

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

I





53  
К-93

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ЧАСТЬ I

МЕХАНИКА.  
ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ,  
ФИЗИКИ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ,  
ЖИДКОСТЕЙ И ТВЕРДОГО ТЕЛА.

БИБЛИОТЕКА  
Бух. ТИП у ЛП  
№ 28/97

«Дніпро»  
Київ  
1994

х  
р-  
е-  
—  
р-  
й  
р,  
го  
ся  
н-  
бе  
ра  
ся  
эм  
у.  
из-  
га-  
  
т-  
ле-  
ня  
ме-  
де-  
це,  
сех  
ня,  
пне  
тер

ББК 22.3  
К93

В основу положен «Курс общей физики» Г. А. Зисман, О. М. Тодес, М. «Наука», 1965 г.

«Курс общей физики» предназначен для всех изучающих и интересующихся физикой. Будет полезен учащимся колледжей, лицеев и высших учебных заведений.

Первая часть «Курса...» содержит изложение основ механики, молекулярной физики, основ термодинамики, физики реальных газов, жидкостей и твердого тела. Последняя глава посвящена учению о колебаниях, волнах и звуке.

Вторая часть содержит изложение основ учения об электричестве. В ней излагаются законы постоянного тока, электростатика, электромагнетизм, электромагнитные волны, основные сведения об электрических свойствах различного рода веществ, начальные сведения об электронике.

Третья часть посвящена оптике, физике атома и атомного ядра.

К  $\frac{1604010000-001}{205-94}$  без объявления

ISBN 5-308-01617

© Макет фирмы  
«Эдельвейс»

# ЧАСТЬ I

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

---

### ГЛАВА I

#### КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

##### § 1. Материальная точка. Системы отсчета

Отдел механики, изучающий движение материальных тел в пространстве и времени без рассмотрения вызывающих это движение взаимодействий, носит название кинематики.

Движущееся тело обладает определенными размерами — протяженностью в пространстве. Само движение также происходит в какой-то части пространства, размер которой мы назовем масштабом движения. Так, например, наша Земля представляет собой шар, диаметр которого  $d \approx 12\,000$  км. Обращаясь вокруг Солнца, Земля движется по почти круговой орбите, диаметр которой (масштаб движения)  $D \approx 300\,000\,000$  км. При таком огромном масштабе движения, когда  $d \ll D$ , протяженность самого земного шара и происходящие в нем процессы практически не сказываются на характере его движения по орбите, и Землю можно в этом движении рассматривать как материальную точку. Вообще, материальной точкой мы будем называть тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с масштабами движения.

Понятие материальной точки есть научная абстракция. Вводя это понятие, мы абстрагируемся (отвлекаемся) от всех несущественных для данного движения свойств тела, как, например, его размеров, строения, изменений внутреннего состояния, не говоря уже о менее существенных его характеристиках. Следует указать, что вообще, вводя абстрактные понятия, в науке отвлекаются от всех свойств тел, несущественных для рассматриваемого явления, упрощая, таким образом, задачу и концентрируя внимание на тех свойствах тел, которые предопределяют характер изучаемого явления.

Введенное понятие материальной точки оказывается полезным и при рассмотрении протяженных тел. Например, при суточном вращении Земли вокруг своей оси масштаб движения оказывается сравнимым с размером тела, и Землю в этом движении уже нельзя рассматривать как материальную точку. Однако в этом случае мы можем мысленно расчленить Землю на отдельные части, размеры которых малы по сравнению с масштабами их движения, т. е. на отдельные материальные точки. Зная движение всех этих материальных точек, мы тем самым будем знать и движение всей их совокупности, т. е. земного шара, рассматриваемого в качестве системы материальных точек.

Изучая более подробно внутренние свойства конкретных тел, мы можем прийти к понятию *твердого тела как системы жестко связанных между собой материальных точек; упругого тела как системы точек, способных к небольшим относительным смещениям; газа как системы несвязанных, свободно движущихся материальных точек*. Все эти понятия также являются приближениями к действительности, абстракциями. С помощью таких абстракций можно изучить, например, давление газа на стенки сосуда, в котором он заключен, но нельзя объяснить, почему раскаленный газ светится. Для ответа на последний вопрос придется отказаться от представления о том, что атом газа есть материальная точка, и выйти за пределы области явлений, изучаемых в механике.

Таким образом, *движение в механике рассматривается как перемещение отдельных материальных точек или систем материальных точек в пространстве с течением времени*.

Нашей первой задачей является изучение кинематических характеристик движения одной материальной точки. Как можно количественно охарактеризовать положение точки в пространстве?

Определять положение точки «по отношению к пустому пространству» невозможно и физически бессмысленно. Можно определять положение любого тела, в том числе и материальной точки, лишь по отношению к другому, произвольно выбранному материальному телу, называемому телом отсчета. Выбранное таким образом тело условно считается неподвижным. Связывая с этим телом произвольную систему координат, мы получим систему отсчета положений материальной точки.

На рис. 1.1 изображена простейшая прямоугольная система координат  $OXYZ$ . Положение точки  $M$  в этой системе характеризуется тремя координатами, которые обозначены через  $x$  — абсцисса,  $y$  — ордината и  $z$  — аппликата точки

$M(x, y, z)$ . Эти три отрезка являются проекциями радиуса-вектора  $OM = \mathbf{r}$ , проведенного из начала координат в точку  $M(\mathbf{r})$ . Вместо координат  $x, y, z$  радиус-вектор  $\mathbf{r}$  можно характеризовать в пространстве и иначе, например задавая его длину  $r$  и два угла:  $\vartheta$  между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и осью  $OZ$  и  $\varphi$  между проекцией  $\mathbf{r}$  на плоскость  $XU$  и осью  $OX$ , как это показано на чертеже. Во всех случаях при различном выборе систем отсчета радиус-вектор  $\mathbf{r}$  и положение точки в пространстве характеризуются количественно тремя числами, которые могут меняться независимо друг от друга.

Это является математическим отражением того факта, что пространство т р е х м е р н о. Поскольку три величины,

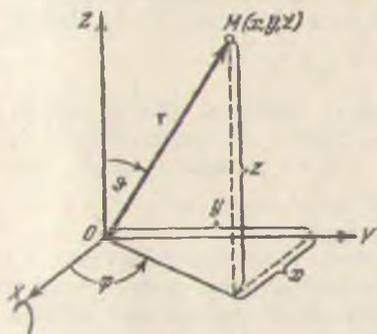


Рис. 1.1.

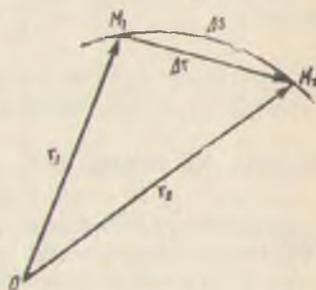


Рис. 1.2.

характеризующие положение точки в пространстве, взаимно независимы, говорят, что *материальная точка обладает тремя степенями свободы*.

Если материальная точка движется, то ее положение в пространстве с течением времени меняется, т. е. радиус-вектор  $\mathbf{r}$  или, что то же, три величины  $x, y$  и  $z$  являются функциями времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (1.1)$$

либо

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Совокупность последовательных положений, занимаемых точкой  $M$  в процессе ее движения, образует в пространстве линию, называемую *траекторией* движущейся точки. На рис. 1.2 изображен отрезок траектории. В какой-то момент времени  $t_1$  точка  $M$  занимает на траектории положение  $M_1$ , характеризуемое радиусом-вектором  $\overline{OM}_1 = \mathbf{r}_1$ . В следующий момент  $t_2$ , спустя промежуток времени  $\Delta t =$

$= t_2 - t_1$ , точка  $M$  занимает на траектории новое положение,  $M_2$ , характеризуемое радиусом-вектором  $\overline{OM}_2 = r_2$ . Дуга  $M_1M_2 = \Delta s$  при этом представляет собой путь, пройденный точкой  $M$  за время  $\Delta t$ .

Вектор  $\overline{M_1M_2} = \Delta r$ , проведенный из начального положения  $M_1$  в конечное положение  $M_2$ , называется вектором перемещения точки  $M$  за время  $\Delta t$ . При прямолинейном движении абсолютная величина вектора перемещения  $|\Delta r|$  равна пути  $\Delta s$ . В общем случае, как это видно из рисунка,  $|\Delta r|$  и  $\Delta s$  не совпадают, но различие между ними тем меньше, чем меньше  $\Delta r$ . Очевидно, что при произвольном криволинейном движении равенство  $|\Delta r| = \Delta s$  соблюдается лишь в пределе для бесконечно малого промежутка времени, т. е. когда  $\Delta r \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{|\Delta r|} = 1. \quad (1.3)$$

Из рис. 1.2 видно, что

$$r_2 = r_1 + \Delta r,$$

или

$$\Delta r = r_2 - r_1, \quad (1.4)$$

т. е. вектор перемещения равен геометрической разности радиусов-векторов конечного и начального положения точки; этот вектор представляет собой приращение радиуса-вектора и характеризует изменение положения точки  $M$  в пространстве за время  $\Delta t$ .

## § 2. Скорость и ускорение произвольно движущейся точки

Траектория и перемещение являются лишь чисто геометрическими характеристиками движения. Два различных движения, для которых одно и то же перемещение  $\Delta r$  совершилось за разные промежутки времени, геометрически одинаковы, но кинематически совершенно различны. Это различие характеризуется различной быстротой изменения положения точки, определяемой отношением

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = v_{\text{ср}}. \quad (2.1)$$

Вектор  $v_{\text{ср}}$  называется средней скоростью движения точки за время  $\Delta t$ . Его численное значение  $|v_{\text{ср}}| = \frac{|\Delta r|}{\Delta t}$  есть скорость такого равномерного и прямоли-

нейного движения, при котором точка  $M$  перешла бы из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  за тот же промежуток времени  $\Delta t$ , за который произошло ее истинное криволинейное движение по дуге  $M_1M_2$  (рис. 1.3). Вектор  $v_{cp}$ , как и вектор  $\Delta r$ , направлен по секущей  $M_1M_2$ .

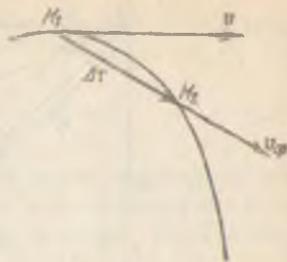


Рис. 1.3.

Переходя к пределу для бесконечно малого промежутка времени ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), мы получим вектор истинной, или мгновенной скорости в точке  $M_1$ :

$$v = \lim_{M_2 \rightarrow M_1} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}. \quad (2.2)$$

Поскольку секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости  $v$  направлен по касательной к траектории. Тогда согласно (1.3)

$$|v| = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad (2.3)$$

т. е. величина скорости  $v$  численно равна пределу отношения длины пути к промежутку времени, как в случае прямолинейного движения. В абсолютной системе единиц СГС скорость измеряется в *см/сек*. В технической и международной системе единиц СИ скорость  $v$  измеряется в *м/сек*.

При прямолинейном движении быстрота изменения величины скорости  $v$  характеризуется ускорением  $w$ , т. е. изменением величины скорости за единицу времени.

В общем случае произвольного криволинейного движения вектор скорости  $v$  может меняться и по величине и по направлению. Быстрота изменения вектора скорости тогда будет характеризоваться некоторым вектором ускорения  $w$ . Для дальнейшего будет целесообразно расчленить вектор  $w$  на две составляющие, характеризующие в отдельности быстроту изменения скорости по величине и быстроту изменения ее по направлению.

На рис. 1.4 изображен отрезок траектории между двумя соседними бесконечно близкими точками  $M_1$  и  $M_2$ . Скорости в этих точках  $v_1$  и  $v_2$  направлены по касательным к траектории и отличаются друг от друга по величине и по направлению. Перенесем вектор  $v_2$  параллельно самому себе в точку  $M_1$ , как это показано на рис. 1.4. Соединим теперь конец вектора  $v_1$  с концом перенесенного вектора  $v_2$  вектором  $\Delta v$ . Из чертежа видно, что

$$\Delta v = v_2 - v_1, \quad (2.4)$$

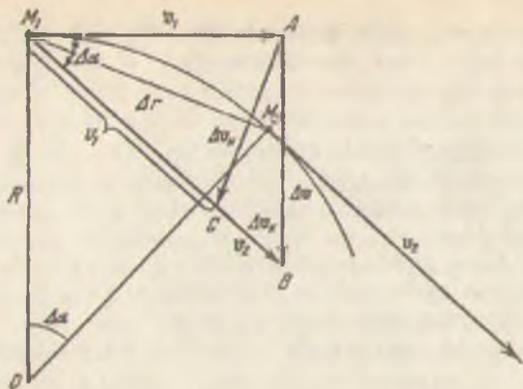


Рис. 1.4.

т. е. вектор  $\Delta v$  есть геометрическое приращение вектора  $v$  за время  $\Delta t$ . Отношение

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = w_{\text{ср}} \quad (2.5)$$

является вектором среднего ускорения за время  $\Delta t$ , а предел этого отношения будет вектором истинного, или мгновенного ускорения

$$w = \lim_{M_2 \rightarrow M_1} w_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (2.6)$$

при произвольном движении точки  $M$ .

На отрезке  $M_1B$ , изображающем перенесенный в точку  $M_1$  вектор  $v_2$ , отложим отрезок  $M_1C$ , численно равный длине вектора  $v_1$ , и соединим прямой точку  $A$  (конец вектора  $v_1$ ) с точкой  $C$ . Из рис. 1.4 видно, что вектор  $\Delta v$  может быть представлен как геометрическая сумма двух векторов:

$$\Delta v = \Delta v_k = \Delta v_n. \quad (2.7)$$

Вектор  $\Delta v_k$  численно характеризует изменение величины скорости за время  $\Delta t$ :

$$|\Delta v_k| = v_2 - v_1 = \Delta v. \quad (2.8)$$

Если величина скорости  $v$  во время движения не меняется, то  $\Delta v = 0$  и  $\Delta v_k = 0$ .

Вектор  $\Delta v_n$  характеризует изменение направления вектора скорости за время  $\Delta t$ . Из чертежа видно, что он направлен в сторону вогнутости кривой. Если с течением времени направление движения не меняется, то векторы  $v_1$  и  $v_2$  направлены вдоль одной и

той же прямой и  $\Delta v_n = 0$ . Подставляя (2.7) в (2.6), получаем:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_k}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_n. \quad (2.9)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  угол  $\Delta \alpha$  при вершине равнобедренного треугольника  $M_1AC$  стремится к нулю и направления векторов  $\mathbf{v}_2$  и  $\Delta \mathbf{v}_k$  стремятся к направлению вектора  $\mathbf{v}_1$ . Поэтому вектор

$$\mathbf{w}_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_k}{\Delta t} \quad (2.10)$$

также направлен вдоль вектора  $\mathbf{v}_1$ , т. е. по касательной к траектории. Численное значение этого вектора согласно (2.8) равно

$$w_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \quad (2.11)$$

т. е. характеризует быстроту изменения величины скорости при движении. Этот вектор называется касательным, или тангенциальным ускорением.

Для определения величины и направления второго вектора  $\mathbf{w}_n$  будем считать промежуток времени  $\Delta t$  бесконечно малым. Тогда точки дуги траектории  $M_1M_2$  и векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  будут лежать практически в одной плоскости (называемой соприкасающейся плоскостью к кривой). Для упрощения дальнейшего вывода ограничимся здесь случаем плоского движения, при котором все точки траектории лежат в одной плоскости. Восставим в точках  $M_1$  и  $M_2$  перпендикуляры к касательным — нормали к кривой — до их пересечения в точке  $O$ . Малая дуга  $\Delta s = \overline{M_1M_2}$  будет тогда практически отрезком окружности с центром в точке  $O$  и радиусом

$$R \approx OM_1 \approx OM_2. \quad (2.12)$$

Угол между линиями  $OM_1$  и  $OM_2$  также равен  $\Delta \alpha$  (углы со взаимноперпендикулярными сторонами). Величина  $R$  связана с  $\Delta \alpha$  очевидным соотношением

$$R \approx \frac{\Delta s}{\Delta \alpha}. \quad (2.13)$$

В случае произвольной пространственной кривой величина  $R$  и положение точки  $O$  определяются из предельного соотношения

$$R = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \alpha}; \quad (2.14)$$

$R$  носит название радиуса кривизны траектории. Величина, обратная радиусу кривизны,

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \quad (2.15)$$

называется соответственно кривизной траектории в данной точке. Для окружности  $R$  и  $K$  постоянны во всех точках. В случае прямой линии угол  $\Delta \alpha$  между направлениями траектории в соседних точках тождественно равен нулю и, следовательно, кривизна  $K$  также равна нулю.

Проводя на рис. 1.4 отрезок перемещения  $\Delta r$ , соединяющий точки  $M_1$  и  $M_2$ , мы получим два равнобедренных треугольника  $OM_1M_2$  и  $M_1AC$ , подобных друг другу. Из пропорциональности сходственных сторон можно получить, что

$$|\Delta v_n| = \frac{v_1}{R} |\Delta r|. \quad (2.16)$$

Отсюда можно вычислить величину искомого вектора

$$w_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v_n|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1}{R} \cdot \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v^2}{R}, \quad (2.17)$$

где в окончательном выражении мы опустим индекс 1 ввиду произвольности выбора начальной точки.

В пределе угол  $\Delta \alpha$  при вершине равнобедренного треугольника  $M_1AC$  стремится к нулю, а углы при основаниях стремятся к  $90^\circ$ .

Следовательно,  $\Delta v_n$  в пределе перпендикулярен к  $v_1$  и вектор  $w_n$  перпендикулярен к вектору скорости и направлен по нормали к центру кривизны  $O$  кривой. Поэтому вектор  $w_n$  носит название нормального ускорения. Согласно (2.17) величина нормального ускорения численно равна отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории в данной точке. Можно доказать, что эти соотношения для  $w_n$  остаются справедливыми и в общем случае произвольной пространственной кривой.

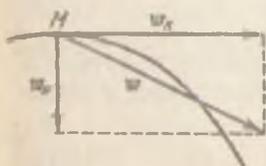


Рис. 1.5.

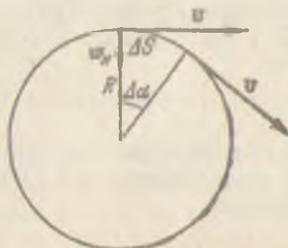


Рис. 1.6.

Касательное и нормальное ускорения (рис. 1.5) взаимно-перпендикулярны, и их геометрическая сумма равна

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_n, \quad (2.18)$$

т. е. вектор полного ускорения равен по модулю

$$w = \sqrt{w_k^2 + w_n^2}. \quad (2.19)$$

В системе СГС ускорение измеряется в  $\text{см}/\text{сек}^2$ , а в системе СИ — в  $\text{м}/\text{сек}^2$ .

В случае равномерного криволинейного движения величина скорости постоянна:  $v = \text{const}$ , касательное ускорение равно нулю и полное ускорение равно нормальному:

$$\mathbf{w}_k = 0 \text{ и } \mathbf{w} = \mathbf{w}_n. \quad (2.20)$$

Для изображенного на рис. 1.6 примера равномерного вращения материальной точки по окружности постоянного радиуса  $R$  величина нормального ускорения  $w_n = \frac{v^2}{R}$  остается постоянной, а вектор  $\mathbf{w}_n$  направлен все время к центру окружности. Поэтому  $\mathbf{w}_n$  называют также центростремительным ускорением.

В случае неравномерного, но прямолинейного движения кривизна траектории  $K = \frac{1}{R}$  равна нулю,  $R = \infty$ , нормальное

ускорение ( $w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{\infty} = 0$ ) отсутствует и полное ускорение равно касательному:

$$\mathbf{w}_n = 0 \text{ и } \mathbf{w} = \mathbf{w}_k. \quad (2.21)$$

Направление этого вектора остается постоянным — все время вдоль прямой, по которой движется точка (рис. 1.7). Если при этом остается постоянной и величина  $w$ , то движение называется равноускоренным. Из школьного курса физики известно, что в этом случае зависимость пути от времени выражается формулой

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{wt^2}{2}, \quad (2.22)$$

а скорость растет линейно со временем:

$$v = v_0 + wt. \quad (2.23)$$

В случае равномерного и прямолинейного движения ско-

рость неизменна и по величине и по направлению:  $v = \text{const}$ , а обе составляющие ускорения и само ускорение отсутствуют:

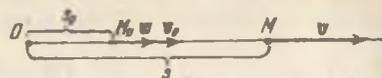


Рис. 1.7.

$$w = w_n = w_k = 0. \quad (2.24)$$

В общем случае неравномерного криволинейного движения вектор ускорения  $w$  и обе его составляющие  $w_k$  и  $w_n$  отличны от нуля.

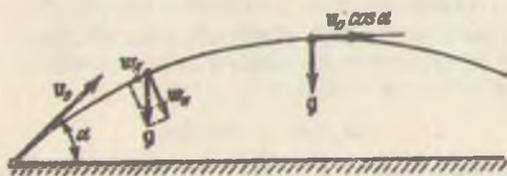


Рис. 1.8.

В заключение рассмотрим движение тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту с некоторой начальной скоростью  $v_0$  (рис. 1.8). Ускорение земного притяжения постоянно по величине и по направлению (оно направлено вертикально вниз). Поэтому полное ускорение тела во время движения остается постоянным:

$$w = g = \text{const}. \quad (2.25)$$

Однако, как видно из чертежа, расчленение  $w$  на нормальное и касательное ускорение в каждой точке траектории различно. Так, например, в верхней точке траектория горизонтальна и перпендикулярна к вектору  $w$ . Следовательно, в этой точке существует только нормальное ускорение  $w_n = g$  и

$$g = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{R}. \quad (2.26)$$

Из этого соотношения можно определить радиус кривизны в вершине траектории.

## ГЛАВА II

### ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

#### § 3. Законы Ньютона

Раздел механики, изучающий движение материальных тел совместно с физическими причинами, вызывающими это движение, называется динамикой. Основные представления и количественные закономерности динамики возникли и развиваются на базе многовекового человеческого опыта: наблюдений за движением земных и небесных тел, производственной практики общества и специально поставленных экспериментов. Великий итальянский физик

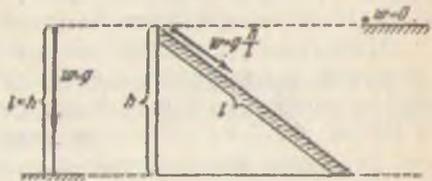


Рис. 1.9.

Галилео Галилей экспериментально установил так называемый закон инерции. Он показал, что при отсутствии сопротивления тело под действием постоянной силы будет двигаться равноускоренно, и установил, что ускорение  $w$  тяжелого тела, движущегося по гладкой наклонной плоскости, обратно пропорционально длине этой плоскости  $l$  при постоянной ее высоте  $h$  (рис. 1.9). Отсюда вытекает, что в пределе движение тела по гладкой горизонтальной плоскости без сопротивления будет происходить без всякого ускорения, т. е. равномерно и прямолинейно. При этом

$$w=0 \text{ и } v=\overset{+}{=} \text{const.} \quad (3.1)$$

Это положение Галилея было подтверждено всеми последующими опытами и составляет содержание так называемого первого основного закона динамики:

Материальная точка (тело), достаточно удаленная от всех других тел (т. е. не взаимодействующая с ними), будет сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. При этом покой следует рассматривать лишь как частный случай равномерного и прямолинейного движения, когда  $v = \text{const} = 0$ .

Этот закон одинаково справедлив как для движения гигантских небесных тел, так и для движения мельчайших пылинок. Свойство материальных тел сохранять состояние равномерного и прямолинейного движения называется инерцией.

Равномерное и прямолинейное движение тела при отсутствии внешних воздействий называется движением по инерции.

Следует отметить, что представление о движении по инерции является научной абстракцией. Наблюдать движение по инерции в чистом виде невозможно, так как никакое тело не может быть изолировано от воздействия других тел, как бы далеко от него эти тела ни находились. Введение этой абстракции позволяет связать ускорение материальных тел с действиями, оказываемыми на них другими телами.

Изменения состояния движения материальных тел, т. е. ускорения, вызываются силами. Остановимся на анализе этого важнейшего понятия.

Выше мы уже отмечали, что инерциальное движение, т. е. движение без ускорений, возможно при отсутствии какого бы то ни было взаимодействия между движущимся телом и другими телами. *Всякое изменение состояния движения, любое ускорение есть результат действия на движущееся тело со стороны других тел.*

Если под действием тела  $A$  материальная точка испытывает ускорение, то мы говорим, что на эту точку действует со стороны тела  $A$  сила  $F$ .

В общем случае силу  $F$  мы определяем как физическую величину, характеризующую действие, оказываемое одним телом на другое. Эта векторная величина определяется числовой величиной или модулем  $|F| = F$ , направлением в пространстве и точкой приложения.

Если на материальную точку действуют две силы  $F_1$  и  $F_2$ , то их действие эквивалентно действию одной силы

$$F' = F_1 + F_2,$$

получаемой из известного треугольника сил (рис. 1.10).

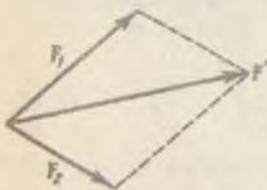


Рис. 1.10.

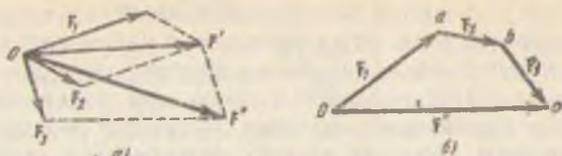


Рис. 1.11.

Если к материальной точке приложены три силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ , то они складываются по тому же правилу:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= F', \\ F_1 + F_2 + F_3 &= F' + F_3 = F'', \end{aligned}$$

как это показано на рис. 1.11, а и б.

Аналогично поступают, когда на точку действует  $n$  сил. Суммарное их действие эквивалентно действию одной равнодействующей, являющейся геометрической суммой заданных сил:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i, \quad (3.2)$$

как показано на рис. 1.12, на котором приложенные к точке векторы сил изображены тонкими стрелками, а их равнодействующая — жирной стрелкой.

Динамическое проявление силы состоит в том, что под действием силы материальное тело испытывает ускорение. Статическое действие силы приводит к тому, что упругие тела (пружины) под действием сил деформируются, газы — сжимаются и т. д.

Количественное измерение силы и установление единицы силы может быть дано лишь в связи с другими, связанными с силой величинами; к этому вопросу мы вернемся ниже.

Опыт показывает, что под действием одной и той же силы различные тела испытывают неодинаковые ускорения, т. е. изменение их инерциального движения различно. Мы говорим, что различна инерция этих тел.

Физической величиной, характеризующей инертность материального тела, является его масса.

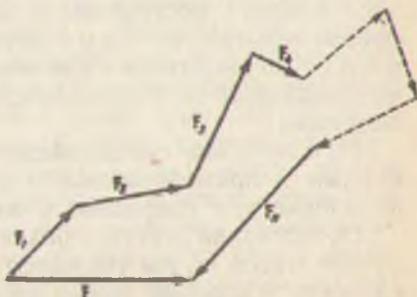


Рис. 1.12.

Ньютон определил *массу как количество вещества, содержащегося в теле*. Это определение массы нельзя считать строгим и исчерпывающим. Как и другие физические понятия, понятие массы раскрывается лишь при изучении всех ее свойств и проявлений, которые будут рассмотрены далее. Определением Ньютона можно пользоваться, понимая его в том смысле, что масса двух одинаковых и одинаково движущихся тел вдвое больше массы одного тела. В действительности же масса одного и того же тела может, как мы увидим дальше, меняться при движении.

Отметим сразу же, что масса характеризует не только инерцию материального тела, но и его гравитационные свойства: *сила притяжения, испытываемая данным телом со стороны другого тела, пропорциональна их массам*. Далее мы увидим, что масса также определяет полный запас энергии материального тела (§ 9).

Величину массы определяют по различным ее проявлениям (инерции, тяготению) путем сравнения с массой какого-нибудь эталонного тела, произвольно принятой за единицу. За единицу массы в системе СГС принимают  $1/1000$  массы международного платиноиридиевого эталона, хранящегося в Париже. Эта единица с точностью до  $\sim 0,003\%$  равна массе  $1\text{ см}^3$  дистиллированной воды при  $4^\circ\text{C}$  и в  $6,02 \cdot 10^{23}$  раз больше массы неподвижного протона (ядра атома водорода). Единицей массы в системе единиц СИ служит масса самого эталона  $1\text{ кг} = 1000\text{ г}$ .

Понятие массы позволяет нам теперь несколько уточнить данное нами в § 1 определение материальной точки. *Материальной точкой называется тело, при изучении движения которого можно отвлечься от всех его свойств, кроме массы*. Каждая материальная точка, следовательно, характеризуется величиной своей массы  $m$ .

Обобщая результаты опытов Галилея по падению тяжелых тел, астрономические законы Кеплера о движении планет, данные собственных исследований и т. п., Ньютон сформулировал второй основной закон динамики, количественно связывающий изменение движения материального тела с силами, вызывающими это изменение движения.

При действии сил движение тела перестает быть равномерным и прямолинейным и появляется ускорение  $w$ . Направление его совпадает с направлением действия силы.

Сопоставляя действие различных сил на одно и то же тело данной массы  $m$ , мы убеждаемся в том, что величина возникающего ускорения прямо пропорциональна величине действующей силы. Следовательно,

$$w \sim F \text{ при } m = \text{const.} \quad (3.3)$$

При действии одной и той же силы на различные тела ускорения этих тел оказываются различными. Чем больше масса тела  $m$ , тем больше его инертность и тем меньшее ускорение  $w$  под действием данной силы  $F$  оно получает. Опыт показывает, что

$$w \sim \frac{1}{m} \text{ при } F = \text{const.}, \quad (3.4)$$

т. е. ускорение, получаемое телом под действием данной силы, обратно пропорционально величине его массы. Соотношение (3.4) показывает, что масса тела  $m$  является количественной мерой его инертности. Объединяя (3.3) и (3.4), получаем, что

$$w \sim \frac{F}{m}, \text{ или } F \sim mw. \quad (3.5)$$

Вводя соответствующий коэффициент пропорциональности  $k$ , мы можем записать соотношение (3.5) в виде

$$F = kmw. \quad (3.6)$$

Величина  $k$  зависит от выбора системы единиц измерения массы, ускорения и силы. В физике принято выбирать единицу силы так, чтобы  $k=1$ ; тогда уравнение (3.6) принимает вид

$$\left| F = mw \right| \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) представляет математическую запись второго основного закона динамики:

*Вектор силы, действующей на материальную точку, численно равен произведению массы точки на вектор ускорения, возникающего при действии этой силы.*

При указанном выборе коэффициента пропорциональности  $k=1$  единицы измерения силы, массы и ускорения не являются независимыми. Единицы измерения ускорения также принято выбирать не произвольно, а выражать их через единицы длины (пути) и времени — физические величины, которыми в соответствии с формулами (2.6) и (2.2) определяется ускорение. Таким образом, в формулу (3.7) входят четыре физические величины — сила, масса, путь и время, — измеряемые своими единицами, и эти единицы оказываются связанными друг с другом одним уравнением. Единицы измерения любых трех из них могут быть определены произвольно, а оставшаяся четвертая единица определяется через уже введенные.

Чаще всего в качестве основных единиц вводят единицы длины, времени и массы. Так, если массу выражать в г, а ускорение в  $см/сек^2$ , то силу надо измерять в динах. Дина (*дин*) есть единица силы в системе СГС и представляет собой такую силу, которая массе в 1 г сообщает ускорение  $1 см/сек^2$ . В системе единиц СИ масса измеряется в кг, ускорение — в  $м/сек^2$ , а сила — в ньютонах. Ньютон (*н*) есть такая сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение  $1 м/сек^2$ . Легко видеть, что

$$1 н = 1 \frac{кг \cdot м}{сек^2} = \frac{1000 г \cdot 100 см}{сек^2} = 10^5 \frac{г \cdot см}{сек^2} = 10^5 \text{ дин.}$$

В технической системе единиц в качестве основных выбирают единицы длины, времени и силы. *Единица массы будет при этом уже не основной, а производной единицей.* В этой системе единицей длины является метр, единицей времени — секунда, единицей силы — сила веса 1 кгГ, т. е. такая сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение  $9,81 м/сек^2$ . Следовательно,

$$1 кгГ = 9,81 н = 9,81 \cdot 10^5 \text{ дин,}$$

или

$$1 н = 0,102 кгГ.$$

Единицей массы в этой системе будет такая масса, которая под действием единичной силы (1 кгГ) испытывает единичное ускорение ( $1 м/сек^2$ ), т. е.

$$1 \text{ техн. ед. массы (тем)} = \frac{1 кгГ \cdot сек^2}{м} = 9,81 кг,$$

или

$$1 кг = 0,102 \text{ тем.}$$

Следует отметить, что первый и второй основные законы динамики не являются независимыми: первый есть частный случай второго. Действительно, если на материальную точку не действует сила, т. е. если  $F=0$ , то из второго закона (3.7) следует, что

$$m\mathbf{w} = 0,$$

или, в силу того, что  $m$  отлично от нуля,

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Но равенство нулю ускорения означает, что приращение скорости  $\Delta v$  равно нулю, т. е. что скорость остается постоянной.

До сих пор мы рассматривали лишь одну сторону взаимодействия между телами: влияние других тел на характер движения данного выделенного тела (материальной точки). Такое влияние не может быть односторонним, взаимодействие должно быть, по сути дела, обоюдным.

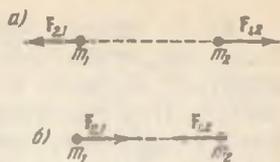


Рис. 1.13.

Этот факт отражается третьим законом динамики, сформулированным для случая взаимодействия двух материальных точек (рис. 1.13):

Если материальная точка  $m_2$  испытывает со стороны материальной точки  $m_1$  силу, равную  $F_{1,2}$ , то  $m_1$  испытывает со стороны  $m_2$  силу  $F_{2,1}$ , равную по величине и противоположную по направлению  $F_{1,2}$ :

$$F_{2,1} = -F_{1,2}. \quad (3.8)$$

Эти силы действуют всегда вдоль прямой, проходящей через точки  $m_1$  и  $m_2$ , как показано на чертеже. Рис. 1.13, а относится к случаю, когда силы взаимодействия между точками являются силами отталкивания. На рис. 1.13, б изображен случай притяжения.

В случае произвольно большого множества точек взаимодействие в такой системе согласно третьему закону динамики сводится к парному взаимодействию между любыми двумя точками. Это означает, что сила, испытываемая, например, материальной точкой  $m_3$  системы, складывается из сил, действующих со стороны точек  $m_1, m_2, m_4, m_5 \dots$

$$F_3 = F_{1,3} + F_{2,3} + F_{4,3} + \dots$$

При этом, например, сила  $F_{1,3}$  определяется только характером взаимодействия точек  $m_3$  и  $m_1$  и от других точек не зависит.

Часто употребляются сокращенные формулировки третьего закона динамики: «действие равно противодействию» — и ей подобные, в которых не подчеркивается важное обстоятельство: *силы действия и противодействия приложены всегда к различным телам и поэтому никогда не уравновешивают друг друга*. Если запомнить это последнее обстоятельство, вытекающее из точной формулировки третьего закона динамики, то никогда не возникнет вопроса о том, почему, например, лошадь движет телегу вперед, хотя их взаимные действия друг на друга и равны.

Когда человек идет по земле, то сила, с которой он отталкивает землю назад, равна по величине и направлена обратно той силе, с которой земля отталкивает человека вперед. При равенстве этих сил, однако, согласно второму закону динамики, возникающие ускорения обратно пропорциональны массам, и землю благодаря ее очень большой сравнительно с человеком массе можно считать практически неподвижной.

#### § 4. Закон сохранения и изменения количества движения (импульса). Реактивное движение

Второй закон Ньютона (3.7) позволяет найти ускорение движущейся точки в каждый данный момент времени. На практике чаще всего необходимо найти изменение движения тела за какой-нибудь определенный промежуток времени. Для решения этой задачи следовало бы применять второй закон динамики бесчисленное число раз, во все промежуточные моменты времени. Поэтому целесообразно предварительно преобразовать основные законы динамики и вывести из них ряд следствий, позволяющих находить конечные скорости тел сразу, без вычисления ускорений и скоростей во всех промежуточных точках. Первым таким практически важным следствием из основных законов динамики является так называемый закон количества движения (часто вместо термина «количество движения» ныне применяется термин «импульс»). Используя (2.6), перепишем второй закон Ньютона (3.7) в виде

$$\mathbf{F} = m \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим конечный, но малый промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого действующая на материальную точку сила  $\mathbf{F}$  не успевает заметно измениться ни по величине, ни по направлению. Заменяя тогда в (4.1) величины  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{w}$  их средними значениями за промежуток времени  $\Delta t$ , получим:

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Для постоянной силы ( $\mathbf{F} = \text{const}$  и  $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \text{const}$ ) средние значения  $\mathbf{F}_{\text{ср}}$  и  $\mathbf{w}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$  в точности равны их мгновенным значениям  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{w}$  в каждом промежутке  $\Delta t$ . В случае переменной силы это равенство будет выполняться тем точнее, чем меньше интервал  $\Delta t$ .

Обозначим скорость материальной точки в начале промежутка  $\Delta t$  через  $v_1$ , а в конце него — через  $v_2$  (рис. 1.14). тогда  $\Delta v = v_2 - v_1$ , и из (4.2) имеем:

$$F_{cp} \Delta t = m(v_2 - v_1) = mv_2 - mv_1. \quad (4.3)$$



Рис. 1.14.

Вектор  $F_{cp} \cdot \Delta t$ , совпадающий по направлению с силой  $F_{cp}$  и численно равный произведению вектора силы  $F_{cp}$  на промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого она действовала, называется элементарным импульсом силы.

Вектор  $mv$ , равный произведению массы  $m$  материальной точки на вектор скорости ее движения  $v$ , называется вектором количества движения точки. Стоящая в правой части равенства (4.3) разность  $mv_2 - mv_1$  представляет собой приращение вектора количества движения за время  $\Delta t$ . Обозначая это приращение через  $\Delta(mv)$ , получим математическую формулировку закона изменения количества движения:

$$F_{cp} \Delta t = \Delta(mv). \quad (4.4)$$

*Элементарный импульс силы, действовавший на материальную точку в течение промежутка времени  $\Delta t$ , равен изменению ее количества движения за тот же промежуток времени.*

В случае переменной силы, действующей в течение достаточно большого промежутка времени, последний следует разбить на достаточно малые элементарные интервалы  $\Delta t_k$  так, чтобы на каждом интервале можно было заменить силу ее средним значением в этом интервале  $F_k$ . Перенумеровав все последовательные положения движущейся точки на ее траектории так, как это показано на рис. 1.15, применим равенство (4.4) последовательно к каждому интервалу. Для первого интервала  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$  получим:

$$F_1 \Delta t_1 = mv_1 - mv_0.$$

Аналогично, для второго интервала  $\Delta t_2 = t_2 - t_1$

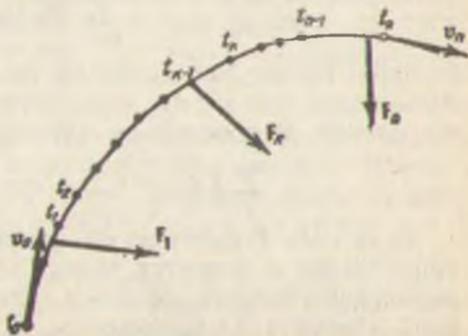


Рис. 1.15.

$$F_2 \Delta t_2 = mv_2 - mv_1$$

и для всех последующих

$$F_3 \Delta t_3 = mv_3 - mv_2,$$

.....

$$F_k \Delta t_k = mv_k - mv_{k-1},$$

.....

$$F_n \Delta t_n = mv_n - mv_{n-1}.$$

Сложим все эти равенства. Тогда промежуточные значения вектора количества движения попарно сократятся, и мы получим:

$$F_1 \Delta t_1 + F_2 \Delta t_2 + \dots + F_k \Delta t_k + \dots + F_n \Delta t_n = mv_n - mv_0. \quad (4.5)$$

Геометрическая сумма

$$\sum_{k=1}^{k=n} F_k \Delta t_k$$

элементарных импульсов силы  $F_k \Delta t_k$  называется полным импульсом переменной силы за время  $t_n - t_0$ . При введенных обозначениях

$$\sum_{k=1}^{k=n} F_k \Delta t_k = mv_n - mv_0, \quad (4.6)$$

т. е. *полный импульс переменной силы равен полному изменению количества движения за все время действия силы.*

Закон изменения количества движения (4.6) позволяет по начальной скорости  $v_0$  и известному полному импульсу силы находить сразу конечную скорость  $v_n$  без вычисления всех промежуточных скоростей  $v_k$ . Вычисление полного импульса

$$\sum_{k=1}^{k=n} F_k \Delta t_k$$

в общем случае произвольных сил представляет собой довольно сложную задачу, решаемую методами интегрального исчисления. В простейшем случае постоянной силы

$$\sum_k F \Delta t_k = F \sum_k \Delta t_k = F (t_n - t_0). \quad (4.7)$$

Если сила  $F$  имеет во все время движения одно и то же направление и меняется только по своей величине, то для вычисления полного импульса геометрическая сумма может быть заменена алгебраической  $\sum_k F_k \Delta t_k$ . В этом случае ис-

комый импульс можно вычислить графически. Построим график изменения величины силы  $F$  в зависимости от времени  $t$  (рис. 1.16). Разобьем ось абсцисс на указанные выше малые интервалы. На интервале  $\Delta t_k$  проведем пунктиром горизонтальную прямую с ординатой, равной среднему значению величины силы  $F_k$  в этом интервале. Тогда площадь заштрихованной на рисунке полоски

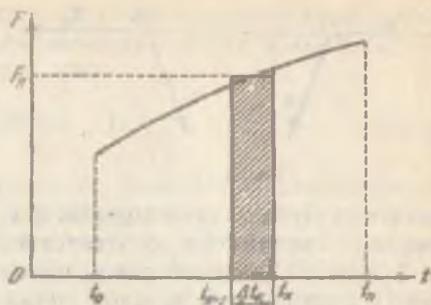


Рис. 1.16.

зависит от времени  $t$  (рис. 1.16). Разобьем ось абсцисс на указанные выше малые интервалы. На интервале  $\Delta t_k$  проведем пунктиром горизонтальную прямую с ординатой, равной среднему значению величины силы  $F_k$  в этом интервале. Тогда площадь заштрихованной на рисунке полоски

$$F_k \Delta t_k \quad (4.8)$$

численно равна элементарному импульсу силы, и полный импульс будет численно равен сумме площадей всех элементарных полосок. Уменьшая величины интервалов  $\Delta t_k$  и увеличивая их число  $n$ , в пределе (при  $\Delta t_k \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$ ) получим, что искомый полный импульс силы

$$\sum F_k \Delta t_k \quad (4.9)$$

численно равен площади, заключенной на нашем рисунке между кривой  $F(t)$ , осью абсцисс и двумя ординатами, поставленными в начальной и конечной точках интервала  $t_0$  и  $t_n$ . Измеряя указанную площадь, мы получаем возможность графически вычислить величину полного импульса силы.

Если сила  $F$  меняется не только по величине, но и по направлению, то вектор импульса силы следует разложить на составляющие по трем координатным осям и произвести указанное графическое вычисление для каждой из трех составляющих вектора  $\sum_k F_k \Delta t_k$ , а затем геометрически сложить эти три суммы.

Закон изменения количества движения является непосредственным следствием второго закона Ньютона. Используя наряду с ним и третий закон динамики (3.8), можно получить так называемый закон сохранения количества движения.

Для этого рассмотрим две взаимодействующие материальные точки с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Обозначим скорости движения этих точек в данный момент времени соответственно через  $v_1$  и  $v_2$  (рис. 1.17). Если первая из этих точек действует

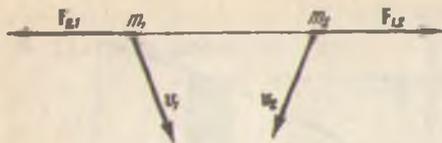


Рис. 1.17.

на вторую с силой  $F_{1,2}$ , то вторая из них, согласно третьему закону динамики, действует на первую с силой  $F_{2,1} = -F_{1,2}$ . Под действием этих сил за промежуток времени  $\Delta t$  скорости

точек получают приращения  $\Delta v_1$  и  $\Delta v_2$  и их количества движения изменяются соответственно на величины  $\Delta(m_1 v_1)$  и  $\Delta(m_2 v_2)$ . Применяя закон изменения количества движения (4.4) к движению каждой точки в отдельности, мы можем написать:

$$F_{2,1} \Delta t = \Delta(m_1 v_1), \quad F_{1,2} \Delta t = \Delta(m_2 v_2). \quad (4.10)$$

Складывая эти два равенства и учитывая, что  $F_{1,2} = -F_{2,1}$ , получаем:

$$0 = \Delta(m_1 v_1) + \Delta(m_2 v_2) = \Delta(m_1 v_1 + m_2 v_2). \quad (4.11)$$

Рассматриваемые две материальные точки, взаимодействующие только друг с другом, образуют систему, изолированную от действия всех остальных тел.

Геометрическая сумма количества движения обеих точек  $m_1 v_1 + m_2 v_2$  называется количеством движения системы. Из (4.10) и (4.11) следует, что за время движения количество движения каждой точки в отдельности может меняться, но количество движения системы остается постоянным:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const.} \quad (4.12)$$

Аналогичным образом может быть выведен закон сохранения количества движения для системы, состоящей из любого числа материальных точек или тел, взаимодействующих только между собой. *В изолированной системе материальных тел количество движения всей системы в целом остается неизменным:*

$$\sum_i m_i v_i = \text{const.} \quad (4.13)$$

где  $m_i$  — массы отдельных точек системы, а  $v_i$  — их скорости в любой момент времени.

Мы видим, что при механическом движении увеличение количества движения одного тела равно уменьшению количества движения всех остальных взаимодействовавших с ним тел. Взаимодействующие тела обмениваются количествами движения; количество движения переносится от одного тела к другому. Скорость передачи этой величины от одного

взаимодействующего тела к другому определяет величину силы взаимодействия. Для каждого из тел в соответствии с (4.4) мы можем записать, что

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = F. \quad (4.14)$$

Действие закона сохранения количества движения мы постоянно наблюдаем в повседневной жизни. Если лодка пристает носом к берегу, а пассажир находится на корме, то когда пассажир начнет идти по лодке со скоростью  $v_1$  к берегу, лодка получит скорость  $v_2$  в обратном направлении и отплывет от берега (рис. 1.18). Когда за счет действия пороховых газов в стволе орудия происходит выстрел, то

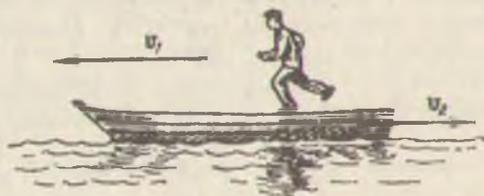


Рис. 1.18.

количество движения вылетающего снаряда  $m_1v_1$  равно по величине и обратно по знаку количеству движения  $m_2v_2$  откатывающегося назад орудия.

Для уменьшения отката орудия необходимо увеличивать его массу  $m_2$  по сравнению с массой снаряда  $m_1$ . В этом отношении значительным преимуществом обладают реактивные снаряды. В ракете или реактивном снаряде происходит постепенное сгорание порохового заряда и истечение горячих пороховых газов назад через соответствующие отверстия (дюзы). Рассматривая ракету и вытекающие из нее газы как единую механическую систему, мы можем применить к ней закон сохранения количества движения. Так как вытекающие газы обладают количеством движения, направленным назад, то основная часть ракеты получает движение вперед. Таким образом, всю отдачу при выстреле ракеты воспринимают вытекающие газы, и для запуска реактивного снаряда большого калибра вместо массивного ствола достаточно простой и легкой направляющей рамы.

Принцип реактивного движения ныне широко применяется для полетов. Мысль о возможности такого применения реактивного движения была впервые высказана в 1881 г. казенным царским правительством известным революционером Кибальчичем.

Дальнейшее развитие эта мысль получила в работах «пионера звездных дорог» К. Э. Циолковского.

Современные реактивные самолеты уже достигли скорости полета порядка 2000 км/ч, т. е. сверхзвуковых скоростей. С помощью ракет запускаются искусственные спутники Земли и космические корабли.

### § 5. Работа сил и кинетическая энергия

За бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$  материальная точка  $M$  пройдет элементарный путь  $\Delta s$  по траектории и переместится в пространстве на величину  $\Delta r$ . На этом участке на точку может действовать сила  $F$ , направленная под некоторым углом  $\alpha$  к перемещению  $\Delta r$  (рис. 1.19).

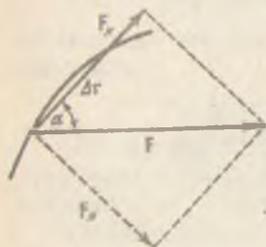


Рис. 1.19.

Скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения называется элементарной работой силы  $F$  на бесконечно малом перемещении  $\Delta r$ :

$$\Delta A = F \cdot \Delta r^* \quad (5.1)$$

Скалярное произведение двух векторов равно произведению абсолютных значений этих векторов на косинус угла между ними, и

$$\Delta A = F |\Delta r| \cos \alpha \quad (5.2)$$

Если угол  $\alpha$  — острый, то  $\cos \alpha > 0$  и работа, совершаемая силой при перемещении точки, положительна. При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , когда сила перпендикулярна к перемещению,  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ; такая сила работы не совершает. Если угол  $\alpha$  — тупой, то сила действует против направления перемещения  $\Delta r$ ,  $\cos \alpha < 0$  и работа силы отрицательна.

Выражения (5.1) и (5.2) можно переписать в виде

$$\Delta A = F \cos \alpha |\Delta r| = F_k |\Delta r|, \quad (5.3)$$

где  $F_k = F \cos \alpha$  есть проекция силы  $F$  на направление перемещения. В пределе (при  $\Delta t \rightarrow 0$ ) величина перемещения  $|\Delta r|$  согласно (1.3) стремится к отрезку дуги  $\Delta s$ , пройденному движущейся точкой, а направление перемещения  $\Delta r$

\* Здесь и далее символ  $\Delta$  перед буквой  $A$  означает не приращение работы (как для остальных величин), а указывает лишь на малость элементарной работы.

стремится к направлению касательной к траектории. Поэтому выражение (5.3) можно переписать в виде

$$\Delta A = F_k \Delta s. \quad (5.4)$$

Раскладывая, как показано на рис. 1.19, вектор силы на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_n, \quad (5.5)$$

мы видим, что в пределе вектор  $\mathbf{F}_k$  направлен по касательной, а вектор  $\mathbf{F}_n$  — соответственно по нормали к траектории. Из приведенного выше определения работы следует, что ее совершает лишь касательная составляющая силы  $\mathbf{F}_k$ , а работа нормальной составляющей  $\mathbf{F}_n$  равна нулю.

Из определения работы (5.2) можно установить единицы ее измерения. В системе СГС единица работы  $1 \text{ эрг} = 1 \text{ дин} \cdot 1 \text{ см} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^2 / \text{сек}^2$ . В системе СИ единица работы  $1 \text{ джоуль (дж)} = 1 \text{ н} \cdot 1 \text{ м} = 10^5 \text{ дин} \cdot 10^2 \text{ см} = 10^7 \text{ эрг}$ . Наконец, в технической системе единиц — единица работы  $1 \text{ кгм} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м} = 9,81 \text{ дж}$ .

Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (5.6)$$

Единица мощности в системе СИ — 1 ватт ( $\text{вт}$ )  $= 1 \text{ дж/сек} = 10^7 \text{ эрг/сек}$ .

Перейдем теперь к определению новой важной физической величины — кинетической энергии материальной точки.

По второму закону Ньютона  $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$ . Следовательно, входящая в выражение (5.4) касательная составляющая силы равна по величине

$$F_k = m\omega_k = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (5.7)$$

где согласно (2.11)  $\omega_k = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  — касательное ускорение.

Подставляя (5.7) в (5.4), получаем для элементарной работы выражение

$$\Delta A = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta s = m \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta v = mv \cdot \Delta v. \quad (5.8)$$

Рассмотрим теперь конечный промежуток времени  $t$ . Пусть в начале этого интервала материальная точка находилась в положении  $M_1$  и двигалась со скоростью  $v_1$ , а в конце этого интервала переместилась в другое положение

Как видно из (5.13), кинетическая энергия материальной точки (тела) зависит только от ее массы  $m$  и величины скорости  $v$ . От положения материальной точки в пространстве кинетическая энергия не зависит.

### § 6. Потенциальная энергия. Закон сохранения и превращения энергии

В рассмотренном выше случае работа силы  $F$ , приложенной к материальной точке, затрачивалась на изменение кинетической энергии движущейся точки. Однако кроме кинетической энергии — энергии движения — существует еще один вид механической энергии, обусловленный взаимным расположением тел, действующих друг на друга. Эта энергия носит название потенциальной энергии.

