские диаграммы низшего порядка для комptonовского рассеяния. Сплошные линии — электроны, волнистые линии — фотоны

а начальные и конечные импульсы и z -компоненты спина электронов равны соответственно p^μ , σ и p'^μ , σ' , где $p^0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$, $p'^0 = (\mathbf{p}'^2 + m^2)^{1/2}$, m — масса электрона. Фейнмановские диаграммы низшего порядка для этого процесса показаны на рис. 8.1. Используя сформулированные в предыдущем разделе правила, находим соответствующий матричный элемент рассеяния:

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') = & \\
& \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')_\beta}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e_\nu^*}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k'^0}} \frac{u(\mathbf{p}, \sigma)_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e_\mu}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}} \\
& \times \int d^4q \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right] \left[\frac{-iq + m}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right]_{\alpha\beta} \\
& \times \left\{ \left[e(2\pi)^4 \gamma_{\beta'\alpha'}^\nu \delta^4(q - p' - k') \right] \left[e(2\pi)^4 \gamma_{\beta\alpha}^\mu \delta^4(p - q + k) \right] \right. \\
& \left. + \left[e(2\pi)^4 \gamma_{\beta'\alpha'}^\mu \delta^4(q - p' + k) \right] \left[e(2\pi)^4 \gamma_{\beta\alpha}^\nu \delta^4(p - q - k') \right] \right\}. \tag{8.7.1}
\end{aligned}$$

Производя (тривиальное) интегрирование по q , собирая все множители i и 2π и переписывая результат в матричных обозначениях, имеем более простое выражение:

$$\begin{aligned}
S = & \frac{-ie^2 \delta^4(p' + k' - p - k)}{(2\pi)^2 \sqrt{2k'^0} 2k^0} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[e^* \left(\frac{-i(p + k) + m}{(p + k)^2 + m^2} \right) e \right. \\
& \left. + e \left(\frac{-i(p - k') + m}{(p - k')^2 + m^2} \right) e^* \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \tag{8.7.2}
\end{aligned}$$

(Здесь e^* означает не $(e)^*$, а $e_\mu^* \gamma^\mu$. Кроме того, мы опускаем $-i\epsilon$, так как знаменатели не обращаются в нуль.) Поскольку $p^2 = -m^2$ и $k^2 = k'^2 = 0$, знаменатели можно упростить:

$$(p + k)^2 + m^2 = 2(p \cdot k), \tag{8.7.3}$$

$$(p - k')^2 + m^2 = -2(p \cdot k'). \tag{8.7.4}$$

Общее определение (3.3.2) «фeyнмановской амплитуды» M в данном случае (поскольку предполагается, что какое-то рассеяние происходит) принимает вид

$$S = -2\pi i \delta^4(p' + k' - p - k)M, \quad (8.7.5)$$

так что

$$M = \frac{e^2}{4(2\pi)^3 \sqrt{k'^0 k^0}} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left\{ \not{\epsilon}'^* [-i(\not{p} + \not{k}) + m] \not{\epsilon} / p \cdot k - \not{\epsilon} [-i(\not{p} - \not{k}') + m] \not{\epsilon}'^* / p \cdot k' \right\} u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (8.7.6)$$

Дифференциальное сечение определяется через M формулой (3.4.15), которая в данном случае имеет вид

$$d\sigma = (2\pi)^4 u^{-1} |M|^2 \delta^4(p' + k' - p - k) d^3 p' d^3 k'. \quad (8.7.7)$$

Так как одна из частиц имеет нулевую массу, из формулы (3.4.17) для относительной скорости находим:

$$u = |p \cdot k| / p^0 k^0. \quad (8.7.8)$$

Чтобы продолжить вычисления, удобно перейти в специальную систему отсчета. Поскольку электроны в атомах являются нерелятивистскими, в опытах по рассеянию фотонов больших энергий (рентгеновских лучей или γ -квантов) на электронах обычно (хотя и не всегда) можно считать, что начальный электрон покоится. Примем здесь именно эту систему отсчета, так что

$$\mathbf{p} = 0, \quad p^0 = m. \quad (8.7.9)$$

Тогда скорость (8.7.8) равна просто

$$u = 1. \quad (8.7.10)$$

Чтобы запись была компактнее, обозначим энергии фотонов через

$$\omega = k^0 = |\mathbf{k}| = -p \cdot k / m, \quad (8.7.11)$$

$$\omega' = k'^0 = |\mathbf{k}'| = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}' / m. \quad (8.7.12)$$

Наличие дельта-функции от 3-импульса в формуле (8.7.7) позволяет проинтегрировать по \mathbf{p}' , полагая $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$. В результате остается дельта-функция от энергии

$$\delta(p'^0 + k'^0 - p^0 - k^0) = \delta(\sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + m^2} + \omega' - m - \omega). \quad (8.7.13)$$

Этим фиксируется значение ω' , удовлетворяющее условию

$$\sqrt{\omega^2 - 2\omega\omega' \cos \theta + \omega'^2 + m^2} = \omega + m - \omega'.$$

где θ – угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Возводя обе части в квадрат и сокращая слагаемые ω'^2 , получаем *

$$\omega' = \omega \frac{m}{m + \omega(1 - \cos \theta)} \equiv \omega_c(\theta). \quad (8.7.14)$$

Дельта-функцию от энергии можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta(p'^0 + k'^0 - p^0 - k^0) &= \frac{\delta(\omega' - \omega_c(\theta))}{|\partial[\sqrt{\omega^2 - 2\omega\omega' \cos \theta + \omega'^2 + m^2} + \omega']/\partial\omega'|} \\ &= \frac{\delta(\omega' - \omega_c(\theta))}{|(\omega' - \omega \cos \theta) / p'^0 + 1|} = \frac{p'^0 \omega'}{m\omega} \delta(\omega' - \omega_c(\theta)). \end{aligned} \quad (8.7.15)$$

Кроме того, дифференциал d^3k' можно записать как

* Эквивалентно эту формулу можно записать в виде, свидетельствующем об увеличении длины волны при рассеянии:

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1 - \cos \theta}{m}.$$

Проверка этого соотношения А. Комптоном в 1922-23 годах в опытах по рассеянию рентгеновских лучей на электронах сыграла ключевую роль в подтверждении гипотезы Эйнштейна 1905 года о световых квантах, получивших вскоре после обнародования Комптоном результатов своих экспериментов название фотонов.

$$d^3k' = \omega'^2 d\omega' d\Omega, \quad (8.7.16)$$

где $d\Omega$ — телесный угол, в который рассеивается конечный фотон. Оставшаяся в (8.7.15) дельта-функция служит как раз для того, чтобы исключить дифференциал $d\omega'$ в (8.7.16), и мы приходим к дифференциальному сечению

$$d\sigma = (2\pi)^4 |M|^2 \frac{p'^0 \omega'^3}{m\omega} d\Omega, \quad (8.7.17)$$

где $p'^0 = m + \omega - \omega'$, и ω' определяется формулой (8.7.14).

Обычно z -компоненты спина начального или конечного электрона не измеряются. В таких случаях следует просуммировать по σ' и усреднить по σ , или иными словами вычислить полусумму по σ и σ' :

$$d\bar{\sigma}(\mathbf{p} + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}' + \mathbf{k}', e) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma', \sigma} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e). \quad (8.7.18)$$

Чтобы вычислить эту сумму, воспользуемся стандартной формулой

$$\sum_{\sigma} u_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}_{\beta}(\mathbf{p}, \sigma) = \frac{(-i\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{2p^0} \quad (8.7.19)$$

и аналогичной формулой для суммы по σ' . Согласно этим формулам, для произвольной 4×4 матрицы A имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \sigma'} |\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') A u(\mathbf{p}, \sigma)|^2 &= \sum_{\sigma, \sigma'} (\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') A u(\mathbf{p}, \sigma)) (\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) \beta A^{\dagger} \beta u(\mathbf{p}', \sigma')) \\ &= \sum_{\sigma, \sigma'} A_{\beta\alpha} u_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}_{\gamma}(\mathbf{p}, \sigma) (\beta A^{\dagger} \beta)_{\gamma\delta} u_{\delta}(\mathbf{p}', \sigma') \bar{u}_{\beta}(\mathbf{p}', \sigma') \\ &= \text{Tr} \left\{ A \left(\frac{-i\not{p} + m}{2p^0} \right) (\beta A^{\dagger} \beta) \left(\frac{-i\not{p}' + m}{2p'^0} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.7.20)$$

Напомним, что $\beta \gamma_{\mu}^{\dagger} \beta = -\gamma_{\mu}$, тогда, подставляя A из формулы (8.7.6), получаем:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 &= \frac{e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \\
&\times \text{Tr} \left[\left\{ \not{\epsilon}'^* \frac{[-i(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + m]}{p \cdot k} \not{\epsilon} - \not{\epsilon} \frac{[-i(\mathbf{p} - \mathbf{k}') + m]}{p \cdot k'} \not{\epsilon}'^* \right\} (-i\not{p} + m) \right. \\
&\times \left. \left\{ \not{\epsilon}^* \frac{[-i(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + m]}{p \cdot k} \not{\epsilon}' - \not{\epsilon}' \frac{[-i(\mathbf{p} - \mathbf{k}') + m]}{p \cdot k'} \not{\epsilon}^* \right\} (-i\not{p}' + m) \right]. \quad (8.7.21)
\end{aligned}$$

(Вновь напомним, что $\not{\epsilon}^*$ означает не $(\not{\epsilon})^*$, а $e_\mu^* \gamma^\mu$, и аналогично для $\not{\epsilon}'^*$.) Мы проводим вычисления в «калибровке», в которой

$$e \cdot p = e^* \cdot p = e' \cdot p = e'^* \cdot p = 0, \quad (8.7.22)$$

например, в кулоновской калибровке в лабораторной системе, где $e^0 = e'^0 = 0$ и $\mathbf{p} = 0$.^{*} Тогда

$$\begin{aligned}
[-i\not{p} + m] \not{\epsilon} [-i\not{p} + m] &= \not{\epsilon} [-i\not{p} + m] [-i\not{p} + m] = \\
&= \not{\epsilon} (\mathbf{p}^2 + m^2) = \not{\epsilon} (p_\mu p^\mu + m^2) = 0,
\end{aligned}$$

и аналогично для e'^* , $\not{\epsilon}^*$ и $\not{\epsilon}'$. Поэтому формулу (8.7.21) можно сильно упростить:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 &= \frac{-e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \text{Tr} \left[\left\{ \frac{\not{\epsilon}'^* \not{k} \not{\epsilon}}{p \cdot k} + \frac{\not{\epsilon} \not{k}' \not{\epsilon}'^*}{p \cdot k'} \right\} (-i\not{p} + m) \right. \\
&\times \left. \left\{ \frac{\not{\epsilon}^* \not{k} \not{\epsilon}'}{p \cdot k} + \frac{\not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}^*}{p \cdot k'} \right\} (-i\not{p}' + m) \right]. \quad (8.7.23)
\end{aligned}$$

^{*} Строго говоря, эта фраза становится понятной только после гл. 9, где показано, что при вычислении матричных элементов процессов с участием реальных электронов и позитронов к вектору поляризации фотона e с 4-импульсом k всегда можно добавить 4-вектор, пропорциональный k : $e^\mu \rightarrow e^\mu + k^\mu$. — *Прим. ред.*

След произведения любого нечетного числа γ -матриц обращается в нуль, так что последнее выражение разбивается на слагаемые нулевого и второго порядка по m :

$$\sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 = \frac{e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \left(\frac{T_1}{(p \cdot k)^2} + \frac{T_2}{(p \cdot k)(p \cdot k')} + \frac{T_3}{(p \cdot k)(p \cdot k')} + \frac{T_4}{(p \cdot k')^2} - \frac{m^2 t_1}{(p \cdot k)^2} - \frac{m^2 t_2}{(p \cdot k)(p \cdot k')} - \frac{m^2 t_3}{(p \cdot k)(p \cdot k')} - \frac{m^2 t_4}{(p \cdot k')^2} \right), \quad (8.7.24)$$

где

$$T_1 = \text{Tr}\{e'^* k e p e^* k e' p'\}, \quad (8.7.25)$$

$$T_2 = \text{Tr}\{e'^* k e p e' k' e^* p'\}, \quad (8.7.26)$$

$$T_3 = \text{Tr}\{e k' e'^* p e^* k e' p'\}, \quad (8.7.27)$$

$$T_4 = \text{Tr}\{e k' e'^* p e' k' e^* p'\}, \quad (8.7.28)$$

$$t_1 = \text{Tr}\{e'^* k e e^* k e'\}, \quad (8.7.29)$$

$$t_2 = \text{Tr}\{e'^* k e e' k' e^*\}, \quad (8.7.30)$$

$$t_3 = \text{Tr}\{e k' e'^* e^* k e'\}, \quad (8.7.31)$$

$$t_4 = \text{Tr}\{e k' e'^* e' k' e^*\}. \quad (8.7.32)$$

В Приложении к этой главе показано, как выразить любой след $\text{Tr}\{abcd\dots\}$ через сумму произведений скалярных произведений 4-векторов a, b, c, d, \dots . В общем случае, вклады от произведений 6 или 8 γ -матриц типа t_k или T_k будут даваться суммой соответственно 15 или 105 слагаемых, но, к счастью, большинство скалярных произведений равно нулю; в дополнение к соотношениям (8.7.22) имеем $k \cdot k = k' \cdot k' = 0$. (Кроме того, $e \cdot e^* = e' \cdot e'^* = 1$.) Чтобы упростить дальнейшие вычисления, ограничимся случаем *линейной* поляризации, когда e^μ и e'^μ действительны. Опуская звездочки в (8.7.25), имеем:

$$T_1 = \text{Tr}\{e' k e p e k e' p'\}.$$

Так как $e^\mu p_\mu = 0$ и $e^\mu e_\mu = 1$, получаем:

$$\not{e} \not{p} \not{e} = -\not{p} \not{e} \not{e} = -\not{p},$$

так что

$$T_1 = -\text{Tr}\{\not{e}' \not{k} \not{p} \not{k} \not{e}' \not{p}'\}.$$

Кроме того, $k^\mu k_\mu = 0$ и

$$\not{k} \not{p} \not{k} = -\not{k} \not{k} \not{p} + 2\not{k}(p \cdot k) = 2\not{k}(p \cdot k),$$

откуда

$$T_1 = -2(p \cdot k) \text{Tr}\{\not{e}' \not{k} \not{e}' \not{p}'\}.$$

С помощью формулы (8.A.6) получаем:

$$T_1 = -8(p \cdot k)[2(e' \cdot k)(e' \cdot p') - (k \cdot p')].$$

Удобно совершить подстановки:

$$e' \cdot p' = e' \cdot (p + k - k') = e' \cdot k,$$

$$k \cdot p' = -\frac{1}{2}(p' - k)^2 - \frac{1}{2}m^2 = -\frac{1}{2}(p - k')^2 - \frac{1}{2}m^2 = p \cdot k'.$$

так что

$$T_1 = -16(p \cdot k)(e' \cdot k)^2 + 8(p \cdot k)(p \cdot k'). \quad (8.7.33)$$

Аналогичное (хотя и более длинное) вычисление дает:

$$\begin{aligned} T_2 = T_3 = & -8(e \cdot k')^2(p \cdot k) + 16(e \cdot e')^2(p \cdot k')(p \cdot k) + 8(e \cdot e')^2(k \cdot k')m^2 \\ & - 8(e \cdot e')m^2(k \cdot e')(k' \cdot e) + 8(e' \cdot k)^2(p \cdot k') \\ & - 4(k \cdot p)^2 + 4(k \cdot k')(p \cdot p') - 4(k \cdot p')(p \cdot k'), \end{aligned} \quad (8.7.34)$$

$$T_4 = 16(p \cdot k')(e \cdot k')^2 + 8(p \cdot k)(p \cdot k'), \quad (8.7.35)$$

$$t_1 = t_4 = 0, \quad (8.7.36)$$

$$t_2 = t_3 = -8(e \cdot e')(k \cdot e')(k' \cdot e) + 8(k \cdot k')(e \cdot e')^2 - 4(k \cdot k'). \quad (8.7.37)$$

Собирая все эти слагаемые в формуле (8.7.24), получаем:

$$\sum_{\sigma, \sigma'} |M|^2 = \frac{e^4}{64(2\pi)^6 \omega \omega' p^0 p'^0} \left[\frac{8(k \cdot k')^2}{(k \cdot p)(k' \cdot p)} + 32(e \cdot e')^2 \right]. \quad (8.7.38)$$

Это выражение верно в любой лоренцовской системе. В лабораторной системе имеем:

$$k \cdot k' = \omega \omega' (\cos \theta - 1) = m \omega \omega' \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right),$$

$$p \cdot k = -m\omega, \quad p \cdot k' = -m\omega'.$$

Комбинируя формулы (8.7.38) и (8.7.17), приходим к следующему выражению для сечения в лабораторной системе:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') &= \\ &= \frac{e^4 \omega'^2 d\Omega}{64\pi^2 m^2 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4(e \cdot e')^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.7.39)$$

Это знаменитая формула, полученная О. Клейном и Й. Нишиной в 1929 году (с помощью старой теории возмущений).

Как обсуждалось в разделе 8.6, если налетающий фотон не находится в состоянии с определенной поляризацией (как это обычно и бывает), следует усреднить по двум ортонормированным значениям \mathbf{e} . В результате такого усреднения имеем:

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{e}} e_i e_j = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j),$$

и соответственно дифференциальное сечение принимает вид:

$$\frac{1}{4} \sum_{\mathbf{e}, \sigma, \sigma'} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') = \frac{e^4 \omega'^2 d\Omega}{64\pi^2 m^2 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{e}')^2 \right]. \quad (8.7.40)$$

Видим, что рассеянный фотон преимущественно поляризован в направлении, перпендикулярном направлению распространения как начального, так и конечного фотонов, т. е. перпендикулярно плоскости рассеяния. Это хорошо известный результат, ответственный, в частности, за поляризацию света от обращающихся друг около друга двойных звезд*.

Чтобы рассчитать сечение для тех экспериментов, в которых не измеряется поляризация конечного фотона, следует просуммировать выражение (8.7.40) по e' , используя формулу:

$$\sum_{e'} e'_i e'_j = \delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}'_i \hat{\mathbf{k}}'_j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{e, e', \sigma, \sigma'} d\sigma(\mathbf{p}, \sigma + \mathbf{k}, e \rightarrow \mathbf{p}', \sigma' + \mathbf{k}', e') &= \\ &= \frac{e^4 \omega'^2 d\Omega}{32\pi^2 m^2 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 1 + \cos^2 \theta \right], \end{aligned} \quad (8.7.41)$$

где θ – угол между направлениями \mathbf{k} и \mathbf{k}' . В нерелятивистском случае $\omega \ll m$ и формула (8.7.41) принимает вид:

$$\frac{1}{4} \sum_{e, e', \sigma, \sigma'} d\sigma = \frac{e^4 d\Omega}{32\pi^2 m^2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (8.7.42)$$

Интеграл по телесному углу легко вычисляется:

$$\int (1 + \cos^2 \theta) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{16\pi}{3},$$

* Свет одной из звезд поляризуется при рассеянии на свободных электронах внешней атмосферы второй, более холодной звезды в то время, когда обе находятся на одном луче зрения. Обычно такая поляризация не детектируется, поскольку она исчезает, когда астрономы суммируют свет от всех частей звездного диска. Но в те моменты времени, когда более холодная звезда заслоняет свет только с одной стороны более горячей звезды, поляризация света от двойных звездных систем наблюдалась.

В результате полное сечение при $\omega \ll m$ имеет вид:

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi^2 m^2}. \quad (8.7.43)$$

Часто эту формулу записывают в виде $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$, где $r_0 = e^2/(4\pi m) = 2,818 \cdot 10^{-13}$ см называется *классическим радиусом электрона*. Формула (8.7.43) называется *томсоновским сечением*, в честь Дж.Дж. Томсона, открывшего электрон. Формулы (8.7.42) и (8.7.43) первоначально были получены в рамках классических механики и электродинамики при расчете переизлучения * света нерелятивистским точечным зарядом в поле плоской электромагнитной волны.

8.8. Обобщение: калибровочные поля как p -формы **

Антисимметричный тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}$ в электромагнетизме представляет частный случай некоторого общего класса тензоров, играющих важную роль в физике и математике. По определению, p -форма есть антисимметричный ковариантный тензор ранга p . Имея p -форму $t_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p}$, можно построить $(p+1)$ -форму, которая носит название *внешней производной* *** dt , взяв производную и произведя антисимметризацию по всем индексам:

$$\begin{aligned} (dt)_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p+1}} &\equiv \partial_{[\mu_1} t_{\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{p+1}]} \\ &\equiv \partial_{\mu_1} t_{\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{p+1}} - \partial_{\mu_2} t_{\mu_1, \mu_3, \dots, \mu_{p+1}} + \dots + (-1)^p \partial_{\mu_{p+1}} t_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p}, \end{aligned} \quad (8.8.1)$$

где квадратные скобки означают антисимметризацию по индексам внутри скобок. Так как производные коммутируют, вторые внешние производные обращаются в нуль:

* Мы сохранили дословно терминологию оригинала ввиду ее образности. — *Прим. пер.*

** Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении

*** Внешние производные и p -формы играют особую роль в общей теории относительности, в частности, потому, что внешняя производная тензора преобразуется как тензор, хотя она вычисляется с помощью обычных, а не ковариантных производных ⁵.

$$d(dt) = 0. \quad (8.8.2)$$

Если внешняя производная p -формы обращается в нуль, то такая p -форма называется *замкнутой*, а если p -форма сама есть внешняя производная, она называется *точной*. Из (8.8.2) следует, что всякая точная p -форма замкнута. Знаменитая теорема⁶ Пуанкаре утверждает, что в односвязной области всякая замкнутая p -форма точна*. Например, однородные уравнения Максвелла (8.1.16) утверждают, что 2-форма напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ замкнута. Из теоремы Пуанкаре следует тогда, что она точна, т. е. может быть записана в виде внешней производной: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Вновь используя (8.8.2), убеждаемся, что 2-форма $F_{\mu\nu}$ не изменяется, если к A_μ добавить внешнюю производную, т. е. совершить калибровочное преобразование $\delta A_\mu = \partial_\mu \Omega$.

Имея формализм p -форм и внешних производных, естественно рассмотреть возможность существования безмассовых частиц, описываемых калибровочными полями**, являющимися p -формами*** A_{μ_1, \dots, μ_p} , при условии инвариантности теории относительно калибровочных преобразований

$$\delta A = d\Omega, \quad (8.8.3)$$

* В многосвязных пространствах замкнутые формы не обязательно точны. Хотя и можно локально представить замкнутую форму как внешнюю производную, в общем случае этого нельзя сделать гладким образом во всем пространстве. Множество замкнутых p -форм, взятых по модулю точных p -форм, образует так называемую p -ую группу когомологий де Рама данного пространства. Существует глубокая связь между группами когомологий де Рама данного пространства и его топологией.⁶ Подробнее это будет обсуждаться в т. II.

** Ниже такие поля мы называем просто p -формами и говорим о калибровочных теориях p -форм. — *Прим. пер.*

*** Мы несколько неточно называем поле A_{μ_1, \dots, μ_p} p -формой, так как для того, чтобы $F = dA$ был тензором, необходимо только, чтобы поле A было тензором с точностью до калибровочного преобразования. На самом деле, мы уже видели, что в случае четырех пространственно-временных измерений невозможно построить 4-векторное поле из операторов рождения и уничтожения физических безмассовых частиц спиральности ± 1 , поэтому мы должны иметь дело с полем $A^\mu(x)$, преобразующимся в соответствии с правилом (8.1.2) как 4-вектор только с точностью до калибровочного преобразования.

или подробнее

$$\delta A_{\mu_1, \dots, \mu_p} = \partial_{[\mu_1} \Omega_{\mu_2, \dots, \mu_p]},$$

где $\Omega_{\mu_1, \dots, \mu_{p-1}}$ – произвольная $(p-1)$ -форма. Из p -формы можно построить калибровочно-инвариантный тензор напряженности поля

$$F = dA, \quad (8.8.4)$$

или детальнее

$$F_{\mu_1, \dots, \mu_{p+1}} = \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2, \dots, \mu_{p+1}]}. \quad (8.8.5)$$

(Альтернативно можно исходить из $(p+1)$ -формы F , предположить условие $dF = 0$ и отсюда вывести существование p -формы A , такой, что $F = dA$.) По аналогии с электродинамикой можно ожидать, что лагранжиан для A имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2(p+1)} F_{\mu_1, \dots, \mu_{p+1}} F^{\mu_1, \dots, \mu_{p+1}} + J^{\mu_1, \dots, \mu_p} A_{\mu_1, \dots, \mu_p}, \quad (8.8.6)$$

где J – антисимметричный тензорный ток (являющийся либо c -числом, либо функцией полей, отличных от A), который должен удовлетворять условию сохранения

$$\partial_{\mu_1} J^{\mu_1, \dots, \mu_p} = 0. \quad (8.8.7)$$

для того чтобы действие было калибровочно-инвариантным*. Уравнения Эйлера–Лагранжа принимают вид

$$\partial_{\mu} F^{\mu\mu_1, \dots, \mu_p} = -J^{\mu_1, \dots, \mu_p}. \quad (8.8.8)$$

p -Формы играют важную роль в калибровочных теориях с числом пространственно-временных измерений более четырех. Напри-

* Если ток J является функцией других полей, то он должен сохраняться на уравнениях движения этих полей, а калибровочная инвариантность имеет место для полного действия, включающего действие для других полей. — *Прим. ред.*

мер, в простейших теориях струн в 26 пространственно-временных измерениях нормальная мода струны представляется при низких энергиях 2-формой $A_{\mu\nu}$. Однако в случае четырех измерений использование p -форм не открывает новых возможностей.

Чтобы показать это, заметим, во-первых, что в D пространственно-временных измерениях не существует антисимметричных тензоров с более чем D индексами, поэтому в общем случае следует принять $p + 1 \leq D$. Как и любая другая $(p+1)$ -форма с $p + 1 \leq D$, напряженность поля F может быть выражена через дуальную $(D-p-1)$ -форму \mathcal{F} :

$$F^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \mathcal{F}_{\mu_{p+2} \dots \mu_D}. \quad (8.8.9)$$

Аналогично, p -форма тока J может быть записана через $(D-p)$ -форму тока \mathcal{J} :

$$J^{\mu_1 \dots \mu_p} = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \mathcal{J}_{\mu_{p+1} \dots \mu_D}. \quad (8.8.10)$$

Уравнение поля (8.8.8) и условие сохранения (8.8.7) принимают тогда простой вид

$$d\mathcal{F} = \mathcal{J}, \quad d\mathcal{J} = 0. \quad (8.8.11)$$

Так как дуальный ток является замкнутой формой, его можно записать через $(D-p-1)$ -форму \mathcal{S} :

$$\mathcal{J} = d\mathcal{S}. \quad (8.8.12)$$

Из уравнений (8.8.11) и (8.8.12) следует, что разность \mathcal{F} и \mathcal{S} замкнута, поэтому в силу теоремы Пуанкаре

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} + d\phi, \quad (8.8.13)$$

где ϕ является $(D-p-2)$ -формой. Исключением является случай $p = D - 1$, когда \mathcal{F} и \mathcal{S} оказываются 0-формами, т. е. скалярами, и условие $d\mathcal{F} = d\mathcal{S}$ означает просто, что \mathcal{F} и \mathcal{S} отличаются на константу. В таком случае калибровочное поле не описывает вообще никаких степеней свободы. Поэтому можно ограничиться рассмотрением случаев $p \leq D - 2$.

При $p \leq D - 2$ однородные «уравнения Максвелла» $dF = 0$ имеют вид

$$\partial_{\mu_1} \mathcal{F}^{\mu_1, \dots, \mu_{D-p-1}} = 0, \quad (8.8.14)$$

что совместно с формулой (8.8.13) приводит к уравнению поля для ϕ :

$$\partial_{\mu_1} (d\phi)^{\mu_1, \dots, \mu_{D-p-1}} = -\partial_{\mu_1} \mathcal{G}^{\mu_1, \dots, \mu_{D-p-1}}. \quad (8.8.15)$$

Оно инвариантно относительно нового набора калибровочных преобразований $\phi \rightarrow \phi + d\omega$. Исключение — случай $D - p - 2 = 0$, когда калибровочное преобразование, оставляющее F инвариантным, имеет вид $\phi \rightarrow \phi + c$, где c — произвольная константа. Мы видим, что в случае D пространственно-временных измерений калибровочная теория p -формы A с током J эквивалентна калибровочной теории $(D - p - 2)$ -формы ϕ с током $-\partial \mathcal{G}$.

Теперь можно понять, почему калибровочные теории p -форм не приводят к новым возможностям в четырех измерениях. Мы видели, что нужно рассматривать только случаи $p \leq D - 2$, т. е. $p = 0, 1, 2$. 0-формы являются скалярами S , для которых определение (8.8.5) принимает вид $F_\mu = \partial_\mu S$, а уравнения поля — вид $\square S = -J$. В данном случае калибровочная инвариантность означает инвариантность относительно сдвига $S \rightarrow S + c$, где c — константа. Это теория безмассового скалярного поля с взаимодействием с производными. 1-форма — это 4-вектор $A^\mu(x)$, взаимодействующий с сохраняющимся 4-вектором тока, т. е. электродинамика. Наконец, согласно приведенному выше общему результату калибровочная теория 2-формы в четырехмерном пространстве-времени эквивалентна калибровочной теории 0-формы, а это, как мы видели, эквивалентно скалярному полю с взаимодействием с производными.

Приложение. Следы

При вычислении матричных элементов S -матрицы и вероятностей переходов для процессов с участием частиц спина $1/2$, часто приходится вычислять следы от произведения γ -матриц Дирака. Поэтому полезно привести формулы для этих следов, которые используются во всех подобных вычислениях.

Для произведения *четного* числа γ -матриц след равен

$$\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{2N}}\} = 4 \sum_{\text{спаривания}} \delta_P \prod_{\text{пары}} \eta_{\text{попарные } \mu} \quad (8.A.1)$$

Здесь сумма берется по всем различным способам спаривания индексов μ_1, \dots, μ_{2N} . Спаривание можно рассматривать как перестановку целых чисел $1, 2, \dots, 2N$ в определенном порядке $P_1, P_2, \dots, P(2N)$, в которой мы спариваем индекс μ_{P_1} с μ_{P_2} , μ_{P_3} с μ_{P_4} , и т. д. Перестановка пар или перестановка m внутри пары приводит к такому же спариванию, так что число различных спариваний равно

$$(2N)! / N! 2^N = (2N - 1)(2N - 3) \dots 1 \equiv (2N - 1)!! \quad (8.A.2)$$

Можно избежать суммирования по эквивалентным спариваниям, потребовав, чтобы

$$P_1 < P_2, P_3 < P_4, \dots, P(2N - 1) < P(2N), \quad (8.A.3)$$

$$P_1 < P_3 < P_5 < \dots \quad (8.A.4)$$

С учетом этих соглашений, множитель δ_P равен $+1$ или -1 в зависимости от того, включает ли спаривание четную или нечетную перестановку индексов. Произведение в (8.A.1) проводится по всем N парам, причем n -ая пара вносит множитель $\eta_{\mu_{P(2n-1)}\mu_{P(2n)}}$. Например (записывая $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ вместо $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots$), при $N = 1, 2$ и 3 имеем *

$$\text{Tr}\{\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\} = 4\eta_{\mu\nu}, \quad (8.A.5)$$

$$\text{Tr}\{\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma}\} = 4[\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}], \quad (8.A.6)$$

* Сейчас существуют компьютерные программы ⁷, с помощью которых производится вычисление следов произведений большого числа матриц Дирака.

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\kappa \gamma_\eta\} = 4[\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\kappa} \eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\eta} \eta_{\sigma\kappa} \\
& - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\kappa\eta} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\kappa} \eta_{\sigma\eta} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\eta} \eta_{\sigma\kappa} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} \eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\kappa} \eta_{\rho\eta} \\
& + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\eta} \eta_{\rho\kappa} - \eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\rho} \eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\rho\eta} - \eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\eta} \eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\eta} \eta_{\nu\rho} \eta_{\sigma\kappa} \\
& - \eta_{\mu\eta} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\rho\kappa} + \eta_{\mu\eta} \eta_{\nu\kappa} \eta_{\rho\sigma}].
\end{aligned} \quad (8.A.7)$$

Для нечетного числа γ -матриц результат намного проще:

$$\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2N+1}}\} = 0. \quad (8.A.8)$$

Формула (8.A.1) доказывается по индукции. Заметим, прежде всего, что

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = -\text{Tr}\{\gamma_\nu \gamma_\mu\} + 2\text{Tr}\{\eta_{\mu\nu} \cdot 1\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} + 8\eta_{\mu\nu},$$

так что $\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4\eta_{\mu\nu}$, в согласии с (8.A.1). Далее, предположим, что (8.A.1) верна для $N \leq M - 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} &= 2\eta_{\mu_1 \mu_2} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&= 2\eta_{\mu_1 \mu_2} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\eta_{\mu_1 \mu_3} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&\quad + \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&= 2\eta_{\mu_1 \mu_2} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\eta_{\mu_1 \mu_3} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&\quad + 2\eta_{\mu_1 \mu_4} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_5} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} - \dots \\
&\quad + 2\eta_{\mu_1 \mu_{2M}} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M-1}}\} - \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M}} \gamma_{\mu_1}\}.
\end{aligned}$$

След любого коммутатора равен нулю, так что последнее вычитаемое выражение в правой части равно исходному выражению в левой части, и поэтому

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}\{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} = \eta_{\mu_1 \mu_2} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} \\
& - \eta_{\mu_1 \mu_3} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} + \eta_{\mu_1 \mu_4} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_5} \dots \gamma_{\mu_{2M}}\} \\
& - \dots + \eta_{\mu_1 \mu_{2M}} \text{Tr}\{\gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2M-1}}\}.
\end{aligned} \quad (8.A.9)$$

Если предположить, что формула (8.A.1) правильна для следа любого произведения $2N-2$ матриц Дирака, то формула (8.A.9) показывает, что эта же формула (8.A.1) правильна для следа $2N$ матриц.

Простейший способ убедиться в том, что след нечетного числа дираковских матриц равен нулю, это заметить, что $-\gamma_\mu$ связана с γ_μ преобразованием подобия: $-\gamma_\mu = \gamma_5 \gamma_\mu (\gamma_5)^{-1}$. Следы не меняются при таком преобразовании, поэтому след нечетного числа дираковских матриц равен самому себе со знаком «минус» и следовательно равен нулю.

Мы сталкиваемся с еще одним типом следов вида

$$\text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_n}\}.$$

Такой след обращается в нуль при нечетных n по тем же причинам, что и для следов без γ_5 . Кроме того, этот след равен нулю при $n = 0$ и $n = 2$:

$$\text{Tr}\{\gamma_5\} = 0, \quad (8.A.10)$$

$$\text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu\} = 0. \quad (8.A.11)$$

(Чтобы увидеть это, вспомним, что $\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, и заметим, что невозможно произвести спаривание индексов в $\text{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\}$ или $\text{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\}$ так, чтобы пространственно-временные индексы в каждой паре были одинаковы.) При $n = 4$ такое спаривание индексов в $\text{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\}$ возможно, но только в том случае, если μ, ν, ρ, σ являются какими-то перестановками 0, 1, 2, 3. Более того, этот след должен быть нечетным относительно перестановок μ, ν, ρ, σ , так как γ -матрицы с разными индексами антикоммутируют. Следовательно след $\text{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\}$ должен быть пропорционален полностью антисимметричному тензору $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$. Коэффициент пропорциональности можно установить, положив μ, ν, ρ, σ равными 0, 1, 2, 3 и вспомнив, что $\epsilon_{0123} \equiv -1$. Таким образом находим

$$\text{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (8.A.12)$$

След произведения γ_5 с шестью, восемью и более дираковскими матрицами можно вычислить теми же методами, которые использовались выше при доказательстве формулы (8.A.1).

Задачи

1. Вычислите дифференциальное и полное сечения процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ в низшем порядке по e . Считайте, что спины электрона и мюона не регистрируются. Используйте для электронов и мюонов простейший лагранжиан спинорной электродинамики.
2. Проведите каноническое квантование теории заряженного скалярного поля Φ и его взаимодействия с электромагнитным полем, если лагранжиан равен:

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

$$D_\mu \Phi \equiv \partial_\mu \Phi - iqA_\mu \Phi, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Используйте кулоновскую калибровку. Выразите гамильтониан через поля A , Φ и Φ^\dagger и сопряженные им импульсы. Найдите оператор взаимодействия $V(t)$ в представлении взаимодействия через поля в этом представлении и их производные.

3. Используя результаты задачи 2, вычислите в низшем порядке по e дифференциальное и полное сечения рассеяния фотонов на массивной скалярной заряженной частице.
4. Напишите калибровочно-инвариантный лагранжиан для теории взаимодействия заряженного массивного векторного поля с электромагнитным полем.
5. Вычислите дифференциальное сечение электрон-электронного рассеяния в низшем порядке по e . Считайте, что спины начальных и конечных частиц не регистрируются.

Список литературы

1. См., например, Green, M.B., Schwarz, J.H., and Witten, E. *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987), Section 2.2. (Есть рус. пер.: М. Грин, Дж. Шварц, Ю. Виттен. Теория суперструн. Тт. 1, 2. М.: Мир, 1991)

- 1a. Fock, V., *Z. f. Phys.*, **39**, 226 (1927); Weyl, H., *Z. Phys.*, **56**, 330 (1929). Термин «калибровочная инвариантность» возник по аналогии с более ранними спекуляциями на тему о масштабной инвариантности в книге: Weyl, H., *Raum, Zeit, Materie*, 3rd ed. (Springer Verlag, Berlin, 1920) (есть рус. пер.: Г. Вейль. Пространство, время, материя. М., 1998). Историю вопроса рассказал Ч.Н. Янг в докладе в Сити-колледже (неопубликовано).
2. Использование кулоновской калибровки в электродинамике активно поддерживал Швингер, во многом по тем же причинам, что и в данной книге: нам не нужно вводить фотонов со спиральностями, отличными от ± 1 . См.: Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **78**, 1439 (1948); **127**, 324 (1962); *Nuovo Cimento*, **30**, 278 (1963).
3. Feynman, R.P., *Phys. Rev.*, 101, 769 (1949), Section 8.
4. Klein, O. and Nishina, Y., *Z. f. Phys.*, 52, 853 (1929); Nishina, Y., *ibid.*, 869 (1929); см. также: Tamm, I., *Z. f. Phys.*, **62**, 545 (1930).
5. См., например: Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972), Section 4.11 (есть рус. пер.: Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1976).
6. Доступное общее введение в геометрию и топологию p -форм можно найти в книге: Flanders, H., *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963).
7. West, T., *Comput. Phys. Commun.*, **77**, 286 (1993).

Методы функционального интегрирования *

В главах 7 и 8 мы применили операторный формализм канонического квантования для вывода фейнмановских правил в разных теориях. Во многих случаях, например, для скалярного поля со взаимодействием с производными или для векторного поля с нулевой или отличной от нуля массой, такая процедура оказалась хотя и прямо ведущей к цели, но довольно сложной. Оказалось, что гамильтониан взаимодействия содержит как ковариантное слагаемое, равное взятому с обратным знаком члену взаимодействия в лагранжиане, так и нековариантное слагаемое, необходимое для сокращения нековариантных членов в пропагаторе. В электродинамике такое нековариантное слагаемое (кулоновская энергия) оказалось даже пространственно нелокальным, хотя и локальным по времени. Окончательный результат достаточно прост: фейнмановские правила соответствуют тому, что мы имеем дело с ковариантными пропагатора-

* Начиная с этого момента мы последовательно переводим используемый в англоязычной литературе термин *path integral* и его производные как *функциональный интеграл* и производные от этого термина «функциональная формулировка», «функциональный подход», «функциональный формализм» и т. п., имея в виду, что буквальный перевод термина *интеграл по путям* используется в русских пособиях и монографиях, когда речь идет об альтернативной формулировке квантовой механики, а в применении к квантовой теории поля и квантовой статистике используются более общие термины. — Прим. пер.

ми, а для нахождения вкладов в вершины используем взятый со знаком «минус» член взаимодействия в лагранжиане. Сложность получения этих простых результатов, достаточно раздражающая в случае теорий, рассмотренных в гл. 7 и 8, становится непереносимой в более сложных теориях, типа обсуждаемых в т. II неабелевых калибровочных теорий или общей теории относительности. Всякий предпочел бы такой метод вычислений, который исходит непосредственно из лагранжиана и приводит к фейнмановским правилам в их окончательной лоренц-ковариантной форме.

К счастью, такой метод существует. Он связан с формулировкой квантовой механики на языке функциональных интегралов. Впервые функциональный подход был изложен применительно к нерелятивистской квантовой механике в диссертации Фейнмана¹, где было показано, как можно вместо гамильтониана работать непосредственно с лагранжианом. В этом отношении работа Фейнмана была инспирирована более ранней работой Дирака². Позднее функциональный подход сыграл (наряду с вдохновенными догадками) важную роль при выводе Фейнманом правил диаграммной техники³. Однако, хотя фейнмановские диаграммы стали общеупотребительными уже в 1950-е годы, большинство физиков (включая меня самого) предпочитали выводить правила для них с помощью операторных методов Швингера и Томонаги, которые, как показал в 1949 году Дайсон, приводят к тем же правилам диаграммной техники, что и полученные Фейнманом с помощью его методов.

Функциональный подход возродился в конце 1960-х годов, когда Фаддеев и Попов⁴, а также Де Витт⁵ показали, как применить его к неабелевым калибровочным теориям и общей теории относительности. Для большинства теоретиков поворотным стал 1971 год, когда 'т Хофт⁶ применил функциональный метод для вывода фейнмановских правил в спонтанно нарушенных калибровочных теориях (они обсуждаются в т. II), в частности, в теории слабых и электромагнитных взаимодействий, используя при этом калибровку, в которой становится совершенно прозрачным поведение этих теорий при больших энергиях. Вскоре (об этом также рассказывается в т. II) было обнаружено, что функциональный метод позволяет учесть вклады в S -матрицу, которые существенно сингулярны при нулевой константе связи и поэтому не могут быть обнаружены в любом конечном порядке теории возмущений. С тех

пор описываемые ниже функциональные методы стали неотъемлемой частью вооружения всех физиков, использующих квантовую теорию поля.

Читатель может в этом месте задать вопрос, почему же, раз этот метод так удобен, мы мучились в гл. 7 с обоснованием канонического формализма. Похоже, и сам Фейнман поначалу полагал, что его функциональный подход может стать заменой обычной канонической формулировки квантовой механики. Есть две причины начинать с канонического формализма. Первая из них носит принципиальный характер: хотя функциональный формализм приводит к явно лоренц-инвариантным правилам диаграммной техники, остается неясным, почему вычисленная таким способом S -матрица унитарна. Насколько мне известно, единственный способ доказать, что функциональный формализм приводит к унитарной S -матрице, заключается в том, чтобы использовать его для реконструкции канонического формализма, в котором унитарность очевидна. В этом вопросе срабатывает закон сохранения неприятностей: можно использовать канонический подход, в котором унитарность очевидна, а лоренц-инвариантность спрятана, или функциональный подход, который явно лоренц-инвариантен, но отнюдь не явно унитарен. Так как ниже функциональный подход выводится из канонического подхода, мы уверены, что оба подхода приводят к одной S -матрице, так что S -матрица действительно должна быть как лоренц-инвариантной, так и унитарной.

Вторая причина, по которой сначала рассматривается канонический формализм, более практического свойства: существуют важные теории, где простейшая версия фейнмановского функционального метода, в которой пропагаторы и вершины взаимодействия извлекаются непосредственно из лагранжиана, просто неверна. Примером может служить нелинейная σ -модель с плотностью лагранжиана $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g_{kl}(\phi)\partial_\mu\phi^k\partial^\mu\phi^l$. В подобных теориях использование наивных правил Фейнмана, выведенных непосредственно из плотности лагранжиана, приводит к S -матрице, которая не только неправильна, но даже не унитарна, да еще и зависит от способа, которым мы определяем скалярное поле⁷. В этой главе мы выведем функциональный формализм из канонического формализма и, таким образом, увидим, какие еще типы вершин необходимы для того, чтобы дополнить простейшую версию фейнмановского функционального метода.

9.1. Общая формула для функционального интеграла

Начнем с рассмотрения произвольной квантово-механической системы с эрмитовыми операторами «координат» Q_a и сопряженных им «импульсов» P_b , удовлетворяющими каноническим коммутационным соотношениям*:

$$[Q_a, P_b] = i\delta_{ab}, \quad (9.1.1)$$

$$[Q_a, Q_b] = [P_a, P_b] = 0. \quad (9.1.2)$$

(В этом и трех следующих разделах ограничимся бозонными операторами, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям. Полученные результаты будут обобщены в разделе 9.5 на случай фермионных операторов, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям.)

В теории поля индекс a включает координату \mathbf{x} и дискретные индексы m , включающие лоренцовские индексы и сорта частиц, и мы условимся о следующих обозначениях:

$$Q_{\mathbf{x},m} \equiv Q_m(\mathbf{x}), \quad (9.1.3)$$

$$P_{\mathbf{x},m} \equiv P_m(\mathbf{x}). \quad (9.1.4)$$

Кроме того, кронекеровский дельта-символ в (9.1.1) понимается в теории поля как

$$\delta_{\mathbf{x},m;\mathbf{y},n} \equiv \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{mn}. \quad (9.1.5)$$

Однако сейчас будет удобно использовать более компактные обозначения, как в формулах (9.1.1) и (9.1.2). Операторы в этих формулах записаны в «шредингеровском представлении», т. е. взяты

* Здесь молчаливо предполагается, что все связи первого рода устранены выбором калибровки, а все оставшиеся связи второго рода «разрешены», так что все степени свободы, на которые наложены связи, выражены через независимые операторы Q_a и P_a . Согласно разделу 7.6 непосредственное использование функциональных методов к системам со связями описано Фаддеевым⁸.

в фиксированный момент времени (например, $t = 0$). Зависящие от времени гейзенберговские операторы будут рассмотрены чуть позже.

Так как все Q_a коммутируют, можно найти их общий одновременный собственный вектор состояния $|q\rangle$ с собственными значениями

$$q_a \cdot Q_a |q\rangle = q_a |q\rangle. \quad (9.1.6)$$

(Мы используем строчные буквы q и p для обозначения собственных значений, а не операторов в представлении взаимодействия, как это мы делали в гл. 7, но поскольку представление взаимодействия здесь не используется, никаких недоразумений не возникнет.) Собственные векторы можно считать ортонормированными,

$$\langle q' | q \rangle = \prod_a \delta(q'_a - q_a) \equiv \delta(q' - q), \quad (9.1.7)$$

так что условие полноты имеет вид

$$1 = \int \prod_a dq_a |q\rangle \langle q|. \quad (9.1.8)$$

Аналогично можно найти полный ортонормированный набор собственных состояний P_a :

$$P_a |p\rangle = p_a |p\rangle, \quad (9.1.9)$$

$$\langle p' | p \rangle = \prod_a \delta(p'_a - p_a) \equiv \delta(p' - p), \quad (9.1.10)$$

$$1 = \int \prod_a dp_a |p\rangle \langle p|. \quad (9.1.11)$$

Как обычно, из формулы (9.1.1) следует, что скалярное произведение состояний из этих двух полных наборов имеет вид *

* Доказательство проводится так же, как в квантовой механике точечных частиц. Из формулы (9.1.1) видно, что P_b действуют на волновые функции в q -базисе как $-i\partial/\partial q_b$. Тогда правая часть формулы (9.1.12) есть волновая функция собственного состояния P в этом базисе. Множитель $\prod 1/\sqrt{2\pi}$ фиксирован условием нормировки (9.1.10).

$$\langle q|p\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(iq_a p_a). \quad (9.1.12)$$

В гейзенберговской картине операторы Q и P обретают зависимость от времени:

$$Q_a(t) \equiv \exp(iHt)Q_a \exp(-iHt), \quad (9.1.13)$$

$$P_a(t) \equiv \exp(iHt)P_a \exp(-iHt), \quad (9.1.14)$$

где H — полный гамильтониан. Собственные состояния $|q; t\rangle$ и $|p; t\rangle$ этих операторов

$$Q_a(t)|q; t\rangle = q_a|q; t\rangle, \quad (9.1.15)$$

$$P_a(t)|p; t\rangle = p_a|p; t\rangle, \quad (9.1.16)$$

определяются формулами

$$|q; t\rangle = \exp(iHt)|q\rangle, \quad (9.1.17)$$

$$|p; t\rangle = \exp(iHt)|p\rangle. \quad (9.1.18)$$

(Заметим, что $|q; t\rangle$ есть собственное состояние оператора $Q_a(t)$ с собственным значением q_a , а не результат эволюции состояния $|q\rangle$ к моменту времени t . Именно поэтому зависимость от времени определяется множителем $\exp(iHt)$, а не $\exp(-iHt)$.) Эти состояния очевидно удовлетворяют условиям полноты и ортонормированности:

$$\langle q'; t|q; t\rangle = \delta(q' - q), \quad (9.1.19)$$

$$\langle p'; t|p; t\rangle = \delta(p' - p), \quad (9.1.20)$$

$$\int \prod_a dq_a |q; t\rangle \langle q; t| = 1, \quad (9.1.21)$$

$$\int \prod_a dp_a |p; t\rangle \langle p; t| = 1, \quad (9.1.22)$$

а также условию

$$\langle q; t | p; t \rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(iq_a p_a). \quad (9.1.23)$$

Если при измерении в момент времени t обнаруживается, что система находится в определенном состоянии $|q; t\rangle$, то амплитуда вероятности того, что при измерении в момент времени t' система будет находиться в состоянии $|q'; t'\rangle$, равна скалярному произведению $\langle q'; t' | q; t \rangle$. Главная задача динамики заключается в вычислении этого скалярного произведения.

Это легко сделать, если t' и t бесконечно близки, скажем, $t' = \tau + d\tau$ и $t = \tau$. С помощью формулы (9.1.17) находим

$$\langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle = \langle q'; \tau | \exp(-iHd\tau) | q; \tau \rangle. \quad (9.1.24)$$

Гамильтониан H задается как функция $H(P, Q)$, но поскольку операторы (9.1.13) и (9.1.14) являются преобразованиями подобия, а H коммутирует сам с собой, можно записать гамильтониан как *ту же самую* функцию операторов $Q(t)$ и $P(t)$:

$$H \equiv H(Q, P) = e^{iHt} H(Q, P) e^{-iHt} = H(Q(t), P(t)). \quad (9.1.25)$$

Если менять порядок следования операторов Q и P , используя коммутационные соотношения (9.1.1) и (9.1.2), эту функцию можно представить в разных формах, отличающихся постоянными коэффициентами. Здесь удобно выбрать стандартную форму гамильтониана, когда все операторы Q находятся *слева* от всех операторов P . Например, если гамильтониан содержит слагаемое вида $P_a Q_b P_c$, мы переписываем его следующим образом: $P_a Q_b P_c = Q_b P_a P_c - i\delta_{ab} P_c$. С учетом этого соглашения, операторы $Q_a(t)$ в гамильтониане в формуле (9.1.24) можно заменить * на их собственные значения q'_a . Что касается $P(t)$, то используя (9.1.23), можно разложить состояние $|q; t\rangle$ по собственным состояниям $|p; t\rangle$ оператора P , так что в результате

* Это возможно потому, что при бесконечно малых $d\tau$ в разложении $\exp(-iHd\tau)$ можно ограничиться линейными по H членами.

$$\begin{aligned}
\langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle &= \int \prod_a dp_a \langle q'; \tau | \exp(-iH(Q(\tau), P(\tau))d\tau) | p; \tau \rangle \langle p; \tau | q; \tau \rangle \\
&= \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \exp \left[-iH(q', p)d\tau + i \sum_a (q'_a - q_a)p_a \right],
\end{aligned} \tag{9.1.26}$$

где по каждому p_a проводится интегрирование от $-\infty$ до ∞ .

Вернемся к более общему случаю конечного интервала времени. Чтобы вычислить матричный элемент $\langle q'; t' | q; t \rangle$ при $t < t'$, разобьем интервал времени от t до t' последовательными моментами времени $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, t'$, где

$$\tau_{k+1} - \tau_k = d\tau = (t' - t) / (N + 1), \tag{9.1.27}$$

на малые участки $(t, \tau_1), (\tau_1, \tau_2), \dots, (\tau_N, t')$ и просуммируем по полному набору состояний $|q; \tau_k\rangle$ в каждый момент времени τ_k :

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \int dq_1 \dots dq_N \langle q'; t' | q_N; t_N \rangle \langle q_N; t_N | q_{N-1}; t_{N-1} \rangle \dots \langle q_1; t_1 | q; t \rangle. \tag{9.1.28}$$

После подстановки представления (9.1.26) получаем:

$$\begin{aligned}
\langle q'; t' | q; t \rangle &= \int \left[\prod_{k=1}^N \prod_a dq_{k,a} \right] \left[\prod_{k=0}^N \prod_a \frac{dp_{k,a}}{2\pi} \right] \\
&\times \exp \left[i \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) d\tau \right\} \right],
\end{aligned} \tag{9.1.29}$$

$$q_0 \equiv q, \quad q_{N+1} \equiv q'. \tag{9.1.30}$$

Полученной нами формуле (9.1.29) можно придать более элегантный вид. Определим гладкие интерполирующие функции $q(\tau)$ и $p(\tau)$ так, что

$$q_a(\tau_k) \equiv q_{k,a}, \quad p_a(\tau_k) \equiv p_{k,a}. \tag{9.1.31}$$

В пределе $d\tau \rightarrow 0$ (т. е. $N \rightarrow \infty$) показатель экспоненты в формуле (9.1.29) превращается в интеграл по τ :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) d\tau \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau_k) p_a(\tau_k) - H(q(\tau_k), p(\tau_k)) \right\} d\tau + O(d\tau^2) \\ &\rightarrow \int_t^{t'} \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (9.1.32)$$

Далее, можно определить интеграл по функциям $q(\tau)$, $p(\tau)$:

$$\int \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \dots \equiv \lim_{d\tau \rightarrow 0} \int \prod_{k,a} dq_{k,a} \prod_{k,b} \frac{dp_{k,b}}{2\pi} \dots \quad (9.1.33)$$

Тогда формула (9.1.29) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | q; t \rangle &= \int_{\substack{q_a(t)=q_a \\ q_a(t')=q_a}} \prod_{\tau,a} dq_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \\ &\times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.1.34)$$

Правая часть формулы (9.1.34) называется также *интегралом по путям**, поскольку интегрирование проводится по всем путям

* Здесь мы частично сохранили авторскую терминологию — «интеграл по путям». Этот исторически первый образный термин вполне уместен применительно к квантовой механике с конечным числом степеней свободы, поскольку здесь речь идет об интегралах по функциям одной переменной (времени) (ср. прим. на с. 509). — *Прим. пер.*

$q(\tau)$, идущим из точки q при $\tau = t$ в точку q' при $\tau = t'$, а также по всем $p(\tau)$. Большое преимущество такой записи матричных элементов заключается в том, что, как показано в разделе 9.3, функциональные интегралы легко вычисляются, если разложить их по степеням константы связи в H .

Формализм функциональных интегралов, или, коротко, функциональный формализм, позволяет вычислять не только амплитуды вероятностей переходов типа $\langle q'; t' | q; t \rangle$, но также и матричные элементы хронологически упорядоченных произведений произвольных операторов $\varrho[P(t), Q(t)]$ между состояниями $\langle q'; t' |$ и $|q; t \rangle^*$.

Удобно определить эти операторы так, чтобы (в противоположность H) все операторы P были *слева*, а все Q — *справа*. Тогда, вставляя любой такой оператор $\varrho[P(\tau), Q(\tau)]$ в (9.1.26), получаем:

$$\begin{aligned} \langle q'; \tau + d\tau | \varrho[P(t), Q(t)] | q; \tau \rangle &= \int \prod_a dp_a \\ &\times \langle q'; \tau | \exp(-iH(Q(\tau), P(\tau))d\tau | p; \tau \rangle \langle p; \tau | \varrho[P(t), Q(t)] | q; \tau \rangle \\ &= \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \exp \left[-iH(q'; p)d\tau + i \sum_a (q'_a - q_a)p_a \right] \varrho(p, q). \end{aligned} \quad (9.1.35)$$

Чтобы вычислить матричный элемент произведения операторов $\varrho_A(P(t_A), Q(t_A)) \varrho_B(P(t_B), Q(t_B)) \dots$, где $t_A > t_B > \dots$, можно вставить ϱ -операторы между соответствующими состояниями в правой части формулы (9.1.28) и воспользоваться формулой (9.1.35). Например, если момент времени t_A попадает между τ_k и τ_{k+1} , нужно вставить $\varrho_A(P(t_A), Q(t_A))$ между $\langle q_{k+1}; \tau_{k+1} |$ и $|q_k; \tau_k \rangle$. Заметим, что каждая последующая сумма по состояниям в формуле (9.1.28) берется в более поздний момент времени, поэтому указанная вставка является единственно возможной в силу нашего предположения, что $t_A > t_B > \dots$.

* Здесь случайным образом одной и той же буквой t обозначены временные аргументы операторов $P(t)$, $Q(t)$, составляющих оператор ϱ , и состояния $|q; t \rangle$. Вообще говоря, они не совпадают. Напротив, в нижеследующей формуле (9.1.35) необходимо считать $t = \tau$, как в формуле (9.1.24), ведущей к формуле (9.1.26). — *Прим. ред.*

Действуя как и выше, получаем общую формулу для функционального интеграла:

$$\begin{aligned}
& \langle q'; t' | \rho_A(P(t_A), Q(t_A)) \rho_B(P(t_B), Q(t_B)) \dots | q; t \rangle \\
&= \int \prod_{\tau, a} dq_a(\tau) \prod_{\tau, b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \rho_A(p(t_A), q(t_A)) \rho_B(p(t_B), q(t_B)) \dots \\
&\quad \begin{matrix} q_a(t) = q_a' \\ q_a(t') = q_a \end{matrix} \\
&\quad \times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right]. \tag{9.1.36}
\end{aligned}$$

Этот результат справедлив только при условии, что все моменты времени упорядочены и

$$t' > t_A > t_B > \dots > t. \tag{9.1.37}$$

Однако ничто в правой части формулы (9.1.36) не указывает на порядок временных аргументов. Следовательно, если нам задан функциональный интеграл того же вида, что и правая часть формулы (9.1.36), но с t_A, t_B, \dots , взятыми в произвольном порядке (однако лежащими между t и t' , $t < t'$), то такой функциональный интеграл будет равен матричному элементу типа того, который стоит в левой части формулы (9.1.36), с операторами, расположенными в порядке убывания моментов времени слева направо. Это означает, что при расположении t_A, t_B, \dots в произвольном порядке,

$$\begin{aligned}
& \langle q'; t' | T \{ \rho_A(P(t_A), Q(t_A)) \rho_B(P(t_B), Q(t_B)) \dots \} | q; t \rangle \\
&= \int \prod_{\tau, a} dq_a(\tau) \prod_{\tau, b} \frac{dp_b(\tau)}{2\pi} \rho_A(p(t_A), q(t_A)) \rho_B(p(t_B), q(t_B)) \dots \\
&\quad \begin{matrix} q_a(t) = q_a' \\ q_a(t') = q_a \end{matrix} \\
&\quad \times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right]. \tag{9.1.38}
\end{aligned}$$

где T означает обычное хронологическое произведение.

Возможно, следует подчеркнуть, что c -числовые функции $q_a(\tau)$, $p_a(\tau)$ в (9.1.38) являются всего лишь переменными интегрирования и, в частности, *не подчиняются* уравнениям движения классической гамильтоновой динамики

$$\dot{q}_a(\tau) - \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial p_a(\tau)} = 0, \quad (9.1.39)$$

$$\dot{p}_a(\tau) + \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial q_a(\tau)} = 0. \quad (9.1.40)$$

(По этой причине гамильтониан $H(q(\tau), p(\tau))$ в (9.1.38) *не* является константой по τ .) Тем не менее, в некотором ограниченном смысле функциональные интегралы «уважают» эти уравнения движения. Предположим, что одна из функций в (9.1.38), например, $\varrho_A(P(t_A), Q(t_A))$, совпадает с левой частью равенств (9.1.39) или (9.1.40). Заметим, что (при $t < t_A < t'$)

$$\left(\dot{q}_a(t_A) - \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial p_a(t_A)} \right) \exp(iI[q, p]) = -i \frac{\delta}{\delta p_a(t_A)} \exp(iI[q, p]),$$

$$\left(\dot{p}_a(t_A) + \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial q_a(t_A)} \right) \exp(iI[q, p]) = -i \frac{\delta}{\delta q_a(t_A)} \exp(iI[q, p]),$$

где iI – аргумент экспоненты в (9.1.38):

$$I[q, p] \equiv \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\}.$$

До тех пор, пока t_A не достигает t или t' , интегрирования по $q_a(t_A)$ и $p_a(t_A)$ ничем не ограничены, и при разумных предположениях о сходимости интегралы от таких вариационных производных должны обращаться в нуль. Следовательно функциональный интеграл (9.1.38) равен нулю, если $\varrho_A(p, q)$ взят равным левой части уравнений движения (9.1.39) или (9.1.40).

Это простое правило применимо только если переменные интегрирования $q_a(t_A)$, $p_a(t_A)$ не зависят от любой из переменных $q_a(t_B)$,

$p_a(t_B)$ и т. д., от которых зависят остальные функции Q_B , Q_C и т. д. в формуле (9.1.38), и, следовательно, только если мы запретим t_A достигать значений t_B , t_C , ..., а также t и t' . Когда t_A достигает, скажем, t_B , в функциональном интеграле возникает ненулевое слагаемое, пропорциональное $\delta(t_A - t_B)$ или ее производным. Эти дельта-функции соответствуют тем дельта-функциям, которые возникают в рамках операторного формализма от производных по времени ступенчатых функций, присутствующих в определении хронологического произведения.

Для вычисления функциональных интегралов (9.1.34) и (9.1.38), необходимо знать только классическую функцию Гамильтона, т. е. s -числовую функцию $H(q, p)$. Если мы хотим сформулировать теорию с помощью функциональных интегралов, естественно возникает вопрос, какая из многих возможных квантово-механических функций Гамильтона $H(Q, P)$ (отличающихся порядком Q и P) описывает квантовую теорию, соответствующую этим интегралам.

Предложенный вывод дает ответ на этот вопрос: в квантовой функции Гамильтона все Q должны быть слева, все P — справа. Однако было бы ошибкой придавать этому рецепту слишком большое значение. Имеется множество способов интерпретировать меру $\prod dq_a(t) \prod dp_a(t)$ в интегралах типа (9.1.34) или (9.1.38). Наш рецепт расположения всех Q слева от всех P годится только, если мера определяется согласно формулам (9.1.31)–(9.1.33). Другие меры приводят к другим предписаниям по упорядочиванию операторов. Вопрос в целом не очень существен, так как разные рецепты упорядочивания операторов в функции Гамильтона соответствуют всего лишь разному выбору констант, входящих как коэффициенты при разных слагаемых в этой функции, а мы всегда формулируем теории так, что эти константы рассматриваются как произвольные параметры.

Функциональный интеграл общего вида (9.1.38) трудно использовать для численных расчетов или для доказательства строгих теорем. Для этих целей лучше применять функциональный метод для вычисления амплитуд в евклидовом пространстве, где t заменено на мнимую величину $-ix_4$, и показатель экспоненты в формуле (9.1.38) — действительная отрицательная величина. Тогда вместо быстрых осцилляций подынтегрального выражения в результате малого дрожания путей все быстрые дрожания оказываются экспоненциально подавлены.

Хотя мы не будем углубляться в этот вопрос, но квантовая теория поля может быть с самого начала сформулирована в терминах фейнмановских амплитуд в евклидовом пространстве–времени^{8а}. При определенных разумных предположениях возможно реконструировать фейнмановские амплитуды в пространстве Минковского, зная их евклидовы аналоги^{8б}. Однако если использовать функциональные интегралы для вычисления фейнмановских амплитуд по теории возмущений, то можно ограничиться их формулировкой в пространстве Минковского.

9.2. Переход к S -матрице

Как уже отмечалось, можно без труда переписать общие квантово-механические результаты раздела 9.1 в обозначениях, пригодных для квантовой теории поля, если принять, что индекс a принимает значения, отвечающие точкам \mathbf{x} пространства и индексам m спина и сорта частиц m , и заменить $Q_a(t)$ и $P_a(t)$ на $Q_m(\mathbf{x}, t)$ и $P_m(\mathbf{x}, t)$.

Тогда формула (9.1.38) принимает вид*:

$$\begin{aligned} & \langle q', t' | T \{ \rho_A [P(t_A), Q(t_A)], \rho_B [P(t_B), Q(t_B)], \dots | q, t \rangle \\ &= \int_{\substack{q_m(\mathbf{x}, t) = q_m(\mathbf{x}) \\ q_m(\mathbf{x}, t') = q_m(\mathbf{x})}} \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \frac{dp_m(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi} \\ & \times \rho_A [p(t_A), q(t_A)] \rho_B [p(t_B), q(t_B)] \dots \\ & \times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

Однако формула (9.2.1) не совсем соответствует тому, что хотелось бы иметь в теории поля. Экспериментаторы измеряют не амплитуды вероятностей для переходов между собственными

* Мы записываем теперь аргументы операторов H и ρ в квадратных скобках, чтобы напомнить, что $H[q(t), p(t)]$ и $\rho[p(t), q(t)]$ являются функционалами от $q_m(\mathbf{x}, t)$ и $p_m(\mathbf{x}, t)$ в фиксированный момент времени t .

состояниями $\langle q', t' |$ и $|q, t\rangle$, а элементы S -матрицы, т. е. амплитуды вероятностей для переходов между состояниями, которые при $t \rightarrow -\infty$ или $t \rightarrow +\infty$ содержат определенное число частиц разных сортов. Это так называемые «ин» и «аут» состояния $|\alpha, \text{in}\rangle$ и $|\beta, \text{out}\rangle$, где α и β обозначают наборы частиц определенных сортов с определенными значениями импульсов, z -компонент спина (или спиральностей).

Чтобы вычислить матричный элемент хронологически упорядоченного произведения (возможно, и отсутствующего) между такими состояниями, следует умножить (9.2.1) на «волновые функции» $\langle \beta, \text{out} | q', t' \rangle$ и $\langle q, t | \alpha, \text{in} \rangle$ в любые фиксированные моменты времени t и t' , которые для удобства взяты здесь равными $-\infty$ и $+\infty$, соответственно, а затем провести интегрирование по «аргументам» $q_m(\mathbf{x})$ и $q'_m(\mathbf{x})$ этих волновых функций.

Однако вместо того, чтобы сначала выписать функциональный интеграл по $q_m(\mathbf{x}, t)$ с условиями

$$q_m(\mathbf{x}, +\infty) = q'_m(\mathbf{x}), \quad q_m(\mathbf{x}, -\infty) = q_m(\mathbf{x}), \quad (9.2.2)$$

а затем интегрировать по $q'_m(\mathbf{x})$ и $q_m(\mathbf{x})$, можно с тем же успехом интегрировать по $q_m(\mathbf{x}, t)$ без всяких условий (как и по $p_m(\mathbf{x}, t)$), полагая аргументы волновых функций равными тем значениям, которые даются формулой (9.2.2):

$$\begin{aligned} & \langle \beta, \text{out} | T \{ \rho_A [P(t_A), Q(t_A)], \rho_B [P(t_B), Q(t_B)], \dots | \alpha, \text{in} \rangle \\ &= \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} (dp_m(\mathbf{x}, \tau)) / 2\pi \\ & \times \rho_A [p(t_A), q(t_A)] \rho_B [p(t_B), q(t_B)] \dots \\ & \times \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] \right\} \right] \\ & \times \langle \beta, \text{out} | q(+\infty); +\infty \rangle \langle q(-\infty); -\infty | \alpha, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

Кстати, этот результат немедленно приводит к формуле (6.4.3), т. е. к теореме, которую мы неоднократно использовали для того, чтобы связать суммы фейнмановских диаграмм вне массовой поверхности с матричными элементами операторов в гейзенберговском

представлении между собственными состояниями с определенной энергией.*

Теперь необходимо установить, как вычислять волновые функции, являющиеся последними двумя множителями правой части формулы (9.2.3). Рассмотрим сначала простейший и наиболее важный случай — вакуум. (В разделе 6.4 мы видели, что элементы S -матрицы легко вычисляются через средние по вакууму от хронологических произведений.) Предположим, как обычно, что при $t \rightarrow \pm\infty$ матричные элементы вычисляются так, как будто нет никакого взаимодействия. Таким образом, «ин»- и «аут»-вакуумы могут быть определены условиями

$$\begin{aligned} a_{\text{in}}(\mathbf{p}, \sigma, n) | \text{VAC, in} \rangle &= 0, \\ a_{\text{out}}(\mathbf{p}, \sigma, n) | \text{VAC, out} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

где операторы a_{in} и a_{out} являются коэффициентами при экспоненте $\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - iEt)$ в разложении оператора $Q_m(\mathbf{x}, t)$ по плоским волнам при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$, соответственно. Например, в случае действительного скалярного поля, отвечающего нейтральной бесспиновой частице, имеем

* Для доказательства необходимо лишь заметить, что если гамильтониан имеет вид $H[P(t), Q(t)] + \sum_A \int d^3x \varepsilon_A(\mathbf{x}, t) O_A(\mathbf{x}, t)$, то S -матрица определяется согласно (9.2.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle_\varepsilon &= \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}, m} (dp_m(\mathbf{x}, \tau)) / 2\pi \\ &\times \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_A \int d^3x \varepsilon_A(\mathbf{x}, t) O_A(\mathbf{x}, t) \right\} \right] \\ &\times \langle \beta, \text{out} | q(+\infty); +\infty \rangle \langle q(-\infty); -\infty | \alpha, \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

Левая часть формулы (6.4.3) равна производной этого выражения по ε_a , ε_b и т. д. при $\varepsilon = 0$, что дает правую часть формулы (9.2.3). Вновь используя (9.2.3), приходим к правой части формулы (6.4.3).

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p (2E)^{-1/2} \left[a_{\text{out}}^{\text{in}}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \text{э.с.} \right], \quad (9.2.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{x}, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} -i(2\pi)^{-3/2} \int d^3p (E/2)^{1/2} \left[a_{\text{out}}^{\text{in}}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - \text{э.с.} \right], \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

где $p^0 \equiv E \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$; здесь вместо Q и P мы используем общепринятые для скалярного поля обозначения Φ и Π и опускаем ненужные индексы m, σ, n . Обращая преобразование Фурье и беря линейные комбинации получившихся выражений, получаем, что

$$\begin{aligned} a_{\text{out}}^{\text{in}}(\mathbf{p}) &= \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \frac{e^{iEt}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ &\quad \times \left[\sqrt{\frac{E}{2}} \Phi(\mathbf{x}, t) + i \sqrt{\frac{1}{2E}} \Pi(\mathbf{x}, t) \right]. \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Как отмечалось в разделе 9.1, «импульс» $\Pi(\mathbf{x}, t)$ действует на волновые функции в φ -базисе * как вариационная производная $-i\delta/\delta\varphi(\mathbf{x}, t)$, так что условия (9.2.4) в этом базисе принимают вид:

$$0 = \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[\frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})} + E(\mathbf{p})\varphi(\mathbf{x}) \right] \left\langle \varphi(\mathbf{x}); \mp\infty \left| \text{VAC}, \begin{matrix} \text{in} \\ \text{out} \end{matrix} \right. \right\rangle. \quad (9.2.8)$$

Аналогичное обыкновенное дифференциальное уравнение имеет хорошо известное гауссово решение, так что попробуем и здесь воспользоваться гауссовской подстановкой:

* Дословный перевод англоязычного термина *wave functions in φ -basis*. В русскоязычной литературе более употребителен термин *волновые функционалы в φ -представлении* (где оператор $\Phi(\mathbf{x})$ действует как оператор умножения на функцию $\varphi(\mathbf{x})$). — Прим. ред.

$$\left\langle \varphi(\mathbf{x}); \mp\infty \left| \text{VAC}, \begin{array}{l} \text{in} \\ \text{out} \end{array} \right. \right\rangle = .\mathcal{A} \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y})\right), \quad (9.2.9)$$

в которой предстоит определить ядро ε и константу $.\mathcal{A}$. Подставляя правую часть формулы (9.2.9) в формулу (9.2.8), находим, что функциональное дифференциальное уравнение для вакуумного волнового функционала удовлетворяется, если при всех φ

$$0 = \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[\int d^3y \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) - E(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{x}) \right] \quad (9.2.10)$$

или, другими словами, если

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}}. \quad (9.2.11)$$

Решение легко находится обращением преобразования Фурье:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (2\pi)^{-3} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} E(\mathbf{p}). \quad (9.2.12)$$

(Напомним, что $E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.) На самом деле, это самое полезное представление ядра ε , но заметим попутно, что при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ можно записать ε через функцию Ганкеля отрицательного порядка:

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{m}{2\pi^2 r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} K_{-1}(mr) \right). \quad (9.2.13)$$

где $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Константа $.\mathcal{A}$ формально определяется из условия нормировки вакуумного состояния, но этот результат нам не понадобится.

Согласно формуле (9.2.9), при вычислении средних по вакууму в теории скалярного поля произведение двух последних множителей в формуле (9.2.3) равно

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC}, \text{out} | \varphi(\infty); +\infty \rangle \langle \varphi(-\infty); -\infty | \text{VAC}, \text{in} \rangle \\ &= |.\mathcal{A}|^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\varphi(\mathbf{x}, +\infty) \varphi(\mathbf{y}, +\infty) + \varphi(\mathbf{x}, -\infty) \varphi(\mathbf{y}, -\infty)]\right) \\ &= |.\mathcal{A}|^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon \int d^3x d^3y \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \tau) \varphi(\mathbf{y}, \tau) e^{-\varepsilon|\tau|}\right), \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

где ε – бесконечно малая положительная величина. При получении окончательного выражения, мы воспользовались тем фактом, что для любой достаточно гладкой функции $f(\tau)$

$$f(+\infty) + f(-\infty) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) e^{-\varepsilon|\tau|}. \quad (9.2.15)$$

Подставляя представление (9.2.14) в формулу (9.2.3), получаем:

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC, out} | T \{ \rho_A[\Pi(t_A), \Phi(t_A)], \rho_B[\Pi(t_B), \Phi(t_B)], \dots | \text{VAC, in} \rangle \\ &= |.A|^2 \int \prod_{\tau, \mathbf{x}} d\varphi(\mathbf{x}, \tau) \prod_{\tau, \mathbf{x}} (d\pi(\mathbf{x}, \tau)/2\pi) \Gamma\{\rho_A[\pi(t_A), \varphi(t_A)] \\ & \times \rho_B[\pi(t_B), \varphi(t_B)], \dots \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{\varphi}(\mathbf{x}, \tau) \pi(\mathbf{x}, \tau) \right. \right. \\ & \left. \left. - H[\varphi(\tau), \pi(\tau)] + \frac{1}{2} i\varepsilon \int d^3x d^3y \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-\varepsilon|\tau|} \varphi(\mathbf{x}, \tau) \varphi(\mathbf{y}, \tau) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

В разделе 9.4 мы увидим, что совокупный эффект от последнего слагаемого в показателе экспоненты в правой части формулы (9.2.16) заключается в появлении добавки $-i\varepsilon$ в знаменателе пропагатора скалярного поля в импульсном пространстве: $[p^2 + m^2 - i\varepsilon]^{-1}$. Мы не будем вдаваться в детали соответствующих вычислений для полей произвольного спина, а просто укажем, что в общем случае

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC, out} | T \{ \rho_A[P_A(t_A), Q(t_A)], \rho_B[P_B(t_B), Q(t_B)], \dots | \text{VAC, in} \rangle \\ &= |.A|^2 \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}} (dp_m(\mathbf{x}, \tau)/2\pi) \right] \rho_A[p(t_A), q(t_A)] \\ & \times \rho_B[p(t_B), q(t_B)], \dots \times \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{x}, \tau) \right. \right. \\ & \left. \left. - H[q(\tau), p(\tau)] + i\varepsilon - \text{слагаемые} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (9.2.17)$$

Здесь « $i\epsilon$ -слагаемые» приводят к появлению правильной добавки $-i\epsilon$ в знаменателях всех пропагаторов.

Сейчас уместно отметить, что не зависящие от полей множители в (9.2.17), типа константы $|\cdot|^2$, несущественны. Дело в том, что они дают вклад и в матричный элемент перехода $\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle$. При вычислении *связной* части средних по вакууму от хронологических произведений (или S -матрицы) мы избавляемся от вклада несвязных поддиаграмм вакуумных флуктуаций путем деления на $\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle$, так что все постоянные множители в вакуумных средних сокращаются.

Можно продвинуться дальше и вычислить матричные элементы между многочастичными состояниями, подставив соответствующие «волновые функционалы» в формулу (9.2.3). Последние можно вычислить, подействовав на вакуумное состояние сопряженными операторами к операторам уничтожения вида (9.2.7).

Как и для гармонического осциллятора, такие волновые функционалы оказываются полиномами Эрмита по полям, умноженными на вакуумный гауссиан. Мы не будем развивать далее эти вычисления, поскольку, как показано в разделе 6.4, все, что нужно для вычисления матричных элементов S -матрицы, это знание средних по вакууму (9.2.17).

9.3. Лагранжева форма функционального интеграл

Подынтегральное выражение в показателе экспоненты в формулах (9.1.38) или (9.2.17) похоже на лагранжиан L для гамильтониана H . Это сходство до некоторой степени вводит в заблуждение, так как «импульсы» $p_a(t)$ или $p_n(\mathbf{x}, t)$ являются независимыми переменными, еще не связанными с $q_a(t)$ или $q_n(\mathbf{x}, t)$ или их производными.

Однако существует большой и важный класс теорий, в которых интеграл по «импульсам» может быть взят путем простой замены их на те значения, которые диктуются каноническим формализмом. В этом случае подынтегральное выражение в показателе экспоненты в интегралах по путям действительно совпадает с лагранжианом.

Гамильтониан таких теорий квадратичен по «импульсам», т. е. на языке теории поля

$$\begin{aligned}
H[Q, P] = & \frac{1}{2} \sum_{nm} \int d^3x d^3y A_{\mathbf{x}n, \mathbf{y}m}[Q] P_n(\mathbf{x}) P_m(\mathbf{y}) \\
& + \sum_n \int d^3x B_{\mathbf{x}n}[Q] P_n(\mathbf{x}) + C[Q],
\end{aligned} \tag{9.3.1}$$

где «матрица» A — действительная, симметричная, положительная и несингулярная. Тогда показатель в экспоненте в формуле (9.2.17) квадратичен по p :

$$\begin{aligned}
& \int d\tau \left\{ \int d^3x \sum_n p_n(\mathbf{x}, t) \dot{q}_n(\mathbf{x}, t) - H[q(\tau), p(\tau)] \right\} \\
= & -\frac{1}{2} \sum_{nm} \int d^3x d^3y d\tau d\tau' \dot{A}_{\mathbf{x}n, \mathbf{y}m}[q] p_n(\mathbf{x}, \tau) p_m(\mathbf{y}, \tau') \\
& - \sum_n \int d^3x \int d\tau B_{\mathbf{x}n}[q] p_n(\mathbf{x}, \tau) - C[q],
\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

где

$$\dot{A}_{\mathbf{x}n, \mathbf{y}m}[q] \equiv A_{\mathbf{x}n, \mathbf{y}m}[q(\tau)] \delta(\tau - \tau'), \tag{9.3.3}$$

$$B_{\mathbf{x}n}[q] \equiv B_{\mathbf{x}n}[q(\tau)] - \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau), \tag{9.3.4}$$

$$C[q] \equiv \int d\tau C[q(\tau)]. \tag{9.3.5}$$

В общем случае интеграл от экспоненты, в показателе которой стоит квадратичное выражение типа (9.3.2), пропорционален экспоненте, вычисленной в стационарной точке ее показателя. В случае конечного числа действительных переменных ξ_s эта формула имеет вид

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_s d\xi_s \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \sum_{sr} \dot{A}_{sr} \xi_s \xi_r - i \sum_s B_s \xi_s - iC \right\} \\
= & (\text{Det}[i\dot{A}/2\pi])^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \sum_{sr} \dot{A}_{sr} \bar{\xi}_s \bar{\xi}_r - i \sum_s B_s \bar{\xi}_s - iC \right\},
\end{aligned} \tag{9.3.6}$$

где $\bar{\xi}$ — стационарная точка,

$$\bar{\xi}_s = - \sum_r (\cdot \cdot \cdot)^{-1}_{sr} \mathcal{R}_r. \quad (9.3.7)$$

(Доказательство формулы дано в Приложении к этой главе.)

Следовательно, если ρ_A , ρ_B и т. д. в (9.2.17) не зависят от p , можно вычислить функциональный интеграл по импульсам p в формуле (9.2.17) в случае такого гамильтониана, взяв эти переменные в стационарной точке квадратичного выражения в показателе экспоненты. Однако вариационная производная этого квадратичного выражения равна

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x}, \tau)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) p_n(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), p(\tau)] + i\epsilon - \text{слагаемые} \right\} \\ = \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) - \frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x}, \tau)} H[q(\tau), p(\tau)]. \end{aligned}$$

(Слагаемые с $i\epsilon$ зависят только от переменных q .) Таким образом, стационарная «точка» $\bar{p}_n(\mathbf{x}, t)$, в которой эта производная обращается в нуль, есть просто значение $p_n(\mathbf{x}, t)$, задаваемое канонической формулой

$$\dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) = \left[\frac{\delta H[q(\tau), p(\tau)]}{\delta p_n(\mathbf{x}, \tau)} \right]_{p=\bar{p}}. \quad (9.3.8)$$

Если положить $p_n(\mathbf{x}, t)$ равным этому значению, показатель экспоненты в (9.2.17) превращается в обычный лагранжиан*

$$L[q(\tau), \dot{q}(\tau)] \equiv \int d^3x \left(\sum_n \dot{q}_n(\mathbf{x}, \tau) \bar{p}_n(\mathbf{x}, \tau) - H[q(\tau), \bar{p}(\tau)] \right), \quad (9.3.9)$$

и формулу (9.2.17) можно записать в виде

* Точнее, в лагранжево действие. — Прим. ред.

$$\begin{aligned}
& \langle \text{VAC, out} | T \{ \rho_A [Q(t_A)], \rho_B [Q(t_B)], \dots \} | \text{VAC, in} \rangle \\
& = |\cdot|^{-2} \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, n} dq_n(\mathbf{x}, \tau) (\text{Det}[2i\pi \mathcal{L}[q]])^{-1/2} \rho_A [q(t_A)], \rho_B [q(t_B)], \dots \\
& \times \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ L[q(\tau), \dot{q}(\tau)] + i\epsilon - \text{слагаемые} \} \right]. \quad (9.3.10)
\end{aligned}$$

(Мы объединили множители $1/2\pi$ в интегралах по p с детерминантом из формулы (9.3.6).) Это и есть желаемая лагранжева форма функционального интеграла.

При выводе (9.3.10) было необходимо предположить, что операторы ρ_A, ρ_B, \dots не зависят от канонических «импульсов». Это условие не такое жесткое, как может показаться. Например, в скалярной теории поля, в которой канонически сопряженный полю Φ импульс есть $\Pi = \dot{\Phi}$, возможно вычислить матричный элемент хронологически упорядоченного произведения операторов, один из которых есть $\dot{\Phi}(t)$, взяв разность матричных элементов, в которых этот оператор заменен на $\Phi(\tau + dt)$ и $\Phi(\tau)$, поделив ее на dt и взяв предел $dt \rightarrow 0$. Эквивалентно, до тех пор, пока t не совпадает ни с одним из остальных временных аргументов оператора в формуле (9.3.10), можно просто дифференцировать (9.3.10) по времени t .

Единственное оставшееся серьезное осложнение в формуле (9.3.10) связано с детерминантом $\mathcal{L}[q]$. Если $\mathcal{L}[q]$ не зависит от полей, то не возникает никаких проблем. Мы уже отмечали, что общие константы не дают вклада в связные части вакуумных средних, так как при их вычислении производится деление на амплитуду перехода вакуум–вакуум, пропорциональную той же константе. Именно так обстоит дело в теории нескольких взаимодействующих друг с другом скалярных полей Φ_n без производных и/или взаимодействующих с производными, но с внешними токами J_n . Плотность лагранжиана в этом случае имеет вид:

$$\mathcal{L} = - \sum_n \left[\frac{1}{2} \partial_\lambda \Phi_n \partial^\lambda \Phi_n + J_n^\lambda \partial_\lambda \Phi_n \right] - V(\Phi).$$

Очевидное обобщение результатов раздела 7.5, касающихся взаимодействия с производными одного скалярного поля, на случай

нескольких скалярных полей приводит к гамильтониану

$$H = \int d^3x \sum_n \left[\frac{1}{2} \Pi_n^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_n)^2 + \mathbf{J}_n \cdot \nabla \Phi_n + J_n^0 \Pi_n + \frac{1}{2} (J_n^0)^2 \right] + \int d^3x V(\Phi) .$$

(Здесь скалярные поля Φ_n выбраны действительными скалярами, однако можно включить в рассмотрение и комплексные скалярные поля, разделив их на действительную и мнимую части.) В общем случае возникает нетривиальное слагаемое, линейное по Π_n , но коэффициент в квадратичном слагаемом есть константа, равная просто единичной «матрице»

$$\mathcal{A}_{xn, x'n'} = \delta^4(x - x') \delta_{nn'} .$$

В данном случае множитель $(\text{Det}[2i\pi \mathcal{A}[q]])^{-1/2}$ в (9.3.10) есть независящая от полей константа, не влияющая на результаты.