Сила  $F$ , приложенная к материальной точке  $M$ , является всегда результатом воздействия на эту точку других окружающих ее тел. В зависимости от расположения точки  $M$  относительно воздействующих на нее тел эта сила может быть различна. В этом случае мы говорим о поле сил, создаваемых данными телами. Так, например, сила земного притяжения, действующая на материальную точку с массой  $m$ , на разных расстояниях от земли различна и по величине и по направлению. Вокруг земного шара имеется поле сил тяготения, действующих на точку  $M$ . Аналогичный характер носит поле электрических сил при взаимодействии электрически заряженных тел.

Поместим материальную точку  $M$  в силовое поле и обозначим ее радиус-вектор через  $r$ . В данном положении на точку  $M$  будет действовать определенная сила  $F$  (рис. 1.21). Чтобы точка  $M$  не начала двигаться и не приобрела кинетической энергии, уравновесим эту силу внешней по отношению к системе силой  $F'$ , равной ей по величине и обратной по направлению:

$$F' = -F. \quad (6.1)$$

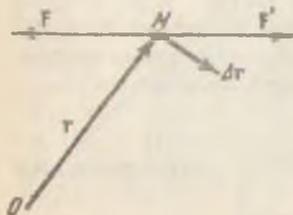


Рис. 1.21.

Чтобы вся система, состоящая из точки  $M$  и воздействующих на нее тел (не показанных на рисунке), оставалась неизменной, ко всем остальным телам также нужно приложить соответствующие внешние силы, уравновешивающие их взаимодействия.

Предположим теперь, что сила  $F'$  не в точности уравновешивает

силу  $F$ , но отличается от последней на бесконечно малую величину  $\Delta F'$ . Тогда точка  $M$  начнет бесконечно медленно двигаться в направлении  $\Delta F'$  и за достаточно большой промежуток времени переместится на величину  $\Delta r$ . Скорость перемещения точки  $M$  будет при этом бесконечно мала и может практически считаться равной нулю. В соответствии с этим можно считать равной нулю и кинетическую энергию материальной точки.

В процессе перемещения материальной точки на  $\Delta r$  внешняя сила  $F'$  совершает работу

$$\Delta A' = F' \cdot \Delta r, \quad (6.2)$$

хотя материальная точка  $M$  не приобретет никакой кинетической энергии  $T$ . Очевидно, что в результате совершенной работы произошло увеличение какой-то другой формы энергии, зависящей от изменения положения точки  $M$  в силовом поле.

Этот новый вид энергии, определяющийся не скоростью точки, но ее положением в силовом поле, и есть потенциальная энергия.

Обозначим через  $\Delta U$  изменение потенциальной энергии при перемещении точки в силовом поле на  $\Delta r$ . Изменение потенциальной энергии  $\Delta U$  может быть определено по величине работы, произведенной внешними силами при перемещении на  $\Delta r$ :

$$\Delta U = \Delta A' = F' \Delta r. \quad (6.3)$$

Поскольку  $F' = -F$ , то

$$\Delta A' = F' \cdot \Delta r = -F \cdot \Delta r = -\Delta A, \quad (6.4)$$

где  $\Delta A$  есть работа, совершаемая внутренними силами системы на том же перемещении  $\Delta r$ . Используя соотношение (6.4), мы можем для определения изменения потенциальной энергии  $\Delta U$ , не прибегая к внешней силе, написать непосредственно, что

$$\Delta A = -\Delta U. \quad (6.5)$$

Таким образом, *работа, совершаемая силами  $F$ , действующими на материальную точку при ее перемещении, равна изменению ее потенциальной энергии, зависящей от расположения точки в силовом поле.*

Равенство это следует понимать алгебраически. Если работа сил положительна ( $\Delta A > 0$ ), то потенциальная энергия уменьшается ( $\Delta U < 0$ ). Если же работа сил отрицательна ( $\Delta A < 0$ ), то потенциальная энергия возрастает ( $-\Delta U < 0$ , т. е.  $\Delta U > 0$ ).

Для вычисления работы  $A_{I,II}$  при смещении точки на конечное расстояние от  $r=r_I$  до  $r=r_{II}$  вся ее траектория разбивается на отдельные бесконечно малые перемещения  $\Delta r_i$ , на каждом из которых силу  $F_i$  можно считать практически постоянной по величине и направлению. Складывая элементарные работы  $\Delta A_i$  на каждом из таких участков, можно определить полную работу

$$A_{I,II} = \sum_I \Delta A_i = \sum_I F_i \Delta r_i.$$

Полное изменение потенциальной энергии

$$\sum_I \Delta U_i = U_{II} - U_I$$

будет равно разности потенциальных энергий в конечной ( $U_{II}$ ) и начальной ( $U_I$ ) точках траектории. Учитывая (6.5), мы получаем окончательно, что

$$U_{II} - U_I = -A_{I,II}. \quad (6.6)$$

Приведенный вывод равенства (6.6) нуждается в некоторых дополнениях и оговорках.

Во-первых, не для всяких сил взаимодействия можно определить потенциальную энергию. Из (6.6) следует, что потенциальная энергия в каждой точке имеет вполне определенное значение, лишь если работа  $A_{I,II}$  будет одинаковой вдоль любой траектории, соединяющей начальную точку I с конечной точкой II. Если же величина работы  $A_{I,II}$  зависит не только от положения начальной и конечной точек, а и от формы пути или скорости перехода, то величины  $U_I$  и  $U_{II}$  в (6.6) становятся неопределимыми, и такое поле не обладает определенной потенциальной энергией.

Как мы увидим ниже, поле тяжести и электростатические поля обладают потенциальной энергией. В противоположность этому при наличии сил трения или магнитных взаимодействий силы зависят не только от взаимного расположения, но и от скорости движения взаимодействующих тел, и такое поле не обладает определенными значениями потенциальной энергии.

Второе замечание связано с тем, что по третьему закону динамики (3.8) наряду с силой  $F$ , действующей на точку  $M$ , последняя действует на окружающие тела с суммарной силой  $-F$ . Если оставить точку  $M$  неподвижной, а все взаимодействующие с ней тела переместить в противополо-

ложном направлении на величину  $-\Delta r$ , то будет совершена та же самая работа

$$(-F) \cdot (-\Delta r) = F \cdot \Delta r = \Delta A$$

и потенциальная энергия изменится на ту же самую величину

$$\Delta U = -\Delta A.$$

Таким образом, изменение потенциальной энергии  $\Delta U$  зависит от относительного изменения взаимного расположения взаимодействующих тел. Следовательно, потенциальная энергия  $U$  относится не только к точке  $M$ , но и ко всей системе и представляет собой энергию взаимодействия тел. В частности, если мы рассматриваем потенциальную энергию камня, поднятого на некоторую высоту над земной поверхностью, то потенциальная энергия сил земного притяжения есть энергия взаимодействия камня и Земли. Связывая, как обычно, систему отсчета с Землей, мы будем предполагать Землю неподвижной и условно говорить о потенциальной энергии поднятого камня (по отношению к Земле).

Наконец, следует указать, что формула (6.6) не дает полного определения величины потенциальной энергии в каждой точке, а определяет лишь изменение потенциальной энергии при переходе из одной точки в другую.

Абсолютная же величина  $U$  остается зависящей от выбора начала отсчета потенциальной энергии, т. е. той точки, в которой потенциальная энергия условно полагается равной нулю. Обычно за начало отсчета выбирают такое положение, при котором взаимодействие практически отсутствует, например когда взаимодействующие тела бесконечно удалены друг от друга.

Если изменить начало отсчета, то значения потенциальной энергии во всех точках изменятся на одну и ту же постоянную величину  $C$ , т. е.

$$U = U(r) + C. \quad (6.7)$$

Разности же энергий  $U_{II} - U_I$  при этом остаются неизменными, так как при вычитании произвольная постоянная  $C$ , входящая одинаково в  $U_{II}$  и в  $U_I$ , сокращается.

При движении материальной точки с массой  $m$  в силовом поле будут изменяться и ее кинетическая, и ее потенциальная энергии. Как было найдено в предыдущем параграфе (см. (5.15)), для элементарного перемещения изменение кинетической энергии равно

$$\Delta \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \Delta A. \quad (6.8)$$

Согласно формуле (6.5) изменение потенциальной энергии при том же перемещении равно

$$\Delta U = -\Delta A. \quad (6.9)$$

Складывая выражения (6.8) и (6.9), получим:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) + \Delta U = \Delta\left(\frac{mv^2}{2} + U\right) = 0. \quad (6.10)$$

Но если приращение какой-либо величины равно нулю, то это значит, что сама величина является постоянной:

$$\frac{mv^2}{2} + U = E = \text{const}. \quad (6.11)$$

Величина  $E$ , равная сумме кинетической и потенциальной энергий, называется полной энергией материальной точки. Полученная формула (6.11) является математическим выражением закона сохранения энергии в механике.

При движении тела происходит непрерывное превращение кинетической его энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, так что полная энергия тела остается неизменной. Следовательно, как указывает Энгельс, этот закон не есть просто закон количественного сохранения энергии, а закон сохранения и превращения энергии, выражающий и качественную сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. Движение материи неуничтожимо, но формы этого движения многообразны и постоянно переходят друг в друга.

В дальнейших разделах физики мы познакомимся с другими формами движения — тепловой, электромагнитной, внутриядерной — и с характеризующими их формами энергии. Как показывает весь опыт науки, закон сохранения и превращения энергии является одним из основных законов природы.

Возвращаясь к механике, мы должны дать формулировку закона сохранения энергии для системы многих материальных точек:

*Полная энергия изолированной системы материальных точек, равная сумме кинетических энергий точек и потенциальной энергии их взаимодействия, есть величина постоянная:*

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i,k} U_{i,k} = \text{const}. \quad (6.12)$$

Здесь  $m_i$  — масса  $i$ -й точки,  $v_i$  — ее скорость,  $U_{i,k}$  — потенциальная энергия взаимодействия  $i$ -й и  $k$ -й точек.

Если в системе перемещается лишь одна из точек, то, поскольку изменение потенциальной энергии связано лишь с ее движением, эту потенциальную энергию приписывают ей и закон сохранения энергии имеет вид (6.11).

## § 7. Потенциальная энергия тяготения и упругих деформаций

Вычислим величину потенциальной энергии в двух простейших, но важных для дальнейшего случаях — для тяготения и для упругих деформаций.

Ньютон установил закон всемирного тяготения, изучая законы движения небесных тел. Согласно этому закону материальные точки с массами  $M$  и  $m$ , находящиеся на расстоянии  $r$  друг от друга, притягиваются с силой  $F$ , равной по величине

$$F = \kappa \frac{Mm}{r^2}. \quad (7.1)$$

Здесь  $\kappa$  — гравитационная постоянная, или постоянная тяготения:

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2. \quad (7.2)$$

Земля не является «материальной точкой» для тел, расположенных на ее поверхности. Но, как показывает теория, сила, с которой Земля притягивает тела, расположенные вне ее, численно в точности равна силе, которую создавала бы материальная точка с массой  $M$ , равной массе Земли, и расположенная в центре Земли. В соответствии с законом тяготения на материальную точку с массой  $m$  со стороны Земли будет действовать сила тяжести, равная

$$F_{\text{тяж}} = \kappa \frac{Mm}{R^2}, \quad (7.3)$$

где  $R$  — расстояние от точки  $m$  до центра Земли. При малых перемещениях (порядка нескольких километров от поверхности Земли) изменениями  $R$  можно пренебречь, считая  $R$  постоянной величиной, равной радиусу Земли ( $R_3 = 6370 \text{ км}$ ). Тогда (7.3) можно переписать так:

$$F_{\text{тяж}} = \frac{\kappa M}{R^2} \cdot m = g \cdot m, \quad (7.4)$$

где  $g$  имеет смысл ускорения, с которым движутся под действием силы тяжести все материальные тела у поверхности Земли. Численное значение этого ускорения свободного падения равно примерно

$$g = \frac{\kappa M}{R^2} = 9,8 \text{ м/сек}^2$$

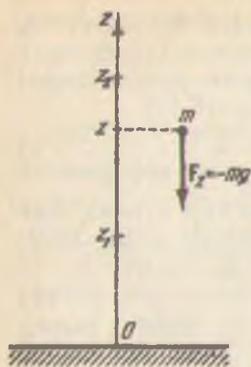


Рис. 1.22.

(в силу несферичности Земли и ее вращения величина  $g$  несколько меняется с изменением географической широты, на чем мы здесь останавливаться не будем).

При перемещении массы  $m$  с одной высоты на другую сила тяжести совершает работу. Следовательно, меняется потенциальная энергия системы Земля — масса  $m$ . Обычно при этом говорят о потенциальной энергии тела  $m$ , однако следует помнить, что здесь, как и в любом другом случае, потенциальная энергия есть энергия взаимодействия Земли и материальной точки массы  $m$ .

Вычислим теперь ее значение для перемещений  $m$  лишь вблизи поверхности Земли, так что высота подъема ничтожна по сравнению с радиусом Земли. В этом случае силу тяготения  $\mathbf{F}_{\text{тяж}}$ , действующую на  $m$  со стороны Земли, можно считать постоянной (не зависящей от высоты) и направленной к центру Земли.

Направим ось  $OZ$  вертикально вверх. В такой системе отсчета сила тяжести  $\mathbf{F}_{\text{тяж}}$  будет иметь составляющую только по оси  $OZ$ , которую мы обозначим через  $F_z$  (рис. 1.22). Напомним еще раз, что эта сила постоянна, т. е. не зависит от  $z$ . По величине она равна

$$F_z = -mg. \quad (7.5)$$

Поднимем точку  $m$  с высоты  $z_1$  на высоту  $z_2$ . При этом сила тяжести совершит работу

$$A_{1,2} = F_z \cdot (z_2 - z_1) = -mg \cdot (z_2 - z_1) = mgz_1 - mgz_2. \quad (7.6)$$

Обозначим потенциальную энергию точки  $m$  на высоте  $z_1$  через  $U_1$ , а на высоте  $z_2$  — через  $U_2$ . Тогда согласно (6.6)

$$A_{1,2} = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2. \quad (7.7)$$

Из (7.6) и (7.7) следует, что

$$U_1 - U_2 = mgz_1 - mgz_2. \quad (7.8)$$

Одно уравнение (7.8) не позволяет определить обе входящие в него неизвестные величины  $U_1$  и  $U_2$ . Поэтому наряду с простейшим решением

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= mgz_1, \\ U_2 &= mgz_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

то уравнение допускает еще бесчисленное множество решений

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= mgz_1 + C, \\ U_2 &= mgz_2 + C, \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

отличающихся от решения (7.9) значением произвольной постоянной  $C$ .

Так как  $z_1$  и  $z_2$  могут быть любыми, то потенциальная энергия поля тяжести  $U(z)$  на заданной высоте  $z$  над уровнем земли согласно (7.10) выражается общей формулой:

$$U(z) = mgz + C. \quad (7.11)$$

Неопределенность численного значения потенциальной энергии связана, как уже отмечалось выше, с тем, что соотношение (6.6) определяет лишь разность потенциальных энергий в двух положениях, но не указывает, в каком из них она равна нулю. Тем самым выбор начала отсчета оказывается произвольным. Если мы условимся отсчитывать потенциальную энергию от уровня земли, т. е. положим, что при  $z=0$  и  $U(0)=0$ , то произвольная постоянная  $C$  в уравнении (7.11) также обратится в нуль.

Вычислим теперь потенциальную энергию в случае упругих деформаций. Рассмотрим тело массы  $m$ , подвешенное на пружине, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с  $m$ . Ось  $OX$  направим вдоль оси пружины, как показано на рис. 1.23. Отсчет перемещений будем вести от положения равновесия тела. Сместим тело из положения равновесия на некоторое расстояние, как это показано пунктиром. При этом пружина растянется на величину  $x$  и в ней возникнет упругая сила  $F_{\text{упр}}$ , стремящаяся возвратить груз в положение равновесия. При небольших деформациях, по закону Гука, проекция этой силы на ось  $OX$  равна

$$F_x = -kx, \quad (7.12)$$

т. е. упругая сила прямо пропорциональна смещению и направлена в обратную сторону (знак минус). При  $x > 0$  (растяжение)  $F_x < 0$ , а при  $x < 0$  (сжатие)  $F_x > 0$ . Коэффициент пропорциональности  $k$  (дин/см, н/м или кг/мм) называется жесткостью пружины и показывает, какую силу надо приложить, чтобы растянуть (или сжать) пружину на единицу длины ( $F=k$  при  $x=1$ ). Сообщим грузу дополнительное бесконечно малое смещение  $\Delta x$ . При этом сила упругости совершит работу  $\Delta A = F_x \cdot \Delta x$  и потенциальная энергия груза изменится на величину  $\Delta U = -\Delta A$ . Тогда согласно (7.12)

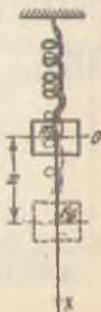


Рис. 1.23.

$$\Delta U = -\Delta A = -F_x \cdot \Delta x = -(-kx) \cdot \Delta x = kx \cdot \Delta x. \quad (7.13)$$

Будем растягивать пружину из положения равновесия ( $x=0$ ) до какого-то конечного смещения  $x$ . Разбивая весь путь на бесконечно малые участки  $\Delta x$  и используя (7.13), найдем изменение потенциальной энергии

$$U(x) - U(0) = \sum_0^x kx \cdot \Delta x. \quad (7.14)$$

Чтобы избавиться от неопределенной постоянной в выражении для потенциальной энергии, выберем начало отсчета в положении равновесия, т. е. положим  $U(0)=0$ . Для вычисления суммы, стоящей в правой части равенства (7.14), применим опять графический метод. На рис. 1.24 по оси абсцисс отложим смещение  $x$ , а по оси ординат — абсолютное значение упругой силы  $|F|=kx$ . Из чертежа видно, что искомая сумма равна площади заштрихованного треугольника, т. е.

$$\sum_0^x kx \cdot \Delta x = \frac{1}{2} kx \cdot x = \frac{0+kx}{2} \cdot x = \bar{F} \cdot x, \quad (7.15)$$

где через  $\bar{F} = \frac{0+kx}{2}$  обозначено среднее значение упругой силы на участке от 0 до  $x$ . Из (7.14) и (7.15) получаем окончательно

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (7.16)$$

Величина  $U$  есть энергия взаимного расположения частей пружины — потенциальная энергия деформированной пружины.

В первом примере сила тяжести была постоянной, и потенциальная энергия росла прямо пропорционально первой степени высоты  $z$ . Во втором же примере мы встречаемся с простейшим случаем переменной силы, когда сила упругости растет прямо пропорционально первой степени смещения. В этом случае потенциальная энергия изменяется быстрее, чем сила, и растет прямо пропорционально квадрату смещения.

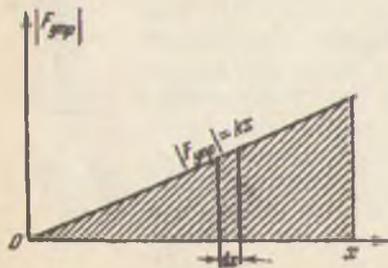


Рис. 1.24.

Выражение (7.16) сим-

метрично относительно знака смещения. При растяжении или сжатии пружины потенциальная энергия деформации возрастает по одному и тому же закону.

Если мы выведем груз, связанный с пружиной, из положения равновесия, то он будет двигаться. В силу закона сохранения энергии при движении груза (при отсутствии трения) сумма кинетической и потенциальной энергий груза будет сохраняться:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.} \quad (7.17)$$

Когда груз проходит через положение равновесия ( $x=0$ ), его потенциальная энергия минимальна и равна нулю, а кинетическая — максимальна и равна полной энергии  $E$ . Через положение равновесия груз будет проходить с максимальной скоростью.

В моменты остановок груза ( $v=0$ ) и изменения направления движения груза на обратное его кинетическая энергия минимальна и равна нулю, а потенциальная — максимальна и равна полной энергии  $E$ . Следовательно, в моменты остановок груза его смещение  $x$  по абсолютной величине будет максимальным.

## § 8. Центральный удар шаров

В предыдущих параграфах мы познакомились с двумя важными законами механики: законом сохранения количества движения и законом сохранения энергии. Разберем конкретный пример, который покажет, как можно пользоваться этими законами сохранения для решения некоторых практически важных задач.

Рассмотрим удар двух шаров, центры которых движутся вдоль одной прямой (рис. 1.25). Шары движутся друг другу навстречу или движущийся позади шар  $m_1$  догоняет передний шар  $m_2$ . В обоих случаях, учитывая знаки скоростей, выполняется соотношение  $v_1 > v_2$ . При этом в некоторый момент времени произойдет удар шаров, называемый (при указанных условиях для центров шаров) центральным ударом.

Рассмотрим сначала идеализированный случай абсолютно упругого удара, при котором не возникает тепла, т. е. сохраняется вся механическая энергия системы.

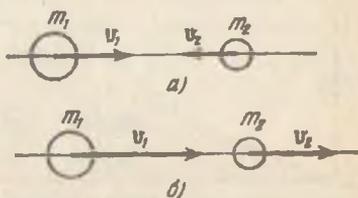


Рис. 1.25.

В данном случае эта энергия складывается только из кинетических энергий шаров, а потенциальная энергия равна нулю (строго говоря, за исключением короткого момента соприкосновения шаров, когда они деформируются; но это, как мы увидим дальше, несущественно).

Для решения задачи о столкновении шаров необходимо, казалось бы, знать, какие силы возникают при столкновении и как эти силы изменяются со временем, что весьма сложно. Однако поставленную задачу можно решить, не прибегая непосредственно к уравнениям динамики и не внося никаких предположений о характере сил, возникающих в процессе самого удара. Это можно сделать, используя законы сохранения.

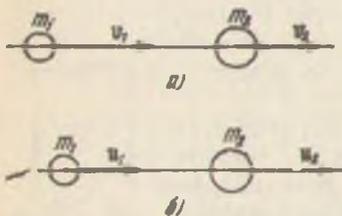


Рис. 1.26.

Обозначим скорости шаров, имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$ , до удара через  $v_1$  и  $v_2$ , а после удара — через  $u_1$  и  $u_2$  соответственно (рис. 1.26). Как  $m_1$  и  $m_2$ , так и  $v_1$  и  $v_2$  заданы. Требуется найти  $u_1$  и  $u_2$ .

Так как удар центральный и движение одномерное, то в дальнейшем символы векторов опущены и все геометрические суммы заменены алгебраическими. При этом положительное значение скорости будет приписываться движению вправо, отрицательное — движению влево.

В применении к рассматриваемой задаче закон сохранения количества движения имеет вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (8.1)$$

т. е. количество движения системы до столкновения должно быть равно количеству движения системы после столкновения.

Аналогично, закон сохранения энергии дает:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad (8.2)$$

Переносим члены, относящиеся к  $m_1$ , влево, а к  $m_2$  — вправо и сокращая (8.2) на 2, получаем вместо (8.2) и (8.1) уравнения

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2), \quad (8.3)$$

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2). \quad (8.4)$$

Разделив почленно первое из этих уравнений на второе, получаем:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2, \quad (8.5)$$

освобождаясь, таким образом, от квадратов в уравнениях. Решая совместно уравнения (8.4) и (8.5), легко находим:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \\ u_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_2 + m_1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Для анализа полученного результата разберем несколько практически важных частных случаев, представляющих интерес для дальнейших разделов курса (молекулярная физика).

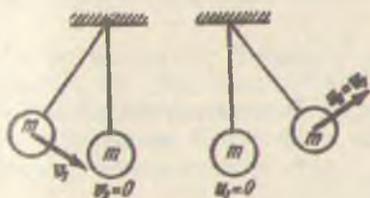


Рис. 1.27

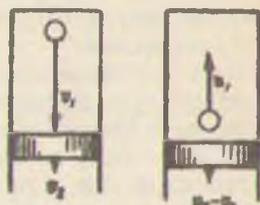


Рис. 1.28.

1. Соударение одинаковых шаров. Тогда  $m_1 = m_2$ , и

$$u_1 = v_2, \text{ а } u_2 = v_1. \quad (8.7)$$

При упругом центральном ударе двух тел одинаковой массы последние просто обмениваются скоростями. Если, в частности, до удара второй шар (рис. 1.27) висел неподвижно ( $v_2 = 0$ ), то после удара остановятся первый шар ( $u_1 = 0$ ), а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара ( $u_2 = v_1$ ).

2. Удар шара о массивную стенку (например, удар молекулы газа о стенку цилиндра или о поверхность поршня). В этом случае  $m_2 \gg m_1$  (рис. 1.28), и на основании (8.6) получим приближенно

$$\left. \begin{aligned} u_1 &\approx -v_1 + 2v_2, \\ u_2 &\approx v_2 + 2\frac{m_1}{m_2}v_1 \approx v_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Как видно из (8.8), скорость массивного тела после удара меняется незначительно. В результате удара стенке передается значительная доля количества движения:

$$m_2 u_2 - m_2 v_2 = 2m_1 v_1,$$

но сравнительно небольшая часть энергии ударяющегося шара. Если стенка была первоначально неподвижной ( $v_2=0$ ), то упруго ударившийся о нее шарик малой массы отскочит обратно практически с той же скоростью ( $u_1 \approx -u_1$ ) и энергией.

При ударе о движущуюся стенку происходит обмен энергией тем больший, чем больше скорость ее движения  $v_2$ . Когда массивный поршень движется навстречу легкому шару (например, при сжатии газа в цилиндре), то  $v_2 < 0$  и согласно (8.8)

$$|u_1| = v_1 + 2|v_2| > v_1.$$

Следовательно, шарик отскакивает назад с большими по величине скоростью и кинетической энергией, чем он имел до столкновения.

Если ударяющийся шарик догоняет уходящий от него поршень (при расширении газа в цилиндре), то  $v_2 > 0$  и согласно (8.8)  $|u_1| = v_1 - 2v_2 < v_1$ . В этом случае шарик отскакивает назад со скоростью и энергией меньшими, чем до столкновения; при ударе часть кинетической энергии шарика передается поршню.

При ударе в зависимости от свойств вещества, из которого состоят шары (медь, сталь, слоновая кость), большая или меньшая часть энергии перейдет в тепло. Тело при этом испытывает необратимую (пластическую) деформацию.

Крайним случаем этого положения является абсолютно неупругий удар (рис. 1.29). При таком ударе шары деформируются, и возникающие между ними силы взаимодействия будут тормозить ударяющийся шар и ускорять ударяемый до тех пор, пока скорости обоих шаров не сравняются. В этот момент суммарная кинетическая энергия обоих шаров уменьшится по сравнению с первоначальным ее значением до удара, так как часть ее будет затрачена на преодоление сопротивлений и перейдет в различные другие формы энергии (тепло, энергию пластических деформаций и т. д.).

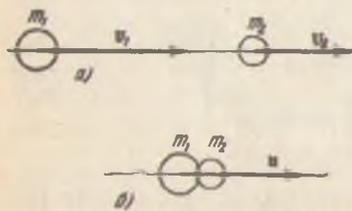


Рис. 1.29.

При полном отсутствии упругих деформаций процесс удара на этом заканчивается, взаимодействие шаров прекращается, и оба шара будут продолжать двигаться далее совместно с одной и той же скоростью  $u$ . Для определения скорости после удара достаточно

одного уравнения, даваемого законом сохранения количества движения:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u, \quad (8.9)$$

откуда

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.10)$$

Легко вычислить потерю системой механической энергии  $E'$ , перешедшей в тепло и другие формы энергии. Она равна разности энергий до и после удара:

$$E' = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}. \quad (8.11)$$

Подставляя сюда значение  $u$  из (8.10), легко находим:

$$E' = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot (v_1 - v_2)^2. \quad (8.12)$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ( $v_2 = 0$ ), то

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \quad (8.13)$$

и

$$E' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (8.14)$$

Когда неподвижное тело имеет очень большую массу ( $m_2 \gg m_1$ ), то  $u \ll v_1$  и почти вся кинетическая энергия ударяющегося тела при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому в кузницах делают массивные наковальни, чтобы большая часть кинетической энергии молота затрачивалась на необратимую деформацию поковки. Наоборот, при забивании гвоздей или свай целесообразно иметь большую массу молота ( $m_1 \gg m_2$ ), так как тогда  $u \approx v_1$  и практически вся энергия удара затрачивается на преодоление сопротивления стены или грунта, а не на остаточную деформацию ударяемого тела.

Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары являются идеальными предельными случаями. При соударении реальных тел всегда имеют место и упругие, и остаточные деформации, и поэтому удар будет частично неупругим. При абсолютно упругом ударе согласно (8.5)

$$u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2), \quad (8.15)$$

т. е. относительная скорость шаров после удара равна по

величине и направлена противоположно их относительной скорости до удара. При абсолютно неупругом ударе эта относительная скорость после удара равна нулю, так как  $u_1 = u_2 = u$ . При частично неупругом ударе относительная скорость после удара равна некоторой доле относительной скорости до удара:

$$u_1 - u_2 = -\varepsilon \cdot (v_1 - v_2), \quad (8.16)$$

где  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ) есть так называемый коэффициент восстановления относительной скорости при ударе. При ударе стальных шаров  $\varepsilon = 0,56$ , для шаров из слоновой кости  $\varepsilon = 0,89$ , для свинца  $\varepsilon$  близко к нулю.

Следующие разделы механики, с которыми нам предстоит познакомиться, основаны на применении к различным частным вопросам (вращательное движение, механика жидких и газообразных сред) рассмотренных выше общих законов механики. Поэтому раньше, чем перейти к ним, мы обсудим границы применимости этих законов.

## § 9. Границы применимости законов классической механики

Три вышеизложенных закона динамики обобщают человеческий опыт изучения движения больших — макроскопических («микрос» по-гречески — маленький, а «макрос» — большой) тел при не слишком больших скоростях движения. Многочисленные следствия и конкретные выводы из этих законов неизменно подтверждаются на практике (расчет движения машин, снарядов, небесных тел, обладающих скоростями в десятки километров в секунду и т. д.).

В целом механика небыстрых макроскопических движений, базирующаяся на своих законах и располагающая своими методами, имеет стройную, законченную форму и носит название классической механики.

Широкий охват опытного материала, отсутствие противоречий с наблюдениями привели многих исследователей XIX века к ложной мысли об абсолютной правильности и универсальности классической механики.

Однако в конце XIX и начале XX веков были обнаружены явления, которые оказалось невозможным понять в рамках законов классической механики. В связи с этим началось изучение движения и взаимодействия микроскопических частиц материи — атомов и электронов. Широкое развитие электротехники дало возможность физикам разгонять заряженные электроны в сильных электрических полях до очень больших скоростей, во много раз превысивших и скорости по-

лета снарядов на земле, и наблюдаемые скорости движения небесных тел. Изучение строения атомов показало, что внутри последних электроны также движутся с огромными скоростями порядка десятков и сотен тысяч километров в секунду.

К началу XX века стало очевидным, что законы классической механики являются лишь приближением к действительности, не отражающим целого ряда новых, ранее неизвестных явлений. Для установления границ применимости законов классической механики рассмотрим вкратце некоторые новые факты, установленные за последние 50—60 лет.

В классической механике принималось, что масса тела  $m$ , характеризующая количество материи, заключенное в теле, его инерцию и тяготение, есть неизменная величина ( $m = \text{const}$ ). В конце XIX века было экспериментально установлено, что масса быстро движущегося электрона  $m$  превышает массу покоящегося электрона  $m_0$  и возрастает со скоростью движения  $v$  по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (9.1)$$

где  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек  $= 3 \cdot 10^8$  м/сек — скорость распространения света в вакууме.

Формула (9.1) оказалась справедливой не только для электрона, но и для других материальных частиц. Она дает критерий для оценки границ применимости классической механики.

Пусть  $v$  равно 300 км/сек, т. е.  $\frac{v}{c} = 0,001$ . Тогда масса движущегося тела  $m$  будет превышать массу покоя  $m_0$  всего на  $0,5 \cdot 10^{-6} m_0$ . При этой скорости масса 1 кг увеличится всего на 0,5 мг. Следовательно, при скоростях, малых по сравнению со скоростью света (а такими будут скорости даже в несколько сотен километров в секунду), истинная масса тела  $m$  практически не отличается от его массы покоя  $m_0$  и может считаться постоянной. Это значит, что при таких скоростях законы классической механики остаются с высокой степенью точности справедливыми, и ими можно пользоваться для расчета движения обычных машин и механизмов, полета снарядов и движения небесных тел.

Таким образом, условие

$$\left| v \ll c \right| \quad (9.2)$$

дает количественную оценку скоростей движений, для которых еще применимы законы классической механики.

Отказ от одного из основных положений классической механики ( $m = \text{const}$ ) привел к необходимости критического анализа и ряда других ее основ. Такой пересмотр основных представлений о пространстве и времени был произведен в 1905 г. А. Эйнштейном, создавшим новую теорию, названную им теорией относительности.

В этой теории выражение (9.1) вытекает как следствие ее основных постулатов.

Проанализируем причину возрастания массы движущегося тела. При малых скоростях движения  $v \ll c$ , и формулу (9.1) можно преобразовать с помощью бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} m &= m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \dots\right] = \\ &= m_0 + \frac{m_0 v^2}{c^2} + \dots \approx m_0 + \frac{T}{c^2} \end{aligned} \quad (9.3)$$

(члены ряда, содержащие  $(v/c)$  в четвертой и более высоких степенях, отброшены ввиду их малости).

Таким образом, увеличение массы связано с тем, что тело приобрело кинетическую энергию. Приращение массы  $m - m_0 = \Delta m$  прямо пропорционально кинетической энергии:

$$\Delta m = \frac{T}{c^2}, \text{ или } T = c^2 \cdot \Delta m. \quad (9.4)$$

Установленная, таким образом, взаимосвязь (9.4) между массой и энергией является совершенно универсальной, т. е. применимой к любым массам и формам энергии — кинетической и потенциальной. Так, например, если две частицы с массами покоя  $m_{1,0}$  и  $m_{2,0}$  при сближении друг с другом на некоторое расстояние взаимодействуют так, что их потенциальная энергия равна  $U$ , то масса всей системы  $M$  будет равна

$$M = m_{1,0} + m_{2,0} + \frac{U}{c^2}. \quad (9.5)$$

При взаимном отталкивании частиц  $U > 0$  и добавка к массам покоя  $U/c^2$  положительна. При взаимном притяжении частиц  $U < 0$  и масса системы меньше суммы масс составляющих ее невзаимодействующих ( $U = 0$ ) частиц.

Умножая (9.3) на  $c^2$ , получим:

$$m c^2 = m_0 c^2 + T = E_0 + T = E.$$

Равенство

$$E = mc^2 \quad (9.6)$$

представляет собой количественную формулировку закона взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии, справедливого для любых тел. Величина

$$E_0 = m_0c^2 \quad (9.7)$$

есть энергия, внутренне присущая частице, и называется собственной энергией, или «энергией покоя» частицы. Классическая механика эту величину  $E_0$  не учитывала вовсе, считая, что при  $v=0$  энергия покоящегося тела равна нулю.

Сопоставляя соотношения (9.1), (9.6) и (9.7), мы видим, что при больших скоростях точное выражение для кинетической энергии движущегося тела,

$$T = E - E_0 = m_0c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\}, \quad (9.8)$$

имеет довольно сложный вид и лишь в предельном случае скоростей, малых по сравнению со скоростью света, переходит в классическую формулу  $T = \frac{m_0v^2}{2}$ .

Из (9.1) и (9.8) следует, что ни одно тело с массой покоя  $m_0$ , отличной от нуля, не может достигнуть скорости света.

При  $v \rightarrow c$  стоящее в знаменателе выражение  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  стремится к нулю, а следовательно, масса тела  $m$  и его энергия  $E$  (и  $T$ ) стремятся к бесконечности. Иными словами, для доведения скорости такого тела до скорости света ему потребовалось бы сообщить бесконечно большую кинетическую энергию.

Подробнее о теории относительности, ее основных положениях и выводах будет сказано в третьем томе курса (т. III гл. VIII). Там же (т. III гл. XIII) будут указаны границы применимости классической механики, обусловленные волновой природой элементарных частиц.

ГЛАВА III  
ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ  
НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

§ 10. Кинематика вращательного движения

Наиболее общие случаи вращательного движения — вращение свободного тела или тела, закрепленного в одной точке, — весьма сложны и детально рассматриваются в курсах теоретической механики.

Для установления основных закономерностей вращательного движения мы рассмотрим здесь простейший случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

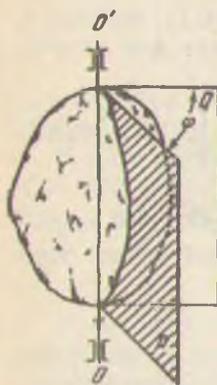


Рис. 1.30.

Назовем абсолютно твердым телом такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого во время движения остается неизменным. (Здесь мы опять вводим абстракцию, позволяющую отвлечься от несущественных для рассматриваемого явления деталей — малых деформаций реальных твердых тел).

Рассмотрим абсолютно твердое тело с закрепленной осью  $O'O$ , изображенное на рис. 1.30. Выберем для определенности положительное направление этой оси от точки  $O'$  к точке  $O$ , т. е. вниз, как это показано на рисунке стрелкой. Проведем через эту ось две плоскости:  $Q$  и  $P$ . Неподвижная плоскость  $Q$  будет являться телом отсчета. Подвижная же плоскость  $P$  скреплена с телом и вращается вместе с ним. Мгновенное положение этой плоскости будет характеризоваться величиной двугранного угла  $\varphi$ , который она составляет с неподвижной плоскостью  $Q$ . Задание одного числа — угла поворота  $\varphi$  в этом случае целиком определяет расположение (ориентацию) тела; тело, вращаю-

нется вокруг неподвижной оси, имеет лишь одну степень свободы.

Условимся при этом угол  $\varphi$  считать положительным, если вращение происходит по направлению правого винта относительно оси  $O'O$ . Иными словами, при наблюдении вдоль оси сверху угол  $\varphi$  отсчитывается по часовой стрелке. При вращении на несколько оборотов угол  $\varphi$  окажется кратным  $2\pi$ . При вращении в обратном направлении угол  $\varphi$  будет отрицательным.

Изменение угла поворота со временем

$$\varphi = \varphi(t) \quad (10.1)$$

зависит от характера вращательного движения тела; (10.1) называется уравнением вращательного движения тела.

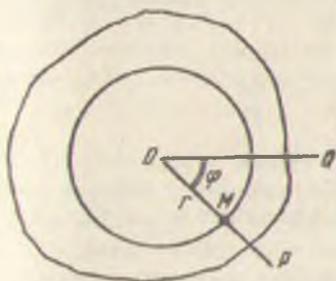


Рис. 1.31.

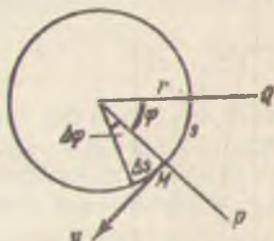


Рис. 1.32.

При вращении всего твердого тела в целом отдельные его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения. Действительно, рассмотрим произвольную точку  $M$  (рис. 1.31), находящуюся на расстоянии  $r$  от оси вращения. Для абсолютно твердого тела это расстояние будет оставаться неизменным во все время движения и точка  $M$  будет двигаться по окружности постоянного радиуса

$$r = \text{const} \quad (10.2)$$

с центром на оси вращения  $O'O$ . Для разных точек вращающегося тела величина  $r$  может быть различной.

Кинематические характеристики различных движущихся точек (путь, скорость, ускорение) связаны друг с другом и с кинематическими характеристиками движения всего тела в целом. Рассмотрим произвольную точку  $M$ , лежащую в подвижной плоскости  $P$ . Угол поворота всего тела  $\varphi$  и путь  $s$ , пройденный точкой  $M$ , будем отсчитывать от неподвижной

плоскости  $Q$ , как указывалось выше, по часовой стрелки (рис. 1.32). Если  $\varphi$  измерять в радианах, то  $s$  и  $\varphi$  связаны известным равенством

$$s = r \cdot \varphi. \quad (10.3)$$

За промежуток времени  $\Delta t$  тело повернется на угол  $\Delta\varphi$  и точка  $M$  пройдет путь

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi. \quad (10.4)$$

Разделив обе части равенства (10.4) на  $\Delta t$  и переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (10.5)$$

Величина  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$  представляет согласно (2.3) абсолютную величину линейной скорости движения точки  $M$ . По аналогии с этим величина

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (10.6)$$

характеризующая быстроту изменения угла поворота, называется угловой скоростью вращения тела. Угловая скорость измеряется в радианах в секунду, а в технике — в оборотах в минуту:

$$1 \text{ об/мин} = \frac{2\pi \text{ рад}}{60 \text{ сек}} = \frac{\pi \text{ рад}}{30 \text{ сек}}.$$

Из (10.5) и (10.6) следует, что

$$v = r \cdot \omega. \quad (10.7)$$

При неравномерном вращении величина  $\omega$  меняется со временем и за промежуток времени  $\Delta t$  получает приращение  $\Delta\omega$ ; при этом линейная скорость произвольной точки  $M$  также получает численное приращение  $\Delta v$ , равное

$$\Delta v = \Delta(r \cdot \omega) = r \cdot \Delta\omega \quad (10.8)$$

(так как  $r$  для любой фиксированной точки есть величина постоянная). Разделив обе части этого равенства на  $\Delta t$  и переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (10.9)$$

Согласно (2.11)  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \omega_k$  называется касательным, или линейным ускорением движущейся точки.

По аналогии с этим величина

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \quad (10.10)$$

характеризующая быстроту изменения во времени угловой скорости, называется угловым ускорением всего вращающегося тела. В системах единиц СГС и СИ угловое ускорение измеряется в *рад/сек<sup>2</sup>*. Из уравнений (10.9) и (10.10) следует, что

$$\omega_k = r \cdot \varepsilon. \quad (10.11)$$

Равенства (10.3), (10.7) и (10.11) показывают, что линейные величины ( $s$ ,  $v$ ,  $\omega_k$ ), характеризующие движение отдельной точки  $M$ , получаются из соответственных угловых величин ( $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$ ), характеризующих движение всего тела как целого, простым умножением на радиус вращения  $r$ .

*При вращательном движении точки  $M$  ее скорость  $v$  направлена по касательной к траектории и непрерывно меняет свое направление.* Быстрота изменения направления скорости характеризуется нормальным ускорением  $w_n$ . Согласно (2.17)

$$w_n = \frac{v^2}{r}, \quad (10.12)$$

так как радиус кривизны траектории точки  $M$  остается постоянным ( $R = r$ ).

На первый взгляд нормальное ускорение точек твердого тела убывает обратно пропорционально расстоянию до оси вращения. Однако не надо забывать, что по мере удаления от оси  $v$  также возрастает. Подставляя (10.7) в (10.12), получим:

$$w_n = \omega^2 \cdot r. \quad (10.13)$$

Так как  $\omega$  одинакова для всех точек тела, то, следовательно, центростремительное ускорение растет с удалением от оси. Чтобы заставить вращаться с той же самой угловой скоростью более удаленные от оси точки маховика, необходимо сообщить им большее центростремительное ускорение и приложить для этого большую центростремительную силу. По третьему закону динамики эти точки будут действовать на удерживающие их связи (спицы маховика) с такой же по величине центробежной силой, величина которой, как следует из (10.13), прямо пропорциональна радиусу вращения и квадрату угловой скорости.

Согласно (2.18) и (2.19) вектор полного ускорения точки  $M$  равен

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_n, \quad (10.14)$$

а его величина

$$\omega = \sqrt{\omega_k^2 + \omega_n^2} = \sqrt{r^2 \varepsilon^2 + r^2 \omega^4} = r \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (10.15)$$

При равномерном вращении твердого тела

$$\varepsilon = 0, \quad \omega = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (10.16)$$

При равноускоренном вращении

$$\varepsilon = \text{const}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (10.17)$$

### § 11. Динамика вращения

Чтобы твердое тело с закрепленной осью привести во вращательное движение, необходимо хотя бы в одной из его точек приложить внешнюю силу  $\mathbf{F}$ , не проходящую через ось вращения и не параллельную ей. Рассмотрим простейший случай, когда сила  $\mathbf{F}$  лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. При этом вращательное действие силы  $\mathbf{F}$  определяется не только величиной силы  $F$ , но и расстоянием ее линии действия от оси вращения, так называемым плечом  $p$ . По известному правилу рычага действие силы  $\mathbf{F}$  можно уравновесить действием силы  $\mathbf{F}'$ , вращающей тело в противоположном направлении (рис. 1.33), если выполнено условие

$$F \cdot p = F' \cdot p'. \quad (11.1)$$

Произведение величины силы на плечо

$$M = F \cdot p = F \cdot r \cdot \sin \alpha = r \cdot F \cdot \sin(\widehat{r, \mathbf{F}}) = r \cdot F_k \quad (11.2)$$

носит название вращательного момента, или момента силы относительно оси вращения. Здесь, как видно из чертежа,  $r$  есть расстояние от точки приложения силы до оси вращения, а  $F_k = F \cdot \sin(\widehat{r, \mathbf{F}})$  — проекция силы на направление касательной к траектории движения точки ее приложения.

Угол  $\alpha = (\widehat{r, \mathbf{F}})$  и момент силы имеют знак. Если сила вращает тело по часовой стрелке (правый винт по отношению к оси  $O'O$ ), то мы

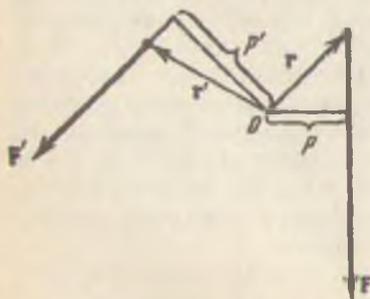


Рис. 1.33.

будем считать ее момент положительным, если же она вращает тело против часовой стрелки — отрицательным\*.

В частном случае, когда  $\alpha=0$ , линия действия силы пересекает ось и  $M=0$ . Такая сила будет уравниваться реакциями подшипников (см. рис. 1.30) и не вызовет вращения.

Для сил  $F$  и  $F'$ , изображенных на рис. 1.33, моменты относительно оси соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} M &= F \cdot \rho, \\ M' &= -F' \cdot \rho'. \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Тогда условие равновесия (11.1) принимает вид

$$M + M' = F \cdot \rho - F' \cdot \rho' = 0. \quad (11.4)$$

Иными словами, действующие на тело силы  $F$  и  $F'$  не вызывают вращения, если их моменты  $M$  и  $M'$  взаимно уравниваются, т. е. равны по величине и обратны по знаку.

Если на тело, закрепленное на оси, действует несколько сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , то суммарное их действие будет эквивалентно действию одного момента  $M$ , равного алгебраической сумме моментов всех действующих сил:

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} M_i = \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot F_i \cdot \sin \alpha_i. \quad (11.5)$$

Перейдем теперь к выводу уравнения движения тела, имеющего закрепленную в пространстве ось вращения. Для этого мысленно разобьем тело на совокупность отдельных точек с массами  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$ . Каждая из этих точек находится на расстоянии от оси вращения, равно соответственно  $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ . На точку с индексом  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) действует в данный момент некоторая сила  $F_i$ , которая представляет собой равнодействующую всех приложенных к этой точке внешних и внутренних сил,

$$F_i = F_i^{\text{внешн}} + F_i^{\text{внутр}}. \quad (11.6)$$

Внешние силы обычно приложены лишь в некоторых определенных точках тела, и для всех остальных точек  $F_i^{\text{внешн}}=0$ . Внутренние же силы взаимодействия, удерживающие точки твердого тела на определенных расстояниях друг от друга, приложены к каждой точке вращающегося тела.

\* Момент силы есть вектор. Рассматриваемый нами здесь момент силы относительно оси есть проекция этого вектора на ось вращения.

По второму закону динамики ускорение данной точки связано с силой соотношением

$$F_i = m_i \cdot w_i. \quad (11.7)$$

Точка тела с массой  $m_i$  движется по окружности радиуса  $r_i$ . Спроецируем векторы  $F_i$  и  $w_i$  (11.7) на направление касательной к траектории точки. Тогда, учитывая (10.11), найдем:

$$F_{i, \kappa} = m_i \cdot w_{i, \kappa} = m_i r_i \varepsilon. \quad (11.8)$$

Умножив обе части этого равенства на  $r_i$  и подставив в (11.2), получим:

$$M_i = m_i r_i^2 \varepsilon, \quad (11.9)$$

где  $M_i$  есть момент действующей на данную точку тела силы  $F_i$  относительно оси вращения. Поскольку согласно (11.6) сила  $F_i$  есть геометрическая сумма двух сил, то по правилам векторного исчисления ее момент равен алгебраической сумме моментов внешней и внутренней сил, действующих на  $i$ -ю точку,

$$M_i = M_i^{\text{внешн}} + M_i^{\text{внутр}}. \quad (11.10)$$

Тогда

$$M_i^{\text{внешн}} + M_i^{\text{внутр}} = m_i r_i^2 \varepsilon. \quad (11.11)$$

Уравнения (11.11) справедливы для каждой точки тела. Просуммируем эти уравнения для всех точек вращающегося тела:

$$\sum_i M_i^{\text{внешн}} + \sum_i M_i^{\text{внутр}} = \varepsilon \cdot \sum_i m_i r_i^2. \quad (11.12)$$

По третьему закону динамики каждой внутренней силе в системе всегда соответствует сила, равная ей по величине и обратно направленная по той же прямой. Моменты этих сил попарно равны по величине и обратны по знаку. Поэтому очевидно, что алгебраическая сумма моментов всех внутренних сил равна нулю:

$$\sum_i M_i^{\text{внутр}} = 0. \quad (11.13)$$

Алгебраическую сумму моментов всех внешних сил, действующих на тело, назовем полным моментом внешних сил и обозначим

$$M^{\text{внешн}} = \sum_i M_i^{\text{внешн}}. \quad (11.14)$$

В правую часть уравнения (11.12) входит сумма

$$\sum_i m_i r_i^2 = I, \quad (11.15)$$

которая носит название момента инерции тела относительно заданной оси вращения. Момент инерции тела  $I$  численно равен сумме произведений масс всех его точек на квадраты их расстояний до оси вращения. Величина момента инерции зависит не только от массы всего тела и ее распределения в теле, но также от его ориентации относительно оси вращения.

При введенных обозначениях уравнение (11.12) принимает вид:

$$\left| M^{\text{внешн}} = I \cdot \varepsilon. \right| \quad (11.16)$$

Уравнение (11.16) позволяет найти угловое ускорение вращающегося тела  $\varepsilon$  по известному моменту внешних сил и выражает второй закон динамики для вращательного движения. Это уравнение аналогично второму закону динамики (3.7) для поступательного движения:

$$F = m \cdot w.$$

Сопоставляя (11.16) и (3.7), мы видим, что при вращательном движении роль силы играет момент силы  $M$ , роль ускорения играет угловое ускорение  $\varepsilon$ , а роль массы играет момент инерции  $I$ . Последний характеризует инерцию тела при вращательном движении: чем больше  $I$ , тем меньше угловое ускорение  $\varepsilon$  получит тело под действием данного момента внешних сил  $M^{\text{внешн}}$ .

Если рассматриваемое тело представляет собой обруч массы  $m$ , толщина которого мала по сравнению с радиусом  $R$ , то момент его инерции относительно оси, проходящей через центр и перпендикулярной к плоскости обруча, равен

$$I_{\text{обр}} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i R^2 = R^2 \cdot \sum_i m_i = mR^2.$$

Для тел более сложной формы суммирование выражения (11.15) производится методами интегрального исчисления. Так, например, для сплошного диска или сплошного цилиндра момент инерции относительно оси цилиндра равен

$$I_{\text{цил}} = \frac{1}{2} mR^2.$$

Момент инерции тонкого цилиндра (стержня) высотой  $h$  относительно оси, проходящей через его центр и перпенди-

кулярной к стержню, равен

$$I_{\text{ст}} = \frac{1}{12} m h^2.$$

Для решения практических задач динамики вращательного движения можно получить ряд важных следствий из основного уравнения (11.16). Используя определение (10.10), перепишем (11.16) в виде

$$M^{\text{внешн}} = I \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad (11.17)$$

где  $M^{\text{внешн}}$  — среднее значение момента внешних сил за бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$ . Умножим обе части равенства на  $\Delta t$ . Тогда

$$M^{\text{внешн}} \cdot \Delta t = I \cdot \Delta \omega = I \omega_2 - I \omega_1,$$

или

$$M^{\text{внешн}} \cdot \Delta t = \Delta (I \cdot \omega). \quad (11.18)$$

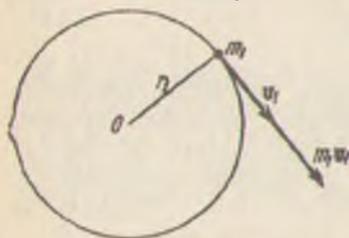


Рис. 1.34.

Для выяснения физического смысла величины  $I \omega$  вернемся к рассмотрению движения отдельных точек вращающегося тела.

Каждая из этих точек с массой  $m_i$  движется по окружности постоянного радиуса  $r_i$  (рис. 1.34). Ее скорость в данный момент времени  $v_i$  и вектор количества движения  $m_i v_i$  перпендикулярны к этому радиусу. Таким образом, радиус  $r_i$  является плечом по отношению к  $m_i v_i$ , и мы можем (аналогично моменту силы) ввести понятие момента количества движения точки

$$L_i = m_i v_i r_i \quad (11.19)$$

как произведения величины вектора количества движения на его плечо относительно оси вращения.

Алгебраическая сумма моментов количества движения всех точек вращающегося твердого тела носит название момента количества движения тела относительно оси:

$$L = \sum_i L_i \quad (11.20)$$

Подставляя в (11.20) выражение для  $L_i$  из (11.19) и используя (10.7), получаем, что

$$L = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_i m_i r_i^2 = I \omega, \quad (11.21)$$

т е. величина  $I\omega$  есть момент количества движения вращающегося тела. Стоящее в левой части равенства (11.18) произведение момента сил на время его действия называется импульсом момента внешних сил. Уравнение (11.18) выражает так называемый закон момента количества движения: *Импульс момента внешних сил, действующих на вращающееся тело, равен изменению его момента количества движения.*

Если внешние силы отсутствуют (замкнутая система) или таковы, что их суммарный момент равен нулю ( $M^{\text{внешн}} = 0$ ), то (11.18) принимает вид так называемого закона сохранения момента количества движения

$$I\omega = \text{const.} \quad (11.22)$$

Например, Земля вращается вокруг своей оси, совершая один оборот за 24 часа. На Землю действует внешняя сила — суммарная сила притяжения отдельных ее точек к Солнцу. Эта результирующая сила приложена к центру Земли и проходит через ось вращения (рис. 1.35). Плечо и момент этой силы, следовательно, равны нулю.

Поэтому момент количества движения Земли остается постоянным. Если бы момент инерции Земли не менялся ( $I = \text{const}$ ), то отсюда следовало бы постоянство угловой скорости вращения Земли ( $\omega = \text{const}$ ) и продолжительности суток. Практически вследствие непрерывного падения на Землю метеоритов масса и момент инерции Земли медленно возрастают и угловая скорость ее, в силу указанной и других причин, уменьшается так, что продолжительность суток возрастает примерно на 0,57 сек за столетие. Поэтому в

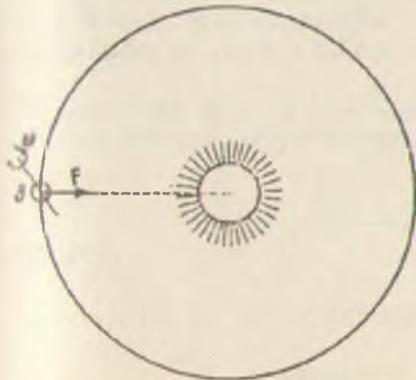


Рис. 1.35.



Рис. 1.36.

системе СИ единица времени — секунда определяется из продолжительности более устойчивого процесса — обращения Земли вокруг Солнца.

Закон сохранения момента количества движения используется цирковыми артистами. Например, акробат, переворачиваясь, наклоняется и сгибает колени. При этом момент его инерции убывает, а угловая скорость вращения соответственно увеличивается.

В демонстрационном опыте на лекциях по физике экспериментатор становится на горизонтальную «скамью Жуковского», которая может вращаться относительно вертикальной оси с малым трением. Он берет велосипедное колесо, быстро вращающееся вокруг вертикальной оси, например, по часовой стрелке (рис. 1.36, а). Если он резко переворачивает колесо, как это изображено на рис. 1.36, б, то знак момента количества движения колеса  $I_k \omega_k$  изменяется на обратный ( $-I_k \omega_k$ ). Поскольку поворот колеса совершается под действием внутренних сил, то полный момент количества движения системы должен по (11.22) оставаться постоянным. Действие закона сохранения момента количества движения проявляется в том, что вся система (человек — скамья) начинает вращаться в ту же сторону, в которую первоначально вращалось колесо.

Закон сохранения момента количества движения выполняется и в более сложном случае тела с незакрепленной осью. Если твердое тело вращается с большим моментом количества движения относительно оси, совпадающей с осью геометрической симметрии тела, то для заметного изменения ориентации оси вращения в пространстве оказывается необходимым прикладывать очень большие внешние силы.

Это свойство вращательного движения широко применяется в различных волчках, от маленькой игрушечной юлы до больших современных гироскопов, ослабляющих качку корабля.

*Кинетическая энергия вращающегося тела представляет собой алгебраическую сумму кинетических энергий отдельных его точек, т. е.*

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

*Работа внешней силы при вращении*

$$\Delta A = F_{i, \kappa} \Delta s = F_{i, \kappa} r_i \Delta \varphi = M_i \Delta \varphi, \quad (11.24)$$

т. е. равна произведению момента силы на угол поворота тела. Эта работа затрачивается на увеличение кинетической энергии вращающегося тела

$$\Delta A = \frac{I\omega_{\text{кон}}^2}{2} - \frac{I\omega_{\text{нач}}^2}{2} \quad (11.25)$$

В случае, если тело движется поступательно со скоростью  $v$  и одновременно вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью  $\omega$ , то полная кинетическая энергия его движения равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (11.26)$$

Из рассмотрения (11.26) мы еще раз убеждаемся, что момент инерции при вращательном движении играет такую же роль, как масса материальной точки при поступательном ее движении.

## ГЛАВА IV

### (1) ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ (ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРО- И АЭРОДИНАМИКИ)

#### § 12. Уравнение Д. Бернулли

Рассмотрим применение основных законов динамики к простейшим случаям движения жидкости. Под понятием жидкость в настоящем параграфе мы будем объединять и собственно жидкости (воду, спирт, ртуть и другие тела в жидком агрегатном состоянии), и газы. Общим для обоих случаев является то, что в отличие от твердого тела отдельные частицы жидкости могут перемещаться друг относительно друга, и жидкость, помещенная в какой-либо сосуд, заполняет его и принимает форму сосуда.

Ограничимся простейшим случаем движения жидкости, когда выполняются следующие три условия.

1. Жидкость несжимаема, т. е. плотность  $\rho$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ) отдельных движущихся элементов объема жидкости остается во все время движения постоянной.

Для жидкостей подобное приближение вполне естественно, так как их сжимаемость очень невелика. Например, для увеличения плотности жидкой воды, находящейся при комнатной температуре на 1 % необходимо приложить давление около 200 атм. При таком давлении струя воды, вылетающая из резервуара в атмосферу, будет иметь начальную скорость порядка 200 м/сек.

В противоположность жидкостям газы сжимаются легко, и их плотность прямо пропорциональна давлению. Благодаря малому значению плотности для приведения газа в движение достаточно очень малого изменения давления, а следовательно, и плотности газа. Например, чтобы воздух проходил через вентилятор со скоростью 10 м/сек, достаточно создать разрежение порядка 1 мм ртутного столба, т. е. почти  $10^{-3}$  атм. Следовательно, и плотность воздуха при таких скоростях изменится всего лишь на  $10^{-3}$  от своей величины, т. е. на 0,1 %.

Теория и опыт показывают, что сжимаемостью жидкости или газа можно пренебрегать и с достаточной степенью точности пользоваться понятием несжимаемой жидкости при условии, что скорости их движения малы по сравнению со скоростью распространения звука. Скорость звука в воздухе  $v_{зв} = 333 \text{ м/сек} \approx 1200 \text{ км/ч}$ . Поэтому обычно при изучении сопротивления воздуха движению тел (автомобиля, поезда или легкого самолета, движущегося со скоростью  $200 \text{ км/ч}$ ) можно считать воздух практически несжимаемым. Однако для современных реактивных самолетов, скорости которых достигают и превышают скорость звука, пренебрегать сжимаемостью воздуха уже нельзя.

Таким образом, мы приходим к выводу, что понятие «несжимаемости» характеризует не столько свойства самой жидкости при отсутствии движения, сколько свойства данного движения. И жидкости, и газы при движении практически несжимаемы, когда

$$v_{\text{движ}} \ll v_{\text{зв}}. \quad (12.1)$$

2. Жидкость идеальна, т. е. отдельные элементы жидкости движутся друг относительно друга без трения. Справедливость подобного пренебрежения трением также зависит от характера изучаемого движения. При движении реальной жидкости или газа внутри нее всегда возникают силы вязкости. Мы будем называть жидкость идеальной тогда, когда во время ее движения можно пренебречь силами внутреннего трения по сравнению с другими силами, действующими в жидкости (силами тяжести, давления и т. п.). В этих случаях потери энергии движения на трение и переход в тепло незначительны и можно применять закон сохранения энергии в чисто механической форме (6.11).

3. Движение жидкости установившееся. Если внешние силы, вызывающие движение жидкости, не зависят от времени, то через некоторое время после начала движения в жидкости установится вполне определенное распределение скоростей. При этом скорость движения каждой частицы жидкости может изменяться от точки к точке вдоль ее траектории. Однако в каждой данной точке пространства скорости движения всех последовательно проходящих через нее частиц жидкости будут одинаковыми. Такое движение жидкости в данной ограниченной части пространства и называется установившимся.

В 1738 г. Д. Бернулли вывел очень важное соотношение для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости, носящее название уравнения Бернулли.

Для вывода этого уравнения рассмотрим жидкость, движущуюся по трубе переменного сечения (рис. 1.37). Жидкость вытекает слева в сечение 1 площадью  $S_1$ , находящееся на высоте  $z_1$  над уровнем земли. Скорость вытекающих частиц жидкости перпендикулярна к сечению трубы и равна  $v_1$ , давление в жидкости при входе в трубу равно  $p_1$ .

Через сечение 2 площадью  $S_2$ , находящееся на высоте  $z_2$  над уровнем земли, жидкость вытекает из трубы со скоростью  $v_2$ ; давление в жидкости на выходе из трубы равно  $p_2$ . Жидкость течет через трубу под действием разности приложенных извне давлений  $p_1 - p_2$  или разности уровней  $z_1 - z_2$ ,

приводящей к гидростатическому давлению соответствующего столба жидкости, или того и другого вместе.

За бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$  через сечение 1 вытекает масса жидкости  $\Delta m$ , заполняющая цилиндр с площадью основания  $S_1$  и высотой  $v_1 \Delta t$  (заштрихованный на рис. 1.37). За тот же промежуток времени через сечение 2 вытечет такая же масса

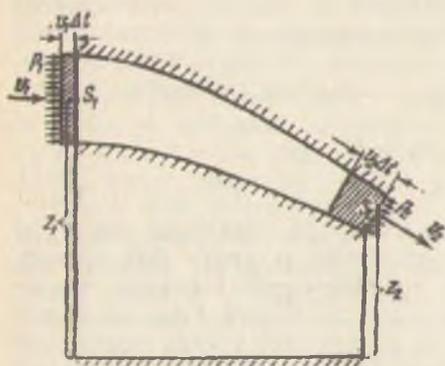


Рис. 1.37.

жидкости  $\Delta m$ , заполнявшая цилиндр с площадью основания  $S_2$  и высотой  $v_2 \Delta t$  (также заштрихованный на рис. 1.37). Значение  $\Delta m$  можно найти, умножив величину каждого из этих элементарных объемов на плотность жидкости  $\rho$ . Тогда получим:

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t. \quad (12.2)$$

Сокращая обе части уравнения (12.2) на  $\rho \Delta t$ , мы получаем, что для несжимаемой жидкости на основании закона сохранения вещества всегда выполняется простое соотношение между величиной сечения и скоростью течения жидкости:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \text{ или } \frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (12.3)$$

Иначе говоря, объемы вытекающей и вытекающей за единицу времени жидкости равны.

При перемещении массы жидкости  $\Delta m$  по трубе силы внешнего давления совершают работу. Полная сила давле-

ния, действующая на левое сечение, равна  $p_1 S_1$ . Эта сила переместила массу жидкости  $\Delta m$  на расстояние  $v_1 \Delta t$ . За то же время в правом сечении такая же масса жидкости  $\Delta m$  переместилась на расстояние  $v_2 \Delta t$  и совершила работу против силы давления  $p_2 S_2$ .

Полная работа  $\Delta A$  сил давления при таком перемещении равна

$$\Delta A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Эта работа затрачена на увеличение кинетической энергии элемента жидкости с массой  $\Delta m$ , скорость которого изменилась от  $v_1$  на входе до  $v_2$  на выходе, и на изменение потенциальной энергии этого элемента в поле тяжести при переходе с уровня  $z_1$  на уровень  $z_2$ . Следовательно,

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot g z_2 - \Delta m \cdot g z_1. \quad (12.4)$$

Разделим обе части равенства на объем  $\Delta V = S_1 v_1 \Delta t$ . Тогда, имея в виду, что согласно (12.2)

$$q = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{S_1 v_1 \Delta t} \text{ и } \frac{S_2 v_2 \Delta t}{S_1 v_1 \Delta t} = i,$$

получим:

$$p_1 - p_2 = \frac{q v_2^2}{2} - \frac{q v_1^2}{2} + q g z_2 - q g z_1. \quad (12.5)$$

Перенесем здесь все члены уравнения, соответствующие жидкости в сечении 1, в левую часть, а соответствующие жидкости в сечении 2 — в правую часть. Тогда

$$p_1 + \frac{q v_1^2}{2} + q g z_1 = p_2 + \frac{q v_2^2}{2} + q g z_2. \quad (12.6)$$

Поскольку сечения 1 и 2 могут быть выбраны произвольно, то, следовательно, сумма  $p + \frac{q v^2}{2} + q g z$  остается неизменной в любом сечении трубы и

$$\boxed{p + \frac{q v^2}{2} + q g z = \text{const.}} \quad (12.7)$$

Уравнение (12.7) называется уравнением Бернулли и выражает закон сохранения энергии при ус-

тановившемся движении несжимаемой идеальной жидкости. Это уравнение справедливо для любого движущегося объема жидкости вдоль траектории его движения, называемой линией тока.

Величина  $qv^2/2$  представляет собой удельную кинетическую энергию, т. е. кинетическую энергию единицы объема движущейся жидкости ( $\text{дж}/\text{м}^3$ ). Величина  $qgz$  есть удельная потенциальная энергия в поле тяжести. Соответственно этому, имеющая ту же размерность величина  $p$  ( $\text{н}/\text{м}^2 = \text{дж}/\text{м}^3$ ) представляет собой удельную потенциальную энергию сил давления в жидкости.

При движении элементарного объема жидкости происходит непрерывный переход его энергии из одной формы в другую, но полная энергия этого объема остается неизменной.

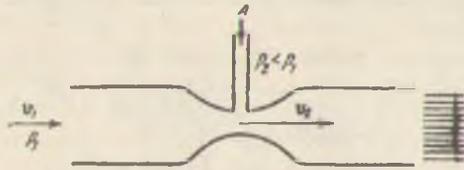


Рис. 1.38.

Так как все члены уравнения (12.7) имеют размерность давления, то это уравнение часто формулируют иначе. Давление  $p$  называют статическим напором, величину  $qgz$  — гидравлическим напором, а величину  $qv^2/2$  — скоростным, или динамическим, напором. Тогда из (12.7) следует, что *полный напор в движущейся жидкости, складывающийся из статического, гидравлического и скоростного напоров, остается постоянным*. Приведем для пояснения два примера.

На рис. 1.38 изображена схема водоструйного насоса. Поток воды из водопровода течет по трубке с местным сужением. В узком сечении скорость жидкости резко возрастает и увеличивается скоростной напор  $qv^2/2$ . При этом по уравнению Бернулли в суженном сечении падает статический напор и давление  $p_2$  становится ниже атмосферного. Поэтому через отводную трубку в это сечение засасывается воздух из откачиваемого сосуда  $A$ . Пройдя суженное сечение, струя воды с воздухом вновь расширяется, ее скорость падает, а давление возрастает до атмосферного на выходе из насоса. Такой насос очень прост по конструкции и может создавать значительное разрежение, понижая давление в откачиваемом сосуде до  $\sim 10^{-3}$  атм.

Работами Д. Бернулли и его современника Эйлера были заложены основы науки о движении жидкостей, выросшей в настоящее время в самостоятельную науку — гидро-динамику. Широкое практическое применение гидродинамика получила в конце XIX и начале XX веков в результате работ Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина.

Жуковским и Чаплыгиным была создана также новая наука — аэродинамика — учение о законах движения газов и теория полета. В. И. Ленин называл Н. Е. Жуковского отцом русской авиации. Жуковскому первому удалось объяснить механизм подъемной силы, создаваемой крылом аэроплана при движении. На рис. 1.39 изображен разрез

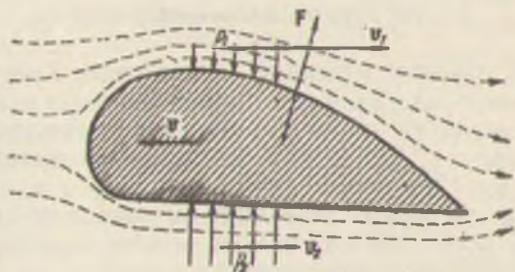


Рис. 1.39.

примерного профиля крыла. Пунктиром показаны линии тока встречного течения воздуха. Как видно из рисунка, над верхней частью крыла происходит сгущение этих линий и увеличение относительной скорости воздушного потока. Согласно уравнению Бернулли давление в потоке над крылом станет меньше, чем под крылом, и за счет этой разности давлений возникает подъемная сила  $F$ , удерживающая летящий самолет в воздухе.

На основе этой качественной картины Н. Е. Жуковский разработал количественные методы расчета величины подъемной силы для различных профилей крыла. Созданные им профили, ныне называемые п р о ф и л я м и Ж у к о в с к о - г о, позволили проектировать крылья наивыгоднейшей формы.

Как уже указывалось выше, при скоростях полета современных скоростных самолетов воздух уже нельзя считать несжимаемой жидкостью. Методы учета сжимаемости воздуха были разработаны С. А. Чаплыгиным еще в 1903 г., когда скорости полета не превышали 30—40 км/ч. На основе этих методов рассчитываются подъемная сила и сопротивление крыльев при современных скоростях полета.

## ЧАСТЬ II ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

---

### ГЛАВА V ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

#### § 13. Введение. Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории

Многие твердые и жидкие тела, такие, например, как стекло, вода, представляются нам совершенно однородными. Они непроницаемы, почти несжимаемы. Отсутствие видимых неоднородностей, пор между частицами вещества приводит к обманчивому представлению о том, что эти, а может быть, и все твердые и жидкие тела, сплошь заполняют занимаемую ими часть пространства, что их вещество распределено в этом пространстве непрерывно.

Газы в этом смысле заведомо отличаются от твердых тел. Они могут сжиматься и способны заполнять любой предоставленный для них объем. Это обстоятельство заставляет думать, что газы состоят из малых обособленных друг от друга частиц. В то же время переходы тел из одного агрегатного состояния в другое, например испарение воды, приводят к распространению подобных представлений и на жидкие и твердые тела.

Еще задолго до нашей эры, в период расцвета древних культур возникло учение о мельчайших частицах, из которых построено любое вещество.

Одна из древнеиндийских философских школ учила, что вечные части вселенной состоят из четырех элементов: воды, земли, огня и воздуха. Частички этих элементов вечны и несотворимы, они непротяженны, и в то же время их разнородная природа составляет причину протяженности возникающих соединений этих частичек.

Древнегреческие философы Анаксагор и Демокрит считали, что любое вещество состоит из мельчайших неделимых частиц — а т о м о в (атом — греческое слово, означающее «неделимый»). Разнообразие веществ, имеющих в природе, объясняется не разнообразием различных сортов атомов, но разнообразием различных соединений этих атомов (теперь

мы называем такие соединения молекулами). Атомы невидимы и необнаружимы в отдельности только вследствие своей чрезвычайной малости. Именно в силу этого огромная совокупность атомов, образующая твердое или жидкое тело, внушает нам представление о непрерывности этих тел. Атомы находятся в непрерывном движении, соединения их могут распадаться, превращаясь в другие соединения, что и объясняет наблюдаемые нами превращения веществ (теперь мы называем такие перестройки молекул химическими превращениями вещества).

Существенный прогресс атомистической теории в XVIII веке обязан М. В. Ломоносову. Особой его заслугой является то, что он включает в круг вопросов, находящихся в сфере объяснения в атомной теории, совершенно, казалось бы, чуждые ей вопросы. Так, Ломоносов объясняет тепловые явления как результат движения мельчайших частиц вещества, отрицая наличие каких-то специфических невесомых тепловых материй, привлекавшихся затем еще в течение века для объяснения тепловых явлений.

Настоящая часть курса посвящена молекулярной физике и основам теории теплоты — термодинамике. *Молекулярная физика изучает те свойства вещества, которые обусловлены его молекулярным строением.* В ней рассматриваются превращения вещества, связанные с изменением энергии его молекул, изменения агрегатного состояния тел и т. д.

При этом мы исключаем из рассмотрения те явления, которые связаны с изменением состава, перестройкой молекул, что является в значительной степени областью химии.

Выделенный таким образом круг вопросов охватывается единым методом рассмотрения, единой теорией, носящей название молекулярно-кинетической теории вещества. Тепловые явления, в соответствии с идеями Ломоносова, будут трактоваться также с точки зрения молекулярно-кинетической теории вещества.

Перечислим коротко те явления, которые подтверждают правильность исходных идей молекулярно-кинетической теории.

1. Высокая сжимаемость газов свидетельствует о наличии больших расстояний между молекулами газа.

2. Стремление газа занять любой, сколь угодно большой, предоставленный в его распоряжение объем свидетельствует о том, что молекулы газа движутся независимо друг от друга.

3. Взаимное проникновение соприкасающихся газов — диффузия газов — показывает, что молекулы одного

газа движутся в «пустотах» между молекулами второго газа.

4. Смешение жидкостей, растворение твердых тел в жидкостях также объясняются перемешиванием молекул разных сортов. При этом существенно, что объем смеси может отличаться от суммы объемов несмешанных веществ, что свидетельствует о различной компактности молекулярных систем. Так, при смешении  $100 \text{ см}^3$  воды и  $100 \text{ см}^3$  спирта получается не 200, но  $196 \text{ см}^3$  смеси: в смеси молекулы распределились компактнее, чем раньше. К этому же кругу вопросов относятся и явления испарения жидких и твердых тел.

5. Давление газа на стенки сосуда, в котором он заключен (или на поверхность тела, введенного в газ), объясняется ударами молекул газа. Повышение давления при увеличении плотности газа (при его сжатии) объясняется увеличением относительного числа молекул, бомбардирующих поверхность, ограничивающие газ. Точно так же увеличение давления с повышением температуры объясняется увеличением скорости молекул, что приводит к учащению их столкновений со стенками сосуда и к увеличению «силы» удара.

6. Прихотливое движение мельчайших твердых частиц, взвешенных в жидкости или газе, — броуновское движение — объясняется неуравновешенностью ударов, испытываемых броуновской частицей со стороны молекул жидкости (газа). В силу малости размеров и масс молекул их толчки могут привести в движение лишь очень легкие, броуновские, частицы.

Однако все эти качественные соображения не дают еще возможности судить о том, одинаковы ли молекулы вещества по массам и другим свойствам или же они представляют собой «осколки» веществ произвольных размеров. Ответ на этот вопрос был получен впервые с помощью химических исследований.

7. Напомним известный из школьного курса химии закон кратных отношений Дальтона. Согласно этому закону при соединении различных элементов количества соединяющихся веществ не произвольны, но могут находиться лишь в простых отношениях. Так, например, если соединять кислород и азот, то могут образоваться соединения, содержащие на 7 весовых частей азота (N) разные, но находящиеся с ними в простых отношениях количества кислорода (O):

- 1)  $7 \text{ г N} + 1 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 11 \text{ г закиси азота,}$
- 2)  $7 \text{ г N} + 2 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 15 \text{ г окиси азота,}$
- 3)  $7 \text{ г N} + 3 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 19 \text{ г ангидрида азотистой кислоты,}$
- 4)  $7 \text{ г N} + 4 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 23 \text{ г двуокиси азота,}$
- 5)  $7 \text{ г N} + 5 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 27 \text{ г ангидрида азотной кислоты.}$

Закон кратных отношений легко объяснить, если предположить, что мельчайшие частицы химически простых веществ — атомы — одинаковы по массе и свойствам (в третьем томе курса мы увидим, что вывод о тождественности массы атомов данного элемента нуждается в некоторых ограничениях, однако пока что мы не будем учитывать этого).

8. Опыт показывает, что в равных объемах газа при одинаковых давлениях и температурах находится одинаковое число молекул. Действительно, можно убедиться, что литр кислорода при соединении с углеродом дает литр углекислого газа (*при том же давлении и температуре*). При горении углерода на образование каждой молекулы  $\text{CO}_2$  идет одна молекула кислорода —  $\text{O}_2$ , следовательно, молекул  $\text{CO}_2$  образуется столько же, сколько было молекул  $\text{O}_2$ . Так как в результате соединения кислорода с углеродом число молекул газа не меняется, сохраняется и объем газа. Точно так же для образования литра водяных паров (при достаточно высокой температуре) необходимо соединить литр водорода и пол-литра кислорода (при тех же температуре и давлении): число молекул воды  $\text{H}_2\text{O}$  равно числу молекул водорода  $\text{H}_2$  или, что то же, вдвое больше числа молекул  $\text{O}_2$  затраченного кислорода. Многочисленные опыты подобного рода позволили Авогадро сформулировать закон, носящий его имя:

*В равных объемах газа, при равных температурах и давлениях содержится равное число молекул газа.*

В 1738 г. Д. Бернулли, исходя из молекулярно-кинетических представлений, дал простой качественный вывод закона Бойля — Мариотта. Однако настоящая количественная разработка молекулярно-кинетической теории началась лишь спустя 100 лет, когда представления об атомах и молекулах получили подтверждение в перечисленных выше химических закономерностях. Работами Р. Клаузиуса, Д. Максвелла, Л. Больцмана, Д. Гиббса и других ученых во второй половине XIX века был создан изящный математический аппарат так называемой статистической физики, позволивший теоретически вывести многие известные количественные закономерности и связать друг с другом разнородные на первый взгляд физические явления.

И все же, несмотря на большие успехи молекулярно-кинетической теории, ей приходилось базироваться лишь на ряде перечисленных выше косвенных доказательств ее основных положений. Отсутствие прямых опытных доказательств существования атомов и молекул позволило представителям идеалистической школы Маха и Оствальда в физике длительное время бороться против материалистических идей

газа движутся в «пустотах» между молекулами второго газа.

4. Смешение жидкостей, растворение твердых тел в жидкостях также объясняются перемешиванием молекул разных сортов. При этом существенно, что объем смеси может отличаться от суммы объемов несмешанных веществ, что свидетельствует о различной компактности молекулярных систем. Так, при смешении  $100 \text{ см}^3$  воды и  $100 \text{ см}^3$  спирта получается не 200, но  $196 \text{ см}^3$  смеси: в смеси молекулы распределились компактнее, чем раньше. К этому же кругу вопросов относятся и явления испарения жидких и твердых тел.

5. Давление газа на стенки сосуда, в котором он заключен (или на поверхность тела, введенного в газ), объясняется ударами молекул газа. Повышение давления при увеличении плотности газа (при его сжатии) объясняется увеличением относительного числа молекул, бомбардирующих поверхность, ограничивающие газ. Точно так же увеличение давления с повышением температуры объясняется увеличением скорости молекул, что приводит к учащению их столкновений со стенками сосуда и к увеличению «силы» удара.

6. Прихотливое движение мельчайших твердых частиц, взвешенных в жидкости или газе, — броуновское движение — объясняется неуравновешенностью ударов, испытываемых броуновской частицей со стороны молекул жидкости (газа). В силу малости размеров и масс молекул их толчки могут привести в движение лишь очень легкие, броуновские, частицы.

Однако все эти качественные соображения не дают еще возможности судить о том, одинаковы ли молекулы вещества по массам и другим свойствам или же они представляют собой «осколки» веществ произвольных размеров. Ответ на этот вопрос был получен впервые с помощью химических исследований.

7. Напомним известный из школьного курса химии закон кратных отношений Дальтона. Согласно этому закону при соединении различных элементов количества соединяющихся веществ не произвольны, но могут находиться лишь в простых отношениях. Так, например, если соединять кислород и азот, то могут образоваться соединения, содержащие на 7 весовых частей азота (N) разные, но находящиеся с ними в простых отношениях количества кислорода (O):

- 1)  $7 \text{ г N} + 1 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 11 \text{ г закиси азота,}$
- 2)  $7 \text{ г N} + 2 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 15 \text{ г окиси азота,}$
- 3)  $7 \text{ г N} + 3 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 19 \text{ г ангидрида азотистой кислоты,}$
- 4)  $7 \text{ г N} + 4 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 23 \text{ г двуокиси азота,}$
- 5)  $7 \text{ г N} + 5 \times 4 \text{ г O} \rightarrow 27 \text{ г ангидрида азотной кислоты.}$

Закон кратных отношений легко объяснить, если предположить, что мельчайшие частицы химически простых веществ атомы одинаковы по массе и свойствам (в третьем томе курса мы увидим, что вывод о тождественности массы атомов данного элемента нуждается в некоторых ограничениях, однако пока что мы не будем учитывать этого).

8. Опыт показывает, что в равных объемах газа при одинаковых давлениях и температурах находится одинаковое число молекул. Действительно, можно убедиться, что литр кислорода при соединении с углеродом дает литр углекислого газа (*при том же давлении и температуре*). При горении углерода на образование каждой молекулы  $\text{CO}_2$  идет одна молекула кислорода —  $\text{O}_2$ , следовательно, молекул  $\text{CO}_2$  образуется столько же, сколько было молекул  $\text{O}_2$ . Так как в результате соединения кислорода с углеродом число молекул газа не меняется, сохраняется и объем газа. Точно так же для образования литра водяных паров (при достаточно высокой температуре) необходимо соединить литр водорода и пол-литра кислорода (при тех же температуре и давлении): число молекул воды  $\text{H}_2\text{O}$  равно числу молекул водорода  $\text{H}_2$  или, что то же, вдвое больше числа молекул  $\text{O}_2$  затраченного кислорода. Многочисленные опыты подобного рода позволили Авогадро сформулировать закон, носящий его имя:

*В равных объемах газа, при равных температурах и давлениях содержится равное число молекул газа.*

В 1738 г. Д. Бернулли, исходя из молекулярно-кинетических представлений, дал простой качественный вывод закона Бойля — Мариотта. Однако настоящая количественная разработка молекулярно-кинетической теории началась лишь спустя 100 лет, когда представления об атомах и молекулах получили подтверждение в перечисленных выше химических закономерностях. Работами Р. Клаузиуса, Д. Максвелла, Л. Больцмана, Д. Гиббса и других ученых во второй половине XIX века был создан изящный математический аппарат так называемой статистической физики, позволивший теоретически вывести многие известные количественные закономерности и связать друг с другом разнородные на первый взгляд физические явления.

И все же, несмотря на большие успехи молекулярно-кинетической теории, ей приходилось базироваться лишь на ряде перечисленных выше косвенных доказательств ее основных положений. Отсутствие прямых опытных доказательств существования атомов и молекул позволило представителям идеалистической школы Маха и Оствальда в физике длительное время бороться против материалистических идей

молекулярно-кинетической теории. Утверждая реальность только наших ощущений, а не окружающего нас мира, Мах и Оствальд отрицали также существование атомов и молекул, как недоступных, по их мнению, прямому наблюдению. Эти идеалистические воззрения нанесли в свое время большой вред развитию физики.

Прошло, однако, совсем немного времени, и в самом начале XX века рядом блестящих экспериментов было наглядно доказано реальное существование атомов и молекул. Эти эксперименты были поставлены в связи с замечательными теоретическими работами Эйнштейна и Смолуховского.

В результате этих работ атомистическая гипотеза утвердилась в виде общепризнанной теории. Они явились первым этапом блестящего развития физики первой половины нашего века.

В 1909 г. Перрен измерил число Авогадро, т. е. число молекул в одном моле. Таким образом удалось «пересчитать» молекулы и определить их массу. Дальнейшие опыты позволили измерить скорости газовых молекул и их диаметры (см. гл. VI). Наконец, применение электронного микроскопа и электронного микропроектора позволило в последние годы сфотографировать отдельные крупные молекулы органических веществ. В настоящее время физиками достаточно подробно изучены и отдельные части атомов, и состав атомных ядер (том III).

Изучение закономерностей движения малых — микроскопических — частиц в XX веке обогатило молекулярно-кинетическую теорию, привело к некоторому пересмотру ее основ и к созданию современной так называемой квантовой статистической физики (некоторые сведения о которой будут даны в томах II и III).

Здесь мы изложим некоторые основные идеи современной молекулярно-кинетической теории вещества и их применение к объяснению ряда свойств газов и общих закономерностей тепловых явлений.

Мы будем исходить из следующих трех основных положений.

1. Все тела состоят из мельчайших частиц — атомов и молекул.

2. Атомы и молекулы находятся в состоянии непрерывного движения. Движение это является вечным, не прекращаясь ни при каких условиях.

3. Молекулы различных веществ по-разному взаимодействуют между собой. Взаимодействие это существенно зависит от типа молекул и от расстояний между ними. В частности, зависимостью молекулярных сил от межмолекуляр-

ных расстояний объясняется качественное различие разных агрегатных состояний тел (газ, жидкость, твердое тело).

В дальнейшем мы будем различать два вида движения: движение тела как целого (камня, жидкости или газа в сосуде) и хаотическое движение молекул тела, происходящее независимо от того, движется ли тело как целое или нет. Для краткости будем именовать хаотическое движение молекул тела тепловым движением.

Тепловое движение мы будем характеризовать средней кинетической энергией одной молекулы  $\epsilon_{кин}$ , а взаимодействие между молекулами — потенциальной энергией взаимодействия  $u_{пот}$ .

В твердых телах молекулы расположены близко друг к другу, и поэтому свойства этих тел существенно зависят от величины  $u_{пот}$ . Например, большая прочность кристалла кварца по сравнению с кристаллом сахара указывает на то, что энергия взаимодействия  $u_{пот}$  между молекулами кварца значительно больше, чем  $u_{пот}$  для молекул сахара.

Плотность газов при обычных давлениях и температурах в тысячи раз меньше плотности твердых и жидких тел. Это свидетельствует о том, что в газе средние расстояния между молекулами примерно в  $\sqrt[3]{1000} = 10$  раз больше, чем в конденсированных телах. При таких расстояниях между молекулами можно ожидать, что их взаимодействие будет играть очень малую роль, иными словами, средняя кинетическая энергия молекул  $\epsilon_{кин}$  будет значительно больше абсолютного значения средней потенциальной энергии ( $u_{пот}$ ).

Таким образом, различные вещества отличаются по своим свойствам в силу различия их межмолекулярного взаимодействия, характеризуемого видом и величиной  $u_{пот}$ . Вследствие быстрого изменения  $u_{пот}$  с изменением расстояния между молекулами свойства вещества резко меняются при изменении агрегатного состояния.

При достаточно больших расстояниях между молекулами газа, т. е. в случае достаточно разреженных газов, энергией межмолекулярного взаимодействия  $u_{пот}$  можно вообще пренебрегать. Это означает, что *физические свойства достаточно разреженных газов не должны зависеть от их химической природы*. Конечно, здесь имеются в виду те свойства, которые не зависят от масс молекул, различных для разных веществ.

Начиная с XVII века, опытами был установлен целый ряд общих законов газового состояния, которые будут перечислены в следующем параграфе.

## § 14. Опытные газовые законы. Уравнение Менделеева — Клапейрона

Поместим некоторую массу газа  $M$  при постоянной температуре  $t$  в сосуд, закрытый поршнем поперечного сечения  $S$  (рис. 2.1). Поскольку газ стремится расширяться, то, чтобы он занимал некоторый определенный объем  $V$ , к поршню придется приложить удерживающую силу  $F$ . Это означает, что газ воздействует на поршень, стремясь вытолкнуть его с той же по величине (но обратной по направлению) силой  $F$ . При увеличении вдвое площади сечения поршня  $S$  возрастет

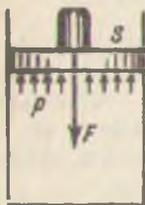


Рис. 2.1.

вдвое (при прочих равных условиях) и сила  $F$ , с которой воздействует газ на поршень.

При этом неизменной окажется сила, испытываемая со стороны газа единицей поверхности поршня  $F/S$ , называемая давлением газа и обозначаемая буквой  $p$ :

$$p = \frac{F}{S};$$

$p$ , как и  $F$ , действует всегда по нормали к поверхности поршня.

Новая физическая величина — давление газа  $p$  — является весьма важной макроскопической характеристикой состояния газа наряду с такими характеристиками, как температура и объем.

В системе СИ давление измеряется в  $\text{н/м}^2$ . Давление в одну атмосферу равно приблизительно  $1 \text{ кг/см}^2 \approx 10^5 \text{ н/м}^2$ .

Для изменения объема газа  $V$  при постоянной температуре необходимо соответственно изменить давление  $p$ . Меняя это давление в сравнительно ограниченных пределах, Бойль (1662 г.) и Мариотт (1676 г.) экспериментально установили, что *произведение давления газа на занимаемый им объем при постоянной температуре есть величина постоянная*:

$$pV = \text{const} \text{ при } M = \text{const} \text{ и } t = \text{const}. \quad (14.1)$$

Изменяя температуру газа, Гей-Люссак (1802 г.) нашел, что *объем газа  $V$  при постоянном давлении линейно растет с температурой, т. е.*

$$V_t = V_0(1 + at) \text{ при } M = \text{const} \text{ и } p = \text{const}. \quad (14.2)$$

*Давление газа при постоянном объеме растет с температурой по тому же закону, т. е.*

$$p_t = p_0(1 + at) \text{ при } M = \text{const} \text{ и } V = \text{const}. \quad (14.3)$$

Здесь  $t$  — температура, измеренная в градусах Цельсия,  $V_0$  — объем газа,  $p_0$  — давление газа при  $0^\circ\text{C}$  и  $\alpha$  — коэффициент объемного расширения, или термический коэффициент давления, одинаковый для всех газов и равный

$$\alpha = \frac{1}{273,15} \text{ град}^{-1}. \quad (14.4)$$

Изменив начало отсчета температуры, можно упростить выражения (14.2) и (14.3). Для этого введем так называемую абсолютную температуру

$$T = t + \frac{1}{\alpha} = t + 273,15^\circ. \quad (14.5)$$

Нуль этой шкалы соответствует  $t = -273,15^\circ\text{C}$  и называется абсолютным нулем температуры.

Введенная таким образом шкала носит название шкалы Кельвина. Температура, приведенная по этой шкале, отмечается буквой  $K$ . Так, в соответствии с (14.5), температуре  $t = 10^\circ\text{C}$  отвечает абсолютная температура  $T = 283,15^\circ\text{K}$ .

Таким образом, нулю шкалы Цельсия соответствует абсолютная температура

$$T_0 = \frac{1}{\alpha} = 273,15^\circ\text{K}. \quad (14.6)$$

Выражения (14.2) и (14.3) можно переписать в таком виде:

$$V = V_0 \alpha T \text{ при } M = \text{const и } p = \text{const}, \quad (14.7)$$

$$p = p_0 \alpha T \text{ при } M = \text{const и } V = \text{const}, \quad (14.8)$$

т. е. согласно закону Гей-Люссака *объем газа пропорционален его абсолютной температуре* (при постоянных  $M$  и  $p$ ), *давление также пропорционально абсолютной температуре* (при постоянных  $M$  и  $V$ ).

Учитывая, что  $\alpha = \frac{1}{T_0}$ , получим:

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = \text{const при } M = \text{const и } p = \text{const}, \quad (14.7a)$$

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{const при } M = \text{const и } V = \text{const}. \quad (14.8a)$$

Эти законы справедливы для достаточно разреженных газов, т. е. для газов, в которых средние расстояния между молекулами значительно превышают диаметры молекул.

Мы убедимся сейчас, что это может иметь место лишь при достаточно больших значениях  $T$ . Действительно, из (14.7) следует, что при  $T=0$  объем газа  $V$  равен нулю, т. е. что газовые молекулы — непротяженные тела. Это значит, что формула (14.7), как и другие физические законы, имеет свои границы применимости и верна лишь постольку, поскольку можно пренебречь размерами молекул, т. е. в тех случаях, когда межмолекулярные расстояния достаточно велики по сравнению с этими размерами. Но при  $T=0$  объем системы молекул становится столь малым, что подобное пренебрежение невозможно.

Давление газа также не подчиняется формуле (14.8) при малых  $T$ , когда кинетическая энергия молекул газа уменьшается и начинает сказываться потенциальная энергия взаимодействия между молекулами.

Рассмотрим следующее соотношение:

$$\frac{pV}{T} = \text{const при } M = \text{const.} \quad (14.9)$$

Легко видеть, что оно объединяет законы Бойля — Мариотта (14.1) и Гей-Люссака (14.7) и (14.8). Действительно, если в (14.9) положить  $T = \text{const}$ , то получим закон Бойля — Мариотта (14.1). Полагая  $p = \text{const}$ , получим формулу (14.7), а полагая  $V = \text{const}$  — формулу (14.8).

Однако преимущество формулы (14.9) состоит не только в том, что она эквивалентна трем частным формулам — законам Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. С помощью (14.9) можно рассчитывать процессы, при которых меняются все три величины  $p$ ,  $V$ ,  $T$  одновременно, а не только какая-либо их пара.

Если взять две одинаковые массы газа, то при одинаковых давлениях и температурах они будут занимать одинаковые объемы. Приведем эти два объема в соприкосновение друг с другом и удалим разделяющую их стенку. В этом случае удвоенная масса газа  $2M$  будет занимать удвоенный объем  $2V$ , а давление  $p$  и температура  $T$  во всем объеме останутся прежними. Следовательно, при увеличении массы газа вдвое и произведение  $pV/T$  возрастет также вдвое. Исходя из таких соображений, Клапейрон (1840 г.) нашел теоретически, что константа в объединенном законе (14.9) должна быть пропорциональна массе, и это уравнение можно записать в виде

$$\frac{pV}{T} = BM, \quad (14.10)$$

где постоянная  $B$  может зависеть лишь от природы газа. Уравнением Клапейрона (14.10) широко поль-

вуются в технике, в частности при расчете процессов в двигателях внутреннего сгорания.

Таким образом, как мы указывали в предыдущем параграфе, действительно, все достаточно разреженные газы при не слишком низких температурах подчиняются одному и тому же уравнению (14.10).

В дальнейшем мы будем это уравнение, связывающее основные величины, характеризующие газ, —  $p$ ,  $V$  и  $T$ , — называть уравнением состояния.

Постоянная  $B$  в (14.10) для разных газов принимает различные значения. Причина этого была указана Д. И. Менделеевым в 1874 г. Дело в том, что массы молекул разных газов неодинаковы, и в 1 кг каждого газа содержится различное число молекул. Один «кмоль» (одна килограмм-молекула) любого газа содержит одно и то же число молекул, масса же моля каждого газа различна и численно равна его молекулярному весу  $\mu^*$ . При равных температуре  $T$  и давлении  $p$  моли различных газов будут, согласно закону Авогадро, занимать равные объемы, так как содержат одинаковое число молекул. Следовательно, для моля любого газа (при  $M = \mu$ ) величина  $pV/T$  должна быть одинакова и равна некоторой универсальной газовой постоянной:

$$\frac{pV}{T} = B\mu = \text{const} = R. \quad (14.11)$$

Численное значение этой постоянной находится из закона Авогадро: при  $t = 0^\circ\text{C}$  и  $p = 1 \text{ атм}$  1 моль любого газа занимает объем  $V = 22,4 \text{ л}$ . Отсюда

$$R = \frac{1 \text{ атм} \cdot 22,4 \text{ л/моль}}{273^\circ\text{К}} = 0,082 \text{ л} \cdot \text{атм/моль} \cdot \text{град}; \quad (14.12)$$

так как  $1 \text{ л} = 10^3 \text{ см}^3$ , а  $1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$ , то

$$R = 8,31 \text{ кдж/кмоль} \cdot \text{град} \approx 2 \text{ ккал/кмоль} \cdot \text{град}.$$

Согласно (14.11) индивидуальная газовая постоянная

$$B = \frac{R}{\mu} \quad (14.13)$$

обратно пропорциональна молекулярному весу. Подставляя ее значение из (14.13) и (14.10), получаем окончательное

\* При использовании системы СГС «моль» означает грамм-молекулу. Это надо иметь в виду при расчетах. Однако  $\mu$  будет иметь одно и то же численное значение, так как  $1 \text{ г/моль} = 1 \text{ кг/кмоль}$ .

уравнение состояния для произвольной массы любого газа

$$pV = \frac{M}{\mu} RT, \quad (14.14)$$

называемое уравнением Менделеева — Клапейрона. Величина

$$\frac{M}{\mu} = \nu \quad (14.15)$$

представляет собой число молей данного газа, заключенных в объеме  $V$ . Следовательно, уравнение Менделеева — Клапейрона может быть записано в виде

$$pV = \nu RT. \quad (14.16)$$

Вводя удельный объем газа  $v = \frac{V}{M}$  и обратную ему величину — плотность газа  $\rho = \frac{1}{v} = \frac{M}{V}$ , можно еще преобразовать уравнение Менделеева — Клапейрона к одному из следующих двух видов:

$$pv = \frac{R}{\mu} T \quad (14.17)$$

или

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T. \quad (14.18)$$

Газ, подчиняющийся уравнению Менделеева — Клапейрона, называется идеальным газом. К определению понятия идеального газа с молекулярной точки зрения мы вернемся в начале следующей главы.

Рассмотрим смесь идеальных газов, заключенных в объеме  $V$  при температуре  $T$ .

Обозначим молекулярные веса и массы газов, заполняющих, объем через  $\mu_1, M_1, \mu_2, M_2, \dots, \mu_n, M_n$  соответственно.

Назовем теперь давление, которое оказывал бы данный газ, если бы он один занимал весь объем  $V$ , парциальным давлением этого газа.

Тогда согласно (14.14) для парциальных давлений газов имеем:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{M_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V}, \\ p_2 &= \frac{M_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V}, \\ &\dots \dots \dots \\ p_n &= \frac{M_n}{\mu_n} \cdot \frac{RT}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

Складывая почленно равенство (14.19), найдем полное давление

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \\ = \left( \frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} + \dots + \frac{M_n}{\mu_n} \right) \cdot \frac{RT}{V}.$$

Отсюда

$$pV = \left( \frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} + \dots + \frac{M_n}{\mu_n} \right) \cdot RT. \quad (14.20)$$

Полученная формула является математическим выражением закона Дальтона: *полное давление газа  $p$  равно сумме парциальных давлений всех газов, входящих в смесь*. Сумма в скобках (14.20) представляет собой полное число молей всех газов, заключенных в объеме  $V$ .

В технической термодинамике и теплотехнике пользуются индивидуальными газовыми постоянными  $B_i = \frac{R}{\mu_i}$ , так что закон Дальтона принимает вид

$$pV = (M_1 B_1 + M_2 B_2 + \dots + M_n B_n) T. \quad (14.21)$$

Сравнивая (14.20) с (14.14) или (14.16), мы видим, что смесь идеальных газов также подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона. Произведение объема газа  $V$  на его давление  $p$  численно равно произведению полного числа

молей газа  $\sum_i \frac{M_i}{\mu_i}$  в этом объеме на универсальную газовую постоянную  $R$  и абсолютную температуру  $T$ .

Для одного моля газа  $\left( \frac{M}{\mu} = \nu = 1 \right)$  уравнение Менделеева — Клапейрона принимает особенно простой вид:

$$pV = RT. \quad (14.22)$$

## § 15. Хаотичность молекулярного движения

Кинетическая теория идеальных газов должна объяснить свойства газов, в том числе приведенные выше газовые законы. Примем, что молекулы газа движутся согласно законам механики, изложенным в первой части этого тома. Не означает ли это, что задача о свойствах газа и его поведении в тех или иных условиях является просто задачей механики — механики большого числа частиц? Не следует ли считать, например, что все тепловые явления в газах сво-

дятся к механическим, т. е. что возможна чисто механическая теория тепла?

Покажем, что такая точка зрения была бы ошибочной. Специфическими свойствами газов обладают системы, содержащие огромное число молекул. Так, в  $1 \text{ см}^3$  воздуха при  $0^\circ \text{C}$  и атмосферном давлении содержится  $2,687 \cdot 10^{19}$  молекул. Нельзя говорить о газе (в смысле применимости к нему газового уравнения состояния), если имеется в виду система, скажем, 3 или 15 молекул.

*Свойства системы молекул не сводимы к свойствам отдельных молекул.* Когда молекулы образуют систему, эта система проявляет новые качества, характеризуется новыми физическими величинами, с помощью которых нельзя описать движение отдельных молекул. Так, можно говорить о температуре газа, но нельзя говорить о температуре одной молекулы; упругость (давление) газа есть результат совместного действия всех молекул, несводимого только к «упругости» отдельных молекул (которые в этом смысле упругостью не обладают) и т. д.

Молекулы газа непрерывно движутся, сталкиваются друг с другом, меняя при каждом столкновении свою скорость по величине и направлению. При атмосферном давлении число столкновений, испытываемых молекулой, составляет несколько миллиардов в секунду. Если бы даже фантастическая задача о движении каждой из молекул газа была решена, мы не могли бы еще сделать непосредственного заключения о свойствах газа как целого.

Особенности движения любой выделенной молекулы не характеризуют свойств газа. Направление движения, скорость, энергия молекулы, ее положение в пространстве все время меняются, в то время как макроскопические характеристики газа как единой системы — давление, температура — остаются неизменными. Следовательно, движение каждой отдельно взятой молекулы не только не может быть установлено, но и не представляет интереса для получения макроскопических параметров системы. То обстоятельство, что движение отдельной молекулы, столкновения между двумя молекулами происходят в соответствии с законами механики Ньютона, еще не означает, что систему молекул — газ — можно изучить с помощью методов механики. С помощью каких же методов можно приступить к изучению свойств газов?

Еще Д. Бернулли указывал, что с повышением температуры скорость молекул (а следовательно, и их кинетическая энергия) возрастает. О какой скорости идет речь? Очевидно, имеется в виду не случайное значение скорости какой-либо

молекулы в какой-то момент времени. Речь идет об «устойчивой» характеристике скорости (и энергии) отдельно взятой молекулы — о средней ее скорости (энергии). Поскольку все молекулы газа тождественны по своим свойствам, эти средние величины будут характеризовать уже не только отдельно взятую молекулу, но будут относиться ко всем молекулам газа.

Средние величины вычисляются методами статистики. Раздел физики, в котором применяется в качестве метода исследования статистика, носит название статистической физики.

Хотя движение каждой молекулы в отдельности и подчиняется законам механики, но свойства огромной совокупности молекул, например газа, уже не могут быть объяснены на основе одних представлений механики: для их объяснения приходится привлекать более общие представления и методы статистической физики.

Приведем примеры, которые покажут, что свойства огромных систем молекул действительно не могут быть объяснены в рамках чисто механических представлений. Подчеркнем еще раз — речь идет не о невозможности решить задачу о механическом движении очень большого числа частиц. Речь идет именно о несводимости такой системы к механике, так как при образовании огромных систем молекул возникают новые качества, несводимые к механическим.

Траектория материальной точки определяется силами, которые действуют на частицу, и начальными условиями — положением и значением вектора скорости в начальный момент времени. Обратно, по значению координат и вектора скорости материальной точки в заданный момент времени можно (при известных, конечно, силах) найти значение координат и вектора скорости в начальный момент времени. Для любой чисто механической системы можно установить совершенно однозначную связь между состояниями в любые фиксированные моменты времени.

Представим себе теперь, что в начальный момент времени весь газ находится в части сосуда I (рис. 2.2, а), отделенной от пустой части II перегородкой. Уберем перегородку. Газ распределится во всем объеме сосуда (рис. 2.2, б), причем на конечном состоянии газа — его давлении и температуре — никак не отражаются начальные условия. Обратно, по данному

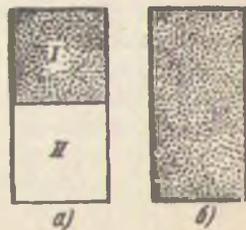


Рис. 2.2.

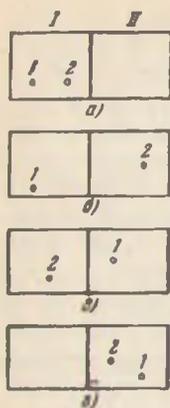


Рис. 2.5.

«отличимыми» одна от другой, мы задаем, как принято говорить, микросостояние системы.

В рассматриваемом примере вероятность каждого из четырех равновероятных микросостояний равна

$$\omega_a = \omega_b = \omega_v = \omega_g = \frac{1}{4}. \quad (16.2)$$

Если обе молекулы одинаковы, то состояния, изображенные на рис. 2.5, б, в, совершенно тождественны по своим физическим характеристикам и свойствам, а значит, по своим макроскопическим проявлениям совершенно неразличимы. Можно рассматривать оба эти состояния как одно состояние, соответствующее равномерному распределению молекул по всему объему  $V$ , вне зависимости от того, какими «номерами» обладают молекулы, находящиеся в каждой из половин объема.