Однако не всегда все так просто. В качестве второго примера рассмотрим так называемую нелинейную σ -модель, лагранжиан которой

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{nm} \partial_\lambda \Phi_n \partial^\lambda \Phi_m [\delta_{nm} + U_{nm}(\Phi)] - V(\Phi) .$$

Прямое вычисление приводит к гамильтониану

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi_n (1 + U(\Phi))_{nm}^{-1} \Pi_m + \frac{1}{2} \nabla \Phi_n \cdot \nabla \Phi_m (1 + U(\Phi))_{nm} + V(\Phi) \right] .$$

Здесь \mathcal{A} – зависящая от полей величина

$$\mathcal{A}_{nx, my} = [1 + U(\Phi(x))]_{nm}^{-1} \delta^4(x - y) .$$

В подобных случаях детерминант может быть записан в виде вклада в эффективный лагранжиан, если воспользоваться соотношением $\text{Det } \mathcal{A} = \exp \text{Tr } \ln \mathcal{A}$. Заменяя пространственно-временной континуум дискретной решеткой точек посередине отдельных пространственно-временных областей очень малого объема Ω , можно интерпретировать дельта-функцию в $\mathcal{A}_{nx, my}$ следующим образом: $\delta^4(x - y) = \Omega^{-1} \delta_{x,y}$, так что

$$(\ln A)_{nx,my} = \delta_{x,y} [\ln(1 + U(\Phi(x))) - 1 \cdot \ln \Omega]_{nm},$$

где логарифм матрицы определяется своим разложением в ряд

$$\ln(1 + U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \dots$$

Чтобы вычислить след, заметим, что $\sum_x \dots = \Omega^{-1} \int d^4x \dots$. Тогда детерминант равен

$$\text{Det} A \propto \exp \left[-\Omega^{-1} \int d^4x \text{tr} \ln[1 + U(\Phi(x))] \right],$$

где символ «tr» означает след в обычном матричном смысле. Коэффициент пропорциональности (возникающий из слагаемого $-\ln \Omega$) не зависит от поля и поэтому не представляет интереса.

Можно рассматривать этот детерминант как поправку к эффективному лагранжиану

$$\Delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2} i \Omega^{-1} \text{tr} \ln[1 + U(\Phi(x))].$$

Множитель Ω^{-1} можно представить в виде ультрафиолетово расходящегося интеграла

$$\Omega^{-1} = \delta^4(x - x) = (2\pi)^{-4} \int d^4p \cdot 1.$$

Мы не будем этого показывать, но дополнительные слагаемые в фейнмановских диаграммах для такой теории, связанные с поправкой $\Delta \mathcal{L}$, можно вывести и в рамках канонического формализма, учитывая слагаемые от одновременных коммутаторов в пропагаторе производных по времени скалярного поля⁷. Пренебрежение этой поправкой приводит к ложной зависимости S -матрицы от способа определения скалярного поля, и, кроме того, несовместимо с любой симметрией лагранжиана относительно преобразований скалярного поля.

Даже в случае, когда множитель $(\text{Det} A)^{-1/2}$ в формуле (9.3.10) для функционального интеграла не зависит от полей, лагранжиан в этой формуле может отличаться исходного. Например, рассмотрим теорию нескольких действительных векторных полей с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = - \sum_n \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu A_{n\lambda} - \partial_\lambda A_{n\mu}) (\partial^\mu A_n^\lambda - \partial^\lambda A_n^\mu) + \frac{1}{2} m_n^2 A_{n\lambda} A_n^\lambda + J_n^\lambda A_{n\lambda} \right],$$

где токи J_n^μ являются либо внешними с-числовыми источниками, либо зависят от других полей (в последнем случае в лагранжиан следует добавить вклад других полей). Простое обобщение результатов раздела 7.5 приводит к гамильтониану

$$H = \int d^3x \sum_n \left[\frac{1}{2} \Pi_n^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}_n)^2 + \frac{1}{2} m_n^2 \mathbf{A}_n^2 + \frac{1}{2m_n^2} (\nabla \cdot \Pi_n)^2 + \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{A}_n - \frac{1}{m_n^2} J_n^0 \nabla \cdot \Pi_n + \frac{1}{2m_n^2} (J_n^0)^2 \right],$$

В правую часть следует также добавить слагаемые от любых других полей, входящих в J_n^μ . Коэффициент при квадратичном слагаемом здесь несколько сложнее, чем в первом примере, и равен

$$\mathcal{A}_{nix,mjy} = \delta_{nm} \left[\delta_{ij} \delta^4(x-y) - \frac{1}{2m_n^2} \nabla_i \nabla_j \delta^4(x-y) \right],$$

но он не зависит от полей, так что множитель $(\text{Det } \mathcal{A})^{-1/2}$ несуществен. С другой стороны, лагранжиан (9.3.9) отличается от исходного: он выражается только через поля \mathbf{A} и их производные по времени, но не содержит вовсе временных компонент A^0 *. По этой причине лоренцовская инвариантность выражения (9.3.10) далеко не очевидна.

Чтобы исправить это положение, можно вновь ввести вспомогательное поле. Предположим, что мы добавили к гамильтониану слагаемое

$$\Delta H = - \frac{1}{2} \sum_n m_n^2 \int d^3x \left[A_n^0 - m_n^{-2} \nabla \cdot \Pi_n + m_n^{-2} J_n^0 \right]^2$$

* Это и неудивительно, поскольку мы имеем дело с теорией со связями (второго рода), и приведенный гамильтониан получен в результате разрешения этих связей, выражающих A^0 через независимые поля \mathbf{A} и сопряженные им канонические импульсы. — *Прим. ред.*

и проинтегрировали по A_n^0 , а также по \mathbf{A}_n и $\mathbf{\Pi}_n$. Результатом этого может быть только появление не зависящего от полей общего множителя, поскольку ΔH квадратично по A^0 (с независимым от полей коэффициентом в слагаемом второго порядка по A^0) и его стационарное значение обращается в нуль. Однако предположим, что мы интегрируем по $\mathbf{\Pi}_n$ до интегрирования по A_n^0 . Гамильтониан в функциональном интеграле (9.2.17) заменяется на

$$H + \Delta H = \int d^3x \sum_n \left[\frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_n^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}_n)^2 + \frac{1}{2} m_n^2 \mathbf{A}_n^2 - \frac{1}{2} m_n^2 (A_n^0)^2 + \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{A}_n - J_n^0 A_n^0 + A_n^0 \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n \right].$$

Он все еще квадратичен по $\mathbf{\Pi}_n$ с не зависящим от поля (и даже более простым) коэффициентом при квадратичном слагаемом, так что интеграл по всем $\mathbf{\Pi}_n$ можно взять, просто заменив $\mathbf{\Pi}_n$ на его значение в стационарной точке функционала $\sum_n \int d^3x \mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{A}}_n - H - \Delta H$:

$$\mathbf{\Pi}_n = \dot{\mathbf{A}}_n + \nabla A_n^0.$$

Если $\mathbf{\Pi}_n$ исключить именно таким способом, то $\sum_n \int d^3x \mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{A}}_n - H - \Delta H$ есть в точности исходный лоренц-инвариантный лагранжиан.

Чтобы учесть возможную необходимость введения вспомогательных полей типа A_n^0 , будем с этого момента записывать формулу для функционального интеграла после исключения канонически сопряженных импульсов в терминах полей Ψ_i , включающих как канонические поля q_n , так и вспомогательные поля c_r :

$$\begin{aligned} & \langle \text{VAC}, \text{out} | T \{ \rho_A[\Psi_A(t_A)], \rho_B[\Psi_B(t_B)], \dots \} | \text{VAC}, \text{in} \rangle \\ & \propto \int \prod_{\tau, \mathbf{x}, n} d\Psi_n(\mathbf{x}, \tau) \rho_A[\Psi(t_A)] \rho_B[\Psi(t_B)] \dots \\ & \times \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ L[\Psi(\tau), \dot{\Psi}(\tau)] + i\epsilon - \text{слагаемые} \} \right], \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

имея при этом в виду, что лагранжиан L может содержать слагаемые, возникающие от зависящих от полей множителей вида $(\text{Det } \mathcal{A})^{-1/2}$.

9.4. Вывод фейнмановских правил с помощью функциональных интегралов

Теперь мы готовы к тому, чтобы воспользоваться формализмом функциональных интегралов для вывода фейнмановских правил для широкого класса теорий. Нас будут интересовать средние по вакууму от хронологических произведений полевых операторов (и сопряженных им операторов)

$$M_{l_A l_B \dots}(x_A x_B \dots) = \frac{\langle \text{VAC, out} | T \{ \Psi_{l_A}(x_A), \Psi_{l_B}(x_B) \dots \} | \text{VAC, in} \rangle}{\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle}. \quad (9.4.1)$$

из которых (как показано в разделе 6.4) можно получить матричные элементы S -матрицы, отбрасывая пропагаторы внешних линий, связанные с каждым из этих полей, заменяя их на коэффициентные функции, стоящие в качестве множителей перед операторами рождения и уничтожения в соответствующих выражениях для свободных полей, и суммируя по всем индексам этих коэффициентных функций.

Для простейших теорий, гамильтониан которых квадратичен по Π , находим с помощью формулы (9.3.11):

$$M_{l_A l_B \dots}(x_A x_B \dots) = \frac{\int \left[\prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \Psi_{l_A}(x_A) \Psi_{l_B}(x_B) \dots e^{iI[\psi]}}{\int \prod_{x,l} d\psi_l(x) e^{iI[\psi]}}, \quad (9.4.2)$$

где $I[\psi]$ – действие вида

$$I[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ L[\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)] + i\epsilon - \text{слагаемые} \}, \quad (9.4.3)$$

причем L включает теперь любые возможные слагаемые, возникающие от зависящего от поля детерминанта в формуле (9.3.10).

Предположим далее, что лагранжиан равен интегралу от плотности лагранжиана, содержащей квадратичное слагаемое \mathcal{L}_0 ,

остающееся и в отсутствие взаимодействий, и плотности лагранжиана взаимодействия \mathcal{L}_1 :

$$L[\Psi(\tau), \dot{\Psi}(\tau)] = \int d^3x \left[\mathcal{L}_0(\Psi(\mathbf{x}, \tau), \partial_\mu \Psi(\mathbf{x}, \tau)) + \mathcal{L}_1(\Psi(\mathbf{x}, \tau), \partial_\mu \Psi(\mathbf{x}, \tau)) \right]. \quad (9.4.4)$$

Иными словами, действие (9.4.3) равно

$$I[\Psi] = I_0[\Psi] + I_1[\Psi], \quad (9.4.5)$$

$$I_0[\Psi] = \int d^4x \mathcal{L}_0(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x)) + i\epsilon - \text{слагаемые}, \quad (9.4.6)$$

$$I_1[\Psi] = \int d^4x \mathcal{L}_1(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x)). \quad (9.4.7)$$

Так как \mathcal{L}_0 и « $i\epsilon$ -слагаемые» квадратичны по полям, можно всегда записать I_0 как обобщенную квадратичную форму

$$I_0[\Psi] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \sum_{l,l'} D_{lx,l'x'} \Psi_l(x) \Psi_{l'}(x'). \quad (9.4.8)$$

Например, для действительного скалярного поля массой m невозмущенный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (9.4.9)$$

а $i\epsilon$ -слагаемые в I_0 определяются формулой (9.2.16) в виде

$$\frac{1}{2} i\epsilon \int dt \int d^3x d^3x' \epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}', t), \quad (9.4.10)$$

так что

$$D_{x,x'} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \delta^4(x - x') + m^2 \delta^4(x - x') - i\epsilon E(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (9.4.11)$$

(С этого момента мы опускаем множитель $e^{-\epsilon|t|}$ в $i\epsilon$ -слагаемом, так как от него возникают поправки более высокого порядка по ϵ .) Взаимодействия мы будем учитывать по теории возмущений, разлагая экспоненту по степеням I_1 ,

$$\exp(iI[\Psi]) = \exp(iI_0[\Psi]) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} (I_1[\Psi])^N \quad (9.4.12)$$

а затем разлагая I_1 по степеням полей. Интегралы, получающиеся в числителе и знаменателе формулы (9.4.2), имеют следующий общий вид:

$$\mathcal{I}_{l_1 l_2 \dots}(x_1 x_2 \dots) \equiv \int \left(\prod_{l, x} d\psi_l(x) \right) e^{iI_0[\Psi]} \psi_{l_1}(x_1) \psi_{l_2}(x_2) \dots, \quad (9.4.13)$$

где множители, содержащие поля $\psi_{l_1}(x_1) \psi_{l_2}(x_2)$, и т. д. возникают из $I_1[\Psi]$ и/или из полевых множителей $\psi_{l_A}(x_A)$, изначально присутствующих в числителе (9.4.2). Если $I_0[\Psi]$ имеет вид (9.4.8), интеграл (9.4.13) относится к тому же типу, что и интеграл, вычисленный в Приложении к данной главе, с той разницей, что дискретный индекс s заменен парой индексов l, x . Поэтому можно воспользоваться формулами (9.A.12) и (9.A.15), что дает

$$\mathcal{I}_{l_1 l_2 \dots}(x_1 x_2 \dots) = \left[\text{Det} \left(\frac{i\mathcal{G}}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \sum_{\substack{\text{по} \\ \text{спариваниям} \\ \text{полей}}} \prod_{\text{по парам}} [-i\mathcal{G}^{-1}]_{\text{спаренные поля}} \quad (9.4.14)$$

Это и есть ковариантные правила Фейнмана в координатном пространстве для вычисления числителя в формуле (9.4.2). Мы проводим разложение по взаимодействию I_1 , затем суммируем по всевозможным спариваниям полей в множителях I_1 друг с другом и с полями $\psi_{l_A}(x_A)$ и т. д., причем каждое спаривание дает вклад в виде интеграла по пространству–времени от произведения коэффициентных функций полей в $I_1[\Psi]$ и произведения «пропагаторов» $-i\Delta$, где

$$\Delta_{l_1 l_2}(x_1, x_2) = (\mathcal{G}^{-1})_{l_1 x_1, l_2 x_2} \quad (9.4.15)$$

(Множитель $[\text{Det}(i\mathcal{G}/2\pi)]^{-1/2}$ в формуле (9.4.14) представляет собой вклад диаграмм с неограниченным числом одиночных петель, не связанных с другими линиями, но в любом случае этот множитель сокращается в отношении (9.4.2).)

Остается вычислить сами пропагаторы (9.4.15). Мы рассматриваем формулу (9.4.15) как интегральное уравнение

$$\sum_{l_2} \int d^4 x_2 D_{l_1 x_1, l_2 x_2} \Delta_{l_2, l_3}(x_2, x_3) = \delta^4(x_1 - x_3) \delta_{l_1 l_3}. \quad (9.4.16)$$

В отсутствие внешних полей в силу трансляционной инвариантности величина \mathcal{D} с необходимостью есть функция только разности $x_1 - x_2$ и может быть записана в виде интеграла Фурье:

$$D_{l_1 x_1, l_2 x_2} \equiv (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x_1 - x_2)} D_{l_1, l_2}(p). \quad (9.4.17)$$

Решение уравнения (9.4.16) имеет тогда вид

$$\Delta_{l_1, l_2}(x_2, x_3) = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x_1 - x_2)} D_{l_1, l_2}^{-1}(p). \quad (9.4.18)$$

где \mathcal{D}^{-1} — матрица, обратная к матрице \mathcal{D} . Как будет показано, $i\epsilon$ -слагаемые приводят к тому, что такая обратная матрица хорошо определена для всех действительных значений p . Таким образом, задача вычисления пропагатора сведена к обращению конечномерной матрицы.

Рассмотрим сначала массивное скалярное поле. В этом случае \mathcal{D} имеет вид (9.4.11). Можно записать его в виде интеграла Фурье

$$\mathcal{D}_{x,y} = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x-y)} (p^2 + m^2 - i\epsilon E(\mathbf{p})),$$

так что пропагатор равен

$$\Delta_{x,y} = (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x-y)} (p^2 + m^2 - i\epsilon E(\mathbf{p}))^{-1}.$$

Видно, что это выражение совпадает со скалярным пропагатором, полученным ранее операторными методами. (Разница между ϵ и $\epsilon E(\mathbf{p})$ несущественна, так как обе величины положительны и бесконечно малы.)

В качестве второго примера рассмотрим действительное массивное векторное поле. Невозмущенный лагранжиан равен

$$L_0 = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu.$$

Вновь можно записать $I_0[\Psi]$ в форме (9.4.8) с ядром

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\rho x, \sigma y} &= \left[\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\sigma \partial y^\rho} + m^2 \eta_{\rho\sigma} \right] \delta^4(x-y) + i\varepsilon - \text{слагаемые} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4 p e^{ip \cdot (x-y)} [\eta_{\rho\sigma} p^2 - p_\rho p_\sigma + m^2 \eta_{\rho\sigma} + i\varepsilon - \text{слагаемые}]. \end{aligned}$$

Мы не будем тратить здесь время на то, чтобы показывать, что « $+i\varepsilon$ -слагаемые» принимают простой вид $-i\varepsilon E(\mathbf{p}) \eta_{\rho\sigma}$. Тогда пропагатор векторного поля получается простым обращением матрицы 4×4 в последнем подинтегральном выражении:

$$\Delta_{\rho\sigma}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int \frac{d^4 p e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon E(\mathbf{p})} \left[\eta_{\rho\sigma} + \frac{p_\rho p_\sigma}{m^2} \right].$$

(Слагаемые, пропорциональные ε , в числителе опущены. Они важны в знаменателе, так как определяют, как следует рассматривать подынтегральное выражение вблизи массовой оболочки $p^2 = -m^2$.) Приведенное выражение совпадает с полученным операторными методами, если не считать того, что отсутствуют нековариантные слагаемые, пропорциональные $\delta(x^0 - y^0)$. Ранее эти нековариантные слагаемые были нужны для того, чтобы сократить нековариантные добавки в гамильтониане взаимодействия. Теперь же вклады вершин в фейнмановских правилах получаются непосредственно из ковариантного лагранжиана, так что никакого сокращения не требуется.

Столь же просто рассматриваются теории с взаимодействием с производными. Множитель, возникающий от спаривания производной поля $\partial_\mu \psi_l(x)$ с любым другим полем $\psi_m(y)$ (которое само может быть производной), имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu \psi_l(x) \psi_m(y) \rangle &= \frac{\int \left[\prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \partial_\mu \psi_l(x) \psi_m(y) e^{iI[\Psi]} }{\int \left[\prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] e^{iI[\Psi]} } \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle \psi_l(x) \psi_m(y) \rangle. \end{aligned} \quad (9.4.19)$$

У таких пропагаторов отсутствуют нековариантные части. Например, для действительного скалярного поля спаривание $\partial_\mu\phi$ с $\partial_\nu\phi$ приводит в результате к пропагатору в импульсном представлении $k_\mu k_\nu / (k^2 + m^2 - i\epsilon)$. Кроме того, как мы видели в предыдущем разделе, вершины в теории скалярного поля, взаимодействие которого с другими полями содержит производные, можно непосредственно извлечь из лагранжиана, причем они по отдельности ковариантны.

9.5. Функциональные интегралы для фермионов

Займемся теперь обобщением формализма функциональных интегралов на теории, содержащие как бозоны, так и фермионы. В принципе, нетрудно действовать чисто формально по аналогии с бозонным случаем, и затем убедиться, что получились «правильные» фейнмановские правила. Мы предпочитаем вывести формализм функциональных интегралов для фермионов непосредственно из принципов квантовой механики, как это уже было сделано для бозонов⁹.

Начнем с рассмотрения произвольной квантово-механической системы, описываемой «координатами» Q_a и канонически сопряженными «импульсами» P_a , которые теперь удовлетворяют не коммутационным, а антикоммутационным соотношениям

$$\{Q_a, P_b\} = i\delta_{ab}, \quad (9.5.1)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = \{P_a, P_b\} = 0. \quad (9.5.2)$$

(Эти операторы берутся в шредингеровском представлении, или, иначе говоря, в гейзенберговском представлении в момент времени $t = 0$.) Позднее мы заменим дискретный индекс a на пространственную координату \mathbf{x} и полевой индекс m .

Прежде всего, построим полный базис состояний, на которые действуют операторы Q и P . Заметим, что при любом заданном a

$$Q_a^2 = P_a^2 = 0. \quad (9.5.3)$$

Отсюда вытекает, что всегда существует «кет»-состояние $|0\rangle$, которое аннигилируется всеми операторами Q_a :

$$Q_a|0\rangle = 0, \quad (9.5.4)$$

и «бра»-состояние $\langle 0|$, которое аннигилируется (справа) всеми операторами P_a :

$$\langle 0|P_a = 0. \quad (9.5.5)$$

Например, можно положить

$$|0\rangle \propto \left(\prod_a Q_a \right) |f\rangle, \quad \langle 0| \propto \langle g| \left(\prod_a P_a \right),$$

где $|f\rangle$ и $\langle g|$ — любые кет- и бра-векторы, для которых эти выражения не обращаются в нуль. (Построенные состояния не могут обращаться в нуль для всех $|f\rangle$ и $\langle g|$, если только не равны нулю операторы $\prod_a Q_a$ и $\prod_a P_a$, что по предположению не имеет места.) В силу равенств (9.5.3) эти состояния удовлетворяют соотношениям (9.5.4) и (9.5.5). В общем случае они не единственны, поскольку могут быть дополнительные бозонные степени свободы, отличающие различные возможные состояния $|0\rangle$ и $\langle 0|$. Для простоты, ограничимся рассмотрением случая, когда единственными степенями свободы являются те, которые описываются фермионными операторами Q_a и P_a , и предположим, что состояния, удовлетворяющие соотношениям (9.5.4), (9.5.5), единственны с точностью до постоянного множителя, который мы выберем так, чтобы

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (9.5.6)$$

(Обратим внимание, что это условие нормировки не может быть выполнено, если определить $\langle 0|$ как левое собственное состояние Q_a с собственным значением нуль, поскольку в этом случае $\langle 0|\{Q_a, P_a\}|0\rangle$ также обращалось бы в нуль, откуда с учетом (9.5.1) следовало бы, что $\langle 0|0\rangle = 0$.)

Как мы видели в разделе 7.5, в дираковской теории Q_a неэрмитовы, но имеют сопряженные операторы $-iP_a$, и в этом случае $\langle 0|$ можно рассматривать просто как сопряженное состояние к $|0\rangle$.

Однако, существуют фермионные операторы (например, поля «духов», которые мы введем в т. II), для которых P_a никак не связаны с сопряженными к Q_a операторами. В последующем нам не потребуются никакие особые предположения об операторах, сопряженных к Q_a или P_a , а также о связи между $\langle 0|$ и $|0\rangle$.

Полный базис в пространстве состояний этой системы состоит из $|0\rangle$ и (антисимметричных по a, b, \dots) состояний

$$|a, b, \dots\rangle \equiv P_a P_b \dots |0\rangle \quad (9.5.7)$$

с любым числом *различных* P , действующих на $|0\rangle$. Это означает, что результат действия на эти состояния любой операторной функции P и Q можно записать как линейную комбинацию того же набора состояний. В частности, если индекс a не совпадает ни с одним из индексов в $|b, c, \dots\rangle$, то

$$Q_a |b, c, \dots\rangle = 0, \quad (9.5.8)$$

$$P_a |b, c, \dots\rangle = |a, b, c, \dots\rangle. \quad (9.5.9)$$

С другой стороны, если a равно одному из индексов в последовательности b, c, \dots , то всегда можно переписать это состояние (возможно, изменив его знак) так, что a станет первым из этих индексов, и тогда имеем:

$$Q_a |a, b, c, \dots\rangle = i |b, c, \dots\rangle, \quad (9.5.10)$$

$$P_a |a, b, c, \dots\rangle = 0. \quad (9.5.11)$$

Аналогично можно определить полный дуальный базис, состоящий из $\langle 0|$ и (антисимметричных по индексам) состояний

$$\langle a, b, \dots| \equiv \langle 0| \dots (-iQ_b) (-iQ_a). \quad (9.5.12)$$

Используя соотношения (9.5.4)–(9.5.6) и антикоммутационные соотношения (9.5.1), видим, что скалярные произведения этих состояний равны

$$\begin{aligned} \langle c, d, \dots | a, b, \dots \rangle &= \langle 0 | \dots (-iQ_d)(-iQ_c)P_a P_b \dots | 0 \rangle \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } \{c, d, \dots\} \neq \{a, b, \dots\}, \\ 1, & \text{если } c = a, d = b, \text{ и т. д.} \end{cases} \end{aligned} \quad (9.5.13)$$

где $\{\dots\}$ означает набор индексов внутри скобок независимо от их порядка.

При выводе фейнмановских правил хотелось бы переписать суммы по промежуточным состояниям типа (9.5.7) как интегралы по собственным состояниям Q_a или P_a . Однако такие операторы не могут иметь (отличные от нуля) собственные значения в обычном смысле. Допустим, мы пытаемся найти состояние $|q\rangle$, удовлетворяющее (для всех a) уравнению

$$Q_a |q\rangle = q_a |q\rangle. \quad (9.5.14)$$

Из (9.5.2) следует, что

$$q_a q_b + q_b q_a = 0, \quad (9.5.15)$$

что невозможно для обычных чисел. Однако ничто не может помешать нам ввести в рассмотрение алгебру «переменных» q_a (их называют *грассмановыми переменными*), которые действуют как c -числа, если речь идет о физическом гильбертовом пространстве, но которые все же удовлетворяют антикоммутационным соотношениям (9.5.15). Потребуем далее, чтобы

$$\{q_a, q'_b\} = \{q_a, Q_b\} = \{q_a, P_b\} = 0, \quad (9.5.16)$$

где q и q' обозначают любые два «значения» этих переменных. Теперь можно построить состояния $|q\rangle$, удовлетворяющие уравнению (9.5.14):

$$|q\rangle = \exp\left(-i \sum_a P_a q_a\right) |0\rangle, \quad (9.5.17)$$

где экспонента определена как обычно своим разложением в ряд. (Чтобы проверить, что уравнение (9.5.14) удовлетворяется, воспользуйтесь тем, что все $P_a q_a$ коммутируют друг с другом и имеют нулевой квадрат, так что

$$\begin{aligned}
[\mathcal{Q}_a - q_a | q] &= [\mathcal{Q}_a - q_a] \exp(-iP_a q_a) \exp\left(-i \sum_{b \neq a} P_b q_b\right) | 0 \rangle \\
&= [\mathcal{Q}_a - q_a] [1 - iP_a q_a] \exp\left(-i \sum_{b \neq a} P_b q_b\right) | 0 \rangle \\
&= [-i\{\mathcal{Q}_a, P_a\} q_a - q_a] \exp\left(-i \sum_{b \neq a} P_b q_b\right) | 0 \rangle = 0,
\end{aligned}$$

что и требуется доказать.) Аналогично можно определить левые собственные векторы состояния $\langle q |$ (не сопряженные к $| q \rangle$) как

$$\langle q | \equiv \langle 0 | \left(\prod_a \mathcal{Q}_a \right) \exp\left(-i \sum_a q_a P_a\right) = \langle 0 | \left(\prod_a \mathcal{Q}_a \right) \exp\left(+i \sum_a P_a q_a\right), \quad (9.5.18)$$

где \prod_a — символ произведения операторов в том порядке, который принят за стандартный. По тем же соображениям, что и для уравнения (9.5.14), видим, что

$$\langle q | \mathcal{Q}_a = \langle q | q_a. \quad (9.5.19)$$

Скалярное произведение таких собственных состояний имеет вид

$$\begin{aligned}
\langle q' | q \rangle &= \langle 0 | \left(\prod_a \mathcal{Q}_a \right) \exp\left(i \sum_b P_b (q'_b - q_b)\right) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \left(\prod_a \mathcal{Q}_a \right) \left(\prod_b (1 + iP_b (q'_b - q_b)) \right) | 0 \rangle.
\end{aligned}$$

Переставляя теперь каждый оператор \mathcal{Q}_a направо (начиная с самого крайнего справа), получаем множители $i^2(q'_a - q_a)$, которые мы выносим направо из-под знака скалярного произведения, и в результате получаем:

$$\langle q' | q \rangle = \prod_a (q_a - q'_a). \quad (9.5.20)$$

Мы увидим, что выражение (9.5.20) играет роль дельта-функции в интегралах по q .

Аналогично можно построить правые и левые собственные состояния операторов P_a :

$$P_a |p\rangle = p_a |p\rangle, \quad (9.5.21)$$

$$\langle p | P_a = \langle p | p_a, \quad (9.5.22)$$

где p_a являются, как и q_a , антикоммутирующими c -числами (для удобства считается, что они антикоммутируют не только друг с другом, но и с q_a и со всеми фермионными операторами):

$$|p\rangle = \exp\left(-i \sum_a Q_a p_a\right) \left(\prod_b P_b\right) |0\rangle, \quad (9.5.23)$$

$$\langle p| = \langle 0| \exp\left(-i \sum_a p_a Q_a\right), \quad (9.5.24)$$

со скалярным произведением (которое вычисляется перестановкой всех P налево)

$$\langle p' | p \rangle = \prod_a (p'_a - p_a). \quad (9.5.25)$$

Скалярные произведения двух разных типов собственных состояний друг с другом имеют вид

$$\begin{aligned} \langle q | p \rangle &= \langle q | \exp\left(-i \sum_a Q_a p_a\right) \left(\prod_a P_a\right) |0\rangle = \\ &= \left(\prod_a \exp(-i q_a p_a)\right) \langle q | \left(\prod_a P_a\right) |0\rangle \\ &= \left(\prod_a \exp(-i q_a p_a)\right) \langle 0 | \left(\prod_a Q_a\right) \left(\prod_a P_a\right) |0\rangle, \end{aligned}$$

так что

$$\langle q|p\rangle = \chi_N \exp\left(-i\sum_a q_a p_a\right) = \chi_N \exp\left(i\sum_a p_a q_a\right), \quad (9.5.26)$$

где χ_N — фаза, зависящая только от числа N операторов Q_a :

$$\chi_N \equiv \langle 0 \left(\prod_a Q_a \right) \left(\prod_a P_a \right) 0 \rangle = i^N (-1)^{N(N-1)/2}.$$

Еще проще получается формула

$$\langle p|q\rangle = \prod_a \exp(-ip_a q_a). \quad (9.5.27)$$

Нетрудно видеть, что состояния $|q\rangle$ (как и состояния $|p\rangle$) образуют в определенном смысле полный набор состояний. Из определений (9.5.17) следует, что состояние $|a, b, \dots\rangle$ из общего базиса есть (с точностью до фазы) коэффициент при произведении $q_a q_b \dots$ в разложении состояния $|q\rangle$ в сумму произведений грасмановских чисел q . Поэтому всякое состояние $|f\rangle$ можно представить в виде

$$|f\rangle = f_0 |q\rangle_0 + \sum_a f_a |q\rangle_a + \sum_{a \neq b} f_{ab} |q\rangle_{ab} + \dots,$$

где f — численные коэффициенты, а нижние индексы $ab \dots$ при символе $|q\rangle$ обозначают коэффициенты при произведении $q_a q_b \dots$ в разложении состояния $|q\rangle$.

При суммировании по состояниям очень удобно ввести определенный способ интегрирования по фермионным переменным, известный как *интегрирование по Березину*,¹⁰ который позволяет находить коэффициенты при таких произведениях антикоммутирующих s -чисел. Для любого набора этих переменных ξ_n (состоящего из величин p, q или и тех и других) самая общая функция $f(\xi)$ может быть представлена в виде

$$f(\xi) = \left(\prod_n \xi_n \right) c \quad (9.5.28)$$

+ слагаемые, в которых множителей ξ меньше,

а интеграл по переменным ξ определяется как

$$\int \left(\prod_n d\tilde{\xi}_n \right) f(\xi) \equiv c, \quad (9.5.29)$$

где тильда в формуле (9.5.29) соответствует удобному соглашению, что дифференциалы записываются в порядке, противоположном порядку произведения переменных интегрирования в (9.5.28). Так как это произведение антисимметрично относительно перестановки любых двух ξ , то интеграл антисимметричен также относительно перестановки любых двух $d\xi$, так что «дифференциалы» эффективно антикоммутируют:

$$d\xi_n d\xi_m + d\xi_m d\xi_n = 0. \quad (9.5.30)$$

Кроме того, коэффициент c может зависеть от других c -числовых переменных, по которым не проводится интегрирование, и которые антикоммутируют с теми ξ , по которым мы интегрируем. В этом случае важно стандартизовать определение c , переместив все ξ налево от c перед интегрированием по ним, как это и сделано в формуле (9.5.28).

Например, самая общая функция от пары антикоммутирующих c -чисел ξ_1 и ξ_2 имеет вид

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2 c_{12} + \xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + d,$$

поскольку квадраты и все более высокие степени ξ_1 и ξ_2 обращаются в нуль. Интегралы от этой функции равны

$$\begin{aligned} \int d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2 c_{12} + c_1, & \int d\xi_2 f(\xi_1, \xi_2) &= -\xi_1 c_{12} + c_2, \\ \int d\xi_2 d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) &= c_{12}. \end{aligned}$$

Заметим, что многократный интеграл совпадает с повторным:

$$\int d\xi_2 d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) = \int d\xi_2 \left[\int d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) \right].$$

Этот результат можно легко распространить на интегралы по любому числу фермионных переменных. (Именно для того, чтобы получить указанную формулу без дополнительных знаковых

множителей, мы взяли произведение дифференциалов в (9.5.29) в порядке, противоположном произведению переменных в (9.5.28). Действительно, можно было бы сначала определить интеграл по единственному антикоммутирующему s -числу ξ_1 , а затем обычным способом определить кратные интегралы путем итерации. Наиболее общая функция антикоммутирующих s -чисел линейна по любому из них:

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots) = b(\xi_2, \dots) + \xi_1 c(\xi_2, \dots)$$

(так как $\xi_1^2 = 0$), и ее интеграл по ξ_1 определяется как

$$\int d\xi_1 f(\xi_1, \xi_2, \dots) = c(\xi_2, \dots).$$

Повторение этого процесса приводит к кратному интегралу, совпадающему с интегралом, определенным формулами (9.5.28) и (9.5.29).

Так определенный интеграл обладает еще рядом свойств, аналогичных свойствам многократных интегралов (от $-\infty$ до $+\infty$) по обычным действительным переменным. Однако есть и существенные отличия.

Очевидно, что интегрирование по Березину линейно в том смысле, что

$$\int \left(\prod_n d\xi_n \right) [f(\xi) + g(\xi)] = \int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi) + \int \left(\prod_n d\xi_n \right) g(\xi), \quad (9.5.31)$$

и, кроме того,

$$\int \left(\prod_n d\xi_n \right) [f(\xi) a(\xi')] = \left[\int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi) \right] a(\xi'), \quad (9.5.32)$$

где $a(\xi')$ — любая функция (в том числе, константа) от любых антикоммутирующих s -чисел ξ'_m , по которым *не* производится интегрирование. Однако линейность по отношению к левому умножению не столь очевидна. Поскольку предполагается, что ξ'_m антикоммутирует со всеми ξ_n , то при интегрировании по ν переменным имеем

$$a((-)^{\nu} \xi') \left(\prod_n \xi_n \right) = \left(\prod_n \xi_n \right) a(\xi'),$$

так что

$$\int \left(\prod_n d\xi_n \right) \left[a((-)^{\nu} \xi') f(\xi) \right] = a(\xi') \int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi). \quad (9.5.33)$$

Поэтому очень удобно (хотя, строго говоря, и не обязательно) считать, что дифференциалы $d\xi_n$ антикоммутируют со всеми антикоммутирующими переменными (включая ξ_n):

$$(d\xi_n) \xi'_m + \xi'_m (d\xi_n) = 0, \quad (9.5.34)$$

В этом случае (9.5.33) принимает более простой вид

$$\int a(\xi') \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi) = a(\xi') \int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi). \quad (9.5.35)$$

Другое сходство с обычным интегрированием заключается в том, что для произвольного антикоммутирующего c -числа ξ' , не зависящего от ξ , выполнено равенство

$$\int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi + \xi') = \int \left(\prod_n d\xi_n \right) f(\xi), \quad (9.5.36)$$

так как сдвиг ξ на константу влияет только на слагаемые в f с числом переменных ξ , меньшим, чем их полное число.

С другой стороны, рассмотрим замену переменных

$$\xi_n \rightarrow \xi'_n = \sum_m \mathcal{S}_{nm} \xi_m, \quad (9.5.37)$$

где \mathcal{S} — произвольная несингулярная матрица из обычных чисел. Произведение новых переменных равно

$$\prod_n \xi'_n = \sum_{m_1 m_2 \dots} \left(\prod_n \mathcal{S}'_{nm_n} \xi_{m_n} \right).$$

Однако $\prod_n \xi_{m_n}$ совпадает с произведением $\prod_n \xi_n$ (взятым в первоначальном порядке), если не считать знакового множителя $\varepsilon[m]$, равного $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли перестановка $n \rightarrow m_n$ четной или нечетной перестановкой первоначального порядка множителей:

$$\prod_n \xi'_n = \left[\sum_{m_1 m_2 \dots} \left(\prod_n \mathcal{S}'_{nm_n} \right) \varepsilon[m] \right] \prod_n \xi_n = (\text{Det } \mathcal{S}') \prod_n \xi_n.$$

Эта формула применима при любом порядке следования ξ_n , если только мы возьмем ξ'_n в том же порядке. Отсюда следует, что коэффициент при произведении $\prod_n \xi'_n$ в разложении любой функции $f(\xi)$ по ξ' равен в точности коэффициенту при произведении $\prod_n \xi_n$, умноженному на $(\text{Det } \mathcal{S}')^{-1}$. Мы записываем это утверждение как

$$\int \left(\prod_n d\xi'_n \right) f = (\text{Det } \mathcal{S}')^{-1} \int \left(\prod_n d\xi_n \right) f. \quad (9.5.38)$$

Это обычное правило замены переменных интегрирования, за исключением того, что $(\text{Det } \mathcal{S}')$ входит в степени -1 , а не $+1$. Далее мы используем правило (9.5.38) и свойства линейности (9.5.31), (9.5.32) и (9.5.35) для вычисления интегралов, встречающихся при выводе фейнмановских правил для теорий с фермионами.

Используя это определение интегрирования, можно записать условие полноты как формулу для интеграла по собственным значениям. Как уже отмечалось, любое состояние $|f\rangle$ можно разложить в ряд по состояниям $|0\rangle, |a\rangle, |a,b\rangle$, и т. д., а сами эти состояния равны (с точностью до фазы) коэффициентам при произведениях $1, q_a, q_a q_b$, и т. д. в разложении собственного состояния $|q\rangle$ операторов Q . Согласно определению интегрирования, можно извлечь коэффициент при любом произведении $q_b q_c q_d \dots$ в разложении состояния $|q\rangle$, интегрируя произведение $|q\rangle$ со всеми q_a , где a не равно b, c, d, \dots Таким образом, выбирая функцию $f(q)$ как подходящую сумму

таких произведений разных q , можно записать любое состояние $|f\rangle$ в виде интеграла

$$|f\rangle = \int \left(\prod_a \tilde{d}q_a \right) |q\rangle f(q) = \int |q\rangle \left(\prod_a \tilde{d}q_a \right) f(q). \quad (9.5.39)$$

(Можно переставить $|q\rangle$ налево от дифференциалов без всяких изменений знаков, поскольку в показателе экспоненты в формуле (9.5.17), определяющей $|q\rangle$, содержится только четное число фермионных переменных.) Чтобы найти функцию $f(q)$ для заданного вектора состояния $|f\rangle$, возьмем скалярное произведение вектора (9.5.39) с некоторым бра-вектором $\langle q'|$ (где q' — любое фиксированное собственное значение операторов Q). В соответствии с формулами (9.5.35) и (9.5.20) оно равно

$$\langle q'|f\rangle = \int \left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) \left(\prod_b \tilde{d}q_b \right) f(q).$$

Переставляя каждый множитель $(q_a - q'_a)$ направо от каждого дифференциала dq_b , получаем знаковый множитель $(-)^{N^2} \equiv (-)^N$, где теперь N равно полному числу переменных q_a , так что

$$\langle q'|f\rangle = (-)^N \int \left(\prod_b \tilde{d}q_b \right) \left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q).$$

Можно переписать функцию $f(q)$ как $f(q' + (q - q'))$ и разложить ее по степеням $q - q'$. Все слагаемые, кроме слагаемого низшего порядка, обращаются в нуль при умножении на произведение $\prod (q_a - q'_a)$, и

$$\left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q) = \left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q'), \quad (9.5.40)$$

что частично подтверждает наше предыдущее замечание, что для интегралов по q выражение (9.5.20) играет роль дельта-функции.

С помощью (9.5.32) имеем

$$\langle q' | f \rangle = (-)^N \left[\int \left(\prod_b \tilde{d}q_b \right) \left(\prod_a (q_a - q'_a) \right) f(q') \right].$$

Коэффициент при слагаемом в подынтегральном выражении, пропорциональном $\prod q_a$, равен $f(q')$, так что в согласии с нашим определением интегрирования $\langle q' | f \rangle = (-)^N f(q')$. Вновь подставляя это выражение в формулу (9.5.39), получаем соотношение полноты в виде

$$|f\rangle = (-)^N \int |q\rangle \left(\prod_b \tilde{d}q_b \right) \langle q | f \rangle,$$

или в виде операторного равенства

$$1 = \int |q\rangle \left(\prod_a \tilde{d}q_a \right) \langle q|. \quad (9.5.41)$$

Точно тем же способом можно показать, что

$$1 = \int |p\rangle \left(\prod_a \tilde{d}p_a \right) \langle p|. \quad (9.5.42)$$

Наконец-то мы можем вычислить матричные элементы переходов. Как и ранее, определяем зависящие от времени операторы

$$Q_a(t) \equiv \exp(iHt) Q_a \exp(-iHt), \quad (9.5.43)$$

$$P_a(t) \equiv \exp(iHt) P_a \exp(-iHt), \quad (9.5.44)$$

и их правые и левые собственные состояния

$$|q; t\rangle \equiv \exp(iHt) |q\rangle, \quad |p; t\rangle \equiv \exp(iHt) |p\rangle, \quad (9.5.45)$$

$$\langle q; t| \equiv \langle q| \exp(-iHt), \quad \langle p; t| \equiv \langle p| \exp(-iHt). \quad (9.5.46)$$

Скалярное произведение собственных q -состояний, определенных в бесконечно близкие моменты времени, равно

$$\langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle = \langle q' | \exp(-iHd\tau) | q \rangle.$$

Вставим теперь единицу в форме (9.5.42) слева от оператора $\exp(-iHd\tau)$. Удобно представить гамильтониан $H(P, Q)$ в форме, когда все операторы P стоят слева от всех операторов Q , так что для бесконечно малых $d\tau$

$$\langle p | \exp(-iH(P, Q)d\tau) | q \rangle = \langle p | q \rangle \exp(-iH(p, q)d\tau).$$

(Предполагается, что каждое слагаемое в гамильтониане содержит четное число фермионных операторов, и поэтому можно ставить s -число $H(p, q)$ с любой стороны матричного элемента без какого-либо изменения знака.) Имеем

$$\begin{aligned} \langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle &= \int \langle q' | p \rangle \left(\prod_a \tilde{d}p_a \right) \langle p | \exp(-iHd\tau) | q \rangle \\ &= \int \langle q' | p \rangle \left(\prod_a \tilde{d}p_a \right) \langle p | q \rangle \exp(-iH(p, q)d\tau). \end{aligned}$$

Пользуясь формулами (9.5.26) и (9.5.27) и замечая, что произведения $p_a q_a$ и $p_a q'_a$ коммутируют со всеми антикоммутирующими s -числами, находим

$$\langle q'; \tau + d\tau | q; \tau \rangle = \int \left(\prod_a \tilde{d}p_a \right) \exp \left[i \sum_a p_a (q'_a - q_a) - iH(p, q)d\tau \right]. \quad (9.5.47)$$

Дальнейший вывод производится по той же схеме, что и в разделе 9.1. Для вычисления матричного элемента

$$\langle q; t' | \mathcal{C}_A(P(t_A), Q(t_A)) \mathcal{C}_B(P(t_B), Q(t_B)) \dots | q; t \rangle$$

от произведения операторов (где $t' > t_A > t_B > \dots > t$), разделим временной интервал от t до t' на большое число очень малых шагов

по времени; на каждом шаге используем соотношение полноты (9.5.41); используем формулу (9.5.47), чтобы вычислить получившиеся матричные элементы (где это необходимо, вставляя ϱ_A , ϱ_B и т. п.); передвинем все дифференциалы налево (это не вносит дополнительных знаков, поскольку на каждом шаге имеется одинаковое количество дифференциалов dp и dq); введем функции $q_a(t)$ и $p_a(t)$, интерполирующие на каждом шаге значения q_a и p_a . В результате находим

$$\begin{aligned}
 & \langle q'; t' | T \{ \varrho_A(P(t_A), Q(t_A)), \varrho_B(P(t_B), Q(t_B)), \dots \} | q; t \rangle \\
 &= (-)^N \chi_N \int_{q_a(t)=q_a, q_a(t')=q'_a} \left(\prod_a d q_a(\tau) d p_a(\tau) \right) \\
 & \times \varrho_A(p(t_A), q(t_A)), \varrho_B(p(t_B), q(t_B)), \dots \\
 & \times \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \sum_a p_a(\tau) \dot{q}_a(\tau) - H(p(\tau), q(\tau)) \right\} \right]. \tag{9.5.48}
 \end{aligned}$$

Здесь символ T означает обычное произведение, если моменты времени расположены в первоначально предполагавшемся порядке: $t_A > t_B > \dots$. Однако правая часть равенства полностью симметрична по ϱ_A , ϱ_B , ... (если не считать отрицательных знаков, возникающих при перестановке антикоммутирующих s -чисел), так что приведенная формула выполняется в произвольные моменты времени (между t и t'), при условии, что T понимается как операция хронологического упорядочивания с возможным общим отрицательным знаком, если при таком упорядочивании приходится совершать нечетное число перестановок фермионных операторов.

До этого момента мы удерживали общий фазовый множитель $(-i)^N \chi_N$. Однако в действительности эти фазы дают вклад только в амплитуды переходов вакуум-вакуум и не представляют для нас интереса.

Переход к квантовой теории поля производится по той же схеме, как и для бозонных полей (см. раздел 9.2). Среднее по вакууму от хронологически упорядоченного произведения операторов дается формулой, похожей на (9.2.17):

$$\begin{aligned}
& \langle \text{VAC, out} | T \{ \varrho_A(P(t_A), Q(t_A)), \varrho_B(P(t_B), Q(t_B)), \dots \} | \text{VAC, in} \rangle \\
& \propto \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \varrho_A[p(t_A), q(t_A)] \\
& \times \varrho_B[p(t_B), q(t_B)] \dots \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x}, t) \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) \right. \right. \\
& \left. \left. - H[q(\tau), p(\tau)] + i\varepsilon - \text{слагаемые} \right\} \right]. \tag{9.5.49}
\end{aligned}$$

где коэффициент пропорциональности одинаков для всех операторов ϱ_A , ϱ_B , и т. д., а $i\varepsilon$ -слагаемые возникают из волновой функции вакуума. Как и ранее, мы заменили каждый дискретный индекс типа a на пространственную координату \mathbf{x} и индекс поля m . Мы опустили также тильду над знаком произведения дифференциалов, так как это влияет только на общую фазу в функциональном интеграле.

Главное отличие фермионного случая от бозонного заключается в том, что здесь не нужно интегрировать по p перед интегрированием по q . Действительно, в стандартной модели электрослабых взаимодействий (и в других теориях, вроде старой теории Ферми β -распада) канонические импульсы p_m являются вспомогательными полями, не связанными с \dot{q}_m , а лагранжиан линеен по \dot{q}_m , так что величина $\int d^3x \sum_m p_m \dot{q}_m - H$ в формуле (9.5.49) и есть лагранжиан L . Каждое слагаемое в гамильтониане для фермионного поля с ненулевым квантовым числом (например, поля электронов в квантовой электродинамике) в общем случае содержит равное число переменных p (пропорциональных q^{\dagger}) и q . В частности, слагаемое H_0 в полном гамильтониане, отвечающее свободным частицам, билинейно по p и q , так что

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x}, t) \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) - H_0[q(\tau), p(\tau)] + i\varepsilon - \text{слагаемые} \right\} \\
& = - \sum_{mn} \int d^4x d^4y \mathcal{G}_{mx, ny} p_m(x) q_n(y), \tag{9.5.50}
\end{aligned}$$

где \mathcal{G} — некоторая числовая «матрица». Гамильтониан взаимодействия $V \equiv H - H_0$ есть сумма произведений равного числа фермионных полей q и p (с коэффициентами, которые могут зависеть от бозонных полей). Поэтому при разложении матричного элемента (9.5.49) по степеням V возникает сумма фермионных интегралов вида

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n_1 m_1 n_2 m_2 \dots n_N m_N}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N) &\equiv \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ &\times \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] q_{m_1}(x_1) p_{n_1}(y_1) q_{m_2}(x_2) p_{n_2}(y_2) \dots q_{m_N}(x_N) p_{n_N}(y_N) \\ &\times \exp \left(-i \sum_{mn} \int d^4x d^4y \mathcal{G}_{mx, ny} p_m(x) q_n(y) \right), \end{aligned} \quad (9.5.51)$$

причем каждое такое слагаемое приходится на каждую возможную совокупность вершин в фейнмановской диаграмме, и каждая вершина дает вклад в общий коэффициент при каждом таком слагаемом в виде множителя, который равен коэффициенту при произведении полей в соответствующем слагаемом в операторе взаимодействия, умноженному на мнимую единицу i^* .

Для вычисления подобного интеграла рассмотрим сначала производящую функцию всех таких интегралов

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f, g) &\equiv \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ &\times \exp \left(-i \sum_{mn} \int d^4x d^4y \mathcal{G}_{mx, ny} p_m(x) q_n(y) \right. \\ &\left. - i \sum_m \int d^4x p_m(x) f_m(x) - i \sum_n \int d^4y g_n(y) q_n(y) \right), \end{aligned} \quad (9.5.52)$$

* Необходимо также иметь в виду вершины от составных операторов \mathcal{O} , отвечающие им коэффициенты не содержат множителя i . — *Прим. ред.*

где $f_m(x)$ и $g_n(y)$ – произвольные антикоммутирующие c -числовые функции. Сделаем сдвиг в переменных интегрирования:

$$\begin{aligned} p'_m(x) &= p_m(x) + \sum_n \int d^4y g_n(y) (\mathcal{D}^{-1})_{ny, mx}, \\ q'_n(y) &= q_n(y) + \sum_m \int d^4x (\mathcal{D}^{-1})_{ny, mx} f_m(x). \end{aligned}$$

Пользуясь условием трансляционной инвариантности (9.5.36), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f, g) &= \exp \left(i \sum_{mn} \int d^4x d^4y (\mathcal{D}^{-1})_{ny, mx} g_n(y) f_m(x) \right) \\ &\times \int \left(\prod_{\mathbf{x}, \tau, m} dq'_m(\mathbf{x}, \tau) dp'_n(\mathbf{x}, \tau) \right) \\ &\times \exp \left(-i \sum_{mn} \int d^4x d^4y \mathcal{D}_{mx, ny} p'_m(x) q'_n(y) \right). \end{aligned} \quad (9.5.53)$$

Интеграл есть константа, пропорциональная $\text{Det } \mathcal{D}$ (т. е. не зависит от функций f и g), что можно показать с помощью формулы (9.5.38). Для нас более важен первый множитель. Разлагая его по степеням произведения gf и сравнивая с прямым разложением выражения (9.5.52), видим, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_{n_1 m_1 n_2 m_2 \dots n_N m_N}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N) \\ &\propto \sum_{\text{по спариваниям}} \delta_{\text{спаривания}} \prod_{\text{по парам}} (-i \mathcal{D}^{-1})_{\text{спаренные } tx, ny} \end{aligned} \quad (9.5.54)$$

с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от x , y , m или n , а также от числа этих переменных. Сумма в выражении (9.5.54) берется по всем способам спаривания p с q , при этом спаривания, отличающиеся только порядком пар, не считаются различными. Иными словами, мы суммируем по $N!$ перестановкам либо p , либо q . Знаковый множитель $\delta_{\text{спаривания}}$ равен $+1$ или -1 в зависимости от четности или нечетности каждой перестановки.

Знаковый множитель и сумма по спариваниям совпадают с теми, которые были получены ранее при выводе фейнмановских правил, причем сумма по спариваниям соответствует сумме по способам соединения линий, выходящих из вершин в диаграммах Фейнмана, а множители $(\mathcal{D}^{-1})_{mx,ny}$ играют роль пропагаторов при спаривании $q_m(x)$ с $p_n(y)$. В дираковском формализме для частиц спина 1/2 действие свободных частиц имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \int d^3x \sum_m p_m(\mathbf{x}, \tau) \dot{q}_m(\mathbf{x}, \tau) - H_0[q(\tau), p(\tau)] \right\} \\ & = - \int d^4x \bar{\Psi}(x) [\gamma^\mu \partial_\mu + m] \Psi(x), \end{aligned} \quad (9.5.55)$$

в данном случае канонические переменные в обычных обозначениях имеют следующий вид:

$$q_m(x) = \Psi_m(x), \quad p_m(x) = -[\Psi(x)\gamma^0]_m = i\Psi_m^\dagger(x), \quad (9.5.56)$$

где m – дираковский индекс, принимающий четыре значения. Сравнивая эти выражения с формулой (9.5.50), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mx,ny} &= \left[\gamma^0 \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m - i\varepsilon \right) \right]_{mn} \delta^4(x-y) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\gamma^0 [i\gamma^\mu k_\mu + m - i\varepsilon] \right)_{mn} e^{ik \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (9.5.57)$$

(Хотя мы и опускаем детали, но слагаемое с $i\varepsilon$ возникает здесь во многом аналогично случаю скалярного поля в разделе 9.2.) Тогда пропагатор имеет вид

$$(\mathcal{D}^{-1})_{mx,ny} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left([i\gamma^\mu k_\mu + m - i\varepsilon]^{-1} [-\gamma^0] \right)_{mn} e^{ik \cdot (x-y)}. \quad (9.5.58)$$

совпадающий с тем, что был найден в рамках операторного формализма. Дополнительный множитель $-\gamma^0$ возникает за счет того, что этот пропагатор представляет собой вакуумное среднее от $T\{\Psi_m(x), -[\bar{\Psi}(y)\gamma^0]_n\}$, а не от $T\{\Psi_m(x), \bar{\Psi}_n(y)\}$.

Чтобы привести хотя бы один пример того, что функциональный метод иногда быстрее приводит к решению задачи, чем операторный метод, вычислим зависимость от поля амплитуды перехода вакуум→вакуум в случае дираковского поля, взаимодействующего только с внешним полем. Возьмем лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu + m + \Gamma]\psi, \quad (9.5.59)$$

где $\Gamma(x)$ – зависящая от x матрица, описывающая взаимодействие фермиона с внешним полем. Согласно формуле (9.5.49), амплитуда вероятности того, что вакуум останется вакуумом в присутствии этого внешнего поля, есть

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_\Gamma &\propto \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ &\times \exp \left\{ -i \int d^4x p^T \gamma^0 [\gamma^\mu \partial_\mu + m + \Gamma - i\varepsilon] q \right\}, \end{aligned} \quad (9.5.60)$$

где коэффициент пропорциональности не зависит от $\Gamma(x)$. Запишем эту амплитуду в виде

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_\Gamma &\propto \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dq_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} dp_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ &\times \exp \left\{ -i \sum_{mn} \int d^4x d^4y p_m(x) q_n(y) \mathcal{K}[\Gamma]_{mx, ny} \right\}, \end{aligned} \quad (9.5.61)$$

где

$$\mathcal{K}[\Gamma]_{mx, ny} = \left(\gamma^0 \left[\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m + \Gamma(x) - i\varepsilon \right] \right)_{mn} \delta^4(x - y). \quad (9.5.62)$$

Чтобы вычислить последнее выражение, заменим переменные интегрирования $q_n(x)$ на

$$q'_m(x) \equiv \sum_n \int d^4y \mathcal{K}[\Gamma]_{mx, ny} q_n(y). \quad (9.5.63)$$

Получившийся интеграл не зависит от Γ , так что вся зависимость от Γ амплитуды вероятности вакууму остаться вакуумом содержится в детерминанте, возникающем от замены переменных согласно формуле (9.5.38):

$$\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_{\Gamma} \propto \text{Det } \mathcal{K}[\Gamma]. \quad (9.5.64)$$

Чтобы воспроизвести результаты теории возмущений, представим $\mathcal{K}(\Gamma)$ в виде

$$\mathcal{K}[\Gamma] \equiv \mathcal{D} + \mathcal{G}[\Gamma], \quad (9.5.65)$$

$$\mathcal{G}[\Gamma]_{mx,ny} = (\gamma^0 \Gamma(x))_{mn} \delta^4(x-y), \quad (9.5.66)$$

и разложим правую часть формулы (9.5.64) в ряд по степеням $\mathcal{G}[\Gamma]$:

$$\begin{aligned} \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_{\Gamma} &\propto \text{Det} (\mathcal{D}[1 + \mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma]]) \\ &= [\text{Det } \mathcal{D}] \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr} (\mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma])^n \right). \end{aligned} \quad (9.5.67)$$

Это именно то, что следовало ожидать согласно фейнмановским правилам: вклады от внутренних линий и вершин в этой теории равны $-i\mathcal{D}^{-1}$ и $-i\mathcal{G}[\Gamma]$; след от произведения n множителей $-\mathcal{D}^{-1}\mathcal{G}[\Gamma]$ соответствует петле с n вершинами, соединенными n внутренними линиями; $1/n$ – обычный комбинаторный множитель, связанный с такими петлями (см раздел 6.1); знаковый множитель равен $(-1)^{n+1}$, а не $(-1)^n$, так как дополнительный знак «минус» связан с фермионными петлями; наконец, сумма по n в показателе экспоненты возникает потому, что в амплитуду вероятности вакууму остаться вакуумом вносят вклад диаграммы с любым числом несвязных петель. Не зависящий от Γ множитель $\text{Det } \mathcal{D}$ менее удобно выводить из фейнмановских правил; он представляет собой вклад произвольного числа фермионных петель без вершин.

Добавим, что формула типа (9.5.64) позволит получить непертурбативные результаты, используя топологические теоремы о собственных значениях ядер типа $\mathcal{K}[\Gamma]$. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в т. II.

9.6. Функциональная формулировка квантовой электродинамики

Преимущества функционального подхода к квантовой теории поля раскрываются в полной мере при его применении к калибровочным теориям безмассовых частиц спина единица, подобных квантовой электродинамике. Прделанный в предыдущей главе вывод фейнмановских правил для квантовой электродинамики содержал немало аргументов на уровне «размахивания руками» при доказательстве того, что слагаемые в фотонном пропагаторе $\Delta^{\mu\nu}(q)$, пропорциональные q^μ или q^ν , могут быть отброшены, а чисто времениподобные слагаемые в точности сокращают кулоновское слагаемое в гамильтониане, так что эффективный фотонный пропагатор можно взять в виде $\eta^{\mu\nu}/q^2$. Чтобы дать строгое обоснование этого результата методами гл. 8, нам потребовался бы сложный анализ фейнмановских диаграмм. Однако, как мы сейчас покажем, функциональный подход приводит к желаемой форме фотонного пропагатора автоматически, без какого-либо обращения к деталям поведения фейнмановских диаграмм.

В главе 8 было показано, что в кулоновской калибровке гамильтониан взаимодействия фотонов с заряженными частицами имеет вид

$$H[\mathbf{A}, \mathbf{\Pi}_\perp, \dots] = H_M + \int d^3x \left[\frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \right] + V_{\text{кул}}. \quad (9.6.1)$$

Здесь \mathbf{A} — векторный потенциал, подчиняющийся условию кулоновской калибровки

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (9.6.2)$$

а $\mathbf{\Pi}_\perp$ — вихревая часть отвечающего ему канонического импульса, удовлетворяющая такому же ограничению

$$\nabla \times \mathbf{\Pi}_\perp = 0. \quad (9.6.3)$$

Кроме того, H_M — гамильтониан материи*, а $V_{\text{кул}}$ — кулоновская энергия

* Материей принято называть все поля, не являющиеся калибровочными полями. Последние являются «переносчиками взаимодействия». — *Прим. ред.*

$$V_{\text{Кул}}(t) = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{J^0(\mathbf{x}, t) J^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (9.6.4)$$

Как и для любой другой гамильтоновой системы, средние по вакууму от хронологически упорядоченных произведений операторов можно вычислять как функциональные интегралы *:

$$\begin{aligned} \langle T\{\rho_A \rho_B \dots\} \rangle_{\text{VAC}} &= \int \left[\prod_{x,i} da_i(x) \prod_{x,i} d\pi_i(x) \prod_{x,l} d\Psi_l(x) \right] \rho_A \rho_B \dots \\ &\times \exp \left\{ i \int d^4x \left[\boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\mathbf{a}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{a})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{J} + \mathcal{G}_M \right] - i \int dt V_{\text{Кул}} \right\} \\ &\times \left[\prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x)) \right] \left[\prod_x \delta(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}(x)) \right], \end{aligned} \quad (9.6.5)$$

где $\Psi_l(x)$ — исходные поля материи. При записи формулы (9.6.5) в терминах плотности лагранжиана материи мы предполагаем, что H_M — локальный оператор, либо линейный по каноническим импульсам материи (как в спинорной электродинамике), либо квадратичный по ним с независимыми от полей коэффициентами (как в скалярной электродинамике). В формулу (9.6.5) включены дельта-функции **, чтобы учесть связи (9.6.2) и (9.6.3).

* Заметим, что $\boldsymbol{\pi}(x)$ есть интерполирующее c -числовое поле для квантового оператора Π_1 , коммутационные соотношения компонент которого друг с другом и с \mathbf{A} те же, что и для Π , но в отличие от Π , этот оператор коммутирует со всеми каноническими переменными материи.

** Это не безупречно строгое утверждение. Если принять за канонические переменные a_1, a_2 и π_1, π_2 , и рассматривать a_3 и π_3 как функционалы от этих переменных, определяемые уравнениями (9.6.2) и (9.6.3), то следует вставить дельта-функцию

$$\prod_x \delta(a_3(x) + \partial_3^{-1}(\partial_1 a_1(x) + \partial_2 a_2(x))) \delta(\pi_3(x) + \partial_3^{-1}(\partial_1 \pi_1(x) + \partial_2 \pi_2(x))).$$

Однако она отличается от произведения дельта-функций в формуле (9.6.5) лишь на множитель $\text{Det } \partial_3^2$, который, хотя и бесконечен, но не зависит от полей и поэтому сокращается в отношениях типа (9.4.1).

Показатель экспоненты в (9.6.5) очевидно квадратичен по независимым компонентам $\boldsymbol{\pi}$ (например, π_1 и π_2) с независимыми от полей коэффициентами в слагаемых второго порядка по $\boldsymbol{\pi}$. Таким образом, в соответствии с формулой (9.A.9), можно взять интеграл по $\boldsymbol{\pi}$, положив $\boldsymbol{\pi}$ равным значению в стационарной точке показателя экспоненты $\boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{a}}$:

$$\begin{aligned} \langle T\{\rho_A \rho_B \dots\} \rangle_{\text{VAC}} &= \int \left[\prod_{x,i} da_i(x) \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \rho_A \rho_B \dots \\ &\times \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{a})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} + \mathcal{L}_M \right] \right. \\ &\left. - i \int dt V_{\text{Кул}} + i\epsilon - \text{слагаемые} \right\} \left[\prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x)) \right]. \end{aligned} \quad (9.6.6)$$

Чтобы выявить фундаментальное свойство ковариантности этого результата, используем следующий прием. Введем новую переменную интегрирования $a^0(x)$ и заменим кулоновское слагаемое в действии $-\int dt V_{\text{Кул}}$ на

$$\int d^4x \left[-a^0(x) j^0(x) + \frac{1}{2} (\nabla a^0(x))^2 \right]. \quad (9.6.7)$$

Так как (9.6.7) квадратично по a^0 , можно взять интеграл по a^0 (с точностью до постоянного множителя), положив $a^0(x)$ равным значению в стационарной точке (9.6.7), т. е. в точке, отвечающей решению уравнения

$$-j^0(x) - \nabla^2 a^0(x) = 0,$$

или, иными словами, в точке

$$a^0(\mathbf{x}, t) = \int d^3y \frac{j^0(\mathbf{y}, t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (9.6.8)$$

Подставляя это значение a^0 в формулу (9.6.7), получаем как раз кулоновское действие $-\int dt V_{\text{Кул}}$. Следовательно, в формуле (9.6.6) можно переписать показатель экспоненты в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{a})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} + \mathcal{L}_M - a^0 j^0 + \frac{1}{2} (\nabla a^0)^2 \\ & = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + a_\mu j^\mu + \mathcal{L}_M + \text{полные производные,} \end{aligned}$$

где $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$, и интегрировать по a^0 , по \mathbf{a} и по полям материи. Функциональный интеграл (9.6.6) примет тогда вид

$$\begin{aligned} \langle T\{\rho_A \rho_B \dots\} \rangle_{\text{VAC}} &= \int \left[\prod_{x,\mu} da_\mu(x) \prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \rho_A \rho_B \dots \\ &\times \exp(iI[a, \psi]) \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x)), \end{aligned} \quad (9.6.9)$$

где I — исходное действие:

$$I[a, \psi] = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + a_\mu j^\mu + \mathcal{L}_M \right] + i\epsilon - \text{слагаемые.} \quad (9.6.10)$$

Теперь все выражения стали явно лоренц-инвариантны и калибровочно инвариантны, если не считать последнего произведения дельта-функций, обеспечивающего выполнение условия кулоновской калибровки*. Чтобы продвинуться дальше, применим простой вариант того приема^{4,5}, который в т. II будет использован в более сложном случае неабелевых калибровочных теорий. Для простоты будем рассматривать ситуацию, когда операторы $\rho_A[A, \Psi]$, $\rho_B[A, \Psi]$, ..., а также действие $I[a, \psi]$ и мера $[\prod da][\prod d\psi]$ калибровочно инвариантны.

Во-первых, заменим везде в формуле (9.6.9) полевые переменные интегрирования $a_\mu(x)$ и $\psi(x)$ на новые переменные

$$a_{\mu\Lambda}(x) \equiv a_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (9.6.11)$$

* Заметим, что теперь $a^0(x)$ не равно значению (9.6.8), а является независимой переменной интегрирования. Мы не будем сразу же интегрировать по $a^0(x)$, что вернет нас назад к (9.6.6), а рассмотрим эту переменную в тандеме с $\mathbf{a}(x)$.

$$\Psi_{l\Lambda}(x) \equiv \exp(iq_l \Lambda(x)) \Psi_l(x) \quad (9.6.12)$$

с произвольной конечной функцией $\Lambda(x)$. Этот шаг – такая же математическая тривиальность, как и запись интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ в виде $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$, и не требует использования постулированной калибровочной инвариантности теории. Далее, с учетом калибровочной инвариантности заменим $a_{\mu\Lambda}(x)$ и $\Psi_{l\Lambda}(x)$ в действии, мере и функциях ρ на первоначальные поля $a_{\mu}(x)$ и $\Psi_l(x)$, соответственно. Тогда формула (9.6.9) примет вид

$$\begin{aligned} & \langle T\{\rho_A[A, \Psi], \rho_B[A, \Psi], \dots\} \rangle_{\text{VAC}} \\ & \propto \int \left[\prod_{x,\mu} da_{\mu}(x) \right] \left[\prod_{x,l} d\Psi_l(x) \right] \rho_A[a, \Psi], \rho_B[a, \Psi], \dots \\ & \times \exp(iI[a, \Psi]) \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x) + \nabla^2 \Lambda(x)). \end{aligned} \quad (9.6.13)$$

Далее, функция $\Lambda(x)$ была выбрана произвольно, поэтому, не смотря на то, что $\Lambda(x)$ явно входит в правую часть формулы (9.6.13), последняя не может зависеть от этой функции. Мы воспользуемся этим фактом, чтобы представить функциональный интеграл в значительно более удобной форме. Домножим (9.6.13) на функционал

$$B[\Lambda, a] = \exp\left(-\frac{1}{2} i\alpha \int d^4x (\partial_0 a^0 - \nabla^2 \Lambda)^2\right) \quad (9.6.14)$$

(где α – произвольная константа), и проинтегрируем по $\Lambda(x)$. Сдвигая переменную интегрирования $\Lambda(x)$ и имея в виду реальную независимость выражения (9.6.13) от Λ , видим, что все сводится к умножению этого выражения на независящую от полей константу

$$\int \left[\prod_x d\Lambda(x) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} i\alpha \int d^4x (\nabla^2 \Lambda)^2\right). \quad (9.6.15)$$

Этот множитель сокращается в связной части среднего по вакууму и поэтому не приводит к физическим следствиям. Однако (9.6.13) не

зависит от Λ только *после* интегрирования по $a^\mu(x)$ и $\psi(x)$. С тем же успехом можно проинтегрировать по $\Lambda(x)$ *перед* интегрированием по $a^\mu(x)$ и $\psi(x)$. В этом случае стоящий в правой части формулы (9.6.13) множитель $\prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x) + \nabla^2 \Lambda(x))$ заменяется на

$$\begin{aligned} & \int \left[\prod_x d\Lambda(x) \right] \exp \left(-\frac{1}{2} i\alpha \int d^4x (\partial_0 a^0 - \nabla^2 \Lambda)^2 \right) \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{a}(x) + \nabla^2 \Lambda(x)) \\ & \propto \exp \left(-\frac{1}{2} i\alpha \int d^4x (\partial_\mu a^\mu)^2 \right), \end{aligned} \quad (9.6.16)$$

где знак \propto вновь означает пропорциональность с точностью до независящего от полей множителя. Опуская постоянные множители, приводим представление (9.6.9) к виду

$$\langle T \{ \phi_A \phi_B \dots \} \rangle_{\text{VAC}} \propto \int \left[\prod_{x,\mu} da_\mu(x) \right] \left[\prod_{x,l} d\psi_l(x) \right] \phi_A \phi_B \dots \exp(iI_{\text{эфф}}[a, \psi]), \quad (9.6.17)$$

где

$$I_{\text{эфф}}[a, \psi] = I[a, \psi] - \frac{1}{2} \alpha \int (\partial_\mu a^\mu)^2 d^4x. \quad (9.6.18)$$

Это выражение явно лоренц-инвариантно.

Мы рассматриваем новое слагаемое в правой части формулы (9.6.18) как вклад в невозмущенную часть действия, фотонная часть которого принимает теперь следующий вид:

$$\begin{aligned} I_0[a] &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu)(\partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \alpha (\partial_\mu a^\mu)^2 + i\varepsilon - \text{слагаемые} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y a^\mu(x) a^\nu(y) \mathcal{G}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (9.6.19)$$

$$\begin{aligned}
D_{\mu x, \nu y} &= \left[\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial y^\rho} - (1 - \alpha) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right] \delta^4(x - y) + i\varepsilon - \text{слагаемые} \\
&= (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[\eta_{\mu\nu} q^2 - (1 - \alpha) q_\mu q_\nu - i\varepsilon \eta_{\mu\nu} \right] e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (9.6.20)
\end{aligned}$$

Теперь можно сразу же найти фотонный пропагатор, обращая 4×4 матрицу в подынтегральном выражении правой части формулы :

$$\Delta_{\mu x, \nu y} = (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\varepsilon} + \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - i\varepsilon)^2} \right] e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (9.6.21)$$

Мы вправе выбирать величину α из соображений удобства. Два наиболее употребительных выбора — это $\alpha = 1$, что приводит к пропагатору в калибровке Фейнмана

$$\Delta_{\mu x, \nu y}^{\text{Фейнман}} = (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\varepsilon} \right] e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (9.6.22)$$

или $\alpha = \infty$, тогда множитель (9.6.14) действует как дельта-функция, и получается пропагатор в калибровке Ландау (часто называемой также калибровкой Лоренца)

$$\Delta_{\mu x, \nu y}^{\text{Ландау}} = (2\pi)^{-4} \int d^4q \left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\varepsilon} - \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - i\varepsilon)^2} \right] e^{iq \cdot (x-y)}. \quad (9.6.23)$$

При работе с такими явно лоренц-инвариантными операторами взаимодействия и пропагаторами практические вычисления становятся намного удобнее.

9.7 Разные статистики *

Теперь можно вернуться к вопросу, поставленному в гл. 4: какие существуют возможности для изменения векторов состояний

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

при перестановке тождественных частиц? Для получения ответа рассмотрим приготовление начального или конечного состояния в некотором процессе рассеяния. Предположим, что в результате воздействия каких-то медленно меняющихся внешних полей совокупность неразличимых частиц в каждом из этих состояний переводится из стандартной конфигурации с импульсами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ и т. д. в конкретную конфигурацию с импульсами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и т. д., причем частицы остаются в этом процессе на достаточно больших расстояниях друг от друга, что позволяет использовать нерелятивистскую квантовую механику. (Спиновые индексы явно не выписаны; подразумевается, что они включены в символы импульсов.) Для вычисления амплитуды такого процесса можно использовать функциональный метод *, считая, что q и p из раздела 9.1. являются не полями и им сопряженными импульсами, а координатами и импульсами частиц. Эти величины всегда удовлетворяют каноническим соотношениям коммутации, а не антикоммутации, независимо от того, являются ли частицы бозонами, фермионами или чем-то еще. Таким образом, здесь мы не связываем себя каким-то определенным типом статистики. По формуле (9.1.34) для функционального интеграла амплитуда $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_P$ записывается как интеграл по траекториям (путям), вдоль которых импульс одной частицы непрерывным образом меняется от значения \mathbf{k}_1 до значения \mathbf{p}_1 , импульс другой тождественной частицы непрерывным образом меняется от значения \mathbf{k}_2 до значения \mathbf{p}_2 и т. д. Индекс P указывает, что мы вычисляем амплитуду для различимых частиц. В частности, такая амплитуда симметрична относительно перестановок импульсов \mathbf{p} и одновременных перестановок импульсов \mathbf{k} , но не обладает определенной симметрией относительно перестановок \mathbf{p} и \mathbf{k} по отдельности. Однако если частицы действительно неразличимы, то существуют другие топологически допусти-

* Здесь я следую рассуждениям Ладлоу и С. де Витт¹¹, с той разницей, что они применили функциональный метод ко всему процессу рассеяния, а не только к приготовлению начального или конечного состояния. В релятивистской теории возможность рождения и уничтожения частиц делает необходимым применение функционального метода к полям, а не к траекториям частиц. Для нас это не составляет проблемы, так как мы ограничились вычислениями в достаточно ранние или достаточно поздние моменты времени, когда участвующие в рассеянии частицы находятся достаточно далеко друг от друга.

мые пути, приводящие к той же конечной конфигурации. В случае пространства размерностью $d \geq 3$ единственными такими путями являются те, которые переводят импульсы $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots$ в некоторую нетривиальную перестановку \mathcal{P} импульсов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots$ *. Следовательно истинная амплитуда может быть записана как

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle = \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D, \quad (9.7.1)$$

где сумма берется по всем $N!$ перестановкам N неразличимых частиц в состоянии, а $C_{\mathcal{P}}$ – совокупность комплексных констант. Эти амплитуды должны удовлетворять следующему правилу композиции, справедливому для неразличимых частиц:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle &= \frac{1}{N!} \int d^3q_1 d^3q_2 \dots \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots \rangle \\ &\times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (9.7.2)$$

С учетом формулы (9.7.1), это требование принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D &= \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}\mathcal{P}''} C_{\mathcal{P}} C_{\mathcal{P}''} \int d^3q_1 d^3q_2 \dots \\ &\times \langle \mathbf{p}_{\mathcal{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathcal{P}'2}, \dots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots \rangle_D \langle \mathbf{q}_{\mathcal{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathcal{P}''2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D. \end{aligned}$$

Применяя перестановку \mathcal{P}'' одновременно к начальному и конечному состояниям в первой амплитуде справа, получим

* Формально это выражается утверждением, что первая гомотопическая группа конфигурационного пространства в случае $d \geq 3$ есть группа перестановок ¹². Под «конфигурационным пространством» для N неразличимых частиц подразумевается пространство, точками которого являются N d -мерных векторов, при этом исключаются конфигурации, когда некоторые d -векторы совпадают (или находятся на расстоянии, не превышающем некоторого заданного), а конфигурации, отличающиеся только перестановкой векторов, отождествляются.

$$\sum_P C_P \langle \mathbf{p}_{P_1}, \mathbf{p}_{P_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D = \frac{1}{N!} \sum_{P P''} C_P \cdot C_{P''} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots \\ \times \langle \mathbf{p}_{P' P'_1}, \mathbf{p}_{P' P'_2}, \dots | \mathbf{q}_{P''_1}, \mathbf{q}_{P''_2}, \dots \rangle_P \langle \mathbf{q}_{P''_1}, \mathbf{q}_{P''_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D.$$

Однако амплитуды $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D$ удовлетворяют правилу композиции для *различимых* частиц

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D = \int d^3 q_1 d^3 q_2 \dots \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots \rangle_D \\ \times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D, \quad (9.7.3)$$

так что правило композиции для физических амплитуд можно записать как

$$\sum_P C_P \langle \mathbf{p}_{P_1}, \mathbf{p}_{P_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_P = \frac{1}{N!} \sum_{P P''} C_P \cdot C_{P''} \\ \times \langle \mathbf{p}_{P' P'_1}, \mathbf{p}_{P' P'_2}, \dots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots \rangle_D,$$

что будет выполнено только и если только

$$C_{P' P''} = C_P \cdot C_{P''}. \quad (9.7.4)$$

Таким образом, коэффициенты C_P должны образовывать одномерное представление группы перестановок. Однако эта группа имеет только два таких представления: тождественное с $C_P = +1$ для всех перестановок, и знакопеременное представление с $C_P = +1$ или $C_P = -1$ в зависимости от того, является ли P четной или нечетной перестановкой. Эти две возможности соответствуют статистикам Бозе и Ферми*.

* В литературе многократно обсуждались возможности существования статистик, отличающихся от статистик Бозе и Ферми и объединяемых термином *парастатистики*. Было показано¹¹, что теории парастатистик в случае $d \geq 3$ пространственных измерений эквивалентны теориям, в которых все частицы являются обычными фермионами или бозонами, но несущими дополнительное квантовое число, так что волновые функции могут иметь необычные свойства по отношению к перестановкам импульсов и спинов.

Приятным свойством этого рассуждения является то, что оно объясняет, почему случай двух пространственных измерений является исключением. В этом случае имеется значительно больше различных топологически допустимых путей *. Например, путь, при котором одна частица конечное число раз окружает другую, не может быть деформирован в путь, где этого не происходит. Как следствие, в двух пространственных измерениях возможны *анионы*¹⁵ — частицы с более общими свойствами перестановок, чем в статистиках Бозе или Ферми.

Приложение: Многократные гауссовы интегралы

Сначала вычислим многократный интеграл по конечному числу действительных переменных ξ_r от экспоненты, показатель которой является произвольной квадратичной функцией ξ_r :

$$J \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_r d\xi_r \exp\{-Q(\xi)\}, \quad (9.A.1)$$

$$Q(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s + \sum_r L_r \xi_r + M, \quad (9.A.2)$$

где K_{rs} , L_r и M — произвольные константы, причем матрица K предполагается симметричной и несингулярной. С этой целью рассмотрим сначала случай, когда K_{rs} , L_r и M все действительны, кроме того, матрица K положительно определена. Общий результат может быть получен аналитическим продолжением.

Всякая действительная симметричная матрица может быть диагонализирована с помощью ортогональной матрицы. Это означает, что существует матрица \mathcal{S} , такая, что ее транспонированная совпадает с обратной, $\mathcal{S}^T = \mathcal{S}^{-1}$, и такая, что

$$(\mathcal{S}^T K \mathcal{S})_{rs} = \delta_{rs} \kappa_r. \quad (9.A.3)$$

* Этот факт выражается утверждением, что первая гомотопическая группа конфигурационного пространства в двух измерениях является не группой перестановок, а более широкой группой, известной как *группа кос*¹⁴.

Поскольку предполагается, что K положительно определена и неособенная, собственные значения κ_r положительны. С помощью матрицы \mathcal{J} можно совершить замену переменных

$$\xi_r = \sum_s \mathcal{J}_{rs} \xi'_s. \quad (9.A.4)$$

Якобиан $|\text{Det } \mathcal{J}|$ этого преобразования равен единице, так что многократный интеграл (9.A.1) переходит в произведение однократных интегралов:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= e^{-M} \prod_r \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'_r \exp \left\{ -\frac{\kappa_r}{2} \xi'^2_r - (\mathcal{J}^T L)_r \xi'_r \right\} \\ &= e^{-M} \prod_r \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_r}} \exp \left\{ \frac{1}{2\kappa_r} (\mathcal{J}^T L)_r^2 \right\}. \end{aligned} \quad (9.A.5)$$

Но из формулы (9.A.3) следует:

$$\text{Det } K = \prod_r \kappa_r, \quad K_{rs}^{-1} = \sum_l \mathcal{J}_{nl} \mathcal{J}_{ml} \kappa_l^{-1},$$

так что формулу (9.A.5) можно представить в виде

$$\mathcal{J} = \left(\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} - M \right\}. \quad (9.A.6)$$

Формула (9.A.1) определяет функцию переменных K_{rs} , L_r и M , аналитическую по K_{rs} в конечной области вокруг поверхности, на которой матрица K_{rs} действительна и положительно определена и для которой интеграл сходится. Для таких K_{rs} эта функция аналитична всюду по L_r и M . Поскольку выражение (9.A.6) равно выражению (9.A.1) для действительных K_{rs} , L_r и M , где матрица K положительно определена, то правая часть формулы (9.A.6) дает аналитическое продолжение выражения (9.A.1) на всю комплексную плоскость с разрезом, определяемым квадратным корнем. Знак квадратного корня фиксируется этим аналитическим продолжением. В теории поля матрица K_{rs} на самом деле мнима, не считая малой действительной части, обязанной « $i\epsilon$ -слагаемому».

Полезно записать выражение (9.A.6) через стационарную точку

$$\bar{\xi}_r = -\sum_s K_{rs}^{-1} L_s \quad (9.A.7)$$

функции (9.A.2),

$$\partial Q(\xi)/\partial \xi_r = 0 \text{ при } \xi = \bar{\xi}, \quad (9.A.8)$$

в виде

$$J = \left(\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right)^{-1/2} \exp\{-Q(\bar{\xi})\}. \quad (9.A.9)$$

Этот результат стоит запомнить: *гауссовские интегралы можно вычислить с точностью до множителя, содержащего детерминант, положив переменную интегрирования равной значению в точке, где показатель экспоненты стационарен.*

Далее, мы хотим использовать полученный результат для вычисления интегралов

$$I_{r_1 \dots r_{2N}} \equiv \int \left(\prod_r d\xi_r \right) \xi_{r_1} \xi_{r_2} \dots \xi_{r_{2N}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s\right\}. \quad (9.A.10)$$

(Подобные интегралы с нечетным числом множителей ξ очевидным образом равны нулю.) Разложив в ряд $\exp(-\sum_r L_r \xi_r)$ в выражении (9.A.1), получаем правило сумм

$$\begin{aligned} & \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} \frac{1}{(2N)!} I_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} L_{r_1} L_{r_2} \dots L_{r_{2N}} \\ &= \int \left(\prod_r d\xi_r \right) \exp\left\{-\sum_r L_r \xi_r - \frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s\right\} \\ &= \left[\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1}\right\} \quad (9. A. 11) \\ &= \left[\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N! 2^N} \left(\sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right)^N. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $L_{r_1} L_{r_2} \dots L_{r_{2N}}$ с обеих сторон равенства, видим, что $I_{r_1 r_2 \dots r_{2N}}$ должно быть пропорционально сумме произведений матричных элементов матрицы K^{-1} , вид которой определяется требованием симметрии относительно перестановки индексов r_1, r_2, \dots, r_{2N} :

$$I_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} = c_N \sum_{\substack{\text{по спариваниям по парам} \\ r_1 \dots r_{2N}}} \prod (K^{-1})_{\text{спаренные индексы}} \quad (9.A.12)$$

Здесь сумма берется по всем способам спаривания индексов $r_1 \dots r_{2N}$, причем два спаривания считаются одинаковыми, если они отличаются порядком расположения пар или порядком индексов внутри пары.