Мы будем называть состояние, которое характеризуется только числом молекул в том или ином состоянии независимо от их номера («индивидуальности»), макросостоянием.

Данное макросостояние (т. е. равномерное распределение газа по объему) осуществляется двумя способами (двумя различными микросостояниями б и в), и его вероятность равна

$$\omega_{бв} = \omega_b + \omega_v = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \quad (16.3)$$

Остальные два микросостояния системы соответствуют случаям, когда весь газ (обе молекулы) собрался в первой

Предположим теперь, что в том же объеме независимо движутся две молекулы, каждая из которых с равной вероятностью может находиться в обеих половинах объема. При этом оказываются возможными четыре равновероятных распределения, изображенных на рис. 2.5, а—г. Эти распределения характеризуют четыре различных возможных состояния системы.

В данном случае «состояние» каждой молекулы определяется ее положением в одной или другой части объема, а состояние всей системы — состоянием каждой из входящих в систему молекул.

Характеризуя состояние всей системы состоянием каждой из входящих в нее молекул, которые принимаются при этом

половине или во второй половине объема. Каждое из этих макросостояний осуществляется лишь одним-единственным способом, и их вероятности равны соответственно

$$w_a = \frac{1}{4} \text{ и } w_c = \frac{1}{4}. \quad (16.4)$$

Видно, что из трех возможных различных распределений числа молекул по объему (макросостояний) равномерное распределение осуществляется наибольшим числом способов и обладает поэтому наибольшей вероятностью.

Предположим теперь, что в том же объеме  $V$  хаотически движутся четыре тождественные молекулы. В этом случае, как легко сосчитать, оказываются возможными  $2^4 = 16$  различных их распределений между двумя половинами объема (т. е. 16 различных микросостояний). Три из этих микросостояний изображены на рис. 2.6. При этом оказываются возможными пять различных макрораспределений между половинами I и II:

1) 4 молекулы в объеме I и 0 молекул в объеме II. Это состояние изображено на рис. 2.6, а. Оно осуществляется одним-единственным способом (микросостоянием), и его вероятность.

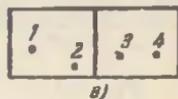
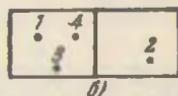
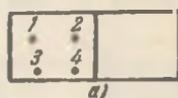


Рис. 2.6.

$$w_a = \frac{1}{16}.$$

2) 3 молекулы в объеме I и 1 молекула в объеме II (рис. 2.6, б). Поскольку при этом в объеме II может оказаться любая из четырех молекул, то таких возможных состояний оказывается четыре, и вероятность данного макросостояния

$$w_b = \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

3) 2 молекулы в объеме I и 2 молекулы в объеме II (рис. 2.6, в). Число этих макросостояний газа равно числу сочетаний из четырех молекул по две, т. е.  $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ , и вероятность соответствующего макросостояния

$$w_b = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

4) 1 молекула в объеме I и 3 молекулы в объеме II. Вероятность этого макросостояния, так же как и состояния 2), равна  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ .

5) 0 молекул в объеме I и 4 молекулы в объеме II. Вероятность такого макросостояния равна  $\frac{1}{16}$ .

При наличии в объеме двух молекул вероятность равномерного распределения  $\omega_{6в} = \frac{2}{4}$  была в два раза больше вероятности того, что весь газ соберется в половине I объема.

Как мы видим, при наличии в том же объеме 4 молекул вероятность равномерного распределения  $\frac{6}{16}$  уже в шесть раз больше вероятности того, что весь газ соберется в половине I. Чем больше число молекул газа, находящихся в объеме  $V$ , тем резче проявляется эта статистическая закономерность, тем больше вероятность равномерного распределения молекул между двумя половинами объема сосуда по сравнению с вероятностью собраться всему газу в одной из этих половин.

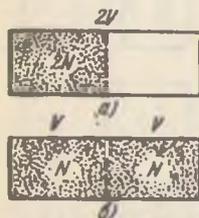


Рис. 2.7.

Пусть в некотором сосуде объемов  $2V$  находятся  $2N$  молекул, где  $N$  — очень большое число. Тогда оказываются возможными  $2^{2N}$  различных распределений молекул между обеими половинами I и II. На рис. 2.7 изображены два крайних случая. Первый из них (рис. 2.7, а) представляет случай, когда все молекулы газа собрались в половине I объема. Этот случай осуществляется единственным способом, и вероятность его ничтожно мала:

$$\omega_a = \frac{1}{2^{2N}}. \quad (16.5)$$

Второй случай (рис. 2.7, б) соответствует равномерному распределению, когда в каждой из половин объема находится одинаковое число  $N$  молекул. Это макросостояние может осуществляться разными способами. Полное число различных микросостояний, соответствующих равномерному распределению, будет равно числу возможных распределений из всех  $2N$  молекул по  $N$ , т. е.

$$C_{2N}^N = \frac{(2N)!}{(N!)^2},$$

и вероятность этого распределения

$$\omega_b = \frac{C_{2N}^N}{2^{2N}} = \frac{(2N)!}{(N!)^2 \cdot 2^{2N}}. \quad (16.6)$$

При больших значениях числа  $N$  точное значение  $C_{2N}^N$  может быть заменено приближенным  $C_{2N}^N \approx \frac{2^{2N}}{\sqrt{\pi N}}$ , и вероятность равномерного распределения

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\pi N}}, \quad (16.7)$$

что во много раз больше, чем (16.5).

Наряду с рассмотренными двумя предельными случаями возможны и различные промежуточные макросостояния, при которых в одной из половин сосуда находится меньше, чем  $N$ , а в другой — соответственно больше, чем  $N$ , молекул. На рис. 2.8 изображена примерная зависимость вероятности  $\omega_v$  того, что в объеме  $V$  находится некоторое число молекул  $v$ . Из графика видно, что равномерное распределение молекул между половинами сосуда ( $v=N$ ) является наиболее вероятным. Однако и состояния, близкие к равномерному, у которых  $v$  сравнительно мало отличается от  $N$ , имеют вероятности, близкие к  $\omega_0$ , и осуществляются практически столь же часто. Более детальный математический анализ показывает, что при  $v$ , заключенном в пределах

$$N - \sqrt{N} < v < N + \sqrt{N}, \quad (16.8)$$

вероятность  $\omega_v$  близка к вероятности равномерного распределения  $\omega_0$ . Если же  $v$  лежит вне этих интервалов, т. е.

$$|N - v| > \sqrt{N}, \quad (16.9)$$

то вероятности таких макросостояний становятся сравнительно малыми, и такие состояния осуществляются сравнительно редко. Вероятность же состояний, при которых весь газ соберется в одной из половин сосуда ( $v=0$  или  $v=2N$ ), как видно из (16.5), настолько мала, что они при достаточно больших  $N$  практически никогда не осуществляются.

В случае равномерного распределения частиц по всему объему концентрация молекул в этом объеме остается постоянной и равной

$$n_{\text{ср}} = \frac{2N}{2V} = \frac{N}{V}. \quad (16.10)$$

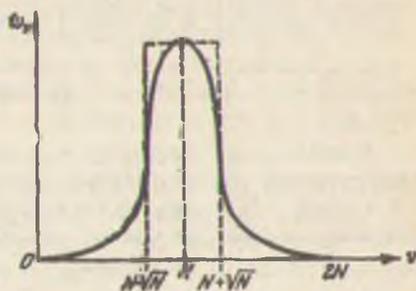


Рис. 2.8.

Концентрация молекул в половине объема I равна

$$n = \frac{v}{V} \quad (16.11)$$

и вследствие хаотического движения молекул непрерывно колеблется около своего среднего значения

$$\bar{n} = \frac{N}{V}, \quad (16.12)$$

равного  $n_{\text{ср}}$  для всего сосуда. Эти колебания носят название ф л у к т у а ц и й.

Из сказанного следует, что средняя флуктуация концентрации молекул в объеме I равна

$$\Delta n = \frac{v - N}{V} \approx \pm \frac{\sqrt{N}}{V}. \quad (16.13)$$

Чем больше число молекул  $N$ , тем больше абсолютная флуктуация  $\Delta n$  концентрации молекул в объеме  $V$ .

Однако из сравнения (16.12) и (16.13) следует, что при этом флуктуация  $\Delta n$  возрастает медленнее, чем средняя концентрация  $n$ , и поэтому относительная ф л у к т у а ц и я концентрации

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (16.14)$$

падает с увеличением  $N$ .

Соотношение (16.14) остается справедливым и в том случае, если объем  $V$  представляет собой не половину, а какую-либо другую произвольную долю полного объема сосуда, а  $N$  — соответственно среднее число молекул в объеме  $V$ . Это соотношение является одной из важнейших статистических закономерностей молекулярно-кинетической теории: *флуктуации происходят около среднего значения физической величины. При этом относительная флуктуация какой-либо физической величины, зависящей от числа  $N$  молекул в данном объеме, с ростом  $N$  убывает как  $1/\sqrt{N}$ .*

Давление газа  $p$  представляет собой результат непрерывных ударов молекул о стенку сосуда и пропорционально общему числу ударяющих молекул  $N$ . Если  $N$  мало, то стенка будет испытывать отдельные толчки и давление  $p$  будет скачкообразно изменяться. С увеличением  $N$  будут расти и среднее давление газа  $p$  и флуктуации последнего  $\Delta p$ . Однако в соответствии с (16.14) флуктуации, хотя и возрастут по абсолютной величине, будут в то же время сказываться все меньше и меньше, так как относительные флуктуации дав-

ления будут убывать по закону

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (16.15)$$

аналогичному (16.14).

Поэтому важнейшей задачей молекулярно-кинетической теории является вычисление средних значений физических величин (давления, плотности, скорости молекул и т. д.) и установление связей между ними для систем, состоящих из большого числа молекул. Для решения подобных задач применяются различные методы теории вероятностей и математической статистики. Поэтому все выводы молекулярно-кинетической теории являются для мгновенных значений физических величин несколько приближенными и верными, как говорят, с точностью до флуктуаций. Чем больше число молекул  $N$  в системе, тем меньше согласно (16.14) эти относительные флуктуации и тем точнее выполняются все закономерности молекулярно-кинетической теории. Так, например, при нормальных условиях (1 атм и  $0^\circ\text{C}$ ) в  $1\text{ см}^3$  воздуха содержатся  $N = 2,687 \cdot 10^{19}$  молекул. Относительные флуктуации этого числа составляют  $\frac{1}{\sqrt{N}} \approx 2 \cdot 10^{-10}$  или 0,00000002 %.

При высоком вакууме порядка  $10^{-10}$  атм в том же объеме содержатся  $2,7 \cdot 10^9$  молекул и относительные флуктуации составляют 0,002 %, т. е. все еще сравнительно малы.

Полученные выше статистические закономерности о равномерном распределении молекул по занимаемому ими объему и о величине относительных флуктуаций вытекают из хаотичности в распределении отдельных молекул, из случайности положения любой из них.

*Равномерное распределение молекул газа по объему реализуется не потому, что оно является единственным возможным, но потому, что вероятность такого распределения в случае большого числа молекул неизмеримо выше вероятности любых других распределений.*

ГЛАВА VI  
МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

§ 17. Средняя скорость молекул. Поток молекул

Молекулы газа в каждый данный момент времени будут отличаться друг от друга не только своим местонахождением в сосуде, но и характером своего движения. Каждая молекула будет двигаться со своей скоростью  $c_i$ , отличающейся от скоростей других молекул по величине и по направлению (рис. 2.9).

Если объем, занимаемый газом, неподвижен, то все направления движения молекул равновероятны. Преимущественное направление в движении молекул будет иметь место лишь при движении газа как целого.

Что же касается значений скоростей молекул по величине  $c$ , то различные скорости не равновероятны. Действительно, энергия (одноатомного) идеального газа  $E$  есть сумма кинетических энергий  $\varepsilon_i$  всех его  $N$  молекул:

$$E = \sum_{i=1}^{i=N} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{2} m c_i^2. \quad (17.1)$$

Сталкиваясь друг с другом, молекулы непрерывно обмениваются энергией, и в принципе мыслимо такое состояние газа, когда все его молекулы, за исключением одной, остановятся, а эта последняя будет двигаться с максимальной возможной скоростью  $c_{\text{макс}}$ , определяемой из соотношения

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \frac{1}{2} m c_{\text{макс}}^2 = E. \quad (17.2)$$

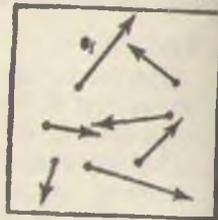


Рис. 2.9

Однако столь резко неоднородное распределение молекул по скоростям, так же как и резко неоднородные распределения молекул в пространстве, рассматривавшиеся нами в предыдущем параграфе, будет исключительно маловероятно и практически никогда не осуществится. С наибольшей вероятностью будут осуществляться состояния, при которых энергии различных молекул газа  $\varepsilon_i$  сравнительно близки друг к другу и мало отличаются от их среднего значения (средние значения физических величин мы будем обозначать черточкой, поставленной над буквой, обозначающей данную величину). Для средней энергии поступательного \* движения  $\overline{\varepsilon}_{\text{пост}}$  имеем:

$$\overline{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m \frac{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2}{N} = \frac{1}{2} m \overline{c^2}. \quad (17.3)$$

Величина

$$\overline{c^2} = \frac{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2}{N}, \quad (17.4)$$

входящая в формулу (17.3), представляет собой средний квадрат скорости молекул газа. Извлекая из этой величины квадратный корень, мы получим величину, называемую средней квадратичной скоростью:

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2}{N}}. \quad (17.5)$$

Методами статистической физики так же, как в предыдущем параграфе, можно рассчитать вероятность различных распределений молекул по скоростям и вероятности различных значений скорости отдельной молекулы. Подобные расчеты требуют применения сложных методов математической статистики и теории вероятностей. Они показывают, что, как и следовало ожидать, наиболее вероятными являются макросостояния, при которых скорости отдельных молекул близки к средним.

Поэтому во всем дальнейшем изложении мы можем без существенных погрешностей оперировать непосредственно со средними величинами. Какие неточности возможны при замене истинных значений физических величин их средними, видно из следующего примера.

Средняя арифметическая скорость молекул газа определяется из соотношения

\* В случае многоатомных молекул следует учитывать и энергию их вращательного движения  $\varepsilon_{\text{вращ}}$  (см. § 33)

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_N}{N} \quad (17.6)$$

Сопоставляя (17.6) с (17.4) и (17.5), легко видеть, что средняя арифметическая величина скорости (кратко «средняя скорость») не равна средней квадратичной. При нахождении последней по формуле (17.5) сравнительно небольшое число скоростей наиболее быстрых молекул при возведении в квадрат будет вносить непропорционально большой вклад в значение средней квадратичной скорости. Таким образом,

$$\sqrt{\overline{c^2}} > \bar{c}, \text{ или } \overline{c^2} > \bar{c}^2. \quad (17.7)$$

То, что средняя квадратичная величина всегда больше средней арифметической, может быть доказано в общем виде. (На численном примере: среднее арифметическое чисел 3 и 5 будет  $\frac{3+5}{2}=4$ , а среднее квадратичное из этих величин  $\sqrt{\frac{9+25}{2}} = \sqrt{17} = 4,12$ , т. е. на 3 % выше.) Для молекул идеального газа средняя квадратичная скорость превышает среднюю арифметическую примерно на 10 %.

В последующих выводах вместо громоздких точных статистических расчетов мы будем пользоваться средними значениями физических величин. Как видно из предыдущего примера, полученные таким образом соотношения будут давать правильные качественные зависимости, но численные значения коэффициентов в некоторых случаях могут отличаться от истинных на 10—20 %.

Вектор скорости  $i$ -й молекулы  $c_i$  может быть разложен на составляющие  $u_i$ ,  $v_i$  и  $w_i$  по координатным осям, как это показано на рис. 2.10. Из обобщенной теоремы Пифагора следует, что

$$c_i^2 = u_i^2 + v_i^2 + w_i^2. \quad (17.8)$$

Вычисляя среднее значение квадрата скорости, получим:

$$\overline{c^2} = \frac{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2}{N} =$$

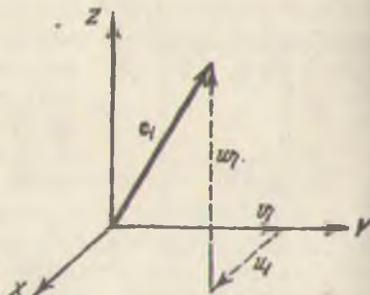


Рис. 2.10.

$$= \frac{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_N^2}{N} + \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} + \frac{w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_N^2}{N},$$

откуда

$$\overline{c^2} = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}. \quad (17.9)$$

При равной вероятности всех направлений скорости в пространстве средние квадраты составляющих скорости по координатным осям  $\overline{u^2}$ ,  $\overline{v^2}$  и  $\overline{w^2}$  будут равны друг другу и

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{1}{3} \overline{c^2}. \quad (17.10)$$

Коэффициент  $1/3$  здесь является абсолютно точным.

Представим теперь, что в стенке сосуда, перпендикулярной к оси  $OY$ , проделано отверстие площадью  $\Delta S$ . Подсчитаем число молекул  $\Delta N$ , попадающих в это отверстие и выходящих наружу за промежуток времени  $\Delta t$ . Обозначим число молекул в единице объема внутри сосуда через  $n$ .

За рассматриваемый промежуток времени через отверстие будут вылетать молекулы с различными направлениями скорости, нашедшиеся к началу

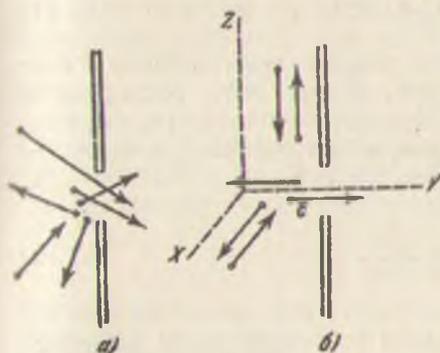


Рис. 2.11.

промежутка  $\Delta t$  на различных расстояниях от отверстия, в зависимости от величины их скорости (рис. 2.11, а). Для упрощения расчета примем, что все молекулы движутся с одной и той же скоростью  $c$ . Далее, будем считать, что молекулы могут двигаться лишь в направлении координатных осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ . Вследствие равновероятности этих направлений движения, вдоль каждой из осей и, в частности, вдоль оси  $OY$ , будет двигаться лишь  $1/3$  общего числа

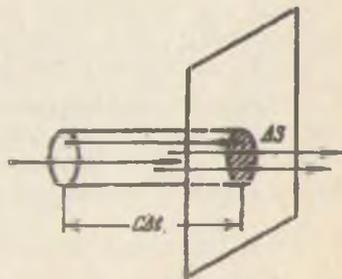


Рис. 2.12.

молекул. Из этой доли половина молекул будет двигаться от отверстия внутрь сосуда, и, следовательно, лишь  $1/6$  молекул, находящихся в единице объема, будет двигаться в направлении отверстия и сможет выйти из сосуда (рис. 2.11, б).

Для вычисления величины  $\Delta N$  мысленно выделим в газе цилиндр с площадью основания  $\Delta S$  и высотой  $\bar{c}\Delta t$ , равной пути, проходимому молекулой за время  $\Delta t$  (рис. 2.12). Тогда за время  $\Delta t$  через отверстие смогут пройти молекулы, находящиеся от него на расстоянии меньшем  $\bar{c}\Delta t$ , т. е. внутри выделенного цилиндра объемом  $\Delta S\bar{c}\Delta t$ . Общее число молекул в этом объеме  $n\Delta S\bar{c}\Delta t$ , но лишь  $1/6$  их движется вправо по направлению к отверстию и выйдет наружу. Таким образом, искомая величина  $\Delta N$  равна

$$\Delta N = \frac{1}{6}n\Delta S\bar{c}\Delta t \quad (17.11)$$

Площадка  $\Delta S$ , для которой подсчитывается число проходящих через нее молекул  $\Delta N$ , может быть расположена перпендикулярно к любой координатной плоскости, по любому произвольному направлению в пространстве, а также не у стенки, а в любом месте внутри сосуда.

Отношение

$$j = \frac{\Delta N}{\Delta S\Delta t} \quad (17.12)$$

представляет собой число молекул, проходящих за единицу времени через единицу площади в произвольном направлении. Из (17.11) и (17.12) следует, что поток молекул  $j$  равен

$$j = \frac{1}{6}n\bar{c}. \quad (17.13)$$

Полученный при таком упрощенном выводе коэффициент  $1/6$  в этом соотношении уже не является абсолютно точным. Точный статистический расчет приводит к более правильному значению этого коэффициента, равному  $1/4$ . Естественно, что если заменить в соотношении (17.13) среднюю скорость  $\bar{c}$  на среднюю квадратичную  $\sqrt{\bar{c}^2}$  или на среднее значение абсолютной величины составляющей скорости в данном направлении  $|\bar{v}|$ , то численное значение коэффициента должно будет соответственно измениться.

## § 18. Основное уравнение кинетической теории газов

Основным уравнением кинетической теории газов принято называть уравнение, устанавливающее связь между давлением газа, его объемом и энергией. Сила давле-

ния газа на стенку сосуда складывается из взаимодействий многочисленных молекул, все время ударяющихся об эту стенку и отскакивающих обратно. Благодаря хаотичности молекулярного движения в отдельные моменты число ударяющихся молекул и их скорости будут, вообще говоря, различными и несколько отличающимися в ту или другую сторону от средних значений этих величин.

Применяя сверхчувствительный манометр, мы могли бы обнаружить непрерывные колебания (флуктуации) давления около некоторого среднего значения  $\bar{p}$ , как это изображено на рис. 2.13. При малом числе молекул  $N$  флуктуации давления  $\Delta p = p - \bar{p}$  будут сравнимы с величиной самого давления  $p$ , и в предельном случае одной молекулы потеряет всякий смысл само понятие давления так же, как и понятие плотности газа или среднего числа молекул в единице объема. При большом же числе молекул эти флуктуации будут относительно малы и, как было указано в § 16,

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (18.1)$$

В этом случае отклонения мгновенных измеряемых значений давления  $p$  от среднего  $\bar{p}$  будут ничтожно малы и мы сможем считать, что давление газа на стенки сосуда практически постоянно и равно среднему значению

$$p = \bar{p}. \quad (18.2)$$

Основное уравнение кинетической теории будем выводить для идеального газа.

Дадим теперь строгое определение идеального газа. Выше (§ 16) мы называли идеальным газ, подчиняющийся уравнению

Менделеева — Клапейрона. Было показано, что это имеет место, если межмолекулярные расстояния таковы, что потенциальной энергией взаимодействия между молекулами можно пренебречь. Чем меньше эта энергия взаимодействия между молекулами, тем лучше удовлетворяет газ уравнению Менделеева — Клапейрона, тем ближе он по своим свойствам к идеальному.

В соответствии с этим мы будем называть газ идеальным, если потенциальную энергию взаимодействия между молекулами можно считать равной нулю. Будем считать, что все

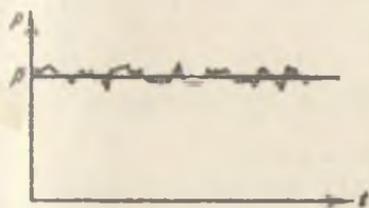


Рис. 2.13.

возможные взаимодействия между молекулами сводятся при этом к столкновениям, которые происходят только по закону удара абсолютно упругих шаров.

Полная энергия идеального газа сводится, следовательно, к сумме кинетических энергий всех его молекул.

Естественно, что для реальных газов полученные соотношения не будут точными. Однако при достаточном разрежении и не слишком низких температурах реальные газы по своим свойствам будут достаточно хорошо приближаться к идеальным. Следовательно, понятие идеального газа представляет собой абстракцию, сохраняющую основные наиболее важные черты газообразного состояния и отвлекающуюся от второстепенных, менее существенных характеристик последнего. К вопросу об отклонениях поведения реальных газов от уравнения состояния идеального газа мы вернемся ниже, в ч. III.

Выделим на поверхности сосуда достаточно малую площадку  $\Delta S$ , чтобы можно было ее считать практически плоской.

Пусть все молекулы, находящиеся в сосуде, движутся с одной и той же скоростью  $c$ . Как было показано в предыдущем параграфе, лишь  $1/6$  всех молекул в среднем движется по направлению к стенке, и о площадку за некоторый промежуток времени  $\Delta t$  будут ударяться

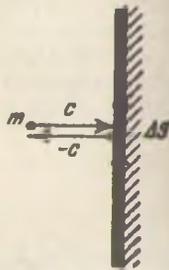


Рис. 2.14.

$$\Delta N = \frac{1}{6}nc\Delta S\Delta t \quad (18.3)$$

молекул.

При упругом ударе о стенку, масса которой бесконечно велика по сравнению с массой молекулы  $m$ , каждая молекула будет отскакивать обратно со скоростью  $-c$  (рис. 2.14). Количество движения каждой молекулы будет при ударе меняться от начального значения  $+mc$  до конечного  $-mc$  на величину  $(-mc) - (+mc) = -2mc$ .

В силу закона сохранения количества движения это означает, что стенка сосуда получит импульс, равный по величине и обратный по знаку изменению импульса молекулы. Следовательно, приобретенный стенкой импульс равен  $+2mc$ .

Полюс изменение количества движения молекул, ударяющихся о площадку  $\Delta S$  в течение времени  $\Delta t$ , будет равно

$$-2mc\Delta N = -\frac{1}{3}nmc^2\Delta S\Delta t. \quad (18.4)$$

Средняя сила, с которой действуют ударяющиеся молекулы на площадку  $\Delta S$ , составит  $\Delta F = p \Delta S$ , где  $p$  — сила, действующая на единицу площади, т. е. давление газа на стенку. По третьему закону динамики сила, с которой стенка действует на газ, будет равна  $-\Delta F = -p \Delta S$ , и импульс этой силы за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta t$  составит:

$$-\Delta F \Delta t = -p \Delta S \Delta t. \quad (18.5)$$

По второму закону динамики изменение количества движения молекул, ударившихся о стенку, (18.4) должно быть равно импульсу силы (18.5), действовавшей на эти молекулы, т. е.

$$-p \Delta S \Delta t = -\frac{1}{3} n m c^2 \Delta S \Delta t. \quad (18.6)$$

Сокращая обе части этого равенства на  $\Delta S \Delta t$ , получим окончательно:

$$p = \frac{1}{3} n m c^2. \quad (18.7)$$

Если в выводе учесть, что скорости отдельных молекул  $c_i$  могут быть различными, то величину  $nc^2$  следует заменить суммой квадратов скоростей каждой из молекул, находящихся в единице объема, т. е.

$$nc^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} c_i^2$$

Отсюда видно, что в (18.7) следует заменить  $c^2$  на  $\overline{c^2}$ :

$$c^2 \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{i=n} c_i^2}{n} = \overline{c^2}. \quad (18.8)$$

Учитывая (18.8), мы можем переписать (18.7) в виде

$$p = \frac{1}{3} n m \overline{c^2} = \frac{2}{3} n \overline{\epsilon_{\text{пост}}}, \quad (18.9)$$

где средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы  $\overline{\epsilon_{\text{пост}}}$  определена уравнением (17.3).

Полученное соотношение называется основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа, или уравнением Клаузиуса.

Выведем ряд следствий из основного уравнения.

Число молекул в единице объема  $n$  можно заменить

отношением полного числа всех молекул газа  $N$ , находящихся в сосуде, к его объему  $V$ , т. е.

$$n = \frac{N}{V}. \quad (18.10)$$

Производя эту замену, можно переписать (18.9) в виде

$$pV = \frac{2}{3} N \overline{\epsilon}_{\text{пост}}. \quad (18.11)$$

Далее, из определения средней энергии поступательного движения молекул и средней квадратичной скорости [см. (17.3) и (17.4)] следует, что

$$N \overline{\epsilon}_{\text{пост}} = \sum_{i=1}^{i=N} \epsilon_{i\text{пост}} = E_{\text{пост}}, \quad (18.12)$$

где  $E_{\text{пост}}$  — суммарная кинетическая энергия *поступательного* движения всех молекул газа.

Используя (18.12), можно основное уравнение переписать в виде

$$pV = \frac{2}{3} E_{\text{пост}}. \quad (18.13)$$

Следовательно, произведение объема газа на его давление численно равно  $2/3$  кинетической энергии хаотического поступательного движения всех молекул газа, заключенных в этом объеме. Это соотношение связывает макроскопически наблюдаемые и измеряемые величины  $p$  и  $V$  с основной характеристикой  $E_{\text{пост}}$  микроскопических движений, происходящих внутри газа и обуславливающих наличие давления его на стенку.

Обозначим через  $N_0$  число Авогадро, т. е. число молекул в одной килограмм-молекуле любого газа. Если в объеме заключено  $\frac{M}{\mu} = \nu$  кмоль газа, то общее число молекул равно

$$N = \frac{M}{\mu} N_0. \quad (18.14)$$

Подставляя это выражение в (18.11), получим:

$$pV = \frac{M}{\mu} \cdot \frac{2}{3} N_0 \overline{\epsilon}_{\text{пост}}. \quad (18.15)$$

Сопоставим это уравнение с эмпирическим уравнением Менделеева — Клапейрона (14.14) для того же числа молей:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT. \quad (18.16)$$

Учитывая (18.13), имеем:

$$\frac{2}{3} E_{\text{пост}} = \frac{M}{\mu} RT,$$

или

$$E_{\text{пост}} = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} RT. \quad (18.17)$$

Таким образом, энергия идеального газа  $E_{\text{пост}}$  (полная энергия, поскольку газ одноатомный и не обладает потенциальной энергией) прямо пропорциональна его абсолютной температуре.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы равна полной энергии газа, деленной на число молекул:

$$\overline{\epsilon}_{\text{пост}} = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{E_{\text{пост}}}{N_0} = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{N_0}, \quad (18.18)$$

т. е. согласно (18.17)

$$\overline{\epsilon}_{\text{пост}} = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_0} T. \quad (18.19)$$

Величины  $R$  и  $N_0$  являются универсальными постоянными. Их отношение

$$\frac{R}{N_0} = k \quad (18.20)$$

также является универсальной постоянной и носит название постоянной Больцмана. При  $R=8,31 \text{ кдж/кмоль} \times \text{град}$  и  $N_0=6,02 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}$  имеем  $k=1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ дж/град}$ .

Вводя постоянную Больцмана, мы можем переписать выражение для средней кинетической энергии одной молекулы (18.19) в виде

$$\overline{\epsilon}_{\text{пост}} = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (18.21)$$

Таким образом, оказывается, что средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул идеального газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре и является мерой интенсивности теплового движения молекул при заданной температуре. Тем самым формула (18.21) выявляет молекулярно-кинетический смысл понятия температуры. *Температура тела есть количественная мера энергии теплового движения молекул, из которых состоит это тело.* Закономерная связь (18.21) между абсолютной температурой

и средней кинетической энергией поступательного движения молекул идеального газа показывает, кроме того, что *при одинаковой температуре средние кинетические энергии молекул всех газов одинаковы, несмотря на различие масс молекул разных газов.*

Подставляя (18.21) в (18.9), мы можем преобразовать основное уравнение кинетической теории газов к виду

$$p = nkT, \quad (18.22)$$

связывающему давление газа  $p$  с концентрацией молекул  $n$  и абсолютной температурой  $T$ .

### § 19. Температура и методы ее измерения. Абсолютный нуль температуры

Остановимся более подробно на определении понятия температуры. Первоначальные представления о степени нагретости тел мы получаем из непосредственного чувственного опыта. Дотрагиваясь до нескольких тел, мы можем сказать, какое из них теплее, а какое — холоднее. Соответственно этому мы скажем, что первое из тел имеет более высокую температуру, чем второе.

Однако возможности нашего непосредственного восприятия весьма ограничены. Для определения температуры тел в большом диапазоне ее изменения, а также для точного количественного суждения о ней необходимо прибегать не к непосредственному ощущению, а к приборам.

Рассмотрим две какие-либо системы, состоящие из большого числа молекул (газы, жидкости или твердые тела). Приведем их в соприкосновение таким образом, чтобы они химически не реагировали друг с другом, чтобы не произошло переноса вещества из одной системы в другую, чтобы одна система не могла расширяться за счет другой, и вообще, чтобы они не могли обмениваться механической энергией макроскопических движений. Для этого в большинстве случаев обе системы необходимо разделить тонкой, но непроницаемой стенкой.

При этом еще остается возможным переход энергии микроскопических, хаотических движений молекул, составляющих эти системы. Другими словами, остается возможным обмен внутренней энергией соприкасающихся систем. Такой обмен может происходить либо при непосредственном соприкосновении, либо через стенку, отделяющую системы одну от другой.

Суммарную энергию, отданную таким путем одним телом другому, мы будем называть количеством переданной теплоты.

Соприкосновение тел, при котором возможна лишь передача тепла от одного тела к другому, будем называть тепловым контактом этих тел.

При передаче тепла от одного тела к другому будет изменяться энергия хаотического теплового движения молекул в обоих телах, что приведет к изменению ряда физических характеристик этих систем, связанных с тепловым движением. Так, например, как мы видели в предыдущем параграфе, для идеального газа, заключенного в сосуде постоянного объема, с ростом энергии молекулярного движения будет увеличиваться давление [формула (18.13)], а также и его температура.

Мы говорим, что *две системы имеют равные температуры, если при тепловом контакте их состояния не меняются.*

Если же температуры обеих систем различны, то при их соприкосновении будет происходить передача тепла от более нагретого тела к более холодному, и состояния систем будут меняться до тех пор, пока между ними не установится тепловое равновесие. С этого момента температуры обеих систем станут равными.

Если два тела порознь находятся в тепловом равновесии с третьим, то они будут находиться в тепловом равновесии и при непосредственном соприкосновении друг с другом. В этом случае температуры обоих тел одинаковы и равны температуре тела, с которым производится сравнение и которое мы будем называть термометром.

Как уже указывалось, температура есть количественная мера энергии хаотического молекулярного движения в телах. С возрастанием энергии этого хаотического движения увеличивается и температура. Поскольку изменение энергии теплового движения молекул всегда приводит к изменению целого ряда других физических характеристик системы, то по численным значениям этих характеристик можно судить о температуре и устанавливать соответствующие шкалы.

Простейшими термометрами являются жидкостные. На рис. 2.15 изображен ртутный термометр, состоящий из небольшого резервуара с ртутью, оканчивающегося

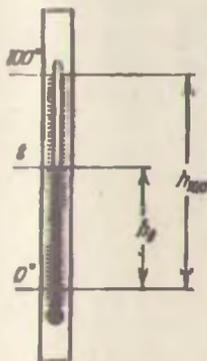


Рис. 2.15.

тонким капилляром. При нагревании ртуть расширяется и ее уровень  $h$  в капилляре поднимается. Шкала и начало отсчета температуры могут быть выбраны произвольно. Наиболее распространенной в международной практике является стоградусная шкала Цельсия. В этом случае за нуль температурной шкалы ( $0^\circ\text{C}$ ) принята температура плавления льда при нормальных условиях, т. е. при давлении  $p=1\text{ атм}$ , а за  $100^\circ$  — температура кипения воды (при тех же условиях). Разделив тогда высоту капилляра  $h_{100}$  между этими двумя точками на 100 равных частей, можно определить температуру  $t$  в градусах Цельсия по отношению высоты поднятия ртути в капилляре  $h_t$  к интервалу между двумя основными постоянными точками, т. е.

$$t = \frac{h_t}{h_{100}} \cdot 100^\circ\text{C}. \quad (19.1)$$

Такое определение температуры пригодно лишь для грубых измерений в быту. При более точных измерениях обнаруживается, что для разных термометрических жидкостей, например для ртутного и спиртового термометров, при одинаковой температуре численные значения отношений  $\frac{h_t}{h_{100}}$

совпадают друг с другом лишь для выбранных постоянных точек. При промежуточных же температурах показания обоих термометров будут несколько расходиться, так как законы расширения различных жидкостей и сосудов, их содержащих, строго говоря, различны.

Для более точного определения температурной шкалы следует воспользоваться идеальным газом. Поскольку, как мы видели в предыдущем параграфе, идеальный газ должен подчиняться уравнению Менделеева — Клапейрона (18.16), то о температуре газа можно судить по изменению его объема или давления.

Водород при давлениях, не превышающих атмосферное, и в довольно широком интервале температур благодаря очень слабому взаимодействию между его молекулами можно практически считать идеальным газом. Поэтому для точных измерений температуры

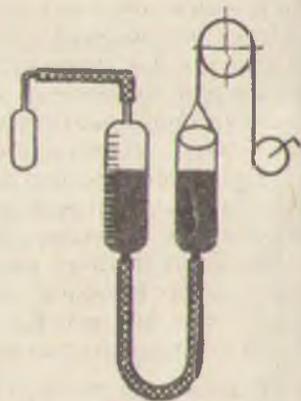


Рис. 2.16.

и установления термометрической шкалы применяют водородный термометр. Резервуар с водородом, находящимся под атмосферным давлением, соединен с U-образной трубкой, заполненной ртутью и открытой с одной стороны в атмосферу (рис. 2.16).

При нагревании водород расширяется. Для сохранения постоянства давления правое колено U-образной трубки опускают до тех пор, пока не сравняются уровни ртути в обоих коленах и тем самым давление водорода не станет равным первоначальному. Из (18.16) тогда следует, что  $V \sim T$ , и по изменению объема можно определить температуру. Условливаясь разность температур между точкой кипения воды и точкой таяния льда считать равной  $100^\circ$ , можно очень точно установить температурную шкалу и определить начало отсчета  $T=0$ .

Имея эталонный водородный термометр, можно точно проградуировать любой жидкостный термометр, вне зависимости от конкретного закона расширения термометрической жидкости. Таким же образом можно проградуировать и любые другие термометры, основанные на зависимости иных свойств тел от их температуры.

В современной технике наиболее удобными являются электрические методы измерения температуры. В так называемых термометрах сопротивления используется изменение сопротивления металлов и полупроводников при их нагревании. Термоэлементами или термопарами измеряется электродвижущая сила, возникающая при нагревании места контакта (спая) двух металлов или полупроводников. Электрические методы измерения температур более подробно будут рассмотрены в томе II.

При любом методе определения температуры на температурной шкале можно отметить некоторую точку, имеющую абсолютное значение. Эта точка отвечает температуре, при которой отсутствует хаотическое (тепловое) движение молекул, и носит название абсолютного нуля температуры ( $T=0^\circ$  Абс.  $=0^\circ\text{K}$ ). В случае идеального газа значению  $T=0$  отвечает отсутствие кинетической энергии поступательного движения молекул ( $\overline{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{3}{2}kT=0$ ) и отсутствие давления ( $p=nkT=0$ ).

Не следует думать, что при абсолютном нуле температуры прекращается всякое движение частиц вещества. Даже если все молекулы газа остановятся, то внутри них будут двигаться электроны по определенным орбитам вокруг ядер, определенным образом будут участвовать в движении протоны и нейтроны внутри ядер. Ниже мы убедимся, что,

например, средняя кинетическая энергия свободных электронов в металле при абсолютном нуле в сотни раз превышает среднюю кинетическую энергию молекул газа при комнатной температуре и т. д.

*Абсолютный нуль температуры означает (если не иметь в виду заведомо идеализированный объект — идеальный газ) не отсутствие движения, но такое состояние тела, при котором дальнейшее уменьшение интенсивности этого движения за счет отдачи его энергии окружающим телам невозможно.*

Следовательно, при абсолютном нуле система находится в состоянии с наименьшей возможной энергией. Характер этого состояния зависит от конкретных свойств составляющих систему частиц.

## § 20. Скорости газовых молекул. Распределение Максвелла

Согласно (18.21) средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре:

$$\overline{\varepsilon}_{\text{пост}} = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2}kT. \quad (20.1)$$

Отсюда можно найти среднюю квадратичную скорость молекул

$$c_{\text{квдр}} = \sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_0}}; \quad (20.2)$$

она растет прямо пропорционально квадратному корню из абсолютной температуры. Для нахождения численных значений скоростей газовых молекул необходимо знать их массы и число Авогадро. Однако поскольку произведение

$$mN_0 = \mu \quad (20.3)$$

есть масса одной килограмм-молекулы, или молекулярный вес, то для расчета  $\sqrt{\overline{c^2}}$  можно воспользоваться соотношением

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (20.4)$$

уже не содержащим микроскопических характеристик отдельных молекул. При комнатной температуре  $t = 20^\circ\text{C}$ , т. е.  $T = 293^\circ\text{K}$ , средняя квадратичная скорость молекул кислорода  $\text{O}_2$  равна

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \text{ Дж/кмоль} \cdot \text{град} \cdot 293 \text{ град}}{32 \text{ кг/кмоль}}} \approx 480 \text{ м/сек.}$$

При той же температуре молекулы водорода  $\text{H}_2$  с молекулярным весом  $2 \text{ кг/кмоль}$ , т. е. в 16 раз меньшим, будут иметь скорость в  $\sqrt{16}=4$  раза большую, т. е. около  $2 \text{ км/сек.}$

Из приведенных чисел видно, что молекулы окружающего нас воздуха движутся со скоростями порядка скорости полета пули. Для экспериментальной проверки формулы (20.4) можно произвести измерение скоростей молекул методами, аналогичными некоторым методам, применяемым в технике для измерения скорости полета пули.

Схема одного из простейших методов определения скорости пули изображена на рис. 2.17. Два бумажных диска насажены на расстоянии  $l$  друг от друга на общую ось,

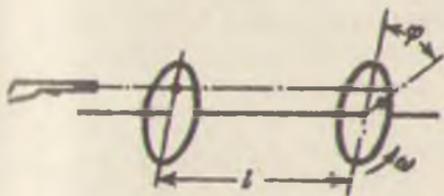


Рис. 2.17

вращающуюся с известной угловой скоростью  $\omega$ . Пулей простреливают оба диска параллельно оси вращения. Двигаясь со скоростью  $v$ , пуля пробьет сначала первый диск, затем пройдет расстояние между дисками  $l$  за время  $t = \frac{l}{v}$  и, на-

конец, пробьет второй диск. За время полета пули между дисками диски успевают повернуться на угол

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{l}{v}.$$

Измеряя угол  $\varphi$  между радиусами, на которых расположены пробойны в обоих дисках, можно отсюда найти искомую скорость пули  $v$  по величинам  $\omega$ ,  $l$  и  $\varphi$ , определяемым из опыта:

$$v = \frac{\omega l}{\varphi}. \quad (20.5)$$

Если, например, мотор, вращающий диски, делает  $3000 \text{ об/мин}$  ( $\omega = 100\pi \text{ рад/сек}$ ) и угол между пробойнами составляет  $30^\circ$  ( $\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ рад}$ ) при расстоянии  $l = 1 \text{ м}$ , то скорость пули равна:

$$v = \frac{100 \frac{1}{\text{сек}} \cdot 1 \text{ м}}{\frac{\pi}{6}} = 600 \text{ м/сек.}$$

Идея этого метода была положена Штерном в основу опыта, позволившего непосредственно измерить скорости теплового движения молекул. Схема опыта Штерна изображена на рис. 2.18, а. Два коаксиальных цилиндра вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ . По оси натянута платиновая проволочка, покрытая слоем серебра и нагреваемая электрическим током. Температура проволочки может быть измерена по ее электрическому сопротивлению или ее свечению оптическим пирометром. Серебро одноатомно, т. е. его молекулы идентичны с атомами. При температуре 1200 °С атомы серебра испаряются с поверхности проволочки и разлетаются во все стороны со скоростями, которые могут быть рассчитаны теоретически по формуле (20.4).

Воздух из всей установки предварительно откачивается, чтобы летящие атомы серебра не испытывали на своем пути столкновений с молекулами воздуха.

Через узкую щель вдоль внутреннего цилиндра вылетает пучок атомов серебра, скорости которых направлены вдоль радиусов.

Пока атом серебра, летящий со скоростью  $c$ , проходит расстояние между цилиндрами  $l$ , цилиндры успевают повернуться на угол

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{l}{c}.$$

Попадая на холодную стенку внешнего цилиндра, атомы серебра осаждаются, образуя серебряную полоску, которая представляет собой изображение щели внутреннего цилиндра на внешнем цилиндре, сдвинутое на угол  $\varphi$  (рис. 2.18, б). Измеряя этот угол, можно найти скорость теплового движения атомов серебра

$$c = \frac{\omega l}{\varphi}, \quad (20.6)$$

и проверить соответствие измеренного значения ее с выведенным из молекулярно-кинетической теории [формула (20.4)].

Прибор Штерна совершал 45 об/сек, и смещение сереб-

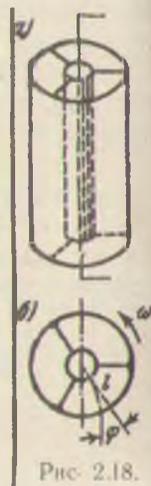


Рис. 2.18.

ряной полоски было достаточно хорошо заметным. Совпадение измеренных значений скоростей молекул с рассчитанными теоретически оказалось исключительно хорошим.

Вследствие хаотичности теплового движения скорости отдельных атомов серебра несколько отличаются друг от друга, и серебряная полоска на внешнем цилиндре оказалась размазанной, как показано на рис. 2.19. Различная толщина отложившегося серебра при разных значениях угла смещения  $\varphi$  указывает на то, что некоторые значения скорости молекул  $c$  встречаются чаще, а другие — реже.

Рис. 2.19.

Если молекулы, имеющие скорость  $c$ , будут попадать в точки внешнего цилиндра, сдвинутые относительно щели на угол  $\varphi$ , то более быстрые молекулы, имеющие скорость  $c + \Delta c$ , попадут в точки внешнего цилиндра, сдвинутые на соответственно меньший угол  $\varphi - \Delta\varphi$ . Изучая

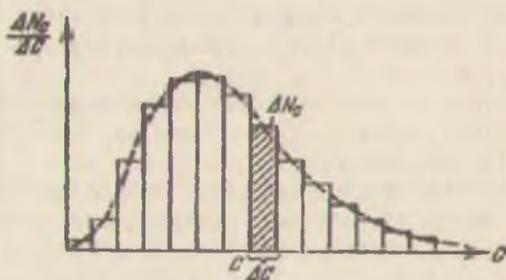


Рис. 2.20.

относительное количество атомов на отдельных полосках шириной  $\Delta\varphi$ , можно найти число молекул  $\Delta N_c$ , скорости которых заключены в интервале от  $c$  до  $c + \Delta c$ .

Изобразим полученный результат графически (рис. 2.20). По оси абсцисс отложим различные возможные значения скоростей молекул  $c$  и интервалов этих скоростей  $\Delta c$ . Число молекул  $\Delta N_c$ , скорости которых лежат в интервале от  $c$  до  $c + \Delta c$ , изобразим на графике площадью заштрихованного прямоугольника, построенного на интервале  $\Delta c$  как основании. Из очевидного тождества

$$\Delta N_c = \frac{\Delta N_c}{\Delta c} \Delta c$$

следует, что высота такого прямоугольника, т. е. его ордината, равна  $\Delta N_c / \Delta c$  и представляет собой число молекул, скорости которых заключены в единичном интервале  $\Delta c = 1$  вблизи значения  $c$ . Заметим, что сумма площадей всех прямоугольников равна сумме всех  $\Delta N_c$ , т. е. равна полному числу молекул  $N$ .

Разбив ось абсцисс на интервалы  $\Delta c$  (например, от 0 до 1 м/сек, от 1 м/сек до 2 м/сек и т. д.) и построив на каждом из этих интервалов соответствующий ему прямоугольник высотой  $\frac{\Delta N_c}{\Delta c}$ , мы получим наглядное изображение распределения числа молекул по скоростям. Более высокие прямоугольники показывают, что данное значение скорости  $c$  (точнее, интервала скоростей от  $c$  до  $c + \Delta c$ ) встречается чаще, так как молекул, обладающих такими скоростями, больше, чем молекул с другими значениями скорости.

Разбивая ось абсцисс на достаточно малые интервалы и переходя к пределу, т. е. заменяя приращения дифференциалами, мы заменим ступенчатую линию сплошной кривой

$$\frac{dN}{dc} = f(c), \quad (20.7)$$

изображенной на рис. 2.20 пунктиром. Эта кривая является изображением функции  $f(c)$ , называемой функцией распределения.

Как и ранее, сумма всех  $dN$ , равная полному числу молекул  $N$ , изобразится площадью, заключенной между кривой  $f(c)$  и осью абсцисс.

Математическое выражение функции распределения по скоростям молекул идеального газа при тепловом равновесии (20.7) было впервые получено Максвеллом в 1860 г. с помощью применения методов теории вероятности. Позднее Больцман дал более строгое обоснование полученного Максвеллом вывода. Не останавливаясь на громоздких вычислениях, приведем окончательный результат:

$$dN_c = f(c)dc = N \cdot 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mc^2}{2kT}} c^2 dc, \quad (20.8)$$

где  $N$  — полное число молекул в объеме. Максвелловская функция распределения молекул по скоростям  $f(c)$  изображена на рис. 2.21. Эта функция стремится к нулю при  $c \rightarrow 0$  и  $c \rightarrow \infty$ . Следовательно, относительное число молекул в газе, обладающих очень малыми или очень большими скоростями (по сравнению со средними), ничтожно мало.

Функция  $f(c)$  имеет максимум при значении скорости, равном

$$c_v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (20.9)$$

являющимся наиболее вероятным значением скорости. Молекулы со скоростями, близкими к  $c_v$ , встречаются в газе особенно часто.

Кривая (20.8) несимметрична относительно  $c_v$ , так как в газе имеется сравнительно небольшое число молекул с

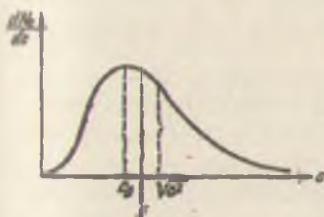


Рис. 2.21.

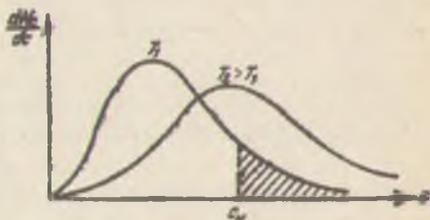


Рис. 2.22.

очень большими скоростями. Поэтому средняя арифметическая  $\bar{c}$  и средняя квадратичная  $\sqrt{c^2}$  скорости сдвинуты относительно нее несколько вправо. Вычисления показывают, что

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (20.10)$$

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (20.11)$$

$$c_v : \bar{c} : \sqrt{c^2} = 1 : 1,13 : 1,22. \quad (20.12)$$

При возрастании температуры средняя скорость  $\bar{c}$  и наиболее вероятная скорость  $c_v$  увеличиваются пропорционально  $\sqrt{T}$  и максимум распределения (20.8) сдвигается вправо, как это показано на рис. 2.22. При этом число медленных молекул (малые  $c$ ) убывает, а число быстрых возрастает, но площадь под кривой  $f(c)$ , равная полному числу всех молекул газа  $N$ , остается постоянной.

Хотя относительное число наиболее быстрых молекул с энергиями, значительно превышающими среднюю,

$$\bar{\epsilon}_{\text{поср}} = \frac{m\bar{c}^2}{2} = \frac{3}{2} kT \quad (20.13)$$

ничтожно мало, в ряде случаев они играют исключительно важную роль. Так, при химических реакциях в первую очередь реагируют эти, обладающие наибольшей кинетиче-

ской энергией, молекулы, и скорость реакции прямо пропорциональна их числу. Для определения числа  $N_m$  молекул, скорости которых превышают заданную величину  $c_m$  (а энергия — величину  $\epsilon_m = \frac{mc_m^2}{2}$ ), необходимо найти заштрихованную на рис. 2.22 площадь «хвоста» максвелловского распределения. Вычисления дают, что

$$N_m \approx Ne^{-\frac{mc_m^2}{2kT}} = Ne^{-\frac{\epsilon_m}{kT}}. \quad (20.14)$$

Отсюда видно, что, например, относительное число молекул, энергия которых превышает величину  $\epsilon_m = 2\bar{\epsilon}_{\text{пост}} = 3kT$ , равно  $e^{-\frac{3kT}{kT}} = e^{-3} \approx \frac{1}{20}$ , т. е. составляет 5 %, а величину  $4\bar{\epsilon}_{\text{пост}} = 6kT$ , равно  $e^{-\frac{6kT}{kT}} = e^{-6} \approx \frac{1}{400}$ , т. е. составляет 0,25 %.

С увеличением температуры показательная функция (20.14) очень круто возрастает. Это объясняет резкое увеличение скорости химических реакций с повышением температуры.