Для вычисления постоянного множителя c_N заметим, что число v_N слагаемых в сумме по спариваниям в правой части формулы (9.A.12) равно числу $(2N)!$ перестановок индексов, деленному на число $N!$ способов перестановки пар и на число 2^N перестановок внутри каждой пары :

$$v_N = \frac{(2N)!}{N! 2^N}. \quad (9.A.13)$$

Поэтому из формулы (9.A.12) следует, что

$$\sum_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} L_{r_1} L_{r_2} \dots L_{r_{2N}} I_{r_1 r_2 \dots r_{2N}} = v_N c_N \left(\sum_{rs} L_r L_s K_{rs}^{-1} \right)^N. \quad (9.A.14)$$

Сравнивая это выражение с формулой (9.A.11), видим, что множители $(2N)!$ и $N! 2^N$ сокращаются с v_N , и в результате остается

$$c_N = \left[\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2}. \quad (9.A.15)$$

Например,

$$I_{r_1 r_2} = I_0 (K^{-1})_{r_1 r_2}, \quad (9.A.16)$$

$$I_{r_1 r_2 r_3 r_4} = I_0 \left[(K^{-1})_{r_1 r_2} (K^{-1})_{r_3 r_4} + (K^{-1})_{r_1 r_3} (K^{-1})_{r_2 r_4} + (K^{-1})_{r_1 r_4} (K^{-1})_{r_2 r_3} \right], \quad (9. A. 17)$$

и так далее, где I_0 – интеграл без индексов:

$$I_0 \equiv \int \left(\prod_r d\xi_r \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\} = \left[\text{Det} \left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \cdot (9. A. 18)$$

Задачи

1. Рассмотрите нерелятивистскую частицу массой M , движущуюся вдоль оси x в потенциальном поле $V(x) = M\omega^2 x^2/2$. Пользуясь методом функционального интеграла, найдите вероятность того, что частица, находящаяся в точке x_1 в момент времени t_1 , окажется в момент времени t между x и $x + dx$.
2. Найдите волновой функционал (т. е. волновую функцию в ϕ -базисе) состояния поля, соответствующего одной бесспиновой частице массы $m \neq 0$. Используя полученный результат, выведите фейнмановские правила для испускания и поглощения такой частицы.
3. Найдите вакуумный волновой функционал в теории нейтрального векторного поля массы $m \neq 0$. Используя этот результат, найдите вид $i\epsilon$ -слагаемых в пропагаторе такого поля.
4. Плотность лагранжиана свободного поля Рариты–Швингера Ψ^μ спина $3/2$ равна:

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}^\mu (\gamma^\nu \partial_\nu + m) \Psi_\mu - \frac{1}{2} \bar{\Psi}^\mu (\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) \Psi^\nu + \frac{1}{3} \bar{\Psi}^\mu \gamma_\mu (\gamma^\sigma \partial_\sigma - m) \gamma^\nu \Psi_\nu.$$

С помощью функционального метода найдите пропагатор этого поля.

Список литературы

1. Feynman, R.P. *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics* (Princeton University, 1942; University Microfilms Publication No. 2948, Ann Arbor). См. также: Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York,

- 1965) (есть рус. пер.: Фейнман Р., Хибс, А. *Квантовая механика и интегралы по траекториям*. — М., Мир, 1968.) Общие ссылки см.: Glimm, J. and Jaffe, A. *Functional Integral Point of View*, 2-nd edn (Springer-Verlag, New York, 1987).
2. Dirac, P.A.M., *Phys. Zeits. Sowjetunion*, **3**, 62 (1933).
 3. Feynman, R.P., *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.*, **74**, 939, 1430 (1948); **76**, 749, 769 (1949); **80**, 440 (1950).
 4. Faddeev, L.D. and Popov, V.N., *Phys. Lett.*, **B25**, 29 (1967). См. также: Feynman, R.P., *Acta Phys. Pol.*, **24**, 697 (1963); Mandelstam, S., *Phys. Rev.*, **175**, 1580, 1604 (1968).
 5. De Witt, B., *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 742 (1964).
 6. 't Hooft, G., *Nucl. Phys.*, **B35**, 167 (1971).
 7. Gerstein, I.S., Jackiw, R., Lee, B.W. and Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **D3**, 2486 (1971).
 8. Фаддеев, Л.Д., *Теор. Мат. Физика*, **1**, 3 (1969).
 - 8a. Schwinger, J., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **44**, 956 (1958).
 - 8b. Osterwalder, K. and Schrader, R., *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 1423 (1972); *Commun. Math. Phys.*, **31**, 83 (1973); **42**, 281 (1975). Аксиомы Остервальдера–Шрадера включают требования гладкости, евклидовой ковариантности, «положительности относительно отражений», симметрии относительно перестановок и кластерного разложения.
 9. Содержание этого раздела во многом определили дискуссии с Дж. Польчинским.
 10. Березин, Ф.А. *Метод вторичного квантования*. М., Наука, 1965.
 11. Laidlaw, M.G.G. and de Witt, C.M., *Phys. Rev.*, **D3**, 1375 (1970).
 12. Leinaas, J.M. and Myrheim, J., *Nuovo Cimento*, **37B**, 1 (1977).

13. Ohnuki, Y. and Kamefuchi, S., *Phys. Rev.*, **170**, 1279 (1968); *Ann. Phys.*, 51, 337 (1969); Druhl, K., Haag, R., and Roberts, J.E., *Commun. Math. Phys.*, **18**, 204 (1970).
14. Группа кос была введена Э. Артином. См. в сборнике: *The Collected Papers of E. Artin*. Ed. by S. Lang and J.E. Tate (Addison-Wesley, Reading, MA, 1965).
15. Wilczek, F., *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 957 (1982); Fredenhagen, K., Gaberdiel, R., and Ruger, S.M., Cambridge Preprint DAMPT-94-90 (1994). См. также [12].

Непертурбативные методы

Мы намерены теперь приступить к изучению вкладов высших порядков теории возмущений в физические процессы, вкладов, которые описываются фейнмановскими диаграммами с одной или несколькими петлями. При этом было бы очень полезно иметь в распоряжении метод, который позволяет получать результаты, справедливые во всех порядках теории возмущений (а в некоторых случаях и вне рамок теории возмущений). Для этой цели мы будем использовать в данной главе уравнения поля и коммутационные соотношения для взаимодействующих полей в картине Гейзенберга. Связь между гейзенберговской картиной и фейнмановскими диаграммами теории возмущений устанавливается теоремой, доказанной в разделе 6.4: сумма всех диаграмм процесса $\alpha \rightarrow \beta$ с дополнительными вставками, отвечающими операторам $O_a(x)$, $O_b(y)$ и т. д., есть матричный элемент хронологически упорядоченного произведения соответствующих гейзенберговских операторов

$$\left(\Psi_{\beta}^{-}, T \{ -iO_a(x), -iO_b(y) \dots \} \Psi_{\alpha}^{+} \right).$$

В частном случае, когда операторы $O_a(x)$, $O_b(x)$ и т. д. являются полями элементарных частиц, этот матричный элемент равен сумме вкладов всех фейнмановских диаграмм с входящими линиями на массовой поверхности, отвечающими состоянию α , и выходящими линиями на массовой поверхности, отвечающими состоянию β , соответственно, и линиями вне массовой поверхности (включая пропагаторы), отвечающими операторам $O_a(x)$, $O_b(x)$ и т. д. Изучив некоторые получающиеся таким образом непертурбативные результаты, мы сможем приступить к вычислениям радиационных поправок.

10.1. Симметрии

Одним очевидным, но важным следствием упомянутой теоремы является возможность использования принципов симметрии не только применительно к матричным элементам S -матрицы, когда 4-импульсы всех внешних линий лежат на массовой поверхности, но и к фейнмановским диаграммам, у которых некоторые или все внешние линии находятся вне массовой поверхности.

Рассмотрим, например, симметрию относительно пространственно-временных трансляций*. Следствием такой симметрии является существование эрмитова 4-векторного оператора P^μ , обладающего тем свойством, что для любой локальной функции $O(x)$ операторов поля и канонических импульсов

$$[P_\mu, O(x)] = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} O(x). \quad (10.1.1)$$

(См. формулы (7.3.28) и (7.3.29).) Кроме того, состояния α и β обычно выбираются как собственные состояния 4-импульса:

$$P^\mu \Psi_\alpha^+ = p_\alpha^\mu \Psi_\alpha^+, \quad P^\mu \Psi_\beta^- = p_\beta^\mu \Psi_\beta^-. \quad (10.1.2)$$

Отсюда вытекает, что для любого набора локальных функций $O_a(x)$, $O_b(x)$, ... полей и/или их производных справедлива формула

$$\begin{aligned} & (p_{\beta\mu} - p_{\alpha\mu}) (\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1), O_b(x_2), \dots\} \Psi_\alpha^+) \\ &= (\Psi_\beta^-, [P_\mu, T\{O_a(x_1), O_b(x_2), \dots\}] \Psi_\alpha^+) \\ &= i \left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} + \dots \right) (\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1), O_b(x_2), \dots\} \Psi_\alpha^+). \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

Это уравнение имеет решение:

$$\begin{aligned} & (\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1), O_b(x_2), \dots\} \Psi_\alpha^+) \\ &= \exp(i(p_\beta - p_\alpha) \cdot x) F_{ab\dots}(x_1 - x_2, \dots), \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

* Называемую также трансляционной инвариантностью. — Прим. ред.

где x — любое среднее пространственно-временных координат

$$x^\mu = c_1 x_1^\mu + c_2 x_2^\mu + \dots, \quad c_1 + c_2 + \dots = 1, \quad (10.1.5)$$

а F зависит только от разностей координат. (В частности, вакуумное среднее может зависеть только от разностей координат.) Интегрируя отдельно по x^μ и разностям координат, можно найти фурье-образ выражения (10.1.4):

$$\int d^4 x_1 d^4 x_2 \dots (\Psi_\beta^-, T\{O_a(x_1), O_b(x_2), \dots\} \Psi_\alpha^+) \times \exp(-ik_1 \cdot x_1 - ik_2 \cdot x_2 - \dots) \propto \delta^4(p_\beta - p_\alpha - k_1 - k_2 - \dots). \quad (10.1.6)$$

В разделе 6.4 было показано, что выражение для матричного элемента хронологического произведения определяется обычными правилами Фейнмана в координатном представлении применительно к сумме всех диаграмм с входящими частицами в состоянии α , выходящими частицами в состоянии β , и внешними линиями, которые оканчиваются в вершинах с координатами x_1, x_2, \dots . Соответственно, фурье-образ (10.1.6) определяется правилами Фейнмана в импульсном представлении для той же суммы диаграмм, у которых внешние линии вне массовой поверхности имеют 4-импульсы k_1, k_2, \dots , направленные в диаграмму. Формула (10.1.6) утверждает тогда, что эта сумма фейнмановских диаграмм сохраняет 4-импульс. Такой результат очевиден в теории возмущений, т. к. 4-импульс сохраняется в каждой вершине, поэтому неудивительно, что тот же результат можно получить, и не опираясь на теорию возмущений.

Затратив несколько больше усилий, можно воспользоваться свойствами гейзенберговских полей и ин- и аут-состояний (9.6.16) по отношению к преобразованиям Лоренца, чтобы показать, что сумма всех диаграмм с данным набором линий, находящихся как на массовой поверхности, так и вне ее, обладает теми же свойствами относительно лоренцовских преобразований, что и слагаемые низшего порядка.

Аналогичные аргументы применимы к сохранению внутренних квантовых чисел, таких как электрический заряд. Как показано в разделе 7.3, поле или другой оператор $O_a(x)$, уничтожающий заряд q_a (или рождающий заряд $-q_a$), удовлетворяет уравнению

$$[Q, O_a(x)] = -q_a O_a(x)$$

как в гейзенберговском представлении, так и в представлении взаимодействия. Кроме того, если состояния свободных частиц α и β имеют заряды q_α и q_β , то такие же заряды имеют соответствующие ин- и аут-состояния. Тогда

$$\begin{aligned} & (q_\beta - q_\alpha) (\Psi_\beta^-, T\{O_a(x), O_b(y), \dots\} \Psi_\alpha^+) \\ &= (\Psi_\beta^-, [Q, T\{O_a(x), O_b(y), \dots\}] \Psi_\alpha^+) \\ &= -(q_a + q_b + \dots) (\Psi_\beta^-, T\{O_a(x), O_b(y), \dots\} \Psi_\alpha^+). \end{aligned}$$

Следовательно, амплитуда $(\Psi_\beta^-, T\{O_a(x), O_b(y), \dots\} \Psi_\alpha^+)$ обращается в нуль, если только не выполнено условие сохранения заряда

$$q_\beta = q_\alpha - q_a - q_b - \dots \quad (10.1.7)$$

Несколько менее тривиальный пример — инвариантность относительно зарядового сопряжения. Как показано в гл. 5, существует оператор C , преобразующий электронные операторы в позитронные и обратно:

$$\begin{aligned} Ca(\mathbf{p}, \sigma, e^-)C^{-1} &= \xi^* a(\mathbf{p}, \sigma, e^+), \\ Ca(\mathbf{p}, \sigma, e^+)C^{-1} &= \xi a(\mathbf{p}, \sigma, e^-), \end{aligned}$$

где ξ — фазовый множитель. Для свободного электронного поля $\Psi(x)$ это означает, что

$$C\Psi(x)C^{-1} = \xi^* \beta C\Psi(x)^*,$$

где βC — матрица 4×4 , имеющая (в используемом нами представлении дираковских матриц, где диагональна матрица γ_5) вид

$$\beta C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Применительно к электрическому току свободных частиц в спинорной электродинамике это означает:

$$C(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)C^{-1} = -\bar{\psi}C\gamma^{\mu T}C\psi = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

Если потребовать сохранения оператора C в электродинамике, то этот оператор должен антикоммутировать с полем свободных фотонов:

$$C(a^\mu)C^{-1} = -a^\mu.$$

В теориях типа электродинамики, где C коммутирует как с H_0 , так и с гамильтонианом взаимодействия, он коммутирует также и с оператором преобразования подобия $\Omega(t)$, связывающим гейзенберговское представление с представлением взаимодействия. Поэтому C антикоммутирует с электрическим током взаимодействующих полей,

$$C(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)C^{-1} = -\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad (10.1.8)$$

и электромагнитным полем в гейзенберговском представлении,

$$C(A^\mu)C^{-1} = -A^\mu. \quad (10.1.9)$$

Отсюда вытекает, что среднее по вакууму от хронологического произведения любого нечетного числа электромагнитных токов и/или полей обращается в нуль. Поэтому равна нулю сумма всех фейнмановских диаграмм с нечетным числом только фотонных внешних линий (вне или на массовой оболочке).

Этот результат известен как *теорема Фарри*.¹ Ее можно доказать в рамках теории возмущений, заметив, что в диаграмме, состоящей из l электронных петель, к каждой из которых подсоединяется n_l фотонных линий, выполняется связь между числом I внутренних и числом E внешних фотонных линий, аналогичная соотношению (6.3.11):

$$2I + E = \sum_l n_l.$$

Отсюда следует, что если E нечетно, то по крайней мере к одной из петель должно быть подсоединено нечетное число фотонных линий.

Для каждой такой петли происходит сокращение диаграмм, отличающихся направлением обхода петли по стрелкам. Таким образом, теорема Фарри представляет несколько менее тривиальное следствие принципа симметрии, чем трансляционная или лоренцовская инвариантность: теорема верна не для отдельных диаграмм, а для определенной их совокупности. Рис. 10.1 иллюстрирует применение теоремы Фарри, которое оказалось исторически наиболее важным: доказательство того, что при рассеянии фотона внешним электромагнитным полем отсутствуют вклады первого (или любого нечетного) порядка по внешнему полю.

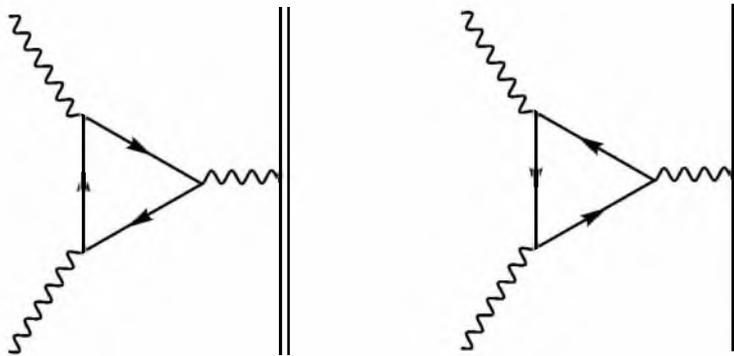


Рис. 10.1. Диаграммы низшего порядка для рассеяния фотона электромагнитным полем. Прямые линии отвечают виртуальным электронам, волнистые линии — реальным или виртуальным фотонам, жирная линия соответствует тяжелой частице типа атомного ядра, которая служит источником электромагнитного поля. Вклады указанных двух диаграмм сокращаются, как и требуется инвариантностью относительно зарядового сопряжения

10.2. Полология

Одним из наиболее важных применений непертурбативных методов, о которых идет речь в этой главе, является выяснение полюсной структуры фейнмановских амплитуд как функций импульсов внешних линий. Часто матричные элементы физического процесса могут быть хорошо аппроксимированы вкладом одного полюса. Кроме того, понимание полюсной структуры поможет

в дальнейшем разобраться с радиационными поправками к пропагаторам частиц.

Рассмотрим амплитуду в импульсном представлении:

$$\int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{-iq_1 \cdot x_1} \dots e^{-iq_n \cdot x_n} \langle T \{ A_1(x_1) \dots A_n(x_n) \} \rangle_0 \equiv G(q_1 \dots q_n). \quad (10.2.1)$$

Здесь A — гейзенберговские операторы произвольного лоренцовского типа, а $\langle \dots \rangle_0$ означает среднее по истинному вакууму $\Psi_0^+ = \Psi_0^- \equiv \Psi_0$. Как обсуждалось в разделе 6.4, если A_1, \dots, A_n — обычные поля, входящие в лагранжиан, то (10.2.1) есть сумма вычисленных по обычным фейнмановским правилам слагаемых, отвечающих всем диаграммам с внешними линиями, соответствующими полям A_1, \dots, A_n , с 4-импульсами q_1, \dots, q_n вне массовой поверхности, направленными в диаграмму. Однако мы не будем ограничиваться этим случаем и допустим, что A_i могут быть произвольными локальными функциями полей и их производных.

Нас интересуют полюсы диаграммы G при определенных значениях инвариантных квадратов суммарных 4-импульсов, отвечающих разным подмножествам внешних линий. Для определенности рассмотрим G как функцию q^2 , где

$$q \equiv q_1 + \dots + q_r = -q_{r+1} - \dots - q_n, \quad (10.2.2)$$

и $1 \leq r \leq n - 1$. Мы покажем, что G имеет полюс при $q^2 = -m^2$, где m — масса любого одночастичного состояния, имеющего ненулевые матричные элементы с состояниями $A_1^\dagger \dots A_r^\dagger \Psi_0$ и $A_{r+1} \dots A_n \Psi_0$, с определенным вычетом:

$$G \rightarrow \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}{q^2 + m^2 - i\varepsilon} (2\pi)^7 \delta^4(q_1 + \dots + q_n) \times \sum_{\sigma} M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \dots q_r) M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n), \quad (10.2.3)$$

где величины M определены следующим образом*:

*Напомним, что в отсутствие зависящих от времени внешних полей нет разницы между одночастичными ин- и аут-состояниями, так что $\Psi_{\mathbf{p},\sigma}^+ = \Psi_{\mathbf{p},\sigma}^- = \Psi_{\mathbf{p},\sigma}$.

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 \dots d^4x_r e^{-iq_1 \cdot x_1} \dots e^{-iq_r \cdot x_r} (\Psi_0, T\{A_1(x_1) \dots A_r(x_r)\} \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \dots + q_r - p) M_{0|\mathbf{p}, \sigma}(q_2 \dots q_r), \end{aligned} \quad (10.2.4)$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x_{r+1} \dots d^4x_n e^{-iq_{r+1} \cdot x_{r+1}} \dots e^{-iq_n \cdot x_n} (\Psi_{\mathbf{p}, \sigma}, T\{A_{r+1}(x_{r+1}) \dots A_n(x_n)\} \Psi_0) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(q_{r+1} + \dots + q_n + p) M_{\mathbf{p}, \sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n) \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

($p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$), а сумма берется по всем спиновым (и другим) состояниям частицы массой m .

Прежде, чем переходить к доказательству, полезно записать выражение (10.2.3) в более развернутой форме, позволяющей лучше понять его важность

$$\begin{aligned} & G(q_1 \dots q_n) \rightarrow \int d^4k \\ & \times \left[(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \dots + q_r - k) (2\pi)^{3/2} (2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^{1/2} M_{0|\mathbf{k}, \sigma}(q_2 \dots q_r) \right] \\ & \times \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \\ & \times \left[(2\pi)^4 \delta^4(k + q_{r+1} + \dots + q_n) (2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})^{1/2} M_{\mathbf{k}, \sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n) \right]. \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

Это выражение как раз соответствует тому, что мы ожидаем от вклада фейнмановской диаграммы с единственной внутренней линией, отвечающей частице массой m и соединяющей два блока диаграммы (две поддиаграммы) с первыми r внешними линиями и последними $n - r$ внешними линиями соответственно*. Однако не является необходимым, чтобы частица массой m соответствовала полю, входящему в лагранжиан теории. Формулы (10.2.3) и (10.2.6)

* См. рис. 10.2. Множители $(2\pi)^{3/2} [2(\mathbf{k}^2 + m^2)]^{1/2}$ служат для устранения кинематических множителей, связанных с внешней линией, отвечающей частице массой m , в амплитудах $M_{0|\mathbf{k}, \sigma}$ и $M_{\mathbf{k}, \sigma|0}$, а сумма по σ произведения этих двух матричных элементов, приводит к числителю пропагатора, отвечающего внутренней линии на рис. 10.2.

применимы даже в том случае, если эта частица является связанным состоянием так называемых элементарных частиц, которым соответствуют поля, действительно входящие в лагранжиан. В этом случае полюс возникает не от одной диаграммы, как на рис. 10.2, а от бесконечной суммы диаграмм типа показанной на рис. 10.3. Здесь мы впервые сталкиваемся с ситуацией, когда методы данной главы приводят к результатам, выходящим за рамки тех, которые могут быть выведены как свойства каждого порядка теории возмущений.

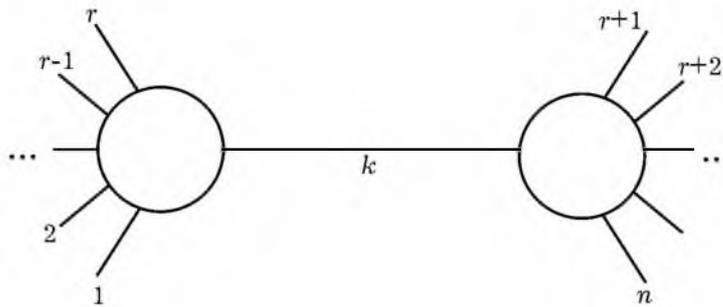


Рис. 10.2. Фейнмановская диаграмма с полюсной структурой (10.2.6). Здесь линия с импульсом k представляет элементарную частицу, поле которой входит в лагранжиан

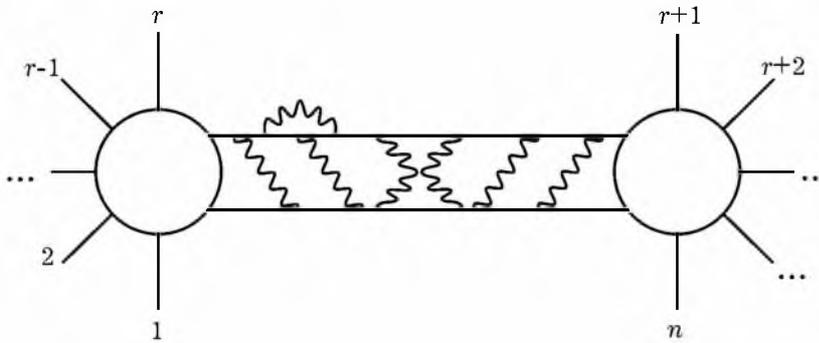


Рис. 10.3. Одна из фейнмановских диаграмм, сумма которых имеет полюсную структуру (10.2.6). Здесь полюс обусловлен составной частицей, которая является связанным состоянием двух элементарных частиц. Элементарные частицы, изображенные прямыми линиями, взаимодействуют посредством обмена частицами, изображенными волнистыми линиями

Переходим к доказательству. Среди $n!$ возможных упорядочиваний моментов времени x_1^0, \dots, x_n^0 в формуле (10.2.1) существуют $n!/r!(n-r)!$ таких, для которых все первые r моментов времени x_i^0 больше, чем последние $(n-r)$. Выделяя вклад этой части объема интегрирования в (10.2.1), получим

$$\begin{aligned} G(q_1 \dots q_n) &= \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n e^{-iq_1 \cdot x_1} \dots e^{-iq_n \cdot x_n} \\ &\times \theta(\min[x_1^0 \dots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \dots x_n^0]) \\ &\times (\Psi_0, T\{A_1(x_1) \dots A_r(x_r)\} T\{A_{r+1}(x_{r+1}) \dots A_n(x_n)\} \Psi_0) + \text{ДС} , \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

где «ДС» означает «другие слагаемые», отвечающие другим последовательностям времен в аргументах операторов полей. Матричные элементы в этом выражении вычисляются путем вставки между хронологическими произведениями полного набора промежуточных состояний. Среди этих состояний могут быть одночастичные состояния $\Psi_{\mathbf{p},\sigma}$ определенного сорта частиц массой m . Выделяя вклад этих одночастичных промежуточных состояний, имеем

$$\begin{aligned} G(q_1 \dots q_n) &= \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n e^{-iq_1 \cdot x_1} \dots e^{-iq_n \cdot x_n} \\ &\times \theta(\min[x_1^0 \dots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \dots x_n^0]) \sum_{\sigma} \int d^3 p \\ &\times (\Psi_0, T\{A_1(x_1) \dots A_r(x_r)\} \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) (\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\{A_{r+1}(x_{r+1}) \dots A_n(x_n)\} \Psi_0) + \text{ДС} , \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

где теперь уже «ДС» означает другие слагаемые, возникающие не только от других последовательностей моментов времени, но и от других промежуточных состояний. Удобно осуществить сдвиг переменных интегрирования

$$\begin{aligned} x_i &= x_1 + y_i, \quad i = 2, 3, \dots, r, \\ x_i &= x_{r+1} + y_i, \quad i = r + 2, \dots, n, \end{aligned}$$

Тогда, используя результаты предыдущего раздела, получим:

$$\begin{aligned} &(\Psi_0, T\{A_1(x_1) \dots A_r(x_r)\} \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) \\ &= e^{ip \cdot x_1} (\Psi_0, T\{A_1(0) A_2(y_2) \dots A_r(y_r)\} \Psi_{\mathbf{p},\sigma}), \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

$$\begin{aligned} & (\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\{A_{r+1}(x_{r+1})\dots A_n(x_n)\}\Psi_0) \\ &= e^{-ip \cdot x_{r+1}} (\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\{A_{r+1}(0)\dots A_n(y_n)\}\Psi_0). \end{aligned} \quad (10.2.10)$$

Кроме того, аргумент тета-функции принимает вид:

$$\begin{aligned} & \min[x_1^0 \dots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \dots x_n^0] \\ &= x_1^0 - x_{r+1}^0 + \min[0y_2^0 \dots y_r^0] - \max[0y_{r+1}^0 \dots y_n^0]. \end{aligned}$$

Подставим также фурье-представление (6.2.15) ступенчатой функции:

$$\theta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\varepsilon}.$$

После этого интегралы по x_1 и x_{r+1} приводят к дельта-функциям:

$$\begin{aligned} G(q_1 \dots q_n) &= \int d^4 y_2 \dots d^4 y_r d^4 y_{r+2} \dots d^4 y_n \\ &\times e^{-iq_2 \cdot y_2} \dots e^{-iq_r \cdot y_r} e^{-iq_{r+2} \cdot y_{r+2}} \dots e^{-iq_n \cdot y_n} \\ &\times -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\varepsilon} \exp(-i\omega[\min[0y_2^0 \dots y_r^0] - \max[0y_{r+1}^0 \dots y_n^0]]) \\ &\times \sum_{\sigma} \int d^3 p (\Psi_0, T\{A_1(0)\dots A_r(y_r)\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}) (\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\{A_{r+1}(0)\dots A_n(y_n)\}\Psi_0) \\ &\times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \dots - \mathbf{q}_r) \delta(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \omega - q_1^0 - \dots - q_r^0) \quad (10.2.11) \\ &\times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{q}_{r+1} + \dots + \mathbf{q}_n + \mathbf{p}) \delta(q_{r+1}^0 + \dots + q_n^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \omega) + \text{ДС}. \end{aligned}$$

Нас интересует только полюс, возникающий в результате обращения в нуль знаменателя $\omega + i\varepsilon$, так что можно положить множитель $\exp(-i\omega(\min - \max))$ равным единице. Интегралы по \mathbf{p} и ω становятся тривиальными и дают:

$$\begin{aligned} G(q_1 \dots q_n) &\rightarrow i(2\pi)^7 \delta^4(q_1 + \dots + q_n) \left[q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + i\varepsilon \right]^{-1} \\ &\times \sum_{\sigma} M_{0|-\mathbf{q},\sigma}(q_2 \dots q_r) M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n) + \dots, \end{aligned} \quad (10.2.12)$$

где теперь

$$q \equiv q_1 + \dots + q_r = -q_{r+1} - \dots - q_n, \quad (10.2.13)$$

$$M_{0|-\mathbf{q},\sigma}(q_2 \dots q_r) \equiv \int d^4 y_2 \dots d^4 y_r e^{-iq_2 \cdot y_2} \dots e^{-iq_r \cdot y_r} \\ \times (\Psi_0, T\{A_1(0)A_2(y_2) \dots A_r(y_r)\} \Psi_{\mathbf{q},\sigma}),$$

$$M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \dots q_n) \equiv \int d^4 y_{r+2} \dots d^4 y_n e^{-iq_{r+2} \cdot y_{r+2}} \dots e^{-iq_n \cdot y_n} \\ \times (\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\{A_{r+1}(0)A_{r+2}(y_{r+2}) \dots A_n(y_n)\} \Psi_0), \quad (10.2.14)$$

и заключительное многоточие в (10.2.12) обозначает слагаемые, не содержащие данного полюса. («Другие слагаемые», возникающие от других одночастичных состояний, приводят к полюсам по q в других точках, а слагаемые, возникающие от многочастичных состояний, приводят к появлению точек ветвления по q . Наконец, слагаемые, возникающие от других последовательностей моментов времени, приводят к полюсам и точкам ветвления по другим переменным.) С помощью формул (10.2.9) и (10.2.10) легко показать, что полученные M в точности те же, что и определенные формулами (10.2.4) и (10.2.5). Кроме того, вблизи полюса

$$\frac{1}{q^0 - \sqrt{q^2 + m^2} + i\epsilon} = \frac{-q^0 - \sqrt{q^2 + m^2} + i\epsilon}{-(q^0)^2 + (\sqrt{q^2 + m^2} - i\epsilon)^2} \rightarrow \frac{-2\sqrt{q^2 + m^2}}{q^2 + m^2 - i\epsilon}.$$

(Мы вновь переопределили ϵ , домножив на положительную величину $2\sqrt{q^2 + m^2}$, что допустимо, так как ϵ — произвольная положительная бесконечно малая величина.) Таким образом, выражение (10.2.12) тождественно желаемому выражению (10.2.3).

Этот результат имеет классическое применение в теории ядерных сил. Пусть $\Phi_a(x)$ — любое действительное поле или комбинация полей (например, пропорциональная кварк-антикварковому билинейному коварианту $\bar{q}\gamma_5\tau_a q$), имеющие неисчезающий матричный элемент между однопионным состоянием с изоспином a и вакуумом, нормированный условием:

$$\langle \text{VAC} | \Phi_a(0) | \pi_b, \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^{-3/2} (2p^0)^{-1/2} \delta_{ab}. \quad (10.2.15)$$

Тогда матричный элемент Φ_a между однонуклонными состояниями с 4-импульсами p и p' имеет полюс при $(p - p')^2 \rightarrow -m_\pi^2$ с вычетом, вид которого определяется изоспиновой и лоренцовской инвариантностью (включая инвариантность относительно пространственных отражений)*:

$$\langle N', \sigma', p' | \Phi_a(0) | N, \sigma, p \rangle \rightarrow i(2\pi)^{-3} G_\pi \times \frac{(\bar{u}' \gamma_5 \tau_a u)}{(p - p')^2 + m_\pi^2}, \quad (10.2.16)$$

где u и u' — начальные и конечные нуклонные спинорные коэффициентные функции, зависящие также от изоспиновых переменных нуклонов, а τ_a ($a = 1, 2, 3$) — 2×2 изоспиновые матрицы Паули. Постоянная G_π носит название *пион-нуклонной константы связи*. Указанный полюс находится вне физической области матричного элемента (10.2.16), в которой $(p - p')^2 \geq 0$, но его можно достичь с помощью аналитического продолжения этого матричного элемента, рассматривая, например, матричный элемент вне массовой поверхности

$$\int d^4x d^4x' e^{-ip \cdot x} e^{ip' \cdot x'} \langle T \{ \Phi_a(0) \bar{N}(x) N(x') \} \rangle_{\text{VAC}},$$

где N и N' — соответствующие компоненты оператора поля или произведения полевых операторов с исчезающими матричными

*Лоренцовская и изоспиновая инвариантности требуют, чтобы этот матричный элемент имел вид $(\bar{u}' \Gamma \tau_a u)$, где Γ — матрица 4×4 , для которой билинейная комбинация $(\bar{\Psi}' \Gamma \Psi)$ преобразуется как псевдоскаляр. Как всякая матрица 4×4 , Γ может быть разложена на сумму слагаемых, пропорциональных дираковским матрицам $1, \gamma_\mu, [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_5 \gamma_\mu$ и γ_5 . Коэффициенты при них должны быть соответственно псевдоскаляром, псевдовектором, псевдотензором, вектором и скаляром. Из двух импульсов p и p' невозможно построить псевдоскаляры или псевдовекторы. В то же время, можно построить один псевдотензор, пропорциональный $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma$, два независимых вектора, пропорциональных p_μ или p'_ν , и скаляр, пропорциональный единице, причем коэффициенты пропорциональности при всех этих структурах являются функциями единственной независимой скалярной переменной $(p - p')^2$. Используя уравнения Дирака в импульсном пространстве для u и u' , нетрудно показать, что тензорная и псевдовекторная матрицы в Γ дают вклад, пропорциональный γ_5 .

элементами между однонуклонными состояниями и вакуумом. Согласно все той же теореме обмен пионом при рассеянии двух нуклонов с начальными 4-импульсами p_1 и p_2 и конечными 4-импульсами p'_1 и p'_2 приводит к появлению в соответствующем матричном элементе полюса при $(p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 \rightarrow -m_\pi^2$:

$$S_{N'_1 N'_2, N_1 N_2} \rightarrow -i(2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{G_\pi^2}{(p_1 - p'_1)^2 + m_\pi^2} \quad (10.2.17)$$

$$\times (2\pi)^{-3} (\bar{u}_1 \gamma_5 \tau_a u_1) \times (2\pi)^{-3} (\bar{u}_2 \gamma_5 \tau_a u_2) .$$

(Простейший способ определить фазы и численные множители в подобных формулах заключается в использовании фейнмановских диаграмм. Наша теорема утверждает, что полюсная структура амплитуды совпадает с той, которая получилась бы в теории поля с лагранжианом, включающим элементарное пионное поле.) Опять же, этот пионный полюс находится вне физической области для рассеяния нуклонов на массовой оболочке, в которой $(p - p')^2 \geq 0$, но достичь его можно путем аналитического продолжения матричного элемента S -матрицы, рассматривая, например, матричный элемент вне массовой оболочки

$$\int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x'_1 d^4 x'_2 e^{-ip_1 \cdot x_1} e^{-ip_2 \cdot x_2} e^{ip'_1 \cdot x'_1} e^{ip'_2 \cdot x'_2}$$

$$\times \langle T \{ \bar{N}_1(x_1), \bar{N}_2(x_2), N'_1(x'_1), N'_2(x'_2) \} \rangle_{\text{VAC}} .$$

Хотя пионный полюс и не попадает в физическую область нуклон-нуклонного рассеяния, но масса пиона достаточно мала, так что полюс лежит очень близко к физической области. При определенных условиях, например, при больших значениях l в разложении по парциальным волнам, этот полюс может доминировать.

С точки зрения координатного пространства полюс указанного типа при $(p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 \rightarrow -m_\pi^2$ означает наличие силы радиусом действия порядка $1/m_\pi$. Например, в первоначальной теории ядерных сил Юкавы² обмен мезонами (в те времена считалось, что они скаляры, а не псевдоскаляры) порождал локальный потенциал вида $\exp(-m_\pi r)/(4\pi r)$, и его фурье образ определял S -матрицу нерелятивистского нуклон-нуклонного рассеяния в первом борновском приближении:

$$\begin{aligned}
& \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x'_1 d^3x'_2 e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2} e^{i\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{x}'_1} e^{i\mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{x}'_2} \\
& \times \frac{\exp(-m_\pi |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)}{4\pi |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \delta^3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \delta^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2) \\
& = -(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \frac{1}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + m_\pi^2}.
\end{aligned}$$

Множитель $1/[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 + m_\pi^2]$ представляет как раз нерелятивистский предел пропагатора $1/[(p_1 - p'_1)^2 + m_\pi^2]$ в формуле (10.2.17). (В этом выражении передаваемая энергия $p_1^0 - p'_1{}^0$ при $|\mathbf{p}_1| \ll m_N$ и $|\mathbf{p}'_1| \ll m_N$ равна $[\mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}'_1{}^2]/2m_N$, что пренебрежимо мало по сравнению с величиной передаваемого импульса $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1|$. Когда только появилась теория Юкавы, считалось общепринятым, что подобный тип зависимости нуклон-нуклонного рассеяния от импульсов возникает в теории из-за наличия мезонного поля. Лишь в 1950-е годы стало понятным, что существование полюса при $(p_1 - p'_1)^2 \rightarrow -m_\pi^2$ вытекает из существования *частицы* — пиона — и не имеет никакого отношения к вопросу о том, является ли эта частица элементарной, т. е. ей отвечает отдельное поле в лагранжиане.

10.3. Перенормировка поля и массы

Воспользуемся теперь частным случаем результата предыдущего раздела, чтобы сделать более ясной интерпретацию радиационных поправок к внутренним и внешним линиям произвольного процесса.

Интересующий нас частный случай — это случай, когда из всех 4-импульсов внешних линий только один приближается к массовой оболочке. (В обозначениях предыдущего раздела это соответствует $r = 1$.) Рассмотрим функцию:

$$\begin{aligned}
G_l(q_1 q_2 \dots) &= \int d^4x_1 d^4x_2 \dots e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} \dots \\
&\times (\Psi_0, T\{G_l(x_1), A_2(x_2), \dots\} \Psi_0),
\end{aligned} \tag{10.3.1}$$

где $\rho_l(x)$ — гейзенберговский оператор, имеющий те же трансформационные свойства относительно лоренцовских преобразований, что и некоторое свободное поле Ψ_l , принадлежащее неприводимому представлению однородной группы Лоренца (для теорий, сохраняющих четность, — группы Лоренца, включающей отражения), о чем свидетельствует индекс l , а A_2, A_3 , и т. д. — произвольные гейзенберговские операторы. Предположим, что имеется одночастичное состояние $\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}$, имеющее ненулевые матричные элементы с состояниями $\rho_l^\dagger \Psi_0$ и $A_2 A_3 \dots \Psi_0$. Тогда согласно доказанной в предыдущем разделе теореме G_l имеет полюс при $q_1^2 = -m^2$, причем

$$G_l(q_1 q_2 \dots) \rightarrow \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} (2\pi)^3 \sum_{\sigma} (\Psi_0, \rho_l(0) \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}) \times \int d^4 x_2 \dots e^{-iq_2 \cdot x_2} \dots (\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma} T\{A_2(x_2) \dots\} \Psi_0). \quad (10.3.2)$$

Из лоренцовской инвариантности следует:

$$(\Psi_0, \rho_l(0) \Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}) = (2\pi)^{-3/2} N u_l(\mathbf{q}_1, \sigma), \quad (10.3.3)$$

где $u_l(\mathbf{q}, \sigma)$ равна (если не считать множителя $(2\pi)^{-3/2}$) коэффициентной функции * свободного поля Ψ_l с теми же трансформационными свойствами относительно лоренцовских преобразований, что и оператор ρ_l , а N — константа. (Именно для того, чтобы получить формулу (10.3.3) с единственной свободной константой N , нам пришлось предположить, что ρ_l преобразуется неприводимо.) Определим также «усеченный» матричный элемент M_l формулой

$$\int d^4 x_2 \dots e^{-iq_2 \cdot x_2} \dots (\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma} T\{A_2(x_2) \dots\} \Psi_0) \equiv N^{-1} (2\pi)^{-3/2} \sum_l u_l^*(\mathbf{q}_1, \sigma) M_l(q_2 \dots). \quad (10.3.4)$$

* Например, для стандартным образом нормированного свободного скалярного поля $u_l(\mathbf{q}_1, \sigma) = \left(2\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}\right)^{-1/2}$.

Тогда формула (10.3.2) при $q_1^2 \rightarrow -m^2$ принимает вид

$$G_l \rightarrow \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} \sum_{\sigma, l'} u_l(\mathbf{q}_1, \sigma) u_{l'}^*(\mathbf{q}_1, \sigma) M_{l'}. \quad (10.3.5)$$

Согласно формулам (6.2.2) и (6.2.18), величина, входящая в формулу (10.3.5) в виде множителя перед $M_{l'}$, равна матричному пропагатору в импульсном пространстве $-i\Delta_{ll'}(q_1)$ для свободного поля, имеющего те же трансформационные свойства относительно лоренцовских преобразований, что и θ_l (или, по крайней мере, такими свойствами должен обладать предел при $q_1^2 \rightarrow -m^2$). Поэтому формула (10.3.5) позволяет отождествить M_l с суммой всех диаграмм, внешние линии которых с импульсами q_1, q_2, \dots отвечают операторам θ_l, A_2, \dots , причем пропагаторы, отвечающие линии θ_l , отброшены. Тогда формула (10.3.4) является обычным предписанием для вычисления матричного элемента испускания частицы в виде суммы фейнмановских диаграмм: нужно отбросить пропагатор частицы, заменив его сверткой с обычным множителем $(2\pi)^{-3/2} u_l^*$ для внешней линии. Единственным отличием от обычных фейнмановских правил является множитель N .

Сформулированная выше теорема представляет собой знаменитый результат Лемана, Симанчика и Циммермана³, известный как *редукционная формула*. Мы доказали ее здесь несколько иным способом, позволяющим легко обобщить результат на случай произвольного спина. Важно отметить, что полученный результат применим к любым операторам; оператор θ_l не обязан быть каким-то полем, реально входящим в лагранжиан, а частица, рождаемая этим полем, может быть связанным состоянием тех частиц, поля которых действительно входят в лагранжиан. Этот результат позволяет извлечь важный урок и в том случае, когда θ_l является одним из полей Ψ_l из лагранжиана: если мы намерены использовать обычные фейнмановские правила для вычисления матричных элементов S -матрицы, необходимо сначала переопределить нормировку полей множителем $1/N$, так что (с извинениями за многократное использование символа Ψ в разных смыслах)

$$(\Psi_0, \Psi_l(0)\Psi_{\mathbf{q}, \sigma}) = (2\pi)^{-3/2} u_l(\mathbf{q}, \sigma). \quad (10.3.6)$$

Поле, нормированное так, как указано в формуле (10.3.6), носит название *перенормированного поля*.

Константа перенормировки поля N возникает и в другом месте. Предположим, что в формуле (10.3.1) на месте операторов A_2, A_3, \dots стоит только один оператор, сопряженный члену того же полевого мультиплетта, что и ϕ_l . Тогда формула (10.3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} (\Psi_0, T\{\phi_l(x_1)\phi_l^\dagger(x_2)\}\Psi_0) \\ & \xrightarrow{q_1^2 \rightarrow -m^2} \frac{-2i\sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2} (2\pi)^3}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} \sum_{\sigma} (\Psi_0, \phi_l(0)\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}) \\ & \quad \times \int d^4x_2 e^{-iq_2 \cdot x_2} e^{-iq_1 \cdot x_2} (\Psi_{\mathbf{q}_1, \sigma}, \phi_l^\dagger(0)\Psi_0) \\ & = \frac{-2i|N|^2 \sqrt{\mathbf{q}_1^2 + m^2}}{q_1^2 + m^2 - i\epsilon} \sum_{\sigma} u_l(\mathbf{q}_1, \sigma) u_l^*(\mathbf{q}_1, \sigma) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

Мы получаем обычное поведение пропагатора (суммы всех диаграмм с двумя внешними линиями) в окрестности его полюса, если не считать множителя $|N|^2$. Согласно формуле (10.3.6), этот множитель исчезает в пропагаторе перенормированного поля Ψ_l . Итак, *перенормированное поле – это такое поле, пропагатор которого имеет такое же поведение в окрестности полюса, как и для свободного поля, а перенормированная масса определяется положением полюса*.

Чтобы увидеть, как это «работает» на практике, рассмотрим теорию действительного самодействующего скалярного поля Φ_B (индекс B добавлен здесь, чтобы напоминать, что пока что это «голое» * (т. е. неперенормированное) поле. Лагранжиан, как обычно, имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_B \partial^\mu \Phi_B - \frac{1}{2} m_B^2 \Phi_B^2 - V_B(\Phi_B). \quad (10.3.7)$$

* Английский термин *bare* в данном контексте обычно переводится как *голый* или *затравочный*. — Прим. пер.

В общем случае нет оснований считать, что поле Φ_B будет удовлетворять условию (10.3.6), или что полюс по q^2 будет находиться в точке $-m_B^2$, поэтому введем перенормированные поле и массу:

$$\Phi \equiv Z^{-1/2}\Phi_B, \quad (10.3.8)$$

$$m^2 \equiv m_B^2 + \delta m^2, \quad (10.3.9)$$

где Z выбирается так, что Φ удовлетворяет (10.3.6), а δm^2 подбирается из условия, что полюс пропагатора находится в точке $q^2 = -m^2$. (Использование символа Z в подобных случаях стало традицией; каждому полю в функции Лагранжа соответствует свое Z .) Теперь можно переписать лагранжиан (10.3.7) в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (10.3.10)$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2, \quad (10.3.11)$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} (Z - 1) [\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2] + \frac{1}{2} Z \delta m^2 \Phi^2 - V(\Phi), \quad (10.3.12)$$

где

$$V(\Phi) \equiv V_B(\sqrt{Z}\Phi).$$

При вычислении поправок к точному* пропагатору в импульсном пространстве для перенормированного скалярного поля, обычно обозначаемому $\Delta'(q)$, удобно рассмотреть отдельно *одночастично неприводимые* (1PI) диаграммы, т. е. такие связные диаграммы (исключая диаграмму, состоящую из одной скалярной линии), которые нельзя сделать несвязными путем разрезания любой одной внутренней скалярной линии. Пример показан на рис. 10.4. Принято, опуская пропагаторные множители $-i(2\pi)^{-4}(q^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$ от двух

* Англиязычному термину *complete propagator* отвечают русскоязычные термины *полный пропагатор* или *точный пропагатор*. Мы отдаем предпочтение последнему. Встречающийся ниже термин *bare propagator*, так же как и авторский термин *uncorrected propagator* мы переводим как *свободный пропагатор*. – Прим. пер.

внешних линий, обозначать сумму всех таких диаграмм через $i(2\pi)^4\Pi^*(q^2)$, звездочка напоминает, что в это выражение входят одночастично неприводимые диаграммы. Тогда поправки к точному пропагатору даются суммой цепочек из одной, двух, трех и более этих одночастично неприводимых поддиаграмм, соединенных обычными свободными пропагаторными множителями

$$\begin{aligned} \frac{-i}{(2\pi)^4} \Delta'(q) &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \\ &+ \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2) \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \\ &+ \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2) \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2) \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \\ &\times \left[i(2\pi)^4 \Pi^*(q^2) \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \right] + \dots \end{aligned} \quad (10.3.13)$$

или, в более простой записи,

$$\begin{aligned} \Delta'(q) &= [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2) [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \\ &+ [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2) [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \Pi^*(q^2) [q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (10.3.14)$$

Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$\Delta'(q) = [q^2 + m^2 - \Pi^*(q^2) - i\epsilon]^{-1}. \quad (10.3.15)$$

При вычислении Π^* мы учитываем древесные диаграммы, возникающие от однократной вставки вершин, отвечающих слагаемым вида $\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$ и Φ^2 в (10.3.12), а также слагаемое Π_{LOOP}^* , возникающее от петлевых диаграмм типа показанной на рис. 10.4а:

$$\Pi^*(q^2) = -(Z-1)[q^2 + m^2] + Z\delta m^2 + \Pi_{\text{LOOP}}^*(q^2). \quad (10.3.16)$$

Условие, что m^2 является истинной массой частицы, сводится к условию, что полюс пропагатора должен находиться при $q^2 = -m^2$, так что

$$\Pi^*(-m^2) = 0. \quad (10.3.17)$$

Кроме того, условие, что полюс пропагатора при $q^2 = -m^2$ должен иметь единичный вычет (как у свободного пропагатора), сводится к условию

$$\left[\frac{d}{dq^2} \Pi^*(q^2) \right]_{q^2=-m^2} = 0. \quad (10.3.18)$$

Приведенные условия позволяют вычислить Z и δm^2 :

$$Z\delta m^2 = -\Pi_{\text{LOOP}}^*(0), \quad (10.3.19)$$

$$Z = 1 + \left[\frac{d}{dq^2} \Pi_{\text{LOOP}}^*(q^2) \right]_{q^2=-m^2}. \quad (10.3.20)$$

Отсюда вытекает, что $Z\delta m^2$ и $Z - 1$ задаются рядами по степеням константы связи без нулевых членов, что оправдывает рассмотрение двух первых слагаемых в формуле (10.3.12) как части лагранжиана взаимодействия \mathcal{L}_1 .

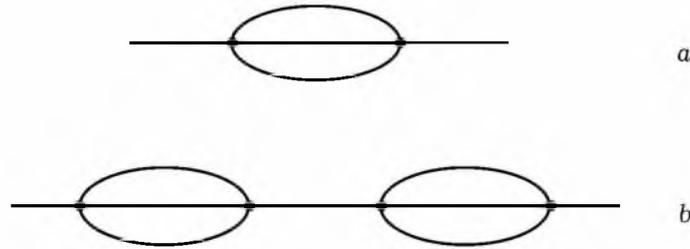


Рис. 10-4. Одночастично неприводимая диаграмма (a) и одночастично приводимая диаграмма (b) в теории с четвертичным взаимодействием. Примером такой теории является теория скалярного поля ϕ с взаимодействием, пропорциональным ϕ^4

При проведении вычислений самое простое – это сказать, что из петлевых слагаемых $\Pi_{\text{LOOP}}^*(q^2)$ мы должны вычесть полином первого порядка по q^2 с коэффициентами, подобранными так, чтобы разность удовлетворяла условиям (10.3.17) и (10.3.18). Как будет видно далее, эта вычитательная процедура попутно сокращает бесконечности, возникающие от интегралов в импульсном пространстве, определяющих Π_{LOOP}^* . Однако, как должно быть ясно, *перенормировка масс и полей непосредственно не имеет ничего общего с существованием бесконечностей и необходима даже в теории, в которой все интегралы в импульсном пространстве сходятся.*

Важным следствием условий (10.3.17) и (10.3.18) является утверждение, что не нужно включать радиационные поправки во внешние линии на массовой оболочке, поскольку

$$\begin{aligned} & \left[\Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} \right. \\ & \left. \times \Pi^*(q^2)[q^2 + m^2 - i\epsilon]^{-1} + \dots \right]_{q^2 \rightarrow -m^2} = 0. \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

Аналогичные замечания применимы к частицам произвольного спина. Например, лагранжиан «голового» дираковского поля имеет вид

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}_B[\not{\partial} + m_B]\Psi_B - V_B(\Psi_B). \quad (10.3.22)$$

Вводим перенормированные поля и массы:

$$\Psi \equiv Z_2^{-1/2}\Psi_B, \quad (10.3.23)$$

$$m = m_B + \delta m. \quad (10.3.24)$$

(Индекс 2 у Z по традиции используется для обозначения константы перенормировки фермионного поля.) Тогда лагранжиан можно переписать в виде:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (10.3.25)$$

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\Psi}[\not{\partial} + m]\Psi, \quad (10.3.26)$$

$$\mathcal{L}_1 = -(Z_2 - 1)[\bar{\Psi}[\not{\partial} + m_B]\Psi] + Z_2\delta m\bar{\Psi}\Psi - V_B(Z_2\bar{\Psi}\Psi). \quad (10.3.27)$$

Пусть $i(2\pi)^4 \Sigma^*(k)$ — сумма всех связанных диаграмм с одной входящей фермионной линией с 4-импульсом k , и одной выходящей линией с тем же 4-импульсом, которые нельзя сделать несвязными, раз-резав любую внутреннюю фермионную линию, причем пропа-гаторное множители $-i(2\pi)^4$ и $[ik + m - i\epsilon]^{-1}$ для внешних линий опущены. (Здесь использована лоренцовская инвариантность, согласно которой Σ^* есть обычная функция скалярной матрицы $k \equiv k_\mu \gamma^\mu$.) Тогда полный фермионный пропагатор имеет вид

$$\begin{aligned} S'(k) &= [ik + m - i\epsilon]^{-1} + [ik + m - i\epsilon]^{-1} \Sigma^*(k) [ik + m - i\epsilon]^{-1} \\ &+ [ik + m - i\epsilon]^{-1} \Sigma^*(k) [ik + m - i\epsilon]^{-1} \Sigma^*(k) [ik + m - i\epsilon]^{-1} + \dots \\ &= [ik + m - \Sigma^*(k) - i\epsilon]^{-1}. \end{aligned} \quad (10.3.28)$$

При вычислении $\Sigma^*(k)$ мы учитываем древесные диаграммы от слагаемых в правой части (10.3.27), пропорциональных $\overline{\Psi}\partial\Psi$ и $\Psi\Psi$, а также вклад петель:

$$\Sigma^*(k) = -(Z_2 - 1)[ik + m] + Z_2 \delta m + \Sigma_{\text{LOOP}}^*(k). \quad (10.3.29)$$

Условие, чтобы полный пропагатор имел полюс при $k^2 = -m^2$ с тем же вычетом, что и свободный пропагатор, имеет вид:

$$\Sigma^*(im) = 0, \quad (10.3.30)$$

$$\left. \frac{\partial \Sigma^*(k)}{\partial k} \right|_{k=im} = 0, \quad (10.3.31)$$

и поэтому

$$Z_2 \delta m = -\Sigma_{\text{LOOP}}^*(k), \quad (10.3.32)$$

$$Z_2 = 1 - i \left. \frac{\partial \Sigma_{\text{LOOP}}^*(k)}{\partial k} \right|_{k=im}. \quad (10.3.33)$$

Как и для скалярных частиц, обращение в нуль $[ik + m]^{-1} \Sigma^*(k)$ в пределе $k \rightarrow im$ показывает, что на массовой поверхности можно пренебречь радиационными поправками к внешним фермионным

линиям. Соответствующие результаты для фотонного пропагатора будут получены в разделе 10.5.

10.4. Перенормированный заряд и тождества Уорда

С помощью соотношений коммутации и законов сохранения для гейзенберговских операторов можно установить связь между зарядами (или аналогичными величинами) в плотности лагранжиана и свойствами физических состояний. Напомним, что инвариантность плотности лагранжиана относительно глобальных калибровочных преобразований $\Psi_l \rightarrow \exp(iq_l\alpha)\Psi_l$ (с произвольной постоянной фазой α) влечет за собой существование тока

$$J^\mu = -i \sum_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_l)} q_l \Psi_l, \quad (10.4.1)$$

удовлетворяющего условию сохранения

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (10.4.2)$$

Отсюда вытекает, что пространственный интеграл от временной компоненты J^μ не зависит от времени:

$$i \frac{d}{dt} Q = [Q, H] = 0, \quad (10.4.3)$$

где

$$Q \equiv \int d^3x J^0. \quad (10.4.4)$$

(Очень важное возможное исключение связано с тем, что интеграл (10.4.4) может не существовать, если в системе имеются дальнедействующие силы, обязанные безмассовым скалярам. Мы вернемся к этому вопросу при рассмотрении нарушенных симметрий в т. II.) Кроме того, поскольку Q является интегралом по пространству, эта величина явно трансляционно-инвариантна:

$$[\mathbf{P}, Q] = 0, \quad (10.4.5)$$

а так как J^μ — 4-вектор, Q инвариантен по отношению к однородным преобразованиям Лоренца:

$$[J^{\mu\nu}, Q] = 0. \quad (10.4.6)$$

Отсюда следует, что оператор Q , действуя на истинный вакуум Ψ_0 , дает другое лоренц-инвариантное состояние нулевой энергии и импульса, которое (в предположении, что вакуум невырожден) должно быть пропорционально самому Ψ_0 . Но константа пропорциональности должна обращаться в нуль, так как из лоренц-инвариантности следует, что $(\Psi_0, J_\mu \Psi_0) = 0$. Отсюда получаем:

$$Q\Psi_0 = 0. \quad (10.4.7)$$

Кроме того, оператор Q , действуя на любое одночастичное состояние $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}$, должен переводить его в другое состояние с теми же энергией, импульсом и теми же трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца, и следовательно (предполагая отсутствие вырождения одночастичных состояний), в состояние, пропорциональное тому же одночастичному состоянию:

$$Q\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = q_{(n)}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}. \quad (10.4.8)$$

Лоренц-инвариантность Q гарантирует, что собственное значение $q_{(n)}$ не зависит от \mathbf{p} и s , а зависит только от сорта частиц. Это собственное значение известно как электрический заряд (или какое-то другое квантовое число, для которого J^μ может быть током) одночастичного состояния. Чтобы связать его с параметрами q_l в лагранжиане, заметим, что из канонических коммутационных соотношений следует

$$[J^0(\mathbf{x}, t), \Psi_l(\mathbf{y}, t)] = -q_l \Psi_l(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (10.4.9)$$

или, после интегрирования по \mathbf{x} ,

$$[Q, \Psi_l(y)] = -q_l \Psi_l(y). \quad (10.4.10)$$

То же верно и для любой локальной функции $F(y)$ заданного числа полей, их производных и сопряженных им величин:

$$[Q, F(y)] = -q_F F(y), \quad (10.4.11)$$

где q_F – сумма q_l для всех полей и их производных в $F(y)$ минус сумма q_l для всех сопряженных полей и их производных. Беря матричный элемент этого соотношения между одночастичным состоянием и вакуумом и используя формулы (10.4.7) и (10.4.8), получаем

$$(\Psi_0, F(y)\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n})(q_F - q_{(n)}) = 0. \quad (10.4.12)$$

Следовательно, должно быть

$$q_{(n)} = q_F, \quad (10.4.13)$$

если только

$$(\Psi_0, F(y)\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}) \neq 0. \quad (10.4.14)$$

Как мы видели в предыдущем разделе, при условии (10.4.14) функции Грина, включающие F , в импульсном пространстве имеют полюсы, отвечающие одночастичному состоянию $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}$. Для одночастичного состояния, соответствующего одному из полей в лагранжиане, мы могли бы взять $F = \Psi_l$, и в этом случае $q_F = q_l$, однако наши результаты применимы и к произвольным одночастичным состояниям, независимо от того, входят ли соответствующие им поля в лагранжиан или нет.

Это почти полностью убеждает нас в том, что несмотря на все мыслимые диаграммы высшего порядка, дающие вклад в амплитуды испускания и поглощения фотонов заряженными частицами, физический электрический заряд строго равен параметру q_l в функции Лагранжа (или сумме таких параметров типа q_F). Уточнение, которое необходимо сделать, заключается в том, что требование инвариантности лагранжиана относительно преобразований $\Psi_l \rightarrow \exp(iq_l\alpha)\Psi_l$ никак не фиксирует общий масштаб величин q_l . Физические электрические заряды определяют отклик полей материи на заданное *перенормированное* электромагнитное поле A^μ . Иными словами, масштаб величин q_l фиксируется требованием, чтобы перенормированное электромагнитное поле входило в лагранжиан материи \mathcal{L}_M в линейных комбинациях $[\partial_\mu - iq_l A_\mu]\Psi_l$, так что ток J^μ имеет вид

$$J^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta A_\mu}. \quad (10.4.15)$$

Однако A^μ и q_l — не те же самые величины, что «голое электромагнитное поле» A_B^μ и «голые заряды» q_{Bl} , входящие в лагранжиан, записанный в простейшей форме *

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_{B\nu} - \partial_\nu A_{B\mu}) (\partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu) + \mathcal{L}_M(\Psi_l, [\partial_\mu - iq_{Bl} A_{B\mu}] \Psi_l). \quad (10.4.16)$$

Перенормированное электромагнитное поле (определенное так, чтобы его точный пропагатор имел полюс при $p^2 = 0$ с единичным вычетом) принято записывать в терминах поля A_B^μ в виде

$$A^\mu = Z_3^{-1/2} A_B^\mu, \quad (10.4.17)$$

поэтому для того, чтобы заряд q_l характеризовал отклик заряженных частиц на данное перенормированное электромагнитное поле, нужно определить перенормированные заряды соотношением

$$q_l = \sqrt{Z_3} q_{Bl}. \quad (10.4.18)$$

Мы видим, что физический электрический заряд q любой частицы просто пропорционален некоторому параметру q_B , связанному с теми параметрами, которые входят в лагранжиан, причем коэффициент пропорциональности $Z_3^{-1/2}$ одинаков для всех частиц. Это позволяет понять, каким образом частица вроде протона, окруженная облаком виртуальных мезонов и других сильновзаимодействующих частиц, может иметь тот же электрический заряд, что и позитрон, все взаимодействия которого много слабее. Необходимо всего лишь предположить, что по каким-то причинам заряды q_{Bl} в лагранжиане равны и противоположны по знаку для электрона и совокупности тех частиц (двух u -кварков и одного d -кварка), из которых составлен протон. Эффект поправок высшего порядка проявится при этом только в появлении *общего* множителя $Z_3^{-1/2}$.

* Следует иметь в виду, что автор не выписывает слагаемые, фиксирующие калибровку электромагнитного поля. — *Прим. ред.*

Для того, чтобы перенормировка заряда возникала только от радиационных поправок к фотонному пропагатору, должны происходить сокращения большого числа других радиационных поправок к пропагаторам и электромагнитным вершинам заряженных частиц. Можно чуть глубже проникнуть в природу этих сокращений, если воспользоваться знаменитыми соотношениями между пропагаторами заряженных частиц и вершинами, известными как *тождества Уорда*.

Рассмотрим, например, функцию Грина электрического тока $J^\mu(x)$ совместно с гейзенберговским дираковским полем $\Psi_n(y)$, имеющим заряд q , и ковариантно сопряженным ему полем $\bar{\Psi}_m(z)$. Определим электромагнитную вершинную функцию Γ^μ заряженной частицы формулой

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z e^{-ip \cdot x} e^{-ik \cdot y} e^{il \cdot z} (\Psi_0, T \{ J^\mu(x) \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z) \} \Psi_0) \\ & \equiv -iq S'_{nm}(k) \Gamma_{n'm'}^\mu(k, l) S'_{m'm}(l) \delta^4(p + k - l), \end{aligned} \quad (10.4.19)$$

где

$$-iS'_{nm}(k) \delta^4(k - l) \equiv \int d^4y d^4z (\Psi_0, T \{ \Psi_n(y) \bar{\Psi}_m(z) \} \Psi_0) e^{-ik \cdot y} e^{il \cdot z}. \quad (10.4.20)$$

Согласно теореме раздела 6.4, формула (10.4.20) определяет сумму всех фейнмановских диаграмм с одной входящей и одной выходящей фермионной линиями, т. е. точный дираковский пропагатор. Кроме того, формула (10.4.19) определяет сумму всех таких диаграмм, но с дополнительной внешней фотонной линией, так что Γ^μ равна сумме «вершинных» диаграмм с одной входящей и одной выходящей дираковскими линиями и одной фотонной линией, но с отброшенными точными пропагаторами дираковских внешних линий и свободным пропагатором внешней фотонной линии. Чтобы окончательно выяснить нормировку S' и Γ^μ , заметим, что в пределе отсутствия взаимодействий эти функции принимают следующие значения:

$$S'(k) \rightarrow [i\gamma_\lambda k^\lambda + m - i\varepsilon]^{-1}, \quad \Gamma^\mu(k, l) \rightarrow \gamma^\mu.$$

Однопетлевые диаграммы, дающие поправки к указанным предельным значениям, показаны на рис. 10.5.

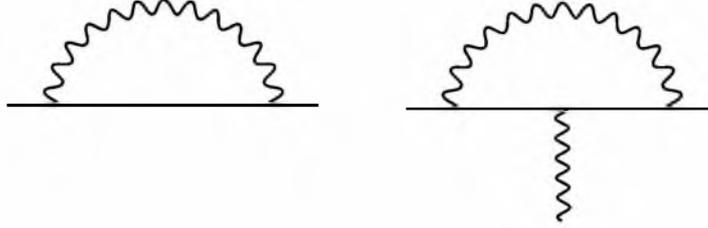


Рис. 10.5. Диаграммы первых поправок к электронному пропагатору и вершинной функции в квантовой электродинамике. Прямые линии отвечают электронам, волнистые — фотонам

Можно вывести соотношение между Γ^μ и S' , используя тождество

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\{J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\} &= T\{\partial_\mu J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\} \\ &+ \delta(x^0 - y^0)T\{[J^0(x)\Psi_n(y)]\bar{\Psi}_m(z)\} \\ &+ \delta(x^0 - z^0)T\{\Psi_n(y)[J^0(x), \bar{\Psi}_m(z)]\}, \end{aligned} \quad (10.4.21)$$

где дельта-функции возникают от дифференцирования ступенчатых функций. В силу закона сохранения (10.4.2) первое слагаемое обращается в нуль. Второе и третье слагаемые можно вычислить с помощью коммутационных соотношений (10.4.9), которые в данном случае имеют вид

$$[J^0(\mathbf{x}, t), \Psi_n(\mathbf{y}, t)] = -q\Psi_n(\mathbf{y}, t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (10.4.22)$$

а для сопряженного коммутатора имеем:

$$[J^0(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}_n(\mathbf{y}, t)] = q\bar{\Psi}_n(\mathbf{y}, t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (10.4.23)$$

Тогда формула (10.4.21) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\{J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\} &= -q\delta^4(x - y)T\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\} \\ &+ q\delta^4(x - z)T\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\}. \end{aligned} \quad (10.4.24)$$

Соответственно для преобразования Фурье получаем с учетом соотношения (10.4.19)

$$(l - k)_\mu S'(k) \Gamma^\mu(k, l) S'(l) = iS'(l) - iS'(k),$$

или, иными словами,

$$(l - k)_\mu \Gamma^\mu(k, l) = iS'^{-1}(k) - iS'^{-1}(l). \quad (10.4.25)$$

Это соотношение известно как *обобщенное тождество Уорда*, и впервые получено (описанным методом) Такахаши⁴. Первоначальное тождество, выведенное ранее Уордом⁵ при анализе ряда теории возмущений, можно получить из (10.4.25), устремив l к k . В этом пределе находим

$$\Gamma^\mu(k, k) = -i \frac{\partial}{\partial k_\mu} S'^{-1}(k). \quad (10.4.26)$$

Фермионный пропагатор связан формулой (10.3.28) с собственно-энергетической вставкой * $\Sigma^*(k)$ в собственную энергию:

$$S'^{-1}(k) = ik + m - \Sigma^*(k),$$

так что формулу (10.4.26) можно записать в виде

$$\Gamma^\mu(k, k) = \gamma^\mu + i \frac{\partial}{\partial k_\mu} \Sigma^*(k). \quad (10.4.27)$$

Для *перенормированного* дираковского поля получаем из формул (10.3.31) и (10.4.27), что на массовой оболочке

$$\bar{u}'_k \Gamma^\mu(k, k) u_k = \bar{u}'_k \gamma^\mu u_k, \quad (10.4.28)$$

где $[i\gamma_\mu k^\mu + m]u_k = [i\gamma_\mu k^\mu + m]u'_k = 0$. Таким образом, перенормировка фермионного поля обеспечивает сокращение радиационных поправок к вершинной функции Γ^μ , когда фермион на массовой поверхности

* В русскоязычной литературе используется также термин *массовый оператор*. — Прим. ред.

взаимодействует с электромагнитным полем с нулевой передачей импульса, как это и имеет место в случае, когда мы измеряем электрический заряд фермиона. Если бы мы использовали ненормированное фермионное поле, то поправки к вершинной функции все равно сократились бы с радиационными поправками к внешним фермионным линиям, оставив электрический заряд неизменным.

10.5. Калибровочная инвариантность

Сохранение электрического заряда можно использовать для доказательства полезных соотношений, которым удовлетворяют величины

$$M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\dots}(q, q', \dots) \equiv \int d^4x \int d^4x' \dots e^{-iq \cdot x} e^{-iq' \cdot x'} \dots \times (\Psi_{\beta}^{-}, T\{J^{\mu}(x), J^{\mu'}(x') \dots\} \Psi_{\alpha}^{+}). \quad (10.5.1)$$

В теориях типа спиновой электродинамики, где электромагнитное взаимодействие линейно по полю A^{μ} , это есть матричный элемент произвольного перехода $\alpha \rightarrow \beta$ с испусканием (и/или поглощением) фотонов, находящихся на или вне массовой поверхности, с 4-импульсами q, q' и т. д. (и/или $-q, -q'$ и т. д.), при этом коэффициентные функции или пропагаторы внешних фотонных линий опущены*. Утверждается, что выражение (10.5.1) обращается в нуль при свертке с 4-импульсом любого из фотонов:

$$q_{\mu} M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\dots}(q, q', \dots) = q'_{\mu} M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'\dots}(q, q', \dots) = \dots = 0. \quad (10.5.2)$$

Так как амплитуда M определена симметрично по отношению к фотонным линиям, достаточно показать обращение в нуль первой из этих сверток.

Для этого заметим, что после интегрирования по частям

* Строго говоря, при вычислении матричного элемента нужно отбросить все радиационные поправки к внешним линиям, либо взять корректное выражение для тока. — *Прим. ред.*

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'}(q, q', \dots) = -i \int d^4x \int d^4x' \dots e^{-iq \cdot x} e^{-iq' \cdot x'} \dots \times \left(\Psi_\beta^-, \frac{\partial}{\partial x^\mu} T \{ J^\mu(x), J^{\mu'}(x') \dots \} \Psi_\alpha^+ \right). \quad (10.5.3)$$

Электрический ток $J^\mu(x)$ сохраняется, но отсюда сразу же не следует, что (10.5.3) обращается в нуль, так как следует учитывать еще зависимость от x^0 , содержащуюся в тета-функциях, которые входят в определение хронологического произведения. Например, ограничиваясь двумя токами, имеем:

$$T \{ J^\mu(x) J^\nu(y) \} = \theta(x^0 - y^0) J^\mu(x) J^\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) J^\nu(y) J^\mu(x),$$

так что, принимая во внимание сохранение $J^\mu(x)$, получаем*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T \{ J^\mu(x) J^\nu(y) \} &= \delta(x^0 - y^0) J^0(x) J^\nu(y) - \delta(y^0 - x^0) J^\nu(y) J^0(x) \\ &= \delta(x^0 - y^0) [J^0(x), J^\nu(y)]. \end{aligned} \quad (10.5.4)$$

Если токов более двух, мы получаем похожий одновременной коммутатор (внутри хронологического произведения) для каждого тока, кроме самого $J^\mu(x)$. Чтобы вычислить такой коммутатор, напомним, что (как показано в предыдущем разделе), для любого произведения F операторов поля и сопряженных им величин и/или их производных справедливо равенство

$$[J^0(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{y}, t)] = -q_F F(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

где q_F — сумма зарядов q_l для полей и их производных, входящих в F , минус сумма зарядов q_l для сопряженных полей и их производных. Для электрического тока q_J равно нулю; $J^\nu(y)$ сам есть электрически нейтральный оператор. Отсюда

* Приводимые здесь и ниже рассуждения носят наводящий характер из-за сингулярного поведения произведений гейзенберговских операторов, которые являются операторозначными обобщенными функциями по времени (об этом ниже упоминает и автор). В частности, одновременные коммутаторы токов, и даже полей, строго говоря, не существуют. — *Прим. ред.*

$$[J^0(\mathbf{x}, t), J^V(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (10.5.5)$$

и поэтому выражение (10.5.4) обращается в нуль, так что из (10.5.3) находим

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\mu'}(q, q', \dots) = 0, \quad (10.5.6)$$

что и требовалось доказать.

В этом месте необходимо сделать важную оговорку. При выводе соотношения (10.5.5) следует учитывать, что произведение полей, взятых в одной пространственно-временной точке y , типа оператора тока $J^V(y)$, можно правильно определить только с помощью некоторой процедуры регуляризации содержащихся в таких произведениях бесконечностей. Во многих случаях оказывается, что существуют неисчезающие вклады в коммутатор $J^0(\mathbf{x}, t)$ с регуляризованным током $J^i(\mathbf{y}, t)$, известные под названием *швингеровских членов*⁶. В случае, когда в токе содержатся слагаемые, возникающие от заряженного скалярного поля Φ , имеются дополнительные не зависящие от регуляризации швингеровские члены, содержащие $\Phi^\dagger\Phi$. Однако в многофотонных амплитудах все подобные швингеровские члены сокращаются со вкладами квадратичных по электромагнитному полю дополнительных взаимодействий, которые возникают либо из процедуры регуляризации (при условии калибровочной инвариантности), либо, если речь идет о заряженных скалярах, содержатся в лагранжиане.

Мы будем главным образом иметь дело с заряженными спинорными полями и использовать процедуру регуляризации (размерную регуляризацию), которая не приводит к появлению швингеровских членов, так что в последующем изложении мы будем игнорировать это явление и продолжать пользоваться наивным коммутационным соотношением (10.5.5).

Те же самые аргументы приводят к результату (10.5.2), когда и другие частицы, помимо фотонов, находятся вне массовой поверхности, но при условии, что все *заряженные* частицы берутся на массовой поверхности, т. е. входят в состояниях Ψ_β^- и Ψ_α^+ . В противном случае левая часть (10.5.2) содержит ненулевые вклады от одновременных коммутаторов, подобные тем, с которыми мы встретились в предыдущем разделе при выводе тождества Уорда.

Одним из следствий формулы (10.5.2) является то, что матричные элементы S -матрицы не изменяются, если заменить любой фотонный пропагатор $\Delta_{\mu\nu}(q)$ на

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \rightarrow \Delta_{\mu\nu}(q) + \alpha_\mu q_\nu + q_\mu \beta_\nu, \quad (10.5.7)$$

или если заменить любой вектор поляризации на

$$e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) \rightarrow e_\rho(\mathbf{k}, \lambda) + c k_\rho, \quad (10.5.8)$$

где $k^0 \equiv |\mathbf{k}|$, а α_μ , β_ν и c — совершенно произвольные величины (не обязательно постоянные и не обязательно одинаковые для всех пропагаторов или векторов поляризации). Все это (несколько вольно) называется калибровочной инвариантностью S -матрицы.

Чтобы доказать сделанное утверждение, необходимо всего лишь явно выписать зависимость S -матрицы от векторов поляризации фотонов и от пропагаторов:

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} \propto & \int d^4 q_1 d^4 q_2 \dots \Delta_{\mu_1 \nu_1} \Delta_{\mu_2 \nu_2} \\ & \times e_{\rho_1}^*(\mathbf{k}'_1 \lambda'_1) e_{\rho_2}^*(\mathbf{k}'_2 \lambda'_2) \dots e_{\sigma_1}(\mathbf{k}_1 \lambda_1) e_{\sigma_2}(\mathbf{k}_2 \lambda_2) \dots \\ & \times M_{ba}^{\mu_1 \mu_2 \dots \nu_1 \nu_2 \dots \rho_1 \rho_2 \dots \sigma_1 \sigma_2 \dots}(-q_1, -q_2, \dots, q_1, q_2, \dots, -k'_1, -k'_2, \dots, k_1, k_2, \dots), \end{aligned} \quad (10.5.9)$$

где $M^{\rho\sigma\dots}$ — матричный элемент (10.5.1), вычисленный в отсутствие электромагнитных взаимодействий*. Инвариантность (10.5.9) относительно «калибровочных преобразований» (10.5.7) и (10.5.8) немедленно следует из условий сохранения (10.5.2). (В разделе 9.6 мы использовали формализм функциональных интегралов для доказательства частного случая этой теоремы, именно, что средние по вакууму от хронологических произведений калибровочно инвариантных операторов не зависят от константы α в пропагаторе (9.6.21).)

* Состояния a и b совпадают с α и β , если убрать все фотоны. Заметим, что все аргументы M соответствуют входящим 4-импульсам. Именно поэтому мы вынуждены вводить разные знаки в некоторые аргументы M в выражение (10.5.9).

Этот результат не так тривиален, как кажется, так как он применим не к отдельным диаграммам, а только к суммам диаграмм, в которых вершины токов вставлены во все возможные места.

Особенно важное применение формула (10.5.2) находит при вычислении фотонного пропагатора. Точный фотонный пропагатор, обозначаемый обычно $\Delta'_{\mu\nu}(q)$, имеет вид

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\rho}(q)M^{\rho\sigma}(q)\Delta_{\sigma\nu}(q), \quad (10.5.10)$$

где $M^{\rho\sigma}$ пропорционален матричному элементу (10.5.1) с двумя токами α и β – вакуумные состояния, и $\Delta_{\mu\nu}$ – свободный фотонный пропагатор, который в общей лоренц-инвариантной калибровке имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \equiv \frac{\eta_{\mu\nu} - \xi(q^2)q_\mu q_\nu / q^2}{q^2 - i\epsilon}. \quad (10.5.11)$$

Из (10.5.2) имеем $q^\mu M_{\mu\nu} = 0$, так что

$$q^\mu \Delta'_{\mu\nu}(q) = q^\mu \Delta_{\mu\nu}(q) = \frac{q_\nu(1 - \xi(q^2))}{q^2 - i\epsilon}. \quad (10.5.12)$$

С другой стороны, по аналогии с тем, как это делалось для скалярного и спинорного полей в разделе 10.3, можно выразить точный фотонный пропагатор через сумму $\Pi^*(q)$ диаграмм с двумя внешними фотонными линиями, которые (в противоположность M) однофотонно неприводимы:

$$\begin{aligned} \Delta'(q) &= \Delta(q) + \Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q) + \Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q) + \dots \\ &= [\Delta(q)^{-1} - \Pi^*(q)]^{-1}, \end{aligned} \quad (10.5.13)$$

или, иными словами,

* Напомним (см. начало раздела), что последнее утверждение верно только для теорий типа спинорной электродинамики, где взаимодействие линейно по A_μ . Однако важное для дальнейшего условие поперечности (10.5.2) для $M^{\rho\sigma}(q)$ верно для любой теории. — *Прим. ред.*

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\rho}(q) \Pi^{*\rho\sigma}(q) \Delta'_{\sigma\nu}(q). \quad (10.5.14)$$

Для того, чтобы удовлетворить (10.5.2), необходимо выполнение равенства

$$q_\rho \Pi^{*\rho\sigma}(q) = 0. \quad (10.5.15)$$

Отсюда, совместно с лоренцовской инвариантностью, вытекает, что поляризационный оператор $\Pi^*(q)$ должен иметь вид

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2 \eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \pi(q^2). \quad (10.5.16)$$

Тогда из представления (10.5.13) получаем следующий вид точного пропагатора:

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \frac{\eta_{\mu\nu} - \tilde{\xi}(q^2) q_\mu q_\nu / q^2}{[q^2 - i\varepsilon][1 - \pi(q^2)]}, \quad (10.5.17)$$

где

$$\tilde{\xi}(q^2) = \xi(q^2)[1 - \pi(q^2)] + \pi(q^2). \quad (10.5.18)$$

Далее, поскольку поляризационный оператор $\Pi^*(q)$ содержит вклады только от однофотонно неприводимых диаграмм, можно ожидать, что эта величина не имеет полюса при $q^2 = 0$. (Важным исключением является случай нарушенной калибровочной симметрии, обсуждаемый в томе II.) В частности, из отсутствия полюса при $q^2 = 0$ в слагаемом, пропорциональном $q_\mu q_\nu$ в $\Pi^*(q)$ вытекает, что у функции $\pi(q^2)$ также нет такого полюса, и в результате полюс в точном пропагаторе (10.5.17) остается в точке $q^2 = 0$. Это указывает на то, что фотон не приобретает массы за счет радиационных поправок.

Для перенормированного электромагнитного поля радиационные поправки также не изменяют калибровочно инвариантную часть вычета в фотонном полюсе в (10.5.17), так что

$$\pi(0) = 0. \quad (10.5.19)$$

Это условие приводит к определению константы перенормировки электромагнитного поля Z_3 . Напомним, что лагранжиан электроди-

намики, выраженный через перенормированное поле (10.4.17), имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + L_M(\Psi_l, [\partial_\mu - iZ_3 q_l A_\mu] \Psi_l).$$

Тогда функция $\pi(q^2)$ в однофотонно неприводимой амплитуде имеет вид

$$\pi(q^2) = 1 - Z_3 + \pi_{\text{LOOP}}(q^2), \quad (10.5.20)$$

где π_{LOOP} определяет вклад петлевых диаграмм. Отсюда вытекает, что

$$Z_3 = 1 + \pi_{\text{LOOP}}(0). \quad (10.5.21)$$

На практике, чтобы сделать $\pi(0)$ равным нулю, нужно просто вычислить вклад петель и вычесть константу.

Наконец, формула (10.5.18) показывает, что при $q^2 \neq 0$ калибровочное слагаемое в фотонном пропагаторе *изменяется* за счет радиационных поправок. Исключением является случай калибровки Ландау, когда $\bar{\xi} = \xi = 1$ для всех q^2 .

10.6. Электромагнитные формфакторы и магнитный момент

Пусть мы хотим вычислить процесс рассеяния частицы на внешнем электромагнитном поле (или электромагнитном поле другой частицы) в первом порядке теории возмущений по этому полю, но во всех порядках по всем другим взаимодействиям данной частицы (включая электромагнитное). Для этого необходимо знать сумму вкладов всех фейнмановских диаграмм с одной входящей и одной выходящей линией частицы, каждая из которых находится на массовой поверхности, и одной фотонной линией, которая может быть и на массовой поверхности, и вне нее. Согласно теореме раздела 6.4, такая сумма определяется одночастичным матричным элементом электромагнитного тока $J^\mu(x)$. Посмотрим, что определяет общий вид этого матричного элемента.

В силу трансляционной инвариантности одночастичный матричный элемент электромагнитного тока имеет вид

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\mu(x)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = \exp(i(p-p') \cdot x) (\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}). \quad (10.6.1)$$

Условие сохранения тока $\partial_\mu J^\mu = 0$ в этом случае означает, что

$$(p' - p)_\mu (\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = 0. \quad (10.6.2)$$

Кроме того, полагая $\mu = 0$ и интегрируя по всем \mathbf{x} , находим

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, Q\Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^0(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}).$$

Используя формулу (10.4.8), получаем

$$(\Psi_{\mathbf{p},\sigma'}, J^0(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = (2\pi)^{-3} q \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (10.6.3)$$

где q – заряд частицы.

В нашем распоряжении есть и ограничения на матричные элементы токов, накладываемые лоренц-инвариантностью. Чтобы получить их, рассмотрим простейшие случаи: спин 0 и спин 1/2. Представленный ниже анализ является примером полезной техники вычислений, используемой и для других токов, например, для токов полуплептонных слабых взаимодействий.

Спин нуль

В случае спина нуль требование лоренц-инвариантности приводит к следующему общему виду одночастичного матричного элемента тока:

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}) = q(2\pi)^{-3} (2p'^0)^{-1/2} (2p^0)^{-1/2} \mathcal{J}^\mu(p', p), \quad (10.6.4)$$

где p^0 и p'^0 энергии на массовой поверхности ($p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$), а $\mathcal{J}^\mu(p', p)$ — 4-вектор, являющийся функцией двух 4-векторов p'^μ и p^μ . (Для удобства дальнейших выкладок мы выделили из \mathcal{J} множитель, равный заряду частицы q .) Очевидно, что самый общий вид такой функции — это линейная комбинация p'^μ и p^μ или, эквивалентно, $p'^\mu + p^\mu$ и $p'^\mu - p^\mu$, со скалярными коэффициентами. Однако значения скаляров p^2 и p'^2 фиксированы: $p^2 = p'^2 = -m^2$, так что скалярные переменные, которые можно построить из p'^μ и p^μ ,

являются функциями единственной величины $p \cdot p'$ или, эквивалентно, величины

$$k^2 \equiv (p - p')^2 = -2m^2 - 2 p \cdot p'. \quad (10.6.5)$$

Следовательно функция $\mathcal{J}^\mu(p', p)$ должна иметь вид

$$\mathcal{J}^\mu(p, p') = (p' + p)^\mu F(k^2) + i(p' - p)^\mu H(k^2). \quad (10.6.6)$$

Из того, что оператор J^μ эрмитов, вытекает, что $\mathcal{J}^\mu(p', p)^* = \mathcal{J}^\mu(p, p')$, так что $F(k^2)$ и $H(k^2)$ действительны. Далее, скалярное произведение $(p' - p) \cdot (p' + p)$ обращается в нуль, а $(p' - p)^2 = k^2$ в общем случае не равно нулю, так что условие сохранения тока принимает простой вид

$$H(k^2) = 0. \quad (10.6.7)$$

Кроме того, полагая в формуле (10.6.4) $p' = p$ и $\mu = 0$ и сравнивая с формулой (10.6.3), находим, что

$$F(0) = 1. \quad (10.6.8)$$

Функция $F(k^2)$ называется *электромагнитным формфактором* частицы.