При каждом столкновении молекул в газе изменяются не только направления, но и величины скоростей обеих сталкивающихся молекул. Скорости одних молекул при этом увеличиваются, а других — уменьшаются. Но число молекул, скорости которых лежат в любом определенном интервале скоростей  $\Delta c$ , не меняется. Если в результате столкновений в единицу времени  $\Delta t$  молекул, обладавших скоростью в интервале  $\Delta c$ , изменят свою скорость, то ровно столько же молекул, обладавших раньше другими скоростями, приобретут в результате столкновений скорость в пределах  $\Delta c$ . *Раз установившееся максвелловское распределение по скоростям в дальнейшем сохраняется.*

Более того, как показал Больцман, в результате взаимодействия между молекулами, *каким бы ни было исходное распределение скоростей молекул, в конце концов (как правило, весьма быстро) устанавливается максвелловское распределение.*

При этом, конечно, не имеются в виду относительно малые отклонения от максвелловского распределения — флуктуации, неизбежные в силу хаотичного движения молекул. Максвелловское распределение есть статистический за-

кон, верный с тем большей точностью, чем большее число молекул находится в газе.

## § 21. Газ в поле тяжести. Барометрическая формула

Благодаря наличию хаотического теплового движения молекулы газа распределяются по всему предоставленному ему объему, равномерно заполняя последний только в том случае, если на молекулы газа не действуют внешние силы. Атмосферный воздух, окружающий Землю, не ограничен никакими стенками, но не разлетается по всему мировому пространству. Этому препятствует сила земного притяжения.

С другой стороны, при отсутствии теплового движения ( $T=0$ ) каждая отдельная молекула газа по законам механики должна была бы падать вниз. Все молекулы газа должны были бы скопиться у поверхности земли, где их потенциальная энергия и минимальна.

Благодаря борьбе этих двух взаимно противоположных тенденций устанавливается подвижное равновесие, при котором концентрация молекул воздуха  $n$  у поверхности земли максимальна и постепенно уменьшается с высотой. Из выведенного в § 18 соотношения

$$p = nkT \quad (21.1)$$

следует, что по мере подъема над уровнем земли и уменьшения  $n$  будет также уменьшаться и атмосферное давление. Зависимость атмосферного давления  $p$  от высоты  $z$  носит название барометрической формулы.

Для вывода барометрической формулы используем некоторые упрощающие предположения.

1) Атмосферное давление становится пренебрежимо малым уже на высоте 100—200 км, которая является малой по сравнению с радиусом Земли ( $R_3 \approx 6370$  км). Поэтому можно считать ускорение силы тяжести  $g$  практически постоянным и не зависящим от высоты.

2) Даже у самой поверхности Земли давление и плотность воздуха сравнительно невелики. Поэтому воздух повсюду можно считать идеальным газом.

Массу каждой молекулы воздуха обозначим через  $m$ , пренебрегая в первом приближении небольшой разницей молекулярных весов основных компонентов воздуха — азота ( $\mu = 28$  кг/кмоль) и кислорода ( $\mu = 32$  кг/кмоль).

3) Температура воздуха с высотой понижается на несколько десятков градусов. Поскольку у поверхности земли абсолютная температура  $T \approx 300$  °К, то мы пренебрежем этими изменениями температуры и произведем расчет для

так называемой изотермической атмосферы, считая  $T = \text{const}$ .

Выделим мысленно на высоте  $z$  над уровнем земли цилиндрический объем воздуха высотой  $dz$  и площадью основания  $S$  (рис. 2.23). Давление воздуха на высоте  $z$  обозначим через  $p$ , а на высоте  $z + dz$  соответственно через  $p + dp$ . Поскольку давление с высотой падает, то его приращение будет отрицательным ( $dp < 0$ ).

На каждую отдельную молекулу массы  $m$  действует сила тяжести  $mg$ . Число молекул в выделенном элементе равно произведению его объема  $S dz$  на число молекул в единице объема  $n$ . Полный вес молекул в выделенном элементе равен

$$dF = mgnS dz. \quad (21.2)$$

Кроме веса  $dF$ , на молекулы в рассматриваемом объеме действует сверху сила давления  $(p + dp)S$  и снизу сила давления  $pS$ . Под действием этих трех сил объем находится в равновесии. Следовательно,

$$nmgs dz + (p + dp)S = pS. \quad (21.3)$$

Сокращая на  $S$  и преобразуя это равенство, получаем выражение для изменения давления  $dp$  при подъеме на высоту  $dz$ :

$$dp = -nmg dz. \quad (21.4)$$

Заменив согласно (21.1)  $n$  на  $p/kT$ , преобразуем (21.4) к виду

$$-\frac{dp}{p} = \frac{mg}{kT} dz. \quad (21.5)$$

Отсюда следует, что на любой высоте  $z$  при подъеме на одинаковую величину  $dz$  давление уменьшается на одинаковую долю  $-dp/p$  от своей первоначальной величины. Иначе говоря, когда высота растет по закону арифметической прогрессии, то давление убывает по закону геометрической прогрессии.

Перепишем (21.5) в виде

$$\frac{dp}{p} + \frac{mg}{kT} dz = 0.$$

Заметим, что отношение  $dp/p$  есть дифференциал натурального логарифма  $d(\ln p)$ , а постоянный множитель  $mg/kT$  можно внести под знак дифференциала. Тогда

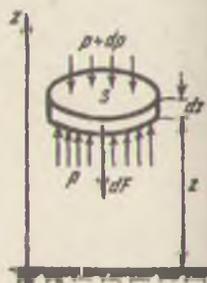


Рис. 2.23.

$$d(\ln p) + d\left(\frac{mgz}{kT}\right) = d\left[\ln p + \frac{mgz}{kT}\right] = 0. \quad (21.6)$$

Из равенства нулю дифференциала величины, стоящей в квадратных скобках, следует, что сама эта величина постоянна. Обозначим эту постоянную через  $\ln p_0$ . Тогда

$$\ln p + \frac{mgz}{kT} = \ln p_0. \quad (21.7)$$

Из (21.7) следует, что на уровне земли при  $z=0$   $p=p_0$ . Таким образом, константа  $p_0$  представляет собой атмосферное давление на поверхности земли. Определим  $p$ :

$$\ln p - \ln p_0 = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{mgz}{kT}.$$

Отсюда

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{mgz}{kT}},$$

т. е.

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}. \quad (21.8)$$

Для получения соотношения, удобного для вычисления  $p$  на разных высотах, воспользуемся тем, что

$$\frac{m}{k} = \frac{mN_0}{kN_0} = \frac{\mu}{R}.$$

Тогда барометрическая формула примет вид

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{\mu gz}{RT}}. \quad (21.9)$$

График зависимости (21.9) изображен на рис. 2.24.

Определим высоту  $z_{1/2}$ , на которой давление газа падает вдвое,

$$p(z_{1/2}) = \frac{1}{2} p_0.$$

Подставляя в (21.9), получим:

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{\mu gz_{1/2}}{RT}}, \text{ откуда} \quad z_{1/2} = \frac{RT}{\mu g} \ln 2 = 0,693 \frac{RT}{\mu g}. \quad (21.10)$$

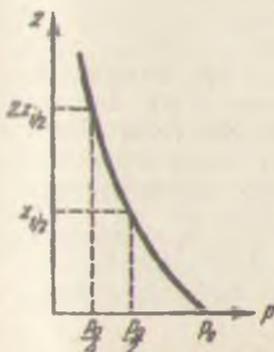


Рис. 2.24.

Для воздуха, считая его средний мо-

лекулярный вес  $\mu = 29$  кг/кмоль, найдем:

$$z_{1/2} = 0,693 \frac{8,31 \frac{\text{кдж}}{\text{кмоль} \cdot \text{град}} \cdot 293 \text{ град}}{29 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}} = 6 \cdot 10^3 \text{ м} = 6 \text{ км.}$$

При подъеме на высоту 6 км над уровнем моря атмосферное давление падает до половины первоначального значения. При подъеме на высоту 12 км давление упадет до  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$  первоначального и т. д.

Измеряя с помощью барометра давление  $p$  в горах, можно согласно (21.9) определить высоту места над уровнем моря. На этом принципе основано устройство авиационных высотомеров (альтиметров).

Уравнение (21.4), лежащее в основе вывода барометрической формулы, показывает, что разность давлений на двух каких-либо уровнях равна весу столба газа с площадью поперечного сечения  $S = 1$ , заключенного между этими уровнями. На бесконечной высоте  $z \rightarrow \infty$  давление  $p(z) \rightarrow p_0 e^{-\infty} = 0$ , т. е. стремится к нулю. Следовательно, давление  $p$  на некоторой высоте  $z$  численно равно весу столба атмосферы с единичным поперечным сечением, находящегося над этим уровнем.

Поскольку  $p$  прямо пропорционально  $n$ , то для концентрации газовых молекул получается из (21.8) аналогичная зависимость

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}, \quad (21.11)$$

где согласно (21.8) и (21.1) число молекул в единице объема газа у поверхности земли равно

$$n_0 = \frac{p_0}{kT}. \quad (21.12)$$

Анализируя полученные соотношения, мы видим (см. § 7), что величина

$$mgz = u(z) \quad (21.13)$$

представляет собой потенциальную энергию одной молекулы, поднятой в поле тяжести на высоту  $z$  ( $u(z) = 0$  при  $z = 0$ , т. е.  $u(0) = 0$ ). Соотношение (21.11) тогда можно переписать в виде

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{u(z)}{kT}}. \quad (21.14)$$

Изменение концентрации молекул с высотой зависит от соотношения между энергией теплового движения  $kT$  и потенциальной энергией молекул  $u(z)$  на данной высоте.

Как показал Больцман, соотношение (21.14) остается справедливым в самом общем случае при наличии любых внешних сил (а не только в поле тяжести). Поэтому формула (21.14) носит название распределение Больцмана.

## § 22. Опыты Перрена. Определение числа Авогадро

Вернемся к формулам, описывающим изменение давления (21.8) или концентрации молекул (21.11) с изменением высоты столба газа, находящегося в поле тяготения. Отношение давлений или плотностей на двух высотах равно

$$\frac{p(z_1)}{p(z_2)} = \frac{n(z_1)}{n(z_2)} = \frac{e^{-\frac{mg}{kT}z_1}}{e^{-\frac{mg}{kT}z_2}} = e^{-\frac{mg}{kT}(z_1-z_2)} \quad (22.1)$$

Обратим внимание на следующие особенности полученного выражения.

1. *Отношение давлений и отношение числа частиц зависит только от разности высот ( $z_1 - z_2$ ) но не самих высот.*

Отмеченная особенность иллюстрировалось рис. 2.24.

2. *Скорость изменения давления и концентрации частиц зависит от молекулярного веса газа.* При увеличении веса молекул в  $a$  раз то же изменение давления будет иметь место при меньшем в  $a$  раз подъеме:

$$e^{-\frac{mg}{kT}(z_1-z_2)} = e^{-\frac{(am)g}{kT} \frac{z_1-z_2}{a}} \quad (22.2)$$

Если бы земная атмосфера состояла из чистого кислорода, то при  $0^\circ\text{C}$  давление падало наполовину при подъеме на 5 км. В случае чистого водорода с молекулярным весом, в 16 раз меньшим (при  $0^\circ\text{C}$ ), давление убывало бы наполовину при подъеме на высоту  $16 \cdot 5 \text{ км} = 80 \text{ км}$ .

На рис. 2.25 приведено схематическое изображение распределения молекул водорода, гелия и кислорода при одинаковых условиях в поле тяготения.

Перрен поставил опыты, с помощью которых оказалось возможным проверить правильность вывода (22.2). Известно, что мелкие пылинки, будучи взвешены в газе или жидкости, не оседают, но принимают участие в молекулярном движении (броуновское движение). Поскольку полученные выше формулы не содержат каких-либо ограничений масс молекул, нельзя ли применить их и для этого

случая? Другими словами, нельзя ли считать пылинки, или броуновские частицы сверхгигантскими «молекулами» (конечно, не в химическом смысле, а лишь в отношении их распределения в пространстве)?

При массе частицы, превышающей массу молекулы кислорода в  $10^8$  раз, уменьшение концентрации вдвое должно произойти при подъеме на высоту в  $50 \text{ мк} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$  (вместо  $5 \text{ км}$  для кислорода). Если изучается распределение броуновских частиц, взвешенных в воде, то по закону Архимеда вместо истинного веса частицы следует брать разность между весом частицы и весом вытесненной ею воды.

Перрен получал «броуновские частицы» из эмульсии двух смол: гуммигута и мастики. Изготовленные с помощью специальной методики эмульсии содержали шарики одинаковых размеров. Радиусы шариков смолы, использовавшихся для опытов, измерялись тремя различными методами, дававшими расхождение в пределах  $1-2 \%$ . Тем самым достаточно точно определялась масса шариков, так как плотность смол была хорошо известна ( $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ , где  $r$  — радиус шариков,  $\rho$  — плотность смолы).

Эмульсия смолы помещалась в плоскую кювету глубиной  $0,1 \text{ мм}$  (рис. 2.26); кювета закрывалась стеклом, края которого во избежание испарения эмульсии заливались парафином. Наблюдения шариков эмульсии можно было вести, конечно, только с помощью микроскопа, причем были возможны два расположения приборов (рис. 2.27, а и б).

Для точных измерений пригоден способ б. В способе а в поле зрения видны частицы, находящиеся на разной высоте. Если использовать микроскоп с малой глубиной поля зрения, то при способе б виден только один горизонтальный слой препарата толщиной  $\sim 1 \text{ мк}$ . Ограничив поле зрения

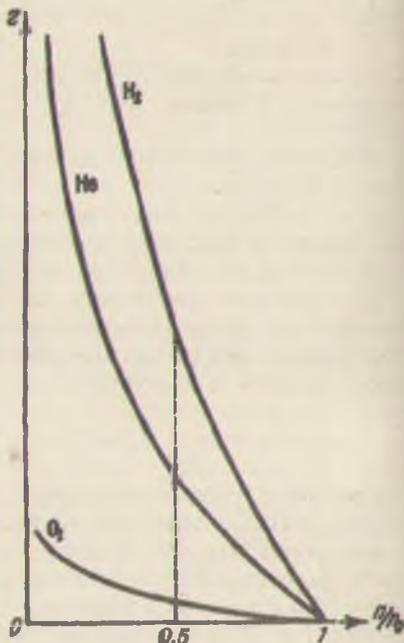


Рис. 2.25.

диафрагмой так, чтобы легко было сразу подсчитать число видимых частиц, можно подсчитать число частиц, наблюдаемых в поле зрения в данный момент и на данной высоте.

Конечно, система броуновских частиц, взвешенных в жидкости,— далеко не идеальный газ. Тем не менее было найдено хорошее соответствие теории и опыта. Использовались шарики смолы самых различных масс: наиболее тяжелые превышали по массе наиболее легкие в 15 000 раз. За счет добавления глицерина вязкость жидкости, в которой перемещались шарики, менялась в 125 раз. С ростом вязкос-

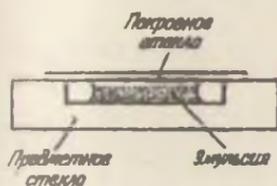


Рис. 2.26.

ти возрастало время, в течение которого устанавливалось правильное распределение частиц по высоте, но оно всегда устанавливалось и, установившись, впоследствии сохранялось. Плотность вещества частиц эмульсии менялась в 6 раз и относительно глицерина даже оказывалась отрицательной, так что число частиц возрастало не книзу, но кверху. Проверялась зависимость от температуры, и при любых условиях, в пределах точности опыта, имело место совпадение с теорией.

В формулу (22.1) неявно входит важная постоянная — число Авогадро  $N_0$ . Поскольку опыты дают хорошее соответствие с теорией, можно попытаться найти ее численное значение. Прологарифмируем формулу (22.1):

$$\ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{mg}{kT} (z_2 - z_1) \quad (22.3)$$

и умножим числитель и знаменатель правой части на  $N_0$ . Приняв во внимание, что  $N_0 k = R$ , получим:

$$\ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{N_0 mg}{RT} (z_2 - z_1)$$

или

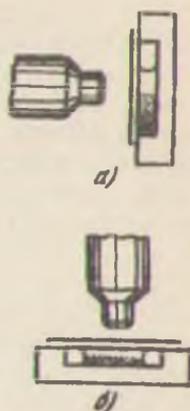


Рис. 2.27

$$N_0 = \frac{RT \ln \frac{n_1}{n_2}}{mg(z_2 - z_1)}. \quad (22.4)$$

Все величины, стоящие в правой части формулы (22.4), определяются из опыта.  $R$  определяется из опытов с газами с помощью уравнения Менделеева — Клапейрона;  $\ln \frac{n_1}{n_2}$  определяется непосредственно наблюдением числа частиц на разных уровнях ( $z_1$  и  $z_2$ ). Масса частицы  $m$ , как уже указывалось, измерялась с помощью трех различных методов. Первые работы Перрена привели к значению

$$N_0 = 6,8 \cdot 10^{26} \text{ атомов/кмоль.}$$

Дальнейшие опыты позволили определить число Авогадро с большей точностью, причем, как оказалось, отклонение от ныне принятого значения  $N_0$  не превышало 1 %.

Зная  $N_0$  и массу килограмм-молекулы  $\mu = N_0 m$ , можно определить массу молекулы любого вещества. По объему  $V_\mu$  килограмм-молекулы жидкости или твердого тела можно оценить объем, приходящийся на 1 молекулу ( $d^3 \approx \frac{V_\mu}{N_0}$ ), а следовательно, и порядок диаметра молекул  $\sqrt[3]{\frac{V_\mu}{N_0}}$ .

Приведем некоторые данные, полученные Перреном: масса атома водорода  $m_{\text{H}} = 1,47 \cdot 10^{-27}$  кг, истинное значение  $m_{\text{H}} = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

Неплохие результаты получились и для диаметров атомов: гелий —  $1,7 \cdot 10^{-10}$  м, аргон —  $2,8 \cdot 10^{-10}$  м, ртуть —  $2,9 \cdot 10^{-10}$  м.

В следующем параграфе мы увидим, что наблюдение частиц эмульсии дает еще один независимый способ определения постоянной Авогадро, а значит, и масс и размеров атомов.

### § 23. Броуновское движение

Рассмотрим подробнее известное уже нам явление броуновского движения. Из описанных работ Перрена следовало, что шарики эмульсии с достаточно хорошим приближением подчиняются законам идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул газа  $\bar{\epsilon}_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m \bar{c}^2$  не зависит от массы молекулы и определяется только температурой газа:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} m \overline{c^2} = \frac{3}{2} kT.$$

Следовательно, такой же средней кинетической энергией будут обладать и сверхгигантские «молекулы» — броуновские частицы. При равных энергиях скорости броуновских частиц, конечно, много меньше молекулярных. Для средней квадратичной скорости имеем

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

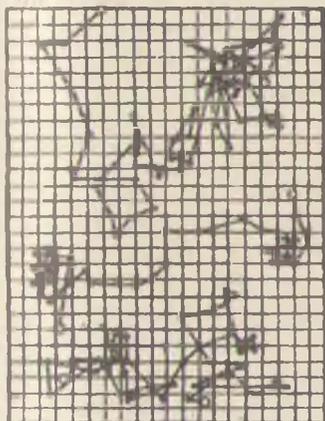


Рис. 2.28.

При массе частиц эмульсии, в  $10^8$  раз большей массы молекулы, их скорости будут в  $\sqrt{10^8} = 10^4$  раз меньше скорости молекул и равны примерно 5—10 см/сек. Однако непосредственное перемещение броуновской частицы с этой скоростью не может наблюдаться. Дело в том, что перемещение частицы не прямолинейно, но меняется весьма часто по величине и направлению. Если отмечать через равные промежутки времени координаты  $x$  и  $y$  какой-либо одной броуновской частицы (игнорируя ее переме-

щения в вертикальном направлении) и полученные таким образом точки соединить прямыми линиями, мы получим картину, весьма напоминающую траекторию молекулы газа. На рис. 2.28 приведены полученные Перреном «траектории» трех броуновских частиц.

16 клеток рисунка отвечают длине 50 мк. Положения броуновских частиц отмечались через 30 сек. Расстояние между начальной и конечной точками много меньше всей длины ломаной. Однако и полученные таким образом ломаные не равны истинной длине траектории.

Если бы применялся микроскоп с большим увеличением, а интервал наблюдения составлял 1 сек, каждый отрезок ломаной в свою очередь оказался бы ломаной, состоящей из 30 отрезков, причем по своему характеру эта ломаная отличалась бы от большой только своим масштабом, но не

формой. Таким образом, знание средней квадратичной скорости еще не позволяет сделать заключение о пути, проходимом броуновской частицей за определенное время.

Точное решение задачи о движении броуновской частицы дали Эйнштейн и Смолуховский в 1905—1906 гг. Они нашли, что за время  $t$  проекция смещения броуновской частицы на какое-либо направление, например на ось  $x$ , пропорциональна не времени (как это было бы при прямолинейном движении), но корню квадратному из времени:

$$x \sim \sqrt{t}. \quad (23.1)$$

Точное решение задачи приводит к следующему результату:

$$x^2 = \frac{kT}{3\pi r \eta} t, \quad (23.2)$$

где через  $r$  обозначен радиус броуновской частицы,  $\eta$  — вязкость жидкости. Так как

$$kT = \frac{RT}{N_0},$$

то, подставляя это выражение в (23.2), получаем:

$$N_0 = \frac{RT}{3\pi r \eta} \frac{t}{x^2}. \quad (23.3)$$

Справа в (23.3) все величины определяются непосредственно опытным путем. Таким образом, анализ броуновского движения дает еще один способ определения числа Авогадро.

Согласие теории с опытом оказалось столь же хорошим, как и в опытах, описанных в предыдущем параграфе.

Изготовив зерна эмульсии, на которых были заметны пятнышки, Перрен сумел провести ряд наблюдений и над вращательным движением броуновских частиц, теория которого также была дана Эйнштейном. Эти наблюдения, более трудные и, конечно, менее точные, также показали в пределах погрешности хорошее соответствие теории с опытом.

Итак, мы видим, что хаотическое тепловое движение присуще не только микроскопическим молекулам, но и макроскопическим телам. При одинаковой температуре средняя энергия поступательного движения

$$\frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2}kT \quad (23.4)$$

одинакова для любой микроскопической частицы и макроскопического тела. Различие в массах тел приводит лишь к резкому количественному различию скоростей этого хаотического движения. Если молекулы газа движутся со скоростью пули, то камень с массой  $m=1$  кг в целом должен иметь среднюю квадратичную скорость поступательного движения

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1}} \approx 10^{-10} \text{ м/сек.}$$

Такие огромные количественные различия в скоростях теплового движения молекул, броуновских частиц и «камень» обуславливают и огромную качественную разницу в их свойствах. Молекулы газа непрерывно перемещаются на расстояния, много бóльшие их размеров, и эти перемещения определяют поведение газа в замкнутом сосуде и в свободной атмосфере. Напротив, для макроскопических тел, таких как камни, хаотические перемещения ничтожно малы по сравнению с их размерами и практически никак не сказываются на поведении последних.

В измерительной технике, однако, представляют значительный интерес и промежуточные случаи. Легкие рамочки и нити прецизионных высокочувствительных приборов начинают совершать хотя и слабые, но уже заметные флуктуационные колебания. Слабые токи в электронных лампах начинают испытывать заметные искажения вследствие флуктуаций, возникающих в различных частях электрической схемы и т. д.

Эти флуктуационные явления в ряде случаев ставят пределы возможной точности измерений и требуют специального внимательного анализа.

В настоящей главе мы разобрали ряд основных выводов молекулярно-кинетической теории применительно к предельному случаю идеального газа и сопоставили полученные результаты с опытом.

Блестящее подтверждение всех этих выводов на опыте убедительно доказывает правильность основных положений кинетической теории и методов статистической физики.

Особой простотой и наглядностью отличаются опыты Перрена, описанные в последних двух параграфах. Как отмечал сам Перрен, в результате его опытов стало уже невозможным отрицать объективную реальность молекул.

Становится видимым и движение молекул — броуновское движение есть его воспроизведение. Точнее, оно и есть собственно молекулярное движение, ибо броуновская частица есть не что иное, как огромная «молекула» (конечно, только в отношении движения, но не химическом).

## ГЛАВА VII ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

### § 24. Явления переноса

Молекулы пахучей жидкости, испаряясь, перемещаются среди молекул воздуха даже при отсутствии конвекции. При обычных температурах молекулы движутся со скоростью пули. Однако мы, находясь в одном конце комнаты, не можем почувствовать через тысячные доли секунды запах жидкости, пролитой в другом конце комнаты. В спокойном воздухе молекулы пахучего вещества дойдут до противоположного конца комнаты за сравнительно большой промежуток времени. Это кажущееся противоречие с выводами кинетической теории объясняется тем, что движущаяся в газе молекула непрерывно сталкивается со встречными молекулами и при этом каждый раз изменяет направление своего движения. Таким образом, молекула описывает довольно сложный ломаный путь, похожий на траекторию броуновской частицы, изображенную на рис. 2.28, и лишь весьма медленно удаляется от своего первоначального положения.

Постепенное распространение в газе молекул примеси от места их ввода в газ носит название диффузии.

Пусть в газе движется какое-либо тело (человек, поезд, автомобиль или самолет) с некоторой скоростью  $v$ . До сих пор мы считали, что столкновения молекул газа с поверхностью таких тел происходят по закону удара абсолютно упругих шаров. В действительности же молекулы, ударяющиеся о поверхность тела, частично «прилипают» к ней — адсорбируются, а через некоторое время «испаряются» с нее. Если тело в газе неподвижно и имеет одинаковую с ним температуру, то распределения по скоростям молекул, падающих на поверхность тела, и молекул, покидающих его, отличаются друг от друга так, что одно является как бы зеркальным отражением другого. При этом остается справедливым расчет, который был произведен при вычислении

давления газа. Если же тело движется, то при абсолютно упругих столкновениях будет меняться лишь нормальная к поверхности тела составляющая скорости молекулы. При адсорбции же с последующим испарением молекулы и твердое тело будут обмениваться и тангенциальными к поверхности твердого тела составляющими скорости. Для простоты можно представлять, что молекулы, ударяющиеся о поверхность этого тела, будут увлекаться последним и, отскакивая, приобретут дополнительную скорость  $v$ .

Таким образом, при взаимодействии со сталкивающейся молекулой массы  $m$  тело передаст последней некоторое небольшое количество движения  $mv$  в направлении своего движения. В процессе многочисленных столкновений движущееся тело будет, таким образом, передавать газу часть своего количества движения. Газ при этом будет ускоряться, на границе с твердым телом на него будет действовать суммарная средняя сила  $F$  в направлении движения тела. По третьему закону динамики на тело со стороны газа будет действовать сила —  $F$ , замедляющая его движение, — сила трения.

Такая же сила трения будет действовать и между двумя соседними слоями газа, движущимися по какой-либо причине с различными скоростями. Это явление носит название внутреннего трения, или вязкости газа.

Наконец, если в соседних слоях газа создана или поддерживается разная температура, то между ними будет происходить обмен тепла. Средняя энергия молекул газа, пропорциональная согласно (18.19) абсолютной температуре  $T$ , в обоих слоях будет различной. Благодаря хаотическому движению, молекулы в обоих слоях будут перемешиваться и средние энергии, а следовательно, и температуры слоев будут стремиться выравняться. При этом будет наблюдаться перенос энергии от более нагретых к более холодным слоям. Этот процесс носит название теплопроводности.

В процессе диффузии происходит перенос вещества примеси из областей с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией этой примеси. При внутреннем трении в газе переносится количество движения. Наконец, при теплопроводности мы наблюдаем перенос тела от более нагретых областей к более холодным.

В основе всех этих трех различных физических явлений лежит один и тот же молекулярный механизм — хаотическое движение и перемешивание молекул. Общность механизма, обуславливающего все эти явления переноса, приводит к тому, что их закономерности долж-

ны быть похожи друг на друга, а количественные характеристики — тесно связаны друг с другом.

Как видно при предварительном рассмотрении явления диффузии, скорость этого процесса определяется частотой столкновений со встречными молекулами и путем, проходимым молекулой от одного столкновения до следующего, называемым длиной свободного пробега. Поэтому для вывода основных закономерностей явлений переноса с помощью молекулярно-кинетической теории необходимо предварительно определить длину свободного пробега молекул в газах и выяснить ее зависимость от состояния газа.

### § 25. Число столкновений и длина свободного пробега молекул в газе

На рис. 2.29 изображена траектория движения молекулы в газе. Величина  $l_i$  представляет собой путь, который пролетает молекула свободно от одного столкновения до следующего, — длину свободного пробега молекулы. Вследствие хаотичности молекулярного движения величины последовательных длин свободных пробегов  $l_i$  постоянно меняются. Неизменным при данных условиях остается лишь их среднее значение, которое мы обозначим через  $\bar{l}$  или просто  $l$ :

$$l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} l_i, \quad (25.1)$$

и назовем средней длиной свободного пробега.

Теоретическое вычисление величины  $l$  возможно на основе конкретной модели газа. Примем для упрощения расчета следующую модель идеального газа. Будем считать, что молекулы газа являются твердыми шариками одинакового диаметра  $d$ , взаимодействующими лишь при непосредственном соприкосновении по законам столкновения упругих шаров. Тем самым, в отличие от предыдущей главы, мы учтем протраженность молекул.

Пусть до столкновения молекулы имели скорости  $c_1$  и  $c_2$ . Величины этих скоростей, их направления, а следовательно, и угол  $\theta$  между ними (рис. 2.30) при каждом столкновении

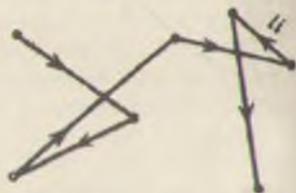


Рис. 2.29.

могут быть различными. Введем относительную скорость движения первой молекулы относительно второй

$$c_{\text{отн}} = c_1 - c_2. \quad (25.2)$$

Из треугольника на рис. 2.30 по теореме косинусов имеем, что

$$c_{\text{отн}}^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \cos \theta. \quad (25.3)$$

Поскольку среднее значение суммы нескольких величин равно сумме средних значений этих величин, то

$$\overline{c_{\text{отн}}^2} = \overline{c_1^2} + \overline{c_2^2} - 2\overline{c_1c_2 \cos \theta} \quad (25.4)$$

Среднее значение квадратов абсолютных скоростей всех молекул одинаково:

$$\overline{c_1^2} = \overline{c_2^2} = \overline{c^2}. \quad (25.5)$$

Для нахождения последнего слагаемого в (25.4) примем во внимание, что направление движения сталкивающихся молекул может быть самым произвольным, а угол  $\theta$  с одинаковой вероятностью может принимать значения как меньше  $\pi/2$ , так и больше  $\pi/2$ . Поэтому  $\cos \theta$  может с равной вероятностью иметь как положительные, так и отрицательные значения, и среднее арифметическое этих значений равно нулю:

$$\overline{\cos \theta} = 0. \quad (25.6)$$

Таким образом,

$$\overline{c_{\text{отн}}^2} = 2\overline{c^2} \quad \text{или} \quad \sqrt{\overline{c_{\text{отн}}^2}} = \sqrt{2} \sqrt{\overline{c^2}}, \quad (25.7)$$

т. е. средние значения относительных скоростей молекул в  $\sqrt{2}$  раз больше соответствующих средних значений абсолютных скоростей.

Точный расчет числа столкновений, испытываемых молекулой в единицу времени, производится методами статистики и весьма сложен. Поэтому мы ограничимся следующим приближением. Будем считать все молекулы неподвижными, за исключением одной, движущейся относительно них со средней скоростью

$$\overline{c_{\text{отн}}} = \overline{c} \cdot \sqrt{2}. \quad (25.8)$$

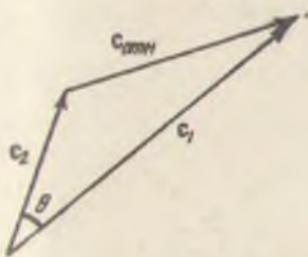


Рис. 2.30.

В результате соударений с другими молекулами центр рассматриваемой молекулы будет двигаться по ломаной линии, изображенной на рис. 2.31. Всякий раз, когда центр соседней молекулы окажется на расстоянии, не большем  $d$  (диаметр молекулы) от этой линии, будет происходить столкновение и изменение направления движения движущейся молекулы.

В конце концов данная молекула испытает столкновения со всеми молекулами, центры которых окажутся в пределах ломаного цилиндра радиуса  $d$ . Спрямяя этот цилиндр, мы ошибемся в определении его объема на пренебрежимо малую величину, так как длина каждого прямолинейного отрезка много больше диаметра цилиндра ( $l \gg d$ ).

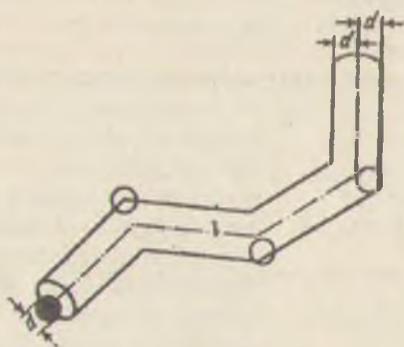


Рис. 2.31.

За единицу времени данная молекула проходит путь  $\overline{c}_{отн} \cdot 1 = \overline{c}_{отн}$ . Объем  $\Omega$  спрямленного цилиндра, отвечающего этому пути,

$$\Omega = \overline{c}_{отн} \pi d^2. \quad (25.9)$$

Считая, что концентрация газовых молекул  $n$  постоянна и равна

$$n = \frac{N}{V}, \quad (25.10)$$

найдем число молекул  $z$ , центры которых лежат внутри цилиндра  $\Omega$ ,

$$z = n \pi d^2 \overline{c}_{отн}. \quad (25.11)$$

Со всеми этими молекулами и столкнется за единицу времени летящая молекула. Следовательно, величина  $z$  представ-

ляет собой среднее число столкновений, испытываемых каждой молекулой за единицу времени.

Умножая число молекул  $n$ , находящихся в единице объема, на число столкновений  $z$ , испытываемых каждой из них за единицу времени, мы должны получить полное число столкновений молекул  $Z$ , происходящих в единице объема за единицу времени. Однако при таком методе подсчета мы каждое столкновение, в котором всегда участвуют две молекулы, сосчитаем два раза. Следовательно,  $Z$  должно быть равно

$$Z = \frac{zn}{2} = \frac{1}{2} \pi d^2 \bar{c}_{отн} n^2. \quad (25.12)$$

Переходя от относительного к абсолютному движению, заметим, что путь, проходимый молекулой в пространстве за единицу времени, равен  $\bar{c} \cdot 1 = \bar{c}$ , и на этом пути она испытывает  $z$  столкновений. Следовательно, среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями будет равно

$$l = \frac{\bar{c}}{z} = \frac{\bar{c}}{\pi d^2 n \bar{c}_{отн}}. \quad (25.13)$$

Замечая, что согласно (25.8)  $\frac{\bar{c}}{\bar{c}_{отн}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , получим отсюда окончательное выражение для средней длины свободного пробега:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (25.14)$$

Таким образом, средняя длина свободного пробега  $l$  не зависит от температуры газа, так как с ростом  $T$  одновременно возрастают и  $\bar{c}$  и  $z$ , т. е. путь, проходимый молекулой в единицу времени, и число ее столкновений на этом пути.

Диаметры молекул газа составляют обычно  $d \approx 2 \div 3 \cdot 10^{-10}$  м, а при нормальных условиях ( $p = 1$  атм и  $T = 273$  °К) число молекул газа в одном кубическом метре

$$n = \frac{6.02 \cdot 10^{25} \text{ кмоль}^{-1}}{22.40 \text{ м}^3/\text{кмоль}} = 2.7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Отсюда следует, что при этих условиях

$$l \approx 10^{-7} \text{ м} \text{ и } z = \frac{\bar{c}}{l} \approx 10^{10} \text{ сек}^{-1}.$$

Для различных газов, в зависимости от размеров молекул, величины  $l$  и  $z$  несколько отличаются друг от друга, как видно из приводимой таблицы.

Газ	$l, \mu$	$z, \text{сек}^{-1}$	Газ	$l, \mu$	$z, \text{сек}^{-1}$
H <sub>2</sub>	$1,12 \cdot 10^{-7}$	$15,1 \cdot 10^9$	H <sub>2</sub> O	$0,42 \cdot 10^{-7}$	$14,1 \cdot 10^9$
N <sub>2</sub>	$0,6 \cdot 10^{-7}$	$7,55 \cdot 10^9$	CO <sub>2</sub>	$0,42 \cdot 10^{-7}$	$9,05 \cdot 10^9$
O <sub>2</sub>	$0,65 \cdot 10^{-7}$	$6,55 \cdot 10^9$			

Как было найдено в § 18, концентрация газа пропорциональна его давлению, т. е.

$$n = \frac{p}{kT}. \quad (25.15)$$

Подставляя (25.15) в (25.14), получаем:

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2}nd^2p}. \quad (25.16)$$

Следовательно, при постоянной температуре ( $T = \text{const}$ ) по мере разрежения газа, т. е. уменьшения его давления, средняя длина свободного пробега возрастает так, что

$$l \cdot p = \text{const}. \quad (25.17)$$

Опытное определение величины  $l$  проще и нагляднее всего осуществить методом молекулярного пучка. Экспериментальная установка для подобного измерения  $l$  схематически изображена на рис. 2.32. Раскаленный серебряный шарик  $S$  испускает атомы серебра с постоянной интенсивностью. Диафрагма  $D$  выделяет пучок молекул серебра, движущихся, например, в направлении оси  $x$ . Помещая на некоторое время на пути пучка холодную пластинку  $\Pi_1$ , можно определить количество осевшего на ней за время  $t$  серебра, пропорциональное концентрации  $n_1$  летящих молекул.

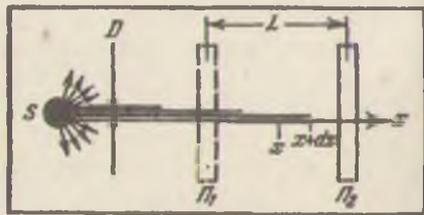


Рис. 2.32.

Убрав пластинку  $\Pi_1$ , помещают затем на то же самое время на пути пучка вторую пластинку  $\Pi_2$  на расстоянии  $L$  от места нахождения первой пластинки. Осадок серебра на этой пластинке пропорционален концентрации  $n_2$  молекул серебра в пучке после прохождения им пути  $L$ .

Если бы в приборе отсутствовал газ, то число молекул,

дошедших до каждой из пластинок  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  и осевших на них, было бы одинаковым. Опыт же показывает, что  $\frac{n_2}{n_1} < 1$ .

Выделим мысленно слой газа толщины  $dx$  между пластинками. Если  $l$  — средняя длина свободного пробега молекул, то вероятность столкновения на пути  $dx$  будет равна отношению  $\frac{dx}{l}$ . Из  $n$  летящих молекул некоторая доля  $|dn|$  испытывает столкновения с молекулами газа в слое  $dx$  и рассеивается в стороны. Число молекул в пучке  $n + dn$  после прохождения слоя  $dx$  будет меньше, чем  $n$  (т. е.  $dn < 0$ ). Относительная доля  $\frac{-dn}{n}$  молекул пучка, рассеявшихся в стороны на этом участке вследствие столкновений, равна вероятности столкновения, т. е.

$$\frac{-dn}{n} = \frac{dx}{l}, \text{ или } \frac{dn}{n} = -\frac{dx}{l}. \quad (25.18)$$

Мы видим, что по мере увеличения пути, проходимого пучком молекул, в арифметической прогрессии, число молекул в этом пучке будет убывать в геометрической прогрессии. Применяя тот же способ расчета, что и при выводе барометрической формулы, можно получить, что

$$\ln \frac{n_2}{n_1} = -\frac{L}{l}, \text{ или } n_2 = n_1 e^{-\frac{L}{l}}. \quad (25.19)$$

Измеряя отношение  $\frac{n_2}{n_1}$  по осадку серебра на обеих пластинках, можно найти среднюю длину свободного пробега:

$$l = \frac{L}{\ln \frac{n_1}{n_2}}. \quad (25.20)$$

Измерения, произведенные при давлении газа в сосуде  $p = 5,8 \cdot 10^{-4}$  см рт. ст., дали значение  $l = 1,7$  см.

Отсюда согласно (25.17) при атмосферном давлении  $p_0 = 76$  см рт. ст. длина свободного пробега составит:

$$l_0 = 1,7 \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{76} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

что хорошо согласуется с общей оценкой порядка величины  $l_0$  и с данными приведенной таблицы, полученными другими способами.

## § 26. Вакуум. Методы его получения и измерения

Согласно (25.17) средняя длина свободного пробега молекул в газе обратно пропорциональна давлению:

$$l \sim \frac{1}{p}. \quad (26.1)$$

Поместим газ в сосуд с линейными размерами  $L$  порядка 10 см и начнем постепенно его откачивать. При этом средняя длина свободного пробега будет непрерывно возрастать. Если при атмосферном давлении ( $p=760$  мм рт. ст.)  $l$  порядка  $10^{-7}$  м, то при уменьшении давления до 1 мм рт. ст.  $l$  возрастет примерно в 1000 раз и достигнет значения около  $10^{-4}$  м = 0,1 мм.

При уменьшении давления еще в 1000 раз, до  $10^{-3}$  мм рт. ст., длина свободного пробега возрастет до 10 см и станет равной по порядку величины линейным размерам обычных сосудов. При дальнейшем уменьшении давления вычислять  $l$  по формуле (25.16) было бы неправильно, так как молекулы раньше сталкиваются со стенками сосуда, чем с другими молекулами, и расстояние между двумя последовательными столкновениями молекулы просто равно  $L$ .

Зависимость  $l$  от  $p$  изображена на рис. 2.33. При  $l < L$  мы имеем гиперболическую зависимость (26.1), а по достижении достаточно низкого давления  $p_0$  длина свободного пробега становится постоянной и равной

$$l = L. \quad (26.2)$$

Точка  $A$  лежит на пересечении предельных линий, соответствующих формулам (26.1) и (26.2). В окрестностях этой точки истинная кривая представляет собой плавный переход от одной из этих линий к другой.

При давлениях, меньших  $p_0$ , столкновения молекул внутри сосуда практически прекращаются и каждая молекула летает от стенки до стенки и обратно, как если бы в сосуде отсутствовали другие молекулы. Эта область давлений называется вакуумом. В рассмотренном выше примере вакуум наступает при давлении  $10^{-3}$  мм рт. ст., т. е. примерно при  $10^{-6}$  атм.

При этом в каждом кубическом сантиметре остается еще

$$n = \frac{2,7 \cdot 10^{19}}{10^6} = 2,7 \cdot 10^{13},$$

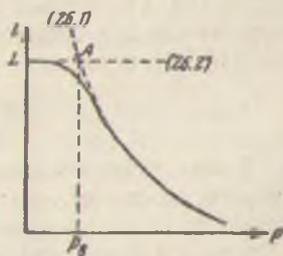


Рис. 2.33.

т. е. огромное число молекул. Однако благодаря ничтожно малым размерам молекул они пролетают весь объем, почти не сталкиваясь друг с другом.

Из изложенного следует, что понятие вакуума *относительно*. Чем больше размер сосуда, тем при меньших давлениях наступает состояние вакуума. И наоборот, для газа, заключенного в пористых телах с диаметрами пор меньше  $0,1 \text{ мк} = 10^{-7} \text{ м}$ , уже атмосферное давление можно считать вакуумом, так как молекулы газа будут проходить сквозь эти поры, ударяясь о стенки последних и практически не сталкиваясь с другими молекулами.

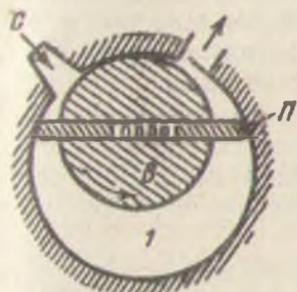


Рис. 2.34.

Свойства вакуума играют большую роль и в технике. Например, в электронных лампах и многочисленных современных электронных приборах движутся направленные пучки электронов. Для того, чтобы движущиеся электроны не сталкивались с молекулами газа и не рассеивались в стороны и назад, нет необходимости в абсолютном удалении всего воздуха из прибора. Для этого достаточно довести разрежение в приборе до условия  $l > L$ , т. е. попасть в область вакуума.

Для создания разрежения применяют различного типа вакуумные насосы. В ротационном вакуум-насосе, схематически изображенном на рис. 2.34, внутри цилиндра вращается эксцентрично посаженный вал *B*. В прорези на валу вставлены пластины *P*, прижимаемые пружинами к стенкам цилиндра. При вращении вала воздух, поступающий из откачиваемого сосуда *C* в полость *1*, отсекается пластиной, сжимается и выбрасывается наружу. Герметизация и отделение области низкого давления от атмосферы осуществляется с помощью смазки. С помощью такого типа насосов удается понизить давление лишь до  $\sim 0,003 - 0,008 \text{ мм рт. ст.}$  Поэтому они создают

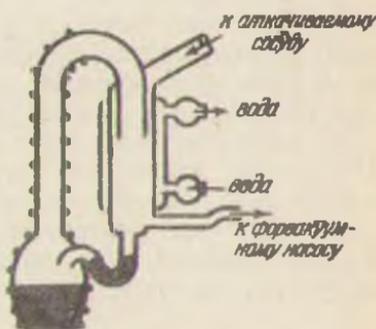


Рис. 2.35.

предварительный вакуум и называются форвакуумными.

Для создания более глубокого вакуума широко применяется насос Лэнгмюра (рис. 2.35). Ртуть или органическая жидкость (масло) в резервуаре нагревается электрической спиралью до кипения. Пары ртути с большой скоростью выходят из сопла и увлекают за собой молекулы воздуха из откачиваемого сосуда. Эти пары, попадая затем на охлаждаемую водой поверхность, конденсируются и стекают обратно в резервуар, а захваченный воздух выходит в пространство, в котором должно быть создано предварительное разрежение (форвакуум). Насос Лэнгмюра используется, например, для откачки электровакуумных приборов. С его помощью можно достичь разрежений, соответствующих  $\sim 10^{-6}$  мм рт. ст.

Для достижения еще больших разрежений используют, например, свойство охлажденного активированного угля поглощать газы. В откачиваемой колбе делается отросток, в который помещается некоторое количество активированного угля. При получении максимального разрежения, которого можно достигнуть с помощью насоса Лэнгмюра, отросток с углем погружают в жидкий воздух. Охлажденный до температуры порядка  $-180^\circ\text{C}$  уголь поглощает остатки газа в колбе, и давление в ней понижается до  $10^{-8} \div 10^{-9}$  мм рт. ст.

Для измерения небольших разрежений можно пользоваться обычным ртутным манометром. В случае глубокого вакуума приходится предварительно сжимать часть газа в определенное большое число раз и измерять давление сжатой части газа (манометр Мак-Леода).

В настоящее время для измерения вакуума широко используются различные электрические методы. Например, в ионизационном манометре с помощью высокого напряжения ионизируют молекулы остаточного газа и измеряют число образовавшихся ионов, которое пропорционально концентрации молекул, т. е. давлению газа.

## § 27. Диффузия газов

Пусть в газе присутствует посторонняя примесь с концентрацией  $n$  ( $n$  — число молекул в единице объема). В данный момент времени концентрация примеси в различных точках объема может быть различной и зависеть от пространственной координаты  $x$ , как это изображено на рис. 2.36.

Если в точке с координатой  $x$  концентрация имеет величину  $n$ , то в соседней точке, сдвинутой на расстояние  $\Delta x$ , значение концентрации будет равно  $n + \Delta n$ . Приращение концентрации  $\Delta n$  может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от концентрации примеси в соседних элементах объема.

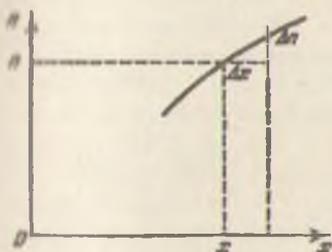


Рис. 2.36.

Отношение  $\Delta n / \Delta x$  характеризует быстроту изменения концентрации в пространстве и называется градиентом концентрации. Знак этого отношения указывает направление возрастания концентрации, т. е. направление градиента в про-

странстве. Численное значение градиента показывает изменение концентрации  $\Delta n$  в пространстве при перемещении на единицу длины (при  $\Delta x = 1$ ).

Если градиент концентрации равен нулю, то  $\Delta n = 0$  и  $n = \text{const}$ , т. е. концентрация примеси в различных точках газа одинакова. Такое равномерное распределение примеси в пространстве является наиболее вероятным и, однажды возникнув, не будет нарушаться хаотическим движением молекул.

При наличии градиента концентрации ( $\frac{\Delta n}{\Delta x} \neq 0$ ) хаотическое движение будет стремиться выравнять концентрации, и возникнет поток молекул примеси, направленный от мест с большими к местам с меньшими значениями  $n$ . Этот диффузионный поток будет тем больше, чем выше градиент концентрации.

Для вычисления диффузионного потока расположим в плоскости  $x = \text{const}$  контрольную площадку  $\Delta S$  перпендикулярно к оси  $x$  и подсчитаем число молекул примеси, проходящих за время  $\Delta t$  через эту площадку слева направо и справа налево (рис. 2.37).

Поток молекул  $\Delta N_+$ , проходящих через площадку в направлении положительной оси  $x$ , согласно (17.11) равен

$$\Delta N_+ = \frac{1}{6} n_1 \bar{c} \Delta S \Delta t, \quad (27.1)$$

где  $n_1$  — концентрация примеси слева от контрольной площадки.

Поскольку в рассматриваемом случае концентрация  $n$

меняется от точки к точке, то следует более тщательно определить, какому значению координаты соответствует величина  $n_1$ . Для упрощения расчета примем, что все молекулы, проходящие через контрольную площадку, испытали последнее столкновение на одном и том же расстоянии от площадки, равном средней длине свободного пробега  $l$ . Так как выравнивание концентраций происходит лишь в результате взаимных столкновений, то на пути  $l$  концентрация молекул в пучке не меняется и остается равной значению  $n_1$  в плоскости  $x - l$ .

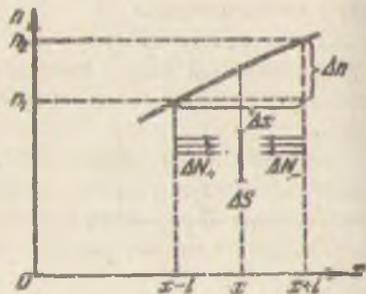


Рис. 2.37.

Поток молекул примеси, проходящих через площадку справа налево, в направлении отрицательных значений координаты  $x$ , аналогично равен

$$\Delta N_- = \frac{1}{6} n_2 \bar{c} \Delta S \Delta t, \quad (27.2)$$

где  $n_2$  — концентрация примеси в плоскости  $x+l$  на расстоянии  $l$  справа от площадки.

Суммарный диффузионный поток через площадку в направлении положительной оси  $x$  представляет разность этих двух потоков:

$$\Delta N = \Delta N_+ - \Delta N_-. \quad (27.3)$$

Поток молекул, проходящих через единицу площади за единицу времени, можно тогда преобразовать к виду

$$J = \frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{6} (n_1 - n_2) \bar{c} = -\frac{1}{3} \bar{c} l \frac{n_2 - n_1}{2l}. \quad (27.4)$$

Разность  $n_2 - n_1$  представляет собой приращение концентрации  $\Delta n$  на расстоянии  $\Delta x = 2l$ . Следовательно, отношение

$$\frac{n_2 - n_1}{2l} = \frac{\Delta n}{\Delta x} \quad (27.5)$$

представляет собой градиент концентрации в направлении, параллельном оси  $x$ . Обозначим, далее, через  $D$  произведение

$$\frac{1}{3} \bar{c} l = D. \quad (27.6)$$

Тогда закон диффузии принимает окончательный вид:

$$J = -D \frac{\Delta n}{\Delta x}. \quad (27.7)$$

*Поток молекул примеси, диффундирующих через единицу площади за единицу времени, прямо пропорционален градиенту концентрации.*

Знак минус в формуле (27.7) указывает на то, что диффузионный поток направлен противоположно градиенту концентрации, т. е. в сторону уменьшения концентрации.

Коэффициент пропорциональности  $D$  носит название коэффициента диффузии и численно равен потоку молекул через единицу площади за единицу времени при градиенте концентрации, равном единице (точнее, при  $\frac{\Delta n}{\Delta x} = -1$ ).

Закон диффузии (27.7) был установлен на опыте задолго до того, как он был выведен теоретически из молекулярно-кинетической теории. Поэтому главная ценность теоретического вывода заключается в выяснении механизма процесса диффузии и связи коэффициента диффузии с основными микроскопическими характеристиками.

При нормальных условиях длина свободного пробега  $l \approx 10^{-7}$  м, а средние скорости  $\bar{c} \approx 10^2 \div 10^3$  м/сек. Отсюда, в соответствии с опытом, коэффициенты диффузии в газах при нормальных температуре и давлении оказываются равными  $D \approx 10^{-5} \div 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/сек.

## § 28. Вязкость газа (внутреннее трение)

Пусть в покоящемся газе движется вверх (перпендикулярно к оси  $x$ ) плоская пластина, обладающая некоторой скоростью  $v_0$  (рис. 2.38). Будем считать, что  $v_0$  много меньше средней скорости хаотического движения молекул:

$$v_0 \ll c. \quad (28.1)$$

В своем движении пластина увлекает прилегающий к ней слой газа, который в свою очередь увлекает за собой следующий слой, и т. д. Таким образом, весь газ как бы делится на тончайшие слои, скользящие вверх тем медленнее, чем дальше они находятся от движущегося тела.

Очевидно, что если бы отсутствовало взаимодействие между слоями газа и между газом и пластиной, каждый слой мог бы двигаться с произвольной скоростью, независимо от других. В действительности же распределение скорос-

тей  $v(x)$  слоев газа в зависимости от их расстояния до пластины устанавливается в силу наличия вязкости, т. е. сил внутреннего трения в газе.

Вектор  $v$  представляет собой скорость направленного движения всего слоя газа в целом. При этом каждая молекула газа в слое принимает участие в двух движениях — хаотическом (тепловом) и направленном (коллективном). Скорость теплового движения  $c$  по абсолютной величине очень велика, так что

$$\overline{c} \gg v. \quad (28.2)$$

Однако направление  $c$  непрерывно и хаотически меняется так, что вектор скорости  $c$  в среднем равен нулю:

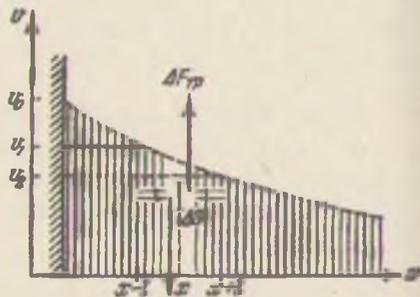


Рис. 2.38.

$$\overline{c} = 0, \quad (28.3)$$

т. е. совокупность непрерывно сталкивающихся молекул, участвующих только в тепловом движении, в среднем будет оставаться на месте. При наличии же дополнительного направленного движения вся совокупность молекул в целом будет дрейфовать с постоянной скоростью  $v$ . Таким образом, среднее количество движения отдельной молекулы в данном слое

$$\overline{mv + mc} = mv + 0 = mv. \quad (28.4)$$

Вследствие того, что молекулы участвуют в тепловом движении, они будут быстро переходить из слоя в слой. При этом они будут переносить с собой добавочное количество движения, отвечающее скорости направленного движения  $v$  того слоя, который они покидают. Это добавочное количество движения будет передаваться молекулам слоя, в который перешла рассматриваемая молекула. Перемешивание молекул разных слоев, происходящее в силу их хаотического движения, приводит к выравниванию скоростей переносного движения  $v$  разных слоев, что и проявляется макроскопически как действие сил трения между слоями.

Для вывода количественных закономерностей этого процесса рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, контрольную площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную к оси  $x$  и расположенную на произвольном расстоянии  $x$  от движущейся пласт-

типы (рис. 2.38). Через эту площадку за время  $\Delta t$  вправо и влево проходят потоки молекул

$$\Delta N_+ = \frac{1}{6} n \bar{c} \Delta S \Delta t \quad \text{и} \quad \Delta N_- = \frac{1}{6} n \bar{c} \Delta S \Delta t. \quad (28.5)$$

Поскольку давление и температура во всем газе одинаковы, то  $n$  и  $\bar{c}$  одинаковы по всему объему и  $\Delta N_+ = \Delta N_-$ . Однако, хотя число молекул, проходящих через площадку в обе стороны и одинаково, но они переносят разные количества движения. В результате этого переноса количества движения возникает сила трения между соседними слоями, величину которой можно подсчитать, пользуясь законом количества движения.

Каждая молекула, проходящая через площадку  $\Delta S$  слева направо, переносит с собой в среднем количество движения  $mv_1$ , где  $v_1$  — скорость направленного движения газа в плоскости  $x+l$  на расстоянии длины свободного пробега от контрольной площадки. Таким образом, уменьшение количества движения слоя, ограниченного справа площадкой  $\Delta S$ , за время  $\Delta t$  будет равно

$$mv_1 \Delta N_+ = mv_1 \frac{1}{6} n \bar{c} \Delta S \Delta t$$

С другой стороны, за то же время через площадку  $\Delta S$  переносится в обратном направлении количество движения

$$mv_2 \Delta N_- = mv_2 \frac{1}{6} n \bar{c} \Delta S \Delta t$$

где  $v_2$  — скорость направленного движения газа в плоскости  $x+l$ , в которой последний раз перед прохождением через контрольную площадку молекулы сталкивались между собой и выравнивали свои средние скорости. Разность  $mv_1 \Delta N_+ - mv_2 \Delta N_-$  представляет собой изменение количества движения слоя и должна быть равна импульсу силы трения  $\Delta F_{\text{тр}}$ , действующей в течение этого времени в направлении  $v$ , параллельном площадке  $\Delta S$ , т. е.

$$\Delta F_{\text{тр}} \Delta t = \frac{1}{6} n \bar{c} m (v_1 - v_2) \Delta S \Delta t \quad (28.6)$$

Разделив обе части равенства на  $\Delta S \Delta t$ , найдем выражение для силы трения, действующей на единицу площади границы соприкосновения соседних слоев:

$$f_{\text{тр}} = \frac{\Delta F_{\text{тр}}}{\Delta S} = -\frac{1}{3} n m \bar{c} l \frac{v_2 - v_1}{2l}. \quad (28.7)$$

Разность  $v_2 - v_1$  представляет собой приращение скорости  $\Delta v$  на расстоянии  $\Delta x = 2l$ . Следовательно, отношение

$$\frac{v_2 - v_1}{2l} = \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

представляет собой градиент скорости движения газа. Вводя, далее, обозначение

$$\frac{1}{3} \bar{lc} n m = \eta. \quad (28.8)$$

получим окончательное выражение для силы трения:

$$f_{\text{тр}} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x}. \quad (28.9)$$

*Сила внутреннего трения, возникающего при макроскопических движениях в газе, прямо пропорциональна градиенту скорости. Коэффициент пропорциональности  $\eta$  носит название коэффициента внутреннего трения, или просто вязкости газа. Вязкость (или динамическая вязкость)  $\eta$  численно равна силе внутреннего трения, действующей на единицу площади границы раздела параллельно движущихся слоев газа, когда скорость их движения уменьшается на единицу при перемещении в направлении, перпендикулярном к границе, на единицу длины, т. е.*

$$\eta = f_{\text{тр}} \text{ при } \frac{\Delta v}{\Delta x} = -1.$$

Закон (28.9) был получен Ньютоном из анализа экспериментальных данных и явился основой при изучении движения вязкой жидкости и газа. Этим же законом определяется и сила трения, возникающая на границе между газом и движущимся в этом газе твердым телом.

Рассмотрим для примера равномерное движение маленького шарика радиуса  $r$  в газе. Обозначим скорость шарика относительно газа через  $v_0$ . Распределение скоростей в соседних слоях газа, увлекаемых шариком, должно иметь вид, изображенный на рис. 2.39. В непосредственной близости к поверхности шара эта скорость  $v$  равна  $v_0$ , а по мере удаления уменьшается и практически становится равной нулю на некотором расстоянии  $L$  от поверхности.

Очевидно, что чем больше радиус шара, тем большая масса газа вовлекается им в движение, и  $L$  должно быть пропорционально  $r$ :

$$L = \alpha r. \quad (28.10)$$

Величина коэффициента пропорциональности в (28.10), вообще говоря, несколько различна для передней и задней

частей движущегося тела, и под  $\alpha$  мы будем понимать среднее значение этого коэффициента. Тогда среднее значение градиента скорости по поверхности шара равно

$$\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta x} = \frac{v_0 - 0}{\alpha r} = \frac{v_0}{\alpha r}. \quad (28.11)$$

Поверхность шара

$$S = 4\pi r^2,$$

и полная сила трения, испытываемая движущимся шаром равна

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{тр}} S = -\eta \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta x} S = -\eta \frac{v_0}{\alpha r} \cdot 4\pi r^2 = -\frac{4\pi}{\alpha} \eta r v_0. \quad (28.12)$$

Интегрирование уравнений движения вязкой жидкости (газа), проведенное Стоксом, дало для шара значение  $\alpha = \frac{2}{3}$

Следовательно, сила сопротивления, испытываемая шаром, движущимся в вязком газе, прямо пропорциональна вязкости газа  $\eta$ , радиусу шара  $r$  и скорости его движения  $v_0$ :

$$F_{\text{тр}} = -6\pi\eta r v_0. \quad (28.13)$$

Формула (28.13) носит на звание закона Стокса.

Для нешарообразных тел численное значение  $\alpha$  не равно  $\frac{2}{3}$  и зависит от формы движущегося тела, в качестве  $r$  для этих тел следует принять средний определяющий размер. Величина силы сопротивления движению таких тел

в газе отличается от выведенной по закону Стокса лишь численным значением коэффициента пропорциональности.

Формула Стокса применима лишь в случае тел достаточно малых размеров и малых скоростей их движения. При больших скоростях вокруг движущихся тел возникают сложные вихревые движения газа, и сила сопротивления возрастает пропорционально квадрату скорости ( $v_0^2$ ), а не первой ее степени, как это следует из формул (28.12) и (28.13).

По формуле Стокса можно, например, определить скорости оседания частиц тумана и дыма. Ею можно пользо-

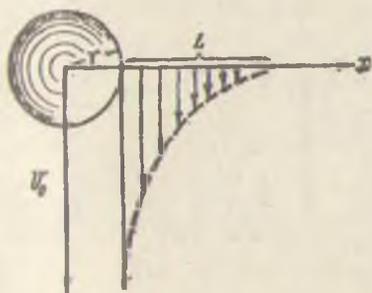


Рис. 2.39.

ваться и для решения обратной задачи — измеряя скорость падения шарика в жидкости, можно определить ее вязкость.

### § 29. Теплопроводность газа

Рассмотрим газ, заключенный между двумя параллельными стенками, имеющими различные температуры  $T_a$  и  $T_b$ . Проведем ось  $x$  перпендикулярно к стенкам (рис. 2.40). Температура промежуточных слоев газа  $T(x)$  будет функцией координаты  $x$ .

При наличии градиента температур ( $\frac{\Delta T}{\Delta x} \neq 0$ ) через газ в направлении оси  $x$  будет идти поток тепла. Механизм переноса тепла состоит в следующем: молекулы в разных слоях газа обладают различной средней кинетической энергией, обусловленной различием температур слоев. В силу хаотичности своего движения молекулы будут непрерывно переходить из слоя в слой, перенося в новый слой энергию, присущую покидаемому ими слою. Таким образом, движение молекул приводит к перемешиванию молекул, имеющих различные  $\epsilon$ , т. е. с макроскопической точки зрения, к потоку тепла.

При подсчете потока тепла мы введем следующие упрощения:

1) будем считать, что молекулы в близких слоях газа, обладающие различными значениями средних энергий  $\epsilon$ , имеют, тем не менее, одинаковую среднюю скорость;

2) примем, что концентрация молекул  $n$  одинакова в соседних слоях газа, хотя при наличии разности температур и одинаковом давлении она должна, конечно, меняться от слоя к слою.

Эти приближения, частично компенсируя друг друга, весьма упростят вычисления, привнося при этом погрешность порядка 10 %.

Рассмотрим, как и в предыдущих параграфах, контрольную площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную к оси  $x$  (рис. 2.40). За время  $\Delta t$  через эту площадку проходят слева направо  $\Delta N_+ = \frac{1}{6} \bar{c} n \Delta S \Delta t$  молекул. Средняя энергия этих молекул  $\epsilon_1$  соответствует значению  $\epsilon$  в том месте, где они последний раз

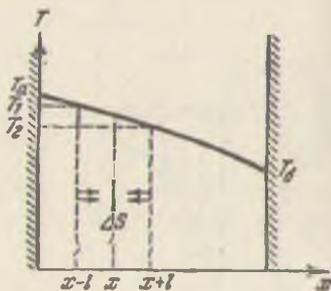


Рис. 2.40.

испытали столкновение, т. е. на расстоянии длины свободного пробега  $l$  от площадки  $\Delta S$ . Обозначив значение температуры в плоскости  $x - l$  через  $T_1$  и ограничиваясь случаем одноатомного идеального газа, мы можем написать, что

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{3}{2} kT_1. \quad (29.1)$$

Число молекул, проходящих через площадку  $\Delta S$  за время  $\Delta t$  справа налево,  $\Delta N_- = \frac{1}{6} \bar{c} n \Delta S \Delta t$ . Средняя энергия этих молекул

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{3}{2} kT_2, \quad (29.2)$$

где  $T_2$  — значение температуры в плоскости  $x + l$ .

Полный поток энергии  $\Delta Q$ , проходящий через площадку в положительном направлении оси  $x$ , равен разности двух противоположных потоков  $\Delta Q = \bar{\varepsilon}_1 \Delta N_+ -$

$-\bar{\varepsilon}_2 \Delta N_- = \frac{1}{6} n \bar{c} (T_1 - T_2) \frac{3}{2} k \Delta S \Delta t$ , откуда

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = -\frac{1}{3} n \bar{c} l \frac{T_2 - T_1}{2l} \frac{3}{2} k. \quad (29.3)$$

Разность  $T_2 - T_1$  представляет собой изменение температуры  $\Delta T$  на расстоянии  $\Delta x = 2l$ . Следовательно, отношение

$$\frac{T_2 - T_1}{2l} = \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

есть не что иное, как градиент температуры.

Введя, далее, обозначение

$$\frac{1}{3} l \bar{c} \cdot \frac{3}{2} k n = \lambda, \quad (29.4)$$

мы получим окончательное выражение закона теплопроводности:

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (29.5)$$

*Поток тепла, проходящий через единицу площади за единицу времени, прямо пропорционален градиенту температуры.*

Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  носит название коэффициента теплопроводности или, просто, теплопроводности газа. Теплопроводность газа численно равна количеству тепла, проходящему через единицу площади соприкасающихся слоев за единицу времени при градиенте температуры, равном единице. Знак минус

указывает, что поток тепла направлен в сторону уменьшения температуры.

Средняя энергия всех  $n$  молекул, заключенных в единице объема, равна

$$E_v = n \cdot \frac{3}{2} kT. \quad (29.6)$$

Если нагреть газ на один градус так, чтобы число его молекул в единице объема оставалось постоянным, т. е. при неизменном объеме, то эта энергия увеличится до

$$E'_v = n \cdot \frac{3}{2} k(T+1). \quad (29.6')$$

Возрастание внутренней энергии при таком процессе

$$E'_v - E_v = n \cdot \frac{3}{2} k \quad (29.7)$$

представляет собой количество тепла, необходимое для нагревания единицы объема газа на один градус при постоянном объеме, т. е. теплоемкость этой единицы объема. Обозначим через  $C_{уд}$  удельную теплоемкость газа, т. е. количество тепла, необходимое для нагревания единицы массы газа на один градус. Поскольку масса единицы объема газа равна его плотности  $\rho$ , то

$$E'_v - E_v = \rho C_{уд}. \quad (29.8)$$

Таким образом, теплоемкость единицы объема одноатомного идеального газа

$$\rho C_{уд} = \frac{3}{2} kn \quad (29.9)$$

и коэффициент теплопроводности этого газа

$$\lambda = \frac{1}{3} \bar{v} \rho C_{уд}. \quad (29.10)$$

Как мы увидим ниже, в гл. VIII, в случае многоатомных газов выражения (29.1) для средней энергии одной молекулы, (29.6) для средней энергии единицы объема и (29.9) для теплоемкости этой единицы объема перестают быть справедливыми и должны быть заменены другими. Однако можно показать, что окончательная связь (29.10) между теплопроводностью и теплоемкостью газа остается справедливой и для многоатомных газов; это подтверждается и опытом.

### § 30. Коэффициенты переноса и их зависимость от давления

Сопоставим полученные в предыдущих параграфах выражения для законов:  
диффузии

$$J = -D \frac{\Delta n}{\Delta x}, \quad (30.1)$$

внутреннего трения

$$f_{\text{тр}} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (30.2)$$

и теплопроводности

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (30.3)$$

Все эти законы были установлены на опыте задолго до их обоснования и вывода из молекулярно-кинетической теории.

Последняя позволила установить, что внешнее сходство математических выражений этих законов обусловлено общностью лежащего в основе явлений диффузии, теплопроводности и внутреннего трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Однако к концу XIX века, несмотря на блестящие успехи молекулярно-кинетической теории в объяснении целого ряда явлений, как уже указывалось, ей еще недоставало твердой опоры — прямых экспериментальных доказательств существования атомов и молекул. Это обстоятельство давало возможность идеалистической школе Маха и Оствальда оспаривать правомочность выводов молекулярно-кинетической теории. С точки зрения этой идеалистической школы сходство законов (30.1) — (30.3) вызвано не объективными причинами, а субъективными — удобством и математической простотой описания связи между нашими ощущениями.

Если бы это действительно было так, то коэффициенты пропорциональности в законах (30.1) — (30.3) были бы произвольными и не связанными между собой. В противоположность этому из кинетической теории вытекает однозначная связь между ними, обусловленная единством внутреннего объективного механизма явлений.

Сопоставим выведенные нами в предыдущих параграфах выражения для коэффициентов:  
диффузии

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{l}, \quad (30.4)$$

внутреннего трения

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{c} n m \quad (30.5)$$

и теплопроводности

$$\lambda = \frac{1}{3} \bar{c} \rho C_{уд} \quad (30.6)$$

Здесь  $m$  — масса отдельной молекулы, а  $n$  — число молекул в единице объема. Следовательно, их произведение  $nm = \rho$  есть плотность газа, и из (30.4) и (30.5) вытекает:

$$\eta = D\rho. \quad (30.7)$$

Из (30.4) и (30.6) следует второе соотношение

$$\lambda = D\rho C_{уд}, \quad (30.8)$$

также связывающее непосредственно наблюдаемые на опыте величины.

Эти выводы молекулярно-кинетической теории хорошо оправдываются на опыте и подтверждают ее положение об общности молекулярного механизма, лежащего в основе явлений диффузии, теплопроводности и внутреннего трения.

Учет более тонких эффектов, связанных с тем, что произведения средних величин не точно равны средним значениям произведений, еще более улучшает совпадение количественных предсказаний с опытом.

Из анализа соотношений (30.4) — (30.8) вытекает также целый ряд теоретически и практически важных выводов. Остановимся лишь на зависимости коэффициентов переноса (30.4) — (30.6) от давления.

Так как средняя скорость молекул  $\bar{c}$  пропорциональна  $\sqrt{T}$  (см. § 20) и не зависит от давления, то  $D \propto l$ , и зависимость коэффициента диффузии от давления должна быть подобна зависимости  $l$  от  $p$ , рассмотренной в § 26 и изображенной на рис. 2.33:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при обычных давлениях } D \propto \frac{1}{p}, \\ \text{в области вакуума } (p < p_b) \ D = \text{const.} \end{array} \right\} \quad (30.9)$$

То, что коэффициент диффузии при обычных давлениях обратно пропорционален давлению, вполне естественно. С ростом давления уменьшается длина свободного пробега молекул и затрудняется их диффузия.

При постоянной температуре плотность газа  $\rho$  пропорциональна его давлению  $p$ . Поэтому из (30.7) следует, что

при обычных давлениях  $D \propto \frac{1}{p}$ ,  $\rho \propto p$  и  $\eta = \text{const}$ , } (30.10)  
 в области вакуума  $D = \text{const}$ ,  $\rho \propto p$  и  $\eta \propto p$ .

С увеличением давления и плотности газа повышается число молекул, переносящих количество движения из слоя в слой, но зато уменьшается расстояние, на которое оно переносится до столкновений с соседними молекулами. Вследствие этого вязкость газа не должна зависеть от его давления. Этот теоретический вывод показался сомнительным самому получившему его Максвеллу, который убедился в его правильности лишь после экспериментальной проверки. Опыт показал, что даже при тысячекратном изменении давления величина  $\eta$  почти не меняется.

В области вакуума расстояние, на которое переносится импульс молекулами, остается неизменным и равным расстоянию между стенками или движущимися в вакууме телами.

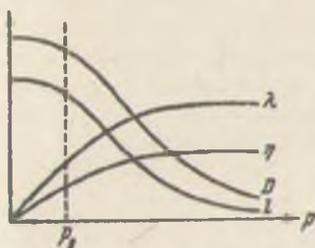


Рис. 2.41.

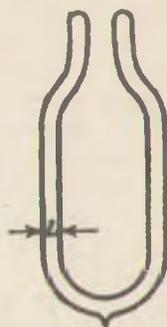


Рис. 2.42.

При этом вязкость газа пропорциональна числу молекул и с уменьшением давления падает прямо пропорционально последнему.

Поскольку удельная теплоемкость газа  $C_{уд}$  — величина постоянная, то теплопроводность газа будет себя вести так же, как и вязкость:

при обычных давлениях  $\lambda = \text{const}$ , } (30.11)  
 в области вакуума  $\lambda \propto p$ .

Зависимости (30.9) — (30.11) коэффициентов переноса от давления изображены графически на рис. 2.41. Для сравнения на том же рисунке приведена кривая зависимости  $l$  от  $p$ , изображенная ранее на рис. 2.33.

Зависимости  $\eta$  и  $\lambda$  от  $p$  в области вакуума могут быть использованы для измерения очень низких давлений. В так называемом манометре Пирани нить, помещенная в вакуум, накаливается электрическим током. При этом, чем ниже давление, тем меньше теплопроводность газа, тем слабее охлаждается нить и выше ее температура. Проградуировав температуру нити при разных давлениях, можно таким образом, измеряя температуру нити, определить давление газа.

В термосах и сосудах Дьюара делают двойные стенки и из пространства между ними откачивают воздух (рис. 2.42). Если откачать воздух лишь до давлений  $p > p_v$ , то согласно (30.11) теплопроводность воздуха останется той же, как и при атмосферном давлении. И только при  $p \ll p_v$  (глубокий вакуум) теплопроводность воздуха между стенками начинает падать и он становится хорошим теплоизолятором.

## ГЛАВА VIII ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

### § 31. Работа и теплота. Первое начало термодинамики

Еще более 200 лет тому назад М. В. Ломоносов в работе «Размышления о причине теплоты и холода» писал:

«Так как тела могут двигаться двояким движением — общим, при котором все тело непрерывно меняет свое место при покоящихся друг относительно друга частях, и внутренним, которое есть перемена места нечувствительных частиц материи, и так как при самом быстром общем движении часто не наблюдается теплоты, а при отсутствии такового движения наблюдается большая теплота, то очевидно, что теплота состоит во внутреннем движении материи».



Рис. 2.43.

Этим двум разным типам движения соответствуют различные формы энергии. Тело, движущееся как целое, например, с поступательной скоростью  $v$ , обладает механической энергией  $E_{\text{мех}} = \frac{Mv^2}{2}$ . При таком направленном движении все молекулы тела получают одну и ту же скорость  $v$  (рис. 2.43), и энергия механического движения  $E_{\text{мех}}$  распределяется между молекулами одним-единственным способом — в данном случае равномерно. В более общем случае в механическую энергию следует включать и потенциальную энергию тела во внешнем поле (гравитационном, электрическом, магнитном).

Наряду с механической энергией направленного движения тело обладает внутренней энергией хаотического теплового движения, при котором скорости отдельных молекул и расстояния между ними различны и непрерывно изменяются (рис. 2.44). Величина внутренней энергии тела

складывается из кинетической энергии хаотического движения молекул и потенциальной энергии их взаимного расположения

$$U = E_{\text{кин}} + E_{\text{вз}}. \quad (31.1)$$

Для идеального одноатомного газа, состоящего из  $N$  молекул,  $E_{\text{вз}} = 0$  и, как было показано в § 18,

$$U = N \cdot \frac{3}{2} kT,$$

т. е. энергия молекулярного движения газа определяет его температуру. В отличие от механической энергии энергия теплового движения распределяется между отдельными молекулами хаотически, большим числом непрерывно сменяющихся друг друга способов (т. е. одно макросостояние реализуется множеством непрерывно чередующихся микросостояний, см. § 16 и 17).

Эта совокупность непрерывно сменяющихся друг друга микросостояний, отличающихся лишь внутренним перераспределением энергии между молекулами, характеризует определенное макроскопическое состояние всего тела в целом с определенной температурой  $T$ , объемом  $V$  и давлением  $p$ .

*Величины  $T$ ,  $V$  и  $p$  являются параметрами, характеризующими макроскопическое состояние всего тела.* В случае твердых тел вместо объема параметром является совокупность его линейных размеров. При помещении тела во внешние поля к этим параметрам добавляются характеристики этих полей, например высота поднятия тела над землей или напряженность электрических и магнитных полей.



Рис. 2.44.

При данном состоянии всего тела (под телом мы при этом понимаем как твердые тела, так и заключенные в сосудах жидкость и газ) оно обладает вполне определенными значениями механической  $E_{\text{мех}}$  и внутренней  $U$  энергий. Если привести в соприкосновение два тела, то в процессе взаимодействия они смогут обмениваться энергией как в той, так и в другой форме. Этот обмен различными формами энергии характеризуется соответственно понятиями совершенной работы  $A$  и переданного тепла  $Q$ .

Например, вода, падающая на лопатки турбины, вращает последнюю. При этом оба эти тела обмениваются механической энергией. Механическая энергия, отданная водой,

передается турбине в форме также механической энергии направленного движения турбины. При этом количество переданной механической энергии мы измеряем совершенной работой.

Таким образом, в этом случае *работа есть мера переданной другому телу или телам механической энергии.*

Следует твердо помнить, что *работа сама по себе не есть какая-либо особая форма энергии.*

В приведенном примере механическая энергия воды непосредственно превращается в механическую энергию турбины в процессе работы воды.

Энергией могут обладать лишь реальные материальные тела. В отрыве от материальных тел энергия существовать не может. Совершая *работу* над телом, мы меняем его *энергию*. Значит, можно говорить о запасе механической энергии тела, но не о запасе работы в этом теле.

Когда топочные газы обогревают паровой котел, они охлаждаются. При этом уменьшается интенсивность теплового движения молекул этих газов и тем самым их внутренняя энергия. В свою очередь вода в котле нагревается — возрастает энергия теплового движения молекул воды. При этом оба тела (газ и вода) обмениваются энергией своих внутренних тепловых движений. *Величину переданной энергии теплового движения молекул мы измеряем количеством теплоты.*

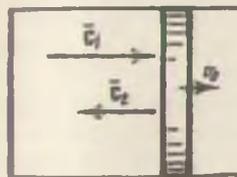


Рис. 2.45.

Следовательно, *теплота, так же как и работа, не является особой формой энергии. Тепло есть мера переданной телу или отданной им энергии хаотического молекулярного движения.*

Поэтому *неправильной является встречающаяся иногда формулировка о «запасе тепла в теле».*

Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения и обратно. Камень, падающий на землю, в момент удара отдает всю накопленную им кинетическую энергию, за счет чего оба тела нагреваются. При этом происходит переход механической энергии направленного поступательного движения камня в энергию хаотического теплового движения атомов обоих тел в строго эквивалентных количествах.

В качестве обратного примера можно рассмотреть расширяющийся газ, заключенный в сосуд с поршнем. Молекулы газа, движущиеся со средними скоростями  $c_1$ , ударяются о поршень, движущийся вправо с некоторой скоростью  $v_0$

(рис. 2.45). При этом по законам соударений упругих тел (см. § 8, гл. II) они отлетают назад с меньшей скоростью:

$$\overline{c_2} = \overline{c_1} - 2v_0. \quad (31.2)$$

Таким образом, в процессе расширения газа его внутренняя энергия уменьшается вследствие превращения в механическую энергию движущегося поршня.

Можно без труда найти множество примеров превращения одной формы энергии в другую. Опыт показывает, что во всех приведенных и в других многочисленных примерах превращение механической энергии в тепловую и обратно совершается всегда в строго эквивалентных количествах. Поскольку тепловое движение есть, в конечном счете, тоже механическое движение отдельных молекул (только не направленное, а хаотическое), то при всех этих превращениях должен соблюдаться закон сохранения энергии с учетом энергии не только внешних, но и внутренних движений. Такая общая формулировка этого закона носит название *первого начала термодинамики*.

Рассмотрим тело, в целом неподвижное (например, газ в цилиндре с подвижным поршнем), чтобы можно было пренебречь энергией его механического движения. Внутреннюю энергию теплового движения этого тела обозначим через  $U$ .

Дадим возможность телу обмениваться энергией с окружающими телами. При этом внутренняя энергия тела изменится на некоторую величину  $\Delta U$ , которая в зависимости от обстоятельств может оказаться как положительной, так и отрицательной.

В процессе взаимодействия с рассматриваемым телом изменится интенсивность теплового движения молекул окружающих тел: эти тела охладятся или нагреются и, тем самым, передадут рассматриваемому телу некоторое количество теплоты  $\Delta Q$ . Знак величины  $\Delta Q$  будет указывать направление процесса теплообмена. Если окружающие тела будут нагреваться и отнимать от рассматриваемого тела энергию, то  $\Delta Q < 0$ .

При изменении внутренней энергии изменится состояние тела, оно будет расширяться или сжиматься и приведет в механическое движение окружающие его тела. Количество переданной окружающим телам энергии механического движения мы будем характеризовать *работой  $\Delta A$ , совершенной рассматриваемым телом над окружающими его телами*. Работа  $\Delta A$  также является величиной алгебраической и имеет знак. Если механическая энергия окружающих тел умень-

нится, то  $\Delta A < 0$ , и мы говорим, что *окружающая среда совершила работу* —  $\Delta A$ .

Подчеркнем принятое нами и чаще всего применяемое правило знаков.  $\Delta Q$  считается *положительным*, если тепло передается от окружающей среды данному телу, т. е. за счет притока тепла  $\Delta Q$  извне внутренняя энергия тела возрастает.

Наоборот,  $\Delta A$  считается *положительной*, если тело производит механическую работу над окружающими телами, т. е. за счет произведенной механической работы убывает внутренняя энергия тела.

Учитывая процессы теплообмена и совершения механической работы и правило знаков, мы можем окончательно записать закон сохранения энергии в виде

$$\boxed{\Delta U = \Delta Q - \Delta A.} \quad (31.3)$$

*Изменение внутренней энергии тела  $\Delta U$  равно разности сообщенного телу количества теплоты  $\Delta Q$  и произведенной телом механической работы  $\Delta A$ .*

Закон (31.3) можно переписать и в таком виде:

$$\boxed{\Delta Q = \Delta U + \Delta A.} \quad (31.4)$$

Это и есть обычная математическая формулировка первого начала термодинамики:

*Количество теплоты, сообщенное телу ( $\Delta Q$ ), идет на увеличение его внутренней энергии ( $\Delta U$ ) и на совершение телом работы ( $\Delta A$ ).*

### § 32. Теплоемкость газа. Физический смысл универсальной газовой постоянной

Теплоемкость тела характеризуется количеством теплоты, необходимым для нагревания этого тела на один градус, и измеряется в джоулях на градус (*дж/град*). Если для увеличения температуры тела на  $\Delta T$  градусов необходимо сообщить ему  $\Delta Q$  джоулей, то средняя теплоемкость тела в интервале  $\Delta T$  определяется как

$$C_{\text{тела}} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \quad (32.1)$$

*Теплоемкость тела пропорциональна массе и зависит от вещества тела. Удельная теплоемкость  $C_{\text{уд}}$  данного вещества (дерева, железа, бензина, воздуха и т. д.) характеризуется количеством теплоты, необходимым для нагревания 1 кг*

данного вещества на один градус, и измеряется в  $\text{дж/кг}\cdot\text{град}$ . Удельная теплоемкость обычно слабо меняется с изменением температуры.

Для газов удобно пользоваться молярной теплоемкостью ( $C_{\text{мол}}$  или просто  $C$ ), характеризующейся количеством теплоты, нужным для нагревания одного киломоля данного вещества на один градус.

Очевидно, что

$$C_{\text{уд}} (\text{дж/кг}\cdot\text{град}) \cdot \mu (\text{кг/кмоль}) = C (\text{дж/кмоль}\cdot\text{град}). \quad (32.2)$$

Поскольку в 1 киломоле любого газа содержится одинаковое число молекул, а средняя кинетическая энергия молекул не зависит от их массы, то можно ожидать, что молярные теплоемкости всех достаточно разреженных газов должно быть одинаковыми или по крайней мере подчиняться одинаковым закономерностям.

Теплоемкость тела существенно зависит от того, как меняется состояние тела в процессе нагревания. Рассмотрим для простоты идеальный одноатомный газ. Если мы будем нагревать газ, заключенный в замкнутом объеме,  $V = \text{const}$  (рис. 2.46, а) то все подводимое тепло  $\Delta Q$  будет идти только на увеличение внутренней энергии газа. Тогда в (31.4)  $\Delta A = 0$  и, следовательно,

$$\Delta Q = \Delta U.$$

При этом температура газа будет возрастать в соответствии с увеличением его внутренней энергии [см. (18.17)], откуда следует, что температура идеального газа пропорциональна его внутренней энергии. Давление газа  $p$  также будет возрастать пропорционально температуре. Обозначим теплоемкость газа при постоянном объеме через  $C_V$ .

Если мы хотим, чтобы в процессе нагревания сохранялось давление, газу следует предоставить возможность расширяться.

Для этого поместим газ в цилиндр с поршнем, на который действует постоянное давление  $p = \text{const}$  (рис. 2.46, б). Так как внутренняя энергия  $U$  идеального газа не зависит от его объема (18.17), то количество теплоты, необходимое для ее увеличения, останется тем же. Но при нагревании газа до той же температу-

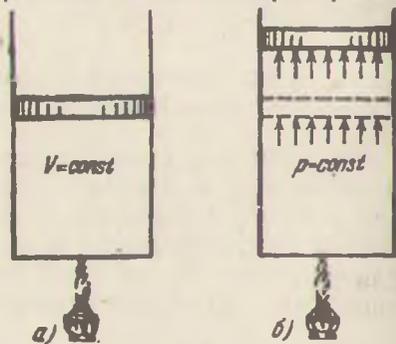


Рис. 2.46.

ри часть подводимого тепла расходуется теперь на работу против внешних сил при расширении газа. Следовательно, для нагревания газа до той же температуры, как и в предыдущем случае ( $V = \text{const}$ ), придется затратить большее количество теплоты. Таким образом, теплоемкость  $\Delta Q / \Delta T$  газа при постоянном давлении, которую мы обозначим через  $C_p$ , будет больше, чем  $C_v$ .

Рассмотренный пример очень важен. Он показывает, что количество теплоты  $\Delta Q$ , необходимое для нагревания газа на  $\Delta T$  градусов, существенно зависит от дополнительных условий — характера изменения других макроскопических параметров, определяющих состояние газа, т. е.  $p$  и  $V$ . Кроме рассмотренных процессов, характеризующих простейшими дополнительными условиями  $V = \text{const}$  и  $p = \text{const}$ , можно рассмотреть и множество других, отвечающих различным изменениям  $V$  и  $p$  при нагревании. Каждому процессу будет отвечать своя теплоемкость  $C$  (см. § 34).

Величины  $C_p$  и  $C_v$  для идеального газа оказываются связанными простым соотношением. Для вывода этого соотношения рассмотрим сначала 1 кмоль идеального газа, нагреваемый при постоянном объеме. Газ при этом не расширяется и не совершает никакой работы, т. е.  $\Delta A = 0$ , и уравнение первого начала (31.3) примет вид

$$\Delta Q = \Delta U \quad (32.3)$$

Обозначив через  $\Delta T$  повышение температуры газа в этом процессе, мы получим для теплоемкости этого процесса

$$C_v = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} \quad (32.4)$$

(для разных конкретных газов  $C_v$ , вообще говоря, различна, см. § 33).

Поместим теперь 1 кмоль идеального газа в сосуд, закрытый поршнем, над которым поддерживается постоянное давление  $p = \text{const}$ . Поршень свободно перемещается, и, следовательно, давление в газе будет равно той же величине. Для нагревания этого моля на то же число градусов  $\Delta T$  придется теперь затратить большее количество тепла

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A, \quad (32.5)$$

где  $\Delta A$  — работа, совершаемая газом при перемещении поршня. Теплоемкость этого процесса определяется из соотношения

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A}{\Delta T} = C_v + \frac{\Delta A}{\Delta T}. \quad (32.6)$$

(Напомним еще раз, что для идеального газа  $U$ , а значит, и  $\Delta U$  не зависит от объема или давления, но есть функция только его температуры; поэтому  $\Delta U/\Delta T$  также не зависит от  $V$  или  $p$ , а характеризует изменение внутренней энергии газа с изменением температуры. Мы нашли эту величину, определяя теплоемкость  $\Delta U/\Delta T$  в случае, когда внешняя работа не производится, т. е.  $V = \text{const}$ , а  $\Delta V = 0$ , и весь поток тепла идет только на увеличение внутренней энергии газа.)

Обозначим площадь поршня через  $S$ . Полная сила, действующая на поршень,  $F = pS$ . При расширении газа поршень поднимается на некоторую высоту  $\Delta h$  (рис. 2.47), и, следовательно, газ совершит, преодолевая внешнюю силу, работу

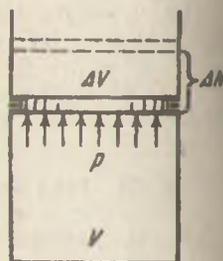


Рис. 2.47.

$$\Delta A = F\Delta h = pS \Delta h = p \Delta V, \quad (32.7)$$

где  $\Delta V = S\Delta h$  — увеличение объема газа.

Для идеального газа  $p$ ,  $V$  и  $T$  связаны между собой уравнением Менделеева — Клапейрона, которое для 1 кмолья имеет вид

$$pV = RT. \quad (32.8)$$

После нагревания при  $p = \text{const}$  до температуры  $T + \Delta T$  газ займет объем  $V + \Delta V$ . Следовательно,

$$p(V + \Delta V) = R(T + \Delta T). \quad (32.9)$$

Вычитая почленно (32.8) из (32.9), получим:

$$\Delta A = p \Delta V = R \Delta T. \quad (32.10)$$

Таким образом, искомая величина равна

$$\frac{\Delta A}{\Delta T} = \frac{p \Delta V}{\Delta T} = R. \quad (32.11)$$

Соотношение (32.11) дает простую интерпретацию физического смысла универсальной газовой постоянной  $R$ :

*Универсальная газовая постоянная  $R$  численно равна работе расширения киломоля идеального газа при нагревании его на один градус при постоянном давлении.*

Подставляя (32.11) в (32.6), получаем:

$$C_p = C_v + R \quad (32.12)$$

или

$$C_p - C_v = R. \quad (32.13)$$

Для идеального газа молярная теплоемкость при постоянном давлении превышает молярную теплоемкость при постоянном объеме на величину  $R$ , т. е. на  $8,31 \text{ кдж/кмоль} \cdot \text{град}$ . Это соотношение носит название формулы Майера. Зная разность теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме, выраженную в тепловых единицах, а также работу расширения при нагревании воздуха при постоянном давлении, выраженную в механических единицах, Р. Майер в 1842 г. впервые оценил величину механического эквивалента тепла.

### § 33. Теплоемкости одноатомных и многоатомных газов

Согласно (32.4) теплоемкость идеального газа при постоянном объеме равна приращению его внутренней энергии при нагревании на один градус. Заменяя конечные приращения бесконечно малыми, т. е. дифференциалами, мы перейдем от средней теплоемкости в некотором интервале температур к истинной, соответствующей данной температуре:

$$C_V = \frac{dU}{dT}. \quad (33.1)$$

В 1 кмоль газа содержится  $N_0$  молекул (где  $N_0$  — число Авогадро). Согласно (18.17) внутренняя энергия кмольа одноатомного газа при температуре  $T$  равна

$$U = N_0 \overline{\epsilon}_{\text{пост}} = N_0 \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} RT. \quad (33.2)$$

Следовательно, молярная теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} R = \text{const} \quad (33.3)$$

должна быть одинаковой для всех достаточно разреженных одноатомных газов; она не зависит от температуры и численно равна приблизительно  $12,5 \text{ кдж/кмоль} \cdot \text{град}$ . Этот вывод кинетической теории газов очень хорошо оправдывается на опыте для инертных («благородных») газов He, Ne, Ar, Kr и др., а также паров ряда металлов, например Ag.

Однако измерения теплоемкостей основных газов, входящих в состав воздуха  $N_2$ ,  $O_2$ , и ряда других двухатомных газов при комнатных температурах дают большее значение:  $C_V \approx 20,8 \text{ кдж/кмоль} \cdot \text{град}$ . Еще большее значение  $C_V \approx 25,0 \text{ кдж/кмоль} \cdot \text{град}$  наблюдается при комнатной температуре для водяного пара  $H_2O$  и других многоатомных газов ( $NH_3$ ,  $CH_4$  и т. д.).

Эти факты указывают на то, что предположение о воз-

возможности рассматривать движущиеся молекулы идеального газа как материальные точки и пренебрегать их протяженностью оказывается с достаточной степенью точности справедливым лишь для одноатомных молекул.

В разделе механики мы ввели понятие о числе степеней свободы материальных тел. Числом степеней свободы тела называется число независимых переменных, определяющих состояние тела. Например, материальная точка в пространстве обладает тремя степенями свободы, так как ее положение задается тремя независимыми координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . В соответствии с этим и средняя кинетическая энергия поступательного движения одноатомного газа может быть разделена на три части

$$\overline{\epsilon}_{\text{пост}} = \frac{3}{2} kT = \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{m\overline{u^2}}{2} + \frac{m\overline{v^2}}{2} + \frac{m\overline{w^2}}{2}, \quad (33.4)$$

соответствующие кинетической энергии трех поступательных степеней свободы этих атомов. Согласно выводам § 17

$$\frac{m\overline{u^2}}{2} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{m\overline{w^2}}{2} = \frac{1}{3} \frac{m\overline{c^2}}{2} = \frac{1}{2} kT, \quad (33.5)$$

т. е. средняя энергия теплового движения одноатомных молекул равномерно распределяется между тремя степенями свободы их поступательного движения, и на каждую степень свободы в среднем приходится энергия, равная  $\frac{1}{2} kT$

В случае двухатомной молекулы оба составляющих ее атома благодаря имеющимся между ними химическим связям движутся совместно, сохраняя фиксированное расстояние между их центрами  $r_0$ . При этом наряду с тремя поступательными степенями свободы движения молекулы как целого возможны еще, при неизменном  $r_0$ , вращательные движения молекулы вокруг осей, проходящих через ее центр тяжести, как это схематически изображено на рис. 2.48.

Кинетическая энергия вращения молекулы вокруг одной из осей равна

$$\epsilon_{\text{вращ}} = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (33.6)$$

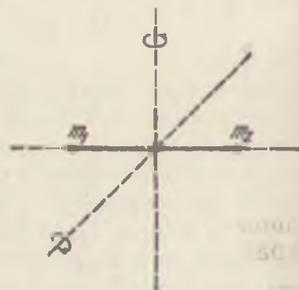


Рис. 2.48.

где  $I$  — момент инерции молекулы относительно оси вращения, а  $\omega$  — угловая скорость этого вращения. Благодаря трехмерности пространства любое вращение может быть разложено на три независимых вращения вокруг трех взаимно-перпендикулярных осей, изображенных на рис. 2.48. Однако в случае двухатомной молекулы из этих трех степеней свободы вращательного движения осуществляются лишь две, соответствующие вращению вокруг двух осей, перпендикулярных к оси самой молекулы. Дело в том, что эта ось проходит через оба атома так, что их расстояния до оси  $l_i$  равны нулю, и момент инерции молекулы относительно этой оси  $I_{\text{ось}} = \sum m_i r_i^2$  также обращается в нуль. Поэтому вращение молекулы относительно ее собственной оси не изменяет ее положения в пространстве, а согласно (33.6) кинетическая энергия такого вращения равна нулю.

При взаимных столкновениях молекул возможен обмен их энергиями и превращение энергии вращательного движения одной из них в энергию поступательного движения другой молекулы и обратно. Таким путем устанавливается равновесие между значениями средних энергий поступательных и вращательных движений молекул. В каком отношении друг к другу должны находиться средние энергии поступательного и вращательного движения?

В случае не слишком низких температур опыт подтверждает правильность указанного уже положения, известного под названием теоремы Больцмана: *средняя энергия, приходящаяся на одну степень свободы системы, равна  $\frac{1}{2} kT$ .*

Распространяя на вращательное движение теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы (33.5), мы должны считать, что

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2} kT. \quad (33.7)$$

Таким образом, средняя энергия хаотического теплового движения двухатомной молекулы складывается из энергии движений, соответствующих трем поступательным и двум вращательным степеням свободы, и равна

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{\text{пост}} + \bar{\epsilon}_{\text{вращ}} = 3 \cdot \frac{1}{2} kT + 2 \cdot \frac{1}{2} kT = \frac{5}{2} kT. \quad (33.8)$$

Отсюда внутренняя энергия 1 кмоль двухатомного газа равна

$$U = N_0 \cdot \frac{5}{2} kT = \frac{5}{2} RT,$$

и его теплоемкость при постоянном объеме составляет

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{5}{2} R \approx 20,8 \text{ кдж/кмоль} \cdot \text{град} \quad (33.9)$$

в полном соответствии с экспериментальными данными, полученными при комнатной температуре.

Для трехатомной молекулы паров воды, схематически изображенной на рис. 2.49, все три момента инерции отличны от нуля. Следовательно, такая молекула обладает шестью степенями свободы — тремя поступательными и тремя вращательными, и ее средняя энергия равна

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{\text{пост}} + \bar{\epsilon}_{\text{вращ}} = 3 \cdot \frac{1}{2} kT + 3 \cdot \frac{1}{2} kT = \frac{6}{2} kT. \quad (33.10)$$

Та же картина будет наблюдаться и для многоатомного газа \*). Поэтому внутренняя энергия 1 кмоль трех- и многоатомных газов

$$U = N_0 \cdot \frac{6}{2} kT = \frac{6}{2} RT, \quad (33.11)$$

а теплоемкость

$$C_V = \frac{6}{2} R \approx 25,0 \text{ кдж/кмоль} \cdot \text{град}, \quad (33.12)$$

что также соответствует опытным данным при обычных температурах.

Учет возможности вращательных движений молекул позволил объяснить различие численных значений молярных теплоемкостей одноатомных, двухатомных и многоатомных газов. Приведенные окончательные результаты (33.3), (33.9) и (33.12) показывают, что во всех этих случаях молярные теплоемкости газов должны иметь определенные постоянные значения, не зависящие от температуры. В настоящее время мы имеем возможность как в лабораторных условиях, так и в технике изменять температуры в широких пределах, от очень низких, близких к абсолютному нулю, до очень высо-

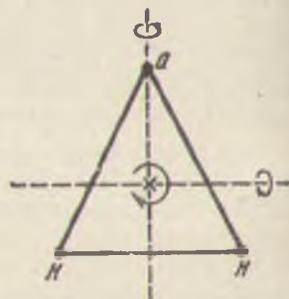


Рис. 2.49.

\* В некоторых многоатомных молекулах (например  $\text{CO}_2$ ) атомы расположены линейно, поэтому такие молекулы, как и двухатомные, имеют только две степени свободы вращательного движения и их теплоемкость определяется по формуле (33.9).

ких, измеряющихся тысячами градусов. Результаты измерений для одно- и двухатомных газов, произведенных в столь широком интервале температур, приведены на рис. 2.50.

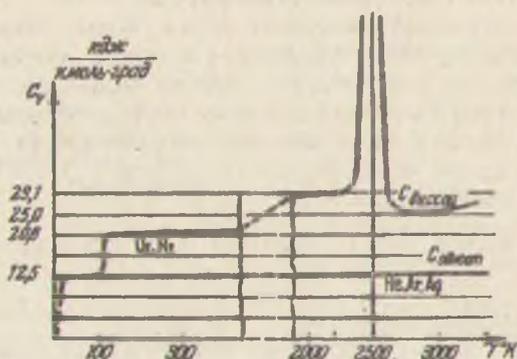


Рис. 2.50.

Из этого графика видно, что в случае одноатомных газов предсказываемая кинетической теорией формула (33.3) хорошо оправдывается от нескольких градусов абсолютной шкалы до тысяч градусов. Для двухатомных же газов величина  $C_V$  непрерывно изменяется с температурой, большей частью медленно и плавно, а в некоторых интервалах очень круто и на большую величину.

При комнатной температуре двухатомный газ обладает пятью степенями свободы и его теплоемкость  $C_V = 20,8$  кдж/кмоль·град. При температурах жидкого воздуха (около  $-200$  °С, т. е. около  $100$  °К) теплоемкость газа резко падает и при еще более низких температурах остается постоянной и равной  $C_V = 12,5$  кдж/кмоль·град, как для одноатомных газов.

Этот факт показывает, что при температурах порядка  $100$  °К (а для водорода при несколько более высокой температуре) по каким-то причинам вращательные степени свободы как бы «вымерзают» и молекулы двухатомного газа движутся только поступательно. При этих температурах, даже при косом ударе, схематически изображенном на рис. 2.51, молекулы лишь обмениваются энергией своих поступательных движений и не начинают вращаться, что противоречит законам классической динамики.

В части I (§ 9 гл. II) мы уже указывали, что законы

классической механики установлены на опыте для движений больших тел при скоростях, много меньших скорости света; применение этих законов к движениям микроскопических частиц имеет также свои границы. В томе III, при изучении строения атома, будут вкратце изложены установленные в XX веке основные законы движения микроскопических частиц — законы квантовой механики. Эти более точные законы объясняют наблюдаемые на опыте явления «вымерзания» или обратного ему «возбуждения» тех или иных степеней свободы.

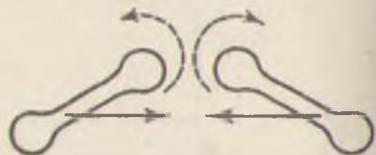


Рис. 2.51

Здесь мы лишь кратко остановимся на этом объяснении. Классическая физика исходит из предположения, что все физические величины — энергия (потенциальная и кинетическая), количество движения, момент количества движения и другие — способны изменяться лишь непрерывно. Квантовая теория показывает, что такое представление неправильно.

Целый ряд физических величин не может меняться непрерывно. Эти величины, изменяясь, принимают прерывный, «дискретный» ряд значений, переходя от одного значения к другому скачком. Здесь для нас особенно важна эта скачкообразность изменения кинетической энергии вращательного движения  $I\omega^2/2$ .

В частности, чтобы молекула начала вращаться, ей необходимо сообщить некоторую вполне определенную порцию энергии  $\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}$ . Если сообщаемая энергия меньше этой порции, то вращение молекулы возникнуть не сможет. При высоких температурах, когда средняя энергия теплового движения много больше величины  $\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}$ :

$$kT \gg \Delta\varepsilon_{\text{вращ}}, \quad (33.13)$$

все молекулы вращаются с энергиями, близкими к  $kT$ . Происходящие при столкновениях скачкообразные изменения энергии вращательного движения отдельных молекул сравнительно невелики и могут считаться в этой области температур бесконечно малыми. Тогда изменения кинетической энергии вращательного движения можно приближенно считать непрерывными, в соответствии с классическими представлениями.

С понижением температуры скачкообразное изменение вращательной энергии становится все более заметным, и при

$$kT < \Delta\epsilon_{\text{вращ}} \quad (33.14)$$

средняя энергия поступательного движения сталкивающихся молекул становится уже недостаточной для возбуждения вращательного движения даже с самой минимальной (из возможных) угловой скоростью. При столь низких температурах молекулы двухатомного газа практически перестают вращаться и движутся только поступательно, как одноатомный газ. Расчет показывает, что величина  $\Delta\epsilon_{\text{вращ}}$  тем больше, чем меньше момент инерции молекулы. Поэтому у легкого водорода «вымерзание» вращательных степеней свободы наступает раньше, т. е. при более высоких температурах, чем у других двухатомных газов.

При достаточно низких температурах газы конденсируются и движение их молекул оказывается не поступательным, а колебательным. На характере этого (также квантового) движения мы здесь не останавливаемся, так как речь о нем будет идти в следующих главах (см. ч. III, гл. XII, § 49).

Отметим лишь, что все сказанное относится к атомам и молекулам, но не к электронам, которые движутся в металлах поступательно, сохраняя очень большую энергию поступательного движения даже при абсолютном нуле температуры (эта энергия, как мы покажем позже, имеет нетепловую природу). О свойствах свободно движущихся электронов в металлах будет рассказано в теме II курса.

Мы выяснили, таким образом, качественно причину уменьшения теплоемкости газов с уменьшением температуры. Она состоит, коротко говоря, в том, что *принцип Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы не является универсальным*. Он правилен лишь в тех случаях, когда порция энергии  $\Delta\epsilon$ , которая может быть передана соответствующей степени свободы, много меньше  $\frac{1}{2}kT$ . Если же  $T$  невелико, то степени свободы начинают «вымерзать». Они уже не могут принимать слишком малые для них порции энергии и тогда не принимают участия в распределении полной энергии системы. *Соответственно уменьшению участвующих в приеме энергии степеней свободы уменьшается и теплоемкость*.

Рассмотрим теперь причины изменения теплоемкости при высоких температурах. Каждый атом обладает тремя степенями свободы. Но молекула, состоящая из двух атомов, обладает не шестью, а лишь пятью степенями свободы (три

поступательные и две вращательные). Уменьшение числа возможных степеней свободы на единицу обязано предположению, что оба атома в молекуле связаны жестко, находясь на неизменном расстоянии  $r_0$  друг от друга. Фактически, однако, никакой жесткой связи между атомами нет. Силы взаимодействия, связывающие атомы в молекулу, определяют лишь равновесное значение расстояния между ними, изменению которого как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения атомы оказывают противодействие. Эта связь следовательно, скорее напоминает упругую пружину, и при сообщении молекуле энергии атомы могут начать колебаться вдоль линии связи.