Спин 1/2

В случае спина 1/2 требование лоренц-инвариантности приводит к следующему общему виду одночастичного матричного элемента тока:

$$(\Psi_{p', \sigma'}, J^\mu(0) \Psi_{p, \sigma}) = iq(2\pi)^{-3} \bar{u}(p', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(p, \sigma), \quad (10.6.9)$$

где Γ^μ — 4-векторная 4×4 матричная функция величин p^ν , p'^ν и γ^ν , а u — обычная дираковская коэффициентная функция. Мы выделили множитель iq , чтобы нормировка Γ^μ совпадала с приведенной в предыдущем разделе.

Как и любую другую матрицу 4×4 , можно разложить Γ^μ в суперпозицию 16 ковариантных матриц $1, \gamma_\rho, [\gamma_\rho, \gamma_\sigma], \gamma_5 \gamma_\rho$ и γ_5 . Поэтому наиболее общий 4-вектор Γ^μ можно представить в виде линейной комбинации следующих величин:

$$\begin{aligned} 1: & \quad p^\mu, p'^\mu, \\ \gamma_\rho: & \quad \gamma^\mu, p^\mu \not{p}, p'^\mu \not{p}, p^\mu \not{p}', p'^\mu \not{p}', \\ [\gamma_\rho, \gamma_\sigma]: & \quad [\gamma^\mu, \not{p}], [\gamma^\mu, \not{p}'], [\not{p}, \not{p}'] p^\mu, [\not{p}, \not{p}'] p'^\mu, \\ \gamma_5 \gamma_\rho: & \quad \gamma_5 \gamma_\rho \varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma} p_\nu p'_\sigma, \\ \gamma_5: & \quad \text{отсутствует,} \end{aligned}$$

причем коэффициенты при каждом слагаемом будут функциями единственной скалярной величины (10.6.5). Полученное выражение может быть сильно упрощено, если использовать уравнение Дирака, которому удовлетворяют u и \bar{u} :

*Это утверждение очевидно для слагаемых $p^\mu \not{p}, p'^\mu \not{p}, p^\mu \not{p}'$ и $p'^\mu \not{p}'$, которые могут быть заменены, соответственно, на слагаемые $im p^\mu, im p'^\mu, im p^\mu, im p'^\mu$, совпадающие с уже имеющимися в нашем списке. Кроме того,

$$[\gamma^\mu, \not{p}] = 2\gamma^\mu \not{p} - \{\gamma^\mu, \not{p}\} = 2\gamma^\mu \not{p} - 2p^\mu,$$

что можно заменить на $2im p^\mu - 2p^\mu$, т. е. линейную комбинацию уже имеющихся слагаемых. Это же относится к $[\gamma^\mu, \not{p}']$. Далее,

$$[\not{p}, \not{p}'] = -2\not{p} \not{p}' + \{\not{p}, \not{p}'\} = -2\not{p} \not{p}' + 2p \cdot p',$$

что можно заменить на $2m^2 + 2p \cdot p' = -k^2$. Таким образом, слагаемые $[\not{p}, \not{p}'] p^\mu$ и $[\not{p}, \not{p}'] p'^\mu$ также не дают ничего нового. Наконец, чтобы разобраться с последним слагаемым, следует воспользоваться соотношением

$$\gamma_5 \gamma_\rho \varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{6} i (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma - \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu - \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\mu).$$

Сворачивая его с p_ν и p'_σ и переставляя все множители \not{p} направо, а все \not{p}' налево, видим, что это выражение опять сводится к линейной комбинации p^μ, p'^μ и γ^μ .

$$\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')(i\mathbf{p}' + m) = 0, \quad (i\mathbf{p} + m)u(\mathbf{p}, \sigma) = 0.$$

Тогда можно отбросить* все слагаемые кроме трех первых, пропорциональных p^μ , p'^μ и γ^μ . Мы приходим к выводу, что на массовой оболочке для фермионов функцию Γ^μ можно выразить в виде линейной комбинации γ^μ , p^μ и p'^μ . Выберем ее следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\Gamma^\mu(p', p)u(\mathbf{p}, \sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') & \left[\gamma^\mu F(k^2) - \frac{i}{2m} (p + p')^\mu G(k^2) \right. \\ & \left. + \frac{(p - p')^\mu}{2m} H(k^2) \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (10.6.10)$$

Из эрмитовости $J^\mu(0)$ следует, что

$$\beta\Gamma^{\mu\dagger}(p', p)\beta = -\Gamma^\mu(p', p), \quad (10.6.11)$$

так что $F(k^2)$, $G(k^2)$ и $H(k^2)$ должны быть действительными функциями k^2 .

Закон сохранения (10.6.2) автоматически удовлетворяется для первых двух слагаемых в (10.6.10), так как

$$(p' - p)_\mu \gamma^\mu = -i[(i\mathbf{p}' + m) - (i\mathbf{p} + m)]$$

и

$$(p' - p) \cdot (p' + p) = p'^2 - p^2.$$

С другой стороны, $(p' - p)^2$ в общем случае не равно нулю, поэтому сохранение тока требует, чтобы третье слагаемое отсутствовало:

$$H(k^2) = 0. \quad (10.6.12)$$

Кроме того, устремляя $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ в формулах (10.6.9) и (10.6.10), находим:

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma} J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma} \right) = iq(2\pi)^{-3} \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) \left[\gamma^\mu F(0) - \frac{i}{m} p^\mu G(0) \right] u(\mathbf{p}, \sigma).$$

Используя тождество $\{\gamma^\mu, i\mathbf{p} + m\} = 2m\gamma^\mu + 2ip^\mu$, получаем также, что

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, \sigma) = -\frac{i p^\mu}{m} \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma).$$

Напомним, что

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma) = \delta_{\sigma\sigma'} m / p^0$$

и поэтому

$$(\Psi_{\mathbf{p}, \sigma'} J^\mu(0) \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) = q(2\pi)^{-3} (p^\mu / p^0) \delta_{\sigma\sigma'} [F(0) + G(0)].$$

Сравнивая это выражение с (10.6.3), приходим к условию нормировки

$$F(0) + G(0) = 1. \quad (10.6.14)$$

Полезно отметить, что электромагнитная вершинная матрица Γ^μ обычно выражается через две другие матрицы в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') [\gamma^\mu F_1(k^2) \\ &+ \frac{1}{2} i[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p' - p)_\nu F_2(k^2)] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (10.6.15)$$

Можно переписать матрицу, содержащуюся во втором слагаемом, через те матрицы, которые использовались при определении $F(k^2)$ и $G(k^2)$:

$$\begin{aligned} &\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \frac{1}{2} i[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p' - p)_\nu u(\mathbf{p}, \sigma) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[-i p' \gamma^\mu + \frac{1}{2} i\{\gamma^\mu, \mathbf{p}'\} - i \gamma^\mu \mathbf{p} + \frac{1}{2} i\{\gamma^\mu, \mathbf{p}\} \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (10.6.16) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[i(p'^\mu + p^\mu) + 2m\gamma^\mu \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned}$$

Сравнивая (10.6.15) с (10.6.10), находим:

$$F(k^2) = F_1(k^2) + 2mF_2(k^2), \quad (10.6.17)$$

$$G(k^2) = -2mF_2(k^2). \quad (10.6.18)$$

Условие нормировки (10.6.14) принимает теперь вид

$$F_1(0) = 1.$$

Чтобы выразить магнитный момент частицы через ее формфакторы, рассмотрим пространственную часть вершинной функции в случае малых импульсов $|\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'| \ll m$. Для этого удобно воспользоваться формулой (10.6.16) и переписать представление (10.6.10) (с $H = 0$) еще в одном виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) &= \frac{-i}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') [(p + p')^\mu \{F(k^2) + G(k^2)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p' - p)_\nu F(k^2)] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (10.6.19)$$

При нулевых импульсах матричные элементы коммутаторов дираковских матриц определяются соотношениями (5.4.19) и (5.4.20):

$$\bar{u}(0, \sigma') [\gamma^i, \gamma^j] u(0, \sigma) = 4i \varepsilon_{ijk} \left(J_k^{(\frac{1}{2})} \right)_{\sigma', \sigma}, \quad \bar{u}(0, \sigma') [\gamma^i, \gamma^0] u(0, \sigma) = 0,$$

где $\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ – матрица углового момента для спина 1/2. Отсюда в первом порядке по малым импульсам получаем

$$\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) \rightarrow \frac{1}{m} [(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \mathbf{J}^{(\frac{1}{2})}]_{\sigma' \sigma} F(0). \quad (10.6.20)$$

Поэтому в случае очень слабого, не зависящего от времени внешнего векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ матричный элемент гамильтониана взаимодействия $H' = -\int d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})$ между одночастичными состояниями с малым импульсом равен

$$\begin{aligned} (\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, H' \Psi_{\mathbf{p}, \sigma}) &= \frac{-iqF(0)}{m(2\pi)^3} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot [(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \mathbf{J}^{(\frac{1}{2})}]_{\sigma' \sigma} \\ &= -\frac{qF(0)}{m(2\pi)^3} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} (\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})})_{\sigma' \sigma} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (10.6.21)$$

где $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ – магнитное поле. В пределе медленно меняющегося внешнего магнитного поля матричный элемент гамильтониана взаимодействия принимает вид

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, H \Psi_{\mathbf{p}, \sigma} \right) = -\frac{qF(0)}{m} (\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})})_{\sigma' \sigma} \cdot \mathbf{B} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (10.6.22)$$

Магнитный момент μ произвольной частицы со спином j определяется утверждением, что матричный элемент оператора взаимодействия частицы со слабым статическим медленно меняющимся магнитным полем имеет вид

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}', \sigma'}, H \Psi_{\mathbf{p}, \sigma} \right) = -\frac{\mu}{j} (\mathbf{J}^{(j)})_{\sigma' \sigma} \cdot \mathbf{B} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (10.6.23)$$

Соответственно формула (10.6.22) дает следующее выражение для магнитного момента частицы с зарядом q , массой m и спином $1/2$:

$$\mu = \frac{qF(0)}{2m}. \quad (10.6.24)$$

Это выражение содержит как частный случай знаменитый результат Дирака ⁷: для частицы спина $1/2$ $\mu = q/2m$ без учета радиационных поправок.

Отметим без доказательства, что формфакторы $F(k^2)$ и $G(k^2)$ протона можно измерить при $k^2 > 0$ путем сравнения экспериментальных данных по рассеянию электронов на протонах с формулой Розенблюта ⁸ для дифференциального сечения рассеяния в лабораторной системе:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{4(4\pi)^2 E_0^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \left[1 + \frac{2E_0}{m} \sin^2(\theta/2) \right]^{-1} \times \left\{ (F(k^2) + G(k^2))^2 + \frac{k^2}{4m^2} (2F^2(k^2) \operatorname{tg}^2(\theta/2) + G(k^2)) \right\},$$

где E_0 – энергия начального электрона (считается, что $E_0 \gg m_e$), θ – угол рассеяния, m – масса протона и

$$k^2 = \frac{4E_0^2 \sin^2(\theta/2)}{1 + (2E_0/m) \sin^2(\theta/2)}.$$

10.7. Представление Челлена–Лемана *

В разделе 10.2 мы видели, что наличие одночастичных промежуточных состояний приводит к полюсам в фурье-образах матричных элементов хронологических произведений типа (10.2.1). Многочастичные состояния приводят к более сложным особенностям, которые трудно описать в общем случае. Однако в частном случае средних по вакууму, содержащих только два оператора, имеется удобное представление, явно демонстрирующее аналитическую структуру фурье-образов. Такое представление существует, в частности, для пропагаторов, когда двумя операторами являются поля, отвечающие элементарным частицам. В соединении с квантово-механическими требованиями положительности ** такое представление приводит к интересным ограничениям на асимптотическое поведение пропагаторов и величину констант перенормировки.

Рассмотрим комплексный скалярный гейзенберговский оператор $\Phi(x)$, который может как быть, так и не быть полем, отвечающим элементарной частице. Среднее по вакууму от произведения $\Phi(x)\Phi^\dagger(y)$ можно записать в виде

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 = \sum_n \langle 0 | \Phi(x) | n \rangle \langle n | \Phi^\dagger(y) | 0 \rangle, \quad (10.7.1)$$

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

** Имеется в виду требование положительной определенности метрики гильбертова пространства состояний. — *Прим. ред.*

где сумма берется по любому полному набору состояний. (Сумма по n включает интегралы по непрерывным и суммы по дискретным переменным.) Выбирая эти состояния как собственные состояния 4-вектора импульса P^μ , на основании трансляционной инвариантности получаем, что

$$\begin{aligned}\langle 0|\Phi(x)|n\rangle &= \exp(ip_n \cdot x)\langle 0|\Phi(0)|n\rangle, \\ \langle n|\Phi^\dagger(y)|0\rangle &= \exp(-ip_n \cdot y)\langle n|\Phi^\dagger(0)|0\rangle,\end{aligned}\quad (10.7.2)$$

и поэтому

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 = \sum_n \exp(ip_n \cdot (x - y)) |\langle 0|\Phi(x)|n\rangle|^2. \quad (10.7.3)$$

Удобно переписать это выражение, введя спектральную функцию. Заметим, что сумма $\sum_n \delta^4(p - p_n) |\langle 0|\Phi(x)|n\rangle|^2$ есть скалярная функция 4-вектора p^μ и поэтому может зависеть только от p^2 и (при $p^2 \leq 0$) от знака p^0 . На самом деле, для всех промежуточных состояний в (10.7.3) $p^2 \leq 0$ и $p^0 > 0$, так что сумма принимает вид

$$\sum_n \delta^4(p - p_n) |\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2 = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \rho(-p^2), \quad (10.7.4)$$

где $\rho(-p^2) = 0$ для $p^2 > 0$. (Множитель $(2\pi)^{-3}$ выделен из ρ для удобства дальнейших выкладок.) Спектральная функция $\rho(-p^2)$ очевидно действительна и положительна. С учетом данного определения выражение (10.7.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(\Phi(x)\Phi^\dagger(y))_0 &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \exp[ip \cdot (x - y)] \theta(p^0) \rho(-p^2) \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \int_0^\infty d\mu^2 \exp[ip \cdot (x - y)] \theta(p^0) \rho(\mu^2) \delta(p^2 + \mu^2).\end{aligned}\quad (10.7.5)$$

Меняя порядок интегрирования по p^μ и μ^2 , можно представить последнее выражение в виде

$$\langle \Phi(x)\Phi^\dagger(y) \rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2), \quad (10.7.6)$$

где Δ_+ — знакомая нам функция

$$\Delta_+(x-y; \mu^2) \equiv (2\pi)^{-3} \int d^4p \exp[ip \cdot (x-y)] \theta(p^0) \delta(p^2 + \mu^2). \quad (10.7.7)$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$\langle \Phi^\dagger(y)\Phi(x) \rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2 \bar{\rho}(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2), \quad (10.7.8)$$

где вторая спектральная функция определена соотношением

$$\sum_n \delta^4(p-p_n) |\langle 0 | \Phi^\dagger(0) | n \rangle|^2 = (2\pi)^{-3} \theta(p^0) \bar{\rho}(-p^2). \quad (10.7.9)$$

Используем теперь требование причинности, заключающееся в том, что коммутатор $[\Phi(x), \Phi^\dagger(y)]$ обращается в нуль, если точки x и y разделены пространственноподобным интервалом. Среднее по вакууму от коммутатора имеет вид

$$\langle [\Phi(x)\Phi^\dagger(y)] \rangle_0 = \int_0^\infty d\mu^2 (\rho(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2) - \bar{\rho}(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2)). \quad (10.7.10)$$

Как указывалось в разделе 5.2, если интервал между x и y пространственноподобен, функция $\Delta_+(x-y)$ не обращается в нуль, но является *четной*. Поэтому для того, чтобы выражение (10.7.10) обратилось в нуль при произвольных пространственноподобных интервалах, необходимо выполнение условия

$$\rho(\mu^2) = \bar{\rho}(\mu^2). \quad (10.7.11)$$

Это частный случай СРТ-теоремы, доказанной здесь без обращения к теории возмущений: для любых состояний с $p^2 = -\mu^2$, имеющих квантовые числа оператора Φ , должны найтись соответствующие состояния с $p^2 = -\mu^2$, имеющие квантовые числа оператора Φ^\dagger .

С помощью (10.7.11) среднее по вакууму от хронологического произведения запишется в виде

$$\langle T\{\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\}\rangle_0 = -i \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta_F(x-y; \mu^2), \quad (10.7.12)$$

где $\Delta_F(x-y; \mu^2)$ есть фейнмановский пропагатор для бесспиновой частицы массой μ :

$$-i\Delta_F(x-y; \mu^2) \equiv \theta(x^0 - y^0) \Delta_+(x-y; \mu^2) - \theta(y^0 - x^0) \Delta_+(y-x; \mu^2). \quad (10.7.13)$$

Используя обозначения, введенные в разделе 10.3 для точных пропагаторов, вводим в импульсном пространстве функцию

$$-i\Delta'(p) \equiv \int d^4x \exp[-ip \cdot (x-y)] \langle T\{\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\}\rangle_0. \quad (10.7.14)$$

Напомним, что

$$\int d^4x \exp[-ip \cdot (x-y)] \Delta_F(x-y; \mu^2) = \frac{1}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon}. \quad (10.7.15)$$

Это приводит к искомому спектральному представлению⁹:

*На самом деле, нет даже уверенности в том, что $\Delta'(p)$ обращается в нуль при $|p^2| \rightarrow \infty$, хотя, казалось бы, это следует из спектрального представления. Проблема связана с изменением порядка интегрирования по p^μ и μ^2 . Определенно можно утверждать (с помощью методов следующего раздела), что $\Delta'(p)$ есть аналитическая функция $-p^2$ со скачком вдоль положительной действительной оси $-p^2 = \mu^2$, равным $\pi\rho(\mu^2)$. Отсюда следует, что для $\Delta'(p)$ можно записать дисперсионное соотношение со спектральной функцией $\rho(\mu^2)$ и возможными вычитаниями:

$$\Delta'(p) = P(p^2) + (-p^2 + \mu_0^2)^n \int_0^\infty \frac{\rho(\mu^2)}{(\mu^2 + \mu_0^2)^n} \frac{d\mu^2}{p^2 + \mu^2 - i\epsilon}.$$

где n – положительное целое число, μ_0^2 – произвольная положительная константа, а $P(p^2)$ – зависящий от μ_0^2 полином по p^2 порядка $n-1$, отсутствующий при $n = 0$.

$$\Delta'(p) = \int_0^{\infty} \rho(\mu^2) \frac{d\mu^2}{p^2 + \mu^2 - i\varepsilon}. \quad (10.7.16)$$

Первым немедленным следствием этого результата в сочетании с положительностью $\rho(\mu^2)$ является то, что $\Delta'(p)$ не может обращаться в нуль при $|p^2| \rightarrow \infty$ быстрее, чем свободный пропагатор $1/(p^2 + m^2 - i\varepsilon)$ *. Время от времени предлагают включить в невозмущенный лагранжиан слагаемые с высшими производными, что привело бы к убыванию пропагатора быстрее чем $1/p^2$ при $|p^2| \rightarrow \infty$. Однако спектральное представление показывает, что это обязательно вступает в противоречие с квантово-механическим постулатом положительности.

Спектральное представление вместе с одновременными коммутационными соотношениями можно использовать для вывода интересного правила сумм для спектральной функции. Если $\Phi(x)$ — обычным образом нормированный (но не перенормированный) канонический оператор поля, то

$$\left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \Phi^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (10.7.17)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta_+(x - y)|_{x^0=y^0} = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

так что из спектрального представления (10.7.10) вместе с коммутационными соотношениями (10.7.17) вытекает, что

$$\int_0^{\infty} \rho(\mu^2) d\mu^2 = 1. \quad (10.7.18)$$

Отсюда следует, что при $|p^2| \rightarrow \infty$ пропагатор (10.7.16) перенормированных полей в импульсном пространстве имеет асимптотическое поведение, отвечающее свободному полю:

$$\Delta'(p) \rightarrow \frac{1}{p^2}.$$

Такой результат имеет смысл только в рамках подходящей схемы регуляризации ультрафиолетовых расходимостей. В рамках теории возмущений неперенормированные поля имеют расходящиеся матричные элементы, так что их пропагаторы плохо определены.

Рассмотрим теперь возможность, что существует одночастичное состояние $|\mathbf{k}\rangle$ массой m , имеющее ненулевой матричный элемент с состоянием $\langle 0|\Phi(0)$. Из лоренц-инвариантности вытекает, что этот матричный элемент имеет вид

$$\langle 0|\Phi(0)|\mathbf{k}\rangle = (2\pi)^{-3/2} \left(2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\right)^{-1/2} N, \quad (10.7.19)$$

где N — константа. Согласно общим результатам раздела 10.3 пропагатор $\Delta'(p)$ неперенормированных полей должен иметь полюс при $p^2 \rightarrow -m^2$ с вычетом $Z \equiv |N|^2 > 0$. Отсюда

$$\rho(\mu^2) = Z\delta(\mu^2 - m^2) + \sigma(\mu^2), \quad (10.7.20)$$

где $\sigma(\mu^2) \geq 0$ — вклад многочастичных состояний. С учетом формулы (10.7.18) получаем

$$1 = Z + \int_0^\infty \sigma(\mu^2) d\mu^2, \quad (10.7.21)$$

так что

$$Z \leq 1, \quad (10.7.22)$$

причем равенство достигается только для свободной частицы, для которой состояние $\langle 0|\Phi(x)$ не имеет ненулевых матричных элементов с многочастичными состояниями.

Поскольку константа Z положительна, формулу (10.7.21) можно рассматривать как устанавливающую верхнюю границу на силу взаимодействия поля Φ с многочастичными состояниями:

$$\int_0^\infty \sigma(\mu^2) d\mu^2 \leq 1, \quad (10.7.23)$$

* В физике конденсированных сред этот прием известен как «преобразование Хаббарда–Стратоновича»¹¹. Оно будет использовано для введения полей спаренных электронов при обсуждении сверхпроводимости в т. II.

причем равенство достигается при $Z = 0$. Предел $Z = 0$ имеет интересную интерпретацию как условие того, что частица не элементарна, а является составной¹⁰. В данном контексте «составная» частица понимается как такая частица, чье поле не входит в лагранжиан. Рассмотрим такую частицу, например, нейтральную частицу спина нуль, и предположим, что она уничтожается оператором $F(\Psi)$ с соответствующими квантовыми числами, построенным из других полей. Не составляет труда ввести поле Φ , отвечающее такой частице, добавив в лагранжиан слагаемое вида* $\Delta\mathcal{L} = (\Phi - F(\Psi))^2$, поскольку функциональный интеграл по Φ можно взять, положив Φ равным значению в стационарной точке $\Phi = F(\Psi)$, в которой $\Delta\mathcal{L} = 0$. Но предположим, что вместо этого мы напишем $\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$, где $\Delta\mathcal{L}_0 \equiv -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2$ — обычный лагранжиан свободного поля, и рассмотрим $\Delta\mathcal{L}_1 \equiv \Delta\mathcal{L} - \Delta\mathcal{L}_0$ как взаимодействие. Слагаемое $\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$ во взаимодействии не содержит ничего нового. Мы получали такое слагаемое, умноженное на $(1 - Z)$, в формуле (10.3.12). Единственная новость заключается в том, что теперь $Z = 0$. Вместо того, чтобы подбирать константу Z так, чтобы удовлетворить условию перенормировки поля в виде $\Pi^*(0) = 0$, мы должны рассматривать условие $Z = 0$ как условие на константы связи составной частицы. К сожалению, применить такую процедуру в квантовой теории поля не удастся, поскольку, как мы видели, условие $Z = 0$ означает, что частица взаимодействует максимально сильно со своими конститuentами*, а это исключает применение теории возмущений. Условие $Z = 0$ оказывается действительно полезным в нерелятивистской квантовой механике. Например, оно фиксирует константу связи дейтрона с нейтроном и протоном¹².

Хотя мы вывели спектральное представление только для бесспиновых полей, результаты легко обобщаются на другие поля. Действительно, мы увидим в следующей главе, что в порядке e^2 множитель Z для электромагнитного поля (обычно обозначаемый Z_3) дается формулой

* В русском языке закрепилась транслитерация английского термина *constituents*, обозначающего элементарные частицы, составляющие данную составную частицу. — Прим. ред.

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2} \right),$$

(где $\Lambda \gg m_e$ — ультрафиолетовое обрезание) в согласии с ограничением (10.7.22).

10.8. Дисперсионные соотношения *

Провал первых попыток применить формализм теории возмущений в квантовой теории поля к слабым и сильным ядерным взаимодействиям привел теоретиков в конце 1950-х годов к идее об использовании аналитичности и унитарности амплитуд рассеяния для вывода общих непертурбативных результатов, не зависящих от конкретной теории поля. Это направление исследований началось с возрождения интереса к дисперсионным соотношениям. В своем первоначальном виде¹³ дисперсионное соотношение представляло собой формулу, выражающую действительную часть показателя преломления в виде интеграла от его мнимой части. Формула была получена как следствие свойства аналитичности показателя преломления как функции частоты, которое вытекало из условия, что электромагнитные сигналы в среде не могут распространяться быстрее, чем в вакууме. Если выразить показатель преломления через амплитуду рассеяния фотона вперед, то дисперсионное соотношение можно переписать как формулу, связывающую действительную часть амплитуды рассеяния вперед с интегралом от ее мнимой части, а следовательно, в силу условия унитарности, с интегралом от полного сечения. Одним из вдохновляющих свойств такого соотношения было то, что оно представляло альтернативу обычной теории возмущений: задавая амплитуду рассеяния в порядке e^2 , можно было вычислить сечение и мнимую часть амплитуды рассеяния в порядке e^4 , а затем с помощью дисперсионного соотношения найти действительную часть амплитуды рассеяния вперед в этом же порядке, не вычисляя при этом никаких петлевых диаграмм.

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

Развитие современного подхода к дисперсионным соотношениям началось в 1954 году работой Гелл-Манна, Гольдбергера и Тирринга¹⁴. Вместо рассмотрения распространения света в среде, они вывели свойство аналитичности амплитуды рассеяния непосредственно из условия микропричинности, утверждающего, что коммутаторы операторов поля обращаются в нуль, когда точки, в которых эти операторы заданы, разделены пространственноподобным интервалом. Вскоре такой подход позволил Гольдбергеру¹⁵ вывести очень полезное дисперсионное соотношение для пион-нуклонной амплитуды рассеяния вперед.

Чтобы увидеть, как можно использовать принцип микропричинности, рассмотрим в лабораторной системе рассеяние на угол нуль безмассового бозона любого спина на произвольной мишени α массой $m_\alpha > 0$ и импульсом $\mathbf{p}_\alpha = 0$. (Как обсуждается в т. II, этот пример имеет важные приложения для рассеяния не только фотонов, но и пионов в пределе $m_\pi = 0$.) Двукратным применением формулы (10.3.4) или теоремы Лемана–Симанчика–Циммермана³ матричный элемент S-матрицы в этом случае представляется в виде:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega\omega'} |N|^2} \lim_{k^2 \rightarrow 0} \lim_{k'^2 \rightarrow 0} \times \int d^4x \int d^4y e^{-ik' \cdot y} e^{ik \cdot x} (i\Box_y)(i\Box_x) \langle \alpha | T \{ A^\dagger(y), A(x) \} | \alpha \rangle. \quad (10.8.1)$$

Здесь k и k' – начальный и конечный 4-импульсы бозона, причем $\omega = k^0$, $\omega' = k'^0$; $A(x)$ – произвольный гейзенберговский оператор с неисчезающим матричным элементом

$$\langle \text{VAC} | A(x) | k \rangle = (2\pi)^{-3/2} (2\omega)^{-1/2} N e^{ik \cdot x}$$

между однобозонным состоянием $|k\rangle$ и вакуумом, а N – константа. При рассеянии фотона оператор $A(x)$ может быть одной из поперечных компонент электромагнитного поля, а в случае рассеяния безмассовых пионов – псевдоскалярной функцией адронных полей. Дифференциальные операторы $-i\Box_x$ и $-i\Box_y$ вставлены для того, чтобы появились множители ik'^2 и ik^2 , необходимые для сокращения бозонных пропагаторов, отвечающих внешним линиям. Подействовав этими операторами на $A^\dagger(y)$ и $A(x)$, получаем

$$S = \frac{-1}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega\omega'} |N|^2} \lim_{k^2 \rightarrow 0} \lim_{k'^2 \rightarrow 0} \times \int d^4x \int d^4y e^{-ik \cdot y} e^{ik' \cdot x} \langle \alpha | T \{ J^\dagger(y), J(x) \} | \alpha \rangle + \text{ОВК}, \quad (10.8.2)$$

где $J(x) \equiv \square_x A(x)$, а «ОВК» означает фурье-образ слагаемых от одновременных коммутаторов, возникающих при действии производной на ступенчатую функцию в хронологическом произведении. Коммутаторы операторов типа $A(x)$ и $A^\dagger(y)$ (или их производных) при $x^0 = y^0$ обращаются в нуль при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, так что слагаемое «ОВК» есть фурье-образ дифференциального оператора, действующего на $\delta^4(x - y)$, и поэтому является полиномиальной функцией 4-импульсов бозонов. Нас интересуют аналитические свойства матричного элемента S -матрицы, так что детальный вид этого полинома несуществен.

В силу трансляционной инвариантности матричный элемент (10.8.2) S -матрицы представляется в виде $S = -2\pi i \delta^4(k' - k) M(\omega)$, где

$$M(\omega) = \frac{-i}{2\omega |N|^2} F(\omega), \quad (10.8.3)$$

$$F(\omega) \equiv \int d^4x e^{i\omega l \cdot x} \langle \alpha | T \{ J^\dagger(0), J(x) \} | \alpha \rangle + \text{ОВК}, \quad (10.8.4)$$

при соглашении, что $k^\mu = \omega l^\mu$, где l – фиксированный 4-вектор, такой, что $l^\mu l_\mu = 0$ и $l^0 = 1$.

Хронологическое произведение можно двумя способами переписать через коммутаторы:

$$\begin{aligned} T \{ J^\dagger(0), J(x) \} &= \theta(-x^0) [J^\dagger(0), J(x)] + J(x) J^\dagger(0) \\ &= -\theta(x^0) [J^\dagger(0), J(x)] + J^\dagger(0) J(x). \end{aligned} \quad (10.8.5)$$

Соответственно,

$$F(\omega) = F_A(\omega) + F_+(\omega) = F_R(\omega) + F_-(\omega), \quad (10.8.6)$$

где

$$F_A(\omega) \equiv \int d^4x \theta(-x^0) \langle \alpha | [J^\dagger(0), J(x)] | \alpha \rangle e^{i\omega \cdot x} + \text{ОВК}, \quad (10.8.7)$$

$$F_R(\omega) \equiv -\int d^4x \theta(x^0) \langle \alpha | [J^\dagger(0), J(x)] | \alpha \rangle e^{i\omega \cdot x} + \text{ОВК}, \quad (10.8.8)$$

$$F_+(\omega) \equiv \int d^4x \langle \alpha | J(x) J^\dagger(0) | \alpha \rangle e^{i\omega \cdot x}, \quad (10.8.9)$$

$$F_-(\omega) \equiv \int d^4x \langle \alpha | J^\dagger(0) J(x) | \alpha \rangle e^{i\omega \cdot x}. \quad (10.8.10)$$

Условие микропричинности утверждает, что подынтегральные выражения в формулах (10.8.7) и (10.8.8) обращаются в нуль, если только x^μ не находится внутри светового конуса. Тогда наличие ступенчатых функций приводит к тому, что x^μ в формуле (10.8.7) находится в световом конусе прошлого, и $x \cdot l > 0$, а в формуле (10.8.8) — в переднем световом конусе, и $x \cdot l < 0$. Отсюда следует, что $F_A(\omega)$ аналитична при $\text{Im } \omega > 0$, а $F_R(\omega)$ аналитична при $\text{Im } \omega < 0$, так как в обоих случаях множитель $e^{i\omega \cdot x}$ обеспечивает сходимость интеграла по x^μ . (Напомним, что слагаемое «ОВК» является полиномом и поэтому аналитично во всех конечных точках.) Поэтому можно определить функцию

$$\mathcal{F}(\omega) \equiv \begin{cases} F_A(\omega), & \text{Im } \omega > 0, \\ F_R(\omega), & \text{Im } \omega < 0, \end{cases} \quad (10.8.11)$$

аналитичную во всей комплексной плоскости ω , за исключением разреза вдоль действительной оси.

Выведем теперь дисперсионное соотношение. Согласно формуле (10.8.6) скачок $\mathcal{F}(\omega)$ на разрезе при любом действительном E равен

$$\mathcal{F}(E + i\varepsilon) - \mathcal{F}(E - i\varepsilon) = F_A(E) - F_R(E) = F_-(E) - F_+(E). \quad (10.8.12)$$

Если $\mathcal{F}(\omega)/\omega^n$ обращается в нуль при $|\omega| \rightarrow \infty$ как в верхней, так и в нижней полуплоскости, то поделив эту функцию на любой полином $P(\omega)$ порядка n , получаем функцию, которая обращается в нуль при $|\omega| \rightarrow \infty$ и аналитична везде, за исключением разреза вдоль действительной оси и полюсов в нулях ω_n полинома $P(\omega)$. (Если сама $\mathcal{F}(\omega)$ обращается в нуль при $|\omega| \rightarrow \infty$, можно взять $P(\omega) = 1$.) Согласно теореме о вычетах, имеем тогда

$$\frac{\mathcal{F}(\omega)}{P(\omega)} + \sum_{\nu} \frac{\mathcal{F}(\omega_{\nu})}{(\omega_{\nu} - \omega)P'(\omega_{\nu})} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathcal{F}(z)dz}{(z - \omega)P(z)}, \quad (10.8.13)$$

где ω — любая точка вне действительной оси, а C — контур, состоящий из двух кусков: один проходит над действительной осью от $-\infty + i\epsilon$ до $+\infty + i\epsilon$ и замыкается по большому полукругу в верхней полуплоскости назад к $-\infty + i\epsilon$, а другой проходит под действительной осью от $+\infty - i\epsilon$ до $-\infty - i\epsilon$ и замыкается по большому полукругу в нижней полуплоскости назад к $+\infty - i\epsilon$. Поскольку функция $\mathcal{F}(z)/P(z)$ обращается в нуль при $|z| \rightarrow \infty$, вкладом от больших полукругов можно пренебречь. С учетом (10.8.12) формула (10.8.13) принимает вид:

$$\mathcal{F}(\omega) = Q(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega)P(E)} dE, \quad (10.8.14)$$

где $Q(\omega)$ — полином $(n - 1)$ -ой степени:

$$Q(\omega) \equiv -P(\omega) \sum_{\nu} \frac{\mathcal{F}(\omega_{\nu})}{(\omega_{\nu} - \omega)P'(\omega_{\nu})}.$$

Говорят, что дисперсионное соотношение такого вида, где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ имеют соответственно порядок n и $n - 1$, имеет n *вычитаний*. Если можно положить $P = 1$, то $Q = 0$, и дисперсионное соотношение называется *безвычитательным*.

Если теперь устремить ω к действительной оси сверху, то из (10.8.14) получаем:

$$F_A(\omega) = Q(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega - i\epsilon)P(E)} dE. \quad (10.8.15)$$

Вспоминая формулы (10.8.6) и (3.1.25), находим:

$$F(\omega) = Q(\omega) + \frac{1}{2} F_-(\omega) + \frac{1}{2} F_+(\omega) + \frac{P(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(E) - F_+(E)}{(E - \omega)P(E)} dE, \quad (10.8.16)$$

где $1/(E - \omega)$ понимается теперь в смысле главного значения $\mathcal{P}/(E - \omega)$.

Этот результат полезен, поскольку функции $F_{\pm}(E)$ можно выразить через измеряемые сечения. Суммируя в формулах (10.8.9) и (10.8.10) по полному набору многочастичных промежуточных состояний β (включая интегрирование по импульсам частиц в состояниях β) и вновь используя трансляционную инвариантность, имеем:

$$F_+(E) = (2\pi)^4 \sum_{\beta} |\langle \beta | J(0)^\dagger | \alpha \rangle|^2 \delta^4(-p_\alpha + El + p_\beta), \quad (10.8.17)$$

$$F_-(E) = (2\pi)^4 \sum_{\beta} |\langle \beta | J(0) | \alpha \rangle|^2 \delta^4(p_\alpha + El - p_\beta). \quad (10.8.18)$$

Однако матричные элементы поглощения безмассового скалярного бозона B в реакции $B + \alpha \rightarrow \beta$ или его античастицы B^c в реакции $B^c + \alpha \rightarrow \beta$ имеют соответственно вид

$$-2i\pi M_{B^c + \alpha \rightarrow \beta} = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_{B^c}} N} \langle \beta | J(0)^\dagger | \alpha \rangle, \quad (10.8.19)$$

$$-2i\pi M_{B + \alpha \rightarrow \beta} = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_B} N} \langle \beta | J(0) | \alpha \rangle. \quad (10.8.20)$$

Сравнивая с формулой (3.4.15), видим, что функции $F_{\pm}(E)$ можно выразить через полные сечения* при энергиях $\mp E$:

$$F_+(E) = \theta(-E) \frac{2|E| |N|^2}{(2\pi)^3} \sigma_{\alpha + B^c}(|E|), \quad (10.8.21)$$

$$F_-(E) = \theta(E) \frac{2E |N|^2}{(2\pi)^3} \sigma_{\alpha + B}(E). \quad (10.8.22)$$

* В ряде случаев, когда правила отбора разрешают переходы $\alpha \rightarrow \alpha + B$ и $\alpha \rightarrow \alpha + B^c$, функции $F_{\pm}(E)$ содержат также слагаемые, пропорциональные $\delta(E)$, возникающие от вклада одночастичного состояния α в сумме по промежуточным состояниям β . Для поперечно поляризованных фотонов или псевдоскалярных пионов в пределе $m_\pi \rightarrow 0$ подобная ситуация не возникает.

Теперь при действительных $\omega > 0$ амплитуда рассеяния

$$M(\omega) = \frac{-iQ(\omega)}{2\omega|N|^2} - \frac{i}{2(2\pi)^3} \sigma_{\alpha+B}(\omega) - \frac{P(\omega)}{\omega(2\pi)^4} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)} \right] EdE. \quad (10.8.23)$$

Обычно принято записывать это дисперсионное соотношение через амплитуду $f(\omega)$ рассеяния вперед в лабораторной системе, которая определена так, что дифференциальное сечение рассеяния вперед в этой системе равно $|f(\omega)|^2$. Эта амплитуда выражается через $M(\omega)$ следующим образом: $f(\omega) = -4\pi^2\omega M(\omega) = 2\pi^2iF(\omega)/|N|^2$, так что (10.8.23) принимает вид:

$$f(\omega) = R(\omega) + \frac{i\omega}{4\pi} \sigma_{\alpha+B}(\omega) + \frac{P(\omega)}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)} \right] EdE,$$

где $R(\omega) \equiv 2i\pi^2Q(\omega)/|N|^2$. Оптическая теорема (3.6.4) утверждает, что второе слагаемое в правой части равно $i\text{Im}f(\omega)$, так что это выражение можно записать в более употребительной форме:

$$\text{Re } f(\omega) = R(\omega) + \frac{P(\omega)}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)} \right] EdE. \quad (10.8.24)$$

В частности, видно, что если выбрать полином $P(\omega)$ действительным, то полином $R(\omega)$ также действителен.

Амплитуда рассеяния вперед удовлетворяет также важному условию симметрии. Меняя переменную интегрирования x в формулах (10.8.7) и (10.8.8) на $-x$ и используя свойство трансляционной инвариантности

$$\langle \alpha | [J^\dagger(0), J(-x)] | \alpha \rangle = \langle \alpha | [J^\dagger(x), J(0)] | \alpha \rangle,$$

видим, что при $\text{Im } \omega \leq 0$ функция $F_A(-\omega)$ совпадает с функцией $F_R(\omega)$, если не считать перемены местами J и J^\dagger . Иными словами,

$$F_A(-\omega) = F_R^c(\omega) \text{ при } \text{Im } \omega \leq 0,$$

где верхний индекс c указывает, что амплитуда описывает рассеяние античастицы B^c на мишени α . (Оставляем читателю показать, что это соотношение не нарушается при учете слагаемых от одновременных коммутаторов в (10.8.7) и (10.8.8).) Аналогично находим, что

$$F_R(-\omega) = F_A^c(\omega) \text{ при } \text{Im } \omega \geq 0,$$

и что для действительных ω

$$F_\pm(-\omega) = F_\mp^c(\omega).$$

Используя эти соотношения в формуле (10.8.6) и вспоминая, что $f(\omega)$ пропорциональна $F(\omega)$, находим соотношение *кросс-симметрии*: для действительных ω

$$f(-\omega) = f^c(\omega). \quad (10.8.25)$$

Мы свободны в выборе $P(\omega)$ в виде любого полинома достаточно высокого порядка, но тогда $R(\omega)$ зависит не только от $P(\omega)$, но и от значений $\mathcal{F}(\omega)$ в нулях $P(\omega)$. Если $P(\omega)$ — действительный полином n -ого порядка, единственными свободными параметрами в (10.8.16) являются n действительных коэффициентов в действительном полиноме $(n - 1)$ -ого порядка $R(\omega)$. Следовательно, соотношение (10.8.16) содержит ровно n неизвестных действительных независимых констант, являющихся коэффициентами полинома $R(\omega)$ при заданном $P(\omega)$. По этой причине желательно выбирать порядок n произвольного во всем остальном полинома $P(\omega)$ как можно меньшим.

Можно попробовать взять $P(\omega) = 1$, но это не работает. Анализ, проведенный в разделе 3.7, показывает, что амплитуда рассеяния вперед должна расти как ω или, возможно, как $\omega \ln^2 \omega$. В этом случае, для того, чтобы $f(\omega)/P(\omega)$ обращалась в нуль при $\omega \rightarrow 0$, достаточно взять $P(\omega)$ в виде полинома второго порядка,

так что $R(\omega)$ линейен по ω . Выбирая для удобства $P(E) = E^2$, представим соотношение (10.8.24) в виде

$$\operatorname{Re} f(\omega) = a + b\omega + \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)} + \frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)} \right] \frac{dE}{E}, \quad (10.8.26)$$

где a и b – неизвестные действительные константы. Из условия кросс-симметрии (10.8.25) вытекает, что соответствующие константы в дисперсионном соотношении для амплитуды рассеяния античастиц $f^c(\omega)$ равны

$$a^c = a, \quad b^c = -b. \quad (10.8.27)$$

Если предположить, например, что сечения $\sigma_{\alpha+B}(E)$ и $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$ ведут себя при $E \rightarrow \infty$ как разные константы, умноженные на $(\ln E)^r$, то из (10.8.26) будет следовать, что

$$\operatorname{Re} f(\omega) \sim [\sigma_{\alpha+B}(\omega) - \sigma_{\alpha+B^c}(\omega)] \ln \omega \sim \omega (\ln \omega)^{r+1}, \quad (10.8.28)$$

так что действительная часть амплитуды рассеяния будет расти в $\ln \omega$ раз быстрее мнимой части. Это неприемлемо: мы видели в разделе 3.7, что при $\omega \rightarrow \infty$ следует ожидать, что действительная часть амплитуды рассеяния вперед много меньше мнимой части, и это подтверждается экспериментом. Мы приходим к выводу, что если $\sigma_{\alpha+B}(E)$ и $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$ действительно ведут себя при $E \rightarrow \infty$ как константы, умноженные на $(\ln E)^r$, то эти константы должны быть равны. Поскольку мы рассматриваем предел высоких энергий, результат не зависит от предположения, что B – безмассовый бозон, так что можно утверждать, что *отношение сечений рассеяния любой частицы и ее античастицы на фиксированной мишени должно стремиться при высоких энергиях к единице*. Этот результат есть несколько обобщенный вариант так называемой теоремы Померанчука¹⁶. (Померанчук рассматривал только случай $r = 0$, хотя из результатов раздела 3.7 и из наблюдаемого поведения сечений следует, что значение $r = 2$ более предпочтительно.)

Хотя Померанчук получал свои оценки асимптотического поведения амплитуд рассеяния на основании аргументов, близких к изложенным в разделе 3.7, в наши дни поведение при высоких

энергиях обычно получают из теории полюсов Редже¹⁷. Рассмотрение деталей этого вопроса увело бы нас слишком далеко в сторону. Достаточно сказать, что для адронных процессов асимптотическое поведение $f(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ представляется суммой слагаемых, пропорциональных $\omega^{\alpha(0)}$, где $\alpha_n(t)$ — множество «реджевских траекторий», каждая из которых соответствует обмену бесконечным семейством различных одноадронных состояний в процессе рассеяния. Ведущей траекторией (на самом деле, комплексом из многих траекторий) является «померон», для которого $\alpha(0)$ близко к единице. Именно эта траектория дает сечения, примерно постоянные при $E \rightarrow \infty$.

Согласно теореме Померанчука, померон одинаково связан с любым адроном и его античастицей. Для низших реджевских траекторий можно оценить значения $\alpha_n(0)$, рассматривая спектр адронных состояний. Необходимым, хотя и недостаточным условием¹⁸ того, что при значении массы m возникнет мезонный резонанс со спином j , является равенство m^2 тому значению t , при котором одна из траекторий $\alpha_n(t)$ равна j . Кроме померона, ведущей траекторией в пион-нуклонном рассеянии является та, на которой мы находим при массе $m = 770$ МэВ ρ -мезон с $j = 1$, при массе $m = 1690$ МэВ — g -мезон с $j = 3$, и при массе $m = 2350$ МэВ — мезон с $j = 5$. Экстраполируя эти значения $\alpha(t)$ к $t = 0$, можно оценить, что для этой траектории $\alpha(0) \approx 0,5$. Связь такой траектории с π^+ и π^- имеет разные знаки, так что для пион-нуклонного рассеяния следует ожидать, что $f(\omega) - f^c(\omega)$ ведет себя, грубо говоря, как $\omega^{1/2}$.

В случае рассеяния фотонов нет разницы между V и V^c , так что в этом случае из формулы (10.8.27) следует $b = 0$, и соотношение (10.8.26) принимает вид:

$$f(\omega) = a + \frac{\omega^2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sigma(E)}{E^2 - \omega^2} dE. \quad (10.8.29)$$

Это и есть по-существу первоначальное соотношение Крамерса-Кронига¹³. Как мы увидим в разделе 13.5, для мишени с зарядом e и массой m константа a имеет известное значение $\text{Re } f(0) = -e^2/m$.

Задачи

1. Рассмотрите нейтральное векторное поле $v_\mu(x)$. Какие условия следует наложить на сумму $\prod_{\mu\nu}^*(k)$ вкладов одночастично неприводимых диаграмм с двумя внешними линиями векторного поля, чтобы поле было правильно перенормировано и описывало частицу с перенормированной массой m ? Как следует для этого разделить в лагранжиане слагаемые, отвечающие свободному полю и взаимодействию?
2. Выведите обобщенное тождество Уорда, которому подчиняется электромагнитная вершинная функция заряженного скалярного поля.
3. Какой вид имеет наиболее общая форма матричного элемента $\langle \mathbf{p}_2 \sigma_2 | J^\mu(x) | \mathbf{p}_1 \sigma_1 \rangle$ электромагнитного тока $J^\mu(x)$ между двумя одночастичными состояниями спина $1/2$, одинаковой четности и *разных* масс m_1 и m_2 ? Как изменится результат, если четности разные? (Предполагается сохранение четности.)
4. Выведите спектральное представление Челлена–Лемана для среднего по вакууму $\langle T\{J^\mu(x) J^\nu(y)\} \rangle_0$, где $J^\mu(x)$ – комплексный сохраняющийся ток.
5. Выведите спектральное представление Челлена–Лемана для среднего по вакууму $\langle T\{\psi_n(x) \bar{\psi}_m(y)\} \rangle_0$, где $\psi(x)$ – дираковское поле.
6. Не делая никаких предположений об асимптотическом поведении амплитуды рассеяния или сечения, покажите, что амплитуда рассеяния фотона на угол нуль не может удовлетворять дисперсионному соотношению без вычитаний.
7. Выведите спектральное представление Челлена–Лемана для комплексного скалярного поля, используя методы теории дисперсионных соотношений.
8. С помощью теории дисперсионных соотношений и результатов раздела 8.7 вычислите в порядке e^4 амплитуду рассеяния вперед фотонов на электронах в системе покоя электрона.

Список литературы

1. Furry, W.H., *Phys. Rev.*, **51**, 125 (1937).
2. Yukawa, H., *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, **17**, 48 (1935).
3. Lehmann, H., Symanzik, K., and Zimmermann, W., *Nuovo Cimento*, **1**, 205 (1955).
4. Takahashi, Y., *Nuovo Cimento*, Ser. 10, **6**, 370 (1957).
5. Ward, J.C., *Phys. Rev.*, **78**, 182 (1950).
6. Schwinger, J., *Phys. Rev. Lett.*, **3**, 296 (1950).
7. Dirac, P.A.M., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A117**, 610 (1928).
8. Rosenbluth, M.N., *Phys. Rev.*, **79**, 615 (1950).
9. Källén, G., *Helv. Phys. Acta*, **25**, 417 (1952); *Quantum Electrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1972); Lehmann, H., *Nuovo Cimento*, **11**, 342 (1954).
10. Howard, J.C. and Jouvett, B., *Nuovo Cimento*, **18**, 466 (1960); Vaughan, M.J., Aaron, R., and Amado, R.D., *Phys. Rev.*, **125**, 1258 (1961); Weinberg, S., in: Proceedings of the 1962 High-Energy Conference at CERN (CERN, Geneva, 1962), p. 683.
11. Stratonovich, R.I., *Sov. Phys. Dokl.*, **2**, 416 (1957); Hubbard, J., *Phys. Rev. Lett.*, **3**, 77 (1959).
12. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **137**, B672 (1965).
13. Kramers, H.A., *Atti Congr. Intern. Fisici, Como* (Nicolo Zanichelli, Bologna, 1927); reprinted in: Kramers, H.A., *Collected Scientific Papers* (North-Holland, Amsterdam, 1956); Kronig, R., *Ned. Tyd. Nat. Kunde*, **9**, 402 (1942); *Physica*, **12**, 543 (1946); Toll, J.S., The Dispersion Relation for Light and its Application to Problems Involving Electron Pairs (Princeton University Ph. D.

- Thesis, 1952). Исторические обзоры см. в работах: Jackson, J.D., in *Dispersion Relations*, ed. by G.R.Screaton (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1961); Goldberger, M.L., in *Dispersion Relations and Elementary Particles*, ed. by C. de Witt and R. Omnes (Hermann, Paris, 1960).
14. Gell-Mann, M., Goldberger, M.L., and Thirring, W., *Phys. Rev.*, **95**, 1612 (1954). Непертурбативное происхождение этого результата было показано в работе: Goldberger, M.L., *Phys. Rev.*, **97**, 508 (1955).
 15. Goldberger, M.L., *Phys. Rev.*, **99**, 979 (1955).
 16. Pomeranchuk, I. Ya., *J. Expt. Theor. Phys. (USSR)*, **34**, 725 (1958). Обобщение результатов этой работы см. в статье: Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **124**, 2049 (1961).
 17. См., например, книгу: Collins, P.D.B., *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1977) (есть рус. пер.: Дж. Коллинз. Введение в теорию полюсов Редже. М.: Мир, 1980). Оригинальные работы: Regge, T., *Nuovo Cimento*, **14**, 951 (1959); 18, 947 (1960).
 18. График зависимости спина от квадрата массы называется диаграммой Чу–Фраучи. См. работу: Chew, G.F. and Frautschi, S.C., *Phys. Rev. Lett.*, **8**, 41 (1962).

Однопетлевые радиационные поправки в квантовой электродинамике

В этой главе мы займемся некоторыми, ставшими уже классическими, однопетлевыми вычислениями в теории взаимодействия заряженных лептонов — массивных частиц спина $1/2$ — с электромагнитным полем. Известны три сорта лептонов, отличающихся своим «ароматом»: электрон, мюон и самый тяжелый сравнительно недавно открытый таун. Для определенности будем все заряженные частицы в наших расчетах называть электронами, хотя большая часть вычислений в равной степени применима к мюонам и тауонам.

После ряда общих соображений в разделе 11.1, мы перейдем к вычислению поляризации вакуума в разделе 11.2, аномального магнитного момента электрона в разделе 11.3 и собственной энергии электрона в разделе 11.4. Попутно мы введем ряд математических приемов, оказывающихся полезными при таких вычислениях, в том числе фейнмановскую параметризацию, виковский поворот, а также размерную регуляризацию 'т Хофта–Вельтмана и более ранний метод регуляризации Паули–Вилларса. Хотя при расчетах и появятся бесконечности, мы увидим, что окончательные результаты конечны, если их выразить через перенормированные массу и заряд. В следующей главе мы распространим полученные здесь результаты, касающиеся перенормировки, на случай общих теорий в произвольных порядках теории возмущений.

11.1. Контрчлены

Возьмем лагранжиан электронов и фотонов в виде *:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_B^{\mu\nu} F_{B\mu\nu} - \bar{\Psi}_B \left[\gamma_\mu (\partial^\mu + ie_B A_B^\mu) + m_B \right] \Psi_B, \quad (11.1.1)$$

где A_B^μ , $\bar{\Psi}_B$ и Ψ_B — голые (т. е. перенормированные) поля фотона и электрона, а $-e_B$ и m_B — голые заряд и масса электрона. Согласно предыдущей главе, можно ввести перенормированные поля, массу и заряд соотношениями

$$\Psi \equiv Z_2^{-1/2} \Psi_B, \quad (11.1.2)$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{-1/2} A_B^\mu, \quad (11.1.3)$$

$$e \equiv Z_3^{+1/2} e_B, \quad (11.1.4)$$

$$m \equiv m_B + \delta m, \quad (11.1.5)$$

где константы Z_2 , Z_3 и δm подбираются так, чтобы пропагаторы перенормированных полей имели полюсы в тех же точках и с теми же вычетами, что и пропагаторы свободных полей в отсутствие взаимодействий. Тогда лагранжиан можно записать через перенормированные величины в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (11.1.6)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\Psi} \left[\gamma_\mu \partial^\mu + m \right] \Psi, \quad (11.1.7)$$

$$\mathcal{L}_1 = -ie A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad (11.1.8)$$

* В этой главе нам не потребуется переходить от гейзенберговских операторов к операторам в представлении взаимодействия, поэтому мы вернемся к общепринятым обозначениям, когда заглавная буква A и строчная буква Ψ используются для обозначения соответственно полей фотона и заряженной частицы.

а \mathcal{L}_2 есть сумма «контрчленов»:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - (Z_2 - 1)\bar{\psi}[\gamma_\mu\partial^\mu + m]\psi \\ & + Z_2\delta m\bar{\psi}\psi - ie(Z_2 - 1)A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

Оказывается, что все слагаемые в \mathcal{L}_2 — второго и более высоких порядков по e , и их как раз хватает для того, чтобы сократить ультрафиолетовые расходимости, возникающие от петлевых диаграмм.

11.2 Поляризация вакуума

Начнем наши вычисления петлевых радиационных поправок с так называемого эффекта поляризации вакуума, т. е. с поправок к пропагатору, отвечающему внутренней фотонной линии. Поляризация вакуума приводит к измеряемым сдвигам энергетических уровней атома водорода и дает важный вклад в значения энергии связи мюонов, находящихся на орбитах вокруг тяжелых ядер. Кроме того, как мы увидим в т. II, вычисление поляризации вакуума является ключевым для определения поведения электродинамики и других калибровочных теорий при высоких энергиях.

Как и в разделе 10.5, определим $i(2\pi)^4\Pi^{*\rho\sigma}(q)$ как сумму всех связанных диаграмм с двумя внешними фотонными линиями, несущими индексы поляризаций μ и ν и 4-импульс q . В это выражение не входят фотонные пропагаторы от двух внешних фотонных линий, а звездочка означает, что исключаются диаграммы, которые становятся несвязными после разрезания некоторой внутренней фотонной линии. Точный фотонный пропагатор $\Delta'^{\mu\nu}(q)$ дается формулой (10.5.3):

$$\Delta' = \Delta[1 - \Pi^* \Delta]^{-1}, \quad (11.2.1)$$

где $\Delta^{\mu\nu}(q)$ — пропагатор фотона без радиационных поправок. Наша задача — вычислить главные вклады в $\Pi^{*\rho\sigma}(q)$.

В низшем порядке имеется однопетлевой вклад в Π^* , отвечающий диаграмме рис. 11.1:

$$i(2\pi)^4 \Pi_{1\text{LOOP}}^{*\rho\sigma}(q) = - \int d^4p \text{Tr} \left\{ \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \right. \\ \left. \times \left[(2\pi)^4 e \gamma^\rho \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i\not{(p-q)} + m}{(p-q)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[(2\pi)^4 e \gamma^\sigma \right] \right\}, \quad (11.2.2)$$

где первый знак минус справа отвечает наличию фермионной петли. В более простой записи:

$$\Pi_{1\text{LOOP}}^{*\rho\sigma}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\text{Tr}\{[-i\not{p} + m]\gamma^\rho[-i\not{(p-q)} + m]\gamma^\sigma\}}{(p^2 + m^2 - i\epsilon)((p-q)^2 + m^2 - i\epsilon)}. \quad (11.2.3)$$

Первый шаг при вычислении этого интеграла заключается в использовании приема, предложенного Фейнманом¹. Воспользуемся элементарной формулой

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A + xB]^2}, \quad (11.2.4)$$

и запишем произведение скалярных пропагаторов в (11.2.3) следующим образом:

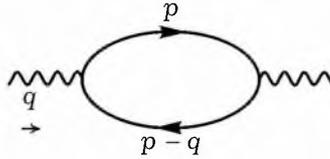


Рис. 11.1. Однопетлевая диаграмма поляризации вакуума в квантовой электродинамике. Волнистые линии отвечают фотонам, линии со стрелками — электронам

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(p^2 + m^2 - i\varepsilon)((p - q)^2 + m^2 - i\varepsilon)} = \\
& = \int_0^1 \left[(p^2 + m^2 - i\varepsilon)(1 - x) + ((p - q)^2 + m^2 - i\varepsilon)x \right]^{-2} dx \\
& = \int_0^1 \left[p^2 + m^2 - i\varepsilon - 2p \cdot qx + q^2x \right]^{-2} dx \\
& = \int_0^1 \left[(p - qx)^2 + m^2 - i\varepsilon + q^2x(1 - x) \right]^{-2} dx.
\end{aligned}$$

(Это частный случай более общего класса интегралов, рассмотренных в Приложении к этой главе.) Теперь можно сдвинуть переменную интегрирования в импульсном пространстве*:

$$p \rightarrow p + qx,$$

так что выражение (11.2.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
\Pi_{1\text{LOOP}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 -dx \int -d^4p \left[(p - qx)^2 + m^2 - i\varepsilon + q^2x(1 - x) \right]^{-2} \\
&\times \text{Tr}\{[-i(p + qx) + m]\gamma^\rho[-i(p - q(1 - x)) + m]\gamma^\sigma\}.
\end{aligned} \tag{11.2.5}$$

Используя результаты Приложения к гл. 8, можно без труда вычислить след в подынтегральном выражении:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}\{[-i(p + qx) + m]\gamma^\rho[-i(p - q(1 - x)) + m]\gamma^\sigma\} \\
& = 4 \left[-(p + qx)^\rho (p - q(1 - x))^\sigma + (p + qx) \cdot (p - q(1 - x)) \eta^{\rho\sigma} \right. \\
& \quad \left. - (p + qx)^\sigma (p - q(1 - x))^\rho + m^2 \eta^{\rho\sigma} \right].
\end{aligned} \tag{11.2.6}$$

Следующий шаг носит название *виковского поворота*². До тех пор, пока $-q^2 < 4m^2$, величина $m^2 + q^2x(1 - x)$ положительна при всех x

* Строго говоря, этот шаг верен только для сходящихся интегралов. В принципе, чтобы обосновать сдвиг переменных, следует ввести какую-то схему регуляризации, делающую все интегралы сходящимися. Такой схемой может быть, например, схема размерной регуляризации.

между 0 и 1, так что полюсы подынтегрального выражения в (11.2.5) находятся в точках $p^0 = \pm\sqrt{p^2 + m^2 + q^2x(1-x)} - i\epsilon$, т. е. чуть выше отрицательной действительной оси и чуть ниже положительной действительной оси (см. рис. 11.2). Можно повернуть контур интегрирования по p^0 против часовой стрелки, не пересекая при этом ни одного из полюсов, так что вместо интегрирования по p^0 вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$, мы интегрируем вдоль мнимой оси от $-i\infty$ до $+i\infty$. Иными словами, можно написать $p^0 = ip^4$, и теперь интегрировать по действительным значениям p^4 от $-\infty$ до $+\infty$. (Если бы в знаменателе пропагатора входило $i\epsilon$ вместо $-i\epsilon$, следовало бы положить $p^0 = -ip^4$, причем p^4 опять пробежало бы все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$. В результате просто изменился бы знак $\Pi_{1\text{LOOP}}^{*\rho\sigma}(q)$.) Теперь формула (11.2.5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{1\text{LOOP}}^{*\rho\sigma}(q) = & \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 -dx \int - (d^4p)_E [p^2 + m^2 + q^2x(1-x)]^{-2} \\ & \times [-(p+qx)^\rho(p-q(1-x))^\sigma + (p+qx) \cdot (p-q(1-x))\eta^{\rho\sigma} \\ & - (p+qx)^\sigma(p-q(1-x))^\rho + m^2\eta^{\rho\sigma}]. \end{aligned} \quad (11.2.7)$$

где

$$(d^4p)_E = dp^1 dp^2 dp^3 dp^4,$$

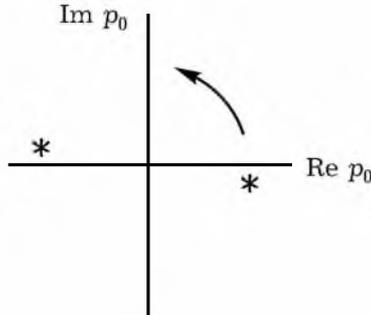


Рис. 11.2. Виковский поворот контура интегрирования по p^0 . Маленькие крестики указывают положение полюсов в комплексной плоскости p^0 , стрелки показывают направление поворота контура интегрирования от действительной к мнимой оси

и все скалярные произведения вычисляются с использованием евклидовой нормы

$$a \cdot b = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 + a^4 b^4,$$

при соглашении, что $q^4 \equiv -iq^0$. Кроме того, $\eta^{\rho\sigma}$ можно считать либо кронекеровским дельта-символом с индексами, принимающими значения 1, 2, 3, 4, либо обычным тензором Минковского с индексами, принимающими значения 1, 2, 3, 0*.

Интеграл (11.2.7) сильно расходится. В конце концов все бесконечности сократятся, но чтобы увидеть это, необходимо использовать на промежуточных стадиях вычисления какой-то способ регуляризации, делающий интегралы сходящимися. Не годится просто обрезать интегралы на некотором максимальном импульсе Λ , интегрируя по p^μ только при $p^2 < \Lambda^2$, поскольку это эквивалентно введению в электронный пропагатор ступенчатой функции $\theta(\Lambda^2 - p^2)$, а тождество Уорда (10.4.25) показывает, что для сохранения калибровочной инвариантности любая модификация электронного пропагатора должна сопровождаться модификацией электрон-фотонной вершины. На самом деле, при обычном Λ -обрезании радиационные поправки будут индуцировать массу фотона, что явно нарушает калибровочную инвариантность**.

Практика показала, что самым удобным способом регуляризации расходящихся интегралов, не нарушающим калибровочной инвариантности, является техника размерной регуляризации, предложенная в 1972 году 'т Хофтом и Вельтманом³ и основанная на аналитическом продолжении по размерности пространства-времени от четырех к произвольному числу d . Она состоит в усреднении по

* Первое соглашение относится к так называемому евклидовому развороту (аналог виковского поворота). Именно, $\Pi_{1\text{ПЕТЛ}}^*$ допускает аналитическое продолжение по q^0 в евклидову область $q^0 = iq^4$. По модулю кинематических множителей (см. ниже формулу (11.2.16)) $\Pi_{1\text{ПЕТЛ}}^*$ (точнее функция π) является аналитической функцией $-q^2$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной полуоси $-q^2 \geq 4m^2$. В тексте рассматривается область $-q^2 > 4m^2$. При $-q^2 > 4m^2$ физическому значению функции π отвечает ее граничное значение сверху на этой полуоси. — *Прим. ред.*

** Именно, поперечность $\Pi_{\mu\nu}^*$, имея в виду, что $\Pi_{\mu\nu}$ не имеет полюсов при $q^2 = 0$ (см. гл. 10, раздел 5). — *Прим. ред.*

угловым переменным в интегралах типа (11.2.7), что сводится к отбрасыванию всех слагаемых, нечетных по p , и замене слагаемых, содержащих четное число множителей p , по правилу *

$$p^\mu p^\nu \rightarrow p^2 \eta^{\mu\nu} / d, \quad (11.2.8)$$

$$p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma \rightarrow (p^2)^2 [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}] / d(d+2). \quad (11.2.9)$$

Далее, после того как подынтегральное выражение с помощью указанной процедуры запишется как функция только p^2 , следует заменить элемент объема $d^4 p_E$ на $\Omega_d \kappa^{d-1} d\kappa$, где $\kappa \equiv \sqrt{p^2}$, а Ω_d — площадь сферы единичного радиуса в d измерениях:

$$\Omega_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2). \quad (11.2.10)$$

После этого интеграл (11.2.7) становится сходящимся в случае комплексной размерности пространства-времени d . Можно продолжить интеграл от комплексных значений d к $d = 4$, и тогда бесконечности проявятся как множители $(d - 4)^{-1}$.

Применяя метод размерной регуляризации к интегралу (11.2.7), получаем:

$$\begin{aligned} \Pi_{1\text{LOOP}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{4e^2 \Omega_d}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^\infty \kappa^{d-1} d\kappa \left[\kappa^2 + m^2 + q^2 x(1-x) \right]^{-2} \\ &\quad \times \left[\frac{-2\kappa^2}{d} \eta^{\rho\sigma} + 2q^\rho q^\sigma x(1-x) + (\kappa^2 - q^2 x(1-x)) \eta^{\rho\sigma} + m^2 \eta^{\rho\sigma} \right]. \end{aligned}$$

Интегралы по κ можно вычислить для любого комплексного d (или для любого действительного d , не равного целому четному числу) **.

* Проще всего вывести эти формулы, заметив, что их вид диктуется лоренц-инвариантностью и симметрией по индексам μ , ν , ρ и т. д. Коэффициенты можно найти, требуя, чтобы правая и левая части давали одинаковый результат после свертки с η .

** Строго говоря, этот интеграл определен при $1 < \text{Re} d < 4$, а при прочих d он определен аналитическим продолжением. — *Прим. ред.*

Воспользуемся хорошо известными формулами (в более общем виде они даны в Приложении к этой главе):

$$\int_0^{\infty} \kappa^{d-1} [\kappa^2 + v^2]^{-2} d\kappa = \frac{1}{2} (v^2)^{\frac{d}{2}-2} \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2), \quad (11.2.11)$$

$$\int_0^{\infty} \kappa^{d+1} [\kappa^2 + v^2]^{-2} d\kappa = \frac{1}{2} (v^2)^{\frac{d}{2}-2} \Gamma(1+d/2) \Gamma(1-d/2), \quad (11.2.12)$$

тогда

$$\begin{aligned} \Pi_{1\text{LOOP}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{2e^2 \Omega_d}{(2\pi)^4} \\ &\times \int_0^1 dx \left[(1-2/d) \eta^{\rho\sigma} (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-1} \Gamma(1+d/2) \Gamma(1-d/2) \right. \\ &+ (2q^\rho q^\sigma x(1-x) - q^2 \eta^{\rho\sigma} x(1-x) + m^2 \eta^{\rho\sigma}) (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \\ &\left. \times \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2) \right]. \end{aligned}$$

Два слагаемых в подынтегральном выражении можно объединить, если учесть соотношение

$$(1-2/d) \Gamma(1+d/2) \Gamma(1-d/2) = -\Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2).$$

В результате

$$\begin{aligned} \Pi_{1\text{LOOP}}^{*\rho\sigma}(q) &= \frac{4e^2 \Omega_d}{(2\pi)^4} \Gamma(d/2) \Gamma(2-d/2) (q^\rho q^\sigma - q^2 \eta^{\rho\sigma}) \\ &\times \int_0^1 dx x(1-x) (m^2 + q^2 x(1-x))^{d/2-2}. \quad (11.2.13) \end{aligned}$$

Очень важно то, что найденный вклад в $\Pi^{*\rho\sigma}$ удовлетворяет соотношению

$$q_\rho \Pi_{1\text{LOOP}}^{*\rho\sigma}(q) = 0, \quad (11.2.14)$$

полученному в разделе 10.5 на основании сохранения и нейтральности электрического тока. Именно ради достижения этого результата мы и применили схему размерной регуляризации. Причина, по которой размерная регуляризация приводит к такому результату, заключается в независимости закона сохранения тока от размерности пространства–времени.

Гамма-функция $\Gamma(2 - d/2)$ в (11.2.13) неограниченно растет при $d \rightarrow 4$. К счастью, как мы видели в разделе 11.1, существует другое слагаемое, возникающее от слагаемого $-\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ в лагранжиане взаимодействия, которое необходимо добавить к $\Pi^{*\rho\sigma}(q)$. Структура этого слагаемого аналогична (11.2.13):

$$\Pi_{g_2}^{*\rho\sigma}(q) = -(Z_3 - 1)(q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma), \quad (11.2.15)$$

так что в порядке e^2 суммарная величина Π^* имеет вид

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2), \quad (11.2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \pi(q^2) = & -\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4} \Gamma(d/2)\Gamma(2 - d/2) \\ & \times \int_0^1 dx x(1-x) (m^2 + q^2x(1-x))^{d/2-2} - (Z_3 - 1). \end{aligned} \quad (11.2.17)$$

Как мы видели в разделе 10.5, определение перенормированного электромагнитного поля требует, чтобы $\pi(0) = 0$ (для того, чтобы вычет в полюсе точного фотонного пропагатора при $q^2 = 0$ был бы таким же, как и для голого пропагатора, если не считать слагаемых, зависящих от калибровки). Поэтому в порядке e^2

$$Z_3 = 1 - \frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4} \Gamma(d/2)\Gamma(2 - d/2)(m^2)^{\frac{d}{2}-2} \int_0^1 x(1-x) dx, \quad (11.2.18)$$

так что в этом же порядке

$$\begin{aligned} \pi(q^2) = & -\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4} \Gamma(d/2)\Gamma(2-d/2) \int_0^1 x(1-x) dx \\ & \times \left[(m^2 + q^2x(1-x))^{d/2-2} - (m^2)^{d/2-2} \right]. \end{aligned} \quad (11.2.19)$$

Теперь можно снять регуляризацию, разрешив d принять его физическое значение $d = 4$. Выше отмечено, что однопетлевой вклад содержит бесконечность, возникающую из-за поведения гамма-функции в этом пределе:

$$\Gamma(2-d/2) \rightarrow \frac{1}{(2-d/2)} - \gamma,$$

где $\gamma = 0,5772157$ — постоянная Эйлера. Бесконечная часть $Z_3 - 1$ получается, если заменить $\Gamma(2-d/2)$ на $1/(2-d/2)$ и во всех остальных местах положить $d = 4$:

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{4e^2 \cdot 2\pi^2}{6(2\pi)^4} \frac{1}{2-d/2} = \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{d-4}. \quad (11.2.20)$$

В т. II мы увидим, что этот результат можно использовать для нахождения главного члена в уравнении ренормгруппы для заряда электрона.

Очевидно, что полюсы при $d = 4$ в $\pi(q^2)$ сокращаются, так как в этом случае выражения $[m^2 + q^2x(1-x)]^{d/2-2}$ и $(m^2)^{d/2-2}$ имеют одинаковый предел, равный единице. По этой же причине слагаемое $-\gamma$ в $\Gamma(2-d/2)$ сокращается в полном выражении для $\pi(q^2)$, хотя оно и вносит конечный вклад в $Z_3 - 1$. Есть и другие конечные вклады в $Z_3 - 1$, возникающие от произведения полюса в $\Gamma(2-d/2)$ и линейных слагаемых в разложении $\Omega_d \Gamma(d/2)$ в окрестности $d = 4$, но и они сокращаются в полном $\pi(q^2)$. В действительности, проводя размерную регуляризацию, можно было бы заменить $(2\pi)^{-4}$ на $(2\pi)^{-d}$, а $\text{Tr } 1 = 4$ — на размерность $2^{d/2}$ гамма-матриц в пространстве-времени с произвольной четной размерностью d . Однако все это дало бы вклад только в конечную часть $Z_3 - 1$, но не в $\pi(q^2)$. Далее, нельзя считать e^2 независимым от d , поскольку из формулы (11.2.13) вытекает, что квадрат заряда имеет зависящую от d размерность $[\text{масса}]^{4-d}$. Если положить $e^2 \propto \mu^{4-d}$, где μ — некая величина размерности

массы, то в $Z_3 - 1$ появятся дополнительные конечные слагаемые, возникающие от произведения полюса в $\Gamma(2 - d/2)$ и слагаемого $(4-d) \ln \mu$ в разложении μ^{4-d} по степеням $(4-d)$. Однако и они сокращаются с аналогичными слагаемыми в однопетлевом вкладе в $\pi(q^2)$.

Единственные слагаемые, реально дающие вклад в $\pi(q^2)$ в пределе $d \rightarrow 4$, возникают от произведения полюса в $\Gamma(2-d/2)$ и линейных слагаемых в разложении $[m^2 + q^2 x(1-x)]^{d/2-2}$ и $(m^2)^{d/2-2}$ по степеням $d-4$:

$$(m^2 + q^2 x(1-x))^{d/2-2} - (m^2)^{d/2-2} \rightarrow (d/2-2) \ln \left(1 + \frac{q^2 x(1-x)}{m^2} \right). \quad (11.2.21)$$

В результате приходим к выражению

$$\pi(q^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1-x) \ln \left(1 + \frac{q^2 x(1-x)}{m^2} \right) dx. \quad (11.2.22)$$

Физический смысл поляризации вакуума раскрывается, если рассмотреть влияние этого эффекта на рассеяние двух заряженных частиц спина $1/2$. Фейнмановские диаграммы на рис. 11.3 дают следующие вклады в матричный элемент рассеяния:

$$\begin{aligned} S_a(1,2 \rightarrow 1',2') &= (2\pi)^{-12/2} \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \left[e_1 (2\pi)^4 \bar{u}_1 \gamma^\mu u_1 \right] \\ &\times \left[-i(2\pi)^{-4} \frac{1}{q^2} \right] \cdot \left[e_1 (2\pi)^4 \bar{u}_2 \gamma_\mu u_2 \right], \\ S_b(1,2 \rightarrow 1',2') &= (2\pi)^{-12/2} \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \left[e_2 (2\pi)^4 \bar{u}_1 \gamma^\mu u_1 \right] \\ &\times \left[-i(2\pi)^{-4} \frac{1}{q^2} \right]^2 \cdot \left[i(2\pi)^4 (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \pi(q^2) \right] \left[e_2 (2\pi)^4 \bar{u}_2 \gamma^\nu u_2 \right], \end{aligned}$$

где e_1 и e_2 — заряды рассеивающихся частиц, $\pi(q^2)$ вычисляется по формуле (11.2.22), причем в качестве e следует взять заряд частицы, которой отвечают линии, образующие петлю на рис. 11.3, q^μ — передаваемый импульс, $q \equiv p_1 - p_{1'} = p_{2'} - p_2$. С учетом закона сохранения $q_\mu \bar{u}_1 \gamma^\mu u_1 = 0$ обе диаграммы совместно приводят к выражению для элемента S -матрицы:

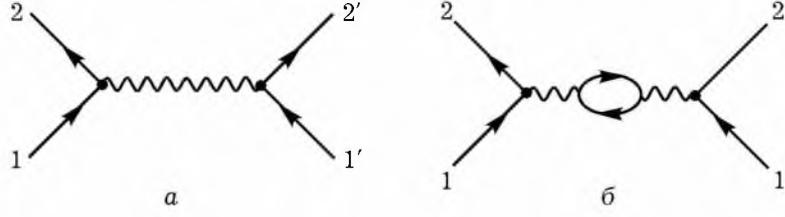


Рис. 11.3. Две диаграммы рассеяния заряженных частиц. Линии со стрелками отвечают заряженным частицам, волнистые линии — фотонам. Диаграмма б является поправкой низшего порядка, учитывающей эффект поляризации вакуума, к древесной диаграмме а

$$S_{a+b}(1,2 \rightarrow 1',2') = \frac{-ie_1 e_2}{4\pi^2 q^2} [1 + \pi(q^2)] \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \times [\bar{u}_1 \gamma^\mu u_1] \cdot [\bar{u}_2 \gamma_\mu u_2]. \quad (11.2.23)$$

В нерелятивистском пределе $\bar{u}_1 \gamma^0 u_1 \simeq -i \delta_{\sigma_1' \sigma_1}$, а $\bar{u}_1 \gamma^i u_1 \simeq 0$ (аналогично для частицы 2). Кроме того, в этом пределе можно пренебречь q^0 по сравнению с $|\mathbf{q}|$. Тогда формула (11.2.23) принимает вид

$$S_{a+b}(1,2 \rightarrow 1',2') = \frac{-ie_1 e_2}{4\pi^2 \mathbf{q}^2} [1 + \pi(\mathbf{q}^2)] \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \delta_{\sigma_1' \sigma_1} \delta_{\sigma_2' \sigma_2}. \quad (11.2.24)$$

Это выражение можно сравнить с борновским приближением для матричного элемента рассеяния на локальном, не зависящем от спина центральном потенциале $V(r)$:

$$S_{\text{Борн}}(1,2 \rightarrow 1',2') = -2\pi i \delta(E_{1'} + E_{2'} - E_1 - E_2) T_{\text{Борн}}(1,2 \rightarrow 1',2'). \quad (11.2.25)$$

$$T_{\text{Борн}}(1,2 \rightarrow 1',2') = \delta_{\sigma_1' \sigma_1} \delta_{\sigma_2' \sigma_2} \int d^3 x_1 \int d^3 x_2 V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \times (2\pi)^{-12/2} e^{-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2}. \quad (11.2.26)$$

Полагая $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{r}$, получаем

$$S_{\text{Борн}} = \frac{-i}{4\pi^2} \delta^4(p_{1'} + p_{2'} - p_1 - p_2) \delta_{\sigma_1' \sigma_1} \delta_{\sigma_2' \sigma_2} \int d^3 r V(r) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (11.2.27)$$

Сравнение этой формулы с формулой (11.2.23) показывает, что в нерелятивистском пределе диаграммы рис. 11.3 приводят к такому же матричному элементу рассеяния, что и потенциал $V(r)$, такой, что

$$\int d^3r V(r) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = e_1 e_2 \frac{1 + \pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}$$

или, обращая фурье-преобразование,

$$V(r) = e_1 e_2 \int d^3q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left[\frac{1 + \pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2} \right]. \quad (11.2.28)$$

В первом порядке по радиационным поправкам * выражение (11.2.28) определяет ту же потенциальную энергию, что и энергия электростатического взаимодействия двух пространственных распределений зарядов $e_1\eta(\mathbf{x})$ и $e_2\eta(\mathbf{y})$ на расстоянии \mathbf{r} :

$$V(|\mathbf{r}|) = e_1 e_2 \int d^3x \int d^3y \frac{\eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{r}|}, \quad (11.2.29)$$

где

$$\eta(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3q \pi(\mathbf{q}^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (11.2.30)$$

Заметим, что

$$\int d^3r \eta(\mathbf{r}) = 1 + \frac{1}{2} \pi(0) = 1, \quad (11.2.31)$$

так что полные заряды частиц 1 и 2, определяемые по (кулоновской) асимптотике потенциала $V(r)$ на больших расстояниях, — это те же константы e_1 и e_2 , которые определяют взаимодействия перенормированного электрического поля.

При $|\mathbf{r}| \neq 0$ интеграл (11.2.30) можно вычислить с помощью контурного интегрирования:

* Т. е. по параметру e^2 . — Прим. ред.

$$\eta(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{8\pi^3 r^3} \int_0^1 x(1-x) dx \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}} \right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right).$$

Это выражение везде отрицательно. Однако мы видели, что интеграл от $\eta(\mathbf{r})$ по всем \mathbf{r} равен +1. Поэтому функция $\eta(\mathbf{r})$ должна содержать слагаемое $(1+L)\delta^3(\mathbf{r})$, которое сингулярно при $\mathbf{r} = 0$, а L выбрано так, чтобы удовлетворить соотношению (11.2.31):

$$L = \frac{e^2}{8\pi^3} \int \frac{d^3r}{r^3} \int_0^1 x(1-x) dx \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}} \right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right). \quad (11.2.32)$$

Соответственно полное выражение для плотности распределения заряда имеет вид:

$$\eta(\mathbf{r}) = (1+L)\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{8\pi^3 r^3} \int_0^1 x(1-x) dx \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}} \right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right). \quad (11.2.33)$$

Физическая интерпретация этого результата заключается в том, что голый точечный заряд притягивает из вакуума частицы с противоположным зарядом и отталкивает на бесконечность соответствующие античастицы, так что голый заряд частично экранируется. В результате перенормированный заряд становится в $1/(1+L)$ раз меньше. В качестве проверки заметим, что если обрезать расходящийся интеграл (11.2.32), полагая, что он берется только по области $r \geq a$, то расходящаяся при $a \rightarrow 0$ часть интеграла равна

$$L_\infty = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln a^{-1}. \quad (11.2.34)$$

Следовательно, если отождествить обрезание Λ в импульсном пространстве * с a^{-1} , то расходящаяся часть в L окажется связанной с расходящейся частью $Z_3 - 1$ соотношением

* Коротко его называют импульсом обрезания. — Прим. ред.

$$(Z_3 - 1)_\infty = -2L_\infty, \quad (11.2.35)$$

поскольку в порядке e^2 перенормированный заряд (10.4.18) дается выражением

$$e_l = Z_3^{1/2} e_{\text{ВЛ}} \cong \left(1 + \frac{1}{2}(Z_3 - 1)\right) e_{\text{ВЛ}} \cong (1 + L)^{-1} e_{\text{ВЛ}}. \quad (11.2.36)$$

Формула (11.2.35) подтверждается ниже.

Поляризация вакуума оказывает заметное влияние на энергетические уровни мюонных атомов. Как будет показано в гл. 14, диаграмма рис. 11.3, б приводит к сдвигу энергии атомного состояния с волновой функцией $\Psi(\mathbf{r})$ на величину

$$\Delta E = \int d^3r \Delta V(\mathbf{r}) |\Psi(\mathbf{r})|^2, \quad (11.2.37)$$

где $\Delta V(\mathbf{r})$ — добавочное к кулоновскому слагаемое в потенциале (11.2.28):

$$\Delta V(\mathbf{r}) = \frac{e_1 e_2}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left[\frac{\pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2} \right]. \quad (11.2.38)$$

При $r \gg m^{-1}$ эта добавка экспоненциально уменьшается. С другой стороны, волновая функция электронов в обычных атомах в общем случае сосредоточена в значительно большей области радиусом $a \gg m^{-1}$. Например, для орбит электронов вокруг ядра зарядом Ze в водородоподобном атоме $a = 137/(Zm)$ (здесь $m = m_e$). Поэтому сдвиг энергетического уровня будет зависеть только от поведения волновой функции в области $r \ll a$. Если орбитальный момент равен l , волновая функция ведет себя как r^l при $r \ll a$, так что из (11.2.37) находим, что ΔE пропорционально множителю $(ma)^{-(2l+3)}$. Отсюда эффект поляризации вакуума для случая $l = 0$ много больше, чем для более высоких угловых моментов. При $l = 0$ волновая функция приблизительно постоянна и равна $\Psi(0)$ для r , меньших или порядка m^{-1} , так что формула (11.2.37) принимает вид

$$\Delta E = |\Psi(0)|^2 \int d^3r \Delta V(\mathbf{r}). \quad (11.2.39)$$

С учетом формул (11.2.38) и (11.2.22) интеграл от добавки к потенциалу (при $e_1 e_2 = -Ze^2$) имеет вид:

$$\int d^3r \Delta V(\mathbf{r}) = -Ze^2 \pi'(0) = -\frac{4Z\alpha^2}{15m^2}. \quad (11.2.40)$$

Кроме того, для состояний водородоподобного атома с $l = 0$ и главным квантовым числом n волновая функция в начале координат принимает значение

$$\psi(0) = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z\alpha m}{n} \right)^{3/2}. \quad (11.2.41)$$

Поэтому энергетический сдвиг (11.2.39) оказывается равным

$$\Delta E = -\frac{4Z^4\alpha^5 m}{15\pi n^3}. \quad (11.2.42)$$

Например, для $2s$ состояния атома водорода этот сдвиг равен $-1,222 \cdot 10^{-7}$ эВ, что соответствует сдвигу частоты $\Delta E/2\pi\hbar$, равному $-37,13$ МГц. Иногда этот эффект называют эффектом Юлинга⁴. Как обсуждалось в гл. 1, эти ничтожные сдвиги энергии оказались возможным измерить, поскольку в отсутствие разных радиационных поправок чисто дираковская теория предсказывает полное вырождение $2s$ и $2p$ состояний атома водорода. В гл. 14 будет показано, что основная часть «лэмбовского сдвига» между $2s$ и $2p$ состояниями, равная $+1058$ МГц, обусловлена другими радиационными поправками, но согласие между теорией и экспериментом достаточно для того, чтобы убедиться в наличии сдвига $-37,13$ МГц, обязанного поляризации вакуума.