Таким образом, двухатомная молекула имеет шестую степень свободы — внутреннее колебательное движение. Эта степень свободы обладает очень большой энергией возбуждения  $\Delta \epsilon_{\text{колеб}}$  и поэтому при обычных температурах не проявляется. С повышением температуры, при столкновениях отдельных, случайно более богатых энергией молекул некоторые из них будут приходить в колебательное движение в тем большем числе, чем выше температура. За счет такого постепенного возбуждения колебательной степени свободы теплоемкость двухатомных газов будет увеличиваться с повышением температуры, достигая некоторого предельного значения при  $\sim 2000^\circ\text{C}$ .

В отличие от поступательного и вращательного движения молекул, обладающих только кинетической энергией, при колебательном движении происходит непрерывное превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. Поэтому при возбуждении колебательная степень свободы обладает вдвое большей средней энергией, чем каждая из поступательных и вращательных степеней свободы, т. е.

$$\overline{\epsilon}_{\text{колеб}} = \overline{\epsilon}_{\text{кин}} + \overline{\epsilon}_{\text{пот}} = \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = kT. \quad (33.15)$$

Следовательно, при высоких температурах средняя энергия одной двухатомной молекулы станет равна

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon} &= \overline{\epsilon}_{\text{пост}} + \overline{\epsilon}_{\text{вращ}} + \overline{\epsilon}_{\text{колеб}} = 3 \cdot \frac{1}{2} kT + 2 \cdot \frac{1}{2} kT + kT = \\ &= \frac{7}{2} kT, \end{aligned} \quad (33.16)$$

и теплоемкость двухатомного газа должна быть

$$C_V = \frac{7}{2} R \approx 29,1 \text{ кдж/кмоль} \cdot \text{град}$$

— в полном соответствии с опытом (рис. 2.50).

При дальнейшем повышении температуры, примерно до 2500 °С, колебания атомов в молекулах становятся настолько интенсивными, что молекулы разрываются на составляющие их атомы. На подобную диссоциацию молекул затрачивается значительная энергия, раз в 10 превышающая среднюю энергию их поступательного движения при этих температурах. Поэтому подводимое к газу тепло лишь в незначительной части будет идти на увеличение скоростей молекул и повышение температуры, а большая часть тепла будет затрачиваться на разрыв внутримолекулярной связи. На кривой зависимости теплоемкости от температуры появляется очень высокий пик, выходящий за пределы рис. 2.50. До тех пор, пока все молекулы не диссоциируют, температура газа практически не будет повышаться, несмотря на подвод тепла.

Это обстоятельство является причиной сравнительно низкой температуры пламени. При теплотах сгорания обычных топлив порядка  $\Delta Q \approx 200 \div 400$  кдж/кмоль и теплоемкости продуктов сгорания, равной 25 кдж/кмоль·град, следует ожидать, что температура пламени достигнет 10 000 °С. Однако уже при 2500 °С начинается столь сильная диссоциация продуктов сгорания и резкое повышение теплоемкости, что дальнейшее повышение температуры пламени становится трудно осуществимым.

Возвращаясь к графику рис. 2.50, следует указать, что после полной диссоциации в объеме вместо, например, 1 моля молекулярного кислорода  $O_2$  окажутся 2 моля атомарного кислорода  $O$ . Поскольку теплоемкость атомов составляет 12,5 кдж/кмоль·град, то полная теплоемкость системы в расчете на 1 моль исходного молекулярного (двухатомного) кислорода составит при температурах свыше 2500 °С около 25,0 кдж/кмоль·град.

Поскольку сами атомы не являются в действительности материальными точками, а представляют довольно сложные системы электронов, движущихся вокруг ядер, то при дальнейшем повышении температуры электроны начнут переходить на более высокие энергетические уровни и теплоемкость вновь будет расти за счет возбуждения внутренних степеней свободы атомов. Однако, поскольку порции энергии  $\Delta \epsilon_{эл}$ , необходимые для перевода электронов с их нормальных траекторий в атоме на возбужденные, в десятки раз превышают значения  $\Delta \epsilon_{колеб}$  внутримолекулярных колебаний, то при обычных и даже сравнительно высоких температурах (до 2000—3000 °С) движение электронов внутри атомов останется неизменным, и эти степени свободы у подавляющего

большинства атомов не будут участвовать в распределении энергии при тепловом движении.

Таким образом, атом при обычных условиях обладает только тремя степенями свободы поступательного движения не потому, что он представляется материальной точкой, а потому, что энергия движения электронов внутри атомов не меняется, пока  $\Delta \epsilon_{эл} \gg kT$ .

В томе III мы увидим, что именно за счет возбуждения весьма малой части атомов газа при температурах порядка 1000 °К и выше происходит свечение газа. Полный распад легких атомов на составные части — ядра и свободные электроны — происходит лишь при сверхвысоких температурах порядка  $10^6 \div 10^7$  °К. Такой порядок имеет температура, развиваемая при взрывах атомных и водородных бомб. В этих условиях, например, молекула  $O_2$  разрывается на 2 ядра и 16 электронов, и совокупность этих 18 частиц, движущихся раздельно, обладает  $18 \cdot 3 = 54$  степенями свободы поступательного движения.

Но и этой температуры недостаточно для «расщепления» всех атомных ядер, что требует исключительно больших температур, не достигаемых даже в центральных областях звезд.

### § 34. Процессы и циклы с газами и их графическое изображение

Уравнение Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{M}{\mu} RT = \nu RT \quad (34.1)$$

устанавливает связь между тремя основными параметрами  $p$ ,  $V$  и  $T$ , характеризующими данную массу газа. Таким образом, из трех параметров любые два могут рассматриваться как независимые, а третий может быть выражен через них. Выбирая в качестве независимых параметров, определяющих состояние газа  $p$  и  $V$ , можно записать температуру в виде

$$T = \frac{1}{\nu R} pV. \quad (34.2)$$

Это позволяет наглядно изображать с помощью графиков состояние газа и происходящие в нем процессы.

Будем откладывать значения объема газа  $V$  на оси абсцисс, а значения давления  $p$  — на оси ординат (рис. 2.52). Каждому состоянию газа, характеризуемому определенными значениями  $V$  и  $p$ , отвечает на этом графике точка

е координатами  $(V, p)$ . И обратно, точка  $I$  на этом графике изображает состояние газа со значениями объема  $V=V_1$  и давления  $p=p_1$ . Соответствующая этому состоянию температура  $T=T_1$  определится по уравнению (34.2).

При изменении состояния газа величины  $p$  и  $V$  (и связанная с ними температура  $T$ ) будут непрерывно меняться, а изображающая состояния точка в  $pV$ -диаграмме будет перемещаться вдоль некоторой кривой. Сплошная кривая между точками  $I$  и  $II$  полностью отражает произведенный процесс изменения состояния газа.

С помощью  $pV$ -диаграммы легко вычислить работу, совершенную газом при данном процессе. Рассмотрим достаточно малый интервал изменения состояния, когда объем газа изменяется от произвольного значения  $V$  до значения  $V+\Delta V$ . При малом изменении объема  $\Delta V$  давление можно считать практически постоянным и равным  $p$ . Согласно (32.7) элементарная работа, совершенная газом при расширении на величину  $\Delta V$ , равна

$$\Delta A = p \Delta V. \quad (34.3)$$

Из рис. 2.52 видно, что величина  $\Delta A$  численно равна площади полоски, заштрихованной на этом графике двойной штриховкой. Разбивая полное изменение объема от  $V_1$  до  $V_2$  на ряд последовательных приращений  $\Delta V$ , мы найдем полную работу, совершенную газом в течение данного процесса, как сумму площадей таких полосок:

$$A_{I, II} = \sum_1^II p \cdot \Delta V. \quad (34.4)$$

В пределе эта работа изобразится полной площадью, заключенной между кривой, изображающей процесс, осью абсцисс и двумя ординатами, восстановленными в конечных точках  $V_1$  и  $V_2$ . Эта площадь на рис. 2.52 показана простой штриховкой.

Условие постоянства давления  $p$  при малом изменении объема  $\Delta V$  будет соблюдаться тем лучше, чем меньше величина  $\Delta V$ , что хорошо видно из графика. Значение искомой работы  $A_{I, II}$  будет вычислено тем точнее, чем меньше

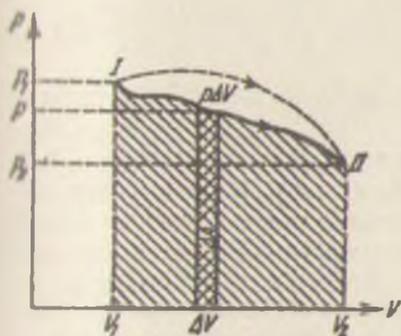


Рис. 2.52.

$\Delta V$ , т. е. чем больше полосок помещается между  $V_1$  и  $V_2$ . Точное значение  $A_{I,II}$  мы получим, переходя к пределу бесконечно большого числа бесконечно тонких полосок. Такая сумма записывается символически в виде определенного интеграла:

$$A_{I,II} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV. \quad (34.5)$$

Если мы переведем газ из того же начального состояния ( $V_1, p_1$ ) в то же конечное состояние ( $V_2, p_2$ ) через другой ряд промежуточных состояний, то этот новый процесс в  $pV$ -диаграмме изобразится другой линией, соединяющей те же точки  $I$  и  $II$ . На рис. 2.52 такой процесс изображен пунктирной линией.

Как видно из рисунка, площадь, ограниченная сверху пунктирной кривой и численно равная работе  $A'_{I,II}$ , при втором процессе отличается от площади, ограниченной первой кривой:  $A'_{I,II} \neq A_{I,II}$ . Таким образом, работа, совершаемая газом при изменении его состояния, зависит не только от его начального и конечного состояний, но и от пути перехода из одного в другое. Это еще раз подтверждает приведенное в § 31 разъяснение, что бессмысленно говорить о «запасе работы», заключенной в теле. Переводя газ из состояния  $I$  в состояние  $II$ , можно получить самую различную работу, в зависимости от способа («пути») перехода.

Этот вывод несколько не противоречит закону сохранения энергии — первому началу термодинамики (31.3), — поскольку при различных процессах газ не только совершает различную механическую работу, но и получает от окружающих тел различные количества теплоты. Для пояснения этого обстоятельства разберем детально несколько простейших процессов с газами, представляющих также и технический интерес.

1. **Изохорический процесс.** Так называется процесс, при котором объем газа остается постоянным ( $V = \text{const}$ ), а меняются лишь его давление  $p$  и температура  $T$ . Этот процесс осуществляется при нагревании газа в замкнутом объеме.

Изохорический процесс на  $pV$ -диаграмме изображается вертикальной прямой, параллельной оси  $p$  (рис. 2.53).

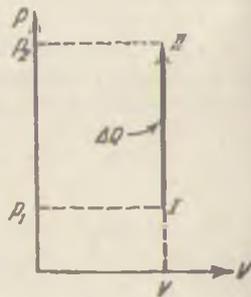


Рис. 2.53.

Так как  $V = \text{const}$ , то  $\Delta V = 0$  и

$$\Delta A = p\Delta V = 0, \quad (34.6)$$

т. е. при изохорическом процессе газ не совершает механической работы. Для этого случая уравнение первого начала (31.3) принимает вид

$$\Delta Q = \Delta U, \quad (34.7)$$

т. е. все сообщаемое газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии. Молярная теплоемкость при изохорическом процессе равна

$$C_V = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T}. \quad (34.8)$$

Численные значения этой теплоемкости для одно-, двух- и многоатомных газов были приведены в предыдущем параграфе.

2. Изобарический процесс. Так называется процесс, проходящий при постоянном давлении ( $p = \text{const}$ ). Он разбирался ранее в § 32. На  $pV$ -диаграмме этот процесс изображается горизонтальной прямой, параллельной оси  $V$  (рис. 2.54). Работа при изобарическом расширении изображается на этом графике площадью прямоугольника

$$\Delta A = p\Delta V = p(V_2 - V_1). \quad (34.9)$$

Применим к рассматриваемому процессу первое начало:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \quad (34.10)$$

Подводимое к газу тепло частично тратится на увеличение его внутренней энергии (на нагревание), а частично — на совершение работы. Молярная теплоемкость при изобарическом процессе равна

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A}{\Delta T}. \quad (34.11)$$

Но величина  $\Delta U/\Delta T$  от вида процесса не зависит, поскольку внутренняя энергия идеального газа  $U$  не зависит ни от  $p$ , ни от  $V$ , а определяется только величиной  $T$ . Следовательно, изменение внутренней энергии идеального газа с изменением температуры  $\Delta U/\Delta T$  одинаково при любых процессах, и мы можем, в соответствии с (32.4), заменить в (34.11)  $\Delta U/\Delta T$  на  $C_V$ :

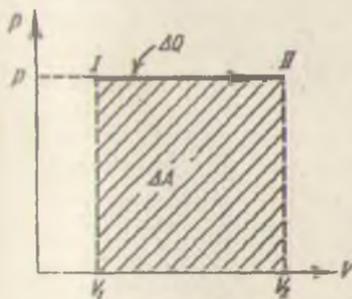


Рис. 2.54.

$$C_p = C_v + \frac{p \Delta V}{\Delta T}.$$

Как было доказано в § 32, для идеального газа

$$C_p = C_v + \frac{p \Delta V}{\Delta T} = C_v + R. \quad (34.12)$$

При изобарическом сжатии направление процесса меняется на обратное, и работа, совершенная газом, становится отрицательной ( $\Delta A < 0$ ). Это означает, что не газ совершает внешнюю работу, а, напротив, внешние силы совершают положительную работу  $\Delta A'$  по сжатию газа, т. е.

$$\Delta A' = -\Delta A. \quad (34.13)$$

Величины  $\Delta U$  и  $\Delta Q$  при этом также отрицательны, т. е. внутренняя энергия газа уменьшается за счет отдачи им тепла окружающим телам.

3. Изотермический процесс. Так называется процесс, проводимый при постоянной температуре газа ( $T = \text{const}$ ). Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что при этом

$$pV = \text{const}. \quad (34.14)$$

Значение постоянной можно определить, подставив значения  $p$  и  $V$  для любой, например начальной или конечной точки процесса:

$$pV = p_1 V_1. \quad (34.14a)$$

Это уравнение изображается на графике гиперболой (рис. 2.55). Поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры, то при изотермическом расширении  $U = \text{const}$  и  $\Delta U = 0$ . Следовательно, согласно первому началу

$$\Delta Q = \Delta A. \quad (34.15)$$

Подводимое к газу при изотермическом расширении тепло целиком превращается в работу расширения. Численная величина совершенной работы находится по правилам интеграль-

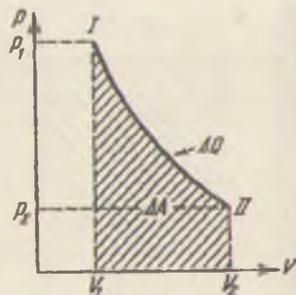


Рис. 2.55.

ного исчисления и равна \*

$$\Delta A = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (34.16)$$

Теплоемкость при изотермическом расширении определяется формально по общему соотношению и равна

$$C_T = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta Q}{0} = \infty.$$

Бесконечная теплоемкость не является физическим абсурдом. Она означает, что подводимое к газу тепло не приводит к изменению его температуры в силу того, что все оно идет на совершение газом внешней работы. При расширении  $\Delta Q > 0$  и  $C_T = +\infty$ , при сжатии  $\Delta Q < 0$  и  $C_T = -\infty$ .

При изотермическом процессе увеличение внутренней энергии газа за счет притока тепла целиком компенсируется уменьшением внутренней энергии вследствие произведенной газом работы расширения. Таким образом, внутренняя энергия газа остается неизменной.

Осуществление изотермического процесса при температуре  $T$  предполагает существование — при той же температуре — внешней среды, обладающей неизмеримо большим запасом внутренней энергии, чем внутренняя энергия рабочего газа. Тогда малая потеря энергии внешней средой не приведет к заметному уменьшению ее температуры. Расширение рабочего газа должно происходить бесконечно медленно, чтобы его температура в каждый момент успевала выравниваться с температурой окружающей среды. Практически всегда можно указать предельную скорость реального процесса, при которой процесс будет достаточно близок к изотермическому.

4. Адиабатический процесс. Если сосуд с расширяющимся газом теплоизолировать от окружающей среды, то теплообмен будет отсутствовать, т. е.  $\Delta Q = 0$ . Процесс, происходящий при соблюдении этого условия, называется адиабатическим.

\* Согласно (34.5)  $A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ . Подставляя сюда  $p$ , определенное из

(34.14а):  $p = \frac{p_1 V_1}{V}$ , и вынося постоянную  $p_1 V_1$  за знак интеграла, получаем:

$$A_{12} = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 (\ln V_2 - \ln V_1) = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Уравнение первого начала при учете условия  $\Delta Q = 0$  принимает вид

$$0 = \Delta U + \Delta A \text{ или } \Delta A = -\Delta U. \quad (34.17)$$

Следовательно, *при адиабатическом процессе работа совершается только за счет внутренней энергии газа*. При адиабатическом расширении газ совершает работу, а его внутренняя энергия и, следовательно, температура падают. При адиабатическом сжатии работа газа отрицательна (внешняя среда производит работу над газом), внутренняя энергия и температура газа возрастают.

Адиабатический процесс можно реализовать практически и при отсутствии хорошей теплоизоляции. Но тогда необходимо вести процесс столь быстро, чтобы за время его осуществления не произошел сколько-нибудь существенный теплообмен с внешней средой.

Теплоемкость при адиабатическом процессе

$$C_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{0}{\Delta T} = 0. \quad (34.18)$$

Выведем уравнение кривой, изображающей адиабатический процесс на  $pV$ -диаграмме. Уравнение состояния моля газа имеет вид

$$pV = RT. \quad (34.19)$$

При бесконечно малом изменении состояния совершаемая работа  $\Delta A \rightarrow p dV$ , а изменение внутренней энергии, согласно (33.1),  $\Delta U \rightarrow C_V dT$ . Подставляя эти значения  $\Delta A$  и  $\Delta U$  в уравнение первого начала (34.17), получим:

$$C_V dT + p dV = 0. \quad (34.20)$$

Это есть уравнение адиабаты в дифференциальной форме. Поскольку оно содержит все три параметра —  $p$ ,  $V$  и  $T$ , — то для исключения одного из них воспользуемся уравнением состояния (34.19), предварительно продифференцировав его:

$$pdV + Vdp = RdT. \quad (34.21)$$

Умножая уравнение (34.20) на  $R$ , а (34.21) — на  $C_V$  и складывая их, получим:

$$(C_V + R)pdV + C_V Vdp = 0. \quad (34.22)$$

Принимая во внимание, что для идеального газа  $C_V + R = C_p$ , разделим уравнение (34.22) на произведение  $C_V pV$  и введем обозначение

$$\gamma = \frac{C_p + R}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} > 1. \quad (34.23)$$

Тогда (34.22) примет вид

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (34.24)$$

Учитывая, что постоянный множитель  $\gamma$  можно внести под знак дифференциала, преобразуем (34.24) к виду

$$d[\gamma \ln V + \ln p] = 0. \quad (34.25)$$

Отсюда следует, что величина, стоящая в скобках, должна быть постоянной. Для упрощения дальнейших выкладок обозначим эту константу через  $\ln \text{const}$ . Тогда

$$\gamma \ln V + \ln p = \ln \text{const}. \quad (34.26)$$

Учитывая, что  $\gamma \ln V = \ln V^\gamma$  и потенцируя выражение (34.26), получим:

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (34.27)$$

Это и есть уравнение адиабаты.

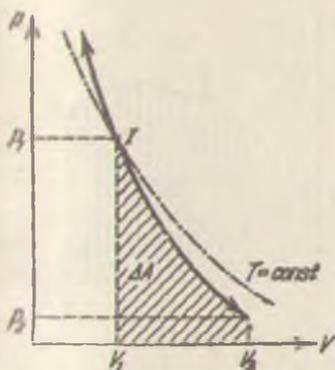


Рис. 2.56.

Поскольку  $\gamma > 1$ , то кривая, изображаемая этим уравнением (рис. 2.56), идет круче изотермы (рис. 2.56), которая для сравнения

показана на том же чертеже штрих-пунктиром. Видно, что при адиабатическом расширении из точки  $I$  кривая (34.27) опускается ниже изотермы, т. е. газ охлаждается, а при адиабатическом сжатии кривая (34.27) поднимается выше изотермы, т. е. газ нагревается. Величина работы адиабатического процесса может быть особенно просто вычислена с помощью уравнения (34.17):

$$\Delta A = -C_v \Delta T = -C_v (T_2 - T_1) = C_v (T_1 - T_2). \quad (34.28)$$

Для нахождения же конечной температуры  $T_2$  можно, комбинируя (34.19) и (34.27), получить соотношение

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (34.29)$$

Для одноатомного газа  $C_v = 12,5$  кдж/кмоль·град,  $C_p = C_v + R = 20,8$  кдж/кмоль·град, и показатель степени адиабаты равен  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{20,8}{12,5} \approx 1,67$ . Для двухатомных га-

зов при обычных температурах  $\gamma = \frac{29,1}{20,8} \approx 1,4$ . Для многоатомных газов при возбуждении их колебательных степеней свободы теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  имеют еще большие значения и показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} \quad (34.30)$$

еще ближе к единице.

В быстроходных двигателях внутреннего сгорания и при истечении газов через сопла реактивных двигателей процесс расширения газа протекает настолько быстро, что его можно считать практически адиабатическим и рассчитывать по уравнению (34.27).

Разобранные нами изохорический, изобарический, изотермический и адиабатический процессы являются простейшими примерами бесчисленного многообразия процессов изменения состояния газа. Из этих примеров, в частности, видно, что теплоемкость газа существенно зависит от характера процесса изменения его состояния и может принимать любые значения от  $+\infty$  для изотермического расширения ( $\Delta Q > 0$ ) до  $-\infty$  для изотермического сжатия ( $\Delta Q < 0$ , и при  $\Delta T = 0$   $C_T = -\infty$ ).

В теплоэнергетике широко применяются совокупности процессов, образующие замкнутые циклы, как это изображено на рис. 2.57. При этом на участке расширения  $123$  газ совершает положительную работу, изображаемую вертикально заштрихованной площадью, а на участке сжатия  $341$  — отрицательную работу, которой соответствует площадь, показанная горизонтальной штриховкой. Полная работа  $\Delta A$ , совершенная газом за один цикл, будет равна разности этих площадей, т. е. площади, ограничиваемой кривой  $12341$ .

Поскольку газ в результате цикла возвращается в исходное состояние  $1$ , его внутренняя энергия в начале и в конце процесса одинакова и полное изменение внутренней энергии газа за цикл  $\Delta U = 0$ . Из формулировки первого начала тогда следует, что

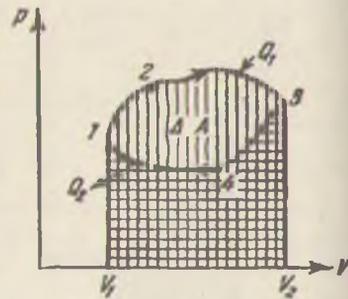


Рис. 2.57.

$$\Delta Q = \Delta A, \quad (34.31)$$

т. е. в результате каждого цикла происходит преобразование некоторого количества теплоты в работу или наоборот.

Более детальный анализ показывает, что на одних участках цикла газ получает от более горячих окружающих тел некоторое количество теплоты  $Q_1$ , а на других участках отдает часть этого тепла  $Q_2$  другим, более холодным окружающим телам. Лишь за счет части тепла

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2, \quad (34.32)$$

отнятого от более горячих тел, совершается работа, так что

$$\Delta A = Q_1 - Q_2. \quad (34.33)$$

Отношение совершенной за цикл механической работы к теплу, отнятому от горячего тела,

$$\frac{\Delta A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \eta \quad (34.34)$$

носит название коэффициента полезного действия цикла. Вопрос о выборе цикла с большим к. п. д. и о максимальных возможных значениях к. п. д. подробно разбирается в курсах технической термодинамики (см. также § 37).

ГЛАВА IX  
ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 35. Обратимые и необратимые процессы

В § 15, рассматривая молекулярное движение, мы подчеркивали отличия последнего от чисто механического движения тела как целого. Эти отличия приводят, в частности, к тому, что тепловые процессы в противоположность механическим (при отсутствии трения, приводящего к выделению тепла) могут быть необратимыми. Рассмотрим сейчас этот вопрос несколько подробнее.

Чисто механические процессы всегда обратимы. В § 15 мы рассматривали движение материальной точки по наклонной плоскости под действием силы тяжести (рис. 2.58). В положении *A* материальная точка имела скорость  $v_A$ , а опустившись в положение *B* (разность высот точек *A* и *B* равна  $h$ ), она приобретает скорость  $v_B$  (рис. 2.58, *a*). Величина  $v_B$  может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgh. \quad (35.1)$$

Установим в точке *B* абсолютно упругую плоскую стенку (рис. 2.58, *b*). Ударившись об эту стенку, материальная точка изменит свою скорость на обратную и со скоростью —  $v_B$  начнет подниматься обратно. Применяя вновь закон сохранения энергии (35.1), мы найдем, что в положении *A* материальная точка будет двигаться со скоростью —  $v_A$ , равной по величине и обратной по направлению своему первоначальному значению  $v_A$  в той же точке. Аналогичное обращение направления скорости будет и в любой промежуточной точке *B*. При возвращении материальной точки в исходное положение ее потенциальная энергия принимает первоначальное значение  $mgh$  и, следовательно, во всей

системе не происходит никаких изменений, кроме изменения знака скоростей. Любое чисто механическое движение больших и малых тел как с малыми, так и с большими скоростями всегда в полне обратимо. Это можно доказать в общем виде и совершенно строго, исходя из уравнений движения механики.

При наличии теплового движения наблюдаются, как правило, процессы не обратимые.

Когда пуля в результате трения о воздух теряет скорость, т. е. происходит превращение механической энергии в тепло (пуля и воздух нагреваются), нельзя «повернуть» процесс, так, чтобы рассеянное тепло превратилось опять в энергию механического движения пули.

Кинетическая энергия движения пули как целого будет в результате столкновений молекул воздуха с пулей переходить в добавочную энергию хаотического движения молекул воздуха и пули. Рассмотренным выше механизмом теплопроводности эта энергия постепенно распределится между все большим числом молекул. Обратный переход энергии невозможен, т. е. процесс необратим.

Говоря о необратимости того или иного процесса, мы не имеем в виду его «непосредственную» необратимость. Вопрос ставится шире: *нельзя ли с помощью каких-либо процессов или механизмов добиться того, чтобы участвовавшие в них тела можно было вернуть в исходное состояние без того, чтобы в природе возникли какие-либо другие изменения?* Для выяснения этого вопроса рассмотрим два важнейших типа необратимых процессов: расширение газа в пустоту и теплообмен между двумя телами.

1. Возьмем сосуд, разделенный перегородкой, в одной половине которого заключен идеальный газ, а в другой половине создан абсолютный вакуум (рис. 2.59, а). Пусть в некоторый момент перегородка удалена или прорвана, и газ расширяется в пустоту. Благодаря хаотическому движению молекул газ через некоторое время займет весь объем  $2V$  и заполнит его равномерно (рис. 2.59, б).

В процессе расширения в пустоту к газу не подводилось тепла ( $\Delta Q = 0$ ) и он не совершал никакой внешней

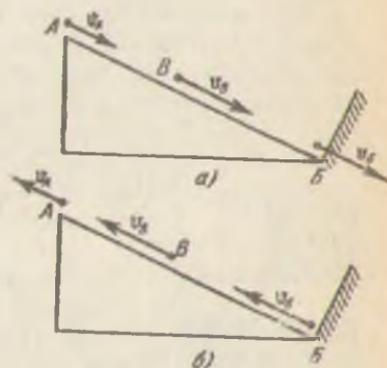


Рис. 2.58.

работы ( $\Delta A=0$ ). Из первого начала термодинамики (31.3) тогда следует, что

$$\Delta U=0,$$

т. е. внутренняя энергия газа осталась неизменной ( $U=\text{const}$ ). Поскольку энергия идеального газа зависит только от его температуры, то в результате расширения в пустоту температура газа не изменится ( $T=\text{const}$ ). Так как объем газа увеличился вдвое, то при этом окончательное давление по уравнению Менделеева — Клапейрона упадет вдвое; в самом деле,

$$RT=pV=p'\cdot 2V,$$

откуда

$$p'=\frac{p}{2}.$$

Рассмотренный процесс непосредственно необратим. Можно ждать сколь угодно долгое время и практически никогда не дожидаться, чтобы все молекулы газа сами собой собрались в одной половине сосуда.



Рис. 2.59

Попробуем тогда вернуть газ в исходное состояние, передвигая одну из стенок сосуда как поршень (рис. 2.59, в). При этом газ будет оказывать сопротивление движению поршня и для его сжатия придется совершить работу  $\Delta A'$  и тем самым уменьшить энергию механических движений окружающих тел на  $\Delta A'$ . Поскольку при сжатии газ нагревается, то, чтобы сохранить его первоначальную температуру, придется отвести от него некоторое количество теплоты  $\Delta Q'=\Delta A'$ , т. е. увеличить энергию теплового движения каких-то других (или тех же самых) окружающих тел.

Таким образом, когда мы вернем газ, расширившийся в пустоту, в исходное состояние, некоторое количество энергии механических движений окружающих тел перейдет в энергию теплового движения других (или тех же самых) внешних тел. Следовательно, процесс расширения газа в пустоту необратим. При возвращении газа с помощью каких-либо машин или механизмов в исходное состояние, в окружающих телах обязательно останутся какие-то изменения, связанные с превращением некоторого количества механической энергии в тепловую.

2. Приведем в соприкосновение два тела с различной температурой (рис. 2.60). Тело с более высокой температурой  $T_1$  назовем нагревателем, а тело с более низкой температурой  $T_2$  — холодильником. Вследствие теплопроводности от нагревателя к холодильнику перейдет некоторое количество теплоты  $Q$ .



Рис. 2.60.

Этот процесс также необратим. Тепло всегда переходит от более горячего тела к более холодному, и никогда вследствие теплопроводности не осуществляется обратный процесс — самопроизвольный переход тепла от холодного тела к горячему.

Чтобы вернуть холодильник и нагреватель в исходное состояние, используем в качестве машины некоторое количество газа, заключенного в сосуд с поршнем, и проведем с ним замкнутый цикл, аналогичный циклу, изображенному на рис. 2.57, но только в обратном направлении 14321 (рис. 2.61).

При расширении газа, производящего внешнюю работу, его температура понизится. При температуре газа  $T$ , меньшей температуры холодильника  $T_2 (T < T_2)$ , можно будет отвести из холодильника и вернуть газу количество теплоты  $Q$ , ранее переданное газом холодильнику. Чтобы это тепло вернуть в нагреватель, газ надо предварительно сжать. В результате работы, совершенной при этом внешними силами, газ нагреется. Когда температура газа  $T$  превысит  $T_1 (T > T_1)$ , можно будет передать нагревателю ранее взятое у него количество теплоты. Однако, если мы захотим, чтобы рабочее тело — газ — в конце концов вернулось в исходное состояние, мы должны будем передавать нагревателю больше тепла, чем у него было отнято. Действительно, если количество теплоты, першедшее от холодильника к газу, равно  $Q$ , а работа внешних сил, за весь цикл равна  $A'$ , то количество теплоты  $Q + Q'$ , переданное нагревателю, будет равно

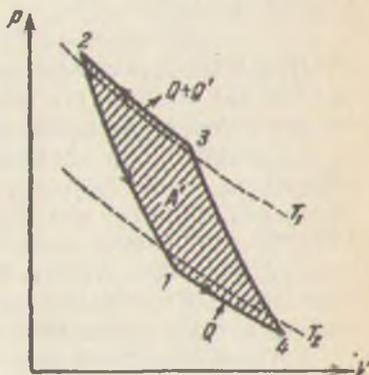


Рис. 2.61.

$$Q + Q' = Q + A'$$

(Напомним, что работа  $A'$  измеряется величиной площади цикла.)

Чтобы нагреватель вернулся в исходное состояние, он должен передать окружающим телам излишек полученного тепла.

Таким образом, возвращая нагреватель, холодильник и газ в исходное состояние, мы обнаружим, что и в этом случае в окружающей природе произошли изменения (как и в примере 1). Следовательно, процесс теплообмена между телами с различной температурой необратим.

Следует еще указать, что изображенный на рис. 2.61 обратный цикл широко применяется в холодильной технике. Совершая непрерывно механическую работу  $A'$  и превращая ее в тепло  $Q'$ , отдаваемое окружающей среде (являющейся нагревателем), можно благодаря этому отнимать у холодильного шкафа значительное количество теплоты  $Q$  и отдавать его той же окружающей среде, т. е. охлаждать сам шкаф\*.

Не следует, однако, думать, что любой тепловой процесс в принципе необратим. Приведем два важнейших примера принципиально обратимых процессов.

3. Адиабатическое сжатие (или расширение). Как мы видели в § 34, при адиабатическом процессе нет необратимого теплообмена с окружающей средой ( $\Delta Q = 0$ ) и

$$\Delta A = -\Delta U.$$

При адиабатическом расширении газ толкает поршень, увеличивая энергию его механического поступательного движения за счет уменьшения своей внутренней энергии (т. е. охлаждения). При адиабатическом сжатии поршень, сдавливая газ, сам тормозится и его механическая энергия переходит обратно во внутреннюю энергию газа. Таким образом, произведя адиабатическое расширение, а затем адиабатическое сжатие, можно вернуть газ полностью в исходное состояние без того, чтобы в окружающей природе произошли бы какие-нибудь изменения.

4. Изотермическое расширение (сжатие). Как мы видели в § 34, при изотермическом расширении идеального газа его энергия остается постоянной ( $\Delta U = 0$ ) и работа совершается за счет теплообмена с окружающей средой:

---

\* В новых полупроводниковых холодильниках процесс идет за счет превращения в тепло некоторого количества электрической энергии тока, протекающего в полупроводниковой цепи, что в принципе вполне эквивалентно рассмотренному. Подробнее о полупроводниках см. в томе II.

$$\Delta S \geq 0.$$

(37.1)

*При всех процессах, происходящих в макроскопической системе, энтропия системы возрастает (необратимые процессы) или, в крайнем случае, остается неизменной (обратимые процессы).*

Мы отмечали уже выше, что понятие энтропии (означающее «способность к превращению») было введено впервые Клаузиусом чисто феноменологически (т. е. чисто описательно, не входя в рассмотрение физического механизма явлений) как величины, дифференциал которой  $dS$  равен согласно (36.10) пределу  $\Delta Q_{обр}/T$ .

Клаузиусу принадлежит также простая формулировка второго начала:

*Теплота никогда не может переходить сама собой от тел с более низкой температурой к телам с более высокой температурой.*

Томсон и Планк формулируют второе начало следующим образом:

*В природе невозможен процесс, полный эффект которого состоял бы только в охлаждении теплового резервуара и в эквивалентном подъеме груза\*.*

Заметим, что обе формулировки не следует понимать в узком смысле — речь идет не о невозможности непосредственного процесса, но о невозможности реализовать его с помощью любых приспособлений, когда в результате процесса в природе не произошло бы никаких других изменений, связанных с увеличением энтропии других систем.

Легко видеть, что приведенные формулировки совершенно эквивалентны. Действительно, если бы положение Клаузиуса было неверно, то можно было бы один тепловой резервуар с температурой  $T_0$  разделить на две части и, перенося тепло от одной части к другой, получить два резервуара с температурами  $T_1 < T_0$  и  $T_2 > T_0$ . С помощью полученных таким образом холодильника и нагревателя можно было бы осуществить цикл (согласно § 34), поддерживая все время необходимую разность температур за счет передачи тепла от более холодного резервуара к более горячему. Таким образом, имея в своем распоряжении вначале один тепловой резервуар, мы смогли бы, если бы положение Клаузиуса было бы неверным, за счет уменьшения внутренней энергии этого резервуара

\* То есть в эквивалентной механической работе

получить механическую работу, что запрещается положением Томсона — Планка.

Следовательно, из правильности положения Клаузиуса следует правильность положения Томсона — Планка. Аналогично можно показать, что принимая положение Томсона — Планка, можно придти к положению Клаузиуса.

Имеющиеся вокруг нас тепловые резервуары содержат огромные количества внутренней энергии. Трудно оценить запас внутренней энергии теплой воды океана. Можно, например, подсчитать, что океанский корабль с двигателем мощностью 100 000 квт мог бы полностью обеспечить работу своей машины за счет охлаждения морской воды на  $15^\circ$  (от  $20^\circ\text{C}$  до  $5^\circ\text{C}$ ), охлаждая  $1\text{ м}^3$  воды в течение 6 сек, т. е. всего  $10\text{ м}^3$  морской воды в минуту. К сожалению, этот процесс термодинамически невозможен, и, пlying по такому, в буквальном смысле слова, океану энергии, корабль вынужден сжигать уголь или нефть.

Машина, которая работала бы за счет внутренней энергии одного теплового резервуара, получила название «перпетуум мобиле» (т. е. вечного двигателя) второго рода.

В отличие от «перпетуум мобиле» первого рода — двигателя, производящего энергию «из ничего», невозможность которого следует из закона сохранения энергии, двигатель второго типа работал бы без нарушения закона сохранения энергии. Однако его работа была бы нарушением второго начала термодинамики.

Таким образом, второе начало термодинамики, в виде положения Томсона — Планка, может быть сформулировано коротко так:

*Перпетуум мобиле второго рода невозможно.*

Вернемся теперь ко второму закону в его количественной формулировке с помощью энтропии. Справедливость соотношения (37.1) была проиллюстрирована нами на ряде конкретных примеров в § 35. В общем виде это неравенство было доказано Л. Больцманом методами статистической физики. Более подробный анализ вывода Больцмана, на котором мы здесь не имеем возможности останавливаться, позволяет выяснить границы применимости второго начала термодинамики.

1. Вывод Больцмана основан на применении методов статистической физики и теории вероятностей. Поэтому и окончательный результат носит вероятностный характер. Неравенство (37.1) следует, строго говоря, формулировать так:

*Наиболее вероятным изменением энтропии системы является ее возрастание.*

Как и все другие выводы статистической физики, второе начало термодинамики справедливо с точностью до флуктуаций, о которых мы упоминали в § 16. Флуктуации плотности и давления — это процессы, при которых вероятность состояния и его энтропия могут убывать.

В отличие от таких законов природы, как закон сохранения количества движения или энергии (в применении к тепловым процессам — первое начало термодинамики), второе начало термодинамики не является столь же непререкаемым законом. С точки зрения кинетической теории увеличение энтропии есть лишь наиболее вероятный, но отнюдь не обязательный путь развития системы. Это — статистический закон, отклонения от которого вполне возможны.

Самопроизвольное уменьшение энтропии макроскопической системы не невозможно, но весьма маловероятно. Чем большую совокупность частиц содержит данная система, тем менее вероятны отклонения от статистических закономерностей.

В случае же систем, состоящих из небольшого числа частиц или малых частей большой системы, вероятности отклонений наблюдаемых величин от средних становятся не слишком малыми и процессы, связанные с убыванием энтропии, уже могут наблюдаться.

Так, например, в результате броуновского движения пылинки может подняться на значительную высоту. Работа, необходимая для ее подъема, черпается из запаса кинетической энергии хаотического движения молекул. Следовательно, газ, в котором поднимается пылинка, в результате ее подъема остывает, и его энтропия уменьшается. Однако, если бы строитель стал ждать, пока благодаря случайным флуктуациям движений молекул воздуха кирпич, лежащий на земле, сам собой поднялся на высоту второго этажа за счет охлаждения окружающего воздуха, ему пришлось бы прождать время, неизмеримо большее продолжительности существования солнечной системы.

2. Реальная макроскопическая система всегда соприкасается с окружающими телами (например, газ — со стенками сосуда) и взаимодействует с ними. В этом взаимодействии в каждый данный момент времени принимает участие лишь относительно небольшая доля частиц, составляющих систему, а именно те частицы, которые находятся у границы с окружающими телами. Поэтому энергия взаимодействия

пограничных молекул  $E_{вз}$  в каждый данный момент времени ничтожно мала по сравнению с внутренней энергией системы  $U$ , которая пропорциональна общему числу всех частиц, составляющих систему:

$$E_{вз} \ll U. \quad (37.2)$$

Системы, для которых выполняется соотношение (37.2), называются почти изолированными. В каждый данный момент и за сравнительно короткие промежутки времени можно практически пренебречь энергией связи такой системы с окружающей средой  $E_{вз}$  и рассматривать систему как изолированную.

Однако, несмотря на малую относительную величину  $E_{вз}$ , за длительный промежуток времени слабое, но непрерывное взаимодействие с окружающей средой может привести к существенным изменениям состояния системы. Так, если впустить холодный разреженный газ в горячий сосуд, температура стенок которого поддерживается постоянной, то в каждый данный момент будет возрастать средняя кинетическая энергия лишь тех молекул газа, которые непосредственно ударяются о стенки сосуда, и энергия всего газа в целом будет оставаться практически неизменной. Но с течением времени это относительно слабое, но непрерывное взаимодействие газа со стенками сосуда полностью изменит состояние газа, и последний примет температуру стенок.

Таким образом, конечное состояние почти изолированной системы будет зависеть от состояния окружающей среды — резервуара, в который помещена система. Состояние резервуара будет определять установившееся равновесное состояние системы и все ее статистические закономерности.

3. Бессмысленно также применять законы статистической физики и, в частности, второе начало (37.1) к такой вообще незамкнутой системе, как вся вселенная в целом, — системе, которая безгранична и безгранично развивается.

Такую незакономерную попытку в 1867 г. сделал Клаузиус. Применяя второе начало термодинамики ко всей вселенной, он пришел к выводу, что рано или поздно ее энтропия должна достигнуть своего максимума. Это значит, что со временем все формы движения (механического, электрического, светового) должны перейти в тепловую форму хаотического молекулярного движения и температуры всех тел во вселенной должны сравняться. Исчезнет качественное различие всех форм движения материи, энергия этого движения качественно деградирует и не сможет переходить в другие формы, соответствующие меньшей энтропии. Все процессы

при этом прекратятся, и наступит так называемая «тепловая смерть вселенной».

Идеалистическую концепцию Клаузиуса резко критиковал Энгельс в «Диалектике природы». Дальнейшее развитие статистической физики подтвердило, что проблема тепловой смерти мира является чисто мнимой.

Резюмируя, следует сказать, что второе начало термодинамики имеет свои границы применимости. Его можно применять к системам с большим числом степеней свободы (при достаточно большом числе частиц) и почти изолированным. Судить же о развитии вселенной с точки зрения второго начала нельзя, так как при этом мы выходим за границы его применимости.

В 1906 г. В. Нернст сформулировал положение, получившее название третьего начала термодинамики. Физический смысл этого положения выяснился, однако, позднее, с развитием квантовой механики.

В § 19 мы определили абсолютный нуль температуры как состояние системы с наименьшей возможной энергией. Система, находящаяся в равновесии при абсолютном нуле температуры ( $T=0^\circ\text{K}$ ), не может больше отдавать энергию окружающим телам, и ее внутренняя энергия распределена между составляющими ее частицами одним-единственным определенным способом. Все электроны в атомах находятся при этом в наинизших энергетических состояниях, а атомы располагаются в пространстве определенным образом (в узлах кристаллической решетки твердого тела). Благодаря полной упорядоченности этого единственного состояния его термодинамическая вероятность  $W=1$ . Таким образом, оказывается, что

$$S_{T \rightarrow 0} = k \ln 1/0, \quad (37.3)$$

т. е. при абсолютном нуле энтропия тела обращается в нуль. Это и есть формулировка третьего начала термодинамики\*.

Уравнения (31.3), (37.1) и (37.3), физический смысл которых разобран в последних двух главах, являются основой всей технической термодинамики и ее многочисленных практических применений. Эти три основных начала позволяют рассчитывать различные тепловые машины: паровые двигатели, двигатели внутреннего сгорания и современные реактивные двигатели. На основе этих формул можно оце-

\* Пределов применимости третьего начала мы здесь касаться не будем.

нить эффективность различных циклов и проанализировать максимально достижимые значения коэффициентов их полезного действия. Остановимся коротко на последнем вопросе.

Основной задачей тепловых машин является превращение тепла в работу. Однако, если пытаться непосредственно отнять от нагретого тела некоторое количество тепла  $Q_1$  и превратить его в работу, то такой процесс оказывается противоречащим второму началу и термодинамически невозможным, так как в этом случае энтропия нагретого тела уменьшается без всякой компенсации.

Подобный процесс можно осуществить лишь за счет одновременного увеличения энтропии другого тела, например, отдавая ему часть тепла  $Q_2$ . Возрастание энтропии второго тела должно быть при этом не меньше убывания энтропии первого тела. Поэтому в соответствии с (36.10), если  $Q_2 < Q_1$ , то и  $T_2 < T_1$ , т. е. второе тело должно иметь более низкую температуру, чем первое.

Однако, если передавать тепло  $Q_2$  от нагревателя с температурой  $T_1$  к холодильнику с температурой  $T_2$  непосредственным соприкосновением, то такой процесс пойдет необратимо, а механическая работа вообще не будет получаться. Поэтому в процессе, кроме нагревателя, холодильника и поршня, должно обязательно

принять участие четвертое тело, которое должно обратимо отнять тепло  $Q_1$  от нагревателя, обратимо отдать часть тепла  $Q_2$  холодильнику, а разность  $Q_1 - Q_2$  передать поршню в виде механической работы  $A$ . Само это четвертое, «рабочее тело» должно в результате процесса вернуться в исходное состояние, т. е. совершить замкнутый цикл, приводившийся в § 34, а затем повторять его, если необходима машина непрерывного действия.

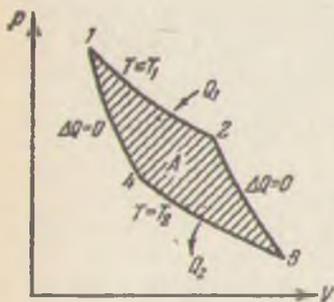


Рис 2.63.

Очевидно, что наибольшим к. п. д. будет обладать цикл, состоящий из целиком обратимых процессов, при котором не происходит необратимых переходов тепла от нагревателя к холодильнику с бесполезным увеличением энтропии. Такой обратимый цикл был впервые теоретически проанализирован С. Карно в 1824 г и носит название цикла Карно.

Цикл Карно, изображенный на рис. 2.63, состоит из

четырёх обратимых процессов — двух изотермических и двух адиабатических. На участке 1—2 рабочее тело изотермически расширяется и отнимает от нагревателя некоторое количество тепла  $Q_1$  при температуре  $T_1$ . На участке 2—3 рабочее тело отключается от нагревателя и адиабатически расширяется, продолжая толкать поршень и охлаждаясь до температуры холодильника  $T_2$  (точка 3). На участке 3—4 поршень изотермически сжимает рабочее тело, сообщенное с холодильником, которому оно отдает тепло  $Q_2$ . Наконец, на участке 4—1 рабочее тело отключается от холодильника и продолжает адиабатически сжиматься поршнем до исходного состояния 1.

Как было показано в § 34, заштрихованная площадь цикла дает работу  $A$ , совершенную рабочим телом.

По первому началу термодинамики

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (37.4)$$

Поскольку все отдельные процессы обратимы, то по второму началу термодинамики суммарное изменение энтропии всех четырех тел равно нулю:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{холод}} + \Delta S_{\text{раб. тела}} + S_{\text{поршня}} = 0. \quad (37.5)$$

Как было выяснено выше, энтропия  $S_{\text{поршня}}$  равна нулю. Рабочее тело в конце цикла возвращается в исходное состояние, и  $\Delta S_{\text{раб. тела}} = 0$ . Величины  $\Delta S_{\text{нагр}}$  и  $\Delta S_{\text{холод}}$  рассчитываются по формуле (36.10). Подставляя эти значения в (37.5), получаем для изменения энтропии  $\Delta S$  в цикле:

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{+Q_2}{T_2} + 0 + 0 = 0,$$

откуда

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (37.6)$$

Коэффициент полезного действия цикла  $\eta$  представляет собой отношение полученной работы к полному количеству теплоты, отнятому от нагревателя. Из (37.5) и (37.6) тогда находим, что

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (37.7)$$

т. е. максимальный к. п. д. тепловой машины тем больше, чем выше температура нагревателя  $T_1$  и чем ниже температура холодильника  $T_2$ . Именно в силу этого обстоятельства теплотехники стремятся к возможному повышению температуры нагревателя. Если в качестве нагревателя использо-

вать кипящую воду с температурой  $T_1=373$  °К, а в качестве холодильника — воздух с температурой  $T_2=293$  °К, то

$$\eta = \frac{373-293}{373} = \frac{80}{373} = 0,215 = 21,5 \%. \quad (37.8)$$

В современных турбинах большой мощности используется пар с температурой, превышающей 900 °К, что дает при температуре холодильника 300 °К теоретический к. п. д.:

$$\eta = \frac{900-300}{900} = \frac{6}{9} = 66,7 \%. \quad (37.9)$$

В реальном тепловом двигателе вследствие различных необратимых процессов (теплообмен, трение) к. п. д. при тех же условиях будет, конечно, значительно ниже.

### ЧАСТЬ III

## АГРЕГАТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

### ГЛАВА X

## РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

### § 38. Молекулярные силы

Рассматривая выше молекулы газа как соединения атомов — «материальных точек», — мы допустили, как это уже отмечалось, идеализацию. Перейдем теперь от рассмотрения свойств идеальных газов к изучению реальных газов. Не пытаясь здесь разобраться детально в строении атомов, входящих в молекулы, все же сделаем ряд качественных выводов, исходя из представлений о сложном строении атомов.

Молекулы газа представляют собой сложные системы движущихся электрических зарядов. Основная масса и весь положительный заряд молекулы сосредоточены в ее атомных ядрах, имеющих линейные размеры порядка  $10^{-15} \div 10^{-14}$  м. Вокруг этих ядер по определенным устойчивым орбитам движутся легкие отрицательно заряженные частицы — электроны. Диаметры электронных орбит порядка  $10^{-10}$  м, т. е. в десятки тысяч раз превышают диаметры ядер. Атомы и молекулы представляют собой весьма устойчивые и трудно деформируемые системы. Эта устойчивость обусловлена тем, что состояния атомов и молекул не могут меняться непрерывно, но способны принимать лишь прерывный («дискретный») ряд значений (подробно это будет рассмотрено в томе III). Переход атома из одного возможного состояния в другое связан со сравнительно большим изменением его энергии. Это и приводит к сравнительно большой устойчивости атомов и молекул. Ниже мы увидим, что атомы, например, в известном смысле «тверже» стальных шаров. При столкновении двух стальных шаров, движущихся друг

другу навстречу со скоростями 500 м/сек, они будут разбиты, в то время как атомы, сталкиваясь с большими скоростями, не претерпевают никаких изменений в своей структуре.

Обычно суммы положительных и отрицательных зарядов в молекуле равны друг другу, и молекула в целом электрически нейтральна. Благодаря такой компенсации зарядов разного знака в атомах и молекулах электрическое поле за пределами молекулы очень быстро убывает с расстоянием.

Практически его можно считать обращаемым в нуль уже на расстоянии двух — трех диаметров молекулы (т. е. диаметров ее электронной оболочки).

Поэтому при сближении двух молекул, пока расстояние  $r$  между их центрами велико по сравнению с их диаметрами  $d$ , силы взаимодействия между молекулами пренебрежимо малы (рис. 3.1, а).

При дальнейшем сближении, на расстояниях порядка двух — трех диаметров, начинает постепенно проявляться взаимодействие элект-

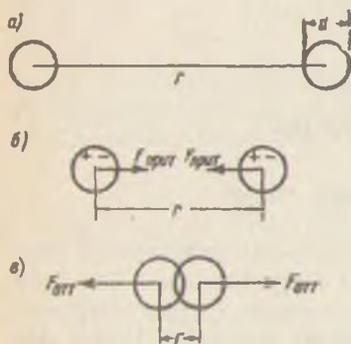


Рис 3.1

рических зарядов ядер и электронных оболочек молекул. Благодаря притяжению разноименных и отталкиванию одноименных зарядов произойдет небольшая деформация обеих взаимодействующих молекул, так что мгновенное распределение зарядов в молекуле станет примерно таким, как это показано на рис. 3.1, б. В результате между молекулами возникнут силы притяжения  $F_{\text{прит}}$ .

По мере дальнейшего сближения молекул деформация молекул и величина сил притяжения  $F_{\text{прит}}$  будут возрастать. Однако, когда молекулы подойдут «вплотную» друг к другу и «соприкоснутся» своими электронными оболочками, то дальнейшее сближение окажется невозможным. Между электронными оболочками возникнут огромные силы отталкивания, резко возрастающие по мере дальнейшего взаимного проникновения оболочек. На таких расстояниях молекулы будут отталкиваться, как это изображено на рис. 3.1, в.