Хотя в обычных атомах поляризация вакуума определяет лишь малую часть радиационных поправок, она становится определяющей в радиационных поправках для мюонных атомов, в которых вместо электрона на орбите находится мюон. Это происходит потому, что по размерным соображениям большинство радиационных поправок приводит к энергетическим сдвигам уровней мюонных атомов, которые пропорциональны m_μ , в то время как суммарная энергия поляризации вакуума $\int d^3r \Delta V$ за счет *электронной* петли остается пропорциональной m_e^{-2} , как в формуле (11.2.40), что приво-

дит к сдвигу энергетического уровня на величину $m_\mu^3 m_e^{-2} = (210)^2 m_\mu$. Однако в этом случае радиус мюонной орбиты ненамного больше комптоновской длины волны электрона, так что приближенный результат (11.2.39) дает лишь порядок величины сдвига энергии за счет поляризации вакуума.

* * *

Имея в виду сравнение с последующими вычислениями, заметим, что если обрезать интеграл (11.2.7) на $k = \Lambda$, то вместо (11.2.20) мы придем к интегралу вида

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2} \int_\mu^\Lambda k^{d-5} dk = \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{\mu^{d-4} - \Lambda^{d-4}}{d-4}.$$

где μ – эффективное инфракрасное обрезание порядка массы заряженной частицы в петле на рис. 11.1. (Простейший способ определения постоянного множителя в этом выражении состоит в требовании, чтобы его предел при $d < 3$ и $\Lambda \rightarrow \infty$ совпадал с (11.2.20).) Введя такое обрезание, можно перейти к пределу $d \rightarrow 4$, получая при этом

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2} \ln(\Lambda/\mu). \quad (11.2.43)$$

11.3 Аномальные магнитные моменты и зарядовые радиусы

В качестве следующего примера вычислим изменение магнитного момента и зарядового радиуса электрона или мюона за счет радиационных поправок низшего порядка. Однопетлевые диаграммы и диаграмма перенормировки фотон-лептонной вершины показаны на рис. 11.4. Как обсуждалось в разделе 10.3, те из этих диаграмм, которые содержат вставки во внешние входящие или выходящие лептонные линии, обращаются в нуль, поскольку лептон находится на массовой поверхности. Диаграмма, содержащая вставку во внешнюю фотонную линию, описывает обсуждавшийся

в предыдущем разделе эффект поляризации вакуума. Таким образом, надлежит вычислить единственную однопетлевую диаграмму (последнюю на рис. 11.4):

$$\Gamma_{1\text{LOOP}}^\mu(p', p) = \int d^4k \left[e\gamma^\rho (2\pi)^4 \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\not{p}' - \not{k}) + m}{(p' - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[\gamma^\mu \right] \times \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\not{p} - \not{k}) + m}{(p - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \right] \left[e\gamma_\rho (2\pi)^4 \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \right], \quad (11.3.1)$$

где p' и p — 4-импульсы конечного и начального лептонов, соответственно. (Вклад от вершины, связывающей внешнюю фотонную линию с внутренними электронными линиями, берется равным γ^μ , т. к. множитель $e(2\pi)^4$ был включен в определение Γ^μ .)

Выписанный интеграл очевидно содержит ультрафиолетовую расходимость типа $\int d^4k/(k^2)^2$. В отличие от поляризации вакуума, здесь не нужно прибегать к специальным процедурам типа размерной регуляризации, чтобы сохранить требуемую калибровоч-

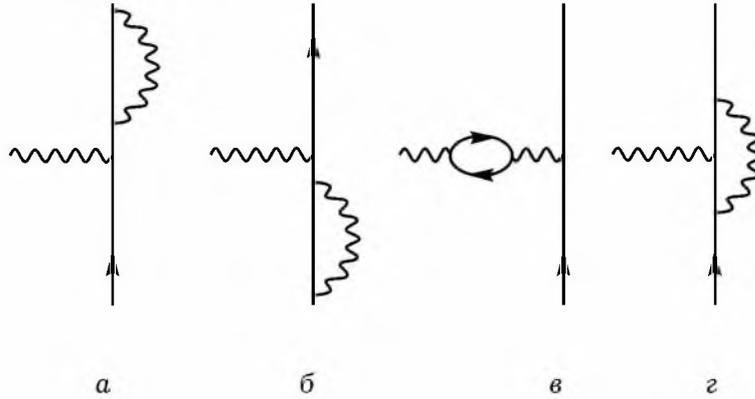


Рис. 11.4. Однопетлевые диаграммы для фотон-лептонной вершинной функции Γ^μ . Волнистые линии изображают фотоны, остальные линии — электроны или мюоны. Диаграммы а и б сокращаются вкладом контрчленов перенормировки лептонного поля, диаграмма в происходит от поляризации вакуума, вычисленной в разделе 11.2, вклад диаграммы г вычисляется в разделе 11.3

ной инвариантностью структуру, поскольку фотон – нейтральная частица. Поэтому интеграл можно сделать конечным подходящей модификацией фотонного пропагатора (например, путем включения множителя $M^2/(k^2 + M^2)$ с большой регуляри-зующей массой M), не вводя для сохранения калибровочной инвариантности никаких других изменений. Более того, мы увидим, что аномальный магнитный момент и зарядовые радиусы можно вычислить, вообще не учитывая ультрафиолетовые расходимости. В последующем изложении оставим все интегралы для вершинной функции в их расходящейся форме, понимая при этом, что при необходимости любой расходящийся интеграл можно выразить через регуляри-зующую массу M .

Начнем с объединения знаменателей, используя описанную в Приложении к этой главе расширенную версию формулы Фейнмана:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [Ay + B(x - y) + C(1 - x)]^{-3}. \quad (11.3.2)$$

Применяя ее к знаменателям в формуле (11.3.1), находим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p' - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[((p' - k)^2 + m^2 - i\epsilon)y + ((p - k)^2 + m^2 - i\epsilon)(x - y) \right. \\ & \quad \left. + (k^2 - i\epsilon)(1 - x) \right]^{-3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[(k - p'y - p(x - y))^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x - y) - i\epsilon \right]^{-3}, \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

где $q = p - p'$ — переданный фотону импульс. После сдвига переменной интегрирования

$$k \rightarrow k + p'y + p(x - y)$$

интеграл (11.3.1) принимает вид

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1\text{LOOP}}^\mu(p', p) &= \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^4k}{[k^2 + m^2x^2 + q^2y(x-y) - i\epsilon]^3} \\
&\times \gamma^\rho [-i(p'(1-y) - k - p(x-y)) + m] \gamma^\mu \\
&\times [-i(p(1-x+y) - k - p'y) + m] \gamma_\rho. \tag{11.3.4}
\end{aligned}$$

Следующий шаг — виковский поворот. Как объяснено в предыдущем разделе, добавка $-i\epsilon$ в знаменателе диктует необходимость поворота контура интегрирования по k^0 в сторону мнимой оси против часовой стрелки, так что интеграл по k^0 от $-\infty$ до $+\infty$ заменяется интегралом по мнимым значениям от $-i\infty$ до $+i\infty$, или, эквивалентно, по действительным значениям величины $k^4 \equiv -ik^0$ от $-\infty$ до $+\infty$. Воспользуемся также вращательной симметрией знаменателя в (11.3.4), что позволяет отбросить в числителе слагаемые нечетной степени по k , заменить $k^\lambda k^\sigma$ на $\eta^{\lambda\sigma} k^2/4$ и заменить элемент объема $d^4k = idk^1 dk^2 dk^3 dk^4$ на $2i\pi^2 \kappa^3 d\kappa$, где κ — евклидова длина 4-вектора k . После всех этих действий формула (11.3.4) принимает вид

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1\text{LOOP}}^\mu(p', p) &= \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \left\{ -\kappa^2 \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma_\rho / 4 \right. \\
&+ \gamma^\rho [-i(p'(1-y) - p(x-y) + m)] \gamma^\mu [-i(p(1-x+y) - p'y) + m] \gamma_\rho \left. \right\} \\
&\times [\kappa^2 + m^2x^2 + q^2y(x-y)]^{-3}. \tag{11.3.5}
\end{aligned}$$

Нас интересует только матричный элемент $\bar{u}' \Gamma^\mu u$ вершинной функции между дираковскими спинорами, удовлетворяющими соотношениям

$$\bar{u}'[i\not{p}' + m] = 0, \quad [i\not{p} + m]u = 0.$$

Поэтому можно упростить выражение (11.3.5), переместив с помощью соотношений антикоммутации дираковских матриц все множители \not{p}' налево и все множители \not{p} направо, и заменив их после этого на im . После прямого, но утомительного вычисления можно привести выражение (11.3.5) к виду

$$\begin{aligned}
\bar{u}'\Gamma_{1\text{LOOP}}^\mu(p', p)u &= \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \\
&\bar{u}' \left\{ \gamma^\mu \left[-\kappa^2 + 2m^2(x^2 - 4x + 2) + 2q^2(y(x-y) + 1 - x) \right] \right. \\
&+ 4im p'^\mu (y - x + xy) + 4im p^\mu (x^2 - xy - y) \left. \right\} u \\
&\times \left[\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x-y) \right]^{-3}.
\end{aligned} \tag{11.3.6}$$

Воспользуемся теперь симметрией последнего множителя в подынтегральном выражении относительно отражения $y \rightarrow x - y$. В результате такого отражения функции $y - x + xy$ и $x^2 - xy - y$, на которые умножаются p'^μ и p^μ соответственно, меняются местами, поэтому их можно заменить на среднее

$$\frac{1}{2}(y - x + xy) + \frac{1}{2}(x^2 - xy - y) = -\frac{1}{2}x(1 - x).$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\bar{u}'\Gamma_{1\text{LOOP}}^\mu(p', p)u &= \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \\
&\times \bar{u}' \left\{ \gamma^\mu \left[-\kappa^2 + 2m^2(x^2 - 4x + 2) + 2q^2(y(x-y) + 1 - x) \right] \right. \\
&\left. - 2im(p'^\mu + p^\mu)x(1 - x) \right\} u \left[\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x-y) \right]^{-3}.
\end{aligned} \tag{11.3.7}$$

Заметим, что теперь p^μ и p'^μ входят только в комбинации $p^\mu + p'^\mu$, как и требуется сохранением тока.

Необходимо принять во внимание и другие диаграммы. Конечно, в Γ^μ есть вклад нулевого порядка γ^μ . Слагаемое, пропорциональное $(Z_2 - 1)$, в контрчленах (11.1.9) дает в Γ^μ вклад

$$\Gamma_{L_2}^\mu = (Z_2 - 1)\gamma^\mu. \tag{11.3.8}$$

Кроме того, поправка во внешний фотонный пропагатор дает слагаемое

$$\Gamma_{\text{поляриз. вак.}}^{\mu}(p', p) = \frac{1}{(p' - p)^2 - i\epsilon} \Pi^{\mu\nu}(p' - p) \gamma_{\nu}. \quad (11.3.9)$$

Форма каждого из этих слагаемых находится в согласии с общим результатом (10.6.10) (с $H(q^2) = 0$):

$$\bar{u}' \Gamma^{\mu}(p', p) u = \bar{u}' \left[\gamma^{\mu} F(q^2) - \frac{i}{2m} (p + p')^{\mu} G(q^2) \right] u. \quad (11.3.10)$$

В порядке e^2 форм-факторы имеют вид:

$$F(q^2) = Z_2 + \pi(q^2) + \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\infty} \kappa^3 d\kappa \times \frac{[\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2) - 2q^2(y(x - y) + 1 - x)]}{[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2y(x - y)]^3}, \quad (11.3.11)$$

$$G(q^2) = \frac{-4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\infty} \frac{4m^2 x(1 - x) \kappa^3 d\kappa}{[\kappa^2 + m^2x^2 + q^2y(x - y)]^3} \quad (11.3.12)$$

где $\pi(q^2)$ – функция поляризации вакуума (11.2.22).

Интеграл, определяющий форм-фактор $G(q^2)$, конечен и равен

$$G(q^2) = \frac{-e^2 m^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{x(1 - x)}{m^2x^2 + q^2y(x - y)}. \quad (11.3.13)$$

Это позволяет сразу вычислить аномальный магнитный момент. Как отмечалось в разделе 10.6, в магнитный момент дает вклад только слагаемое, пропорциональное γ^{μ} , так что результатом радиационных поправок является умножение дираковского значения магнитного момента $e/2m$ на $F(0)$. Однако определение e как истинного заряда лептона требует, чтобы

$$F(0) + G(0) = 1, \quad (11.3.14)$$

так что магнитный момент можно записать в виде

$$\mu = \frac{e}{2m}(1 - G(0)). \quad (11.3.15)$$

Из (11.3.13) находим, что

$$-G(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = 0,001161. \quad (11.3.16)$$

Это знаменитая поправка $\alpha/2\pi$, впервые вычисленная Швингером⁵.

Конечно, это лишь первая низшая радиационная поправка к магнитному моменту. Уже в следующем, четвертом порядке по e количество слагаемых столь велико, что вычисления становятся довольно сложными. Однако из-за большой величины отношения масс мюона и электрона, существует одна поправка четвертого порядка к магнитному моменту мюона, которая несколько больше всех остальных. Она возникает от включения *электронной* петли в линию виртуального фотона в диаграмме второго порядка (см. рис. 11.5). Включение этой петли приводит к замене фотонного пропагатора $1/k^2$ в (11.3.1) на $(1 + \pi_e(k^2))/k^2$, где $\pi_e(k^2)$ дается формулой (11.2.22), а масса m полагается равной массе *электрона*:

$$\pi_e(k^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1-x) \ln\left(1 + \frac{k^2 x(1-x)}{m_e^2}\right) dx.$$

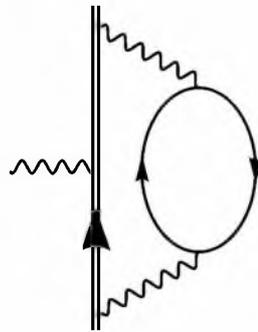


Рис. 11.5. Двухпетлевая диаграмма для магнитного момента мюона. Жирная прямая линия изображает мюон, тонкая волнистая — фотон, остальные тонкие линии — электроны. Эта диаграмма дает относительно большой вклад в четвертом порядке в гиромагнитное отношение для мюона, пропорциональный $\ln(m_\mu/m_e)$.

Анализ выражения (11.3.12) показывает, что при вычислении мюонного магнитного момента эффективное обрезание импульса виртуального фотона k равно m_μ . Отношение m_μ/m_e столь велико, что при k^2 порядка m_μ^2 можно приближенно записать

$$\pi_e(k^2) \cong \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1-x) dx \ln \left(\frac{m_\mu^2}{m_e^2} \right) = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{m_\mu^2}{m_e^2} \right), \quad (11.3.17)$$

где отброшенные слагаемые содержат вместо $\ln(m_\mu^2/m_e^2)$ коэффициенты порядка единицы. Полученное выражение есть константа, поэтому изменение в $-G(0)$, обусловленное добавлением электронной петли в виртуальную фотонную линию, определяется умножением предыдущего результата (11.3.16) для $-G(0)$ на фактор (11.3.17), так что

$$\mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu} \left(\frac{e^2}{8\pi^2} + \frac{e^4}{96\pi^2} \left[\ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + O(1) \right] \right). \quad (11.3.18)$$

(В т. II мы увидим, что это рассуждение есть упрощенная версия метода ренормгруппы.) Формулу (11.3.18) можно сравнить с точным результатом расчета до четвертого порядка включительно⁶:

$$\mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu} \left(\frac{e^2}{8\pi^2} + \frac{e^4}{96\pi^2} \left[\ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{25}{6} + \frac{197}{24} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{9\zeta(3)}{2} - 3\pi^2 \ln 2 + O\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) \right] \right). \quad (11.3.19)$$

Оказывается, что слагаемые порядка $O(1)$ вносят величину $-6,137$ в коэффициент при $e^4/96\pi^2$, что немногим меньше, чем $\ln(m_\mu^2/m_e^2) = 10,663$, так что приближение (11.3.18) определяет вклад четвертого порядка с точностью до множителя порядка 2. Точный результат четвертого порядка (11.3.19) приводит к значению $\mu_\mu = 1,00116546(e/2m_\mu)$, что можно сравнить с результатом расчета до второго порядка включительно $\mu_\mu = 1,001161(e/2m_\mu)$ и последним экспериментальным результатом⁷ $\mu_\mu = 1,001165923(e/2m_\mu)$.

Обратимся к другому форм-фактору. Интеграл в выражении (11.3.11) для $F(q^2)$ содержит ультрафиолетовую расходимость. Однако для того, чтобы удовлетворить условию неперенормировки заряда (11.3.14), необходимо, чтобы константа Z_2 имела значение

$$Z_2 = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} - \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \times \frac{\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2)}{[\kappa^2 + m^2 x^2]^3}. \quad (11.3.20)$$

(Напомним, что $\pi(0) = 0$.) Это выражение также расходится, причем расходящаяся часть имеет вид

$$(Z_2 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\kappa}{\kappa}. \quad (11.3.21)$$

Подставляя (11.3.20) обратно в (11.3.11), получаем

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^\infty \kappa^3 d\kappa \times \left\{ \frac{[\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2) - 2q^2(y(x - y) + 1 - x)]}{[\kappa^2 + m^2 x^2 + q^2 y(x - y)]^3} - \frac{[\kappa^2 - 2m^2(x^2 - 4x + 2)]}{[\kappa^2 + m^2 x^2]^3} \right\}. \quad (11.3.22)$$

Теперь интеграл по κ сходится:

$$F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \left\{ \frac{-m^2(x^2 - 4x + 2) - q^2[y(x - y) + 1 - x]}{m^2 x^2 + q^2 y(x - y)} + \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2} - \ln \left[\frac{m^2 x^2 + q^2 y(x - y)}{m^2 x^2} \right] \right\}. \quad (11.3.23)$$

Однако интеграл по x и y логарифмически расходится при $x = 0$ и $y = 0$, т. к. знаменатели содержат только слагаемые второго порядка по x и/или y , а в числителе есть слагаемые, содержащие только дифференциалы dx и dy . Можно проследить, что эта расходимость на самом деле возникает от обращения в нуль знаменателя $[k^2 + m^2x^2 + q^2y(x-y)]^3$ в (11.3.11) при $x = 0$, $y = 0$ и $k = 0$. Поскольку она происходит от области малых, а не больших k , ее называют не ультрафиолетовой, а *инфракрасной расходимостью* *.

Подробно инфракрасные расходимости будут рассмотрены в гл. 13. Там будет показано, что инфракрасные расходимости в сечении процессов типа электрон–электронного рассеяния, вроде тех, которые возникают из-за инфракрасной расходимости в электронном форм-факторе $F(q^2)$, сокращаются, если наряду с упругим рассеянием рассматривать и испускание фотонов низкой энергии. Кроме того, как будет показано в гл. 14, при расчете радиационных поправок к энергетическим уровням атомов инфракрасная расходимость в $F(q^2)$ обрезается за счет того, что связанный электрон не находится строго на массовой поверхности свободной частицы. В данный момент продолжим вычисления, просто введя некоторую фиктивную массу фотона μ для того, чтобы обрезать инфракрасную расходимость в $F(q^2)$, и оставим до гл. 14 обсуждение вопроса о том, как использовать полученный результат.

Если масса фотона равна μ , то знаменатель $k^2 - i\epsilon$ в формуле (11.3.1) следует заменить на $k^2 + \mu^2 - i\epsilon$. В результате в выражениях, стоящих в знаменателях формул (11.3.3)–(11.3.7), (11.3.11), (11.3.20) и (11.3.22) под знаком третьей степени, добавится слагаемое $\mu^2(1-x)$. Тогда формула (11.3.23) заменится на

$$\begin{aligned}
 F(q^2) = & 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\
 & \times \left\{ \frac{-m^2(x^2 - 4x + 2) - q^2[y(x-y) + 1 - x]}{m^2x^2 + q^2y(x-y) + \mu^2(1-x)} + \frac{m^2[x^2 - 4x + 2]}{m^2x^2 + \mu^2(1-x)} \right. \\
 & \left. - \ln \left[\frac{m^2x^2 + q^2y(x-y) + \mu^2(1-x)}{m^2x^2 + \mu^2(1-x)} \right] \right\}. \quad (11.3.24)
 \end{aligned}$$

* В отличие от ультрафиолетовой расходимости эта расходимость есть проявление особенности $\Gamma_\mu(p, p')$ как функции p и p' на массовой оболочке $p^2 = m^2$, $p'^2 = m^2$. — Прим. ред.

Теперь интеграл полностью сходится. Его можно выразить через функции Спенса, но получающийся результат не слишком прозрачен. Для целей гл. 14 будет достаточно вычислить поведение $F(q^2)$ при малых q^2 . Как уже известно, из тождества Уорда следует, что $F(0) = 1 - G(0) = 1 + e^2/8\pi^2$, так что рассмотрим первую производную $F'(q^2)$ в точке $q^2 = 0$. Как следует из (11.3.24), эта производная имеет вид

$$F'(0) = \pi'(0) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \left\{ -\frac{2y(x-y) + 1 - x}{m^2 x^2 + \mu^2(1-x)} + \frac{m^2[x^2 - 4x + 2]y(x-y)}{[m^2 x^2 + \mu^2(1-x)]^2} \right\}. \quad (11.3.25)$$

Вклад поляризации вакуума дается формулой (11.2.22) и равен

$$\pi'(0) = \frac{e^2}{60\pi^2 m^2}. \quad (11.3.26)$$

Опуская в (11.3.25) все слагаемые, пропорциональные степеням μ/m , получаем*

$$F'(0) = \frac{e^2}{24\pi^2 m^2} \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right], \quad (11.3.27)$$

где слагаемое $2/5$ отвечает вкладу поляризации вакуума. С другой стороны, из формулы (11.3.13) следует, что $G(q^2)$ имеет конечную производную при $q^2 = 0$

$$G'(0) = \frac{e^2}{48\pi^2 m^2}. \quad (11.3.28)$$

Полученные результаты удобнее всего выразить через зарядовый форм-фактор $F_1(q^2)$, определенный в альтернативном представлении (10.6.15) вершинной функции:

* Интеграл по y тривиален. Интеграл по x проще всего вычисляется в пределе $\mu \ll m$ путем разделения области интегрирования на две части: от 0 до s , где $\mu/m \ll s \ll 1$, и от s до 1.

$$\begin{aligned} & \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, \sigma) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{1}{2} i[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (p' - p)_\nu F_2(q^2) \right] u(\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (11.3.29)$$

Согласно формулам (1.6.17) и (10.6.18)

$$F_1(q^2) = F(q^2) + G(q^2). \quad (11.3.30)$$

При $|q^2| \ll m^2$ этот форм-фактор приближенно равен

$$F_1(q^2) \approx 1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \left(\frac{q^2}{m^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right]. \quad (11.3.31)$$

Его можно выразить через *зарядовый радиус* a , определенный поведением зарядового форм-фактора в пределе $q^2 \rightarrow 0$:

$$F_1(q^2) \rightarrow 1 - q^2 a^2 / 6. \quad (11.3.32)$$

(Такое определение мотивируется тем, что среднее значение $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$ по сферической оболочке радиуса a ведет себя при $\mathbf{q}^2 a^2 \ll 1$ как $1 - \mathbf{q}^2 a^2 / 6$.) Зарядовый радиус электрона равен

$$a^2 = - \frac{e^2}{4\pi^2 m^2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right]. \quad (11.3.33)$$

В гл. 14 мы увидим, что для электронов в атомах роль массы фотона играет эффективное инфракрасное обрезание, много меньшее m , так что логарифм в формуле (11.3.33) большой по величине и отрицательный, и значение a^2 положительно.

11.4. Собственная энергия электрона

Завершим эту главу вычислением собственно-энергетической функции электрона. Само по себе это вычисление не имеет прямых

экспериментальных приложений, однако некоторые результаты окажутся полезными в гл. 14 и т. II*.

Как и в разделе 10.3, определим $i(2\pi)^2[\Sigma^*(p)]_{\beta,\alpha}$ как сумму всех диаграмм с одной входящей и одной выходящей электронной линией, несущими импульсы p и дираковские индексы α и β , соответственно, причем звездочка указывает, что исключаются диаграммы, которые становятся несвязными после разрезания какой-то одной внутренней электронной линии, и отброшены пропагаторы, отвечающие двум внешним линиям. Тогда точный электронный пропагатор дается суммой

$$\begin{aligned} [-i(2\pi)^{-4}S'(p)] &= [-i(2\pi)^{-4}S(p)] \\ &+ [-i(2\pi)^{-4}S(p)][i(2\pi)^4\Sigma^*(p)][-i(2\pi)^{-4}S(p)] + \dots, \end{aligned} \quad (11.4.1)$$

где

$$S(p) \equiv \frac{-i\not{p} + m_e}{p^2 + m_e^2 - i\varepsilon}. \quad (11.4.2)$$

Сумма тривиально вычисляется, и в результате получаем:

$$S'(p) = [i\not{p} + m_e - \Sigma^*(p) - i\varepsilon]^{-1}. \quad (11.4.3)$$

В низшем порядке в Σ^* дает вклад однопетлевая диаграмма, изображенная на рис. 11.6. Этот вклад равен

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4 \Sigma_{1\text{LOOP}}^*(p) &= \int d^4k \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\rho\sigma}}{k^2 - i\varepsilon} \right] \\ &\times [(2\pi)^4 e\gamma^\rho] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i\not{p} + i\not{k} + m_e}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\varepsilon} \right] [(2\pi)^4 e\gamma^\sigma] \end{aligned}$$

или в более простой записи

* Заметим, что эту функцию называют также собственно-энергетической частью или массовым оператором электрона. — *Прим. ред.*

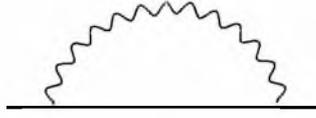


Рис. 11.6. Однопетлевая диаграмма для электронной собственно-энергетической функции. Как обычно, сплошная линия изображает электрон, волнистая — фотон.

$$\Sigma_{1\text{LOOP}}^*(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} \right] \left[\frac{\gamma^\rho(-i\not{p} + i\not{k} + m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right]. \quad (11.4.4)$$

(Это выражение записано в фейнмановской калибровке; амплитуды с заряженными частицами, находящимися вне массовой поверхности, калибровочно неинвариантны.) Для последующих вычислений лэмбовского сдвига удобно воспользоваться методом регуляризации, предложенным Паули и Вилларсом⁸. Заменим фотонный пропагатор $(k^2 - i\epsilon)^{-1}$ на

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon},$$

так что электронная собственно-энергетическая функция станет равной

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\text{LOOP}}^*(p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] \\ &\times \left[\frac{\gamma^\rho(-i\not{p} + i\not{k} + m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (11.4.5)$$

Позднее можно будет отбросить регуляризующее слагаемое, устремив регуляризующую массу μ к бесконечности. В гл. 14 нас будет также интересовать случай $\mu \ll m_e$.

Используем прием Фейнмана для объединения знаменателей и вспомним, что $\gamma^\rho\gamma^\kappa\gamma_\rho = -2\gamma^\kappa$, а $\gamma^\rho\gamma_\rho = 4$. Тогда

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\text{LOOP}}^*(p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k [2i(p-k) + 4m_e] \\ &\times \int_0^1 dx \left[\frac{1}{((k-px)^2 + p^2(1-x) + m_e^2x + \mu^2(1-x) - i\epsilon)^2} \right. \\ &\left. - \frac{1}{((k-px)^2 + p^2x(1-x) + m_e^2x + \mu^2(1-x) - i\epsilon)^2} \right]. \end{aligned} \quad (11.4.6)$$

Совершая сдвиг переменной интегрирования $k \rightarrow k + px$ и поворачивая контур интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\text{LOOP}}^*(p) &= \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [2i(1-x)p + 4m_e] \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \\ &\times \left[\frac{1}{(\kappa^2 + p^2x(1-x) + m_e^2x)^2} - \frac{1}{(\kappa^2 + p^2x(1-x) + m_e^2x + \mu^2(1-x))^2} \right]. \end{aligned}$$

Интеграл по κ тривиален:

(11.4.7)

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\text{LOOP}}^*(p) &= \frac{-\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [2i(1-x)p + 4m_e] \\ &\times \ln \left(\frac{p^2x(1-x) + m_e^2x + \mu^2(1-x)}{p^2x(1-x) + m_e^2x} \right). \end{aligned} \quad (11.4.8)$$

Контрчлены (11.1.9) также вносят вклад в Σ^* в виде перенормирующих слагаемых $-(Z_2 - 1)(i\mathbf{p} + m_e) + Z_2\delta m_e$, где Z_2 и δm_e определяются условием, что точный пропагатор $S'(p)$, рассматриваемый как функция $i\mathbf{p}$, должен иметь полюс при $i\mathbf{p} = -m_e$ с единичным вычетом. (В следующей главе мы увидим, что это условие делает Σ^* конечным при $\mu \rightarrow \infty$ во всех порядках по e .) В низшем порядке находим:

$$\begin{aligned} \delta m_e &= -\Sigma_{1\text{LOOP}}^*|_{i\mathbf{p}=-m_e} \\ &= \frac{2m_e\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{m_e^2x + \mu^2(1-x)}{m_e^2x} \right), \end{aligned} \quad (11.4.9)$$

$$\begin{aligned}
Z_2 - 1 &= -i \frac{\partial \Sigma_{1\text{LOOP}}^*}{\partial \not{p}} \Big|_{i\not{p} = -m_e} \\
&= -\frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ (1-x) \ln \left(\frac{m_e^2 x + \mu^2(1-x)}{m_e^2 x} \right) - \frac{2\mu^2(1-x)^2(1+x)}{x(m_e^2 x + \mu^2(1-x))} \right\}.
\end{aligned} \tag{11.4.10}$$

(В этом порядке нет разницы между δm_e и $Z_2 \delta m_e$.) Опуская слагаемые, обращающиеся в нуль при $\mu^2 \rightarrow \infty$, получаем из (11.4.8)–(11.4.10):

$$\Sigma_{1\text{LOOP}}^*(p) = \frac{-\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [2i(1-x)\not{p} + 4m_e] \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{p^2 x(1-x) + m_e^2 x} \right), \tag{11.4.11}$$

$$\delta m_e = \frac{2m_e \pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{m_e^2 x^2} \right), \tag{11.4.12}$$

$$Z_2 - 1 = -\frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ (1-x) \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{m_e^2 x^2} \right) - \frac{2(1-x^2)}{x} \right\}. \tag{11.4.13}$$

Видно, что в точной собственно-энергетической функции слагаемые с $\ln \mu^2$ сокращаются, и мы приходим к выражению

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{порядок } e^2}^*(p) &= \Sigma_{1\text{LOOP}}^*(p) - (Z_2 - 1)(i\not{p} + m_e) + Z_2 \delta m_e \\
&= \frac{-2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ [i(1-x)\not{p} + 2m_e] \ln \left(\frac{m_e^2(1-x)}{p^2 x(1-x) + m_e^2 x} \right) \right. \\
&\quad \left. - m_e(1+x) \ln \left(\frac{1-x}{x^2} \right) - (i\not{p} + m_e) \left[(1-x) \ln \left(\frac{1-x}{x^2} \right) - \frac{2(1-x^2)}{x} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{11.4.14}$$

Все еще остается расходимость в последнем слагаемом при $x \rightarrow 0$. Можно проследить, что она связана с сингулярным поведением интеграла (11.4.5) по фотонному импульсу k при $k^2 = 0$, когда при вычислении $Z_2 - 1$ мы берем p^2 в точке $p^2 = -m_e^2$. Детальное обсуждение таких инфракрасных расходимостей дано в гл. 13. Сейчас для нас самое главное, что сократились ультрафиолетовые расходимости.

* * *

Результат (11.4.9) для δm_e интересен сам по себе. Заметим, что $\delta m_e / m_e > 0$, как и следовало ожидать для электромагнитной собственной энергии, обязанной своим происхождением взаимодействию заряда с собственным полем. Однако, в противоположность классическим оценкам электромагнитной собственной энергии, выполненным Пуанкаре, Абрагамом и др.⁹, в формуле (11.4.9) содержится только логарифмическая расходимость в пределе $\mu \rightarrow \infty$, когда снимается обрезание. В этом пределе

$$\delta m_e \rightarrow \frac{6m_e \pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \ln\left(\frac{\mu}{m_e}\right). \quad (11.4.15)$$

При вычислении лэмбовского сдвига в разделе 14.3 нас будет интересовать противоположный предел $\mu \ll m_e$. В этом случае из (11.4.9) получаем

$$\delta m_e \rightarrow \frac{e^2 \mu}{8\pi} \left[1 - \frac{\mu}{2\pi m_e} + \dots \right]. \quad (11.4.16)$$

Приложение. Некоторые интегралы

Чтобы объединить знаменатели N пропагаторов, необходимо заменить произведение типа $D_1^{-1} D_2^{-1} \dots D_N^{-1}$ на интеграл от функции, содержащей линейную комбинацию D_1, D_2, \dots, D_N . С этой целью часто удобно воспользоваться формулой

$$\frac{1}{D_1 D_2 \dots D_N} = (N-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_{N-1} \times [D_1 x_{N-1} + D_2 (x_{N-2} - x_{N-1}) + \dots + D_N (1 - x_1)]^{-N}. \quad (11.A.1)$$

В этой главе мы использовали частные случаи этой формулы при $N = 2$ и $N = 3$.

После объединения знаменателей, сдвига переменной интегрирования, виковского поворота и учета инвариантности относительно четырехмерных вращений, мы обычно приходим к интегралам вида

$$\int d^4 k \frac{(k^2)^n}{(k^2 + v^2)^m},$$

где $(k^2 + v^2)^m$ возникает от объединения знаменателей, а $(k^2)^n$ — от числителей пропагаторов и импульсных множителей в вершинах. Такие интегралы расходятся при $2n+4 \geq 2m$, но их можно сделать конечными, аналитически продолжая по размерности пространства-времени от 4 к комплексному значению d . Для вычисления получающегося интеграла используем хорошо известную формулу

$$\int_0^\infty dk \frac{k^{l-1}}{(k^2 + v^2)^m} = v^{l-2m} \frac{\Gamma(l/2) \Gamma(m-l/2)}{2\Gamma(m)}, \quad (11.A.2)$$

где $l = d + 2n$. В разделе 11.2 использовались частные случаи этой формулы при $n = 0, m = 2$ и $n = 1, m = 2$.

Ультрафиолетовые расходимости проявляются в (11.A.2) как полюсы в множителе $\Gamma(m-l/2) = \Gamma(m-n-d/2)$ при $d \rightarrow 4$ и фиксированном целом n . В случае $2 + n = m$ этот множитель ведет себя как

$$\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \rightarrow \frac{2}{d-4} + \gamma, \quad (11.A.3)$$

где $\gamma = 0,5772157\dots$ — постоянная Эйлера. Предельное поведение для случая $2 + n > m$ можно найти из (11.A.3) и рекуррентных соотношений для гамма-функций.

Задачи

1. Вычислите вклады в функцию поляризации вакуума $\pi(q^2)$ и в Z_3 однопетлевых диаграмм, содержащих заряженные бесспиновые частицы массой m_s . Какое влияние окажут эти поправки на сдвиг уровней $2s$ состояния в атоме водорода, если $m_s \gg Z\alpha m_e$?
2. Пусть взаимодействие нейтрального скалярного поля ϕ массой m_ϕ с полем электронов имеет вид $g\phi \bar{\psi}\psi$. Какое влияние окажет это взаимодействие в однопетлевом приближении на магнитный момент электрона и величину Z_2 ?
3. Рассмотрите нейтральное скалярное поле ϕ массой m_ϕ и самодействием $g\phi^3/6$. Рассчитайте матричный элемент S -матрицы для скаляр-скалярного рассеяния в однопетлевом приближении.
4. Рассчитайте в однопетлевом приближении влияние нейтрального скалярного поля из задачи 2 на поправку δm_e к массе электрона.

Список литературы

1. Feynman, R.P., *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949).
2. Wick, G.C., *Phys., Rev.*, **80**, 268 (1950).
3. 't Hooft, G. and Veltman, M., *Nucl. Phys.*, **B44**, 189 (1972). *Phys. Lett.*, **20**, 682 (1966); **21**, 720 (1966); Erickson, G.W. and Liu, H.H.T., UCD-CNL-81 report (1968).
4. Uehling, E.A., *Phys. Rev.*, **48**, 55 (1935). Однопетлевая функция $\pi(q^2)$ впервые была вычислена при $q^2 \neq 0$ в работе: Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **75**, 651 (1949).
5. Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **73**, 416 (1948).

6. Этот расчет (включая слагаемые, исчезающие в пределе $m_e \ll m_\mu$) выполнен в работах: Suura, H. and Wichmann, E., *Phys. Rev.*, **105**, 1930 (1957); Petermann, A., *Phys. Rev.*, **105**, 1931 (1957); Elend, H.H., *Phys. Lett.*, **20**, 682 (1966); **21**, 720 (1966); Erickson, G.W. and Liu, H.H.T., UCD-CNL-81 report (1968).
7. Bailey, J. et al. (CERN-Mainz-Daresbury Collaboration), *Nucl. Phys.*, **B150**, 1 (1979). Эти эксперименты были выполнены путем наблюдения прецессии спина мюона в накопительном кольце.
8. Pauli, W. and Villars, F., *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434 (1949). См. также: Rayski, J., *Phys. Rev.*, **75**, 1961 (1949).
9. См., например, в книге: Miller, A.I., *Theory of Relativity — Emergence (1905) and Early Interpretation (1905-1911)* (Addison Wesley, Reading, MA, 1981), Chapter 1.

Общая теория перенормировок

В предыдущей главе было показано, что вычисления в квантовой электродинамике, относящиеся к однопетлевым диаграммам, приводят к расходящимся интегралам в импульсном пространстве, однако все расходимости сокращаются, если выразить параметры теории через «перенормированные» величины вроде реально измеряемых на опыте масс и зарядов. В 1949 году Дайсон¹ обрисовал доказательство того, что аналогичное сокращение будет иметь место во всех порядках теории возмущений в квантовой электродинамике. Сразу же было очевидно (и это будет показано ниже в разделах 12.1 и 12.2), что аргументы Дайсона применимы к значительно более широкому классу теорий с конечным числом сравнительно простых взаимодействий — к так называемым *перенормируемыми теориями*. Квантовая электродинамика является лишь простейшим примером подобных теорий.

В течение ряда лет общепринятой была точка зрения, что любая разумная физическая теория должна иметь форму перенормируемой квантовой теории поля. Требование перенормируемости играло решающую роль при построении современной «стандартной модели» слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий. Однако, как мы увидим ниже, сокращение ультрафиолетовых расходимостей реально не зависит от перенормируемости: до тех пор, пока мы включаем в теорию каждое из бесконечного числа взаимодействий, разрешенных симметриями, так называемые *неперенормируемые теории* становятся столь же перенормируемыми, как и перенормируемые теории.

В настоящее время общепризнано, что реалистические теории, используемые для описания физики при доступных энергиях, отно-

сятся к так называемым «эффективным теориям поля». Под этим понимают низкоэнергетические приближения к более фундаментальной теории, которая может вообще не быть теорией поля (см. раздел 12.3). Любая эффективная теория поля с необходимостью включает бесконечное число перенормируемых взаимодействий. Тем не менее, как показано в разделах 12.3 и 12.4, мы полагаем, что при достаточно низких энергиях все перенормируемые взаимодействия в этих теориях сильно подавлены. Таким образом, перенормируемые теории типа квантовой электродинамики или стандартной модели сохраняют свой особый статус в физике, хотя и по причинам, несколько отличающимся от тех, которые первоначально привели к предположению о перенормируемости этих теорий.

12.1. Индексы расходимости

Рассмотрим теорию весьма общего вида, содержащую взаимодействия разных типов, помеченные индексом i . Каждое взаимодействие можно охарактеризовать числом n_{if} полей каждого типа f и числом d_i производных, действующих на эти поля.

Начнем с вычисления *индекса расходимости** D произвольной связной одночастично неприводимой диаграммы Фейнмана в такой теории. Он равен числу импульсных множителей в числителе минус число таких множителей в знаменателе подынтегрального выражения плюс четыре степени на каждый независимый 4-импульс, по которому проводится интегрирование. Индекс расходимости равен фактической степени расходимости, возникающей при интегрировании по области импульсного пространства, в которой импульсы всех внутренних линий одновременно устремляются к бесконечности. Именно, подвергнем все внутренние импульсы однородному растяжению одним масштабным фактором k ; тогда

* Автор использует принятый в англоязычной литературе термин *superficial degree of divergence*. В переводе этого термина в опубликованных книгах существует полный разноречивый (условная степень расходимости, кажущаяся степень расходимости, поверхностная степень расходимости и т. п.). Мы решили использовать введенный в книге Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Введение в теорию квантованных полей» термин *индекс расходимости*. — Прим. ред.

вклад в амплитуду от области больших импульсов, отвечающий $k \rightarrow \infty$, расходится при $D > 0$ как

$$\int^{\infty} k^{D-1} dk. \quad (12.4.1)$$

Точно так же, при индексе расходимости $D = 0$ интеграл расходится логарифмически, а при $D < 0$ интеграл сходится, по крайней мере, в рассматриваемой области импульсного пространства*. Позднее мы вернемся к проблеме, когда подинтегрирования** ведут себя хуже, чем интеграл по всей области.

Для вычисления D потребуется следующая информация о диаграмме:

$I_f \equiv$ число внутренних линий поля типа f ;

$E_f \equiv$ число внешних линий поля типа f ;

$N_i \equiv$ число вершин взаимодействия типа i .

Запишем асимптотическое поведение пропагатора $\Delta_f(k)$ поля типа f в виде

$$\Delta_f(k) \sim k^{-2+2s_f}. \quad (12.1.2)$$

Заглянув в гл. 6, видим, что $s_f = 0$ для скалярных, $s_f = 1/2$ для дираковских и $s_f = 1$ для векторных полей. В более общем случае можно показать, что для массивных полей типа (A, B) по отношению к лоренцовским преобразованиям $s_f = A + B$. Не очень точно можно называть s_f «спином». Однако, если отбросить те слагаемые, которые не дают вклада в силу калибровочной инвариантности, то для эффективного фотонного пропагатора $\eta_{\mu\nu}/k^2$ получаем $s_f = 0$. Аналогичный результат справедлив для массивного векторного поля, взаимодействующего с сохраняющимся током, при условии, что ток не зависит от векторного поля. Можно показать, что в том же смысле и для гравитонного поля $g_{\mu\nu}$ пропагатор имеет $s_f = 0$.

* Фактическая степень расходимости диаграммы может оказаться меньше ее индекса расходимости. Конкретные примеры приведены ниже, в разделе 12.2. — *Прим. ред.*

** Термин «подинтегрирование» означает интегрирование по части внутренних импульсов, тех, которые отвечают некоторой поддиаграмме данной диаграммы (см. ниже). — *Прим. ред.*

Согласно (12.1.2) полный вклад всех пропагаторов в D равен:

$$\sum_f I_f(2s_f - 2). \quad (12.1.3)$$

Кроме того, производные в каждом взаимодействии типа i вносят d_i импульсных множителей под интегралом, что дает общий вклад в D , равный

$$\sum_i N_i d_i. \quad (12.1.4)$$

Наконец, следует подсчитать полное число независимых импульсных переменных интегрирования. Каждая внутренняя линия несет 4-импульс, но не все они независимы, т. к. дельта-функции, связанные с каждой вершиной, накладывают линейные связи на внутренние импульсы, за вычетом одной общей дельта-функции, выражающей закон сохранения внешних импульсов. Таким образом, элементы объема интегрирования в импульсном пространстве вносят в D слагаемое

$$4 \left[\sum_f I_f - \left(\sum_i N_i - 1 \right) \right], \quad (12.1.5)$$

что, конечно, есть учетверенное число независимых петель в диаграмме. Складывая выражения (12.1.3), (12.1.4) и (12.1.5), находим, что

$$D = \sum_f I_f(2s_f + 2) + \sum_i N_i(d_i - 4) + 4. \quad (12.1.6)$$

В приведенном виде формула (12.1.6) не очень удобна, так как значение D кажется зависящим от внутренних деталей данной диаграммы. К счастью, формулу можно упростить, воспользовавшись топологическими тождествами

$$2I_f + E_f = \sum_i N_i n_{if}. \quad (12.1.7)$$

(Каждая внутренняя линия соединена с двумя вершинами, а каждая внешняя — только с одной.) Используя формулу (12.1.7) для исключения I_f , видим, что (12.1.6) переходит в выражение вида

$$D = 4 - \sum_f E_f(s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i, \quad (12.1.8)$$

где Δ_i – параметр, характеризующий взаимодействия i -ого типа:

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1). \quad (12.1.9)$$

Этот результат можно было бы получить путем простого размерного анализа, не прибегая к рассмотрению структуры фейнмановских диаграмм. Пропагатор поля есть четырехмерный фурье-образ среднего по вакууму от хронологического произведения пары свободных полей, так что обычным образом нормированное поле f , (массовая) размерность* которого равна \mathcal{D}_f , имеет пропагатор размерности $-4 + 2\mathcal{D}_f$. Поэтому, если пропагатор ведет себя как k^{-2+2s_f} , при k много большем массы, то поле должно иметь размерность $-4 + 2\mathcal{D}_f = -2 + 2s_f$, или $\mathcal{D}_f = 1 + s_f$. Взаимодействие типа i , включающее n_{if} таких полей и d_i производных, будет иметь размерность $d_i + \sum_f n_{if}(1 + s_f)$. Но действие должно быть безразмерно, поэтому каждое слагаемое в плотности лагранжиана должно иметь размерность $+4$, чтобы сократить размерность -4 элемента объема d^4x . Отсюда следует, что константа связи данного взаимодействия должна иметь размерность $4 - d_i - \sum_f n_{if}(1 + s_f)$, что как раз равно параметру Δ_i . Амплитуда в импульсном пространстве, отвечающая связанной диаграмме Фейнмана с E_f внешними линиями типа f есть фурье-преобразование по $4\sum_f E_f$ координатам среднего по вакууму от хронологического произведения полей с полной размерностью $\sum_f E_f(1 + s_f)$, так что она имеет размерность $\sum_f E_f(-3 + s_f)$. В этом выражении -4 приходится на размерности дельта-функции в импульсном пространстве, а $\sum_f E_f(-2 + 2s_f)$ — на размерность пропагаторов внешних линий, так что суммарная размерность интеграла по импульсному пространству вместе со всеми константами связи равна

* В этой главе под словом «размерность» всегда подразумевается массовая или импульсная размерность** в степенях массы или импульса в системе единиц, где $\hbar = c = 1$. Мы используем общепринятую нормировку полей, в том смысле, что слагаемое в лагранжиане свободного поля с наибольшим числом производных (определяющее асимптотическое поведение пропагатора) имеет безразмерный коэффициент.

** Т. е. размерность такой же степени массы или импульса. Англоязычный термин *dimensionality in powers of momentum* имеет устойчивый русскоязычный эквивалент *массовая, или импульсная, размерность*. — Прим. ред.

$$\sum_f E_f(-3 + s_f) - (-4) - \sum_f E_f(-2 + 2s_f) = 4 - \sum_f E_f(s_f + 1).$$

Полная размерность всех констант связи для заданной фейнмановской диаграммы равна $\sum_i N_i \Delta_i$, так что размерность собственно интеграла по импульсному пространству есть $4 - \sum_f E_f(s_f + 1) - \sum_i N_i \Delta_i$. Поскольку нас интересует область интегрирования, в которой все импульсы совместно стремятся к бесконечности, индекс расходимости интеграла по импульсам равен его размерности. Это и подтверждает формулу (12.1.8).

Если для всех взаимодействий параметры $\Delta_i \geq 0$, формула (12.1.8) дает верхнюю границу D , зависящую только от числа внешних линий каждого типа, т. е. от физического процесса, амплитуда которого вычисляется:

$$D \leq 4 - \sum_f E_f(s_f + 1). \quad (12.1.10)$$

Например, для простого варианта квантовой электродинамики, рассмотренного в предыдущей главе, в табл. 12.1 приведены типы слагаемых в лагранжиане. Для всех взаимодействий здесь $\Delta_i \geq 0$, и поэтому фейнмановская диаграмма с E_γ внешними фотонными линиями и E_e внешними дираковскими линиями будет иметь индекс расходимости, ограниченный условием (12.1.10):

$$D \leq 4 - \frac{3}{2} E_e - E_\gamma. \quad (12.1.11)$$

Таким образом, только конечное число типов диаграмм с определенными наборами внешних линий может оказаться расходящимся. Все они будут перечислены в разделе 12.2. Мы собираемся показать, что в теориях, где размерности констант связи $\Delta_i \geq 0$ для всех взаимодействий и где число типов расходящихся диаграмм ограничено, все расходимости автоматически устраняются переопределением конечного числа физических констант и перенормировкой полей. По этой причине такие теории называют *перенормируемыми*. В разделе 12.3 мы перечислим все перенормируемые теории и обсудим значение перенормируемости как критерия отбора физических теорий.

Термин «перенормируемое» применим также к отдельным взаимодействиям. Перенормируемые взаимодействия — это те,

у которых параметр $\Delta_i \geq 0$, т. е. взаимодействия, константы связи которых имеют неотрицательную размерность. Иногда различают взаимодействия с $\Delta_i = 0$, которые называют просто перенормируемыми, и с $\Delta_i > 0$, которые называют *суперперенормируемыми*. Поскольку добавление во взаимодействие дополнительных полей или производных всегда уменьшает параметр Δ_i , может существовать лишь ограниченное число перенормируемых взаимодействий, содержащих поля любого данного типа. Мы видели, что в простейшем варианте квантовой электродинамики все взаимодействия перенормируемы, а слагаемые с $\bar{\Psi}\Psi$ суперперенормируемы.

С другой стороны, если для какого-то взаимодействия $\Delta_i < 0$, индекс диаграммы (12.1.8) неограниченно возрастает по мере добавления соответствующих вершин. Независимо от того, сколь большими мы выберем разные E_j , в конце концов при достаточном количестве вершин типа i , для которых $\Delta_i < 0$, выражение (12.1.8) станет положительным (или нулем), и интеграл разойдется. Подобные взаимодействия, константы связи которых имеют

Таблица 12.1

Взаимодействие	d_i	$n_{i\gamma}$	n_{ie}	Δ_i
$-ie \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi$	0	1	2	$4 - 1 - 3 = 0$
$-(Z_3 - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4$	2	2	0	$4 - 2 - 2 = 0$
$-(Z_2 - 1) \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi$	1	0	2	$4 - 1 - 3 = 0$
$[-(Z_2 - 1)m + Z_2 \delta m] \bar{\Psi} \Psi$	0	0	2	$4 - 3 = 1$

Табл. 12.1. Слагаемые плотности лагранжиана квантовой электродинамики. Здесь d_i , $n_{i\gamma}$ и n_{ie} — числа производных, полей фотонов и полей электронов, соответственно в данном члене взаимодействия, а Δ_i — размерность соответствующего коэффициента (напомним, что $s_\gamma = 0$ и $s_e = 1/2$).

отрицательную размерность, называются *неперенормируемыми*,* так же, как и теории, включающие любые неперенормируемые взаимодействия. Это не означает, что такие теории безнадежны; мы увидим, что бесконечности в них также можно поглотить переопределением параметров теории, с той разницей, что необходимо бесконечное число констант связи.

Следует иметь в виду, что вычисленный нами индекс диаграммы определяет структуру расходимости фейнмановских диаграмм при интегрировании только по тем областям импульсного пространства, в которых все внутренние 4-импульсы совместно стремятся к бесконечности. Однако расходимости могут возникать и от областей, в которых к бесконечности стремятся только 4-импульсы линий, принадлежащих некоторой поддиаграмме. Например, для комптоновского рассеяния в квантовой электродинамике ($E_e = 2$, $E_\gamma = 2$) из формулы (12.1.11) следует, что индекс расходимости $D \leq -1$, и, действительно, диаграммы типа показанной на рис. 12.1, а сходятся. Однако диаграммы рис. 12.1, б или 12.1, в логарифмически расходятся, т. к. они содержат поддиаграммы (выделенные пунктирными прямоугольниками) с $D \geq 0$. Расходимости этих диаграмм объясняются аномально плохим асимптотическим поведением подынтегральных выражений в специальных (под)областях импульсного пространства. В этих областях восемь компонент двух независимых внутренних 4-импульсов стремятся к бесконечности таким образом, что в действительности к бесконечности стремится только один 4-импульс — тот, который циркулирует в петлях, вставленных либо во внутренние линии, либо в электрон-фотонную вершину*.

Было показано², что требование фактической сходимости амплитуды, соответствующей любой диаграмме, заключается в том, чтобы подсчет степеней приводил к значению индекса расходимости $D < 0$ не только для всего многократного интеграла для полной амплитуды,

* В пертурбативной статистической механике неперенормируемые взаимодействия носят название *несущественных*, так как они становятся менее важными в пределе низких энергий. Перенормируемые или суперперенормируемые взаимодействия называются соответственно *маргинальными* и *существенными*.

** Этот импульс можно взять в качестве независимого внутреннего импульса. — *Прим. ред.*

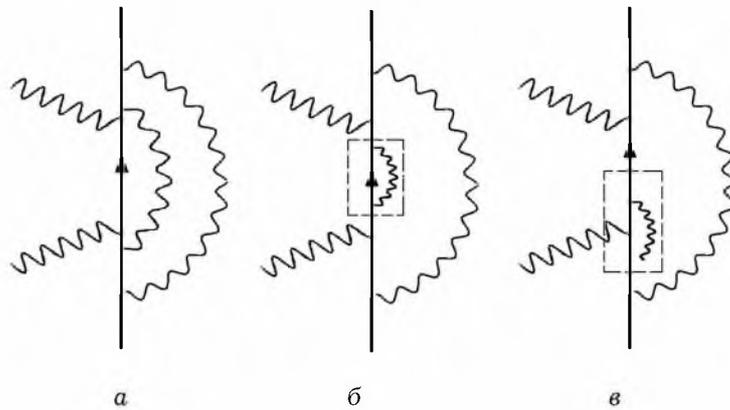


Рис. 12.1. Некоторые двухпетлевые диаграммы комптоновского рассеяния. Здесь сплошные линии отвечают электронам, а волнистые — фотонам. Интеграл по импульсному пространству для диаграммы *a* сходится, а для диаграмм *б* и *в* расходится из-за подинтегрирования, отвечающего поддиаграммам в пунктирных рамках

но и для любого интеграла меньшей кратности, определяемого фиксацией любых одной или более линейных комбинаций импульсов в петлях. (Диаграммы, приведенные на рис. 12.1, б и 12.1, в, не удовлетворяют этому условию, поскольку для подинтегрирований по импульсам в петлях внутри пунктирных прямоугольников $D \geq 0$.) Мы не будем приводить здесь довольно длинное доказательство, поскольку оно хорошо изложено в имеющихся книгах³, да и сам метод доказательства имеет мало отношения к тому, как реально делаются вычисления. В следующем разделе мы опишем, как выполняется сформулированное требование.

12.2. Сокращение расходимостей

Рассмотрим фейнмановскую диаграмму или ее часть с положительным индексом диаграммы $D \geq 0$. Та часть интеграла по импульсному пространству, где все внутренние импульсы совместно устремляются к бесконечности, будет расходиться как $\int^{\infty} k^{D-1} dk$. Если продифференцировать $D + 1$ раз по любому внешнему импульсу, то показатель степенной асимптотики подынтегрального

выражения уменьшится на $D + 1$ *, что сделает интеграл по этой части импульсного пространства сходящимся**. Правда, еще могут оставаться расходимости, возникающие от поддиаграмм типа показанных на рис. 12.1, б и 12.1, в, но на некоторое время забудем об этой возможности (мы вернемся к ее обсуждению в следующем разделе). Поскольку $(D + 1)$ -кратное дифференцирование делает интеграл конечным, отсюда следует, что вклад такой диаграммы или поддиаграммы может быть записан как полином порядка D по внешним импульсам с расходящимися коэффициентами плюс конечный остаток.

Чтобы понять без лишних усложнений, как все это работает, рассмотрим логарифмически расходящийся одномерный интеграл

$$\mathcal{J}(q) \equiv \int_0^{\infty} \frac{dk}{k+q},$$

с $D = 1 - 1 = 0$. После однократного дифференцирования

$$\mathcal{J}'(q) \equiv - \int_0^{\infty} \frac{dk}{(k+q)^2} = -\frac{1}{q},$$

так что

$$\mathcal{J}(q) = -\ln q + c.$$

Постоянная c очевидно расходится, но остальная часть интеграла конечна. Точно так же можно оценить интеграл с $D = 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{kdk}{k+q} = a + bq + q \ln q$$

с расходящимися константами a и b .

Далее, полином по внешним импульсам — это как раз то, что возникает от добавления подходящих слагаемых в лагранжиан:

* Например, если внутренняя скалярная линия несет импульс $k + p$, где p — линейная комбинация внешних 4-импульсов, а k — 4-импульс, по которому проводится интегрирование, то производная пропагатора $[(k + p)^2 + m^2]^{-1}$ по p^μ дает $-2(k_\mu + p_\mu) [(k + p)^2 + m^2]^{-2}$, и этот множитель ведет себя при $k \rightarrow \infty$ как k^{-3} , а не как k^{-2} .

** Говорят, что дифференцирование по внешним импульсам уменьшает индекс диаграммы (на единицу при однократном дифференцировании). — *Прим. ред.*

если диаграмма с E_f внешними линиями типа f имеет индекс расходимости $D \geq 0$, то ультрафиолетово расходящийся полином совпадает с тем, который возник бы при добавлении различных взаимодействий типа i , включающими $n_{if} = E_f$ полей типа f и $d_i \leq D$ производных. Если в лагранжиане уже имеются такие взаимодействия, то ультрафиолетовые расходимости просто вносят поправки к константам связи этих взаимодействий. Следовательно подобные бесконечности могут быть сокращены путем включения в константы связи подходящих бесконечных слагаемых. Все, что мы когда-либо можем измерить, представляет собой сумму голой константы связи и соответствующего коэффициента одного из расходящихся полиномов, так что если мы потребуем, чтобы эта сумма равнялась измеряемому значению, которое предполагается конечным, голая константа должна автоматически содержать бесконечность, которая сокращает бесконечность от расходящегося интеграла по внутренним импульсам. (Одно уточнение: когда расходимость возникает в диаграмме или поддиаграмме ровно с двумя внешними линиями, возникающей как радиационная поправка к пропагатору частицы, мы должны требовать не равенства некоторой эффективной константы связи ее измеряемому значению, а того, чтобы точный пропагатор имел полюс в том же месте и с тем же вычетом, что и у пропагатора свободных частиц.) Таким образом, все бесконечности поглощаются переопределением констант связи, масс и полей.

Чтобы такая программа перенормировок работала, существенно, чтобы лагранжиан включал все взаимодействия, соответствующие ультрафиолетово расходящимся частям фейнмановских амплитуд. (Исключения из этого правила встречаются в суперсимметричных теориях ⁴.) Конечно, взаимодействия в лагранжиане ограничены различными принципами симметрии вроде лоренц-инвариантности, калибровочной инвариантности и т. п., но точно так же ограничены этими требованиями и ультрафиолетовые расходимости. (Доказательство того, что неабелевы калибровочные симметрии ограничивают бесконечности так же, как и взаимодействия, требует определенных усилий. Мы покажем это в т. II.) В общем случае, нет никаких иных ограничений на ультрафиолетовые расходимости, так что лагранжиан должен содержать все возможные слагаемые, совместимые с принципами симметрии.

Однако существует важный класс теорий всего лишь с конечным числом взаимодействий, для которых также применима

программа перенормировки. Это так называемые перенормируемые теории, у которых для всех взаимодействий размерности констант связи $\Delta_i \geq 0$. Из формулы (12.1.8) имеем:

$$D \leq 4 - \sum_f E_f (s_f + 1),$$

поэтому расходящиеся полиномы возникают только в ограниченном числе типов фейнмановских диаграмм или поддиаграмм с достаточно небольшим числом внешних линий, так что $D \geq 0$. Вклад таких расходящихся полиномов точно такой же, какой возник бы после замены расходящейся диаграммы или поддиаграммы единственной вершиной, возникающей от слагаемого в лагранжиане с E_f полями типа f и $0, 1, \dots, D$ производными. Однако, сравнивая с формулой (12.1.9), видим, что *это в точности то же самое, что и взаимодействия, удовлетворяющие требованию перенормируемости $\Delta_i \geq 0$, или, иными словами,*

$$0 \leq d_i \leq 4 - \sum_f n_{if} (s_f + 1).$$

Для того, чтобы в перенормируемой теории сократились все расходимости, обычно необходимо, чтобы в лагранжиане содержались все перенормируемые взаимодействия, разрешенные требованиями симметрии*. Например, если есть скалярное (или псевдоскалярное) поле ϕ и фермионное поле ψ со взаимодействиями $\bar{\psi}\psi\phi$ (или $\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$), мы не можем исключить взаимодействие ϕ^4 , в противном случае не нашлось бы контрчлена для сокращения логарифмической расходимости от фермионных петель с четырьмя прикрепленными скалярными или псевдоскалярными линиями.

* Кроме того, в лагранжиан могут входить взаимодействия и массовые слагаемые, не разрешенные глобальными симметриями, при условии, что они суперперенормируемы, т. е. имеют $\Delta_i > 0$. Дело в том, что наличие суперперенормируемого взаимодействия понижает степень расходимости, так что нарушение симметрии не затрагивает те расходимости, которые сокращаются строго перенормируемыми взаимодействиями с $\Delta_i = 0$. Отметим, что именно *голые* строго перенормируемые взаимодействия должны удовлетворять требованиям данной симметрии; в перенормированных взаимодействиях, определяемых через матричные элементы на массовой поверхности, эффект нарушения симметрии в общем случае проявляется явно.

Рассмотрим более подробно, каким образом происходит сокращение расходимостей в простейшей версии квантовой электродинамики. Из формулы (12.1.11) следует, что единственными диаграммами или поддиаграммами, которые могут приводить к расходящимся интегралам, являются следующие.

$$E_e = 2, E_g = 1$$

Это электрон–фотонная вершина $\Gamma_\mu^{(l)}(p', p)$. (Верхний индекс l указывает, что вершина включает только вклады от диаграмм с петлями.) Для нее индекс расходимости $D = 0$, так что ее расходящаяся часть не зависит от импульса. В силу лоренц-инвариантности расходящаяся константа может быть пропорциональна только γ_μ , поэтому

$$\Gamma_\mu^{(l)} = L\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}, \quad (12.2.1)$$

где L — логарифмически расходящаяся константа, а $\Gamma_\mu^{(f)}$ конечна. Это еще не определяет константу L однозначно, так как всегда можно перенести конечное слагаемое $\delta L\gamma_\mu$ из $\Gamma_\mu^{(f)}$ в $L\gamma_\mu$. Чтобы завершить определение, заметим, что, как показано в разделе 9.7, матричный элемент оператора $\Gamma_\mu(p, p)$, а следовательно и $\Gamma_\mu^{(f)}(p, p)$, на массовой поверхности между дираковскими спинорами свободных частиц пропорционален такому же матричному элементу оператора γ^μ , поэтому можно определить L из требования

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \Gamma_\mu^{(f)} u(\mathbf{p}, \sigma) = 0. \quad (12.2.2)$$

при $p^2 + m_e^2 = 0$.

$$E_e = 2, E_g = 0$$

Это электронная собственно-энергетическая вставка $\Sigma^*(p)$. Для нее $D = 1$, так что расходящаяся часть линейна по импульсу p^μ , который несут входящий или выходящий фермионы. Из лоренц-инвариантности (включая сохранение четности) следует, что она может быть функцией только \not{p} , так что вклад петли можно записать в виде

$$\Sigma^{(l)}(p) = A - (i\not{p} + m)B + \Sigma^{(f)}(p), \quad (12.2.3)$$

где A и B — расходящиеся константы, а $\Sigma^{(f)}$ конечна. Константы A и B опять определены неоднозначно, т. к. всегда можно сдвинуть $\Sigma^{(f)}$ на конечный полином первого порядка по p . Определим A и B предписанием

$$\Sigma^{(f)} = \frac{\partial \Sigma^{(f)}}{\partial p} = 0 \text{ при } ip = -m. \quad (12.2.4)$$

На самом деле, B не является новой расходящейся константой. До тех пор, пока мы используем процедуру регуляризации, совместную с сохранением тока, Γ_μ и Σ будут связаны тождеством Уорда (10.4.27):

$$\Gamma^\mu(p, p) = \gamma^\mu + i \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p)$$

и поэтому

$$L\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}(p, p) = B\gamma_\mu + i \frac{\partial \Sigma^{(f)}(p)}{\partial p^\mu}. \quad (12.2.5)$$

Беря матричный элемент этого равенства между $\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')$ и $u(\mathbf{p}, \sigma)$ и используя формулы (12.2.2) и (12.2.4), находим:

$$L = B. \quad (12.2.6)$$

$$\mathbf{E}_g = 2, \mathbf{E}_e = 0$$

Это фотонная собственно-энергетическая вставка $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$. Для нее $D = 2$, так что расходящаяся часть есть полином второго порядка по q . Из лоренц-инвариантности следует, что $\Pi_{\mu\nu}^*$ имеет вид линейной комбинации $\eta_{\mu\nu}$ и $q_\mu q_\nu$ с коэффициентами, зависящими только от q^2 , так что вклады петель имеют вид

$$\Pi_{\mu\nu}^{(l)}(q) = C_1 \eta_{\mu\nu} + C_2 \eta_{\mu\nu} q^2 + C_3 q_\mu q_\nu + \text{расходящиеся слагаемые,}$$

где C_1 , C_2 и C_3 — расходящиеся константы. Поскольку мы используем регуляризацию, не нарушающую сохранение тока, должно выполняться равенство

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(l)}(q) = 0.$$

Это же должно быть верно и для расходящихся слагаемых, так что $C_1 q_\nu + (C_2 + C_3) q^2 q_\nu$ должно быть конечными для всех q . Отсюда C_1 и $C_2 + C_3$ должны быть конечными, так что их можно внести в конечную часть $\Pi_{\mu\nu}^{(l)}(q)$. Следовательно

$$\Pi_{\mu\nu}^{(l)}(q) = (\eta_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu)(C + \pi(q^2)), \quad (12.2.7)$$

где $\pi(q^2)$ конечно, а C — единственная оставшаяся расходимость в $\Pi_{\mu\nu}$. Чтобы зафиксировать определение C , можно включить в нее любую конечную константу $\pi(0)^*$, так чтобы

$$\pi(0) = 0. \quad (12.2.8)$$

$$\mathbf{E}_g = 4, \mathbf{E}_e = 0$$

Это амплитуда $M_{\mu\nu\rho\sigma}$ рассеяния света на свете. Для нее $D = 0$, так что, используя лоренц-инвариантность и требования бозе-статистики, можно записать эту амплитуду (в нее не дают вклада диаграммы без петель) в виде

$$M_{\mu\nu\rho\sigma} = K(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + \text{конечные слагаемые},$$

где K — потенциально расходящаяся константа. Однако в силу сохранения тока

$$q^\mu M_{\mu\nu\rho\sigma} = 0,$$

так что комбинация $K(q_\nu\eta_{\rho\sigma} + q_\rho\eta_{\nu\sigma} + q_\sigma\eta_{\nu\rho})$ конечна. Чтобы это равенство было верно при $q \neq 0$, константа K сама должна быть конечной. Это хороший пример роли принципов симметрии в программе перенормировок. Если бы K оказалась бесконечной, ее нельзя было бы устранить перенормировкой константы связи взаимодействия $(A_\mu A^\mu)^2$, поскольку такое взаимодействие не допускает калибровочной инвариантности. Но константа K на самом деле конечна благодаря условиям, вытекающим из сохранения тока, которые накладываются калибровочной инвариантностью.

* Напомним, что для этого $\pi(q^2)$ как функция q^2 не должна иметь особенности (типа полюса) при $q^2 = 0$. — Прим. ред.

$$\mathbf{E}_g = \mathbf{1}, \mathbf{E}_e = \mathbf{0} \text{ и } \mathbf{E}_e = \mathbf{1}, \mathbf{E}_g = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$$

В этих случаях $D = 3$ и $D = 5/2, 3/2, 1/2$, соответственно, однако все такие диаграммы обращаются в нуль в силу лоренц-инвариантности*.

$$\mathbf{E}_\gamma = \mathbf{3}, \mathbf{E}_e = \mathbf{0}$$

В этом случае $D = 1$, но такие диаграммы обращаются в нуль в силу инвариантности относительно зарядового сопряжения.

Читатель, возможно, уже обратил внимание на то, что независимые расходящиеся константы A, B, C находятся в однозначном соответствии с независимыми параметрами Z_2, Z_3 и δm контрчленов (11.1.9) в лагранжиане квантовой электродинамики, которая содержит контрчлены. Эти контрчлены вносят непосредственный вклад $Z_2 \delta m - (Z_2 - 1)(i\not{p} + m)$ в $\Sigma^*(p)$. Требование, чтобы положение и вычет одночастичного полюса были бы такими же, как у свободного пропагатора, означает, что нужно выбрать Z_2 и δm таким образом, чтобы полная функция Σ^* удовлетворяла условию (12.2.4), т. е.

$$Z_2 \delta m = -A, \quad (12.2.9)$$

$$Z_2 - 1 = -B, \quad (12.2.10)$$

и полная электронная собственнoэнергетическая вставка была бы конечной функцией $\Sigma^{(f)}(p)$:

$$\Sigma(p) = \Sigma^{(f)}(p). \quad (12.2.11)$$

Кроме того, контрчлены \mathcal{S}_2 вносят вклад в Γ_μ , равный $(Z_2 - 1)\gamma_\mu$. Используя формулу (12.2.6), видим, что полная вершинная функция равна

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + (Z_2 - 1)\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(l)} = \gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}. \quad (12.2.12)$$

* Точнее, обращаются в нуль функции Грина. В трех последних случаях можно было бы сослаться также на глобальную калибровочную инвариантность (сохранение электрического заряда). Но в этих случаях по указанной причине не существует и самих диаграмм — их невозможно нарисовать. — *Прим. ред.*

Она не только конечна, но и удовлетворяет условию

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \Gamma_{\mu}(p, p) u(\mathbf{p}, \sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma') \gamma_{\mu} u(\mathbf{p}, \sigma), \quad (12.2.13)$$

что можно иначе увидеть также из (10.6.13) и (10.6.14). Наконец, \mathcal{S}_2 вносит вклад $-(Z_3 - 1)(q^2 \eta_{\mu\nu} - q_{\mu} q_{\nu})$ в $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$. Для того, чтобы фотонный пропагатор имел полюс с тем же вычетом, что и для свободных полей, необходимо, чтобы коэффициент при $(q^2 \eta_{\mu\nu} - q_{\mu} q_{\nu})$ в полном выражении для $\Pi_{\mu\nu}(q)$ обращался в нуль, так что

$$Z_3 = 1 + C, \quad (12.2.14)$$

и тогда фотонный пропагатор конечен:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (\eta_{\mu\nu} q^2 - q_{\mu} q_{\nu}) \pi(q^2). \quad (12.2.15)$$

До сих пор мы проверили, что расходимости, возникающие от интегрирования по области импульсного пространства, в которой все внутренние импульсы велики (и имеют общие отношения), являются полиномами по внешним импульсам, которые сокращаются при подходящем выборе контрчленов. Такие диаграммы будем называть *расходящимися по индексу* *. Прежде чем заключить, что все ультрафиолетовые расходимости действительно можно устранить перенормировкой, следует рассмотреть расходимости, возникающие в диаграммах высших порядков при интегрировании по областям импульсного пространства, где не все переменные интегрирования, а лишь их некоторое подмножество устремляется к бесконечности. Например, в квантовой электродинамике расходимости возникают от подинтегрирований, отвечающих расходящимся

* Появляющиеся здесь и ниже ключевые авторские термины *superficially divergent (convergent) diagrams (subdiagrams)* и *superficial divergence (convergence)* не имеют устойчивого русского эквивалента. Мы переводим их здесь как «диаграммы (поддиаграммы), расходящиеся (сходящиеся) по индексу». Расходимость (сходимость) диаграммы (поддиаграммы) по индексу означает, что ее индекс расходимости неотрицателен (строго отрицателен) и определяющий ее интеграл по внутренним импульсам расходится (сходится) в области, где все внутренние импульсы однородным образом устремляются к бесконечности. — *Прим. ред.*

по индексам поддиаграммам, являющимся либо фотонными собственноэнергетическими частями Π^* , либо электронными собственноэнергетическими частями Σ^* , либо электрон–электрон–фотонными вершинами Γ^4 . Трудности рассмотрения этих расходимостей связаны с тем, что их нельзя устранить путем дифференцирования по внешним импульсам: имеются слагаемые, в которых производные действуют только на внутренние линии в тех частях диаграммы, которые *не входят* в расходящиеся поддиаграммы, и тем самым не уменьшают степень расходимости таких поддиаграмм. Как отмечалось в предыдущем разделе, диаграмма или сумма диаграмм действительно сходится тогда и только тогда, когда как она сама, так и все ее поддиаграммы сходятся по индексу. Но где бы ни возникла такая расходящаяся поддиаграмма, она всегда сопровождается бесконечным контрчленом. В электродинамике таковыми являются слагаемые в (11.1.9): $-(Z_3 - 1)(q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$ для каждого $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$, $Z_2 \delta m - (Z_2 - 1)(ip + m)$ для каждого Σ и слагаемое $(Z_2 - 1)\gamma^\mu$ для каждой вершины Γ^4 . Как и для диаграммы в целом, эти контрчлены сокращают бесконечности в расходящихся поддиаграммах¹.

К сожалению, в такой простой аргументации есть пробел, связанный с перекрывающимися расходимостями. Это означает, что возможна ситуация, когда две расходящиеся поддиаграммы имеют общую внутреннюю линию, так что нельзя рассматривать соответствующие расходящиеся интегралы как независимые. В квантовой электродинамике это случается только, если две электрон–электрон–фотонные вершины перекрываются внутри фотонной или электронной собственноэнергетической вставки* (см. рис. 12.2 и 12.3).

Полное рассмотрение проблемы перенормировки с учетом перекрывающихся расходимостей должно включать рецепт уст-

* Если две собственноэнергетические вставки или такая вставка и вершинная часть будут иметь общую линию, то не хватит внешних линий, чтобы прикрепить такую поддиаграмму к остальной части диаграммы. Исторически тождество Уорда (10.4.26) использовалось для того, чтобы обойти проблему перекрывающихся расходимостей в собственной энергии электрона, выразив эту энергию через вершинную функцию, в которой перекрывающихся расходимостей не возникает. Мы не будем следовать таким путем, поскольку в этом нет необходимости, кроме того, этот подход все равно не решает проблемы собственной энергии фотона или других нейтральных частиц.

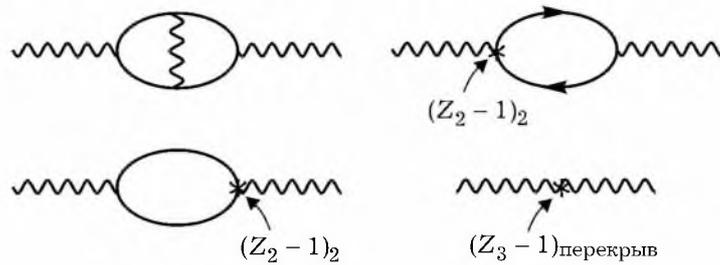


Рис. 12.2 Некоторые диаграммы четвертого порядка для собственной энергии фотона в квантовой электродинамике, содержащие перекрывающиеся расходимости. Линии со стрелками отвечают электронам, волнистые линии – фотонам. Крестиками отмечены вклады контрчленов

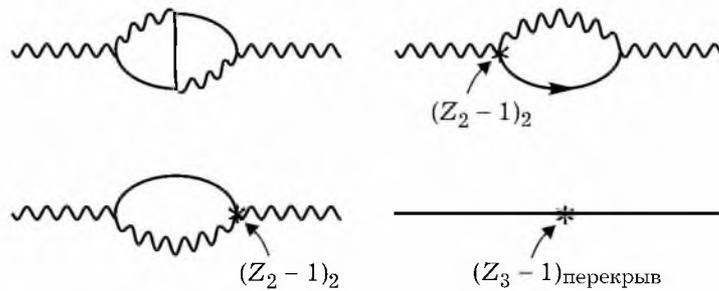


Рис. 12.3. Некоторые диаграммы четвертого порядка для собственной энергии электрона в квантовой электродинамике, содержащие перекрывающиеся расходимости. Волнистые линии — фотоны, остальные линии — электроны. Крестиками отмечены вклады контрчленов

ранения ультрафиолетовых расходимостей по индексу не только для полной диаграммы, но и для всех ее поддиаграмм, а также доказательство, что такой рецепт (по крайней мере формально) осуществляется путем перенормировки масс, полей и констант связи. Тогда теорема ² утверждает, что все функции Грина перенормированных полей, выраженные через перенормированные массы и константы связи, являются конечными. Первое доказательство того, что перенормировка полей, масс и констант связи делает как полную диаграмму, так и все ее поддиаграммы сходящимися по индексу, было дано Саламом ⁵. Более детальный рецепт устранения ультрафиолетовых расходимостей был предложен Боголюбовым и Парасюком ⁶ и подправлен Хешпом ⁷, причем

они показали эквивалентность своего рецепта перенормировке полей, масс и констант связи. Наконец, Циммерман⁸ доказал, что этот рецепт действительно устраняет все расходимости по индексу как в полной диаграмме, так и во всех ее поддиаграммах, и с помощью теоремы, доказанной в², пришел к выводу, что перенормированные фейнмановские интегралы в импульсном пространстве сходятся.

Коротко рецепт БПХЦ для устранения расходимостей по индексу требует, чтобы мы рассмотрели все возможные способы (их называют *леса*) поместить полную диаграмму и/или ее поддиаграммы в ящики, которые могут находиться один внутри другого, но не перекрываться. (Ниже приведен пример.) Для каждого леса мы определяем вычитательное слагаемое, заменяя подынтегральное выражение для каждой поддиаграммы внутри ящика, имеющей индекс расходимости D , (начиная с самых внутренних ящиков и двигаясь наружу) на первые $D + 1$ слагаемых его разложения в ряд Тейлора по импульсам, входящим или выходящим из этого ящика*. Фейнмановская амплитуда с вычитаниями определяется исходными диаграммами минус все вычитательные слагаемые, в том числе, и слагаемое для леса, состоящего из единственного ящика, окружающего всю диаграмму.

Довольно легко показать, что вычисленная таким образом фейнмановская амплитуда с вычитаниями совпадает с той, которую мы получили бы, заменив все поля, массы и константы связи в исходном лагранжиане на их перенормированные аналоги. Разница между этой процедурой и тем способом перенормировки, который был использован в гл. 11, заключается в том, что перенормированные поля, константы связи и массы определены через амплитуды, взятые в необычной точке нормировки**, в которой все 4-импульсы обращаются в нуль. (В этом смысле обсуждавшиеся

* В указанном виде рецепт применим как к перенормируемым, так и к перенормируемым теориям. Для последних этот рецепт означает, что не следует делать никаких вычитаний, если только ящик не содержит одну из конечного числа диаграмм, отвечающих перенормируемым слагаемым в лагранжиане.

** Англоязычный термин *renormalization point* стандартно переводится как *точка нормировки* (в этой точке перенормированная амплитуда принимает заданные значения). — *Прим. пер.*

в начале данного раздела одномерные расходящиеся интегралы являются простейшим примером выделения расходящихся слагаемых методом БПХЦ.) Однако в выборе такой точки нормировки нет ничего особенного; если фейнмановская амплитуда становится конечной, будучи записанной в терминах необычным образом перенормированных величин, то ее можно записать и в терминах обычным образом перенормированных полей, констант связи и масс, не вводя при этом новых бесконечностей.

На практике нет необходимости пользоваться вычитательной процедурой БПХЦ. Замена полей, масс и констант связи их перенормированными аналогами (определенными в любой удобной точке нормировки) автоматически приводит к появлению контрчленов, сокращающих все бесконечности. Вместо того, чтобы доказывать, что вычитательная процедура БПХЦ действительно делает все интегралы сходящимися, рассмотрим один пример, показывающий, как работает схема перенормировок даже при наличии перекрывающихся расходимостей.

Рассмотрим вклад четвертого порядка в фотонную собственнo-энергетическую вставку $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$, показанную на рис. 12.2. (В этом случае леса состоят из диаграмм, которым отвечают полный интеграл по p и p' , подинтеграл только по p и подинтеграл только по p' .*.) С учетом соответствующих контрчленов для вершинных частей и перенормировки поля фотона этот вклад имеет вид:

$$\begin{aligned} [\Pi_{\mu\nu}^*(q)]_{\text{перекр.}} &= -\frac{e^4}{(2\pi)^\varepsilon} \int d^4p \int d^4p' \frac{1}{(p-p')^2 - i\varepsilon} \\ &\quad \times \text{Tr}\{S(p')\gamma_\nu S(p'+q)\gamma^\rho S(p+q)\gamma_\mu S(p)\gamma_\rho\} \\ &\quad - 2(Z_2 - 1)_2 \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{Tr}\{\gamma_\nu S(p+q)\gamma_\mu S(p)\} \\ &\quad - (Z_3 - 1)_{\text{перекр.}} (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu), \end{aligned} \quad (12.2.16)$$

где $S(p) \equiv [-ip + m] / [p^2 + m^2 - i\varepsilon]$, $(Z_2 - 1)_2$ — слагаемое второго порядка по e в $(Z_2 - 1)$, $(Z_3 - 1)_{\text{перекр.}}$ — логарифмически расходящаяся константа четвертого порядка по e , сокращающая слагаемые второго порядка по q^λ в $[\Pi_{\mu\nu}^*(q)]_{\text{перекр.}}$. Множитель 2 во втором

* В данном случае имеется пять лесов, но только три крестика. — *Прим. ред.*

слагаемом возникает из-за того, что каждой из двух вершин в диаграмме второго порядка собственной энергии фотона соответствует перенормировочный контрчлен $Z_2 - 1$. Заметим, что первое слагаемое можно понимать *либо* как результат вставки в фотонную собственнoэнергетическую часть, даваемую интегралом по p , вместо левой вершины поправки к ней, т. е. вершинной части третьего порядка, которая дается интегралом по p' , *либо* как результат вставки в фотонную собственнoэнергетическую часть, даваемую интегралом по p' , вместо правой вершины поправки к ней, даваемой интегралом по p . Однако *нельзя* рассматривать первое слагаемое как вставку двух независимых поправок к вершинам, т. к. в диаграмме есть только один фотонный пропагатор.

Чтобы понять, как обращаться с бесконечностями в (12.2.16), заметим, что

$$[(Z_2 - 1)_2 + R_2] \gamma_\mu = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{p'^2 - i\epsilon} \gamma_\rho S(p') \gamma_\mu S(p') \gamma^\rho, \quad (12.2.17)$$

где R_2 – конечный остаток. (В силу лоренц-инвариантности интеграл справа пропорционален γ_μ . Разность между этим интегралом и $(Z_2 - 1)_2 \gamma_\mu$ равна полной перенормированной электрон–электрон–фотонной вершине во втором порядке по e при нулевых значениях импульсов электрона и фотона, и поэтому конечна.) Это позволяет переписать (12.16) в виде:

$$\begin{aligned} [\Pi_{\mu\nu}^*(q)]_{\text{перекр.}} &= -\frac{e^4}{(2\pi)^8} \int d^4 p \int d^4 p' \\ &\times \left[\frac{1}{(p-p)^2 - i\epsilon} \text{Tr}\{S(p') \gamma_\nu S(p'+q) \gamma^\rho S(p+q) \gamma_\mu S(p) \gamma_\rho\} \right. \\ &\quad - \frac{1}{p'^2 - i\epsilon} \text{Tr}\{S(p') \gamma_\nu S(p') \gamma^\rho S(p+q) \gamma_\mu S(p) \gamma_\rho\} \\ &\quad \left. - \frac{1}{p^2 - i\epsilon} \text{Tr}\{S(p') \gamma_\nu S(p'+q) \gamma^\rho S(p) \gamma_\mu S(p) \gamma_\rho\} \right] \\ &\quad - 2R_2 \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \text{Tr}\{\gamma_\nu S(p+q) \gamma_\mu S(p)\} \\ &\quad - (Z_3 - 1)_{\text{перекр.}} (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu). \end{aligned} \quad (12.2.18)$$

Рассмотрим сначала интегрирование только по p' . Каждое из первых двух слагаемых логарифмически расходится, однако их разность конечна. Третье слагаемое также логарифмически расходится (при калибровочно инвариантной регуляризации), но расходимость в этом слагаемом (в противоположность двум первым) имеет вид полинома второго порядка по q с конечным остатком. Эта остающаяся расходимость сокращается со слагаемым $-(Z_3 - 1)(q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$, которое уничтожает все слагаемые второго порядка в разложении $\Pi_{\mu\nu}^*(q)$. Таким образом, подинтегрирование по p' приводит к конечному результату. Из симметрии выражения (12.2.16) следует, что точно таким же образом дает конечный результат подинтегрирование по p . Общего вида подинтегрирования по p и p' при фиксированном значении $ap + bp'$ (a и b — произвольные ненулевые константы) явно сходятся, а результат совместного интегрирования по p и p' приводится к конечному ответу с помощью включения контрчлена $-(Z_3 - 1)(q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$. Таким образом, интеграл (12.2.18) и любой его подинтеграл удовлетворяют требованиям сходимости по индексу, и поэтому согласно теореме ², сформулированной в предыдущем разделе, все выражение действительно сходится.

* * *

В электродинамике существует естественное определение перенормированных констант связи, масс и полей. Однако так бывает не всегда. Например, рассмотрим теорию одного действительного скалярного поля $\phi(x)$ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{24} g \phi^4. \quad (12.2.19)$$

В однопетлевом приближении матричный элемент скаляр-скалярного рассеяния согласно фейнмановским правилам имеет вид

$$S(q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q'_2) = \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)}{(2\pi)^6 (16E'_1 E'_2 E_1 E_2)^{1/2}} F(q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q'_2), \quad (12.2.20)$$

где

$$\begin{aligned}
-i(2\pi)^4 F(q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q'_2) &= -i(2\pi)^4 g + \frac{1}{2} [-i(2\pi)^4 g]^2 \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right] \\
&\times \int d^4 k \left[\frac{1}{[(q_1 + k)^2 + m^2 - i\epsilon][(q_2 - k)^2 + m^2 - i\epsilon]} \right. \\
&\quad \left. + (q_2 \rightarrow -q'_1) + (q_2 \rightarrow -q'_2) \right], \quad (12.2.21)
\end{aligned}$$

и q_1, q_2, q'_1, q'_2 – входящие и выходящие 4-импульсы. Объединяя знаменатели и обычным способом поворачивая контур интегрирования по k^0 , получаем:

$$\begin{aligned}
F &= g - \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk \int_0^1 dx \left\{ [k^2 + m^2 - sx(1-x)]^{-2} \right. \\
&\quad \left. + [k^2 + m^2 - tx(1-x)]^{-2} + [k^2 + m^2 - ux(1-x)]^{-2} \right\}, \quad (12.2.22)
\end{aligned}$$

где s, t и u – мандельштамовские переменные

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 - p'_1)^2, \quad u = -(p_1 - p'_2)^2, \quad (12.2.23)$$

связанные соотношением $s + t + u = 4m^2$, а x – фейнмановский параметр, вводимый при объединении знаменателей. Совершая ультрафиолетовое обрезание при $k = \Lambda$, приходим к выражению (при $\Lambda \gg m$)

$$\begin{aligned}
F &= g - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)} \right) - 3 \right\}. \quad (12.2.24)
\end{aligned}$$

Мы можем определить перенормированную константу g_R как значение F в любой точке s, t, u , при условии, что мы остаемся в области, где F действительна. Например, предположим, что с целью сохранить симметрию между скалярами, мы выбираем

точку нормировки $p_1^2 = p_2^2 = p_1'^2 = p_2'^2 = \mu^2$, $s = t = u = -4\mu^2 / 3$ вне массовой поверхности*. Определяя перенормированную константу g_R как значение F в этой точке, имеем

$$g = g_R + \frac{3g^2}{32\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) - 1 - \int_0^1 dx \ln\left(\frac{4x(1-x)}{3} + \frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] + \dots \quad (12.2.25)$$

Зависимость от обрезания в (12.2.24) сокращается в порядке g_R^2 , и в результате остается конечная формула для F , выраженная через g_R :

$$F = g_R - \frac{g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2 / 3}{m^2 - sx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2 / 3}{m^2 - tx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{m^2 + 4x(1-x)\mu^2 / 3}{m^2 - ux(1-x)}\right) \right\} + \dots \quad (12.2.26)$$

Здесь μ^2 можно считать любой действительной величиной, большей $-3m^2$, и в этой области g_R действительна. Явная зависимость (12.2.26) от μ , конечно, сокращается с зависимостью от μ перенормированной константы. Эта свобода изменять рецепт перенормировки (которая, конечно, существует и в электродинамике, и в других реалистичных теориях) будет иметь большое значение, когда мы перейдем к рассмотрению в т. II метода ренормгруппы.

12.3. Нужна ли перенормируемость?

В предыдущем разделе мы обнаружили специальный класс теорий, в лагранжиане которых имеется лишь конечное число слагаемых, и к которым тем не менее применима программа

* Проследив еще раз вывод формулы (12.2.25), можно убедиться, что в нем не использовались условия $p_1^2 = p_2^2 = p_1'^2 = p_2'^2 = -m^2$, так что формула (12.2.24) верна при любых значениях масс внешних линий.

перенормировок. Это теории, в которых все взаимодействия удовлетворяют условию перенормируемости

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1) \geq 0,$$

где d_i и n_{if} — числа производных и полей типа f во взаимодействиях типа i , а s_f есть (с некоторыми уточнениями) спин полей типа f . Чтобы в таких теориях была осуществима перенормировка, обычно еще необходимо, чтобы все разрешенные принципами симметрии перенормируемые взаимодействия действительно содержались в лагранжиане.

Важно, что существует лишь ограниченное число взаимодействий такого типа. Величина Δ_i становится отрицательной, если у нас слишком много полей или производных, или полей со слишком большими значениями спина. Если нет специальных сокращений, вообще не существует перенормируемых взаимодействий, включающих поля спина $s_f \geq 1$, поскольку единственное возможное слагаемое в лагранжиане с $\Delta_i \geq 0$, включающее такое поле вместе с двумя или более другими полями, должно содержать одно поле с $s_f = 1$ и два скаляра без всяких производных, что противоречит лоренц-инвариантности. В т. II мы увидим, что произвольные безмассовые калибровочные поля спина 1 в соответствующей калибровке эффективно имеют $s_f = 0$ как у фотона. Кроме того, в т. II будет показано, что даже массивные калибровочные поля могут эффективно иметь $s_f = 0$ в зависимости от того, каким образом они приобрели массу. Если не считать этих особых случаев, в табл. 12.2 приведен список всех перенормируемых слагаемых в лагранжиане, разрешенных лоренц-инвариантностью и калибровочной инвариантностью и включающих скаляры ($s = 0$), фотоны ($s = 0$) и фермионы спина $1/2$ ($s = 1/2$).

Мы видим, что требование перенормируемости накладывает жесткие ограничения на возможные физические теории. Подобные ограничения являются ценным ключом к пониманию структуры этих теорий. Например, лоренцовская и калибровочная инвариантности сами по себе разрешают введение «паулиевского» слагаемого, пропорционального $\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ в лагранжиан квантовой электродинамики, что сделало бы магнитный момент электрона настраиваемым параметром, но мы исключаем подобные слагаемые, поскольку они перенормируемы.

Таблица 12.2

n_{if}			d_i	Δ_i	\mathcal{H}_i
Скаляры	Фотоны	Спин 1/2			
1	0	0	0	3	φ
2	0	0	0	2	φ^2
2	0	0	2	0	$\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$
3	0	0	0	1	φ^3
4	0	0	0	0	φ^4
2	1	0	1	0	$\varphi \partial_\mu \varphi A^\mu$
2	2	0	0	0	$\varphi^2 A_\mu A^\mu$
1	0	2	0	0	$\varphi \bar{\psi} \psi$
0	2	0	2	0	$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
0	0	2	0	1	$\bar{\psi} \psi$
0	0	2	1	0	$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$
0	1	2	0	0	$\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$

Табл. 12.2. Допустимые перенормируемые слагаемые в лагранжиане, содержащие скалярные поля φ , дираковские поля ψ и поля фотонов A^μ . Величины n_{if} и d_i — число полей типа f и число производных во взаимодействии типа i , Δ_i — размерность соответствующего коэффициента

Успешные предсказания квантовой электродинамики вроде описанного в разделе 11.3 вычисления магнитного момента электрона можно рассматривать как подтверждения принципа перенормируемости. Это же относится и к стандартной модели слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий, обсуждаемой в т. II. Есть множество слагаемых, которые можно было бы добавить в лагранжиан этой теории, например, четырехфермионные взаимодействия между кварками и лептонами, и которые полностью исказили бы все предсказания стандартной модели, но такие слагаемые исключаются только на том основании, что они перенормируемы.

Должны ли мы верить утверждению, что лагранжиан может содержать только перенормируемые взаимодействия? Как мы ви-

дели в предыдущем разделе, если включить в лагранжиан *все* бесконечное количество взаимодействий, разрешенных симметриями, то для сокращения каждой ультрафиолетовой расходимости найдется соответствующий контрчлен. В этом смысле, как и утверждалось ранее, неперенормируемые теории так же перенормируемы, как и перенормируемые теории, если только в лагранжиан включены все возможные слагаемые.

В последние годы усиливается ощущение, что перенормируемость не является фундаментальным физическим требованием, и что на самом деле любая реалистичная квантовая теория поля должна содержать как перенормируемые, так и неперенормируемые слагаемые. Такое изменение точки зрения можно отчасти проследить в продолжающихся неудачных попытках построить перенормируемую теорию гравитации. В общем классе метрических теорий тяготения, подчиняющихся эйнштейновскому принципу эквивалентности, вообще нет перенормируемых взаимодействий: общековариантные взаимодействия должны строиться из тензора кривизны и его общековариантных производных, и поэтому даже в «калибровке», в которой пропагатор гравитона ведет себя как k^{-2} , эти взаимодействия содержат слишком много производных метрического тензора для того, чтобы быть перенормируемыми. В частности, неперенормируемость общей теории относительности следует из того известного факта, что константа гравитационного взаимодействия $8\pi G_N = (2,43 \cdot 10^{18} \text{ ГэВ})^{-2}$ имеет отрицательную размерность. Даже если со всем остальным все в порядке, сокращение расходимостей из-за виртуальных гравитонов будет требовать наличия в лагранжиане всех разрешенных симметриями взаимодействий, включающих не только гравитоны, но и любые частицы.

Но если перенормируемость не является фундаментальным физическим принципом, то как же объяснить успех перенормируемых теорий вроде квантовой электродинамики и стандартной модели? Ответ можно получить с помощью простого размерного анализа. Мы уже отмечали, что константа связи взаимодействия типа i имеет размерность

$$[g_i] \sim [\text{масса}]^{\Delta_i}, \quad (12.3.1)$$

где показатель Δ_i дается формулой (12.1.9). К неперенормируемым относятся те взаимодействия, у которых константы связи имеют *отрицательную* массовую размерность. Представляется разум-

ным предположить на основании формулы (12.3.1), что константы связи не только имеют размерности, определяемые значением Δ_i , но имеют величину порядка

$$g_i \approx M^{\Delta_i}, \quad (12.3.2)$$

где M – некоторая общая масса. (Именно так обстоит дело в случае эффективных теорий поля, которые рассмотрены ниже и, более подробно, в т. II.) При расчете физических процессов, происходящих на характерных масштабах $k \ll M$, включение неперенормируемого взаимодействия типа i с $\Delta_i < 0$ приводит к появлению множителя $g_i \approx M^{\Delta_i}$, который по размерным соображениям должен сопровождаться множителем $k^{-\Delta_i}$, так что в результате такое взаимодействие подавляется* при $k \ll M$ множителем $(k/M)^{-\Delta_i} \ll 1$. (Этот аргумент более аккуратно будет рассмотрен в т. II с помощью метода ренормгруппы.) Успех перенормируемых теорий электрослабых и сильных взаимодействий всего лишь показывает, что M намного больше, чем тот масштаб энергий, на котором эти взаимодействия проверены.

Например, ведущими неперенормируемыми поправками к обычной электродинамике электронов или мюонов были бы те взаимодействия размерностью 5, которые подавляются только одним множителем $1/M$. Лоренцовская, калибровочная и СР-инвариантность допускают единственное такое взаимодействие – паулиевское слагаемое вида $(ie/M) \bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$. Согласно (10.6.24), (10.6.17) и (10.6.19), такое слагаемое вносит в магнитный момент электрона

* В этом месте существенно предположение, что ультрафиолетовые расходимости были устранены с помощью перенормировки, так что отсутствуют множители, содержащие ультрафиолетовое обрезание Λ , которые могут помешать размерному анализу. В противном случае, из этого анализа следует, что при $\Lambda \rightarrow \infty$ каждая дополнительная неперенормированная константа связи g_i с $\Delta_i < 0$ сопровождалась бы растущим множителем $\Lambda^{-\Delta_i}$. Уже очень давно аргументы, основанные на размерных соображениях, привели Гейзенберга к классификации взаимодействий в соответствии с размерностью их констант связи и к предположению¹⁰, что при энергиях порядка g_i^{1/Δ_i} должны возникать новые явления, например, при энергии $G_F^{-1/2} \approx 300$ ГэВ, где G_F – четырехфермионная константа связи в фермиевской теории бета-распада. После развития теории перенормировок Саката и др. отметили¹¹, что неперенормируемыми являются теории, в которых константы связи имеют отрицательную размерность.

или мюона вклад порядка $4e/M$. Рассчитанное значение магнитного момента электрона согласуется с экспериментом с точностью до слагаемых порядка $10^{-10}(e/2m_e)$, так что M должна быть больше, чем $8 \cdot 10^{10}m_e = 4 \cdot 10^7$ ГэВ.

Этот предел может быть ослаблен, если форму неперенормируемых взаимодействий ограничивают другие симметрии. Например, обычный лагранжиан квантовой электродинамики инвариантен относительно кирального преобразования $\Psi \rightarrow \gamma_5 \Psi$, если не считать изменения знака у фермионного массового члена $-m \bar{\Psi} \Psi$. Если предположить, что полный лагранжиан инвариантен относительно формальной симметрии $\Psi \rightarrow \gamma_5 \Psi$, $m \rightarrow -m$, то паулиевское слагаемое в лагранжиане должно было бы входить с дополнительным множителем m/M , так что его вклад в магнитный момент был бы только порядка $4em/M^2$. Из-за появления лишнего множителя m , самая значимая оценка на M извлекается из формул для мюона, а не для электрона. Рассчитанное значение магнитного момента мюона согласуется с экспериментом с точностью до слагаемых порядка $10^{-8}(e/2m_e)$, так что M должна быть больше, чем $\sqrt{8 \cdot 10^8} m_\mu \approx 3 \cdot 10^3$ ГэВ. В любом случае, если M лежит где-то в области значений 10^{18} ГэВ, мы с уверенностью пренебрегаем любыми неперенормируемыми взаимодействиями, которые могут возникать в квантовой электродинамике.

Эти соображения позволяют разобраться с некоторыми проблемами, связанными со слагаемыми с высшими производными в лагранжиане. Например, в общей теории действительного скалярного поля ϕ можно ожидать появления в лагранжиане слагаемых вида $\phi \square^n \phi$. Любое подобное слагаемое будет давать прямой вклад в скалярную собственнoэнергетическую функцию $\Pi(q^2)$, пропорциональный $(q^2)^n$. Если бы мы включили такой вклад во всех порядках, но пренебрегли бы всеми другими эффектами неперенормируемых взаимодействий, то пропагатор скалярного поля $\Delta'(q^2) = 1 / (q^2 + m^2 - \Pi^*(q^2))$ имел бы не один простой полюс по q^2 при отрицательных q^2 , который можно ожидать на основании общих соображений раздела 10.7, а n таких полюсов (некоторые из которых могут совпадать), вообще говоря, при комплексных значениях q^2 . Но если неперенормируемое слагаемое $\phi \square^n \phi$ содержит коэффициент порядка $M^{-2(n-1)}$, где $M \gg m$, тогда дополнительные полюсы находятся при значениях q^2 порядка M^2 , т. е. в области, где неправомерно игнорировать бесконечное число других непе-

ренормируемых взаимодействий, которые также должны появиться в лагранжиане. Итак, появление слагаемых с высшими производными в общем неперенормируемом лагранжиане не противоречит общим принципам квантовой теории поля, использованным в разделе 10.7. Однако по тем же соображениям нельзя использовать слагаемые с высшими производными, чтобы избежать появления ультрафиолетовых расходимостей, как это неоднократно предлагалось. Слагаемое $M^{-2(n-1)}\phi\Box^n\phi$ в лагранжиане обеспечивает обрезание при импульсах $q^2 \approx M^2$, но при таких импульсах нельзя игнорировать все другие неперенормируемые взаимодействия, которые обязательно должны присутствовать.

Вклад неперенормируемых взаимодействий сильно подавлен, однако может быть обнаружен, если они приводят к эффектам, запрещенным при отсутствии таких взаимодействий. Например, мы увидим в разделе 12.5, что симметрии относительно зарядового сопряжения и пространственной инверсии являются автоматическим следствием структуры электромагнитных взаимодействий, определяемой требованиями калибровочной и лоренцевской инвариантности и перенормируемости. Однако можно легко вообразить неперенормируемые слагаемые, нарушающие эти симметрии, например, слагаемое с электрическим дипольным моментом электрона вида $\bar{\psi}\gamma_5[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ или фермиевское взаимодействие $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Сейчас широко распространена точка зрения, что сохранение барионного и лептонного чисел нарушается очень слабыми эффектами сильно подавленных неперенормируемых взаимодействий. Другим примером детектируемых неперенормируемых взаимодействий является гравитация. Как отмечалось выше, у гравитонов вообще нет перенормируемых взаимодействий. Но, естественно, мы наблюдаем гравитацию, потому что она обладает особым свойством: гравитационные поля всех частиц в макроскопическом теле когерентно складываются.

Хотя неперенормируемые теории содержат бесконечное число свободных параметров, они, тем не менее, сохраняют значительную предсказательную силу¹²: эти теории позволяют вычислить неаналитические части фейнмановских амплитуд, типа слагаемых $\ln q$ и $q \ln q$ в рассмотренных в начале предыдущего раздела одномерных примерах. Такие вычисления воспроизводят результаты, вытекающие из аксиом теории S -матрицы, а именно, что S -матрица обладает лишь теми сингулярностями, которые требуются условием унитарности.

Парадоксальным образом неперенормируемые квантовые теории поля оказываются наиболее полезными в случаях, когда принципы симметрии запрещают перенормируемые взаимодействия. В таких случаях можно развить полезную теорию возмущений, разлагая в ряд по степеням k/M . Такой подход был детально разработан для теории пионов низких энергий^{12,13}, которая будет подробно обсуждаться в т. II, и в теории гравитонов низких энергий¹⁴. Чтобы привести пример попроще, рассмотрим теорию действительного скалярного поля, удовлетворяющую принципу инвариантности относительно трансляций поля

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \varepsilon,$$

где ε — произвольная константа. Эта симметрия запрещает любое перенормируемое взаимодействие или массу скаляра, но допускает бесконечное число неперенормируемых взаимодействий с производными

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{g}{4} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2 - \dots,$$

где $g \approx M^{-4}$, а «...» означает слагаемые с бóльшим числом производных или полей. (Для простоты здесь предполагается, что теория симметрична относительно отражения $\phi \rightarrow -\phi$.) Согласно проделанному выше размерному анализу, диаграмма произвольной реакции, в которой все энергии и импульсы порядка $k \ll M$, подавлена фактором $(k/M)^v$, где

$$v = -\sum_i V_i \Delta_i = \sum_i V_i (d_i + n_i - 4),$$

и n_i, d_i — числа скалярных полей и их производных во взаимодействии типа i , а V_i — число вершин таких взаимодействий в диаграмме. При $k \ll M$ главный вклад в любой процесс соответствует наименьшему значению v . Формулу для v можно представить в более удобном виде, используя известные топологические тождества для связных диаграмм:

$$\sum_i V_i = I - L + 1, \quad \sum_i V_i n_i = 2I + E,$$

где I , E и L – числа внутренних линий, внешних линий и петель в нашей диаграмме. Комбинируя эти выражения, получаем

$$v = 2E - 4 + 4L + \sum_i V_i(d_i - n_i).$$

Симметрия относительно трансляций полей требует, чтобы каждое поле сопровождалось по меньшей мере одной производной, так что величина $d_i - n_i$, а также L неотрицательны для всех взаимодействий. Таким образом, для данного процесса (т. е. при фиксированном числе внешних линий E) главными будут вклады от *древесных* диаграмм (с $L = 0$), отвечающим взаимодействиям с минимальным числом $d_i = n_i$ производных. Иными словами, в ведущем порядке можно считать, что лагранжиан зависит только от *первых* производных поля. Поправки более высокого порядка могут содержать петли и/или взаимодействия с большим числом производных от некоторых полей. Но в любом данном порядке v по (k/M) нужно рассматривать только конечное число диаграмм, для которых $L \leq (4 - 2E + v)/4$, и только конечное число типов взаимодействий.

Например, скаляр–скалярное рассеяние в ведущем порядке определяется *древесной* диаграммой с одной вершиной, вклад которой можно найти, используя взаимодействие $-g(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2$ в первом порядке теории возмущений. Согласно нашей формуле для v , главная поправка, подавленная при низких энергиях множителем $(k/M)^2$, возникает от другой *древесной* диаграммы с одной вершиной, порождаемой взаимодействием с двумя дополнительными производными вида * $\partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^\mu \partial^\nu \phi \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi$. Следующие поправки, подавленные при низких энергиях двумя дополнительными множителями k/M , возникают как от *однопетлевой* диаграммы рис. 12.4 (с учетом перестановки внешних линий), вычисленной только с учетом взаимодействия $-g(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)^2$, так и от *древесных* диаграмм с единственной вершиной, возникающей от четвертичного взаимодействия с восемью производными, константы кото-

* В согласии с замечанием в разделе 7.7, мы исключаем взаимодействия, содержащие $\square \phi$, поскольку с помощью уравнений поля для ϕ можно выразить такие взаимодействия через другие.

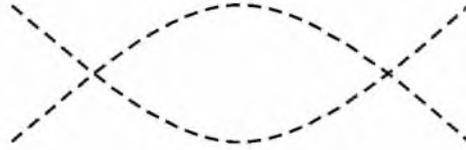


Рис. 12.4. Однопетлевая диаграмма скаляр-скалярного рассеяния в теории с четвертичным взаимодействием с производными

рого содержат бесконечные вклады, сокращающие ультрафиолетовые расходимости петлевой диаграммы*.

Петлевая диаграмма приводит также к конечным слагаемым в амплитуде рассеяния, пропорциональным выражениям типа $s^4 \ln s + t^4 \ln t + u^4 \ln u$, $s^2 t^2 \ln u + t^2 u^2 \ln s + u^2 s^2 \ln t$ и т. д. с вычисляемыми коэффициентами, пропорциональными g^2 . Указанные конечные слагаемые представляют поправки к амплитуде рассеяния в низшем порядке, необходимые для обеспечения унитарности S -матрицы, однако пока что самый простой способ их расчета — пертурбативная квантовая теория поля.

Хотя неперенормируемые теории позволяют получить полезные разложения по степеням энергии, они неизбежно теряют всякую предсказательную силу при энергиях порядка характерной для всех констант общей шкалы масс M . Если буквально воспринимать такие разложения, то полученные для элементов S -матрицы результаты будут противоречить при $E \gg M$ ограничениям, накладываемым условием унитарности. Похоже, что в отношении происходящего при таких энергиях существуют только две возможности. Одна заключается в том, что растущий вклад эффектов неперенормируемых взаимодействий как-то насыщается, так что никаких противоречий с унитарностью не возникает¹⁵. Другая связана с появлением на масштабах порядка M какой-то новой физики. В этом случае неперенормируемые теории, описывающие

* Если использовать размерную регуляризацию, то это единственные ультрафиолетовые расходимости, возникающие в однопетлевых диаграммах. В других методах регуляризации возникают также четвертичные и квадратичные расходимости, которые сокращаются контрчленами в четырехскалярных взаимодействиях с четырьмя или шестью производными.

природу при энергиях $E \ll M$, являются не истинно фундаментальными, а просто *эффективными теориями поля*.

Вероятно, самым первым примером эффективной теории поля была построенная в 1930-х годах Эйлером и др.¹⁶ теория низкоэнергетических фотон-фотонных взаимодействий (см. раздел 1.3). По существу они вычислили вклад в фотон-фотонное рассеяние фейнмановских диаграмм типа показанной на рис. 12.5, и обнаружили, что при энергиях много меньших m_e рассеяние света на света оказывается таким же, как если бы оно было вычислено с помощью эффективного лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{2\alpha^2}{45m_e^4} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2]$$

+ более высокие порядки по $\frac{eE}{m_e^2}$ и $\frac{eB}{m_e^2}$.

Эйлер и др. использовали этот эффективный лагранжиан только в древесном приближении, и вычислили ведущие слагаемые в матричных элементах фотонного взаимодействия. Лишь намного позднее такие лагранжианы, несмотря на их неперенормируемость, стали использовать вне рамок древесного приближения^{12,17}.

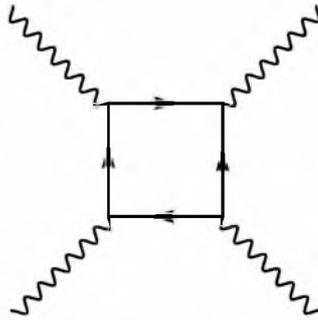


Рис. 12.5. Диаграмма фотон-фотонного рассеяния. Ее вклад при низких энергиях можно вычислить, исходя из эффективного лагранжиана Эйлера и др.¹⁶. Прямые линии отвечают электронам, волнистые — фотонам

На современном жаргоне мы говорим, что при получении такого лагранжиана «по электронам было произведено интегрирование», поскольку в однопетлевом приближении

$$\exp\left(i \int \mathcal{L}_{\text{эфф}}(\mathbf{E}, \mathbf{V}) d^4x\right) = \int \left[\prod_x d\psi_e(x) \right] \exp\left(i \int \mathcal{L}_{\text{кЭД}}(\psi_e, \mathbf{A}) d^4x\right).$$

Более общая процедура заключается в том, чтобы выписать самый общий неперенормируемый эффективный лагранжиан, с его помощью рассчитать различные амплитуды в виде разложений в ряд по энергиям и импульсам, а затем выбрать константы в эффективном лагранжиане, сравнив полученные результаты с теми, которые выводятся с помощью лежащей в основе теории.

Мы еще вернемся к эффективным теориям поля, особенно при рассмотрении нарушенных симметрий в т. II. Как будет показано, эффективные теории поля полезны, даже если их нельзя вывести из лежащей в основе теории, либо потому, что эта теория неизвестна, либо потому, что взаимодействия в ней слишком сильны, чтобы можно было использовать теорию возмущений. Действительно, даже если мы ничего не знаем о свойствах заряженных частиц, рассеяние фотонов при достаточно низких энергиях должно будет описываться эффективным лагранжианом, содержащим слагаемые $(\mathbf{E}^2 - \mathbf{V}^2)^2$ и $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{V})^2$, поскольку это единственные четвертичные калибровочно и лоренц-инвариантные слагаемые, не содержащие производных от \mathbf{E} и \mathbf{V} . Слагаемые с такими производными должны быть подавлены при низких энергиях фотонов E дополнительными множителями E/M , где M — некоторая типичная масса заряженных частиц, по которым было произведено интегрирование. Можно продвинуться еще дальше: будет показано, что эффективные теории поля полезны даже в том случае, когда описываемые ими легкие частицы вообще не присутствуют в исходной теории, а состоят из тяжелых частиц, по которым произведено интегрирование. Лежащая в основе теория может вообще не быть теорией поля — трудности с включением гравитации привели многих теоретиков к убеждению, что такая теория есть на самом деле теория струн. Но откуда бы ни возникала эффективная теория поля, она неизбежно должна быть перенормируемой.

12.4. Плавающее обрезание *

Прежде чем завершить эту главу, полезно сделать несколько замечаний о связи общепринятой теории перенормировок с подходом, впервые развитым Вильсоном¹⁸. В методе Вильсона вводится «плавающее» конечное ультрафиолетовое обрезание (либо резкое, либо сглаженное) при импульсах с компонентами порядка Λ , а затем вместо устремления $\Lambda \rightarrow \infty$ требуется, чтобы голые константы теории ** (входящие в лагранжиан) зависели от Λ таким образом, чтобы все наблюдаемые величины не зависели от Λ .

Удобно работать с безразмерными параметрами. Если голая константа связи или массовый параметр $g_i(\Lambda)$ имеют размерность $[\text{масса}]^{\Delta_i}$, можно определить соответствующий безразмерный параметр \mathcal{G}_i формулой

$$\mathcal{G}_i(\Lambda) \equiv \Lambda^{-\Delta_i} g_i(\Lambda). \quad (12.4.1)$$

На основании обычного размерного анализа получаем, что значение \mathcal{G}_i при каком-то значении Λ' параметра обрезания можно записать как функцию значения \mathcal{G}_i при другом значении параметра Λ и отношения Λ'/Λ :

$$\mathcal{G}_i(\Lambda') = F_i(\mathcal{G}_i(\Lambda), \Lambda'/\Lambda). \quad (12.4.2)$$

В функции F не могут появиться никакие другие параметры, кроме Λ' и Λ , поскольку в ней не может быть ультрафиолетовых или инфракрасных расходимостей. Действительно, разница между константами при значениях Λ и Λ' возникает от диаграмм, у которых импульсы внутренних линий имеют значения между Λ и Λ' . Дифференцируя (12.4.2) по Λ' и полагая затем Λ' равным Λ , приходим к дифференциальному уравнению для \mathcal{G}_i :

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

** Имеются в виду параметры теории — как собственно константы связи, так и массовые параметры. Ниже часто они все, для краткости, называются константами связи (*couplings*). — *Прим. ред.*

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \mathcal{G}_i(\Lambda) = \beta_i(\mathcal{G}(\Lambda)), \quad (12.4.3)$$

где $\beta_i(\mathcal{G}) \equiv [\partial/\partial z(F_i(\mathcal{G}, z))]_{z=1}$. При малых константах связи функции $\beta_i(\mathcal{G})$ можно вычислить по теории возмущений. Это вильсоновский вариант уравнения «ренормгруппы», которое мы в несколько иной форме обсудим в т. II.

При любом конечном значении обрезания лагранжиан определяет эффективную теорию поля, в которой вместо интегрирования по «тяжелым» частицам вроде электрона в работе Эйлера и др. (или в добавление к этому интегрированию) производится интегрирование по *всем* частицам с импульсами больше Λ . Даже если в исходной теории есть конечное число параметров связи \mathcal{G}_i^0 при некотором значении обрезания Λ_0 , при любом другом значении обрезания дифференциальное уравнение (12.4.3) приведет в общем случае к ненулевым значениям всех констант связи, разрешенных принципами симметрии*.

Будем различать перенормируемые и неперенормируемые константы связи, обозначив их, соответственно, \mathcal{G}_a и \mathcal{G}_n , где a нумерует конечное число N констант связи (включая массы), для которых $\Delta_a \geq 0$, а n нумерует бесконечное число констант связи с размерностями $\Delta_n < 0$. Мы хотим показать, что если константы связи $\mathcal{G}_a(\Lambda_0)$ и $\mathcal{G}_n(\Lambda_0)$ при некотором начальном значении обрезания Λ_0 находятся на произвольной N -мерной начальной поверхности \mathcal{S}_0 , тогда (с некоторыми уточнениями) при $\Lambda \ll \Lambda_0$ они попадают на фиксированную поверхность \mathcal{S} , не зависящую как от Λ_0 , так и от начальной поверхности**. Эта фиксированная поверхность стабильна в том смысле, что порождаемая уравнением (12.4.3) траектория, начинающаяся из любой точки поверхности, остается на ней. Такая стабильная поверхность определяет мно-

* Единственными известными исключениями из этого правила являются теории, основанные на суперсимметрии⁴.

** Эта теорема принадлежит Польчинскому¹⁹. Ниже мы приводим сокращенное и менее строгое ее доказательство. (В доказательстве Польчинского начальная поверхность берется такой, что все неперенормируемые константы связи равны нулю. Как мы увидим, константы связи достигают одной и той же фиксированной поверхности при произвольной начальной поверхности.)

жество теорий с конечным числом параметров, физическое содержание которых не зависит от обрезания. Как пояснялось в предыдущем разделе, это есть существенное свойство перенормируемых теорий. Далее, такая конструкция показывает, что исходная теория, определенная при обрезании Λ_0 , будет при $\Lambda \ll \Lambda_0$ выглядеть как перенормируемая*.

Чтобы доказать приведенные утверждения, рассмотрим произвольное малое возмущение $\delta\mathcal{G}_i(\Lambda)$ значений $\mathcal{G}_i(\Lambda)$, удовлетворяющих уравнению (12.4.3). Оно удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \delta\mathcal{G}_i(\Lambda) = \sum_j M_{ij}(\mathcal{G}(\Lambda)) \delta\mathcal{G}_j(\Lambda), \quad (12.4.4)$$

где

$$M_{ij}(\mathcal{G}) \equiv \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}_j} \beta_i(\mathcal{G}). \quad (12.4.5)$$

Это уравнение связывает перенормируемые и неперенормируемые константы связи, так что трудно увидеть разницу в их поведении. Чтобы расцепить эту связь, введем линейную комбинацию

$$\xi_n \equiv \delta\mathcal{G}_n - \sum_{ab} \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathcal{G}_a^0} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{G}^0} \right)_{ab}^{-1} \delta\mathcal{G}_b, \quad (12.4.6)$$

где \mathcal{G}_a^0 — значения перенормируемых констант связи при обрезании Λ_0 , которые мы будем использовать как координаты на начальной поверхности, а \mathcal{G}_n — значения неперенормируемых констант связи при обрезании Λ , полученные из дифференциального уравнения (12.4.3), причем начальные значения констант при обрезании Λ_0 отвечают точке на начальной поверхности с координатами \mathcal{G}_a^0 . Чтобы вычислить производную ξ_n по Λ , заметим, что производные $\partial \mathcal{G}_i / \partial \mathcal{G}_a^0$ удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению (12.4.4), что и $\delta\mathcal{G}_i$. Доказательство того, что

* Конечно, симметрии некоторых теорий и их полевой состав таковы, что невозможны никакие перенормируемые взаимодействия. К такому случаю относятся теории, содержащие только поля фермионов, или только гравитационное поле. При $\Lambda \ll \Lambda_0$ эти теории выглядят как теории свободных полей.

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \xi_n = \sum_m N_{nm} \xi_m, \quad (12.4.7)$$

где

$$N_{nm} \equiv M_{nm} - \sum_{ab} \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathcal{G}_a^0} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{G}^0} \right)_{ab}^{-1} M_{bm}. \quad (12.4.8)$$

проводится элементарно. Теперь следует оценить матричные элементы матрицы N_{nm} . В теории свободных полей не требуется никаких обрезаний, поэтому при очень малых константах связи все голые параметры становятся независимыми от Λ . Отсюда для малых констант безразмерные параметры \mathcal{G}_i имеют масштаб $\Lambda^{-\Delta_i}$, и матрица M_{ij} имеет вид

$$M_{ij} \approx -\Delta_i \delta_{ij}. \quad (12.4.9)$$

Отсюда следует, что матрица N_{nm} приближенно равна $-\Delta_n \delta_{nm}$. Определяющей характеристикой неперенормируемых констант связи является условие $\Delta_n < 0$. Из (12.4.7) следует, что, по крайней мере для некоторой конечной области значений констант связи, где матрица N_{nm} положительно определена, величина ξ_n ведет себя при $\Lambda \ll \Lambda_0$ как положительная степень Λ/Λ_0 . В этом пределе возмущения связаны соотношением

$$\delta \mathcal{G}_n = \sum_{ab} \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial \mathcal{G}_a^0} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{G}^0} \right)_{ab}^{-1} \delta \mathcal{G}_b. \quad (12.4.10)$$

В частности, если немного изменить начальную поверхность \mathcal{S}_0 и/или начальную точку на этой поверхности, и/или начальное обрезание Λ_0 , так что возмущения перенормируемых констант связи $\delta \mathcal{G}_a$ обратятся в нуль при некотором обрезании $\Lambda \ll \Lambda_0$, то и возмущения $\delta \mathcal{G}_n$ всех других констант также обратятся в нуль при значении обрезания Λ . Следовательно неперенормируемые константы $\mathcal{G}_n(\Lambda)$ при $\Lambda \ll \Lambda_0$ могут зависеть только от перенормируемых констант $\mathcal{G}_a(\Lambda)$, а не от начальной поверхности, начальной точки или начального обрезания Λ_0 по отдельности. При $\Lambda \ll \Lambda_0$ все константы достигают, таким образом, N -мерной поверхно-

сти \mathcal{S} с координатами $\mathcal{G}_a(\Lambda)$, которая не зависит ни от начальной поверхности, ни от величины Λ_0 .

Заметим, что неперенормируемые константы связи \mathcal{G}_n на \mathcal{S} в общем случае не малы. Важно то, что они становятся функциями перенормируемых констант. Изменения Λ при условии, что Λ много меньше Λ_0 , изменяют константы, но они остаются вблизи \mathcal{S} (по крайней мере, до тех пор, пока константы связи не станут настолько большими, что N_{nm} уже не будет положительно определенной матрицей). Итак, \mathcal{S} является стабильной поверхностью, что и требовалось доказать.

Мы видели, что все физические величины можно выразить через Λ и $\mathcal{G}_n(\Lambda)$, причем физические величины от Λ не зависят. В частности, это верно для N обычных перенормированных констант связи и масс, вроде e и m_e в квантовой электродинамике. Но теперь можно обратить это соотношение и выразить $\mathcal{G}_n(\Lambda)$ через обычные параметры и Λ . Таким образом можно обосновать обычную программу перенормировок: все физические величины выражаются независимым от обрезания способом через обычные перенормированные константы связи и массы.

Подход Вильсона имеет ряд практических преимуществ. Не нужно беспокоиться о внутренних интегрированиях и перекрывающихся расходимостях. Обрезание по импульсам применяется ко всем внутренним линиям. Кроме того, ряд теорем о неперенормировке* для суперсимметричных теорий, утверждающих, что некоторые константы не изменяются при учете радиационных поправок, оказываются верными только для зависящих от обрезания голых констант связи²⁰.

С другой стороны, у вильсоновского подхода есть и недостатки. Приходится отказаться от ряда упрощений, возникающих при работе с перенормируемыми теориями типа квантовой электродинамики. Поскольку мы начинаем с того, что по частицам с импульсами, превышающими некоторый масштаб Λ , производится интегрирование, результирующая эффективная теория поля оказывается содержащей все лоренц- и калибровочно-инвариантные взаимодействия с не зависящими от Λ константами. (Тем не менее, в физических процессах при энергиях $E \ll \Lambda$ доминирующими будут все же перенорми-

* Англоязычный термин *nonrenormalization theorem* мы переводим как *теорема о неперенормировке*. — Прим. пер.

руемые константы связи.) Кроме того, обрезание в общем случае разрушает *явную* калибровочную инвариантность, а также либо явную лоренц-инвариантность, либо унитарность. Ни одной из этих проблем нет в физике конденсированных сред, для которых и был первоначально разработан метод Вильсона, поскольку никто не ожидает, что реалистическая теория конденсированного вещества должна быть строго перенормируемой, и нет никаких фундаментальных физических принципов, которые обязательно нарушаются обрезанием. На самом деле, в кристаллах *существует* обрезание по импульсам фононов, определяющееся периодом обратной решетки.

Если посмотреть глубже, разница между обычным и вильсоновским подходами есть вопрос математического удобства, а не физической интерпретации. Действительно, обычная перенормировка уже приводит к чему-то вроде настраиваемого обрезания: когда мы выражаем наш ответ через константы связи, определенные как значения физических амплитуд при некоторых импульсах порядка μ (как для обсуждавшейся в предыдущем разделе скалярной теории поля), те сокращения, которые делают интегралы сходящимися, начинают действовать при виртуальных импульсах порядка μ . Наоборот, зависящие от Λ константы связи в подходе Вильсона должны в конечном счете быть выражены через наблюдаемые массы и заряды, и когда это сделано, результаты совпадают с теми, которые получены обычными способами.

12.5. Случайные симметрии *

Как показано в разделе 12.3, есть хорошие основания считать, что перенормируемые теории поля приближенно описывают природу при достаточно низких энергиях. Часто требование перенормируемости оказывается настолько жестким, что эффективный лагранжиан автоматически подчиняется одной или более симметриям, которые не являются симметриями исходной теории и могут поэтому нарушаться подавленными неперенормируемыми слагаемыми в эффективном лагранжиане. Действительно, большинство экспериментально обнаруженных симметрий в фи-

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении.

зике элементарных частиц являются «случайными симметриями» указанного типа.

Классическими примерами могут служить инверсии и сохранение аромата в электродинамике заряженных лептонов. Наиболее общий перенормируемый лоренц-инвариантный и калибровочно инвариантный лагранжиан фотонов и полей Ψ_i спина 1/2 и заряда $-e$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & - \sum_{ij} Z_{Lij} \bar{\Psi}_{Li} [\partial + ieA] \Psi_{Lj} - \sum_{ij} Z_{Rij} \bar{\Psi}_{Ri} [\partial + ieA] \Psi_{Rj} \\ & - \sum_{ij} M_{ij} \bar{\Psi}_{Li} \Psi_{Rj} - \sum_{ij} M_{ij}^\dagger \bar{\Psi}_{Ri} \Psi_{Lj}, \end{aligned} \quad (12.5.1)$$

где сумма по i, j является суммой по трем лептонным ароматам (e, μ, τ), Ψ_{Li} и Ψ_{Ri} — левые и правые компоненты поля Ψ_i , определенные согласно формулам

$$\Psi_{Li} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi_i, \quad \Psi_{Ri} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi_i, \quad (12.5.2)$$

а Z_L, Z_R и M — числовые матрицы. Мы не делаем никаких предположений о сохранении лептонного аромата, так что матрицы Z_{Lij}, Z_{Rij} и M_{ij} не обязаны быть диагональными. Кроме того, мы ничего не предполагаем относительно инвариантности по отношению к P, C или T , так что нет никаких обязательных связей между Z_L и Z_R или между M и M^\dagger . Единственные ограничения на эти матрицы вытекают из действительности лагранжиана, требующей, чтобы Z_{Lij} и Z_{Rij} были эрмитовыми, и из канонических соотношений антикоммутирования, требующих, чтобы Z_{Lij} и Z_{Rij} были положительно определены.

Предположим теперь, что мы заменяем лептонные поля Ψ_L, Ψ_R новыми полями Ψ'_L, Ψ'_R , определенными согласно формулам

$$\Psi_L = S_L \Psi'_L, \quad \Psi_R = S_R \Psi'_R, \quad (12.5.3)$$

где $S_{L,R}$ — несингулярные матрицы, которые можно выбирать по желанию. Лагранжиан, выраженные через новые поля, принимает тот же вид, что и (12.5.1), но с новыми матрицами

$$Z'_L = S_L^\dagger Z_L S_L, \quad Z'_R = S_R^\dagger Z_R S_R, \quad M' = S_L^\dagger M S_R. \quad (12.5.4)$$

Можно выбрать S_L и S_R так, что $Z'_L = Z'_R = 1$. (Достаточно взять $S_{L,R} = U_{L,R} D_{L,R}$, где $U_{L,R}$ — унитарные матрицы, диагонализующие положительно определенные эрмитовы матрицы $Z_{L,R}$, а $D_{L,R}$ — диагональные матрицы, диагональные элементы которых равны обратным квадратным корням из собственных значений $Z_{L,R}$.)

Совершим теперь еще одно преобразование — от лептонных полей ψ'_l к полям ψ''_l :

$$\psi'_L = S'_L \psi''_L, \quad \psi'_R = S'_R \psi''_R. \quad (12.5.5)$$

Если выразить лагранжиан через новые поля, он вновь принимает ту же форму с новыми матрицами

$$Z''_L = S'^{\dagger}_L S'_L, \quad Z''_R = S'^{\dagger}_R S'_R, \quad M'' = S'^{\dagger}_L M' S'_R. \quad (12.5.6)$$

На этот раз выберем $S'_{L,R}$ унитарными, так что опять $Z''_L = Z''_R = 1$. Эти унитарные матрицы выбираются так, чтобы матрица M'' была действительной и диагональной. (Согласно полярному разложению, M' , как и любая квадратная матрица, может быть представлена в виде $M' = V H$, где V — унитарная, а H — эрмитова матрица. Возьмем $S'_L = S'^{\dagger}_R V^\dagger$ и выберем в качестве S'_R унитарную матрицу, диагонализующую H .) Опуская штрихи, получаем, что лагранжиан принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & - \sum_i \bar{\psi}_{Li} [\partial + ieA] \psi_{Li} - \sum_i \bar{\psi}_{Ri} [\partial + ieA] \psi_{Ri} \\ & - \sum_i m_i \bar{\psi}_{Li} \psi_{Ri} - \sum_i m_i \bar{\psi}_{Ri} \psi_{Li}, \end{aligned} \quad (12.5.7)$$

где m_i — действительные числа, равные собственным значениям эрмитовой матрицы H . Окончательно это выражение можно представить в более знакомой форме:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \sum_i \bar{\psi}_i [\partial + ieA] \psi_i - \sum_i m_i \bar{\psi}_i \psi_i. \quad (12.5.8)$$

Если лагранжиан имеет такой вид, совершенно ясно, что любой перенормируемый лагранжиан электродинамики лептонов автоматически сохраняет P , C и T , а также числа лептонов (минус числа антилептонов) каждого аромата: электронного, мюонного и тау-лептонного*. В частности, несмотря на выражение (12.5.1), такая теория запрещает процессы типа $\mu \rightarrow e + \gamma$. Читатель может высказать опасение, правильно ли идентифицировать лептонные поля с функциями ψ_l (которые ранее обозначались ψ''_l) в лагранжиане (12.5.8), явно сохраняющими лептонный заряд, а не с ψ_l из лагранжиана (12.5.1), который вроде бы допускает процессы типа $\mu \rightarrow e + \gamma$. Эти опасения можно отбросить: как подчеркивалось в разделе 10.3, нет такого поля, которое можно идентифицировать с *истинным* полем мюона или электрона. На самом деле, лагранжиан (12.5.1) приводит к отличным от нуля матричным элементами радиационного распада лептона 1 в лептон 2 вне массовой поверхности. Однако, беря импульсы лептонов на массовой поверхности, мы находим, что S -матрица всех таких процессов, даже вычисленных с помощью лагранжиана (12.5.1), обращается в нуль.

При получении этих результатов было существенно, что как левые, так и правые компоненты лептонных полей, входящих в (12.5.1), имели один и тот же электрический заряд или, иными словами, левые и правые компоненты лептонных полей преобразуются одинаково под действием электромагнитных калибровочных преобразований. Как мы увидим в т. II, по схожим причинам современная перенормируемая теория сильных взаимодействий, известная под названием квантовой хромодинамики, автоматически сохраняет C и (если не считать ряда непертурбативных эффектов) P , T , а также числа кварков (минус числа антикварков) каждого кваркового аромата. Мы также увидим в т. II, что по причинам, аналогичным изложенным здесь для электродинамики, простейшая версия перенормируемой стандартной модели слабых и электромагнитных взаимодействий автоматически сохраняет лептонный аромат (хотя и не C и P). Открытой остается возможность, что эффекты неперенормируемых взаимодействий, идущие от больших масштабов масс, могут нарушать любой из упомянутых законов сохранения.

* Впервые это было показано Фейнбергом, Кабиром и мной²¹. Ранее Фейнберг²² отмечал, что эффекты слабых взаимодействий в теории с единственным типом нейтрино приводят к наблюдаемой вероятности процесса $\mu \rightarrow e + \gamma$. Эта проблема разрешилась только после открытия второго типа нейтрино.

Задачи

1. В случае размерности пространства–времени, равной 2, 3 и 6, перечислите все перенормируемые (или суперперенормируемые) лоренц-инвариантные слагаемые в лагранжиане одного скалярного поля.
2. Покажите, каким образом в квантовой электродинамике сокращаются перекрывающиеся расходимости в собственной энергии электрона.
3. Рассмотрите теорию скалярного поля ϕ и спинорного поля ψ с гамильтонианом взаимодействия $g\phi\bar{\psi}\psi$. Запишите однопетлевой вклад в собственноэнергетическую функцию скалярного поля $\Pi(q)$ как сумму расходящегося полинома по p^μ и явно сходящегося интеграла.
4. Пусть квантовая электродинамика электронов и фотонов является на самом деле эффективной теорией поля, полученной из теории, где произведено интегрирование по неизвестным частицам массой $M \gg m_e$. Предположите калибровочную и лоренц-инвариантность, однако не требуйте инвариантности относительно C, P и T. Каковы неперенормируемые слагаемые в лагранжиане в ведущем порядке по $1/M$? Как выглядят эти слагаемые в следующем порядке?

Список литературы

1. Dyson, F.J., *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949). История вопроса изложена в книге: *Renormalization*, ed. by L.M.Brown (Springer Verlag, New York, 1993). Подробное современное изложение см. в книге: Collins, J. *Renormalization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1984) (есть рус. пер.: Дж. Коллинз. *Перенормировка*. М.: Мир, 1988).
2. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **118**, 838 (1959). Это доказательство опирается только на общие асимптотические свойства подынтегральных выражений в фейнмановских интегралах в евк-

- лидовом импульсном пространстве, полученных виковским поворотом всех контуров интегрирования. Доказательство было упрощено за счет более детального анализа подынтегрального выражения в работе: Hahn, Y. and Zimmerman, W., *Commun. Math. Phys.*, **10**, 330 (1968), а затем распространено на интегралы в импульсном пространстве Минковского в работе: Zimmerman, W., *Commun. Math. Phys.*, **11**, 1 (1968).
3. Bjorken, J.D. and Drell, S.D., *Relativistic Quantum Fields* (McGraw Hill, New York, 1965), sections 19.10, 19.11 (есть рус. пер.: Дж.Д. Бьеркен, С. Дрелл. *Релятивистская квантовая теория*. Тт. 1, 2. М. : Наука, 1978.)
 4. См., например, в книге: Wess, J. and Bagger, J., *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton, 1983) и ссылки на литературу в ней (есть рус. пер.: Ю. Весс, Дж. Беггер. *Суперсимметрия и супергравитация*. М.: Мир, 1986.
 5. Salam, A., *Phys. Rev.*, **82**, 217 (1951); *Phys. Rev.*, **84**, 426 (1951); Matthews, P.T. and Salam, A., *Phys. Rev.*, **94**, 185 (1957).
 6. Bogoliubov, N.N. and Parasiuk, O., *Acta Math.*, **97**, 227 (1957).
 7. Хейп, К., *Commun. Math. Phys.*, **2**, 301 (1966). Хейп замечает, что «трудно найти двух теоретиков с изоморфным пониманием основных шагов в доказательстве Боголюбова и Парасюка», но и работа самого Хейпа читается нелегко.
 8. Zimmerman, W., *Commun. Math. Phys.*, **15**, 208 (1969). См. также статью В. Циммермана в сб.: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*. Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics (M.I.T. Press, Cambridge, 1970).
 9. Heisenberg, W., *Z. Physik*, **110**, 251 (1938).
 10. Heisenberg, W., Ref. [9] and *Z. Physik*, **113**, 61 (1939).
 11. Sakata, S., Umezawa, H., and Kamefuchi, S., *Prog. Theor. Phys.*, **7**, 327 (1952).

12. Weinberg, S., *Physica*, **96A**, 327 (1979).
13. Gasser, J. and Leutwyler, H., *Ann. Phys. (NY)*, **158**, 142 (1984); *Nucl. Phys.*, **B250**, 465 (1985).
14. Donoghue, J.F., *Phys. Rev.*, **D 50**, 3874 (1994).
15. Один из возможных способов того, чтобы это случилось, связан с явлением «асимптотической безопасности». См.: Weinberg, S., in *General Relativity — An Einstein Centenary Survey*, ed. by S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, 1979), Section 16.3 (есть рус. пер.: *Общая теория относительности*. Под ред. С. Хокинга и В. Израеля. М.: Мир, 1983).
16. Euler, H. and Kockel, B., *Naturwiss*, **23**, 246 (1935); Heisenberg, W. and Euler, H., *Z. Physik*, **98**, 714 (1936).
17. Эффективный лагранжиан Эйлера и др. был использован в однопетлевых вычислениях в работе: Halpern, J., *Phys. Lett.*, **B 316**, 155 (1971).
18. Wilson, K.G., *Phys. Rev.*, **B4**, 3174, 3184 (1971); *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 773 (1975).
19. Polchinski, J., *Nucl. Phys.*, **B231**, 269 (1984); lecture in *Recent Directions in Particle Theory* — Proc. of the 1992 TASI Conf., ed. by J. Harvey and J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993), p. 235.
20. Novikov, V., Shifman, M.A., Vainshtein, A.I., and Zakharov, V.I., *Nucl. Phys.*, **B229**, 381 (1983); Shifman, M.A. and Vainshtein, A.I., *Nucl. Phys.*, **B277**, 456 (1986) и ссылки в этих работах. См. также Shifman, M.A. and Vainshtein, A.I., *Nucl. Phys.*, **B359**, 571 (1991).
21. Feinberg, G., Kabir, P., and Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **3**, 527 (1959).
22. Feinberg, G., *Phys. Rev.*, **110**, 1482 (1958).

Инфракрасные эффекты

При изучении радиационных поправок особую роль играют те из них, которые обязаны своим происхождением “мягким” фотонам, т. е. фотонам, импульс и энергия которых много меньше характерных масс и энергий изучаемого процесса. Дело не только в том, что эти поправки часто бывают настолько большими, что нужно учитывать их во всех порядках теории возмущений, но и в том, что такое суммирование без труда осуществляется. Вклад фотонов бесконечно больших длин волн принимает форму расходящихся интегралов, но, как мы увидим, все эти «инфракрасные расходимости» сокращаются¹.

В большей части данной главы мы будем иметь дело с фотонами, взаимодействующими с заряженными частицами произвольного типа и спина, включая атомные ядра, способные не только к электромагнитным, но и сильным взаимодействиям. Однако нетрудно приспособить представленные ниже вычисления к инфракрасным эффектам, связанным с другими безмассовыми частицами вроде глюонов в квантовой хромодинамике. В разделе 13.4 мы явно рассмотрим весьма широкий класс теорий безмассовых частиц и докажем в общем виде сокращение инфракрасных расходимостей.

После таких обобщений мы вернемся к изучению фотонов и рассмотрим два практически важных вопроса:

рассеяние мягких фотонов заряженными частицами с произвольными неэлектромагнитными взаимодействиями, обладающими произвольным спином;

представление тяжелых заряженных частиц типа атомных ядер в виде источников внешнего электромагнитного поля.

13.1. Амплитуды испускания мягких фотонов

В этом разделе мы выведем универсальную формулу для амплитуды испускания произвольного числа фотонов очень малой энергии в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ с участием произвольного числа более энергичных заряженных частиц любого типа.

Начнем с амплитуды испускания одного мягкого фотона. Если подсоединить линию мягкого выходящего фотона с импульсом q и индексом поляризации μ к линии заряженной частицы, выходящей из какой-то связанной фейнмановской диаграммы процесса $\alpha \rightarrow \beta$ (рис. 13.1, а), то матричный элемент этого процесса следует умножить на дополнительный пропагатор заряженной частицы с импульсом $p + q$, который имела заряженная частица перед испусканием фотона, и на множитель, отвечающий вкладу возникшей новой вершины «заряженная частица–фотон». Если спин заряженных частиц равен нулю, масса m и заряд $+e$, эти множители имеют вид

$$\left[i(2\pi)^4 e(2p^\mu + q^\mu) \right] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p+q)^2 + m^2 - i\epsilon} \right],$$

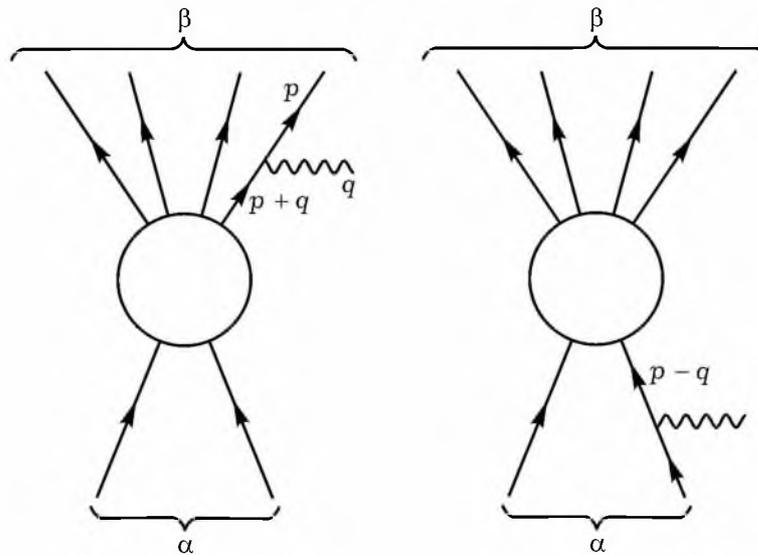


Рис. 13.1. Ведущие диаграммы испускания мягких фотонов в произвольном процессе $\alpha \rightarrow \beta$. Прямые линии изображают частицы в состояниях α и β (включая возможные жесткие фотоны), волнистые линии — мягкие фотоны

что в пределе $q \rightarrow 0$ сводится к множителю

$$\frac{e p^\mu}{p \cdot q - i\epsilon} \quad (13.1.1)$$

(Мы вправе переопределять величину положительной бесконечно малой добавки ϵ , заботясь только о сохранении ее знака.) Полученный результат на самом деле верен для заряженных частиц любого спина. Например, для частицы спина $1/2$ и заряда $+e$ нужно заменить коэффициентную функцию $\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma)$ для выходящей заряженной частицы на

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) [-i(2\pi)^4 e \gamma^\mu] \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{-i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + m}{(p + q)^2 + m^2 - i\epsilon} \right].$$

В пределе $q \rightarrow 0$ числитель пропагатора равен сумме диад:

$$-i\not{p} + m = 2p^0 \sum_{\sigma'} u(\mathbf{p}, \sigma') \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma'),$$

так что получается сумма матричных элементов оператора γ^μ между спинами с одинаковыми импульсами, имеющими вид

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma) \gamma^\mu u(\mathbf{p}, \sigma') = -i\delta_{\sigma, \sigma'} p^\mu / p^0.$$

И в этом случае эффект сводится к умножению матричного элемента процесса $\alpha \rightarrow \beta$ на множитель (13.1.1). Вообще, для заряженных частиц любого спина 4-импульс $p + q$ на новой внутренней линии в пределе $q \rightarrow 0$ стремится к массовой поверхности, так что числитель пропагатора стремится к сумме диад коэффициентных функций, превращающей новую вершинную матрицу в множитель, пропорциональный p^μ , и единичную матрицу по спиральным индексам. В результате вновь приходим к (13.1.1). Далее, как мы видели в гл. 10, поправки более высоких порядков не влияют на вычеты полюсов пропагаторов на массовой поверхности, а также на матричный элемент электрического тока между состояниями одной и той же частицы при одинаковых импульсах, так что (13.1.1) определяет правильный во всех порядках теории возмущений множитель,

связанный с испусканием мягкого фотона с линии выходящей заряженной частицы.

Те же аргументы применимы к фотону, испускаемому в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ с линии входящей заряженной частицы, с той разницей, что после того, как входящая частица испустит фотон с 4-импульсом q , линия заряженной частицы приобретает импульс $p - q$, и вместо (13.1.1) получается множитель

$$-\frac{e p^\mu}{p \cdot q - i\epsilon} \quad (13.1.2)$$

Фотон может, конечно, испускаться и с внутренней линии диаграммы процесса $\alpha \rightarrow \beta$, но в этом случае не возникает множителя, ведущего себя как $(p \cdot q)^{-1}$ при $q \rightarrow 0$. Таким образом, амплитуда $M_{\beta\alpha}^\mu$ (матричный элемент без дельта-функции закона сохранения энергии-импульса) испускания одного мягкого фотона с 4-импульсом q и поляризационным индексом μ в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ определяется суммой слагаемых типа (13.1.1) и (13.1.2), по одному на каждую выходящую или входящую заряженную частицу:

$$M_{\beta\alpha}^\mu(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \frac{\eta_n e_n p_n^\mu}{p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon} \quad (13.1.3)$$

где p_n и $+e_n$ — 4-импульс и заряд n -й частицы в начальном или конечном состоянии, а η_n — знаковый множитель, равный $+1$ для частиц в конечном состоянии β и -1 для частиц в начальном состоянии α .

Прежде чем переходить к рассмотрению испускания нескольких мягких фотонов, нелишне напомнить важное свойство² формулы (13.1.1). Чтобы вычислить амплитуду испускания фотона определенной спиральности, нужно свернуть это выражение с соответствующим вектором поляризации $e_\mu(\mathbf{q}, \pm)$. Однако мы видели в разделе 5.9, что $e_\mu(\mathbf{q}, \pm)$ не является 4-вектором: под действием преобразований Лоренца Λ^μ_ν вектор поляризации преобразуется в $\Lambda^\mu_\nu e^\nu(\mathbf{q}, \pm)$ плюс слагаемое, пропорциональное q^μ . Для того, чтобы это дополнительное слагаемое не разрушило лоренц-инвариантность, необходимо, чтобы свертка $M_{\beta\alpha}^\mu(q)$ с q_μ обращалась в нуль. Однако при $q \rightarrow 0$ из (13.1.3) имеем

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^\mu(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \eta_n e_n. \quad (13.1.4)$$

Коэффициент при $M_{\beta\alpha}$ в правой части равен полному заряду в конечном состоянии минус полный заряд в начальном состоянии, так что условие обращения в нуль эквивалентно условия сохранения заряда. Итак, без всяких дополнительных предположений о калибровочной инвариантности, мы получаем, что для частиц со спином единица и массой нуль из лоренц-инвариантности вытекает сохранение любой константы связи типа электрического заряда, определяющей взаимодействие этих частиц при низких энергиях. Между прочим, амплитуда испускания мягкого гравитона с 4-импульсом q и тензорными индексами μ, ν в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ дается формулой³, аналогичной (13.1.3):

$$M_{\beta\alpha}^{\mu\nu}(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \frac{\eta_n f_n p_n^\mu p_n^\nu}{p_n \cdot q - i\eta_n \varepsilon}, \quad (13.1.5)$$

где f_n — константа связи мягкого гравитона с частицами типа n . Из лоренц-инвариантности вытекает, что свертка амплитуды с q_μ обращается в нуль. Но

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\nu}(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \eta_n f_n p_n^\nu, \quad (13.1.6)$$

так что сумма $\sum f_n p_n^\nu$ сохраняется. Однако единственная линейная комбинация 4-импульсов, которая может сохраняться, не приводя к запретам на все нетривиальные процессы рассеяния, это полный 4-импульс, так что для сохранения (13.1.6) все f_n должны быть равны. (Общее значение f_n можно считать равным $\sqrt{8\pi G_N}$, где G_N — ньютоновская постоянная тяготения.) Таким образом, из лоренц-инвариантности вытекает, что низкоэнергетические безмассовые частицы спина 2 одинаково взаимодействуют со всеми формами энергии и импульса. Это первый шаг на долгом пути к доказательству, что принцип эквивалентности Эйнштейна является необходимым следствием лоренц-инвариантности в применении к безмассовым частицам спина 2. Аналогично, амплитуда испускания мягкой безмассовой частицы со спином $j \geq 3$ в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ имеет вид

$$q_\mu M_{\beta\alpha}^{\mu\nu\rho\dots}(q) \rightarrow M_{\beta\alpha} \sum_n \frac{\eta_n g_n p_n^\mu p_n^\nu p_n^\rho \dots}{p_n \cdot q - i\eta_n \varepsilon}.$$

Требование лоренц-инвариантности приводит к тому, что сумма $\sum g_n p_n^\nu p_n^\rho \dots$ должна сохраняться. Но ни одна такая величина не может сохраняться без запрета на все нетривиальные процессы рассеяния, так что все g_n должны обращаться в нуль. Безмассовые частицы со спином $j \geq 3$ могут существовать, но их константы связи должны обращаться в нуль в пределе низких энергий, в частности, такие частицы не могут быть переносчиками сил, убывающих обратно пропорционально квадрату расстояния.

Рассмотрим теперь испускание двух мягких фотонов. Вклад в матричный элемент от диаграммы, в которой два фотона испускаются с разных внешних линий процесса $\alpha \rightarrow \beta$, определяется умножением матричного элемента $\alpha \rightarrow \beta$ на произведение множителей вида (13.1.1) или (13.1.2). Может быть, несколько удивительно, что тот же результат верен, если два фотона испускаются со *одной и той же* линии. Например, если фотон 1 испускается с внешней линии частицы с зарядом $+e$ и 4-импульсом p после фотона 2, получаем множитель

$$\left[\frac{\eta e p^{\mu_1}}{p \cdot q_1 - i\eta \varepsilon} \right] \left[\frac{\eta e p^{\mu_2}}{p \cdot (q_2 + q_1) - i\eta \varepsilon} \right],$$

если же фотон 2 испускается после фотона 1, этот множитель принимает вид

$$\left[\frac{\eta e p^{\mu_2}}{p \cdot q_2 - i\eta \varepsilon} \right] \left[\frac{\eta e p^{\mu_1}}{p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta \varepsilon} \right].$$

(См. рис. 13.2. Фактор η по-прежнему равен $+1$ или -1 в зависимости от того, является линия заряженной частицы выходящей или входящей.) Сложение двух множителей приводит к выражению

$$\left[\frac{\eta e p^{\mu_1}}{p \cdot q_1 - i\eta \varepsilon} \right] \left[\frac{\eta e p^{\mu_2}}{p \cdot q_2 - i\eta \varepsilon} \right],$$

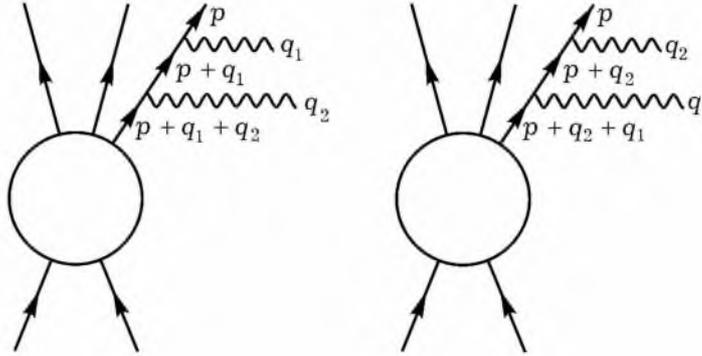


Рис. 13.2. Диаграммы испускания двух мягких фотонов одной и той же входящей заряженной частицей. Прямые линии — жесткие частицы, волнистые линии — мягкие фотоны

равному произведению множителей, возникающих при испускании одного фотона.

В общем случае при испускании произвольного числа фотонов с одной и той же внешней линии, получаем сумму вида*

* Это тождество можно доказать методом математической индукции. Уже показано, что оно верно для двух фотонов. Пусть оно верно для $N - 1$ фотонов. Для N фотонов следует написать сумму по перестановкам как сумму по выбору первого излучаемого фотона и сумму по перестановкам остающихся фотонов:

$$\begin{aligned}
 & [p \cdot q_1 - i\eta\epsilon]^{-1} [p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta\epsilon]^{-1} \dots \\
 & \times [p \cdot (q_1 + q_2 + \dots + q_N) - i\eta\epsilon]^{-1} \dots + \text{перестановки} \\
 & = \sum_{r=1}^N \left[p \cdot \left(\sum_{s=1}^N q_s \right) - i\eta\epsilon \right]^{-1} \prod_{s \neq r} [p \cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1} \\
 & = \sum_{r=1}^N \left[p \cdot \left(\sum_{s=1}^N q_s \right) - i\eta\epsilon \right]^{-1} [p \cdot q_r - i\eta\epsilon]^{-1} = \prod_{s=1}^N [p \cdot q_s - i\eta\epsilon]^{-1},
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

$$\begin{aligned}
& [p \cdot q_1 - i\eta\varepsilon]^{-1} [p \cdot (q_1 + q_2) - i\eta\varepsilon]^{-1} [p \cdot (q_1 + q_2 + q_3) - i\eta\varepsilon]^{-1} \dots \\
& \quad + \text{перестановки} \\
& = [p \cdot q_1 - i\eta\varepsilon]^{-1} [p \cdot q_2 - i\eta\varepsilon]^{-1} [p \cdot q_3 - i\eta\varepsilon]^{-1} \dots
\end{aligned} \tag{13.1.7}$$

Отсюда следует, что амплитуда $M_{\beta\alpha}^{\mu_1 \dots \mu_N}(q_1 \dots q_N)$ испускания N очень мягких фотонов с поляризационными индексами μ_1, \dots, μ_N и 4-импульсами q_1, \dots, q_N в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ дается в пределе $q \rightarrow 0$ умножением матричного элемента $M_{\beta\alpha}$ для процесса $\alpha \rightarrow \beta$ на произведение множителей типа (13.1.3), по одному на каждый фотон:

$$M_{\beta\alpha}^{\mu_1 \dots \mu_N}(q_1 \dots q_N) \rightarrow M_{\beta\alpha} \prod_{r=1}^N \left(\sum_n \frac{\eta_n e_n p_n^{\mu_r}}{p_n \cdot q_r - i\eta_n \varepsilon} \right). \tag{13.1.8}$$

13.2. Виртуальные мягкие фотоны

Используем результаты предыдущего раздела, чтобы вычислить во всех порядках вклад радиационных поправок за счет обмена виртуальными мягкими фотонами между линиями заряженных частиц в процессе $\alpha \rightarrow \beta$ (рис. 13.3). Под «мягким» мы подразумеваем фотон, имеющий импульс, меньший чем Λ , где Λ — некоторый удобный разделительный импульс*, выбираемый достаточно малым, чтобы были справедливы сделанные в предыдущем разделе приближения. Мы увидим, что рассматриваемые мягкие фотоны приводят к инфракрасным расходимостям, так что в качестве временной меры мы будем вынуждены ввести также и нижний предел λ импульсов фотонов.

Важно понять разницу между этими двумя обрезаниями фотонных импульсов. Верхнее обрезание Λ служит просто для определения того, что мы понимаем под «мягкими» фотонами. Зависимость от Λ радиационных поправок за счет мягких фотонов сокращается с зависимостью от Λ остальной части амплитуды, которая вычисля-

* В русскоязычной литературе величину Λ называют разрешающей способностью прибора. — *Прим. ред.*

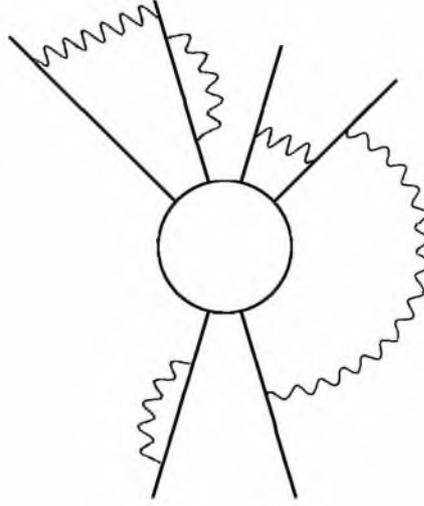


Рис. 13.3. Типичная диаграмма для матричного элемента процесса $a \rightarrow b$ с учетом ведущих радиационных поправок, обусловленных мягкими виртуальными фотонами. Прямые линии отвечают частицам в состояниях a и b (включая жесткие фотоны), волнистые — мягким фотонам

ется с учетом только виртуальных фотонов с импульсами *больше* чем Λ . С другой стороны, нижнее обрезание λ должно быть в конце концов устранено переходом к пределу $\lambda \rightarrow 0$. Мы увидим, что инфракрасные расходимости в этом пределе сократятся при учете испускания реальных мягких фотонов.

Каждому виртуальному мягкому фотону следует сопоставить пропагатор

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\eta_{\mu\nu'}}{q^2 - i\epsilon}, \quad (13.2.1)$$

затем умножить амплитуду (13.1.8) на произведение таких пропагаторов, свернуть по поляризационным индексам и проинтегрировать по 4-импульсам фотонов. Кроме того, для N виртуальных фотонов следует разделить результат на $2^N N!$, т. к. сумма по всем точкам, к которым можно присоединить оба конца линии мягкого фотона, включает фиктивные суммы по $N!$ перестановкам фотонных линий и по взаимным перестановкам двух концов этих линий. Вклад

радиационных поправок за счет N мягких фотонов сводится к умножению матричного элемента $M_{\beta\alpha}$ процесса без таких поправок на множитель

$$\frac{1}{N! 2^N} \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{nm} e_n e_m \eta_n \eta_m J_{nm} \right]^N, \quad (13.2.2)$$

где

$$J_{nm} \equiv -i(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^4 q}{[q^2 - i\epsilon][p_n \cdot q - i\eta_n \epsilon][p_m \cdot q - i\eta_m \epsilon]}. \quad (13.2.3)$$

Заметим, что мы изменили знак $p_m \cdot q$ в знаменателе выражения (13.2.3), т. к. если определить q как импульс, испускаемый с линии n , то импульс, испускаемый с линии m , есть $-q$.

Суммируя по N , заключаем, что матричный элемент процесса, включающий радиационные поправки за счет любого числа мягких фотонов с импульсами $|\mathbf{q}| \geq \lambda$, имеет вид

$$M_{\beta\alpha}^\lambda = M_{\beta\alpha}^\Lambda \exp \left[\frac{1}{2(2\pi)^4} \sum_{nm} e_n e_m \eta_n \eta_m J_{nm} \right], \quad (13.2.4)$$

где $M_{\beta\alpha}^\Lambda$ — амплитуда, содержащая только виртуальные фотоны с импульсами, большими Λ .

Интеграл по q^0 в (13.2.3) можно взять методом вычетов. Подынтегральное выражение аналитично по q^0 , не считая четырех полюсов в точках

$$\begin{aligned} q^0 &= |\mathbf{q}| - i\epsilon, & q^0 &= -|\mathbf{q}| + i\epsilon, \\ q^0 &= \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n \epsilon, & q^0 &= \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m \epsilon, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n/p_n^0$, \mathbf{v}_m определяется аналогично. Если частица n выходящая, а частица m входящая, то $\eta_n = +1$, $\eta_m = -1$, так что если замкнуть контур по q^0 в верхней полуплоскости, то полюса в точках $q^0 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n \epsilon$ или $q^0 = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m \epsilon$ не дают вклада. Аналогично, если n — входящая, а m — выходящая частицы, то эти

полюсы не дают вклада при замыкании контура в нижней полуплоскости. В обоих случаях вклад дает один из полюсов в точках $q^0 = \pm(|\mathbf{q}| - i\varepsilon)$, и в результате получается чисто действительный интеграл:

$$J_{nm} \equiv -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)}. \quad (13.2.5)$$

(при $\eta_n = -\eta_m = \pm 1$).

С другой стороны, если частицы n и m обе выходящие, или обе входящие, то полюсы в точках $q^0 = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q} - i\eta_n \varepsilon$ и $q^0 = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{q} + i\eta_m \varepsilon$ лежат по разные стороны действительной оси q^0 , так что один из них обязательно дает вклад, как бы мы не замыкали контур:

$$J_{nm} \equiv -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3 q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} - \frac{4i\pi^3}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) \quad (\text{при } \eta_n = \eta_m = \pm 1), \quad (13.2.6)$$

где β_{nm} — относительная скорость частиц n и m в системе покоя одной из них:

$$\beta_{nm} \equiv \sqrt{1 - \frac{m_n^2 m_m^2}{(p_n \cdot p_m)^2}}. \quad (13.2.7)$$

Мнимая часть выражения (13.2.6) приводит к появлению в выражении (13.2.4) инфракрасно расходящегося фазового множителя⁴, который выпадает, когда при вычислении вероятности процесса $\alpha \rightarrow \beta$ берется модуль матричного элемента. (Этот бесконечный фазовый множитель есть релятивистский аналог хорошо известной особенности нерелятивистского кулоновского рассеяния: та часть шредингеровской волновой функции, которая описывает расходящуюся сферическую волну, зависит от радиальной координаты не как $\exp(ipr)/r$, а как $\exp(ipr - i\nu \ln r)/r$, где ν — произведение зарядов, деленное на относительную скорость⁵.) На вероятность реакции оказывает влияние *только* действительная часть J_{nm} , которая при всех η_n и η_m имеет вид

$$\operatorname{Re} J_{nm} \equiv -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \leq |\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d^3q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)}. \quad (13.2.8)$$

После элементарного вычисления находим:

$$\operatorname{Re} J_{nm} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}}\right) \ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right). \quad (13.2.9)$$

Подставляя это выражение в квадрат модуля амплитуды (13.2.4), находим окончательно, что влияние мягких виртуальных фотонов на вероятность процесса $\Gamma_{\beta\alpha}$ определяется формулой:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda, \quad (13.2.10)$$

где $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$ и $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda$ — вероятности процесса $\alpha \rightarrow \beta$ с учетом радиационных поправок за счет мягких фотонов с импульсами, большими λ и Λ соответственно, а показатель степени A имеет вид

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}}\right). \quad (13.2.11)$$

Заметим, что полученный ответ является совершенно разумным, поскольку поправочный множитель $(\lambda/\Lambda)^A$ оказался равным отношению функции от λ к такой же функции от Λ , т. к. две вероятности в формуле (13.2.10) могут зависеть, соответственно, только от λ или от Λ .

Показатель степени A всегда положителен. Например, при рассеянии одной заряженной частицы на нейтральной частице или внешнем потенциале, следует добавить в правую часть (13.2.11) слагаемые, в которых частицы n и m являются одновременно либо начальной, либо конечной заряженной частицей (тогда $\eta_n \eta_m = +1$ и $\beta_{nm} = 0$), или n есть начальная или конечная заряженная частица, тогда m — другая частица (в этом случае $\eta_n \eta_m = -1$ и $\beta_{nm} = \beta$, причем $1 > \beta > 0$). В результате

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \left[4 - \frac{2}{\beta} \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) \right],$$

и это выражение положительно для всех $1 > \beta > 0$. Поскольку A положительно, эффект инфракрасных расходимостей от мягких виртуальных фотонов сводится после суммирования во всех порядках к тому, что вероятность любого данного процесса с заряженными частицами $\alpha \rightarrow \beta$ обращается в нуль в пределе $\lambda \rightarrow 0$.

* * *

Прежде чем показать, каким образом испускание реальных мягких фотонов сокращает эти инфракрасные расходимости, прежде ненадолго изложение и рассмотрим одну техническую деталь приведенных выше расчетов, которая, насколько я знаю, всегда игнорировалась в литературе. При расчете радиационных поправок наряду с диаграммами, в которых виртуальный фотон испускается и поглощается разными линиями заряженных частиц, мы включали и диаграммы, в которых виртуальный фотон испускается и поглощается *на одной и той же* внешней линии. Но как было показано в гл. 10, при расчете S -матрицы не требуется включать радиационные поправки, возникающие от вставок собственноэнергетических поддиаграмм на внешних линиях. Отсюда может показаться, что в формуле (13.2.11) следует отбросить слагаемые с $n = m$, однако как будет видно в следующем разделе, сокращение инфракрасных расходимостей будет при этом неполным.

Решение этой проблемы вытекает из наблюдения, что мягкие виртуальные фотоны порождают инфракрасные расходимости не только непосредственно, но и через константы перенормировки Z_n полей заряженных частиц. (Константа перенормировки Z_n в теориях типа квантовой электродинамики с одним заряженным полем спина $1/2$ называется Z_2 .) Эффекты радиационных поправок на внешних линиях сокращаются контрчленами, пропорциональными $(Z_n - 1)$. Конкретнее, перенормированное поле заряженной частицы типа n равно произведению перенормированного поля на $Z_n^{-1/2}$, так что когда мы вычисляем S -матрицу, используя перенормированные поля (что соответствует опусканию радиационных поправок к внешним линиям), мы вводим дополнительный множитель $\prod_n Z_n^{-1/2}$, где произведение берется по всем заряженным частицам в начале и конце. (Конечно, существуют и множители $Z_n^{-1/2}$ для нейтральных частиц, но они не содержат инфракрасных расходимостей.) В несколько иных обозначениях, указанный множитель равен

$$\prod_f Z_f^{-E_f/2},$$

где Z_f — константа перенормировки полей типа f , E_f — число внешних линий типа f , а произведение теперь берется по *всем* типам заряженных полей. Однако эти константы перенормировки полей появляются также внутри диаграмм. Если выразить взаимодействие типа i , содержащее N_{if} полей заряженных частиц типа f , через перенормированные поля, возникнет инфракрасно расходящийся множитель

$$\prod_f (Z_f)^{N_{if}/2}.$$

(Например, контрчлен $-ie(Z_2-1)A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ в (11.1.9) вместе с обычным электромагнитным взаимодействием $-ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ приводит к суммарному взаимодействию $-ieZ_2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. За инфракрасную расходимость, возникающую от второго слагаемого в скобках в (11.3.23) и в последнем слагаемом в (11.4.14), ответственна инфракрасная расходимость множителя Z_2 .) Кроме того, такая расходимость имеется в пропагаторах перенормированных полей: если выразить пропагатор перенормированного заряженного поля типа f через пропагатор перенормированного поля, то возникает множитель Z_f^{-1} .

Собирая все это вместе, находим, что общее число множителей Z_f для каждого заряженного поля типа f , возникающих от контрчленов к взаимодействиям и от радиационных поправок ко внутренним и внешним линиям, равно

$$\frac{1}{2} \sum_i V_i N_{if} - I_f - \frac{1}{2} E_f,$$

где I_f и E_f — числа внутренних и внешних линий типа f , а V_i — число вершин взаимодействий типа i . Уже отмечалось в разделе 6.3, что эта величина равна нулю для каждого f . Таким образом, контрчлены, сокращающие радиационные поправки ко внешним линиям, сами сокращаются множителями Z_f , возникающими от внутренних линий и вершин. Поэтому формула (13.2.11) правильна в том виде, как она написана, включая слагаемые с $n = m$.

13.3. Реальные мягкие фотоны. Сокращение расходимостей

Разрешение описанной в предыдущем разделе проблемы инфракрасной расходимости заключается в наблюдении, что реально невозможно измерить вероятность $\Gamma_{\beta\alpha}$ реакции $\alpha \rightarrow \beta$ с участием определенного числа фотонов и заряженных частиц, поскольку фотоны очень малой энергии всегда могут ускользнуть от регистрации. Реально можно измерить вероятность $\Gamma_{\beta\alpha}(E, E_T)$ такой реакции, в которой регистрируются фотоны с энергией больше какой-то малой величины E , а нерегистрируемые мягкие фотоны, число которых может быть произвольным, уносят общую энергию, не превышающую некоторую малую величину E_T . (Конечно, $E \leq E_T$. В эксперименте без детекторов мягких фотонов при определении предельной полной энергии E_T , уносимой этими фотонами, естественно основываться на измерениях энергий «жестких» частиц в состояниях α и β . В таком случае мы просто полагаем $E = E_T$.) Обратимся к вычислению такой вероятности.

Матричный элемент процесса $\alpha \rightarrow \beta$ с испусканием N реальных мягких фотонов получается сворачиванием каждого из N индексов поляризации μ_1, μ_2, \dots в амплитуде (13.1.8) с соответствующей коэффициентной функцией

$$\frac{\varepsilon_{\mu}^*(\mathbf{q}, h)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2|\mathbf{q}|}},$$

где \mathbf{q} — импульс фотона, $h = \pm 1$ — его спиральность, а ε^{μ} — соответствующий «вектор» поляризации фотона*. Тогда матричный элемент испускания фотонов (матричный элемент S -матрицы без дельта-функции) можно записать в виде

$$M_{\beta\alpha}^{\lambda}(\mathbf{q}_1, h_1, \mathbf{q}_2, h_2, \dots) = M_{\beta\alpha}^{\lambda} \times \prod_{r=1}^N (2\pi)^{-3/2} (2|\mathbf{q}|)^{-1/2} \sum_n \frac{\eta_n e_n [p_n \cdot \varepsilon^*(\mathbf{q}_r, h_r)]}{p_n \cdot q_r}. \quad (13.3.1)$$

* Мы используем обозначение ε^{μ} вместо e^{μ} для вектора поляризации фотона, чтобы избежать путаницы с обозначением e_n для электрических зарядов.

(Верхний индекс λ напоминает о том, что эти амплитуды должны вычисляться при заданном инфракрасном обрезании λ импульсов виртуальных фотонов. В конце концов мы перейдем к пределу $\lambda \rightarrow 0$. Присутствие мягких виртуальных фотонов не противоречит результату (13.3.1) из-за обсуждавшейся в разделе 13.1 факторизации.) Дифференциальная вероятность испускания N мягких фотонов в элемент объема импульсного пространства $\prod_r d^3 q_r$ задается квадратом этого матричного элемента, просуммированным по спиральностям и умноженным на $\prod_r d^3 q_r$. Напомним, что согласно формуле (8.5.7) сумма по спиральностям при $q^2 = 0$ принимает вид:

$$\sum_{h=\pm 1} \varepsilon_\mu(\mathbf{q}, h) \varepsilon_\nu^*(\mathbf{q}, h) = \eta_{\mu\nu} + q_\mu c_\nu + q_\nu c_\mu. \quad (13.3.2)$$

где $\mathbf{c} \equiv -\mathbf{q}/2|\mathbf{q}|^2$, а $c^0 \equiv 1/2|\mathbf{q}|$. Условие сохранения заряда $\sum_n \eta_n e_n = 0$ позволяет отбросить в (13.3.2) слагаемые, содержащие q_μ или q_ν , и получить в результате дифференциальную вероятность*

$$d\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \prod_{n=1}^N \frac{d^3 q_n}{(2\pi)^3 (2|\mathbf{q}|)} \sum_{nm} \frac{\eta_n \eta_m e_n e_m (p_n \cdot p_m)}{(p_n \cdot q_r)(p_m \cdot q_r)}. \quad (13.3.3)$$

Чтобы вычислить дифференциальную вероятность испускания N мягких фотонов с определенными энергиями $\omega_r \equiv |\mathbf{q}_r|$, следует проинтегрировать (13.3.3) по направлениям импульсов фотонов \mathbf{q}_r . Эти интегралы уже встречались нам при вычислении интегралов (13.2.8):

$$-\pi(p_n \cdot p_m) \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{q}}}{(E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln \left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right). \quad (13.3.4)$$

Интегрируя (13.3.3) по направлениям фотонов, получаем дифференциальную вероятность процесса с испусканием фотонов с энергией $\omega_1, \dots, \omega_N$:

* В случае $N = 1$ выражение $|\mathbf{q}| d\Gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{q})/\Gamma_{\beta\alpha}$ соответствует классическому распределению энергии, излучаемой скачком меняющейся 4-векторной плотностью тока, имеющей вид: $J^\mu(x) = \sum_n^{(t)} d^3(\mathbf{x} - \mathbf{v}_n t) p_n^\mu e_n/E_n$, причем при $t < 0$ сумма берется только по частицам в начальном состоянии, а при $t > 0$ — по частицам в конечном состоянии.

$$d\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}(\omega_1, \dots, \omega_N) = \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} A(\alpha \rightarrow \beta)^N \frac{d\omega_1}{\omega_1} \dots \frac{d\omega_N}{\omega_N}, \quad (13.3.5)$$

где $A(\alpha \rightarrow \beta)$ — та же, что и в предыдущем разделе, константа:

$$A(\alpha \rightarrow \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln \left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right).$$

Из выражения (13.3.5) следует, что неограниченный снизу интеграл по энергиям испущенных фотонов приведет к новым инфракрасным расходимостям. Однако из условия унитарности вытекает, что если было введено инфракрасное обрезание по импульсам виртуальных фотонов (на что указывает верхний индекс λ), следует проделать такое же инфракрасное обрезание импульсов реальных фотонов. Для вычисления вероятности $\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}(E, E_T)$ реакции $\alpha \rightarrow \beta$, в которой любой нерегистрируемый фотон уносит энергию не больше E , а любое число нерегистрируемых фотонов уносит энергию не более E_T (величины E и E_T выбраны достаточно малыми, чтобы не противоречить использованному при выводе формулы (13.3.1) приближениям), следует проинтегрировать (13.3.5) по энергиям всех фотонов, при условии, что $E \geq \omega_r \geq \lambda$ и $\sum_r \omega_r \leq E_T$, затем разделить на $N!$, поскольку этот интеграл содержит конфигурации, отличающиеся только перестановкой N мягких фотонов, и наконец просуммировать по N . В результате получаем

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}(E, E_T) = \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{A(\alpha \rightarrow \beta)^N}{N!} \int_{E \geq \omega_r \geq \lambda, \sum_r \omega_r \leq E_T} \prod_{r=1}^N \frac{d\omega_r}{\omega_r}. \quad (13.3.6)$$

Этот интеграл мог бы быть представлен как произведение N интегралов по отдельным ω_r , если бы не ограничение $\sum_r \omega_r \leq E_T$. Его можно учесть, если включить в подынтегральное выражение в качестве множителя ступенчатую функцию

$$\theta(E_T - \sum_r \omega_r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin E_T u}{u} \exp\left(iu \sum_r \omega_r\right). \quad (13.3.7)$$

Тогда формула (13.3.6) принимает вид

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}(E, E_T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin E_T u}{u} \exp\left(A(\alpha \rightarrow \beta) \int_{\lambda}^E \frac{d\omega}{\omega} e^{i\omega u}\right) \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}. \quad (13.3.8)$$

Интеграл в экспоненте можно взять в пределе $\lambda \ll E_T$, записав его как сумму интеграла от $(e^{i\omega u} - 1)/\omega$, в котором можно положить $\lambda = 0$, и интеграла от $1/\omega$, который тривиален. Делая масштабное преобразование переменных u и ω , получаем при $\lambda \ll E_T$:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}(E, E_T) \rightarrow \mathcal{F}(E/E_T; A(\alpha \rightarrow \beta)) \left(\frac{E}{\lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}, \quad (13.3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x; A) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin u}{u} \exp\left(A \int_0^x \frac{d\omega}{\omega} (e^{i\omega u} - 1)\right) \\ &= 1 - \frac{A^2 \theta(x - \frac{1}{2})}{2} \int_{1-x}^x \frac{d\omega}{\omega} \ln\left(\frac{x}{1-\omega}\right) + \dots, \end{aligned} \quad (13.3.10)$$

Если E и E_T одного порядка и $A \ll 1$, множитель $\mathcal{F}(E/E_T, A)$ в (13.3.9) близок к единице. Например,

$$\mathcal{F}(1; A) \simeq 1 - \frac{1}{12} \pi^2 A^2 + \dots$$

Так как $A(\alpha \rightarrow \beta) > 0$, множитель $(E/\lambda)^{A(\alpha \rightarrow \beta)}$ в (13.3.9) стремится к бесконечности в пределе $\lambda \rightarrow 0$. Однако из формулы (13.3.10) видно, что в этом пределе вероятность $\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}$ обращается в нуль:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} = \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^{\Lambda}.$$

Подставляя это выражение в (13.3.9), получаем, что в пределе $\lambda \ll E_T$ инфракрасное обрезание λ выпадает из ответа:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}(E, E_T) \rightarrow \mathcal{F}(E/E_T; A(\alpha \rightarrow \beta)) \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{A(\alpha \rightarrow \beta)} \Gamma_{\beta\alpha}^{\Lambda}. \quad (13.3.11)$$

Напомним, что энергия Λ есть всего лишь удобная раздельная точка между «мягкими» фотонами, вклад которых явно учтен в (13.3.11), и «жесткими» фотонами, вклад которых содержится в $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda$. Правая часть выражения (13.3.11) не зависит от Λ , так как $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda \propto \Lambda^A$. Однако в теориях с малой константой связи типа квантовой электродинамики часто выгодно взять величину Λ достаточно малой по сравнению с типичными энергиями W в данном соударении, так чтобы использованные приближения были верны для энергии фотонов, меньше Λ , и в то же время достаточно большой, чтобы выполнялось неравенство $A(\alpha \rightarrow \beta) \ln(W/\Lambda) \ll 1$. В этом случае хорошим приближением может оказаться вычисление $\Gamma_{\beta\alpha}^\Lambda$ в низшем порядке теории возмущений, причем главные радиационные поправки при $E \ll \Lambda$ будут определяться множителем $(E/\Lambda)^A$ в выражении (13.3.11).

* * *

Такое же сокращение инфракрасных расходимостей происходит и для мягких гравитонов³. Вероятность любого процесса $\alpha \rightarrow \beta$, в котором мягкие гравитоны уносят энергию, не превышающую E , оказывается пропорциональной E^B , где

$$B = \frac{G}{2\pi} \sum_{nm} \eta_n \eta_m m_n m_m \frac{1 + \beta_{nm}^2}{\beta_{nm} \sqrt{1 - \beta_{nm}^2}} \ln \left(\frac{1 + \beta_{nm}}{1 - \beta_{nm}} \right). \quad (13.3.12)$$

13.4. Произвольные инфракрасные расходимости

Рассмотренная до сих пор инфракрасная расходимость, обязанная своим происхождением мягким фотонам, есть лишь один из множества примеров инфракрасных расходимостей, возникающих в различных физических теориях. Другим примером является квантовая электродинамика безмассовых заряженных частиц. В этом случае, даже после сокращения инфракрасных расходимостей за счет мягких фотонов, обнаруживается логарифмическая расходимость в показателе степени A в (13.3.11). Согласно формулам (13.2.11) и (13.2.7), для процесса, в котором все заряженные частицы — электроны, показатель степени в пределе $m_e \rightarrow 0$ ведет себя как

$$A \rightarrow -\frac{1}{4\pi^2} \sum_n e_n^2 - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \neq m} e_n e_m \eta_n \eta_m \ln \left(\frac{2|p_n \cdot p_m|}{m_e^2} \right) \rightarrow -\frac{\ln m_e}{2\pi^2} \sum_n e_n^2.$$

(На последнем шаге было использовано условие сохранения заряда $\sum_n e_n \eta_n = 0$.) Инфракрасная расходимость в этой формуле возникает от мягких фотонов, испускаемых в направлении, *параллельном* импульсу одного из «жестких» электронов в начальном или конечном состоянии. Однако расходимость появляется и тогда, когда и фотон, и электрон не мягкие, т. к. знаменатель пропагатора $(p_n \pm q)^2$ обращается в нуль при $p_n^2 = q^2 = 0$, если \mathbf{p}_n параллелен \mathbf{q} . Более подробно, при $p_n^2 = q^2 = 0$ интеграл от этого множителя * по направлениям фотонов принимает вид

$$\int d^2\hat{q} (p \pm q)^{-2} = \frac{2\pi}{\mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{1 - \cos \theta},$$

где θ — угол между импульсами фотона и заряженной частицы. Интеграл логарифмически расходится при $\theta = 0$.

Конечно, в реальном мире нет безмассовых электрически заряженных частиц, однако в реакциях, где типичное значение E^2 скалярных произведений $|p_n \cdot p_m|$ много больше m_e^2 , представляет интерес установить место возникновения большого множителя $\ln(m_e/E)$. Часто в этом случае ведущая радиационная поправка определяется слагаемым $-\ln(m_e/E) \sum_n e_n^2 / 2\pi^2$ в A . Еще важнее то, что в квантовой хромодинамике существуют безмассовые частицы глюоны, несущие сохраняющееся квантовое число, называемое цветом и аналогичное электрическому заряду. В этом случае инфракрасные расходимости возникают в результате испускания параллельных жестких глюонов жесткими же глюонами или другими имеющими цвет жесткими частицами в начальном или конечном состояниях.

В общем случае такие инфракрасные расходимости не устраняются суммированием по подходящим наборам конечных состояний. Однако Ли и Науенберг⁶ заметили, что можно сократить

* Этот множитель не квадратируется, т. к. расходимость появляется только от интерференции этого слагаемого в матричном элементе S -матрицы со слагаемыми, в которых фотон испускается с линии другой заряженной частицы $m \neq n$. При $m = n$ интеграл (13.2.8) пропорционален m_n^2 .

инфракрасные расходимости, если суммировать не только по подходящим конечным состояниям, но и предположить некоторое вероятностное распределение *начальных* состояний. Ниже приводится модифицированная версия рассуждений Ли и Науенберга, из которой станет сразу же ясно, почему в электродинамике с массивными электронами достаточно суммировать только по конечным состояниям.

С этой целью удобно вернуться к «старой» теории возмущений, в которой S -матрица задается выражениями (3.2.7) и (3.5.3) в виде:

$$S_{ba} = \delta(b - a) - 2i\pi\delta(E_a - E_b)T_{ba}, \quad (13.4.1)$$

где

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int dc_1 \dots dc_{\nu} \frac{V_{bc_1} V_{c_1 c_2} \dots V_{c_{\nu} a}}{(E_a - E_{c_1} + i\epsilon) \dots (E_a - E_{c_{\nu}} + i\epsilon)}. \quad (13.4.2)$$

(Интегрирование по c_1, \dots, c_n подразумевает суммирование по спинам и типам частиц в этих состояниях, а также интегралы по 3-импульсам частиц.) Инфракрасные расходимости могут возникать из-за обращения в нуль одного или более энергетических знаменателей в этом выражении (и только по этой причине).

Однако не все обращающиеся в нуль знаменатели приводят к инфракрасным расходимостям. Произвольное промежуточное состояние c может иметь $E_c = E_a$, но обычно это всего лишь одна точка внутри области интегрирования, так что интеграл по этой области можно сделать сходящимся с помощью предписания, заключенного в добавке $i\epsilon$ в знаменателе. Промежуточное состояние c порождает инфракрасную расходимость только в случае, когда энергия $E_c = E_a$ на *границе* области интегрирования. Такое случается, например, если первое промежуточное состояние c_1 в (13.4.2) отличается от начального состояния a только тем, что некоторая, любая, безмассовая частица в этом состоянии заменена на *струи*, состоящую из произвольного числа почти параллельно летящих безмассовых частиц с полным импульсом, равным импульсу замененной на струю частицы. В этом случае граничная точка, в которой $E_{c_1} = E_a$, соответствует точке в импульсном пространстве, когда все безмассовые частицы в каждой струе параллельны. В более общем случае, можно заменить любое число безмассовых частиц

в состоянии a на струи почти параллельных безмассовых частиц и произвольное число дополнительных мягких безмассовых частиц. Будем называть множество всех таких состояний $D(a)$. (Аккуратнее следует ввести малый угол Θ и малую энергию Λ , чтобы определить, что понимается под «почти параллельными» и «мягкими» частицами. Мы не станем заниматься выяснением зависимости $D(a)$ от Θ и Λ .) Состояния в $D(a)$ «опасны» в том смысле, что обращение в нуль энергетического знаменателя $E_a - E_{c1}$ в граничной точке может привести к инфракрасной расходимости. Та граничная точка, в которой $E_{c1} = E_a$, отвечает ситуации, когда все безмассовые частицы в каждой струе параллельны, а все мягкие безмассовые частицы имеют нулевую энергию.

Далее, если каждое из состояний c_1, \dots, c_n принадлежит множеству $D(a)$, то промежуточное состояние c_{n+1} также опасно в указанном смысле. С другой стороны, если какое-то промежуточное состояние c_m не принадлежит $D(a)$, то последующее состояние c_k с $k > m$ уже не будет опасным, даже если оно принадлежит $D(a)$, т.к. конфигурация жестких частиц или струй с 3-импульсами, равными импульсам частиц в состоянии a , будет обычной точкой внутри области интегрирования. Совершенно аналогично можно определить множество состояний $D(b)$, в которых одна или более безмассовых частиц в состоянии b заменены на струи почти параллельных безмассовых частиц, полный 3-импульс каждой из которых равен 3-импульсу частицы, замененной на струю, и дополнительно испускается произвольное число безмассовых частиц. Промежуточное состояние c_m опасно, если оно принадлежит множеству $D(b)$ и если последующие состояния c_k с $k > m$ также все принадлежат $D(b)$.

Чтобы изолировать вклады опасных состояний, перепишем (13.4.2) в виде:

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(V \left[\frac{\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{\epsilon a,b}}{E_a - H_0 + i\epsilon} V \right]^\nu \right)_{ba}, \quad (13.4.3)$$

где \mathcal{P}_a , \mathcal{P}_b и $\mathcal{P}_{\epsilon a,b}$ — проекционные операторы на $D(a)$, $D(b)$ и все остальные состояния соответственно. (Здесь предполагается, что ни одна из заряженных частиц в b не имеет импульса, близкого к импульсу какой-то заряженной частицы в a , так что множества $D(a)$ и $D(b)$ не перекрываются.) Далее, при $\Lambda \rightarrow 0$ и $\Theta \rightarrow 0$ опасные промежуточные состояния занимают столь малую область фазового

пространства, что ими можно пренебречь везде, где они не приводят к инфракрасным расходимостям. Поэтому степенной ряд (13.4.3) принимает вид:

$$T_{ba} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\left[V \frac{\mathcal{P}_b}{E_a - H_0 + i\varepsilon} \right]^r V \left[\frac{\mathcal{P}_{\neq a,b}}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V \right]^v \right. \\ \left. \times \left[\frac{\mathcal{P}_a}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V \right]^s \right)_{ba}. \quad (13.4.4)$$

Это равенство было бы точным, если бы все проекционные операторы $\mathcal{P}_{\neq a,b}$ между крайними левыми и крайними правыми множителями можно было заменить на $\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{\neq a,b}$, а \mathcal{P}_a и \mathcal{P}_b слева и справа были бы заменены на $\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b$. Однако, как отмечалось выше, при достаточно малых Λ и Θ влияние такой замены на окончательный результат было бы пренебрежимо мало.

Формулу (13.4.4) можно переписать в более компактном виде:

$$T_{ba} = \left(\Omega_b^{-\dagger} T_S \Omega_a^+ \right)_{ba}, \quad (13.4.5)$$

где используемые в дальнейшем операторы Ω_α^+ и Ω_β^- для произвольных состояний α и β определяются формулами:

$$\left(\Omega_\alpha^+ \right)_{ca} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\mathcal{P}_\alpha}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V \right]^r \right)_{ca}, \quad (13.4.6)$$

$$\left(\Omega_\beta^- \right)_{db} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\mathcal{P}_\beta}{E_b - H_0 + i\varepsilon} V \right]^r \right)_{ca}, \quad (13.4.7)$$

а «безопасный» оператор T_S — формулой*

* В формуле для $(\Omega_b^-)_{db}$ использовано то, что T_{ba} вычисляется при $E_b = E_a$, а при вычислении $(T_S)_{dc}$ учтено, что действие проекционных операторов \mathcal{P}_a обращает $(\Omega_a^+)_{ca}$ в нуль, кроме случая, когда E_c очень близко к E_a . Кроме того, благодаря множителям $\Omega_b^{-\dagger}$ и Ω_a^+ в (13.4.5) $\mathcal{P}_{\neq c,d} = \mathcal{P}_{\neq a,b}$.

$$(T_S)_{dc} \equiv \sum_{v=0}^{\infty} \left(V \left[\frac{\mathcal{P}_{\epsilon c, d}}{E_c - H_0 + i\epsilon} V \right]^v \right)_{dc}. \quad (13.4.8)$$

Все инфракрасные расходимости изолированы теперь в двух операторных множителях Ω_{α}^{+} и Ω_{β}^{-} .

Чтобы устранить эти инфракрасные расходимости, достаточно лишь заметить, что если бы не проекционные операторы на опасные состояния, операторы Ω_{β}^{-} и Ω_{α}^{+} были бы просто унитарными операторами, преобразующими согласно формуле (13.1.16) состояния свободных частиц соответственно в «ин» и «аут» состояния. Если ограничить действие этих операторов подпространствами $D(\beta)$ и $D(\alpha)$ состояний, которые являются опасными для данного конечного состояния β и данного начального состояния α соответственно, то такие операторы являются унитарными. Это означает, что для произвольных состояний β и α

$$\Omega_{\beta}^{-} \mathcal{P}_{\beta} \Omega_{\beta}^{-\dagger} = \mathcal{P}_{\beta}, \quad (13.4.9)$$

$$\Omega_{\alpha}^{+} \mathcal{P}_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{+\dagger} = \mathcal{P}_{\alpha}. \quad (13.4.10)$$

Таким образом, вероятность перехода свободна от инфракрасных расходимостей, если произведено суммирование по подпространствам состояний, которые являются опасными для любых заданных начального и конечного состояний β и α :

$$\begin{aligned} \sum_{a \in D(\alpha)} \sum_{b \in D(\beta)} |T_{ba}|^2 &= \text{Tr} \left\{ \Omega_{\beta}^{-} \mathcal{P}_{\beta} \Omega_{\beta}^{-\dagger} T_S \Omega_{\alpha}^{+} \mathcal{P}_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{+\dagger} T_S^{\dagger} \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \mathcal{P}_{\beta} T_S \mathcal{P}_{\alpha} T_S^{\dagger} \right\} = \sum_{a \in D(\alpha)} \sum_{b \in D(\beta)} |(T_S)_{ba}|^2. \end{aligned} \quad (13.4.11)$$

Чтобы окончательно удостовериться, что это утверждение решает проблему инфракрасных расходимостей в произвольном случае, необходимо показать, что только суммы типа содержащихся в (13.4.11) являются экспериментально измеримыми. Весьма правдоподобно, что следует просуммировать по опасным конечным состояниям, чтобы получить измеримую вероятность перехода, поскольку экспериментально невозможно отличить выходящую заряженную (цветную) безмас-

совую частицу от струи безмассовых частиц с почти параллельными импульсами и той же полной энергией⁷, сопровождаемую произвольным числом очень мягких квантов с тем же полным зарядом (или цветом). Суммирование по начальным состояниям вызывает больше вопросов. Вероятно, можно привести аргументы, что истинно безмассовые частицы всегда рождаются как струи, сопровождаемые ансамблем мягких квантов, однородно распределенных по некоторому объему импульсного пространства. Однако, насколько мне известно, никто еще не сумел дать полное доказательство того, что экспериментально измеримыми являются только суммы вероятностей переходов, свободные от инфракрасных расходимостей.

Эта проблема не возникает в квантовой электродинамике (с массивными заряженными частицами), где, как мы видели, для устранения инфракрасных расходимостей необходимо суммировать только по конечным состояниям. Причина такой разницы заключается в том, что в электродинамике состояния a, b, c, \dots являются прямыми произведениями состояний (отмеченных греческими буквами) с фиксированным числом заряженных частиц и жестких фотонов и состояний, содержащих только мягкие фотоны с энергией меньшей некоторой малой величины Λ . Тогда для реакции с образованием некоторого количества мягких фотонов f , рождаемых в реакции $\alpha \rightarrow \beta$ между заряженными частицами и жесткими фотонами, формула (13.4.5) упрощается:

$$T_{\beta f, \alpha} = (\Omega^-(\beta)^+ \Omega^+(\alpha))_{f^0} (T_S)_{\beta\alpha}, \quad (13.4.12)$$

где индекс 0 означает вакуум мягких фотонов, а Ω^\pm вычисляются как и выше, но в усеченном гильбертовом пространстве состояний только мягких фотонов, причем считается, что взаимодействие этих фотонов описывается гамильтонианом взаимодействия со всеми заряженными частицами в фиксированных состояниях, отмеченных аргументами β или α . Как и ранее, такие операторы унитарны в «опасном» гильбертовом пространстве \mathcal{H} мягких фотонов, так что *

* Причина, по которой не появляется никакого множителя вида $(E/\Lambda)^A$, как в формуле (13.3.11), заключается в том, что здесь мы приравниваем максимальную энергию E состояний реальных мягких фотонов, по которым нужно суммировать, максимальной энергии Λ «опасных» состояний мягких фотонов, по которым производится суммирование при вычислении Ω^\pm .

$$\begin{aligned}
\sum_{f \in \mathcal{D}} |T_{\beta f, \alpha 0}|^2 &= |(T_S)_{\beta \alpha}|^2 \left(\Omega^+(\alpha)^\dagger \Omega^-(\beta) \Omega^-(\beta)^\dagger \Omega^+(\alpha) \right)_{00} \\
&= |(T_S)_{\beta \alpha}|^2 \left(\Omega^+(\alpha)^\dagger \Omega^+(\alpha) \right)_{00} = |(T_S)_{\beta \alpha}|^2.
\end{aligned} \tag{13.4.13}$$

без всякого суммирования по начальным состояниям.

13.5. Рассеяние мягких фотонов *

Исследуя в этой главе взаимодействия мягких фотонов, мы рассматривали до сих пор только процессы, в которых мягкие фотоны испускаются или поглощаются в процессе $\alpha \rightarrow \beta$, который происходит и сам по себе. Однако можно высказать ряд полезных общих утверждений относительно ситуаций, когда процесс $\alpha \rightarrow \beta$ тривиален, а мягкие фотоны играют существенную роль в реализации интересующей нас реакции. Рассмотрим простейший и наиболее важный пример такого рода: рассеяние мягкого фотона на массивной частице произвольного типа и спина, когда α и β — одночастичные состояния. Сложность здесь в том, что главное слагаемое в амплитуде рассеяния мягкого фотона возникает не от полюсных, а от неполюсных слагаемых, связанных с полюсными слагаемыми через условие сохранения тока.

Матричный элемент рассеяния фотонов может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}
S(q, \lambda; p, \sigma \rightarrow q', \lambda'; p', \sigma') &= i(2\pi)^4 \delta^4(q + p - q' - p') \\
&\times \frac{\varepsilon_\nu^*(q', \lambda') \varepsilon_\mu(q, \lambda) M_{\sigma', \sigma}^{\nu\mu}(q; p', p)}{(2\pi)^6 \sqrt{4q^0 q'^0}}, \tag{13.5.1}
\end{aligned}$$

где q и q' — начальный и конечный 4-импульсы фотона, p и p' — начальный и конечный 4-импульсы мишени, λ и λ' — начальная и конечная спиральности фотона, $\varepsilon_\nu(q', \lambda')$ и $\varepsilon_\mu(q, \lambda)$ — соответствующие векторы поляризации фотонов, σ и σ' — z -компоненты спинов

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении

начальной и конечной частиц–мишеней. Согласно теореме из раздела 6.4, амплитуду $M^{\nu\mu}$ можно записать в виде

$$(2\pi)^{-3} M_{\sigma',\sigma}^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = \int d^4x e^{iq \cdot x} (\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, T\{J^\nu(0), J^\mu(x)\} \Psi_{\mathbf{p},\sigma}) + \dots \quad (13.5.2)$$

где $J^\mu(x)$ — электромагнитный ток, а точки указывают на возможные слагаемые, изображаемые диаграммой типа «чайка», типа тех, которые возникают в теории заряженных скалярных полей, когда два фотона взаимодействуют не с отдельными токами, а в одной вершине. Повторим теперь стандартные аргументы полологии, изложенные в гл. 10 и уже использовавшиеся в разделе 13.1. Вставляя полный набор промежуточных состояний между операторами токов в правой части (13.5.2), интегрируя по x и выделяя одночастичные промежуточные состояния, получим:

$$\begin{aligned} M^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \frac{G^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p} + \mathbf{q}) G^\mu(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p})}{E(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{p}) - q^0 - i\varepsilon} \\ &+ \frac{G^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}) G^\nu(\mathbf{p}' - \mathbf{q}, \mathbf{p})}{E(\mathbf{p}' - \mathbf{q}) - E(\mathbf{p}') + q^0 - i\varepsilon} + N^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (13.5.3)$$

где G^μ — одночастичный матричный элемент тока,

$$(2\pi)^{-3} G_{\sigma',\sigma}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \equiv (\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'}, J^\nu(0) \Psi_{\mathbf{p},\sigma}), \quad (13.5.4)$$

а $N^{\nu\mu}$ представляет вклад всех других состояний кроме одночастичных и любых слагаемых, изображаемых диаграммами типа «чайка». (Формулу (13.5.3) следует понимать в смысле матричного умножения, с не выписанными явно спиновыми индексами.) Относительно $N^{\nu\mu}$ мы знаем очень мало, не считая того, что эта величина не содержит сингулярности при $q^\mu \rightarrow 0$, явно представленной первыми двумя слагаемыми, и поэтому может быть разложена в ряд по степеням q^μ .

Используем теперь условие сохранения тока (или калибровочную инвариантность):

$$q_\mu M^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = 0, \quad (13.5.5)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}) = [E(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{p})] G^0(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (13.5.6)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}) = [E(\mathbf{p}') - E(\mathbf{p}' - \mathbf{q})]G^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q}). \quad (13.5.7)$$

В применении к (13.5.3) эти условия приводят к желаемому условию на $N^{\nu\mu}$:

$$q_\mu N^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = -G^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p}' + \mathbf{q})G^0(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}) + G^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{q})G^\nu(\mathbf{p}' - \mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (13.5.8)$$

Заметим также, что $M^{\nu\mu}$ удовлетворяет условию «кросс-симметрии»:

$$M^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = M^{\nu\mu}(p' - p - q; \mathbf{p}', \mathbf{p}), \quad (13.5.9)$$

и так как полюсные слагаемые в (13.5.3) очевидно ему удовлетворяют, это же верно и для $N^{\nu\mu}$:

$$N^{\nu\mu}(q; \mathbf{p}', \mathbf{p}) = N^{\nu\mu}(p' - p - q; \mathbf{p}', \mathbf{p}). \quad (13.5.10)$$

Мы воспользуемся этими соотношениями для нахождения первых членов в разложении $N^{\nu\mu}$ по степеням импульсов.

Прежде всего, следует что-то сказать о разложении одночастичных матричных элементов тока $G^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ по степеням импульсов \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Инвариантность относительно пространственного отражения (если, конечно, она имеет место) требует, чтобы разложение G^0 и G^i ($i = 1, 2, 3$) содержало слагаемые соответственно только четного или нечетного порядка по импульсам. Согласно формуле (10.6.3), слагаемое нулевого порядка по импульсам в $G^0_{\sigma', \sigma}$ равно $e\delta_{\sigma', \sigma}$, где e — заряд частицы. Тогда из условия сохранения тока вытекает, что во втором порядке по импульсам

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{G}_{\sigma', \sigma}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \left(\frac{\mathbf{p}'^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) e \delta_{\sigma', \sigma}.$$

Следовательно, слагаемые в \mathbf{G} первого порядка по импульсам имеют вид $e(\mathbf{p}' + \mathbf{p})\delta'_{\sigma', \sigma}/2m$ плюс возможное слагаемое первого порядка, ортогональное к $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$. Из инвариантности относительно вращений вытекает, что это слагаемое должно быть пропорционально $(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \mathbf{J}'_{\sigma', \sigma}$, где \mathbf{J} — знакомая спиновая матрица заряженной частицы. Суммируя все результаты, имеем следующее разложение:

$$G^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = e\mathbf{1} + \text{квадратичные слагаемые}, \quad (13.5.11)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{e\mathbf{1}}{2m}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) + \frac{i\mu}{j} \mathbf{J} \times (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + \text{кубические слагаемые}, \quad (13.5.12)$$

где « $\mathbf{1}$ » — единичная спиновая матрица, а слова «квадратичные» и «кубические» означают порядок отброшенных слагаемых по степеням малых импульсов \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Коэффициент μ/j в (13.5.2) действителен, т. к. ток эрмитов. Если коэффициенты записаны в указанном виде (j — спин заряженной частицы), то μ — величина, известная как магнитный момент частицы.

Обратимся теперь к N^{μ} и рассмотрим разложение равенства (13.5.8) по степеням малых импульсов q^{μ} , \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Полагая $n = 0$ в (13.5.8), видим, что $q_{\mu}N^{0\mu}$ по крайней мере квадратично по этим малым величинам. Не существует постоянного вектора, ортогонального q^{μ} , так что $N^{0\mu}$ должно быть по крайней мере первого порядка по малым импульсам. Тогда из условия кросс-симметрии (13.5.10) вытекает, что N^{r0} также должно быть по крайней мере первого порядка по малым импульсам. Полагая $\mu = i$ в (13.5.8) и учитывая (13.3.12), получаем:

$$q_k N^{rk} = -\frac{e^2 q^i}{m} + \text{квадратичные слагаемые},$$

откуда

$$N^{ik} = -\frac{e^2}{m} \delta_{ik} + \text{линейные слагаемые}. \quad (13.5.13)$$

Так как G^i — по меньшей мере первого порядка по малым импульсам, то так же ведут себя полюсные слагаемые в формуле (13.5.3) для G^{ik} . Таким образом, в нулевом порядке остается единственное *неполюсное* слагаемое N^{ik} :

$$M^{ik}(0; 0, 0) = N^{ik}(0; 0, 0) = -\frac{e^2}{m} \delta_{ik}. \quad (13.5.14)$$

С помощью этого выражения можно вычислить сечение рассеяния мягких фотонов. Но нет нужды реально проводить это вычисление. Ведь теперь мы знаем, что амплитуда рассеяния фотонов в пределе нулевого импульса зависит только от массы и заряда частицы-мишени и квадратична по заряду. Поэтому мы можем немедленно использовать результаты *любого* расчета сечения рассеяния фотонов на частицах любого спина во втором порядке теории возмущений,

например, результат (8.7.42) для дифференциального сечения рассеяния фотонов в квантовой электродинамике:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (13.5.15)$$

Теперь видно, что эта формула универсальна и верна в низкоэнергетическом пределе для частиц-мишеней массой m и зарядом e произвольного типа и спина, даже если эти частицы составные и сильновзаимодействующие, например, атомные ядра. Гелл-Манн, Гольдбергер и Лоу⁸ показали, что эти результаты можно расширить и получить следующее за главным слагаемое в разложении амплитуды рассеяния мягких фотонов, выразив его через массу, заряд и магнитный момент частицы-мишени.

13.6. Приближение внешнего поля*

Интуитивно очевидно, что тяжелая заряженная частица вроде ядра атома приближенно может рассматриваться как источник классического внешнего поля. В этом разделе мы покажем, как обосновать такое приближение, и выскажем соображения о границах его применимости.

Рассмотрим фейнмановскую диаграмму или ту ее часть, где с проходящей через всю диаграмму от начального до конечного состояний линии тяжелой заряженной частицы испускаются N лежащих вне массовой поверхности фотонов с 4-импульсами q_1, q_2, \dots, q_N и поляризационными индексами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$. Сумма всех таких диаграмм или поддиаграмм (без N фотонных пропагаторов) приводит к амплитуде

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_N e^{-iq_1 \cdot x_1} e^{-iq_2 \cdot x_2} \dots e^{-iq_N \cdot x_N} \\ & \times \langle \mathbf{p}', \sigma' | T \{ J^{\mu_1}(x_1), J^{\mu_2}(x_2), \dots, J^{\mu_N}(x_N) \} | \mathbf{p}, \sigma \rangle \\ & = \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p), \end{aligned} \quad (13.6.1)$$

* Этот раздел лежит несколько в стороне от основной линии изложения и может быть опущен при первом чтении

где матричный элемент вычислен с учетом всех взаимодействий, в которых может принимать участие тяжелая частица, включая сильные ядерные взаимодействия. Такая амплитуда имеет кратный полюс при $q_1, q_2, \dots, q_N \rightarrow 0$, возникающий от слагаемых в матричных элементах произведения токов, в которых промежуточные состояния содержат точно такую же тяжелую частицу, как начальное и конечное состояния. Когда все компоненты q_1, q_2, \dots, q_N малы по сравнению со всеми энергиями и импульсами, связанными с динамикой (возможно, составной) тяжелой частицы, этот кратный полюс доминирует в (13.6.1). С помощью методов раздела 10.2 находим*:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p) &\rightarrow \frac{(-i)^{N-1}}{2p^0 (2\pi)^3} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p' + q_1 + q_2 + \dots + q_N - p) \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}} \\ &\times \frac{\mathcal{G}_{\sigma', \sigma_1}^{\mu_1}(p) \mathcal{G}_{\sigma_1, \sigma_2}^{\mu_2}(p) \dots \mathcal{G}_{\sigma_{N-1}, \sigma}^{\mu_N}(p)}{[2p \cdot q_1 - i\epsilon][2p \cdot (q_1 + q_2) - i\epsilon] \dots [2p \cdot (q_1 + \dots + q_{N-1}) - i\epsilon]} \\ &+ \text{перестановки}, \end{aligned} \quad (13.6.2)$$

где

$$\frac{\mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu}(p)}{2p^0 (2\pi)^3} \equiv \langle \mathbf{p}, \sigma' | J^{\mu}(0) | \mathbf{p}, \sigma \rangle, \quad (13.6.3)$$

а “+ перестановки” означают, что производится суммирование по всем перестановкам N фотонов. Для применений к атомным системам важно заметить, что (13.6.1) годится для частиц произвольного спина, имеющих, как атомные ядра, и сильные, и электромагнитные взаимодействия.

* В теории возмущений знаменатели происходят от знаменателей пропагаторов:

$$(p' + q_1 + \dots + q_r)^2 + m^2 - i\epsilon \rightarrow 2p' \cdot (q_1 + \dots + q_r) - i\epsilon \rightarrow 2p \cdot (q_1 + \dots + q_r) - i\epsilon,$$

в то время как числители пропагаторов содержат множители Σ_{ii}^{\dagger} , приводящие вместе с матрицами в вершинах испускания фотонов к матричным элементам (13.6.3). Матрица \mathcal{G}^{μ} отличается от матрицы G^{μ} из предыдущего раздела множителем $2p^0$.

Отметим также, что для частиц произвольного спина и заряда Ze матричные элементы электрического тока между состояниями с одинаковыми 4-импульсами имеют вид *

$$\langle p, \sigma' | J^\mu(0) | p, \sigma \rangle = \frac{Ze p^\mu \delta_{\sigma'\sigma}}{p^0 (2\pi)^3}, \quad (13.6.4)$$

так что

$$\mathcal{G}_{\sigma'\sigma}^\mu(p) = 2Ze p^\mu \delta_{\sigma'\sigma}. \quad (13.6.5)$$

Важно, что все матрицы (13.6.5) коммутируют, так что их произведение может быть вынесено за скобки в сумме по перестановкам:

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{\sigma'\sigma}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p) \rightarrow \\ & \frac{(-i)^{N-1} (Ze)^N p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_N}}{p^0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p' + q_1 + q_2 + \dots + q_N - p) \delta_{\sigma'\sigma} \\ & \times \left[\frac{1}{[2p \cdot q_1 - i\epsilon][2p \cdot (q_1 + q_2) - i\epsilon] \dots [2p \cdot (q_1 + \dots + q_{N-1}) - i\epsilon]} \right. \\ & \left. + \text{перестановки} \right]. \quad (13.6.6) \end{aligned}$$

В старшем порядке по q дельта-функцию можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta^4(p' + q_1 + q_2 + \dots + q_N - p) = \\ p^0 \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \delta(p \cdot (q_1 + q_2 + \dots + q_N)). \quad (13.6.7) \end{aligned}$$

К счастью, оказывается, что результат суммирования в этом случае значительно проще чем отдельные слагаемые. При $p \cdot (q_1 + q_2 + \dots + q_N) = 0$ находим:

* Легче всего это доказывается следующим образом. Во-первых, в той системе отсчета, где частица покоится, из требования инвариантности относительно вращений следует, что пространственные компоненты матричных элементов тока обращаются в нуль, а временная компонента пропорциональна $\delta_{\sigma'\sigma}$, и более никуда зависимость от σ' и σ не входит. Во-вторых, константа пропорциональности находится из (10.6.3), после чего преобразование Лоренца приводит к (13.6.4).

$$\left[\frac{1}{[p \cdot q_1 - i\varepsilon][p \cdot (q_1 + q_2) - i\varepsilon] \dots [p \cdot (q_1 + \dots + q_{N-1}) - i\varepsilon]} + \text{перестановки} \right] = (2i\pi)^{N-1} \delta(p \cdot q_1) \delta(p \cdot q_2) \dots \delta(p \cdot q_{N-1}). \quad (13.6.8)$$

Например, при $N = 2$ имеем:

$$\frac{1}{[p \cdot q_1 - i\varepsilon]} + \frac{1}{[p \cdot q_2 - i\varepsilon]} = \frac{1}{[p \cdot q_1 - i\varepsilon]} + \frac{1}{[-p \cdot q_1 - i\varepsilon]} = 2i\pi \delta(p \cdot q_1).$$

Общая формула (13.6.8) может быть легче всего получена как фурье-преобразование тождества

$$\theta(\tau_1 - \tau_2)\theta(\tau_2 - \tau_3) \dots \theta(\tau_{N-1} - \tau_N) + \text{перестановки} = 1.$$

Подставляя (13.6.8) в (13.6.6), приходим к окончательному выражению для амплитуды (13.6.1):

$$\mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p) \rightarrow (Ze)^N (2\pi)^N \delta_{\sigma', \sigma} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_N} \times \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \dots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \delta(p \cdot q_1) \delta(p \cdot q_2) \dots \delta(p \cdot q_N). \quad (13.6.9)$$

Этот результат применим как к релятивистским, так и к медленно движущимся тяжелым частицам, и может быть использован при выводе приближенной формулы Вейцзеккера–Вильямса⁹ для рассеяния заряженных частиц. В частном случае нерелятивистской тяжелой заряженной частицы с $|\mathbf{p}| \ll p^0$ формула (13.6.9) дополнительно упрощается:

$$\mathcal{G}_{\sigma', \sigma}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p) \rightarrow (Ze)^N (2\pi)^N n^{\mu_1} n^{\mu_2} \dots n^{\mu_N} \times \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \dots + \mathbf{q}_N - \mathbf{p}) \delta(q_1^0) \delta(q_2^0) \dots \delta(q_N^0) \delta_{\sigma', \sigma}, \quad (13.6.10)$$

где n — единичный времениподобный вектор,

$$n^0 = 1, \quad \mathbf{n} = 0.$$

Предположим теперь, что в начальном и конечном состояниях присутствует одна тяжелая нерелятивистская частица * зарядом Ze и нормированной волновой функцией в импульсном представлении $\chi_\sigma(\mathbf{p})$. Используя фурье-представление дельта-функции в (13.6.9), находим, что матричный элемент \mathcal{G} для такого состояния имеет вид

$$\int d^3p d^3p' \chi_{\sigma'}^*(\mathbf{p}') \chi_\sigma(\mathbf{p}) \mathcal{G}_{\sigma',\sigma}^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_N}(q_1, q_2, \dots, q_N; p) \rightarrow \int d^3X \sum_{\sigma} |\psi_\sigma(\mathbf{X})|^2 \prod_{r=1}^N 2\pi Z e n^{\mu_r} \delta(q_r^0) e^{-i\mathbf{q}_r \cdot \mathbf{X}}, \quad (13.6.11)$$

где $\psi(\mathbf{X})$ – волновая функция в координатном представлении:

$$\psi_\sigma(\mathbf{X}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \chi_\sigma(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{X}}. \quad (13.6.12)$$

Поэтому, в силу факторизации правой части выражения (13.6.11), результат добавления тяжелой заряженной частицы в данном состоянии с точки зрения фейнмановских правил в импульсном пространстве эквивалентен добавлению любого числа вершин нового типа. В этих вершинах легкие дираковские частицы зарядом $-e$, например, электроны, взаимодействуют с внешним полем, причем каждая такая вершина вносит в полную амплитуду множитель ** (теперь уже учтены как фотонный пропагатор, так и электрон-фотонная вершина)

$$i \int d^4q \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - i\epsilon} \right] \left[2\pi Z e n_\mu \delta(q^0) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}} \right] \left[(2\pi)^4 e \gamma^\mu \delta^4(k - k' - q) \right], \quad (13.6.13)$$

где k и k' – начальный и конечный 4-импульсы электрона. Полная амплитуда рассеяния должна быть усреднена по координате тяжелой

* Имеется в виду — помимо легких частиц. — Прим. ред.

** Первый множитель здесь – обычный множитель i , сопровождающий по фейнмановским правилам константы в лагранжиане взаимодействия тяжелой заряженной частицы.

частицы \mathbf{X} с весовой функцией $\sum_{\sigma} |\psi_{\sigma}(\mathbf{X})|^2$. Множитель (13.6.13) эквивалентен тому, который возник бы из-за нового слагаемого в лагранжиане взаимодействия:

$$\mathcal{G}_{\text{ext}}(x) = \mathcal{A}_{\mu}(x) J_e^{\mu}(x), \quad (13.6.14)$$

где $J_e^{\mu} = -ie\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ — электрический ток электронов, \mathcal{A}^{μ} — векторный потенциал внешнего поля:

$$\mathcal{A}_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iq \cdot x} \left[\frac{2\pi Z e n_{\mu} \delta(q^0) e^{-iq \cdot \mathbf{X}}}{q^2 - i\epsilon} \right]. \quad (13.6.15)$$

Естественно, это сводится к обычному кулоновскому потенциалу:

$$\mathcal{A}_0(x) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{X}|}, \quad \mathcal{A}(x) = 0. \quad (13.6.16)$$

Если тяжелых заряженных частиц несколько (как в случае молекулы), следует выразить $\mathcal{A}^{\mu}(x)$ как сумму слагаемых типа (13.6.16), каждое со своим зарядом Ze и координатой \mathbf{X} .

Полезно представлять, какие диаграммы суммируются при использовании приближения внешнего поля. Рассмотрим взаимодействие отдельного электрона (неважно, релятивистского или нет) с отдельной тяжелой заряженной частицей, например, протоном или дейтроном. Если пренебречь всеми другими взаимодействиями, то фейнмановские диаграммы рассеяния электрона за счет взаимодействия с внешним полем содержат произвольное число вставок вершин внешнее поле–электрон (13.6.14) в электронную линию (рис. 13.4). Но, как следует из суммы по перестановкам в формуле (13.6.2), такие диаграммы в приближении внешнего поля возникают из диаграмм лежащей в основе этого приближения теории, где фотонные линии, подсоединенные к электронной линии, подсоединяются к линии тяжелой частицы всеми возможными способами (рис. 13.5). «Непересекающиеся лестничные диаграммы» (обозначенные буквой L) на рис. 13.5 не являются доминирующими в этой сумме, если только электрон и тяжелая заряженная частица не являются нерелятивистскими. (Такие диаграммы на языке старой теории возмущений содержат вклады от промежуточных состояний, в которых присутствуют

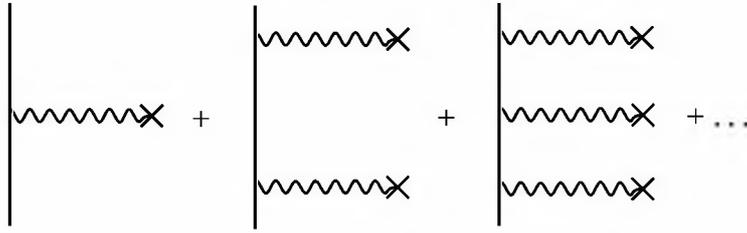


Рис. 13.4. Диаграммы рассеяния электрона внешним электромагнитным полем. Прямая линия изображает электрон; волнистые линии, оканчивающиеся крестиками, изображают его взаимодействие с внешним полем

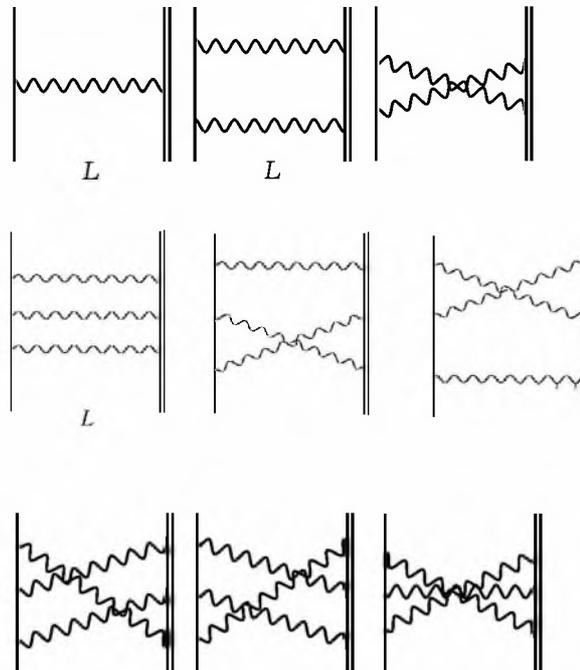


Рис. 13.5. Диаграммы рассеяния электрона тяжелой заряженной частицей-мишенью, которые в пределе большой массы мишени приводят к тому же результату, что и диаграммы рис. 13.4. Одиночная прямая линия изображает электрон, двойная прямая линия — тяжелую частицу-мишень, а волнистые линии — виртуальные фотоны. Диаграммы, помеченные буквой L , называются непересекающимися лестничными диаграммами; их вклад является доминирующим, когда и электрон, и частица-мишень нерелятивистские

те же частицы, что и в начальном и в конечном состояниях, а это приводит к малым энергетическим знаменателям при условии, что электрон и тяжелая заряженная частица — нерелятивистские. В то же время, все другие диаграммы рис. 13.5 соответствуют промежуточным состояниям, в которых присутствуют либо лишние фотоны, либо электрон–позитронные пары и даже пары тяжелая частица и ее античастица, вклад которых подавлен большими энергетическими знаменателями.) Непересекающиеся лестничные диаграммы можно отсуммировать, решив интегральное уравнение, известное как *уравнение Бете–Солпитера*¹⁰, но нет никакого смысла в отборе именно этого подмножества диаграмм, если только обе частицы не являются нерелятивистскими, а в этом случае уравнение Бете–Солпитера просто сводится к обычному нерелятивистскому уравнению Шредингера и релятивистским поправкам, связанным со спин–орбитальным взаимодействием, которые можно рассматривать как малое возмущение. Следует сказать, что до сих пор теория релятивистских эффектов и радиационных поправок в связанных состояниях не является полностью удовлетворительной.

При выводе формул (13.6.16) для внешнего поля мы учитывали взаимодействие тяжелой заряженной частицы с электромагнитным полем только в главном порядке по импульсу фотона. Существуют поправки более высокого порядка по импульсу фотона, возникающие от учета магнитного момента тяжелой частицы, ее квадрупольного электрического момента и т. д. Кроме того, конечно, существуют и радиационные поправки, возникающие от диаграмм кроме показанных на рис. 13.4, например, таких, где фотоны испускаются и поглощаются на электронной линии, или со вставками электронных петель в фотонные линии. В следующей главе будет показано, что для связанных состояний диаграммы рис. 13.4 необходимо учесть во всех порядках теории возмущений, а все другие поправки более высокого порядка по импульсам фотонов или по e можно включать как малые возмущения к этим диаграммам.

Задачи

1. Рассмотрите процесс $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ в с. ц. м. при энергии 1 ГэВ и угле рассеяния 90° . Предположим, что при измерении энергии конечных пионов мы обнаруживаем, что энергия, не

превышающая значения $E_T \ll 1$ ГэВ, излучается в виде мягких фотонов. Как зависит вероятность реакции от E_T ?

2. Рассмотрите безмассовые бесспиновые частицы, описываемые скалярным полем Φ , лагранжиан взаимодействия которого имеет вид $\Phi(x)J(x)$, где $J(x)$ включает только поля массивных частиц. Выведите формулу для вероятности испускания произвольного числа мягких скалярных частиц в процессе $\alpha \rightarrow \beta$, если полная энергия этих мягких скаляров меньше некоторой малой величины E_T . Учтите радиационные поправки за счет мягких скаляров с энергией, меньшей некоторой малой величины Λ .
3. Выведите формулу для следующего за (13.5.14) члена разложения амплитуды рассеяния фотонов на произвольной мишени при малых энергиях.
4. Пусть частица спина 1 и очень малой массой m описывается векторным полем $V^\mu(x)$, взаимодействующим только со много более тяжелым фермионом, описываемым дираковским полем $\Psi(x)$, причем лагранжиан взаимодействия имеет вид $gV_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$. Предположим, что тяжелый фермион обычно распадается на другие частицы, не взаимодействующие с V^μ , и в таком распаде высвобождается энергия $W \gg m$. Рассмотрите такой процесс распада, в котором дополнительно испускаются частицы V^μ , причем энергия векторной частицы ограничена сверху значением E , и $W \gg E \gg m$. Как зависит от E и m вероятность процесса? Радиационными поправками пренебречь.
5. Докажите, что формула (13.6.8) верна при условии, что $p \cdot (q_1 + \dots + q_N) = 0$.

Список литературы

1. Bloch, F. and Nordsieck, F., *Phys. Rev.*, **37**, 54 (1937); Yennie, D.R., Frautschi, S.C., and Suura, H., *Ann. Phys. (NY)*, **13**, 379 (1961). См. также: Mahantappa, K.T., диссертация (Гарвардский университет, 1961), неопубликовано.

2. Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **9**, 357 (1964); *Phys. Rev.*, **135**, B1049 (1964).
3. Weinberg, S., *Phys. Rev.*, **140**, B515 (1965).
4. Эта фаза была учтена в ряде теории возмущений для нерелятивистского кулоновского рассеяния в работе: Dalitz, R.H., *Proc. Roy. Soc., London*, **206**, 509 (1951).
5. См., например, в книге: Schiff, L.I. *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1949), Section 20 (есть рус. пер.: Л. Шифф. *Квантовая механика*. М., ИЛ, 1958.)
6. Lee, T.D. and Nauenberg, M., *Phys. Rev.*, **133**, B1549 (1964); Kinoshita, T., *J. Math. Phys.*, **3**, 650 (1962); Sterman, G. and Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 1416 (1977).
7. Sterman, G. and Weinberg, S., [6].
8. Low, F.E., *Phys. Rev.*, **96**, 1428 (1954); Gell-Mann, M. and Goldberger, M.L., *Phys. Rev.*, **96**, 1433 (1954). См. также: Weinberg, S., in: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — 1970 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics*, ed. by S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton (MIT Press, Cambridge, MA, 1970).
9. Williams, E.J., *Kgl. Dan. Vid. Sel. Mat.-Fys. Medd.*, **XIII**, No. 4 (1935).
10. Bethe, H.A. and Salpeter, E.E., *Phys. Rev.*, **82**, 309 (1951); **84**, 1232 (1951).

Связанные состояния во внешних полях

В гл. 11 при вычислении радиационных поправок мы сделали всего лишь один шаг за рамки низшего порядка теории возмущений. Однако существует весьма важный класс задач, в которых даже простейшие вычисления требуют с самого начала рассмотрения совокупностей фейнмановских диаграмм произвольно высокого порядка по константе связи типа e . Это те задачи, в которых участвуют связанные состояния, например, в электродинамике — обычные атомы и молекулы, либо такие экзотические атомы как позитроний или мюоний.

Легко видеть, что попытка применения обычной теории возмущений в подобных задачах обязательно терпит крах. Рассмотрим, например, амплитуду электрон–протонного рассеяния как функцию энергии E в с. ц. и. Как показано в разделе 10.3, существование связанного состояния типа основного состояния атома водорода требует существования полюса у этой амплитуды при $E = m_p + m_e - 13,6$ эВ. Однако ни один взятый в отдельности член ряда теории возмущений для электрон–протонного рассеяния не содержит такого полюса. Поэтому он может возникнуть лишь из-за расходимости суммы всех диаграмм при энергиях в с. ц. и. вблизи значения $m_p + m_e$.

Причину такой расходимости ряда теории возмущений также легко понять, особенно, если на время вместо фейнмановских диаграмм рассмотреть хронологически упорядоченные диаграммы старой теории возмущений. Пусть электрон и протон имеют в с. ц. и. импульсы порядка $q \ll m_e$. Рассмотрим промежуточное состояние, в котором импульсы электрона и протона различаются, но остаются порядка q . Каждое такое состояние вносит мультипликативным

образом вклад, равный произведению энергетического знаменателя порядка $[q^2/m_e]^{-1}$ на матричный элемент кулоновского взаимодействия порядка e^2/q^2 (фурье-образ e^2/r), а соответствующее интегрирование по импульсам внесет еще множитель порядка q^3 . Учитывая все эти факторы, видим, что фактическим параметром разложения по степеням кулоновского взаимодействия является величина порядка

$$[q^2/m_e]^{-1}[e^2/q^2][q^3] = e^2 m_e / q.$$

Таким образом, теория возмущений терпит крах, если q меньше или порядка $e^2 m_e$, иными словами, если кинетическая и потенциальная энергии, равные по порядку величины q^2/m_e , не превышают значения $e^4 m_e$, что, конечно, совпадает по порядку с энергией связи атома водорода.

Наша цель заключается в том, чтобы научиться использовать теорию возмущений для вычисления радиационных поправок в задачах о связанных состояниях, суммируя во всех порядках те диаграммы, которые нужно, и ограничиваясь лишь конечным числом тех, которые суммировать не следует.

14.1. Уравнение Дирака

Ограничимся в этой главе рассмотрением задач, в которых связанные состояния возникают из-за кулоновского взаимодействия электронов (или мюонов) с тяжелыми заряженными частицами типа атомных ядер. Как показано в разделе 13.6, такое взаимодействие можно учесть, добавив в лагранжиан взаимодействия слагаемое*, описывающее взаимодействие с c -числовым внешним векторным потенциалом $A^\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & -ie\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu - \frac{1}{4}(Z_3 - 1)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ & - ie(Z_2 - 1) A_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \end{aligned} \quad (14.1.1)$$

* В этой главе мы вновь используем заглавную букву Ψ для обозначения поля электронов в представлении Гейзенберга, а строчную букву ψ используем для обозначения дираковского поля, зависимость которого от времени определяется только c -числовым внешним полем $A^\mu(x)$.

Оно получается заменой квантового векторного потенциала A^μ на сумму $A^\mu + \mathcal{A}^\mu$ в отвечающем взаимодействию слагаемом в (11.1.6). Например, для отдельной тяжелой частицы зарядом Ze , помещенной в начале координат,

$$\mathcal{A}^0(x) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{A}(x) = 0. \quad (14.1.2)$$

Именно взаимодействие (14.1.1) должно быть учтено во всех порядках теории возмущений. В этом разделе мы рассмотрим теорию, включающую только такое взаимодействие, оставив рассмотрение радиационных поправок на последующие разделы.

Еще в детском саду физики узнают, что решение подобных задач сводится к решению дираковского волнового уравнения в присутствии внешнего поля. Вывод здесь этого уравнения может показаться лишней тратой времени, но, как подчеркивалось в гл. 1, данное Дираком исходное его обоснование как разновидности релятивистского уравнения Шредингера не выдерживает критики. Кроме того, в процессе вывода мы получим условия нормировки, которые следует наложить на решения уравнения Дирака и которые в оригинальной работе Дирака кажутся взятыми несколько «с потолка». Обсуждаемые здесь решения дираковского уравнения будут существенно использованы в следующем разделе при анализе радиационных поправок.

Мы проведем рассмотрение, используя вариант гейзенберговского представления, в котором зависимость операторов от времени определяется гамильтонианом, включающем только взаимодействие (14.1.1) с внешним полем, но не другие взаимодействия. Поле электронов $\psi(x)$ в этом представлении удовлетворяет полемому уравнению

$$\left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] \psi(x) = 0. \quad (14.1.3)$$

Это не уравнение Дирака в исходном понимании самого Дирака¹, поскольку здесь $\psi(x)$ – не c -числовая волновая функция, а квантовый оператор. Являющиеся c -числами дираковские волновые функции определяются равенствами:

$$u_N(x) \equiv (\Phi_0, \psi(x)\Phi_N), \quad (14.1.4)$$

$$v_N(x) \equiv (\Phi_N, \Psi(x)\Phi_0), \quad (14.1.5)$$

где Φ_N — полный ортонормированный набор векторов состояний, Φ_0 — состояние вакуума. Из (14.1.3) немедленно вытекает, что эти функции удовлетворяют однородному уравнению Дирака

$$\begin{aligned} & \left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \hat{A}_\lambda(x) \right] u_N(x) = \\ & = \left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \hat{A}_\lambda(x) \right] v_N(x) = 0. \end{aligned} \quad (14.1.6)$$

Кроме того, используя антикоммутирующие при равных временах для дираковского поля, можно вывести условие нормировки. Взаимодействие (14.1.1) не влияет на антикоммутирующие, поэтому они имеют тот же вид, что и для свободных полей:

$$\{\Psi(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}(\mathbf{y}, t)\} = i\gamma^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (14.1.7)$$

Беря среднее по вакууму и вставляя сумму по состояниям Φ_N , находим:

$$\sum_N u_N(\mathbf{x}, t) u_N^\dagger(\mathbf{y}, t) + \sum_N v_N(\mathbf{x}, t) v_N^\dagger(\mathbf{y}, t) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (14.1.8)$$

Суммирование по N подразумевает интегрирование по состояниям непрерывного спектра и суммирование по всем дискретным связанным состояниям.

Нас главным образом интересует случай не зависящего от времени внешнего поля типа (14.1.2). В подобных случаях состояния Φ_N могут быть взяты как собственные состояния гамильтониана (включающего взаимодействие (14.1.1)) с энергиями E_N . Из инвариантности относительно временных трансляций следует, что зависимость функций $u_N(x)$ и $v_N(x)$ от времени имеет вид

$$u_N(\mathbf{x}, t) = e^{-iE_N t} u_N(\mathbf{x}), \quad v_N(\mathbf{x}, t) = e^{+iE_N t} v_N(\mathbf{x}). \quad (14.1.9)$$

Тогда однородные уравнения Дирака запишутся как

$$i\gamma^0 [\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m + ie\gamma^\lambda \hat{A}_\lambda(\mathbf{x})] u_N(\mathbf{x}) = E_N u_N(\mathbf{x}), \quad (14.1.10)$$

$$i\gamma^0[\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m + ie\gamma^\lambda A_\lambda(\mathbf{x})]v_N(\mathbf{x}) = -E_N v_N(\mathbf{x}). \quad (14.1.11)$$

Знак «минус» в правой части (14.1.11) указывает на то, что v_N являются знаменитыми дираковскими решениями с «отрицательными энергиями». Как видно из (14.1.8), такие решения необходимы для полноты системы волновых функций. Конечно, при умеренных внешних полях в теории нет состояний с отрицательными энергиями, так что все E_N положительны. Однако все еще есть существенная разница между состояниями с исчезающими u_N или v_N : из определений (14.1.4) и (14.1.5) следует, что состояния могут иметь $u_N \neq 0$ или $v_N \neq 0$ только, если они имеют, соответственно, заряд $-e$ или $+e$. Именно в этом смысле решения уравнения Дирака с отрицательными энергиями имеют отношение к существованию античастиц. Однако это соображение никак не связано с деталями уравнения Дирака и даже со значением спина электрона.

Из дираковских волновых уравнений (14.1.10) и (14.1.11) легко получить*, что волновые функции с разными энергиями ортогональны. Именно,

$$(E_M - E_N^*)(u_N^\dagger u_M) = \nabla \cdot (u_N^\dagger i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} u_M),$$

так что, если $|\mathbf{x}|^2 (u_N^\dagger i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} u_M)$ остается ограниченным при $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ и $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, то

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})u_M(\mathbf{x})) = 0, \text{ если } E_N \neq E_M^*. \quad (14.1.12)$$

При аналогичных граничных условиях для v_N находим тем же путем:

$$\int d^3x (v_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0, \text{ если } E_N \neq E_M^*, \quad (14.1.13)$$

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0, \text{ если } E_N \neq -E_M^*. \quad (14.1.14)$$

* Следующим ниже, вообще говоря, нестрогим рассуждениям можно придать строгий математический смысл, если исходить из того, что дифференциальный оператор $i\gamma^0[\boldsymbol{\gamma}\nabla + m + ie\gamma^\lambda A_\lambda(\mathbf{x})]$ (гамильтониан Дирака во внешнем поле) является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве дираковских спиноров $\Psi(\mathbf{x})$ со скалярным произведением $(\Psi_1, \Psi_2) = \int d\mathbf{x} \Psi_1^\dagger(\mathbf{x})\Psi_2(\mathbf{x})$. — Прим. ред.

Полагая $N = M$, получаем из (14.1.12) и (14.1.13), что все энергии действительны. Опуская в (14.1.12)–(14.1.14) знак комплексного сопряжения над E_M , находим, что функции u с разными энергиями ортогональны, функции v с разными энергиями ортогональны, и (до тех пор пока потенциал недостаточно велик, чтобы порождать состояния отрицательной энергии) все u ортогональны ко всем v . Подбирая подходящим образом дискретные квантовые числа, которые наряду с энергией характеризуют состояния, можно всегда сделать так, чтобы

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})u_M(\mathbf{x})) = 0, \text{ если } N \neq M, \quad (14.1.15)$$

$$\int d^3x (v_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0, \text{ если } N \neq M, \quad (14.1.16)$$

$$\int d^3x (u_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})) = 0. \quad (14.1.17)$$

Умножая (14.1.8) справа на $u_M(\mathbf{y})$ или $v_M(\mathbf{y})$, находим, что эти волновые функции должны удовлетворять условиям нормировки

$$\int d^3y (u_N^\dagger(\mathbf{y})u_M(\mathbf{y})) = \int d^3y (v_N^\dagger(\mathbf{y})v_M(\mathbf{y})) = \delta_{NM}, \quad (14.1.18)$$

где δ_{NM} — произведение кронекеровских дельта-символов и дельта-функций в импульсном пространстве, причем нормировка согласована с той, которая использовалась при определении Σ_N , так что $\Sigma_N \delta_{NM} = 1$. Эти условия нормировки непосредственно не имеют отношения к любой вероятностной трактовке дираковских волновых функций, а являются следствиями антикоммутиционных соотношений (14.1.7) для полей.

Обратимся к конкретному случаю чисто электростатического внешнего поля с $\mathbf{A} = 0$. В принятом нами стандартном представлении матрицы Дирака имеют вид:

$$\gamma = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

В этих формулах $\boldsymbol{\sigma}$ — обычный 3-вектор, составленный из 2×2 матриц Паули, а $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ — единичная и нулевая матрицы 2×2 . Введем двухкомпонентные волновые функции f_N и g_N , полагая

$$u_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_N + ig_N \\ f_N - ig_N \end{pmatrix}. \quad (14.1.19)$$

Уравнение на собственные значения энергии (14.1.10) примет вид:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) f_N = (E_N + e \mathcal{A}^0 + m) g_N, \quad (14.1.20)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) g_N = -(E_N + e \mathcal{A}^0 - m) f_N. \quad (14.1.21)$$

В нерелятивистском случае, когда $e \mathcal{A}^0 r \approx Z\alpha \ll 1$, энергия связи $m - E_N$ порядка $Z^2\alpha^2 m$, в то время как оператор градиента порядка $Z\alpha m$, так что g_N приблизительно в $Z\alpha$ раз меньше f_N . (Чтобы найти волновые функции позитрона, заменяем везде E_N на $-E_N$, так что в этом случае f_N меньше g_N во столько же раз.) В конце раздела мы вернемся к нерелятивистскому случаю.

Физические состояния можно расклассифицировать на четные и нечетные по отношению к пространственной инверсии:

$$P\Phi_N = \eta_N \Phi_N, \quad (14.1.22)$$

где η_N — знаковый множитель, равный ± 1 . Напомним, что если определить внутреннюю четность электрона равной $+1$, то дираковское поле преобразуется по отношению к инверсии по закону

$$P\psi(\mathbf{x}, t)P^{-1} = \beta\psi(-\mathbf{x}, t),$$

так что из уравнений (14.1.4) и (14.1.5) следует, что дираковские волновые функции удовлетворяют условию четности:

$$u_N(\mathbf{x}) = \eta_N \beta u_N(-\mathbf{x}), \quad (14.1.23)$$

или эквивалентно,

$$f_N(\mathbf{x}) = \eta_N f_N(-\mathbf{x}), \quad g_N(\mathbf{x}) = -\eta_N g_N(-\mathbf{x}). \quad (14.1.24)$$

Обратим внимание, что четность состояния совпадает с четностью $f_N(\mathbf{x})$, но не $g_N(\mathbf{x})$.

Если потенциал \mathcal{A}^0 инвариантен относительно вращений, решения волновых уравнений можно охарактеризовать их полным

угловым моментом j и четностью η . При заданном j компоненты f и g можно разложить по сферическим гармоникам с орбитальными моментами $l = j + \frac{1}{2}$ и $l = j - \frac{1}{2}$, но при заданной четности $\eta = (-1)^{j \mp \frac{1}{2}}$ из уравнений (14.1.24) вытекает, что f содержит только гармонику с $l = j \mp \frac{1}{2}$, а g — только гармонику с $l = j \pm \frac{1}{2}$. Из обычных правил сложения угловых моментов вытекает, что для состояния с полным моментом j , z -компонентой полного момента μ и четностью $(-1)^{j \mp \frac{1}{2}}$ «большая» двухкомпонентная волновая функция f имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} C_{j \mp \frac{1}{2}, \mu} (j\mu; \mu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) Y_{j \mp \frac{1}{2}}^{\mu - \frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j \mp \frac{1}{2}, \mu} (j\mu; \mu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) Y_{j \mp \frac{1}{2}}^{\mu + \frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} F(|\mathbf{x}|). \quad (14.1.25)$$

где C и Y — соответственно обычные коэффициенты Клебша–Гордана и сферические гармоники². Кроме того, если задана любая волновая функция с определенными полным угловым моментом и четностью, можно построить другую волновую функцию с теми же j и μ , но противоположной четностью, подействовав оператором $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}})$, так что «малые» компоненты можно взять в виде:

$$g(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} C_{j \mp \frac{1}{2}, \mu} (j\mu; \mu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) Y_{j \mp \frac{1}{2}}^{\mu - \frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j \mp \frac{1}{2}, \mu} (j\mu; \mu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) Y_{j \mp \frac{1}{2}}^{\mu + \frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} G(|\mathbf{x}|). \quad (14.1.26)$$

Принято определять орбитальный момент l состояния как орбитальный момент «больших» компонент f_N :

$$l = j \mp \frac{1}{2}, \quad (14.1.27)$$

так что четность всегда равна $(-1)^l$.

Подставляя (14.1.25) и (14.1.26) в (14.1.20) и (14.1.21), получаем систему зацепляющихся дифференциальных уравнений:

$$\frac{dG}{dr} + \frac{k+1}{r} G + (E + eA^0 - m)F = 0, \quad (14.1.28)$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{k-1}{r}F - (E + eA^0 + m)G = 0, \quad (14.1.29)$$

где при четности $\eta = (-1)^{j+\frac{1}{2}}$

$$k \equiv \pm(j + \frac{1}{2}). \quad (14.1.30)$$

Сосредоточимся на случае простого кулоновского поля (14.1.2), когда $eA^0 = Z\alpha/r$. Исследование уравнения Дирака в этом случае хорошо известно³, так что мы для полноты изложения коротко суммируем результаты. Легко видеть, что вблизи начала координат решения ведут себя как r^{s-1} , где $s^2 = k^2 - Z^2\alpha^2$. (Обратим внимание, что $k^2 \geq 1$, так что показатель степени s действителен при $Z\alpha \leq 1$.) Решения с $s < 0$ следует отбросить как несовместимые с условием нормировки (14.1.18). После этого требование, чтобы волновые функции не стремились к бесконечности при $r \rightarrow \infty$, определяет разрешенные собственные значения энергии *:

$$E_{n,j} = m \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (14.1.31)$$

где n — «главное квантовое число» и

$$j + \frac{1}{2} \leq n. \quad (14.1.32)$$

Примечательно, что эти значения энергии не зависят от четности или l , а зависят только от n и j . Для каждого n и j существуют два решения, отвечающие двум знакам k или двум возможным четностям, за исключением случая $n = j + \frac{1}{2}$, когда единственной возможностью является $k > 0$ и четность $(-1)^{j-\frac{1}{2}}$, так что $l = j - \frac{1}{2}$. С учетом неравенства (14.1.32) это сводится к знакомому нерелятивистскому ограничению $l \leq n - 1$.

Для легких атомов с $Z\alpha \ll 1$ выражение (14.1.31) можно представить в виде ряда

* Речь идет о дискретном спектре. — Прим. ред.

$$E = m \left[1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} + \frac{Z^4 \alpha^4}{n^4} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2j+1} \right) + \dots \right]. \quad (14.1.33)$$

Естественно, что первое слагаемое есть энергия покоя, а второе — энергия связи, согласно нерелятивистскому уравнению Шредингера. Первая релятивистская поправка, зависящая как от n , так и от j , дается третьим слагаемым. При $n = 1$ возможно только одно значение полного момента $j = \frac{1}{2}$, и так как в этом случае $n = j + \frac{1}{2}$, то и одно значение четности $(-1)^{j-\frac{1}{2}} = +1$, что соответствует $l = 0$. Поэтому для состояний водородоподобных атомов с $n = 1$ довольно трудно наблюдать эффекты, обусловленные релятивистскими поправками к энергии связи, которые даются формулой (14.1.33), хотя, как будет видно в разделе 14.3, это недавно стало возможным. С другой стороны, при $n = 2$ имеются состояния с $j = \frac{1}{2}$ и обеими четностями (т. е. состояния $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$), а также состояние $2p_{3/2}$ с $j = \frac{3}{2}$ и отрицательной четностью. Из формулы (14.1.33) определяется расщепление p -уровней водорода:

$$E(2p_{3/2}) - E(2p_{1/2}) = \frac{\alpha^2 m_e}{32} = 4,5283 \times 10^{-5} \text{ эВ}. \quad (14.1.34)$$

Подобное релятивистское расщепление уровней носит название *тонкой структуры* атомных уровней. С самого начала было известно, что это предсказание находится в хорошем согласии с наблюдаемой тонкой структурой. С другой стороны, из уравнения Дирака вытекает отсутствие разницы в энергиях состояний $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$, так что именно здесь уместно поискать вклады других поправок, что и будет рассмотрено в разделе 14.3.

Прежде чем завершить этот раздел, рассмотрим приближенные выражения для волновых функций и матричных элементов в нерелятивистском случае для произвольного электростатического потенциала V^0 . (Для кулоновского потенциала это соответствует пределу $Z\alpha \ll 1$.) Так как $E_N + m \simeq 2m \gg |e V^0|$, «малые» компоненты волновой функции электрона приближенно выражаются через «большие» компоненты:

$$g_N \simeq (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) f_N / 2m_e. \quad (14.1.35)$$

Тогда уравнение (14.1.21) превращается в нерелятивистское уравнение Шредингера

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m_e} - eA^0 \right] f_N \simeq (E_N - m)f_N. \quad (14.1.36)$$

Поскольку теперь в уравнении для f_N уже нет никакой связи между спиновыми и орбитальными степенями свободы, можно искать полную систему решений этого уравнения в виде:

$$f_N = \chi_N \Psi_N,$$

где χ_N — двухкомпонентный постоянный спинор, а $\Psi_N(\mathbf{x})$ — обычное однокомпонентное решение уравнения Шредингера. Однако часто мы используем состояния с определенными значениями полного момента j , для которых f_N (при ненулевом орбитальном моменте) представляется суммой таких решений.

В нерелятивистском приближении четырехкомпонентная дираковская волновая функция принимает вид:

$$u_N \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla / 2m)f_N \\ (1 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla / 2m)f_N \end{bmatrix}, \quad (14.1.37)$$

а формула (14.1.18) определяет условие нормировки

$$\int d^3x (f_N^\dagger, f_M) \simeq \delta_{NM} - \frac{1}{4}(\mathbf{v}^2)_{NM}, \quad (14.1.38)$$

где

$$(\mathbf{v}^2)_{NM} \equiv -\frac{1}{m_e^2} \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) \nabla^2 f_M(\mathbf{x}).$$

При установлении связи матричных элементов во внешнем поле с матричными элементами для свободных частиц полезно заметить, что волновая функция в импульсном представлении, отвечающая собственному значению энергии N , может быть записана в следующем виде:

$$u_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} u_N(\mathbf{x}) \simeq \sum_{\sigma} u(\mathbf{p}, \sigma) [f_N(\mathbf{p})]_{\sigma}. \quad (14.1.39)$$

где дираковский спинор для свободной частицы

$$u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2m_e) \chi_\sigma \\ (1 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2m_e) \chi_\sigma \end{bmatrix},$$

$$\chi_{+\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а $f_N(\mathbf{p})$ – фурье-образ двухкомпонентной шредингеровской волновой функции:

$$f_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3p e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f_N(\mathbf{x}).$$

* * *

В заключение с целью вычисления вкладов различных возмущений приведем главные члены матричных элементов 16 независимых 4×4 матриц по электронным состояниям.

$$(\bar{u}_M u_N) \simeq (f_M^\dagger f_N) - \frac{1}{4m_e^2} (\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N), \quad (14.1.40)$$

$$i(\bar{u}_M \gamma^0 u_N) \simeq (f_M^\dagger f_N) + \frac{1}{4m_e^2} (\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N), \quad (14.1.41)$$

$$(\bar{u}_M \boldsymbol{\gamma} u_N) \simeq \frac{1}{2m_e} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot f_N) - (f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)], \quad (14.1.42)$$

$$(\bar{u}_M [\boldsymbol{\gamma}^0, \boldsymbol{\gamma}] u_N) \simeq \frac{i}{m_e} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot f_N) + (f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)], \quad (14.1.43)$$

$$(\bar{u}_M [\boldsymbol{\gamma}^i, \boldsymbol{\gamma}^j] u_N) \simeq 2i\epsilon_{ijk} (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma}_k f_N), \quad (14.1.44)$$

$$(\bar{u}_M \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\gamma} u_N) \simeq -i(f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} f_N), \quad (14.1.45)$$

$$(\bar{u}_M \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\gamma}^0 u_N) \simeq \frac{i}{2m_e} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} f_N) - (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)], \quad (14.1.46)$$

$$(\bar{u}_M \boldsymbol{\gamma}_5 u_N) \simeq \frac{i}{2m_e} [(\nabla f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} f_N) + (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)]. \quad (14.1.47)$$

14.2. Радиационные поправки во внешних полях

Учтем теперь наряду с внешним полем тяжелых заряженных частиц также и квантовое электромагнитное поле и рассмотрим радиационные поправки к результатам предыдущего раздела, обусловленные взаимодействием электронов с квантовым электромагнитным полем. Такие радиационные поправки можно вычислить с помощью обычной фейнмановской диаграммной техники, причем весь вклад внешнего поля будет заключаться в модификации пропагатора поля электронов в присутствии внешнего электромагнитного поля (и в добавлении зависящих от внешнего поля перенормировочных контрчленов из формулы (14.1.1)). Конкретнее, вклад от включения любого числа вершин, соответствующих первому слагаемому в операторе взаимодействия (14.1.1), во внутреннюю электронную линию любой диаграммы заключается в замене голого пропагатора в координатном представлении $-iS(x - y)$ на пропагатор во внешнем поле

$$\begin{aligned} -iS_{\ell}(x, y) &\equiv -iS(x - y) + (-i)^2 \int d^4z_1 S(x - z) e\gamma^{\mu} \ell_{\mu}(z_1) S(z_1 - y) \\ &+ (-i)^3 \int d^4z_1 \int d^4z_2 S(x - z_1) e\gamma^{\mu} \ell_{\mu}(z_1) S(z_1 - z_2) e\gamma^{\mu} \ell_{\mu}(z_2) S(z_2 - y) \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (14.2.1)$$

где, как обычно,

$$S(x - y) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{-i\gamma_{\lambda} p^{\lambda} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip(x-y)}.$$

(Следует записывать S_{ℓ} как функцию x и y , а не $x - y$, поскольку внешнее поле нарушает трансляционную инвариантность.) Согласно доказанной в разделе 6.4 теореме, S_{ℓ} , определяемый формулой (14.2.1), совпадает с выражением, определяемым формулой

$$-iS_{\ell}(x, y) = (\Phi_0, T\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} \Phi_0)_{\ell}, \quad (14.2.2)$$

где нижний индекс ℓ справа означает, что вакуумное состояние Φ_0 и электронное поле $\psi(x)$ должны быть определены в гейзенберговском представлении, в котором учитывается только взаимодействие (14.1.1) с внешним полем. Вставляя полный набор промежуточных состояний

Φ_N в (14.2.2), приходим к выражению этого пропагатора через введенные в предыдущем разделе дираковские волновые функции:

$$-iS_{\not{A}}(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \sum_N u_N(x) \bar{u}_N(y) - \theta(y^0 - x^0) \sum_M v_M(x) \bar{v}_M(y). \quad (14.2.3)$$

Можно получить пропагатор (14.2.2) и как решение *неоднородного уравнения Дирака*

$$\left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + ie\gamma^\lambda \not{A}_\lambda(x) \right] S_{\not{A}}(x, y) = \delta^4(x - y), \quad (14.2.4)$$

которое следует из полевых уравнений (14.1.3) и соотношений антикоммутации (14.1.7), или формально из ряда теории возмущений (14.2.1). Кроме того, из формулы (14.2.3) вытекает, что этот пропагатор удовлетворяет следующим граничным условиям: его фурье-разложение содержит при $x^0 - y^0 \rightarrow \infty$ только «положительночастотные слагаемые», пропорциональные $\exp(-iE(x^0 - y^0))$ с $E > 0$, а при $x^0 - y^0 \rightarrow -\infty$ — только «отрицательночастотные слагаемые», пропорциональные $\exp(+iE(x^0 - y^0))$ с $E > 0$. Даже в случаях, когда внешнее поле слишком сильно, и использование ряда теории возмущений (14.2.1) недопустимо, можно с помощью неоднородного уравнения Дирака с такими граничными условиями получить численное решение⁴ для пропагатора во внешнем поле. Если только пропагатор найден, амплитуды рассеяния во внешнем поле можно вычислить, используя обычные фейнмановские диаграммы, заменив при этом $S(x - y)$ на $S_{\not{A}}(x, y)$ (и включив, где необходимо, соответствующие зависящие от \not{A} перенормировочные контрчлены).

Посмотрим теперь, как использовать ряд теории возмущений с пропагатором во внешнем поле для вычисления сдвигов уровней энергии связанных состояний. Рассмотрим полный электронный пропагатор $S'_{\not{A}}(x, y)$, учитывающий взаимодействие электрона как с квантовым электромагнитным полем, так и с внешним полем:

$$-iS'_{\not{A}}(x, y) = \left(\Omega_0, T\{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\} \Omega_0 \right)_{\not{A}}, \quad (14.2.5)$$

где $\Psi(x)$ — электронное поле в гейзенберговском представлении с учетом всех взаимодействий, а Ω_0 — вакуумное состояние полного

гамильтониана. В случае независящего от времени внешнего потенциала можно найти полный ортонормированный набор собственных состояний Ω_N полного гамильтониана с энергиями E'_N . Вставляя сумму по этим состояниям в произведение операторов в (14.2.5), находим:

$$\begin{aligned} -iS'_{\prime}(x, y) &= \theta(x^0 - y^0) e^{-iE'_N(x^0 - y^0)} \sum_N U_N(\mathbf{x}) \bar{U}_N(\mathbf{y}) \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) e^{-iE'_N(y^0 - x^0)} \sum_N V_N(\mathbf{x}) \bar{V}_N(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (14.2.6)$$

где

$$(\Omega_0, \Psi(\mathbf{x}, t) \Omega_N) \equiv e^{-iE'_N t} U_N(\mathbf{x}), \quad (14.2.7)$$

$$(\Omega_N, \Psi(\mathbf{x}, t) \Omega_0) \equiv e^{+iE'_N t} V_N(\mathbf{x}). \quad (14.2.8)$$

(Сумма включает интегрирование по непрерывному спектру и суммирование по дискретным связанным состояниям. Как и ранее, U_N и V_N не равны нулю, только если заряд состояния Ω_N равен $-e$ или $+e$, соответственно.) Можно переопределить этот пропагатор, задав его как функцию энергии, а не времени:

$$S'_{\prime}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 e^{iE(x^0 - y^0)} S'_{\prime}(x, y). \quad (14.2.9)$$

(Из инвариантности относительно временных трансляций следует, что $S'_{\prime}(x, y)$ есть функция $x^0 - y^0$, но не x^0 или y^0 по отдельности.) Из формулы (14.2.6) следует, что

$$S'_{\prime}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_N \frac{U_N(\mathbf{x}) \bar{U}_N(\mathbf{y})}{E'_N - E - i\varepsilon} - \sum_N \frac{V_N(\mathbf{x}) \bar{V}_N(\mathbf{y})}{E'_N + E - i\varepsilon}. \quad (14.2.10)$$

В частности, $S'_{\prime}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E)$ имеет полюса в точках, отвечающих как энергии любого связанного состояния электрона, так и взятой с обратным знаком энергии связанного состояния позитрона. (Конечно, у позитронов нет связанных состояний в кулоновском поле обычного положительно заряженного ядра.)

Рассмотрим теперь радиационные поправки низшего порядка к полному пропагатору. В соответствии с фейнмановскими правилами

полный пропагатор в этом порядке равен $S'_{i,l} = S_{i,l} + \delta S_{i,l}$, где поправка

$$\delta S_{i,l}(x, y) = \int d^3z \int d^3w S_{i,l}(x, z) \Sigma_{i,l}^*(z, w) S_{i,l}(w, y), \quad (14.2.11)$$

а величина $i \Sigma_{i,l}^*$ есть сумма всех однопетлевых диаграмм с одной входящей и одной выходящей электронной линией (исключая последние электронные пропагаторы), вычисленная с использованием пропагатора $S_{i,l}(x, y)$ вместо $S(x - y)$ для внутренних электронных линий, плюс перенормировочные контрчлены второго порядка. Используя вместо временных энергетические переменные, имеем:

$$\delta S_{i,l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \int d^3z \int d^3w S_{i,l}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; E) \Sigma_{i,l}^*(\mathbf{z}, \mathbf{w}; E) S_{i,l}(\mathbf{w}, \mathbf{y}; E), \quad (14.2.12)$$

$$\Sigma_{i,l}^*(\mathbf{z}, \mathbf{w}; E) \equiv \int dz^0 e^{iE(z^0 - w^0)} \Sigma_{i,l}^*(z, w). \quad (14.2.13)$$

За счет радиационных поправок изменяются волновые функции: $U_N = u_N + \delta u_N$, $V_N = v_N + \delta v_N$, и энергии связанных состояний: $E'_N = E_N + \delta E_N$, так что полный пропагатор равен:

$$\begin{aligned} S'_{i,l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) &\simeq S_{i,l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) \\ &+ \sum_N \frac{\delta u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y}) + u_N(\mathbf{x}) \delta \bar{u}_N(\mathbf{y})}{E_N - E} \\ &- \sum_N \frac{\delta v_N(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y}) + v_N(\mathbf{x}) \delta \bar{v}_N(\mathbf{y})}{E_N + E} \\ &- \sum_N \frac{u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y}) \delta E_N}{(E_N - E)^2} + \sum_N \frac{v_N(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y}) \delta E_N}{(E_N + E)^2}. \end{aligned} \quad (14.2.14)$$

(Мы опустили слагаемые $i\epsilon$, поскольку теперь рассматриваются те значения E , которые не принадлежат непрерывному спектру состояний рассеяния.) Видно, что сдвиг δE_N энергии связанного состояния электрона определяется коэффициентом при слагаемых $-u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y}) / (E_N - E)^2$ в полном пропагаторе. Чтобы найти этот коэффициент, заметим, что из (14.2.3) вытекает:

$$S_{i,l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_N \frac{u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_N(\mathbf{y})}{E_N - E - i\epsilon} - \sum_N \frac{v_N(\mathbf{x}) \bar{v}_N(\mathbf{y})}{E_N + E - i\epsilon}. \quad (14.2.15)$$

Подставляя это выражение в (14.2.12), находим:

$$\begin{aligned} \delta S_{\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) &= \sum_{N, M} \frac{u_N(\mathbf{x}) \bar{u}_M(\mathbf{y})}{(E_N - E)(E_M - E)} \\ &\times \int d^3 z \int d^3 w \bar{u}_N(\mathbf{z}) \Sigma_{\ell}^*(\mathbf{z}, \mathbf{w}; E) u_M(\mathbf{w}) + \dots \end{aligned} \quad (14.2.16)$$

где точки соответствуют дополнительным слагаемым, включающим хотя бы один полюс при отрицательном значении энергии. Сравнивая коэффициенты при $(E_N - E)^{-2}$ здесь и в (14.2.14), получаем:

$$\delta E_N = - \int d^3 x \int d^3 y \bar{u}_N(\mathbf{x}) \Sigma_{\ell}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N) u_N(\mathbf{y}). \quad (14.2.17)$$

Функции u_N являются решениями однородного уравнения Дирака, удовлетворяющими условию нормировки (14.1.8), так что все это весьма похоже на обычную теорию возмущений первого порядка, с заменой в гамильтониане оператора возмущения на $-\Sigma^*$.

В общем случае δE_N оказывается комплексным. Это есть следствие неустойчивости атомных уровней энергии по отношению к радиационным переходам на нижние уровни. В гл. 3 мы видели, что неустойчивое состояние с энергией E и вероятностью распада Γ приводит к наличию полюсов в разных амплитудах при комплексных значениях энергии $E - i\Gamma/2$. Мнимая часть (14.2.17) равна по этой причине $-\Gamma/2$, а действительная часть определяет сдвиг энергии.

Фейнмановские диаграммы для Σ^* показаны на рис. 14.1. (Обратим внимание на то, что здесь появились новые фотонные диаграммы-головастики, поскольку присутствие внешнего поля нарушает лоренц-инвариантность и инвариантность относительно зарядового сопряжения, запрещающие подобные диаграммы в обычных правилах Фейнмана.) С помощью фейнмановских правил в координатном представлении получаем вклад этих диаграмм в виде

$$\begin{aligned} i \Sigma_{\ell}^*(x, y) &= [e\gamma^{\mu}] [-iS_{\ell}(x, y)] [e\gamma_{\mu}] [-iD(x - y)] \\ &- [e\gamma^{\mu} \delta^4(x - y)] \int d^4 z [-iD(x - z)] \text{Tr}\{[-iS_{\ell}(z, z)] [e\gamma_{\mu}]\} \\ &- i(Z_2 - 1)(\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m) \delta^4(x - y) + i\delta m \delta^4(x - y) \\ &+ e\gamma^{\mu} (Z_2 - 1) \delta^4(x - y) \not{t}_{\mu}(x) \\ &+ i(Z_3 - 1) [e\gamma_{\mu}] \delta^4(x - y) \int d^4 z [-iD(x - z)] \partial_{\nu} (\partial^{\nu} \not{t}^{\mu}(z) - \partial^{\mu} \not{t}^{\nu}(z)), \end{aligned} \quad (14.2.18)$$

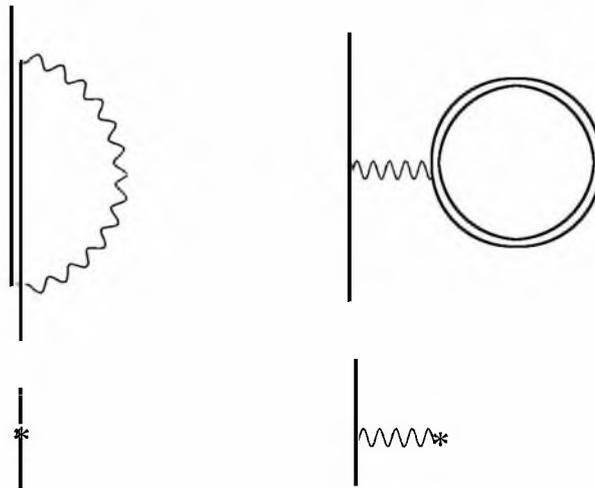


Рис. 14.1. Фейнмановские диаграммы низшего порядка для электронной собственноэнергетической функции $\Sigma_{\psi}^*(x, y)$ в присутствии внешнего поля. Двойные прямые линии изображают пропагатор во внешнем поле S_A ; одиночные прямые линии — входящие и выходящие электронные линии; волнистые линии — виртуальные фотоны; крестиками изображены перенормировочные контрчлены

где перенормировочные константы $(Z_2 - 1)$, $(Z_3 - 1)$ и δm вычислены во втором порядке по e . (Знак «минус» во втором слагаемом привычно сопровождает вклад замкнутой фермионной петли.)

В случае сильных внешних полей с $Z\alpha$ порядка единицы, необходимы численные расчеты электронного пропагатора S_{ψ} в конфигурационном пространстве и интегралов в (14.2.17) и (14.2.18).⁴ Однако для слабых полей можно подставить несколько первых слагаемых ряда (14.2.1) в (14.2.18) и вычислить эти интегралы в замкнутом виде. Удобнее работать в импульсном представлении, определив

$$S_{\psi}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4 p' d^4 p e^{ip' \cdot x} e^{-ip \cdot y} S_{\psi}(p', p), \quad (14.2.19)$$

$$\Sigma^*_l(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4p' d^4p e^{ip'x} e^{-ip'y} \Sigma^*_l(p', p), \quad (14.2.20)$$

$$u_N(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} u_N(\mathbf{p}), \quad (14.2.21)$$

$$A^\mu(x) = \int d^4q e^{iqx} A^\mu(q). \quad (14.2.22)$$

(Мы допускаем здесь некоторую некорректность, используя один и тот же символ для функции и ее фурье-образа, полагая, что явное указание аргумента позволяет разобраться, что есть что.) Выражения (14.2.1) и (14.2.18) принимают вид

$$\begin{aligned} S_l(p', p) &= \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \\ &- ie \frac{-i\not{p}' + m}{p'^2 + m^2 - i\epsilon} H(p' - p) \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} + \dots \end{aligned} \quad (14.2.23)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^*_l(p', p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - i\epsilon} \gamma^\mu S_l(p' - k, p - k) \gamma_\mu \\ &+ [-(Z_2 - 1)(i\not{p} + m) + Z_2 \delta m] \delta^4(p' - p) - ie(Z_2 - 1) H(p' - p) \\ &- \frac{ie^2 \gamma^\mu}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p - p')^2 - i\epsilon} \int d^4q \text{Tr}\{S_l(q, q + p' - p) \gamma_\mu\} \\ &+ \frac{ie(Z_3 - 1)}{(p - p')^2 - i\epsilon} [(p - p')^2 H(p' - p) - (p - p')(p - p') \cdot A(p' - p)]. \end{aligned} \quad (14.2.24)$$

Поскольку внешнее поле не зависит от времени, $S_l(x, y)$ и $\Sigma^*_l(x, y)$ могут зависеть от x^0 и y^0 только через разность $x^0 - y^0$, так что $S_l(p', p)$ и $\Sigma^*_l(p', p)$, а также $A^\mu(p' - p)$ должны быть пропорциональны $\delta(p'^0 - p^0)$:

$$A^\mu(p' - p) = \delta(p'^0 - p^0) A^\mu(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (14.2.25)$$

$$S_{\ell}(p', p) = \delta(p'^0 - p^0) S_{\ell}(\mathbf{p}', \mathbf{p}; p^0), \quad (14.2.26)$$

$$\Sigma_{\ell}^*(p', p) = \delta(p'^0 - p^0) \Sigma_{\ell}^*(\mathbf{p}', \mathbf{p}; p^0). \quad (14.2.27)$$

Сдвиг энергии определяется из (14.2.17) и (14.2.13) в виде:

$$\delta E_N = - \int d^3 p' \int d^3 p \bar{u}_N(\mathbf{p}') \Sigma_{\ell}^*(\mathbf{p}', \mathbf{p}; E_N) u_N(\mathbf{p}), \quad (14.2.28)$$

где $\Sigma_{\ell}^*(\mathbf{p}', \mathbf{p}; E_N)$ дается формулами (14.2.23), (14.2.24) и (14.2.27). Это рабочая формула, которую мы используем в следующем разделе для расчета энергетических сдвигов в слабых внешних полях.

14.3 Лэмбовский сдвиг в легких атомах

Рассмотрим радиационные поправки к уровням энергии нерелятивистского электрона в произвольном электростатическом поле, например, в кулоновском поле легкого ядра с $Z\alpha \ll 1$. В этом пределе естественно рассматривать кулоновское поле как малое возмущение, но, как мы увидим, это приводит к инфракрасной расходимости, связанной с той, которая обсуждалась в разделе 11.3. На самом деле, инфракрасная расходимость фиктивна, поскольку 4-импульсы \mathbf{p}, E_N и \mathbf{p}', E_N не лежат на массовой поверхности электрона, тем не менее, нам нужно быть внимательными.

Обычно задачу решают, разбив интеграл по энергиям виртуального фотона на область низких энергий, где электроны можно рассматривать нерелятивистски, но учитывать вклады всех порядков по внешнему полю, и область высоких энергий, где следует учитывать релятивистские эффекты, но ограничиться только вкладом первого порядка по внешнему полю.

Мы поступим иначе и введем фиктивную массу фотона μ , выбрав ее много большей, чем типичные кинетические энергии электрона, но много меньшей типичных импульсов электрона. В случае кулоновского поля это сводится к требованию:

$$(Z\alpha)^2 m_e \ll \mu \ll Z\alpha m_e. \quad (14.3.1)$$

Запишем фотонный пропагатор в первых двух слагаемых правой части формулы (14.2.24) (включая выражения для контрчленов $Z_2 - 1$ и $Z_2 \delta t$) в виде:

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} = \left[\frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] + \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right]. \quad (14.3.2)$$

Сдвиг энергии является, соответственно, суммой двух слагаемых, отвечающих «высоким энергиям» и «низким энергиям». Слагаемое, отвечающее высоким энергиям, вычисляется путем подстановки первого слагаемого в фотонном пропагаторе (14.3.2) в три первых слагаемых правой части (14.2.24) и прибавления результата к двум последним слагаемым в (14.2.24) (отвечающим поляризации вакуума), которые в любом случае не содержат инфракрасной расходимости. Слагаемое, отвечающее низким энергиям, вычисляется подстановкой второго слагаемого из (14.3.2) в три первых слагаемых в (14.2.24). Одним из преимуществ такой процедуры является то, что удастся непосредственно воспользоваться результатами релятивистских вычислений из разделов 11.3 и 11.4, не занимаясь довольно запутанным переходом от массы фотона к инфракрасному обрезанию по энергии. Конечно, в конце вычислений мы должны убедиться, что зависимость от массы фотона μ в слагаемых, отвечающих высоким и низким энергиям, взаимно сокращается и полный сдвиг энергии не зависит от μ .

А. Слагаемое, отвечающее высоким энергиям

Поскольку μ выбрано значительно бóльшим, чем энергии связи в атоме, можно оставить только слагаемые низшего порядка по внешнему полю. Однопетлевая радиационная поправка к атомным уровням энергии в произвольном не зависящем от времени внешнем вектор-потенциале $A^\mu(\mathbf{x})$ определяется в импульсном представлении выражением (14.2.28), где собственноэнергетическая вставка $\Sigma A(p', p)$ дается формулами (14.2.24) и (14.2.23). Слагаемые нулевого порядка по внешнему полю просто сокращаются: слагаемое, пропорциональное δt , сокращается с первым слагаемым при $A = 0$; слагаемое, пропорциональное $Z_3 - 1$, сокращается с третьим слагаемым при $A = 0$; наконец, слагаемые, пропорциональные $Z_2 - 1$, обращаются в нуль, поскольку $u(p)$ удовлетворяет уравнению

Дирака. Слагаемое первого порядка по $i\hbar$ в $\Sigma_{\mu}^*(p', p)$ можно представить в виде:

$$\Sigma_{\mu}^*(p', p) = -ieA_{\mu}(p' - p)\Gamma_1^{\mu}(p', p), \quad (14.3.3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{\mu}(p', p) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \\ &\times \left[\frac{-i(p' - k) + m_e}{(p' - k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right] \gamma^{\mu} \left[\frac{-i(p - k) + m_e}{(p - k)^2 + m_e^2 - i\epsilon} \right] + (Z_2 - 1) \gamma^{\mu} \\ &- \frac{ie^2 \gamma_{\nu}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p - p')^2 - i\epsilon} \int d^4l \operatorname{Tr} \left\{ \left[\frac{-il + m_e}{l^2 + m_e^2} \right] \gamma^{\mu} \left[\frac{-il - ip' + ip + m_e}{(l + p' - p)^2 + m_e^2} \right] \gamma^{\nu} \right\} \\ &- \frac{Z_3 - 1}{(p' - p)^2 - i\epsilon} \left[(p' - p)^2 \eta_{\mu\nu} - (p' - p)_{\mu} (p' - p)_{\nu} \right] \gamma^{\nu}. \end{aligned} \quad (14.3.4)$$

Сравнение двух первых слагаемых этого выражения с формулами (11.3.1) и (11.3.8), а двух последних — с формулами (11.3.9), (11.2.3) и (11.2.15) показывает, что $\Gamma_1^{\mu}(p', p)$ является полной однопетлевой вершинной функцией, включающей поляризацию вакуума и все контрчлены, матричные элементы которой на массовой оболочке уже были вычислены в разделе 11.3. Используя представления (14.2.26) и (14.2.25), соответствующий вклад в сдвиг энергии (14.2.28) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{\text{высокие энергии}} &= ie \int d^3p' \int d^3p \\ &\times \left(\bar{u}_N(\mathbf{p}') \Gamma_1^{\mu}(\mathbf{p}', E'_N, \mathbf{p}, E_N) u_N(\mathbf{p}) \right) \hat{A}_{\mu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (14.3.5)$$

(Вид этой формулы можно было бы угадать, просто заменив γ^{μ} в вершине взаимодействия электрона с внешним полем на Γ_1^{μ} .) Как обсуждалось в разделе 14.1, в силу неравенства $Z\alpha \ll 1$ можно аппроксимировать дираковскую волновую функцию u_N в (14.3.5) выражением:

$$[u_N(\mathbf{p})]_{\alpha} = \sum_{\sigma} u_{\alpha}(\mathbf{p}, \sigma) [f_N(\mathbf{p})]_{\sigma}, \quad (14.3.6)$$

где f_N есть нерелятивистская двухкомпонентная волновая функция электрона во внешнем кулоновском поле, а $u(\mathbf{p}, \sigma)$ – четырехкомпонентное нормированное решение уравнения Дирака в импульсном пространстве:

$$\left[i\gamma_\mu p^\mu + m_e \right] u(\mathbf{p}, \sigma) = 0, \quad (14.3.7)$$

соответствующее z -компоненте спина σ . Так как $u_N(\mathbf{p})$ приближенно удовлетворяет уравнению Дирака для свободной частицы, то общая форма матричного элемента Γ_1^μ дается формулой (10.6.15):

$$\begin{aligned} & \bar{u}_M(\mathbf{p}') \left[\gamma^\mu + \Gamma_1^\mu(p', p) \right] u_N(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}_M(\mathbf{p}') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] q_\nu F_2(q^2) \right] u_N(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (14.3.8)$$

где $q \equiv p' - p$. Волновые функции $u_N(\mathbf{p})$ очень быстро убывают при $|\mathbf{p}| \gg Z\alpha m_e$, так что нужны только выражения для $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ в пределе $q^2 \ll m_e^2$. В этом пределе с помощью формул (11.3.31), (10.6.18) и (11.3.16) имеем:

$$F_1(q^2) \simeq 1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \left(\frac{q^2}{m_e^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right], \quad (14.3.9)$$

$$F_2(q^2) \simeq \frac{e^2}{16m_e\pi^2}. \quad (14.3.10)$$

Рассмотрим сначала вклад слагаемого F_1 в формуле (14.3.8), поскольку именно оно приводит к самому большому вкладу в сдвиг уровней энергии и, кроме того, при его вычислении возникают наиболее интересные проблемы. В случае чисто электростатического поля, когда $\mathcal{A} = 0$, из формул (14.3.5), (14.3.8) и (14.3.9) получаем:

$$\begin{aligned} & [\delta E_N]_{F_1} = - \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \\ & \times \int d^3 p' \int d^3 p \bar{u}_N(\mathbf{p}') (-ie \mathcal{V}^0(\mathbf{p}' - \mathbf{p})) \gamma^0(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 u_N(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (14.3.11)$$

Для вычисления этого вклада можно использовать главное слагаемое в нерелятивистском матричном элементе (14.1.41), так что в результате имеем

$$[\delta E_N]_{F_1} = -\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \times \int d^3 p' \int d^3 p f_N^\dagger(\mathbf{p}') e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}} (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 f_N(\mathbf{p}) \quad (14.3.12)$$

или в координатном представлении

$$[\delta E_N]_{F_1} = \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \int d^3 x f_N^\dagger(\mathbf{x}) [e^{\nabla^2} - 1] f_N(\mathbf{x}). \quad (14.3.13)$$

В частности, для кулоновского потенциала (14.1.2) имеем: $e^{\nabla^2} - 1 = -Ze^2 \delta^3(\mathbf{x})$, индекс N включает главное квантовое число n и квантовые числа углового момента j, m, l , а из формулы (11.2.41) имеем: $|f_{njml}(0)|_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n^3)^{3/2} \delta_{l,0} \delta_{\sigma,m} / \sqrt{4\pi}$. Соответственно сдвиг энергии (14.3.11) принимает вид:

$$[\delta E_{jnl}]_{F_1} = -\frac{2Z^4 \alpha^5 m_e}{3\pi n^3} \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \delta_{l,0}. \quad (14.3.14)$$

(Отсутствие зависимости δE от z -компоненты m полного углового момента гарантируется инвариантностью относительно вращений.) Слагаемое $2/5$ в скобках в (14.3.12) и (14.3.13) возникает за счет поляризации вакуума и дает ту же величину сдвига, которая была вычислена в разделе 11.2 с помощью скорее эвристических соображений.

Прежде чем переходить к вычислению магнитного и низкоэнергетического вкладов в сдвиг энергии, стоит заметить, что с помощью уже найденного результата можно без всякой дальнейшей работы получить хорошую оценку лэмбовского сдвига по порядку величины. Можно ожидать, что низкоэнергетические слагаемые будут содержать член, пропорциональный $\ln(\mu/B)$, с таким коэффициентом, чтобы сократить зависимость от μ в (14.3.12). Константа B есть энергия, необходимая для обезразмеривания

аргумента логарифма. Поскольку инфракрасное обрезание в конце концов определяется энергией связи электрона в атоме, можно предположить, что B равна типичной энергии связи, т. е. $B = (Z\alpha)^2 m_e$. Таким образом, полный сдвиг энергии в состоянии N с главным квантовым числом n и орбитальным моментом l равен:

$$\delta E_N = -\frac{2Z^4\alpha^5 m_e}{3\pi n^3} [\ln(Z^4\alpha^4)\delta_{l,0} + O(1)]. \quad (14.3.15)$$

Для $2s$ состояния атома водорода одно только логарифмическое слагаемое дает

$$\delta E_{2s} \approx -\frac{\alpha^5 m_e}{12\pi} \ln(\alpha^4) = 5,5 \times 10^{-6} \text{ эВ} = 1300 \text{ МГц} \times 2\pi\hbar.$$

Как мы увидим, слагаемые $O(1)$ уменьшают полный сдвиг энергии примерно на 25 %.

Рассмотрим теперь вклад слагаемого F_2 в матричный элемент Γ_1^μ . Как мы видели в разделе 10.6, это слагаемое можно интерпретировать как радиационную поправку к магнитному моменту электрона. Подставляя формулы (14.3.10), (14.3.8) и (14.3.6) в (14.3.5), находим, что это слагаемое приводит к сдвигу энергии:

$$[\delta E_N]_{F_2} = -\frac{e^2}{32\pi^2 m_e} \int d^3 p' \int d^3 p (\bar{u}_N(\mathbf{p}') [\gamma^\mu, \gamma^\nu] u_N(\mathbf{p})) \times e \cdot \mathcal{I}_\mu(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(p' - p)_\nu, \quad (14.3.16)$$

или в координатном представлении

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{ie^2}{64\pi^2 m_e} \int d^3 x (\bar{u}_N(\mathbf{x}) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] u_N(\mathbf{x})) e \cdot \mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}), \quad (14.3.17)$$

где

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \equiv \partial_\mu \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}) - \partial_\nu \mathcal{I}_\mu(\mathbf{x}). \quad (14.3.18)$$

В случае чисто электростатического поля, когда $\mathcal{A} = 0$, этот сдвиг принимает вид

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{-ie^2}{32\pi^2 m_e} \int d^3x (\bar{u}_N(\mathbf{x})[\boldsymbol{\gamma}, \gamma^0]u_N(\mathbf{x})) \cdot \nabla [e \varphi^0(\mathbf{x})]. \quad (14.3.19)$$

В нерелятивистском пределе $Z\alpha \ll 1$ можно использовать приближенный результат (14.1.43), который в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_N[\boldsymbol{\gamma}^0, \boldsymbol{\gamma}]u_N) &\simeq \frac{i}{m_e} [(\nabla f_N^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} f_N) + (f_N^\dagger \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla f_N)] \\ &= \frac{i}{m_e} [\nabla(f_N^\dagger f_N) - i(\nabla f_N^\dagger \times \boldsymbol{\sigma})f_N - if_N^\dagger(\boldsymbol{\sigma} \times \nabla f_N)]. \end{aligned} \quad (14.3.20)$$

Подставляя это представление в правую часть формулы (14.3.19) и интегрируя по частям, находим, что этот вклад в сдвиг энергии дается формулой

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{F_2} &= \frac{e^2}{32\pi^2 m_e^2} \int d^3x [-|f_N(\mathbf{x})|^2 \nabla^2 (e \varphi^0(\mathbf{x})) \\ &\quad + 2if_N^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla(eA^0(\mathbf{x})) \times \nabla f_N(\mathbf{x}))]. \end{aligned} \quad (14.3.21)$$

Собирая вместе выражения (14.3.12) и (14.3.21), получаем полный отвечающий высоким энергиям вклад в сдвиг энергии в произвольном электростатическом потенциале φ^0 :

$$\begin{aligned} [\delta E_N]_{\text{высокие энергии}} &= \\ &\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} \right] \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) [e \nabla^2 A^0(\mathbf{x})] f_N(\mathbf{x}) \\ &\quad + \frac{ie^2}{16\pi^2 m_e^2} \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla(eA^0(\mathbf{x})) \times \nabla f_N(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (14.3.22)$$

Б. Слагаемое, отвечающее низким энергиям

Низкоэнергетический вклад в сдвиг энергии получается из первых трех слагаемых в (14.2.24) после подстановки

$$\frac{1}{k^2 - i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon}. \quad (14.3.23)$$

в фотонном пропагаторе. Эта подстановка по существу служит для обрезания интеграла по компонентам 4-импульса фотона k на величинах порядка μ , но это невозможно увидеть, пока аккуратно не учтена перенормировка массы, так что до этого момента мы воздержимся от любых нерелятивистских приближений. Кроме того, сейчас мы учитываем импульсы фотонов того же порядка или меньше, чем энергии связи атомных состояний, так что необходимо рассмотреть ответственные за эту связь электростатические силы во всех порядках.

Вместо того, чтобы работать с формулой (14.2.24) импульсного представления, удобно вернуться к формуле (14.2.18) конфигурационного представления. В этом представлении низкоэнергетический вклад в собственнoэнергетическую функцию электрона дается формулой

$$\begin{aligned} [\Sigma^*_l(x, y)]_{\text{низкие энергии}} &= ie^2 \gamma^\rho S_l(x, y) \gamma_\rho D(x - y; \mu) \\ &+ \delta m_e(\mu) \delta^4(x - y) - (Z_2(\mu) - 1) (\gamma^\mu [\partial_\mu + ie A_\mu] + m_e) \delta^4(x - y), \end{aligned} \quad (14.3.24)$$

где $D(x - y; \mu)$ — модифицированный фотонный пропагатор,

$$D(x - y; \mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik \cdot (x-y)} \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right], \quad (14.3.25)$$

а контрчлены $Z_2(\mu) - 1$ и $\delta m(\mu)$ вычислены с помощью этого модифицированного пропагатора. Переходя от временной переменной к энергетической, находим, что низкоэнергетический вклад в функцию (14.2.13) есть

$$\begin{aligned} [\Sigma^*_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E)]_{\text{низкие энергии}} &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\rho S_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E - k^0) \gamma_\rho \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &- (Z_2(\mu) - 1) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + i\gamma^0 E + ie\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_v + m_e) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &+ \delta m_e(\mu) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (14.3.26)$$

Соответственно низкоэнергетический вклад в сдвиг энергии согласно формуле (14.2.17) принимает вид

$$\begin{aligned}
 [\delta E_N]_{\text{низкие энергии}} &= - \int d^3x \int d^3y \bar{u}_N(\mathbf{x}) [\Sigma_{\rho}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N)]_{\text{низкие энергии}} u_N(\mathbf{y}) \\
 &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int d^3x \int d^3y \bar{u}_N(\mathbf{x}) \gamma^{\rho} S_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E - k^0) \gamma_{\rho} u_N(\mathbf{y}) \\
 &\times \left[\frac{1}{k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\
 &- \delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{14.3.27}$$

Заметим, что слагаемые, пропорциональные $Z_2(\mu) - 1$, выпали, так как дираковская волновая функция $u_N(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Дирака (14.1.10). Для нахождения электронного пропагатора в присутствии кулоновского поля воспользуемся формулой (14.2.15):

$$S_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \sum_M \frac{u_M(\mathbf{x}) \bar{u}_M(\mathbf{y})}{E_M - E - i\epsilon} - \sum_M \frac{v_M(\mathbf{x}) \bar{v}_M(\mathbf{y})}{E_M + E - i\epsilon},$$

где суммы в первом и втором слагаемых берутся по всем одноэлектронным и однопозитронным состояниям, соответственно. Интегралы по k^0 легче всего взять, замкнув контур интегрирования большим полукругом в нижней полуплоскости для первого слагаемого, и в верхней полуплоскости — для второго:

$$\begin{aligned}
 &\int dk^0 \left(\frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \right) \left(\frac{1}{E_M \mp E_N \pm k^0 - i\epsilon} \right) = \\
 &= \frac{i\pi}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \left(\frac{1}{E_M \mp E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon} \right)
 \end{aligned}$$

и поступив аналогично, когда μ заменяется на нуль. Теперь сдвиг энергии принимает вид

$$\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{низкие энергии}} &= -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \\
&\times \left[\Gamma_{MN}^\rho(\mathbf{k})^* \Gamma_{\rho MN}(\mathbf{k}) \left(\frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \frac{1}{(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \bar{\Gamma}_{MN}^\rho(\mathbf{k})^* \bar{\Gamma}_{\rho MN}(\mathbf{k}) \left(\frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M + E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \frac{1}{(E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \right] \\
&- \delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{14.3.28}$$

где

$$\Gamma_{MN}^\rho(\mathbf{k}) \equiv \int d^3y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \bar{u}_M(\mathbf{y}) \gamma^\rho u_N(\mathbf{y}), \tag{14.3.29}$$

$$\bar{\Gamma}_{MN}^\rho(\mathbf{k}) \equiv \int d^3y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \bar{v}_M(\mathbf{y}) \gamma^\rho v_N(\mathbf{y}). \tag{14.3.30}$$

(Конечно, «сумма» по M в (14.3.28) означает вклады только от электронных состояний в первое слагаемое и только от позитронных состояний — во второе.)

Формулу (14.3.28) можно было бы вывести более непосредственно из старой теории возмущений: энергетические знаменатели $E_M - E_N + \omega$ и $E_M + E_N + \omega$ возникают в результате вычитания энергии E_N начального состояния из энергии промежуточного состояния, содержащего либо электрон с энергией E_M и фотон с энергией ω , либо позитрон с энергией E_M , фотон с энергией ω и как конечный, так и начальный электроны (см. рис. 14.2).

Прежде чем делать какие-то приближения в (14.3.28), удобно выразить временные компоненты матричных элементов Γ_{MN}^ρ и $\bar{\Gamma}_{MN}^\rho$ через соответствующие пространственные компоненты, используя

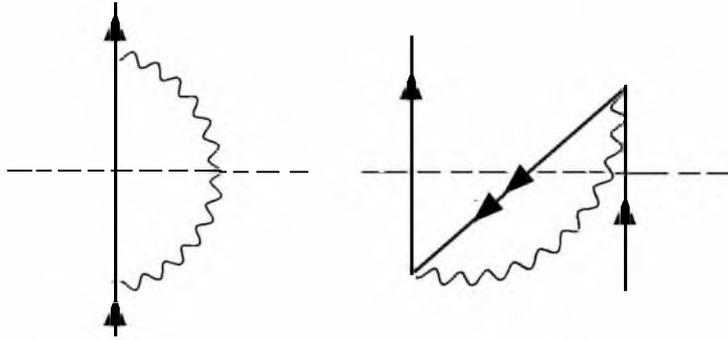


Рис. 14.2. Диаграммы старой теории возмущений для низкоэнергетической части сдвига энергии электрона. Сплошные прямые линии изображают электрон; волнистые линии — фотон; пунктирные линии пересекают линии частиц промежуточных состояний, соответствующих первым двум слагаемым правой части формулы (14.3.28)

соотношения*, следующие из закона сохранения электрического тока:

$$k_i \Gamma_{MN}^i(\mathbf{k}) = (E_N - E_M) \Gamma_{MN}^0(\mathbf{k}), \quad (14.3.31)$$

$$k_i \tilde{\Gamma}_{MN}^i(\mathbf{k}) = (E_N + E_M) \tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k}). \quad (14.3.32)$$

Более того, используя соотношение полноты (14.1.8), можно непосредственно показать, что

$$\sum_M \left[|\Gamma_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 + |\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 \right] = 1 \quad (14.3.33)$$

и

* Чтобы получить (14.3.31), заметим, что

$$\begin{aligned} k_i \Gamma_{MN}^i(\mathbf{k}) &= -i \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \nabla \cdot (\bar{u}_M(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} u_N(\mathbf{x})) \\ &= i \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \partial_0 \left[(\bar{u}_M(\mathbf{x}) \gamma^0 u_N(\mathbf{x})) e^{-i(E_N - E_M)x^0} \right]_{x^0=0} = (E_N - E_M) \Gamma_{MN}^0(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Формула (14.3.32) выводится аналогично.

$$\begin{aligned}
& \sum_M \left[|\Gamma_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 (E_M - E_N) - |\tilde{\Gamma}_{MN}^{0*}(\mathbf{k})|^2 (E_M + E_N) \right] \\
&= \sum_M \left[-\Gamma_{MN}^{0*}(\mathbf{k}) \mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k}) - \tilde{\Gamma}_{MN}^{0*}(\mathbf{k}) \mathbf{k} \cdot \tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k}) \right] \\
&= -i\mathbf{k} \cdot \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} u_N(\mathbf{x}) = 0,
\end{aligned} \tag{14.3.34}$$

причем последнее равенство вытекает из условия четности (14.1.23). Таким образом, соотношение (14.3.28) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& [\delta E_N]_{\text{низкие энергии}} = \\
&= -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \left[\frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / \mathbf{k}^2)}{|\mathbf{k}|(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / (\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} (E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right] \\
&+ \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \left[\frac{(|\tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 / \mathbf{k}^2)}{|\mathbf{k}|(E_M + E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(|\tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \tilde{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 / (\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} (E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right] \\
&- \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M |\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \alpha \mu - \delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{14.3.35}$$

При получении предпоследнего слагаемого был использован элементарный интеграл

$$\int d^3k \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right) = 2\mu\pi^2.$$

До сих пор все преобразования были точным переписыванием формулы (14.3.28). Теперь следует сделать ряд приближений. Прежде всего рассмотрим перенормировку массы. В разделе 11.4 уже было вычислено значение $\delta m_e(\mu)$ в порядке α . Оно равно:

$$\delta m_e(\mu) = \frac{2m_e \pi^2 e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{m_e^2 x^2 + \mu^2 (1-x)}{m_e^2 x^2} \right). \quad (14.3.36)$$

Хотя в разделе 11.4 величина μ рассматривалась как регуляризующая масса, которую следовало считать много большей чем m_e , выражение (14.3.36) можно с тем же успехом использовать для вычисления значения $\delta m_e(\mu)$ в интересующем нас сейчас случае $\mu \ll m_e$. В этом пределе формула (14.3.36) приводит к выражению:

$$\delta m_e(\mu) \rightarrow \frac{\alpha \mu}{2} \left[1 - \frac{3\mu}{2\pi m_e} + \dots \right]. \quad (14.3.37)$$

Напомним, что при $Z\alpha \ll 1$ функция $u_N(\mathbf{x})$ определяется формулой (14.1.37):

$$u_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}/2 + \dots) f_N(\mathbf{x})}{(1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}/2 + \dots) f_N(\mathbf{x})} \right], \quad (14.3.38)$$

где точки отмечают слагаемые более высокого порядка по $Z\alpha$, \mathbf{v} – нерелятивистский оператор скорости $-i\nabla/m_e$, а $f_N(\mathbf{x})$ – двухкомпонентный спинор, являющийся решением нерелятивистского уравнения Шредингера, нормированный соотношением (14.1.38):

$$\int d^3x |f_N(\mathbf{x})|^2 = 1 - \frac{1}{4} (\mathbf{v}^2)_{NN} + \dots \quad (14.1.39)$$

Отсюда находим коэффициент при $\delta m_e(\mu)$ в правой части (14.3.35):

$$\int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2)_{NN} + \dots \quad (14.3.40)$$

Мы сразу же видим, что главное слагаемое в члене $\delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N u_N$ сокращает слагаемое $\alpha\mu/2$ в правой части (14.3.35). На самом деле,

такое сокращение можно было предвидеть, поскольку это слагаемое выживает в пределе $Z\alpha \rightarrow 0$, а определение $m_e(\mu)$ как перенормированной массы электрона требует, чтобы в этом пределе не было никакого сдвига энергии.

С помощью тех же рассуждений можно предвидеть, что слагаемое порядка $\alpha\mu^2/m_e$ в $\delta m_e(\mu)$ (которое больше, чем порядка $\alpha(Z\alpha)^4 m_e$, и поэтому им нельзя просто пренебречь) сокращает имеющие тот же порядок второе и третье слагаемые в правой части (14.3.35)*. С другой стороны, произведение слагаемого $\alpha\mu^2/m_e$ в δm_e со вторым слагаемым в матричном элементе (14.3.40) имеет порядок

* Убедиться в этом сокращении можно следующим образом. Мы исходим из того, что второе и третье слагаемые в правой части (14.3.35) достаточно малы, так что их можно оценить с помощью предельно нерелятивистского приближения $\beta u_N(\mathbf{x}) = u_N(\mathbf{x})$ в уравнении Дирака, которому удовлетворяет $u_N(\mathbf{x})$. С другой стороны, хотя и можно пренебречь кулоновской силой в позитронных волновых функциях $v_M(\mathbf{x})$, сумма по M в третьем слагаемом содержит существенный вклад от релятивистских позитронов, так что мы используем приближение $v_{\mathbf{p},\sigma}(\mathbf{x}) \simeq (2\pi)^{-3/2} v(\mathbf{p},\sigma) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$, где $v(\mathbf{p},\sigma)$ – введенный в разделе 5.5 позитронный спинор, нормированный условием $v(\mathbf{p},\sigma')v(\mathbf{p},\sigma) = \delta_{\sigma'\sigma}$. Таким образом, суммы по M во втором и третьем слагаемых в (14.3.35) даются следующими приближенными формулами:

$$\frac{1}{2} \left[\sum_M \tilde{\Gamma}_{MN}^{i*}(\mathbf{k}) \Gamma_{MN}^j(\mathbf{k}) + (i \leftrightarrow j) \right] \simeq \delta_{ij} \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} + m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right),$$

$$\sum_M |\Gamma_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 \simeq \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} - m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right).$$

В главном порядке по μ/m_e для этих слагаемых имеем соответственно

$$\frac{e^2}{4m_e(2\pi)^3} \int d^3k \left[\frac{2}{k} - \frac{(3 - k^2 / (k^2 + \mu^2))}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \right] \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} + m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right) \simeq \frac{\alpha\mu^2}{4\pi m_e},$$

$$-\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + \mu^2} \right) \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2} - m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_e^2}} \right) \simeq -\frac{\alpha\mu^2}{\pi m_e}.$$

(продолжение сноски на с. 795)

$(Z\alpha)^2\alpha\mu^2/m_e \ll \alpha(Z\alpha)^4m_e$, и поэтому им можно пренебречь. Единственный остающийся в порядке $\alpha(Z\alpha)^4m_e$ вклад от перенормировки массы – это произведение старшего слагаемого в $\delta m_e(\mu)$ со слагаемым порядка $(Z\alpha)^2$ в $\int d^3x \bar{u}_N u_N$:

$$-\left[\frac{e^2\mu}{8\pi}\right]\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v}^2)_{NN}\right] = \frac{e^2\mu}{16\pi}(\mathbf{v}^2)_{NN}.$$

(Это отмеченное в разделе 1.3 влияние перенормировки массы на кинетическую энергию электрона.)

Оказывается, что последнее выражение в точности равно взятому с обратным знаком первому слагаемому в (14.3.35), если в нем пренебречь разницей между уровнями энергии. Чтобы убедиться в этом, заметим, что интеграл в этом слагаемом эффективно обрезается на значениях $|\mathbf{k}| \sim \mu \ll Z\alpha m_e$, поэтому можно вычислить матричный элемент $\Gamma_{MN}(\mathbf{k})$ в пределе $\mathbf{k} \rightarrow 0$. В низшем порядке по $Z\alpha$ из соотношения (14.2.32) находим:

$$\Gamma_{MN}(0) = (\mathbf{v})_{MN}, \quad (14.3.41)$$

и, используя полноту решений f_N нерелятивистского уравнения Шредингера, имеем:

$$\sum_M \Gamma_{MN}^{i*}(\mathbf{k}) \Gamma_{MN}^j(\mathbf{k}) \simeq (v^i v^j)_{NN}, \quad (14.3.42)$$

так что в этом порядке

* (Соотношение (14.3.32) исключает возможность того, что релятивистская поправка к последнему выражению могла бы не быть подавленной множителем \mathbf{k}^2/m_e^2 , возникающим в самом выражении при $|\mathbf{k}|^2 \ll m_e^2$.) Указанные два слагаемых сокращаются со слагаемым $+3\mu^2/4\pi m_e$ в члене $-\delta m_e(\mu) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x})$. Наконец заметим, что релятивистские поправки к указанным выше приближенным оценкам сумм по состояниям позитронов включали бы дополнительные множители порядка $v^2/c^2 \approx (Z\alpha)^2$, что давало бы вклады порядка $\alpha(Z\alpha)^2\mu^2/m_e^2 \ll \alpha(Z\alpha)^4m_e$. Этим оправдывается использованное здесь нерелятивистское приближение.

$$\begin{aligned}
& -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \left[\frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / \mathbf{k}^2)}{\mathbf{k}^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / (\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right] \\
& \simeq -\frac{e^2}{2(2\pi)^3} (\mathbf{v}^2)_{NN} \int d^3k \left[\frac{2}{3\mathbf{k}^2} - \frac{(1 - \mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right] \\
& = -\frac{e^2 \mu}{16\pi} (\mathbf{v}^2)_{NN}.
\end{aligned}$$

Следовательно после перенормировки массы у нас остается только первое слагаемое в (14.3.35) минус такое же слагаемое с отброшенной разностью энергий $E_N - E_M$:

$$\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{низкие энергии}} &= \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M (E_M - E_N) \\
& \quad \times \left[\frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / \mathbf{k}^2)}{\mathbf{k}^2 (E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(|\Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k} \cdot \Gamma_{MN}(\mathbf{k})|^2 / (\mathbf{k}^2 + \mu^2))}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2) (E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right]. \tag{14.3.43}
\end{aligned}$$

Снова используя (14.3.41), находим:

$$\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{низкие энергии}} &= \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \\
& \quad \times \int d^3k \left[\frac{2}{3\mathbf{k}^2 (E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1 - \mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2 + \mu^2)}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2) (E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right]. \tag{14.3.44}
\end{aligned}$$

Даже несмотря на то, что типичные значения импульса электрона много больше типичных атомных разностей энергии, это неверно для типичных значений $|\mathbf{k}|$ в данном интеграле, поскольку он был бы инфракрасно расходящимся, если не удерживать разность $E_N - E_M$ в знаменателях. В пределе $\mu \gg |E_M - E_N| \sim (Z\alpha)^2 m_e$ интеграл можно вычислить, разбив область интегрирования по $|\mathbf{k}|$ на два сегмента: от нуля до λ и от λ до бесконечности, где в остальном произвольное значение λ выбрано так, чтобы $|E_M - E_N| \ll \lambda \ll \mu$. Таким образом,

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \left[\frac{2}{3k^2(E_M - E_N + k - i\epsilon)} - \frac{1 - k^2/3(k^2 + \mu^2)}{(k^2 + \mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{k^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right] \\ \simeq \frac{2}{3} \left[\ln \left(\frac{\mu}{2|E_M - E_N|} \right) + \frac{5}{6} + i\pi\theta(E_N - E_M) \right].$$

Мнимая часть этого выражения отражает возможность перехода атома из состояния N в состояние M с меньшей энергией. Это слагаемое дает вклад в вероятность распада, равную мнимой части сдвига энергии. Нас же интересует действительная часть сдвига энергии, так что в дальнейшем мы опустим мнимую часть. Тогда из формулы (14.3.44) следует

$$[\delta E_N]_{\text{низкие энергии}} = \frac{e^2}{6\pi^2} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[\ln \left(\frac{\mu}{2|E_N - E_M|} \right) + \frac{5}{6} \right]. \quad (14.3.45)$$

В. Полный сдвиг энергии

Необходимо установить связь между суммой в формуле (14.3.45) и одним из матричных элементов в слагаемом (14.3.22), отвечающем высоким энергиям. Для этого посмотрим, прежде всего, какое

значение имела бы сумма в (14.3.45), если бы мы могли отбросить логарифм. Заметим, что $(E_M - E_N)\mathbf{v}_{NM} = [\mathbf{v}, H]_{NM}$, так что

$$\begin{aligned} \sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_M ([v^i, H]_{NM} v_{MN}^i + v_{NM}^i [H, v^i]_{MN}) \\ &= -\frac{1}{2m_e^2} ([p^i, [p^i, H]])_{NN}. \end{aligned}$$

Единственное слагаемое в нерелятивистском гамильтониане H , которое не коммутирует с оператором импульса, это потенциал $-e\varphi^0(\mathbf{x})$, так что

$$\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 = -\frac{e}{2m_e^2} (\nabla^2 \varphi^0(\mathbf{x}))_{NN}. \quad (14.3.46)$$

Из выражений (14.3.45) и (14.3.22) следует, что пропорциональное $\ln \mu$ слагаемое в выражении, отвечающем вкладу высоких энергий, сокращается с таким же слагаемым в выражении для вклада низких энергий:

$$\begin{aligned} \delta E_N &= [\delta E_N]_{\text{высокие энергии}} + [\delta E_N]_{\text{низкие энергии}} = \\ &= \frac{e^2}{6\pi^2} \sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[\ln \left(\frac{m_e}{2|E_N - E_M|} \right) + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{16\pi^2 m_e^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla(e\varphi^0(\mathbf{x})) \times \mathbf{p})_{NN}. \end{aligned} \quad (14.3.47)$$

До этого момента речь шла о произвольном электростатическом поле $\varphi^0(\mathbf{x})$. Рассмотрим теперь частный случай чисто кулоновского поля:

$$\varphi^0(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{|\mathbf{x}|}. \quad (14.3.48)$$

В этом случае формула (14.3.46) принимает вид:

$$\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 = \frac{Ze^2}{2m_e^2} (\delta^3(\mathbf{x}))_{NN} = \frac{Ze^2}{2m_e^2} (f_N^\dagger(0)f_N(0)). \quad (14.3.49)$$

Это выражение не равно нулю только при $l = 0$. Кроме того, матричный элемент в последнем слагаемом в (14.3.47) равен:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla(e^{-l^0(\mathbf{x})}) \times \mathbf{p})_{NN} = -Ze \left(\frac{1}{r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \right)_{NN}, \quad (14.3.50)$$

что не равно нулю только при $l \neq 0$. Поэтому в этом месте полезно разделить рассмотрение на два случая: $l = 0$ и $l \neq 0$.

а) $\mathbf{l} = \mathbf{0}$

Удобно определить среднюю энергию возбуждения ΔE_N :

$$\begin{aligned} \sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \ln |E_M - E_N| &\equiv \ln \Delta E_N \sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \\ &= \frac{Ze^2}{2m_e^2} \ln \Delta E_N (f_N^\dagger(0) f_N(0)). \end{aligned} \quad (14.3.51)$$

Для s -состояний атома водорода индекс N включает главное квантовое число n и z -компоненту спина m , а значение $[f_{nm}(0)]_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n)^{3/2} \delta_{\sigma,m} / \sqrt{4\pi}$, так что

$$(f_N^\dagger(0) f_N(0)) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z\alpha m_e}{n} \right)^3. \quad (14.3.52)$$

Подставляя равенство (14.3.51) и (14.3.52) в (14.3.47), получаем сдвиг энергии этих состояний:

$$[\delta E]_{n,l=0} = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3} \left[\ln \left(\frac{m_e}{2\Delta E_{n,l=0}} \right) + \frac{19}{30} \right]. \quad (14.3.53)$$

б) $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$

В случае неравного нулю орбитального момента сумма (14.3.49) обращается в нуль, так что определение (14.3.51) не годится. Вместо этого принято определять среднюю энергию возбуждения ΔE_N формулой

$$\sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \ln |E_M - E_N| \equiv \frac{2(Z\alpha)^4 m_e}{n^3} \ln \left(\frac{2\Delta E_N}{Z^2 \alpha^2 m_e} \right). \quad (14.3.54)$$

(Поскольку выражение (14.3.49) обращается в нуль, не имеет значения, в каких единицах измеряется $E_N - E_M$ в (14.3.54).) Кроме того, в состоянии с полным угловым моментом j и орбитальным моментом l скалярное произведение $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}$ равно знакомому выражению $j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}$, так что для главного квантового числа n среднее значение оператора $1/r^3$ равно

$$\int d^3r |f_N|^2 / r^3 = \frac{2Z^3 \alpha^3 m_e^3}{n^3 l(l+1)(2l+1)}. \quad (14.3.55)$$

Подставляя все результаты в (14.3.47), находим, что при $l \neq 0$

$$\begin{aligned} [\delta E]_{jnl} = & -\frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3} \ln \left(\frac{2\Delta E_{jnl}}{Z^2 \alpha^2 m_e} \right) \\ & + \frac{\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{2\pi n^3} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}}{l(l+1)(2l+1)} \right]. \end{aligned} \quad (14.3.56)$$

Осталось лишь воспользоваться полученными формулами, чтобы найти значения сдвигов энергии. Средние энергии возбуждения следует находить численно. Используя нерелятивистские волновые функции электрона в атоме водорода, можно получить⁵:

$$\Delta E_{1s} = 19,769266917(6) \text{ Ry},$$

$$\Delta E_{2s} = 16,63934203(1) \text{ Ry},$$

$$\Delta E_{2p} = 0,970429318(3) \text{ Ry},$$

где $1 \text{ Ry} \equiv m_e \alpha^2 / 2 = 13,6057 \text{ эВ}$. Тогда из (14.3.53) находим:

$$\begin{aligned}
[\delta E]_{1s} &= \frac{4\alpha^5 m_e}{3\pi} \left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{1s}}\right) + \frac{19}{30} \right] = 3,3612 \times 10^{-5} \text{ эВ} \\
&= 2\pi\hbar \times 8127,4 \text{ МГц},
\end{aligned}
\tag{14.3.57}$$

$$\begin{aligned}
[\delta E]_{2s} &= \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi} \left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{2s}}\right) + \frac{19}{30} \right] = 4,2982 \times 10^{-6} \text{ эВ} \\
&= 2\pi\hbar \times 1039,31 \text{ МГц},
\end{aligned}
\tag{14.3.58}$$

$$\begin{aligned}
[\delta E]_{2p_{1/2}} &= \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi} \left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{2p}}\right) - \frac{1}{8} \right] = -5,3267 \times 10^{-8} \text{ эВ} \\
&= 2\pi\hbar \times (-12,88) \text{ МГц}.
\end{aligned}
\tag{14.3.59}$$

Классический лэмбовский сдвиг – это разность энергий $2s$ и $2p_{1/2}$ состояний атома водорода, которые были бы вырожденными в отсутствии радиационных поправок. Наши вычисления приводят к результату

$$[\delta E]_{2s} - [\delta E]_{2p_{1/2}} = 4,35152 \times 10^{-5} \text{ эВ} = 2\pi\hbar \times 1052,19 \text{ МГц}.$$

Это численно близко (хотя аналитически не тождественно) старому результату Кролла и Лэмба⁶ и Френча и Вайскопфа⁷, который был получен с помощью старой теории возмущений. Ранее в этой главе мы грубо оценили сдвиг в 1300 МГц, рассмотрев только вклад высоких энергий в сдвиг энергии $2s$ состояния, причем инфракрасное обрезание было наугад выбрано порядка $\alpha^2 m_e = 2 \text{ Ry}$. Теперь мы видим, что оценка была завышенной, и произошло это главным образом потому, что правильное значение эффективного инфракрасного обрезания $\Delta E_{2s} = 16,64 \text{ Ry}$ значительно больше того, которое предполагалось. С другой стороны, как было рассказано в разделе 1.3, в 1947 году Ганс Бете⁸ сумел дать достаточно хорошую оценку лэмбовского сдвига – 1040 МГц, рассмотрев только вклад *низких энергий* в сдвиг энергии $2s$ состояния, и выбрав *ультрафиолетовое* обрезание равным m_e . (Бете сделал и первую оценку энергии возбуждения $\Delta E_{2s} \simeq 17,8 \text{ Ry}$.)

Описанное здесь вычисление лэмбовского сдвига было откорректировано за счет включения радиационных поправок более

высокого порядка, учета размеров ядра и эффектов отдачи. В настоящее время самая большая неопределенность проистекает от неуверенности в знании правильного значения среднеквадратичного зарядового радиуса r_p протона. Для значений $r_p = 0,862 \times 10^{-13}$ см или $r_p = 0,805 \times 10^{-13}$ см одни вычисления⁹ дают либо 1057,87 МГц, либо 1057,85 МГц, в то время как другие¹⁰ дают 1057,883 МГц или 1057,865 МГц. С учетом неопределенности в радиусе протона, согласие с современным экспериментальным значением¹¹ 1057,845(9) МГц является превосходным. Точность экспериментальных данных ограничена главным образом естественной шириной линии $2p$ -уровня атома водорода, составляющей ~ 100 МГц, так что дальнейшее увеличение точности является трудной задачей.

В последние несколько лет произошло важно продвижение вперед в измерениях сдвига энергии самого $1s$ состояния путем прямого сравнения частоты $1s-2s$ резонанса с учетверенными частотами $2s-4s$ и $2s-4d$ двухфотонных резонансов. Эти s и d состояния много уже $2p$ состояния, так что подобные разности частот можно измерить более точно, чем классический лэмбовский сдвиг. Некоторое время казалось, что здесь возникло противоречие между теорией и экспериментом. Расчеты^{12,13} показывали, что при радиусе протона $r_p = 0,862(11) \times 10^{-13}$ см или $0,805(11) \times 10^{-13}$ см учет размеров протона и другие поправки увеличивают теоретическое значение сдвига энергии $1s$ состояния от приведенной выше величины 8127,4 МГц до 8173,12(6) МГц или 8172,94(9) МГц, соответственно. Так как считалось, что значение протонного радиуса $r_p = 0,862(11) \times 10^{-13}$ см предпочтительнее, этот результат несколько расходился с измеренным¹³ значением 8172,86(5) МГц. Однако последующие вычисления¹⁴, в которых использовалось именно это значение радиуса и были учтены поправки порядка $\alpha^2(Z\alpha)^5$, привели к значениям сдвигов энергии $1s$, $2s$ и $4s$ состояний, которые согласуются с экспериментом. Повидимому, квантовая электродинамика вновь одержала победу.

Задачи

1. Рассмотрите заряженную скалярную частицу массой $m \neq 0$, описываемую полем $\phi(x)$, которое взаимодействует только с внешним независимым от времени электромагнитным полем $A^\mu(x)$.

Пусть Φ_N — полный набор нормированных однобозонных и одноантибозонных состояний с энергиями E_N . Определим $u_N(\mathbf{x})e^{-iE_N t} \equiv (\Phi_0, \varphi(\mathbf{x}, t)\Phi_N)$ и $v_N(\mathbf{x})e^{iE_N t} \equiv (\Phi_N, \varphi(\mathbf{x}, t)\Phi_0)$, где Φ_0 — вакуумное состояние. Покажите, что u_N и v_N образуют вместе полный набор состояний, и получите формулы для коэффициентов при u_N и v_N в разложении произвольной функции $f(\mathbf{x})$.

2. Пусть мы включили в теорию, описанную в задаче 1, радиационные поправки. Пусть $i\Pi^*(x, y)$ — сумма всех диаграмм с одной входящей и одной выходящей линией скалярной частицы (исключая конечные скалярные пропагаторы) в порядке α . Получите формулу для сдвига энергий E_N однобозонных состояний за счет этих радиационных поправок, выразив результат через $u_N(\mathbf{x})$ и $\Pi^*(x, y)$.
3. Используя результаты раздела 14.3, рассчитайте вероятность радиационного распада $2p$ состояния атома водорода.
4. Пусть взаимодействие электрона с легким скалярным полем Φ имеет вид $g\Phi\bar{\psi}_e\psi_e$. Предположим, что масса скалярной частицы m_Φ имеет значение в интервале $(Z\alpha)^2 m_e \ll m_\Phi \ll Z\alpha m_e$. Рассчитайте изменение энергии $1s$ состояния водородоподобного атома за счет такого взаимодействия.
5. Проведите вычисления задачи 4 для случая $m_\Phi = 0$.

Список литературы

1. Dirac, P.A.M., Proc. Roy. Soc. (London), A117, 610 (1928).
2. См., например: Edmonds, A.R. *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1957) (есть рус. пер.: Эдмондс А. Угловые моменты в квантовой механике. М., ИЛ, 1968); Rose, M.E. *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957).

3. См., например: Schiff, L.I. *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1949), Section 43 (есть рус. пер.: Шифф Л. *Квантовая механика*. М., ИЛ, 1959). Оригинальные работы: Darwin, C.G., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A118**, 654 (1928); *ibid.*, **A120**, 621 (1928); Gordon, W., *Z. f. Phys.*, **48**, 11 (1928).
4. Brown, G.E., Langer, J.S., and Schaefer, G.W., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A251**, 92 (1959); Brown, G.E. and Mayers, D.F., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A251**, 105 (1959); Desiderio, A.N. and Johnson, W.R., *Phys. Rev.*, **A3**, 1267 (1971).
5. Huff, R.W., *Phys. Rev.*, **186**, 1367 (1969).
6. Kroll, N.M. and Lamb, W.E., *Phys. Rev.*, **75**, 388 (1949).
7. French, J.B. and Weisskopf, V.F., *Phys. Rev.*, **75**, 1240 (1949).
8. Bethe, H.A., *Phys. Rev.*, **72**, 339 (1947).
9. Sapirstein, J.R. and Yennie, D.R., in: *Quantum Electrodynamics*, ed. by T. Kinoshita (World Scientific, Singapore, 1990), p. 575.
10. Grotch, H., *Foundations of Physics*, **24**, 249 (1994).
11. Lundeen, S.R. and Pipkin, F.M., *Phys. Rev. Lett.*, **46**, 232 (1981); *Metrologia*, **22**, 9 (1986). Обзор проблемы см.: Pipkin, F.M., in: *Quantum Electrodynamics*, ed. by T. Kinoshita (World Scientific, Singapore, 1990), p. 697.
12. Weitz, M., Huber, A., Schmidt-Kaler, F., Leibfried, D., and Hansch, T.W., *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 328 (1994).
13. Weitz, M., Huber, A., Schmidt-Kaler, F., and Hansch, T.W., *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 1120 (1992) и ссылка [12].
14. Pachucki, K., *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 3154 (1994).

Именной указатель

- Aaron, R. 636
Aharony, A. 223
Aitken, A.C. 141
Amado, R.D. 636
Anderson, C.D. 56, 58
Aramaki, S. 51
Argyres, P.C. 343
Artin E. 573
- B**
Bagger, J. 452, 721
Bailey, J. 674
Bakamijan, B. 253
Bargmann, V. 141
Belinfante, F. 451
Bethe, H. 58
Bethe, H.A. 61, 761, 804
Beyer, R.T. 51
Bhabha, H.J. 58
Bjorken, J.D. 721
Bloch, F. 59, 760
Bogoliubov, N.N. 721
Bohr, N. 55, 57, 223, 342
Born, M. 53, 55, 60, 221
Breit, G. 61, 222, 224
Brown, G.E. 804
Brown, L.M. 51, 58
Butler, C.C. 59, 222
- Cao, T.Y. 51
Carlson, J.F. 58
Cartan, E. 342
Casimir, H.B.G. 451
Cassen, B. 222
Chadwick, J. 58
- Chew, G.F. 60, 637
Chinowsky, W. 222
Christenson, J.H. 141, 223
Collins, J. 720
Collins, P.D.B. 637
Compton, A.H. 54
Condon, E.U. 222
Conversi, M. 58
Crichton, J.H. 253
Cronin, J.W. 141, 223
Curie-Joliot, I. 58
- D**
Dalitz, R.H. 223, 761
Dancoff, S.M. 59
Darwin, C.G. 55, 804
Davisson, C. J. 53
de Broglie, L. 53
De Witt, B. 572
de Witt, C.M. 572
Desiderio, A.N. 804
Dirac, P.A.M.
51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59,
60, 140, 342, 452, 572, 635, 803
Donoghue, J.F. 722
Drell, S.D. 721
Drinkwater, J.W. 61
Druhl, K. 573
Dyson, F.J.
62, 141, 223, 343, 385, 720
- E**
Eckart, C. 224
Edmonds A.R.
141, 222, 224, 342, 803

- Ehrenfest, P. 56, 58
 Einstein, A. 56
 Elend, H.H. 674
 Elsasser, W. 53
 Epstein, S. 60
 Erickson, G.W. 673, 674
 Euler, H. 59, 722
- F**
 Fabri, E. 223
 Faddeev, L.D. 253, 572
 Feenberg, E. 222, 223
 Feinberg, G. 222, 722
 Fermi, E. 51, 55, 57
 Ferretti, B. 222
 Feynman, R.P.
 60, 61, 62, 503, 571, 572, 673
 Fierz, M. 57, 59, 342
 Fitch, V.L. 141, 223
 Flanders, H. 141, 503
 Fock, V.A. 57, 503
 Foley, H.M. 61
 Frautschi, S.C. 637, 760
 Fredenhagen, K. 573
 French, J.B. 61, 804
 Friedman, J.I. 223
 Friedman, J.J. 141
 Frohlich, H. 62
 Froissart, M. 224
 Fukuda, H. 61
 Furry, W.H. 57, 635
- G**
 Gaberdiel, R. 573
 Gamov, G.A. 51, 55
 Garwin, R. 141, 222
 Gasser, J. 722
 Gell-Mann, M. 222, 223, 636, 761
 Georgi, H. 342
 Germer, L. H. 53
 Gerstein, I.S. 572
 Goldberger, M.L. 221, 636, 761
 Goldstone, G. 253
 Gordon, W. 53, 55, 804
- G**
 Goudsmit, S. 54
 Green, M.B. 502
 Grotch, H. 804
- H**
 Haag, R. 573
 Hafstad, L.R. 222
 Hahn, Y. 721
 Halter, J. 722
 Hansch, T.W. 804
 Heisenberg, W. 54
 Heisenberg, W.
 53, 55, 57, 58, 59, 60, 221,
 721, 722
 Heitler, W. 58, 62
 Hepp, K. 721
 Herzberg, G. 58
 Heydenberg, N. 222
 Hibbs, A.R. 571
 Hocking, J.C. 141
 Hoddeson, L. 51
 Houston, W.V. 61
 Howard, J.C. 636
 Hubbard, J. 636
 Huber, A. 804
 Huff, R.W. 804
 Hugenholtz, N.M. 253
- I**
 Infeld, L. 60
 Inoue, T. 59
 Inonu, E. 140
 Ito, D. 62
- J**
 Jackiw, R. 572
 Jackson, J.D. 636
 Jammer, M. 51
 Jauch, J.M. 342
 Johnson, W.R. 804
 Joliot, F. 58
 Joos, H. 343
 Jordan, P. 53, 54, 57
 Jost, R. 343
 Jouvett, B. 636

- Julian, R.S. 61
- K**abir, P. 722
Kahn, B. 62
Kamefuchi, S. 573, 721
Kanesawa, S. 62
Kemmer, N. 59
Kinoshita, T. 761
Klein, O. 53, 57, 58, 503
Koba, Z. 60, 62
Kockel, B. 59, 722
Kollath, R. 224
Kramers, H. 141
Kramers, H.A. 61, 223, 636
Kroll, M. 61
Kroll, N.M. 804
Kronig, R. 636
Kubo, R. 253
Kush, P. 61
Kallen, G. 636
- L**aidlaw, M.G.G. 572
Lamb, W.E. 61, 62, 804
Landé, A. 54
Langer, J.S. 804
Lattes, C.M.G. 59
Lederman, L. 141, 222
Lee, B.W. 572
Lee, T.D. 141, 222, 253, 342, 761
Lehmann, H. 635
Leibfried, D. 804
Leinaas, J.M. 572
Leutwyler, H. 722
Lewis, H.W. 60
Lippman, B. 221
Liu, H.H.T., 673, 674
Low, F.E. 761
Lundeen, S.R. 804
Luders, G. 343
- M**ackey, G.W. 140
Maskawa, T. 452
- Matthews, P.T. 721
Mayers, D.F. 804
Mehra, J. 51, 55
Miller, A.I. 52, 674
Miyamoto, Y. 61
Myrheim, J. 572
Moller, C. 58, 60, 202
- N**afe, J.E. 61
Nagel, D.E. 61
Nakajima, H. 452
Nappi, C.R. 343
Nash, C. 141
Nauenberg, M. 761
Neddermeyer, S.H. 58
Ne'eman, Y. 222
Nelson, E.B. 61
Newton, R.G. 221
Nishina, Y. 58, 503
Nordheim, L. 58
Nordsieck, A. 59
Nordsieck, F. 760
Novikov, V. 722
- O**cchialini, G.P.S. 59
Ohnuki, Y. 573
Oppenheimer, J.R. 56, 57, 58, 59
Osterwalder, K. 572
- P**achucki, K. 804
Pais, A. 52, 223
Pancini, E. 58
Parasiuk, O. 721
Pashen, F. 54
Pasternack, S. 61
Pauli, W. 53, 55, 56, 57, 58, 59,
60, 342, 343, 674
Peierls, R.E. 57, 223
Petermann, A. 674
Piccioni, O. 58, 223
Pipkin, F.M. 804
Placzek, G. 223

- Podolsky, B. 57
 Polchinski, J. 722
 Pomeranchuk, I.Ya. 636
 Popov, V.N. 572
 Present, R.S. 222

Rabi, I.I. 61
 Racah, G. 58
 Rarita, W. 342
 Rayski, J. 674
 Rechenberg, H. 58
 Regge, T. 637
 Retherford, R.C. 61
 Richardson, O. 61
 Rindani, S.D. 343
 Roberts, J.E. 573
 Rochester, G.D. 59, 222
 Rorlich, F. 342
 Rose, M.E. 141, 222, 224, 343, 803
 Rosenbluth, M.N. 636
 Rosenfeld, L. 57, 342, 451
 Ruger, S.M. 573

 Sakata, S. 59, 721
 Salam, A. 721
 Salpeter, E.E. 761
 Sapirstein, J.R. 804
 Schaefer, G.W. 804
 Schiff, L.I. 54, 56, 223, 761, 804
 Schmidt-Kaler, F. 804
 Schrader, R. 572
 Schroer, B. 343
 Schrodinger, E. 53
 Schubert, K.R. 223
 Schur, I. 342
 Schwarz, J.H. 502
 Schweber, S.S. 51, 52
 Schwinger, J.
 52, 56, 60, 61, 221, 342, 385,
 503, 572, 635, 673
 Seiler, R. 343
 Sen, S. 141

 Shifman, M.A. 722
 Sivakumar, M. 343
 Slater, J.C. 55
 Sommerfeld, A. 54
 Spaarnay, M.J. 451
 Steinberger, J. 222
 Serman, G. 761
 Stevenson, E.C. 58
 Stoner, E.C. 55
 Stratonovich, R.I. 636
 Streater, R.F. 343
 Street, J.C. 58
 Suura, H. 674, 760
 Swieca, A. 343
 Symanzik, K. 635

 't Hooft, G. 572, 673
 Takahashi, Y. 635
 Tamm, I. 503
 Tati, T. 62
 Telegdi, V.L. 223
 Telegdi, V.V. 141
 Thirring, W. 636
 Thomas, L.H. 54, 253
 Titchmarsh, E.C. 253
 Toll, J.S. 636
 Tomonaga, S.-I. 52, 60, 61, 62
 Tung., Wu-Ki 141
 Turlay, R. 141, 223
 Turnbull, H.W. 141
 Tuve, M.A. 222

 Uehling, E.A. 61, 673
 Uhlenbeck, G.E. 54
 Umezawa, H. 721

 Vainshtein, A.I. 722
 Van der Waerden, B.L. 342
 Vaughan, M.J. 636
 Velo, G. 343
 Veltman, M. 673
 Villars, F. 674

- Waller, I. 59
Ward, J.C. 635
Watson, K.M. 221, 223
Webb, N. 58
Weinberg, S.
 52, 54, 60, 140, 222, 224,
 253, 341, 342, 451, 503,
 572, 636, 720, 722, 761
Weinrich, M. 141, 222
Weisskopf, V.F.
 52, 56, 58, 59, 60, 61, 804
Weitz, M. 804
Wentzel, G. 52, 55, 60
Wess, J. 452, 721
West, T. 503
Weyl, H. 56, 503
Wheeler, J.A. 60, 221
Whittaker, E. A. 53
Wichmann, E.H. 253, 674
Wick, G.C. 140, 385, 673
Wightman, A.S. 140, 343
Wigner, E.P. 56, 57, 140, 141, 224
Wilczek, F. 573
Williams, E.J. 761
Williams, R.C. 61
Williams, W.E. 61
Wilson, K.G. 722
Witten, E. 343, 502
Wu, C.S. 141, 222
Yang, C.N. 221, 222, 253, 342
Yennie, D.R. 760, 804
Young, G.S. 141
Yukawa, H. 58, 635
Zacharias, J.R. 61
Zakharov, V.I. 722
Zimmerman, W. 635, 721
Zumino, B. 343
Zwanziger, D. 343

Предметный указатель

- α -распад 212
 β -распад 30, 38, 169, 173, 194, 304, 703
 Δ барион 219
 Δ_+ функция 268
 Δ_F функция 366
 J/ψ -мезон 299
 ρ -мезоны 219, 299, 302, 634
 ω -мезон 302
- Абелевы группы 71
Аксиальная калибровка 462
Аксиомы Остервальдера-Шрадера 517, 572
Алгебра Клиффорда 285
Амплитуда рассеяния 196, 204-205
Анионы 567
Аномальный эффект Зеемана 7-8, 31-32
Антиунитарные и антилинейные операторы 66, 76
Античастицы 17
Ароматы (лептонов) 717
- Барионное число 164
Бесконечности, см. ультрафиолетовые расходимости, инфракрасные расходимости
Борновское приближение 153
Борновское приближение искаженных волн 193
Бусты 79
- Вакуумное состояние 32, 35
Вероятности в квантовой механике 9, 36-37, 43, 65
Вероятности распадов, общая формула 181-182
Вершинная функция (Γ_μ) 601, 655-661, 687, 783
- Внешние поля 354, 379-380, 555-556, 752-759, 774-781
Внешние производные 494
Внутренние симметрии 161-162
Волновая функция 519-521
Волновые пакеты 144-146
Вращение Вигнера 88-91
Временная калибровка 462
Вспомогательные поля 401-402
Вырождение Крамерса 107
Вычитания в дисперсионных соотношениях 629
- Галилеева инвариантность 81
Гамильтониан
– комплексного скалярного поля 29
– для уравнения Дирака 10
– в электродинамике 467-468
– для свободных частиц 234
– взаимодействующего дираковского поля 431
– взаимодействующих скалярных полей 262, 402
– взаимодействующего векторного поля 427
– одномерного скалярного поля 20-22
- Гауссовы интегралы 567
Гейзенберговское представление 145, 381, 394, 574
Генераторы симметрии 408-418
Гильбертово пространство, определение 63
Гиперзаряд 164
Гипероны, открытие 163
Главное значение 150
Глобальные симметрии, определение 407-417
Глюоны 742

- Гомотопические группы и классы 118-119, 127-133
 – определение 132
 Гравитон 97, 706, 727, 737, 742
 Грассмановы переменные, определение 539
 Группа $SL(2, \mathbb{C})$ 115
 Группа $Spin(d)$ 120
 Группа $SU(2)$ 117
 Группа Z_2 116
 Группа кос 567
 Группы Ли 69
 Группы, определение 67-71; *см. также:* абелевы группы, гомотопические группы, группы Ли, малые группы, представления, полупростые группы

 Два-коциклы, определение 109
 Двойные звезды 493
 Действие 396, 407
 Диаграмма Чу–Фраучи 637
 Диаграммы Фейнмана 48-49, 344-384
 – в электродинамике 475-484
 Дираковское представление однородной группы Лоренца 283-292
 Дисперсионные соотношения 624-634
 Дифракционное рассеяние 197, 211
 Дифференциальные формы, *см. p*-формы
 Длина рассеяния 209
 Древесные диаграммы 374, 694-695
 Дуальность 308, 497

 Евклидов функциональный интеграл 516

 Законы сохранения
 – углового момента 157
 – заряда 163, 264, 577
 – тока 281, 408, 647, 791
 – энергии и импульса 156-157
 – ограничения 337, 727-728
 Замкнутые *p*-формы 495
 Заряд *см.* Электрический заряд
 Зарядовое сопряжение (*C*)
 – случайная симметрия 705, 719
 – определение 161, 174-175
 – для фотонов 578
 – внутренние фазы 175
 – несохранение 176
 – преобразование операторов рождения 236
 – преобразование дираковских полей 301-302
 – преобразование фермионных билинейных ковариантов 304
 – преобразование произвольных неприводимых полей 322-323
 – преобразование скалярных полей 274
 – преобразование векторных полей 283

 Изоспин (изотопический спин) 163
 Ин- и аут-состояния 143-149, 154
 Инвариантные подгруппы и подалгебры 71, 116
 Индекс расходимости 676-683, 691
 Индуцированное испускание фотонов 23
 Индуцированные представления 85
 Интегрирование по Березину 542
 Инфракрасные расходимости 43-44, 664, 671, 730-748

 Калибровка Лоренца (Ландау) 462, 563
 Калибровка Фейнмана 462, 563
 Калибровочные преобразования 334-335, 454-459, 461, 495
 Канонические коммутационные и антикоммутационные соотношения 21, 26-29
 Квантовая механика 63-64
 Квантовая хромодинамика 164, 720, 743
 Квантовая электродинамика 38, 40-50, 453-484, 557-563, 638-671, 681, 687-699, 716-720, 762-802; *см. также:* квантовые поля, электрон, фотон, калибровочная инвариантность, ультрафиолетовые расходимости, инфракрасные расходимости
 Квантовые поля
 – дираковское поле 30-32, 292-305
 – ранняя теория 19-40
 – свободные поля 254-266
 – произвольные квантовые поля 310
 – безмассовых частиц 328-337
 – переопределение 442
 – скалярные 27-29, 32-36, 266-274
 – единственность неприводимых полей 317

- векторные 275–283
- Кварки 302, 720
- Кинетическая теория 199
- Киральное преобразование 704
- К-мезоны 163, 176
 - открытие 38
- Когерентные состояния 252
- Когомология де Рама 495
- Компактные и некомпактные группы 307
- Комптоновское рассеяние 484–494
- Контракция Иноню–Вигнера 81
- Контрчлены в квантовой электродинамике 639–640
- Конференция в Шелтер Айленде 45047
- Космические лучи 38, 164
- Коэффициенты Клебша–Гордана 165, 202, 204, 205, 320
- Кросс-симметрия 358, 632, 750
- Круговая поляризация 481
- Кулоновская калибровка 334, 463–468, 489
- Кулоновская энергия 468, 472, 465–476, 757
- Кумулянты 238

- Лагранжианы 27, 393–406
 - комплексного скалярного поля 27
 - взаимодействующего скалярного поля 400
 - интегрирование по частям 405–406
 - нерегулярные 434
- Лептонное число 163, 719
- Лептоны 638
- Леса 694
- Линейная поляризация 481
- Локальные симметрии
 - определение 84
 - для разных импульсов 85–86
 - для безмассовых частиц 330
- Лучи, определение 63
- Лэмбовский сдвиг 45–47, 665, 781–801

- Магнитные моменты частиц спина 1/2 616–617, 655–666, 705, 751–752
- Майорановские фермионы 300, 323
- Малая группа 84–88
 - $m \neq 0$ 88
 - $m = 0$ 91–96
- Мандельштамовские переменные 698
- Маргинальные связи 682
- Матрица γ_5 289–291
- Матрица плотности 483
- Матрицы вращений 89
- Матрицы Дирака 11–12
 - перечеркнутое обозначение, определение 478
 - следы 498
- Матрицы Паули, определение 288
- Матричная механика 4–5
- Меллеровское рассеяние 38
- Метод ренормировки Вильсона 711–716
- М-матрица, определение 155
- Многовременной формализм 29
- Множители от фазового пространства 184–188
- Молекулярный спектр N^{14} 38
- Муон 50
 - открытие 39
 - магнитный момент 661–662, 705
- Муонные атомы 653–654
- Мягкие фотоны 724–730, 748–752

- Нарушенная симметрия 597, 609
- Нейтрон 38
 - нейтрон-протонное рассеяние 210
 - рассеяние нейтронов на сложном ядре 209, 213
- Некомпактные группы, см. Компактные и некомпактные группы
- Нелинейная σ -модель 450, 505, 527–528
- Неприводимые представления, определение 83
- Несохранение РТ 173
- Несущественные связи 442
- Нормальное упорядочение 234, 266, 348
- Н-теорема Больцмана 201

- Обращение времени (Т)
 - следствия для S -матрицы 170–173
 - определение 76
 - несохранение 178
 - преобразование операторов рождения 236
 - преобразование вырожденных мультиплетов 134–139

- преобразование дираковских полей 302-303
- преобразование произвольных неприводимых полей 323-324
- преобразование $J_{\mu\nu}$ и P_μ 99-100
- преобразование одночастичных состояний 102
- преобразование скалярных полей 274
- преобразование векторных полей 283
- Общая теория относительности 340, 415, 421, 494, 701-703, 706
- Ограничение Фруассара 211
- Односвязные пространства, определение 111
- Одночастично неприводимые диаграммы, определение 592
- Опасные состояния 744-747
- Оператор импульса 80, 412-413
- Операторы уничтожения и рождения 21, 26-27, 30-31, 34-37, 230-236
- Оптическая теорема 197
- Парастатистика 566
- Паулиевское слагаемое 18
- Перекрывающиеся расходимости 692-695
- Перенормировка
 - массы 588
 - поля 588
- Перенормируемость 44-50, 683-699
- Петли 249, 358, 374, 479, 557
- Пион-нуклонная константа связи 586
- Пионы 18, 50, 587-588, 706
 - распад π^\pm 169
 - распад π^0 175
 - внутренняя фаза зарядового сопряжения для π^0 175
 - внутренняя четность 169
 - предсказание и открытие 39
 - рассеяние на нуклонах 625, 633-634
- Плавающее обрезание 711-716
- Плоскость Далица 188
- Поворот Вика 642
- Поглощение фотонов 23
- Позитрон 17-18, 750, 766
- Позитроний 301-302
- Поле Рариты-Швингера 309, 571
- Полевые уравнения 265, 281, 318
- Положительность энергии 100, 400
- Полупростые группы и алгебры Ли определение 93
- Полюсы амплитуды рассеяния 579-588, 749
- Поля, см. квантовые поля
- Поляризация вакуума 42, 44, 640-655, 785
- Поляризация
 - массивной частицы спина 278, 282
 - безмассовых частиц 458-459
 - фотона 97-98
- Пороговое поведение 209-210
- Постоянная тонкой структуры 36
- Постоянная Эйлера 648, 672
- Правила суперотбора 69, 119-120
- Представление взаимодействия 189, 380
 - для связей с производными 424
 - для дираковского поля 430
 - для электродинамики 468-472
 - для взаимодействующего скалярного поля 402-404
 - для векторного поля 425
- Представление Челлена-Лемана 618-624
- Представления групп, определение 68
 - однородной группы Лоренца 305-310
- Преобразование Хаббарда-Стратоновича 623
- Преобразования Лежандра 393, 398
- Преобразования Лоренца
 - действие на операторы рождения 236
 - действие на произвольные состояния 74
 - действие на одночастичные состояния 82-98
 - определение 72-75
 - однородная группа Лоренца, определение 75
 - общие представления 305-310
 - в каноническом формализме 418-424
 - матричных элементов вне массовой оболочки 576-577
 - в теории возмущений 191, 367-368
 - сечений и вероятностей 184
 - S-матрицы 154-160
 - алгебра Пуанкаре 76
 - группа Пуанкаре 74

- собственная ортохронная группа Лоренца 75
- Принцип действия Швингера 381
- Принцип запрета 15
- Принцип кластерного разложения 225б
236-243
- Принцип эквивалентности 727
- Причинность 192б 263б 625
- Проблема τ - θ 168
- Проективные представления 68, 108
- Пропагаторы 348, 363-371
- Пространственная инверсия *см.* четность и пространственная инверсия (P)
- Протон
 - заряд 603
 - зарядовый радиус 50, 802
 - формфакторы 617
 - как дырка 15
 - в ядре 38
- Пунктирные и непунктирные индексы 307
- Радиационные поправки, *см.*: перенормировка, квантовая электродинамика, ультрафиолетовые расходимости, инфракрасные расходимости, собственноэнергетические функции, вершинная функция, поляризация вакуума, мягкие фотоны
- Разложение по парциальным волнам 201
- Размерная регуляризация 606, 644-648, 671
- Размерность полей и констант связи 679, 703, 711
- Распад Co^{60} 169, 173
- Рассеяние Баба 38
- Регулятор Паули-Вилларса 657, 668
- Редукционная формула 590
- Резонансы 211-219
- Релятивистские волновые уравнения 1-19
- Ренормализационная группа 662, 699, 712
- Рецепт БПХЦ 693-694
- Ридберг (единица энергии), определение 800
- Рождение пар 38
- r -формы 494-499
- Ряд Дайсона 191
- S -матрица 5, 42
- S , CP , CPT 174-178
- определение 150
- внутренние симметрии 161
- лоренц-инвариантность 154-160
- четность 165-169
- PT 173-174
- S -оператор 151
- обращение времени 170-173
- унитарность 150-151
- см. также:* T -матрица, M -матрица
- Связанные состояния *см.* составные частицы
- Связи 433-441
 - в электродинамике 459
- Связи второго рода, *см.* связи
- Связи первого рода, *см.* связи
- Связные амплитуды 237-243
- Связь спина со статистикой 317
- Сепарабельные взаимодействия 220
- Сечения
 - определение 182-185
 - предел высоких энергий
 - разложение по парциальным волнам 204-207
- Сильные взаимодействия 39
- $3j$ -символы Вигнера 314
- Симметрии 65-72, 120-127, 406-418, 575
- см. также:* законы сохранения, группы, лоренц-инвариантность, четность, зарядовое сопряжение, обращение времени, внутренние симметрии, изоспин, $SU(3)$
- Симметрия $SU(3)$ 164
- Система центра масс 184
- Скобки Дирака в электродинамике 438-450
- Скобки Пуассона, определение 435
- Следы 498-501
- Случайные симметрии 716-719
- Собственноэнергетические функции (P^* , Σ^*) 593, 640-649, 666-671, 688-689, 692-697
- Соотношение Крамерса-Кронига 634
- Составные частицы 146, 623-624
- Состояния стоячих волн 221
- «Состояния» с отрицательной энергией 14-19, 30-36, 766
- Спектральные функции, *см.* Представление Челлена-Лемана

- Спиновые матрицы, определение 307
- Спиральность
- определение 94
 - ограничения для безмассовых полей частиц 337–339
 - ограничения на целые и полуцелые значения 119
- Спонтанное испускание фотонов 23–24, 797
- СР-инвариантность
- для вырожденных мультиплетов 138
 - несохранение в распаде K^0 176
- СРТ-инвариантность 326
- Старая теория возмущений, см. Теория возмущений
- Статистика Бозе–Эйнштейна 15, 226–230, 563–567
- Статистика Ферми–Дирака 15, 226–230, 355–360, 563–567,
- Странность и странные частицы 163
- Струи 742, 744
- Структурные константы, определение 70
- Суммирование по спинам 279, 298, 315–316, 335, 483–484, 488, 738
- Суперперенормируемые взаимодействия 681, 686
- Суперсимметрия 433, 686, 712
- Существенные связи 682
- Сферические гармоники 203, 769
- Тензор Белинфанте 420
- Тензор энергии-импульса 412–414
- Теорема Ватсона 173
- Теорема Вигнера–Экарта 204
- Теорема Вика 385
- Теорема Ли–Науенберга 741–748
- Теорема ЛСЦ, см. редуцированная формула
- Теорема Нетер 408
- Теорема о подсчете степеней 682
- Теорема о полярном разложении 116, 718
- Теорема Польчинского 712
- Теорема Померанчука 633
- Теорема Пуанкаре 495
- Теорема Римана–Лебега 241
- Теорема Фарри 578, 690
- Теория возмущений
- старая 189–192
 - зависящая от времени 189
- Теория дырок 16, 38, 40
- Теория струн 1, 19, 326, 497, 710
- T-матрица 148, 154, 188, 202, 744
- Тождества Уорда и Уорда–Такахаша 603
- Тождество Якоби 110
- Томсоновское рассеяние 494
- Тонкая структура 6–8, 771
- Топология группы Лоренца и группы вращений 114; см. также: гомотопические группы, односвязные пространства, кохомология де Рама
- Тормозное излучение 38
- Точные p-формы 495
- Траектории Редже 633–634
- Трансляционно-инвариантная теория скалярного поля
- Ультрафиолетовые расходимости 40–50, 644–645, 652–653, 663, 668–671, 676–683
- Универсальная накрывающая группа 119
- Унитарная калибровка 462
- Унитарность S-матрицы 150–154, 172, 195–201, 206, 214, 705
- Уравнение Бете–Солпитера 759
- Уравнение Дирака 1, 8–19
- Уравнение Клейна–Гордона–Шредингера 1, 17, 27, 265
- Уравнение Липпмана–Швингера 148
- Уравнения Максвелла 1, 335, 453, 458, 495
- Уравнения Фаддеева 251
- Уравнения Эйлера–Лагранжа 398
- Фазовые сдвиги 172–173, 206
- Фейнмановские параметры 641, 657, 671
- Формула Брейта–Вигнера 216
- Формула Розенблота 657
- Формфакторы 610–617, 655–666, 784–786
- Фотон
- фаза при зарядовом сопряжении 305
 - спиральность и поляризация 97–98, 334, 480–492
 - безмассовость 463, 609, 644

- фотон-фотонное рассеяние 42, 689, 708-710
- пропагатор 472-475
- Функционалы, обозначения 396
- Функциональные интегралы
 - вывод 507-517
 - для скаляров со связью с производной 526
 - для фермионов 536-556
 - для безмассовых векторных полей 529
 - для нелинейной σ -модели 527
 - для квантовой электродинамики 557-563
 - для S -матрицы 517-523
 - лагранжева версия 523-530
 - использование для вывода фейнмановских правил 531
- Хронологически упорядоченные произведения, определение 190
- Цвет 742
- Центральные заряды 110
- Частица Z^0 212
- Частицы W^\pm 212
- Четность и пространственная инверсия (P) 41-43, 775-781
 - случайная симметрия 705, 719
 - определение 76
 - внутренние четности 165-169
 - несохранение в слабых взаимодействиях 169
 - связанных состояний электронов 768, 792
 - преобразование операторов рождения 236
 - преобразование дираковских полей 294, 299-300
- преобразование произвольных неприводимых полей 319-321
- преобразование $J_{\mu\nu}$ и P_μ 99-100
- преобразование одночастичных состояний 101-105, 137
- преобразование скалярных полей 272
- преобразование векторных полей 283
- Швингеровские члены 606
- Шредингеровское представление 145
- Электрические дипольные моменты 108, 705
- Электрический заряд 456
 - сохранение 163, 727
 - перенормировка 457, 597-604, 639, 649-653
- Электрический зарядовый радиус 666
- Электрон
 - зарядовый радиус 666
 - классическая теория 40, 494, 671
 - магнитный момент 7, 13, 18, 47, 617, 703
 - спин 8-10
- Эллиптическая поляризация 482
- Энергетические сдвиги атомных уровней
 - сдвиг $1s$ -уровня 802
- Энергия вакуума 326 35
- Энергия возбуждения в атоме водорода 799-801
- Энтропия 200
- Эффект Казимира 392
- Эффект Рамзауэра-Таунсенда 220
- Эффект Юлинга 45, 654, 785
- Эффективные теории поля 676, 709
- Ядерные силы 585-588