Абсолютная величина сил взаимодействия будет существенно зависеть от конкретного строения рассматриваемых взаимодействующих молекул. Кроме того, для несферичес-

ких молекул силы взаимодействия будут зависеть не только от расстояния  $r$  между центрами молекул, но и от взаимной ориентации молекул. Однако общий характер зависимости  $F_{\text{вз}}$  от  $r$  для любых молекул будет качественно одинаков — притяжение на больших расстояниях и отталкивание на малых.

На рис. 3.2, *a* изображена примерная зависимость молекулярных сил взаимодействия  $F$  от  $r$ . Значения  $F < 0$  соответствуют силам притяжения, а значения  $F > 0$  — силам отталкивания. На некотором, характерном для данной пары молекул взаимном расстоянии  $r_0$  притяжение и отталкивание уравниваются друг друга и результирующая сила взаимодействия обращается в нуль:  $F(r_0) = 0$ . Это расстояние  $r_0$  соответствует положению равновесия, в котором могут находиться взаимодействующие молекулы в отсутствие теплового движения.

При небольшом изменении взаимного расстояния между молекулами от величины  $r$  до  $r + \Delta r$  силы взаимодействия будут совершать работу

$$\Delta A = F \Delta r. \quad (38.1)$$

Следовательно, потенциальная энергия взаимодействия молекул будет меняться на величину  $\Delta U$ , равную

$$\Delta U = -\Delta A = -F \Delta r. \quad (38.2)$$

Выберем начало отсчета для значений энергии взаимодействия при  $r = \infty$ , когда молекулы удалены друг от друга настолько, что их взаимодействием можно полностью пренебречь. При  $r = \infty$  потенциальная энергия равна нулю:

$$U(\infty) = 0. \quad (38.3)$$

При постепенном уменьшении  $r$  ( $\Delta r < 0$ ) молекулы сближаются и между ними появляются силы притяжения ( $F < 0$ ). Эти силы при сближении совершают положительную работу ( $\Delta A = F \Delta r > 0$ ), и потенциальная энергия взаимодействия согласно (38.2) постепенно уменьшается. При выбран-

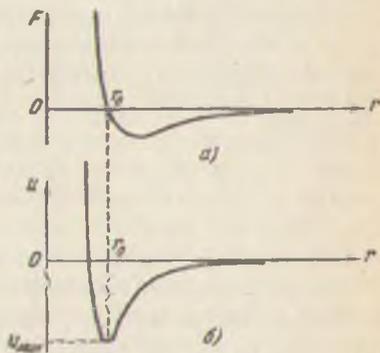


Рис. 3.2.

ном нами согласно (38.3) начале отсчета потенциальная энергия  $U$  будет отрицательная и при  $r=r_0$  достигнет своего наименьшего значения  $U(r_0)=U_{\text{мин}}$  (рис. 3.2, б). При переходе через положение равновесия  $r_0$  и дальнейшем сближении молекул между ними возникнут силы отталкивания ( $F > 0$ ), совершаемая против этих сил работа будет отрицательной ( $\Delta A = F \Delta r < 0$ ) и потенциальная энергия взаимодействия начнет круто возрастать\*.

Как видно из приведенного рисунка, кривая потенциальной энергии  $U=U(r)$  имеет характерный вид так называемой «потенциальной ямы». Наибольшую глубину эта потенциальная яма имеет в положении равновесия при  $r=r_0$ :

$$F=0 \text{ и } U=U_{\text{мин}} < 0. \quad (38.4)$$

Подчеркнем еще раз, что устойчивое положение взаимодействующих молекул соответствует:

1) *наименьшему значению потенциальной энергии взаимодействия молекул  $U(r_0)=U_{\text{мин}}$ . Это — общее положение: система устойчива, если она обладает минимальным запасом энергии;*

2) *равенству нулю сил взаимодействия между молекулами при  $F(r_0)=0$ . Уменьшение  $r$  приводит к появлению сил отталкивания ( $U$  согласно (38.2) возрастает, так как  $F > 0$  и  $\Delta r < 0$ ), увеличение же  $r$  приводит к появлению сил притяжения ( $U$  также возрастает —  $F < 0$  при  $\Delta r > 0$ ).*

Глубина ямы  $|U_{\text{мин}}|$  определяет величину работы, которую нужно совершить против сил притяжения для того, чтобы молекулы, оказавшиеся в равновесии (при  $r=r_0$ ), оторвать друг от друга и развести на бесконечное расстояние:

$$|U_{\text{мин}}| = 0 - U_{\text{мин}} = - \sum_{r=r_0}^{r=\infty} F \Delta r. \quad (38.5)$$

Поскольку средняя кинетическая энергия хаотического теплового движения молекул имеет порядок  $kT$ , то структура любой совокупности молекул и агрегатное состояние вещества будут существенно зависеть от соотношения величин  $|U_{\text{мин}}|$  и  $kT$ .

а) В предельном случае низких температур, когда

\* Из соотношения (38.2) следует в пределе  $F = -\frac{dU}{dr}$ , т. е. ординаты верхней кривой дают, с обратным знаком, наклон касательной к соответствующей точке нижней кривой.

$kT \ll |U_{\text{мин}}|$ , молекулы притянутся друг к другу и расположатся вплотную в определенном порядке — вещество будет находиться в твердом агрегатном состоянии. Тепловое движение молекул в твердом теле будет проявляться в виде малых колебаний молекул около определенных положений равновесия в пространстве.

б) В противоположном предельном случае высоких температур, когда  $kT \gg |U_{\text{мин}}|$ , интенсивное тепловое движение молекул будет препятствовать соединению молекул в агрегаты из нескольких частиц, сблизившихся до расстояния  $r_0$ .

При соударениях молекул эти агрегаты будут моментально разбиваться на составляющие их молекулы, и вероятность образования таких агрегатов будет ничтожно мала. Вещество при этом будет находиться в газообразном агрегатном состоянии.

в) Наконец, при промежуточных температурах, когда  $kT \approx |U_{\text{мин}}|$ , благодаря тепловому движению молекулы будут непрерывно перемещаться в пространстве, обмениваясь местами, но не увеличивая взаимных расстояний на величину, заметно превышающую величину  $r_0$ . Вещество при этом будет находиться в жидком агрегатном состоянии.

Таким образом, любое вещество, в зависимости от своей температуры, может находиться в твердом, жидком или газообразном состоянии. Температура перехода из одного агрегатного состояния в другое зависит от конкретного значения величины  $|U_{\text{мин}}|$  для данного вещества.

У инертных газов (гелий, неон и др.)  $|U_{\text{мин}}|$  весьма мало. Поэтому подобные вещества при обычных (комнатных) температурах находятся в газообразном состоянии и переходят в жидкость лишь при очень низких температурах, близких к абсолютному нулю. В противоположность этому, у металлов, как правило,  $|U_{\text{мин}}|$  велико, при обычных температурах они поэтому находятся в твердом состоянии и плавятся лишь при сравнительно высоких температурах.

Агрегатное состояние вещества зависит не только от его температуры, но и от объема  $V$ , занимаемого системой его молекул. При достаточно большом значении  $V$  молекулы имеют возможность расходиться друг от друга на расстояния, на которых средняя энергия сил притяжения оказывается достаточно малой по сравнению с  $kT$ . Поэтому *над твердым телом и жидкостью всегда присутствует небольшое количество того же вещества в газообразном состоянии.*

### § 39. Реальный газ. Пар. Жидкость

При атмосферном давлении и  $0^\circ\text{C}$  в  $1\text{ м}^3$  воздуха содержится округленно  $2,7 \cdot 10^{25}$  молекул. Считая их в среднем равномерно распределенными в пространстве, мы получим, что на ребре куба длиной  $1\text{ м}$  располагаются  $\sqrt[3]{27 \cdot 10^{24}} = 3 \cdot 10^8$  молекул. Следовательно, среднее расстояние между молекулами воздуха составляет  $r = \frac{1}{3 \cdot 10^8} = 3,3 \cdot 10^{-9}\text{ м}$ , что в десятки раз превышает диаметры самих молекул [ $d \approx (2 \div 3) \cdot 10^{-10}\text{ м}$ ]. На таких расстояниях взаимодействие между молекулами практически отсутствует.

Глубина потенциальной ямы для взаимодействия молекул азота и кислорода составляет примерно  $|U_{\text{мин}}| = 3 \times 10^{-21}\text{ Дж/молек.}$ , а средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул  $\frac{3}{2}RT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 = 6 \cdot 10^{-21}\text{ Дж/молек.}$  Поэтому агрегирование молекул воздуха при этих условиях происходит очень редко, а отдельные, случайно образующиеся агрегаты молекул живут лишь до следующего столкновения, т. е. примерно  $10^{-10}\text{ сек.}$

Таким образом, при давлениях порядка  $1\text{ атм}$  и ниже и при температурах порядка комнатных и выше взаимодействием молекул воздуха можно практически пренебречь и рассматривать его как идеальный газ. Уравнение состояния воздуха будет тогда совпадать с уравнением Менделеева — Клапейрона, выведенным нами выше, в гл. V:

$$pV = \nu RT. \quad (39.1)$$

При постоянной температуре ( $T = \text{const}$ ) объем газа  $V$  будет обратно пропорционален его давлению  $p$ :

$$pV = \text{const} \quad (39.2)$$

или

$$p \sim \rho. \quad (39.3)$$

Уравнение (39.2) было установлено на опыте Р. Бойлем в 1667 г. Во времена Бойля экспериментальная техника была недостаточна для создания высоких давлений и низких температур, при которых газ уже нельзя считать идеальным и при которых взаимодействие молекул начинает сказываться на состоянии газа. В 1748 г. М. В. Ломоносов, развивая молекулярно-кинетическую теорию, пришел к выводу, что при больших плотностях сумма объемов молекул станет

сравнима с объемом всего газа. Поэтому при больших давлениях упругость газа ( $p$ ) должна повышаться быстрее, чем его плотность ( $\rho = \frac{M}{V}$ ) и произведение  $pV$  должно возрастать.

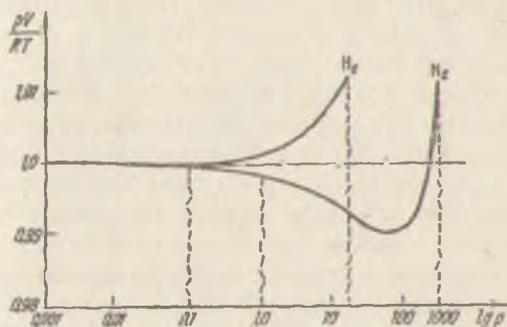


Рис. 3.3.

На рис. 3.3 приведена в полулогарифмическом масштабе \* зависимость  $\frac{pV}{RT}$  от  $p$  при  $T = \text{const} \approx 300$  °К для некоторых газов по современным данным. Как видно из графика, до давлений  $\sim 10$  атм  $\approx 10^6$  н/м<sup>2</sup> произведение  $pV$  остается практически постоянным с точностью до 1 %.

Поэтому при расчете работы паровых машин и двигателей внутреннего сгорания с достаточной степенью точности можно пользоваться уравнением состояния идеального газа.

При давлениях порядка сотен и тысяч атмосфер произведение  $pV$  уже перестает быть постоянным. Как видно из рис. 3.3, для водорода полностью оправдывается предсказание Ломоносова о возрастании величины  $pV$  с ростом давления. Для кислорода и азота при давлениях порядка 100 атм наблюдается сначала уменьшение величины  $pV$  и лишь затем сильный рост, как и для  $H_2$ . Это обстоятельство связано с тем, что при постепенном увеличении давления молекулы первоначально сближаются на расстояния, при которых проявляются силы притяжения. В этой области давлений взаимное притяжение молекул ослабляет интен-

\* Это значит, что при смещении на одно деление по одной из осей откладываемая на ней величина (в данном случае по оси абсцисс) меняется не на столько-то единиц, а во столько-то раз. На рис. 3.3 смещение на одно деление вправо отвечает увеличению давления в 10 раз.

сивность ударов молекул о стенки сосуда и снижает давление газа по сравнению с давлением идеального газа. При еще больших плотностях среднее расстояние между молекулами становится сравнимым с  $l_0$  и начинают проявляться силы отталкивания, увеличивающие давление газа. Благодаря очень малой глубине потенциальной ямы  $|U_{\text{мин}}|$  для водорода у последнего при обычных температурах минимум произведения  $pV$  практически отсутствует и становится заметным лишь при очень низких температурах.

В современной технике широко применяются высокие давления. Чистые газы хранятся и перевозятся в баллонах под давлением 150–200 атм. В прямоточных паровых котлах Рамзина применяется пар высоких параметров с давлением порядка 200 атм. При синтезе аммиака применяются азот и водород, сжатые до нескольких сотен атмосфер, и т. п. При выстреле в стволе орудия развиваются давления в несколько тысяч атмосфер. В исследовательских лабораториях изучаются свойства веществ при давлениях в десятки и сотни тысяч атмосфер. Наконец, при взрывах атомных и водородных бомб развиваются давления порядка миллиардов атмосфер.

При столь больших давлениях и плотностях реальный газ уже нельзя считать идеальным и следует учитывать силы взаимодействия между его молекулами. Экспериментальное изучение поведения газов при высоких и сверхвысоких давлениях позволило уточнить уравнение состояния для ряда практически важных реальных газов.

С другой стороны, в современной технике широко применяются процессы сжижения газов и получения низких температур. Холод необходим для хранения скоропортящихся продуктов и припасов, для специальной закалки металлов, для разделения газовых смесей, которые предварительно охлаждают и превращают в жидкость, а затем дают выкипеть наиболее легколетучим компонентам.

При понижении температуры газа величина  $kT$  становится сравнимой с  $|U_{\text{мин}}|$ . Поэтому с повышением плотности газа сначала проявляются отклонения от уравнения состояния идеального газа (см. (14.14)), а затем при определенном давлении происходит агрегирование молекул и образование жидкости. Этот переход газа в жидкость (и соответствующее увеличение плотности вещества) не происходит, однако, в виде непрерывного процесса.

*Образование жидкости происходит скачком.* Над жидкостью остается некоторое количество пара, плотность которого во много раз меньше плотности жидкости. Изучая

поверхностное натяжение на границе жидкости и ее пара, Д. И. Менделеев в 1860 г. установил, что по мере повышения температуры разница в свойствах между жидкостью и ее паром уменьшается и поверхностное натяжение падает. При

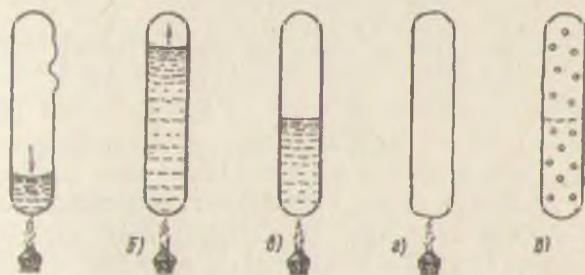


Рис. 3.4.

некоторой температуре, которую Менделеев назвал температурой абсолютного кипения, поверхностное натяжение обращается в нуль и *разница между жидкостью и ее паром исчезает*. Выше этой температуры вещество может находиться только в газообразном состоянии, независимо от величины давления.

Исчезновение границы жидкость — пар можно наблюдать при нагревании жидкости в запаянном стеклянном сосуде, из которого предварительно был откачан весь воздух. Если первоначальный объем жидкости меньше объема сосуда, то небольшая часть жидкости испарится и в сосуде будет отчетливо виден мениск, отделяющий жидкость от находящегося над ней пара (рис. 3.4). При нагревании сосуда мениск будет перемещаться вверх или вниз, в зависимости от первоначального количества жидкости. Если начальное количество жидкости невелико, то при нагревании она будет переходить в пар и мениск будет опускаться (рис. 3.4, а) до тех пор, пока вся жидкость не испарится и весь сосуд не будет заполнен паром высокого давления и температуры. Если же вначале жидкость заполняла почти весь сосуд, то при нагревании жидкость будет расширяться и мениск — подниматься (рис. 3.4, б) до тех пор, пока жидкость не поглотит весь пар и не заполнит сосуд. Если подобрать удачное соотношение между первоначальным количеством жидкости и объемом сосуда, то при нагревании мениск будет оставаться где-то посередине, почти не перемещаясь. В последнем случае (рис. 3.4, в) испарение жидкости

примерно компенсирует расширение нагреваемой жидкости; масса жидкости убывает, а масса пара соответственно возрастает, но так, что доли объема сосуда, занимаемые обеими фазами, остаются почти постоянными. С возрастанием температуры плотность жидкости убывает, а плотность пара возрастает, приближаясь к плотности жидкости. При температуре абсолютного кипения (по Менделееву) плотности обеих фаз сравниваются, все остальные свойства этих фаз станут тождественными и граница между ними (мениск) исчезнет (рис. 3.4, *з*). Если полученную однородную систему охлаждать, то при переходе сверху через температуру абсолютного кипения в объеме возникнут многочисленные капельки жидкости (рис. 3.4, *д*), которые быстро сольются, и в сосуде вновь появятся две фазы — жидкость и пар, отделенные друг от друга мениском.

Для удобства наблюдения за описанным явлением указанные опыты можно проводить с этиловым эфиром. Благодаря невысокой температуре ( $\sim 200^\circ\text{C}$ ) и давлению ( $\sim 40\text{ атм}$ ) в момент исчезновения фаз его можно помещать в прозрачную стеклянную пробирку.

В 1869 г. Эндрюс экспериментально изучил изотермы для углекислого газа при температурах выше и ниже его температуры абсолютного кипения, которую он назвал критической температурой. Результаты измерений Эндрюса изображены на рис. 3.5. При высоких температурах и больших удельных объемах изотермы углекислого газа приближаются к равнобочным гиперболом, соответствующим изотермам идеального газа (39.2). С уменьшением удельного объема давление возрастает сначала несколько медленнее, чем по уравнению (39.2), а затем, при сближении молекул до их соприкосновения изотерма становится очень крутой, почти вертикальной.

При температурах ниже критической опытная изотерма распадается на три различных участка. Правая ветвь при низких давлениях соответствует газообразному состоянию вещества и сравнительно мало отклоняется от изотермы идеального газа. По достижении некоторого определенного давления  $p_{\text{нас}}(T)$ , называемого упругостью насыщенного пара при данной температуре  $T$ , начинается сжижение (точка *Л* на рис. 3.5). При дальнейшем уменьшении объема давление остается неизменным (горизонтальный участок изотермы) и лишь все большая доля газа переходит в жидкое состояние. В точке *Ж* весь газ переходит в жидкость, и левая крутая ветвь кривой представляет собой изотерму сжатия жидкости.

Таким образом, горизонтальный участок изотермы изображает состояние смеси жидкости и пара. Объем смеси в точке С равен

$$V_{см} = (1-x) V_{жидк} + xV_{пар}, \quad (39.4)$$

где  $V_{жидк}$  и  $V_{пар}$  — соответственно удельные объемы жидкости и пара при давлении  $p_{нас}$  и температуре  $T$ . Относительная доля  $x$  пара в смеси при этом определяется из графика по так называемому правилу рычага из отрезков

$$\frac{x}{1-x} = \frac{ЖС}{СП}. \quad (39.5)$$

Таким образом,  $pV$ -диаграмма системы при температуре ниже критической ( $T < T_k$ ) распадается на три области: область жидкости, область пара и область смеси пара и жидкости.

Термином *пар* мы обозначаем такое состояние газа, при котором последний может быть переведен в жидкое состояние простым сжатием без изменения температуры.

При температуре выше критической такой переход без изменения температуры невозможен, и мы имеем состояние так называемого перегретого пара или просто газа. Линия, отделяющая область двухфазных состояний (смеси) от состояний жидкости и пара, изображенная на рис. 3.5 пунктиром, носит название пограничной кривой.

Как видно из приведенного на рис. 3.5 примера  $CO_2$ , взаимодействие молекул при изменении  $p$ ,  $V$  и  $T$  приводит к резким количественным и качественным изменениям состояния реального газа и к переходу его в жидкость. Естественно, что для какого-либо другого газа с другим строением молекул взаимодействие последних друг с другом будет отличаться величинами  $r_0$ ,  $U_{мин}$  и других параметров кривой взаимодействия. Однако общий характер этой кривой останется неизменным, и диаграмма состояния любого реального газа должна иметь вид, аналогичный изображенному на рис. 3.5.

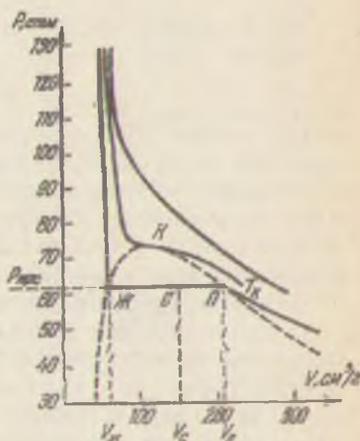


Рис. 3.5.

При пренебрежении молекулярным взаимодействием молекулы разных газов могут различаться лишь по своей массе. Поэтому все идеальные газы подчиняются одному и тому же уравнению состояния — уравнению Менделеева — Клапейрона. При учете взаимодействия между молекулами (благодаря его специфичности) поведение каждого реального газа должно описываться своим уравнением состояния. *Общее уравнение состояния, пригодное для всех реальных газов, принципиально может быть лишь приближенным.*

#### § 40. Уравнение состояния реального газа

Установление более точного вида уравнения состояния реального газа

$$p = f(V, T) \quad (40.1)$$

представляет большой теоретический интерес. Взаимодействие молекул обуславливает отклонение уравнения (40.1) от уравнения Менделеева — Клапейрона, справедливого для идеальных газов. По величине и характеру этих отклонений можно судить о количественных закономерностях, характеризующих молекулярные силы.

С другой стороны, знание уравнения состояния реального газа позволяет предсказывать и рассчитывать технические процессы, происходящие при высоких давлениях или низких температурах газа. Особый интерес и широкое практическое применение имеют процессы, связанные с такими изменениями агрегатного состояния, как сжижение газов, испарение и кипение жидкостей. Для изучения последних процессов целесообразно получить такую математическую запись уравнения состояния, при которой оно охватывало бы область всех возможных состояний системы от идеального газа до жидкости включительно, хотя бы даже ценой меньшей точности в каждой из областей.

Удачное приближенное решение указанной задачи было получено в 1873 г. голландским физиком ван-дер-Ваальсом, спустя всего 4 года после опытов Эндрюса. Выведенное ван-дер-Ваальсом теоретическое уравнение состояния реального газа соответствует некоторому упрощению истинной картины взаимодействия молекул, приведенной выше, на рис. 3.2. Ввиду очень резкого возрастания сил отталкивания между молекулами при их соприкосновении электронные оболочки молекул можно приближенно считать практически недеформируемыми, а сами молекулы заменить абсолютно непроницаемыми сферами диаметра  $d \approx r_0$ . При этом на

расстояниях между центрами молекул  $r$ , меньших  $d$ , следует считать силы отталкивания  $F$  и их энергию  $U$  бесконечно большими, как это изображено на рис. 3.6.

Для сравнения на том же рисунке пунктиром нанесены истинные кривые зависимости  $F$  и  $U$  от  $r$ . Как видно из этого сопоставления, приближенные кривые в основном правильно передают картину взаимодействия молекул, за исключением небольшого участка вблизи  $r=r_0$ .

В использованном ван-дер-Ваальсом приближении действие сил отталкивания заменено «непроницаемостью» молекул. Благодаря этому получается, что при соприкосновении молекул друг с другом силы взаимодействия не обращаются в нуль ( $F=0$  при  $r=r_0$ ), как это следует из правильной картины, а в этот момент между молекулами словно еще действуют весьма значительные силы притяжения  $F_0$  и молекулы сильно давят друг на друга. В действительности же силы притяжения действуют между молекулами лишь на расстояниях, больших  $r_0$ .

Различие это весьма существенно. В приближении ван-дер-Ваальса при  $r=r_0$  силы притяжения между молекулами достигают наибольшего значения.

На самом же деле при  $r=r_0$  силы взаимодействия между молекулами обращаются в нуль.

Забвение чисто фиктивного характера силы  $F_0$ , появление которой обусловлено принятой приближенной моделью, непригодной на малых расстояниях, привело впоследствии к физически неверным утверждениям о наличии в жидкости (где молекулы расположены в непосредственной близости друг к другу) огромных сил так называемого «внутреннего» или «молекулярного» давления молекул друг на друга, оцененного в десятки тысяч атмосфер.

Отделив несколько искусственным путем действие сил притяжения от сил отталкивания, ван-дер-Ваальс предложил для реальных газов две поправки к уравнению Менделеева — Клапейрона.

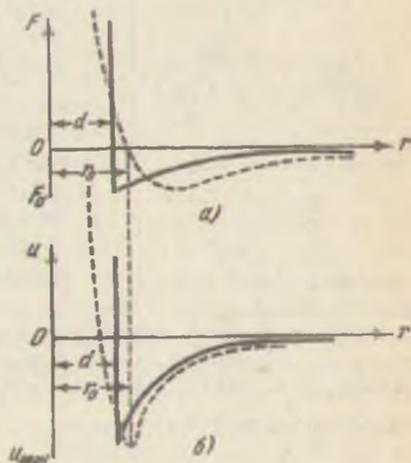


Рис. 3.6.

а) Поправка на недоступный объем (непроницаемость молекул, приближенно заменяющая точную картину сил отталкивания).

Молекула идеального газа, заключенного в некотором сосуде, может находиться в любой его точке, и для нее

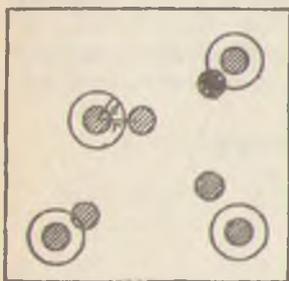


Рис. 3.7

доступен весь объем сосуда  $V$ . Молекула реального газа не может находиться в тех местах сосуда, где расположены остальные  $N-1$  молекул, и ей доступна лишь часть всего объема, равная  $V-b$ . Для подсчета недоступного объема  $b$  будем считать газ не слишком плотным, так что вероятностью тройных соударений молекул можно практически пренебречь. Для каждой пары взаимодействующих молекул недоступной является та часть объема, в которой расстояние между их центрами равно  $d$ , т. е. сфера с

объемом  $\frac{4}{3}\pi d^3$  (рис. 3.7). Из  $N$  молекул может быть образовано  $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$  пар. Следовательно, полный недоступный объем для всех молекул  $\frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi d^3 \approx N^2 \cdot \frac{4}{6}\pi d^3$ , и на каждую из них приходится:

$$b = \frac{\frac{4}{6}\pi d^3 N^2}{N} = 4N \cdot \frac{1}{6}\pi d^3. \quad (40.2)$$

С учетом введенной поправки уравнение состояния реального газа примет вид

$$p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V-b}, \quad (40.3)$$

где согласно (40.2) недоступный объем  $b$  равен учетверенному объему всех молекул газа в сосуде.

Уравнение (40.3) является математическим оформлением изложенных в предыдущем параграфе идей М. В. Ломоносова. Изотермы ( $T = \text{const}$ ) этого уравнения состояния

$$p(V-b) = \text{const} \quad (40.4)$$

имеют вид гипербол, у которых давление безгранично возрастает при  $V \rightarrow b$  (рис. 3.8). Уравнение (40.3) должно хорошо оправдываться на опыте при температурах много выше критической, когда взаимодействием между молекула-

ми (притяжением) можно пренебрегать вплоть до момента столкновения их друг с другом.

б) Поправка на «внутреннее давление» (правильнее говоря, на влияние сил межмолекулярного притяжения).

Как мы видели выше, в гл. VI, сила давления газа на стенку сосуда есть результат многочисленных столкновений молекул с твердой поверхностью.

Поэтому давление идеального газа прямо пропорционально концентрации молекул  $n = \frac{N}{V}$  в слое

$l$ , непосредственно прилегающем к стенке (рис. 3.9). Вследствие притяжения ударяющих о стенку молекул всеми остальными молекулами газа это давление уменьшается на некоторую величину  $p'$ .

Поскольку силы взаимодействия молекул очень быстро убывают с расстоянием, то практически

следует учитывать притяжение первого слоя лишь одним соседним слоем II. Сила этого притяжения (рассчитанная на единицу площади) пропорциональна концентрации молекул в обоих слоях, т. е.

$$p' \sim \frac{N}{V} \frac{N}{V}. \quad (40.5)$$

Вводя коэффициенты пропорциональности, можно перейти от (40.5) к равенству

$$p' = \alpha \frac{N^2}{V^2} = \frac{a}{V^2}, \quad (40.6)$$

где множители  $\alpha$  и  $a = \alpha N^2$  зависят от конкретного строения взаимодействующих молекул, т. е. от природы газа.

Объединяя вторую поправку с первой, мы можем написать:

$$p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V-b} - p'. \quad (40.7)$$

Подставляя сюда величину  $p'$  из (40.6), получаем, что

$$p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \quad (40.8)$$

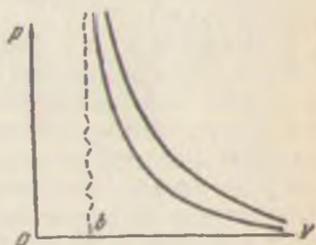


Рис. 3.8.

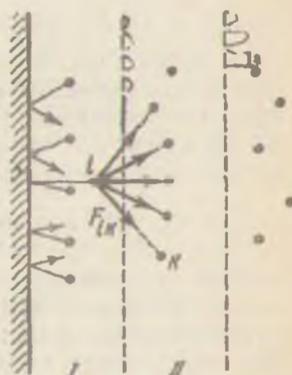


Рис. 3.9

или

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \frac{M}{\mu}RT. \quad (40.9)$$

Уравнение (40.9) носит название уравнения ван-дер-Ваальса.

Из приведенного вывода уравнения ван-дер-Ваальса следует, что постоянная  $b$  пропорциональна числу молей газа в данном объеме, а постоянная  $a$  пропорциональна квадрату числа молей.

Поскольку при выводе уравнения (40.8) был сделан целый ряд упрощений и пренебрежений, на него следует смотреть как на приближенное уравнение состояния реального газа. Это уравнение должно хорошо описывать качественную картину изменения состояния реального газа, но от него нельзя требовать слишком высокой точности количественных результатов. Для получения более точных значений давления  $p$  следует величины  $a$  и  $b$  считать не постоянными, а довольно сложными функциями температуры и плотности, или (что то же самое) в правую часть уравнения (40.8) добавить ряд слагаемых, содержащих дополнительные константы. Предложено большое число таких уравнений, в частности уравнение Битти и Бриджмена:

$$p = \frac{RT}{V^2} \left[ V + B_0 \left( 1 - \frac{b}{V} \right) \right] \left[ 1 - \frac{c}{VT^n} \right] - \frac{A_0}{V^2} \left( 1 - \frac{a}{V} \right). \quad (40.10)$$

пригодное для очень высоких давлений, но содержащее шесть эмпирических констант  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $n$ , и еще более сложное уравнение Вукаловича для водяного пара.

Приводя все члены уравнения ван-дер-Ваальса (40.9) к общему знаменателю, мы можем преобразовать его к виду

$$pV^3 - \left( pb + \frac{M}{\mu}RT \right) V^2 + aV - ab = 0. \quad (40.11)$$

Это — уравнение третьей степени относительно объема  $V$ , и, следовательно, при данных  $p$  и  $T$  оно может иметь или три вещественных корня или один вещественный и два комплексно-сопряженных корня, не имеющих физического смысла. При высоких температурах второе слагаемое в правой части уравнения (40.8)  $a/V^2$  пренебрежимо мало по сравнению с первым  $\frac{RT}{V-b}$ , и изотермы ( $T = \text{const}$ ) имеют лишь одно вещественное значение объема  $V$ , как это было изображено на рис. 3.8.

При низких температурах уже нельзя пренебрегать поправкой на силы притяжения  $a/V^2$ , и уравнение (40.11) имеет три вещественных корня, как это показано на рис. 3.10. Меньший из этих корней ( $V_1$ ) соответствует состоянию с большой плотностью и малой сжимаемостью — состоянию жидкости. Изотерма  $ABC$  здесь круто растет, и для небольшого уменьшения объема необходимо сильное повышение давления.

Большой из трех корней ( $V_2$ ) соответствует состоянию с низкой плотностью и легкой сжимаемостью — состоянию газа. Изотерма  $DEF$  идет здесь сравнительно полого, объем и давление газа почти обратно пропорциональны.

Промежуточный корень ( $V_2$ ) лежит на возрастающей ветви  $CD$  изотермы, изображенной на рис. 3.10 пунктиром, и соответствует абсолютно неустойчивым состояниям.

Такие состояния возможно осуществить лишь на очень короткий промежуток времени. Малейшее сжатие такой системы на участке  $CD$  приводит не к возрастанию давления, как

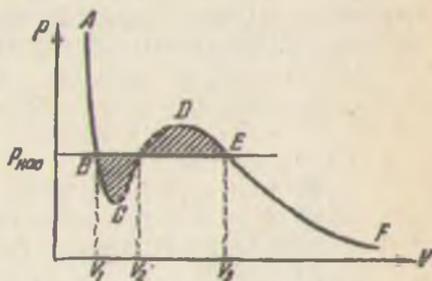


Рис. 3.10.

на участке жидкости  $ABC$  или газа, а к падению давления. Система не противодействует уменьшению своего объема, а как бы помогает этому, самопроизвольно сжимаясь (результат действия молекулярных сил притяжения). При постоянном объеме одна часть системы сожмется до состояния жидкости, а остальная перейдет в пар, занимающий остальной объем.

Как видно, даже если отбросить пунктирный участок  $CD$ , теоретическая изотерма ван-дер-Ваальса не полностью совпадает с опытной  $ABEF$ , имеющей горизонтальный участок  $BE$ , соответствующий смеси пара и жидкости. Детальный термодинамический анализ показывает, что состояние жидкости на участке  $BC$  и состояние пара на участке  $DE$  являются сравнительно неустойчивыми и могут быть осуществлены лишь при осторожном и постепенном изменении объема, при принятии ряда дополнительных предосторожностей, в частности при тщательной очистке испытуемого вещества от посторонних примесей. Положение точек  $B$  и  $E$  может быть найдено теоретически из условия равенства

заштрихованных на рис. 3.10 площадок под и над изотермой в полном соответствии с данными опыта.

При больших давлениях на участке  $AB$  устойчивым является состояние жидкости. При малых давлениях на участке  $EF$  устойчивым является состояние ненасыщенного пара. При  $p = p_{\text{нас}}$  жидкость и пар могут находиться одновременно в равновесии друг с другом, имея объемы, соответственно равные  $V_1$  и  $V_3$ . Давление  $p_{\text{нас}}$  соответствует упругости насыщенного пара.

На рис. 3.11 изображен ряд изотерм уравнения ван-дер-Ваальса, соответствующих различным температурам. С ростом  $T$  молярный объем жидкости, находящейся в равновесии с ее насыщенным паром,  $V_{\text{жидк}}$  возрастает, а молярный объем насыщенного пара  $V_{\text{пар}}$  уменьшается вследствие одновременного возрастания его упругости насыщения  $p_{\text{нас}}(T)$ .

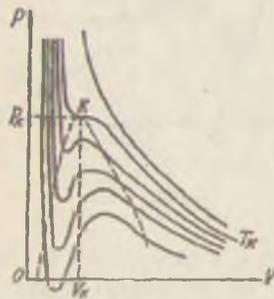


Рис. 3.11

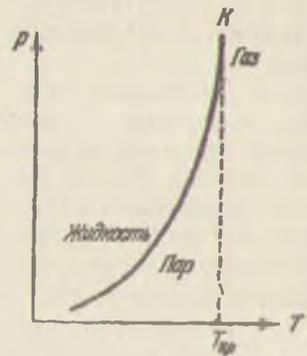


Рис. 3.12.

При этом обе ветви пограничной кривой, изображенной на этом рисунке пунктиром, сближаются и при критической температуре  $T_k$  сливаются друг с другом.

На изотерме, соответствующей критической температуре  $T_k$ , точки  $B$  и  $E$  (см. рис. 3.10) сливаются в точке  $K$ . Исчезает прямой участок  $B-E$ , отвечающий расслоению фаз. С ростом давления газ целиком переходит в жидкость при  $p = p_k$ .

На изотермах, соответствующих температурам  $T > T_k$ , нет участков, отвечающих жидкой фазе. При любых давлениях вещество представляет собой газ. Кинетическая энергия его молекул больше  $|U_{\text{мин}}|$  и переход вещества в жидкую фазу невозможен.

Значения  $p_{\text{нас}}$  в функции температуры  $T$  показаны на графике рис. 3.12. С ростом температуры упругость насыщенного пара возрастает очень быстро, примерно по показательному закону. В точке  $K$  эта кривая обрывается.

Точка  $K$  на рис. 3.11 и 3.12, в которой состояния жидкости и пара совпадают, называется критической точкой. Соответствующие значения  $p_k$  и  $V_k$  носят название критического давления и критического объема для данного вещества.

В критической точке все три корня уравнения (40.11) должны совпадать. Из этого условия можно получить:

$$T_k = \frac{8a}{27Rb}; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad V_k = 3b \quad \text{и} \quad \frac{p_k V_k}{RT_k} = \frac{3}{8} = 0,375. \quad (40.12)$$

Как и само уравнение ван-дер-Ваальса, выведенные из него соотношения (40.12) являются сугубо приближенными. В нижеследующей таблице сопоставлены значения постоянных  $a$  и  $b$  и критических значений  $p_k$ ,  $V_k$  и  $T_k$  для некоторых веществ.

Вещество	$a$ , нх $\times$ м/кмоль <sup>2</sup>	$b$ , м <sup>3</sup> /кмоль	$T_k$ , °К	$p_k$ , н/м <sup>2</sup>	$V_k$ , м <sup>3</sup> /кмоль	$\frac{V_k}{b}$	$\frac{p_k V_k}{RT_k}$
Гелий	$0,032 \times 10^5$	$23,4 \times 10^{-3}$	5,3	$2,26 \times 10^5$	$57,8 \times 10^{-3}$	2,47	0,301
Водород	$0,245 \times 10^5$	$26,6 \times 10^{-3}$	33,2	$12,8 \times 10^5$	$64,5 \times 10^{-3}$	2,42	0,303
Азот	$1,347 \times 10^5$	$38,6 \times 10^{-3}$	126,0	$33,5 \times 10^5$	$90,0 \times 10^{-3}$	2,33	0,298
Кислород	$1,36 \times 10^5$	$31,9 \times 10^{-3}$	144,3	$49,7 \times 10^5$	$74,0 \times 10^{-3}$	2,32	0,310
Водяной пар	$5,48 \times 10^5$	$30,6 \times 10^{-3}$	645,1	$217,7 \times 10^5$	$45,0 \times 10^{-3}$	1,47	0,184

Из таблицы видно, что особенно плохо выполняются соотношения  $\frac{V_k}{b} = 3$  и  $\frac{p_k V_k}{RT_k} = 0,375$ . Качественная же картина изменения состояний вещества передается уравнением ван-дер-Ваальса вполне правильно. Наряду с устойчивыми состояниями оно предсказывает и правильно описывает также неустойчивые состояния перегретой жидкости и пересыщенного пара.

Из рис. 3.11 видно, что при низких температурах часть неустойчивых состояний может находиться при отрицательных давлениях. Подобные случаи растянутой жидкости при соответствующих условиях действительно могут быть осуществлены на опыте.

При выводе уравнения ван-дер-Ваальса мы рассматривали влияние сил взаимодействия на поведение реального газа как малые поправки и пренебрегали более точным их учетом. Так, например, при учете влияния сил притяжения мы пренебрегали тройными столкновениями молекул и поправка записывалась в виде  $\frac{a}{V^2}$ , а не  $\frac{a}{(V-b)^3}$ . Поэтому уравнение (40.8) дает особенно большие отклонения на левых участках изотерм, соответствующих состоянию жидкости, и правильно передает лишь общую тенденцию этих участков — их большую крутизну.

Точный учет многократных взаимодействий молекул представляет огромные математические трудности. Эта статистическая задача была решена сравнительно недавно (в 1937 г.) различными методами Н. Н. Боголюбовым и И. Мейером. Полученные решения, к сожалению, имеют вид бесконечных рядов и практически мало пригодны для технических расчетов.

#### § 41. Сжижение газов

На рис. 3.13 изображен примерный ход изотерм для любого реального газа. Изотерма, соответствующая критической температуре  $T_k$ , и пограничная кривая, нанесенная на этом рисунке штрих-пунктиром, разделяют  $pV$ -плоскость на четыре области: газ, жидкость, пар и смесь пара и жидкости.

Газ с температурой  $T_1$  ниже критической (ненасыщенный пар) при постепенном сжатии увеличивает свою упругость, как это изображено на рис. 3.13 на участке  $AB$ . По достижении точки пересечения изотермы с пограничной кривой (точка  $B$ ) давление пара становится равным упругости насыщенного пара  $p_{\text{нас}}(T_1)$ . При дальнейшем уменьшении объема давление на участке  $BB$  остается постоянным и происходит переход все большей части вещества из парообразного состояния в жидкое. В точке  $B$

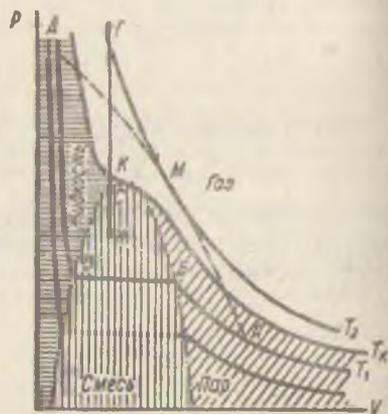


Рис. 3.13.

песь пар превращается в жидкость, и далее на участке  $ВД$  идет сжатие жидкости.

При температуре  $T_2$  выше критической изотерма газа вся лежит выше пограничной кривой. При изотермическом сжатии газа его состояние изменяется непрерывно, и газ не превращается в жидкость. Даже при очень большой плотности, когда молекулы газа подходят почти вплотную друг к другу, кинетическая энергия их хаотического теплового движения превышает величину  $|U_{\text{мин}}|$  и не дает возможности длительного агрегирования молекул.

Ко второй половине XIX века целый ряд веществ, находящихся обычно в газообразном состоянии, удалось превратить в жидкость простым сжатием. Однако некоторые газы, в частности кислород и азот, являющиеся основными компонентами атмосферного воздуха, при этом в жидкое состояние не переходили. Возникло даже предположение, что жидкий кислород и жидкий азот вообще существовать не могут, и подобные вещества было предложено называть «постоянными газами».

Д. И. Менделеев, впервые введший понятие критической температуры, объяснил причину неудачи попыток сжижения так называемых «постоянных газов». Он предположил, что у этих газов критическая температура значительно ниже комнатной и, следовательно, для их сжижения необходимо предварительно понизить их температуру ниже  $T_k$ . И действительно, идя по этому пути, Кайете и Пикте в 1877 г. сжижили ряд «постоянных газов» ( $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO$ ). В 1898 г. Дьюар получил жидкий водород, и, наконец, в 1908 г. Каммерлинг-Оннес охладил до достаточно низкой температуры и превратил в жидкость последний «постоянный газ» — гелий.

Количественное определение критических параметров  $T_k$ ,  $p_k$  и  $V_k$  представляет значительные трудности. Вернемся к опытам, описанным в предыдущем параграфе и схематически изображенным на рис. 3.4. Поместим в запаянную трубку некоторое количество газа при температуре  $T_2 > T_k$  и достаточно высоком давлении  $p$ . На диаграмме рис. 3.13 его состояние изобразится некоторой точкой  $\Gamma$ . Будем охлаждать этот газ. Тогда его состояние будет изменяться по изохоре  $ГСЖ$ .

При переходе через пограничную кривую в точке  $C$  система расщелится на две фазы. Поскольку точка  $C$  лежит на левой ветви пограничной кривой, то основная масса будет находиться в состоянии жидкости, и мениск, отделяющий жидкость от пара, расположится в верхней части трубки. По

мере дальнейшего охлаждения (линия *СЖ*) состояние жидкости будет изменяться в соответствии с левой ветвью пограничной кривой, плотность жидкости будет возрастать, а объем уменьшаться, мениск будет опускаться, и объем, занимаемый паром, возрастать. Количество пара, однако, возрастает медленнее занимаемого им объема, так как с понижением температуры давление и плотность насыщенного пара понижаются. Поэтому при сильном охлаждении объем жидкости почти не меняется. При нагревании в соответствии с линией *ЖС* объем жидкости будет возрастать, пока она не заполнит всю трубку, как изображено на рис. 3.4, б.

Если объем исходного газа равен критическому  $V_k$ , то эта изохора пересечет пограничную кривую в самой ее верхней точке  $K$  — критической точке, и мениск возникнет посередине трубки. Наблюдая за появлением и исчезновением в трубке границы раздела между двумя фазами и местом появления мениска, можно таким путем определить параметры критической точки  $T_k$ ,  $p_k$  и  $V_k$ . Как показал А. Г. Столетов, этот метод может дать достаточно точные значения критической температуры и давления, но с его помощью довольно трудно определить точную величину  $V_k$ : в точке  $K$  пограничная кривая и критическая изотерма идут горизонтально, и небольшие изменения и неточности в определении  $p$  и  $T$  приводят к значительным погрешностям в оценке объема.

Широкое развитие в XIX веке паровых двигателей и поиски рабочих веществ, которые могли бы заменить в технике водяной пар, поставили задачу изучения термодинамических характеристик ряда газов и паров и, в первую очередь, определения их критических температур и давлений. Те же требования выдвигало и развитие холодильной техники и поиски наилучших рабочих веществ для холодильных установок. После основных работ Менделеева, Эндрюса и ван-дер-Ваальса в ряде физических лабораторий различных стран было предпринято широкое изучение критических параметров многих неорганических и органических соединений.

Ведущая роль в этих исследованиях в последней четверти XIX века принадлежала Киевской лаборатории проф. Авенариуса. Для изучения критических параметров окрашенных газов и веществ, обладающих большими критическими давлениями, русским ученым Надеждиным был разработан оригинальный метод. Стеклянная или металлическая трубка устанавливалась на острие призмы и уравнивалась в горизонтальном положении (рис. 3.14). Затем трубка

заполнялась испытуемым веществом, запаивалась и помещалась в нагревательную печь. Пока температура была ниже критической, одно из колен трубки, в котором находилась жидкость, перевешивало.

Как только температура достигала  $T_k$ , двухфазная система (жидкость — пар) превращалась в однородную систему (газ) и трубка устанавливалась горизонтально. Таким путем была впервые определена критическая температура воды.

Следует подчеркнуть, что приведенная на рис. 3.13 изотерма  $T = T_k$  отделяет области газа и пара лишь чисто условно. Паром, или, точнее, ненасыщенным паром, мы называем газ, который может быть переведен в жидкость чисто изотермическим сжатием, причем переход из парообразного состояния в жидкое совершается

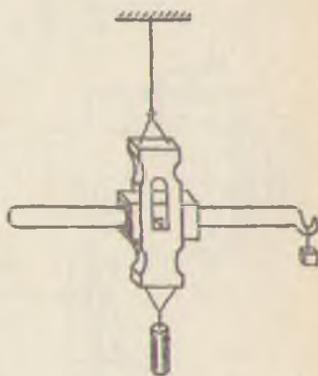


Рис. 3.14.

скачком. При низких давлениях ненасыщенные пары ведут себя практически так же, как и идеальные газы, и подчиняются уравнению Менделеева — Клапейрона.

Если же при сжатии одновременно изменять и температуру, то переход из точки  $A$  в точку  $D$  может быть произведен без расслоения фаз. Подобный непрерывный переход из парообразного состояния в жидкое изображен на том же рис. 3.13 пунктиром по пути  $AMD$ . При этом на участке  $AM$  при сжатии газ нагревают до  $T_2 > T_k$ , а на участке  $MD$  при дальнейшем сжатии охлаждают до первоначальной температуры  $T_1$ .

Столь же условной является и граница между областью газа и областью жидкости. Свойства сильно сжатых газов лишь количественно отличаются от свойств жидкости. Это особенно ярко проявляется в случае смесей нескольких веществ. Например, газы, близкие к идеальным, смешиваются друг с другом в любых отношениях. Те же вещества в жидком состоянии могут обладать ограниченной взаимной растворимостью. Так, если слить вместе воду и керосин, то такая система обязательно будет расслаиваться. Внизу будет расположен более тяжелый слой раствора ничтожного количества керосина в воде, а сверху расположится более

легкий слой раствора ничтожного количества воды в керосине.

Изучая поведение сильно сжатых газовых смесей, проф. Кричевский обнаружил весьма интересное явление расслоения газовых смесей, т. е. реальные газы при достаточно высоких плотностях и давлениях также могут обладать ограниченной взаимной растворимостью, как и жидкости.

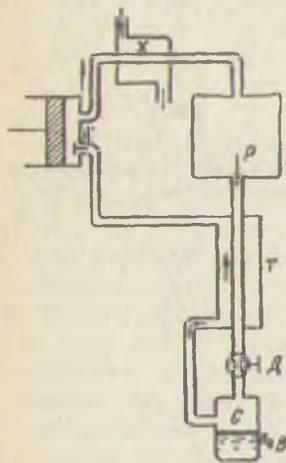


Рис. 3.15.

Как видно из диаграммы рис. 3.13, для сжижения газов их необходимо охлаждать до температуры ниже критической. Поэтому вещества с высокими значениями  $T_k$  (выше комнатной температуры) могут быть легко превращены в жидкость. Для веществ с низкими значениями  $T_k$ , например водорода ( $T_k = -250^\circ\text{C}$ ), в нашем распоряжении нет естественных источников низких температур. Достаточно низкие температуры могут быть получены лишь искусственным путем. Для сжижения подобных газов их можно предварительно охладить не путем передачи тепла какому-либо более холодному телу (которого

нет в нашем распоряжении), а заставляя совершать работу против внутренних или внешних сил.

Первый путь осуществляется в машине Линде, схема которой приведена на рис. 3.15. Компрессор  $K$  засасывает воздух и сжимает его до давления  $\sim 200$  атм. Поскольку при почти адиабатическом сжатии воздух нагревается, то его пропускают через холодильник  $X$ , охлаждаемый холодной проточной водой. При давлении 200 атм воздух является реальным газом, и в нем при обычных температурах преобладают силы притяжения, т. е. молекулы в среднем находятся на расстояниях, близких к  $r_0$ , но превышающих это значение (см. рис. 3.2, а). Сжатый воздух из холодильника поступает в резервуар большого объема (так называемый ресивер  $P$ ) для сглаживания толчков давления, создаваемых компрессором. Из ресивера воздух высокого давления проходит по внутренней трубе теплообменника  $T$  и выпускается через кран с узким отверстием (дрюссель  $D$ ) в резервуар низкого давления. При резком падении

давления после дросселя от 200 атм до 1 атм воздух расширяется, расстояние между молекулами увеличивается, а потенциальная энергия их взаимодействия возрастает. Увеличение потенциальной энергии совершается за счет уменьшения кинетической энергии хаотического движения молекул, т. е. за счет охлаждения газа.

Вследствие сравнительно малой величины работы, совершенной против внутренних сил притяжения, однократного расширения недостаточно для снижения температуры до критической. Поэтому охлажденный воздух возвращается обратно по внешней трубе теплообменника в компрессор и, нагреваясь до комнатной температуры, охлаждает следующую порцию сжатого воздуха, идущего по внутренней трубе. Таким образом, следующая порция воздуха предварительно охлаждается, и при ее дальнейшем дросселировании температура после расширения падает до более низкого значения, чем у первой порции. Через 6—8 часов после запуска установки температура дросселированного воздуха снижается настолько, что часть его ( $\sim 5\div 6\%$ ) превращается в жидкость, а остальной поток продолжает возвращаться в теплообменник. Жидкий воздух, по мере его накопления в конденсаторе С, через кран В сливается в дьюаровские сосуды, предназначенные для его хранения и транспортировки.

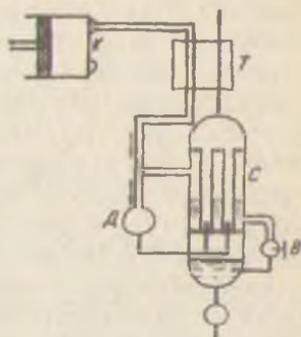


Рис. 3.16.

Большая работа, затрачиваемая на предварительное сжатие газа, делает цикл Линде малоэкономичным. Поэтому в современных холодильных установках для сжижения газов последние совершают внешнюю работу и отдают свою энергию в специальных расширительных машинах, называемых **детандерами**.

На рис. 3.16 изображена схема установки П. Л. Капицы — так называемым турбодетандером. Компрессор К сжимает воздух всего до 5—6 атм. Сжатый воздух проходит через теплообменник Т, где предварительно охлаждается встречным потоком несжиженного воздуха. Далее поток разделяется на две части. Небольшая часть сжатого воздуха поступает непосредственно в конденсатор С, а основной поток поступает в турбодетандер Д. В турбодетандере сжатый воздух ударяет о лопасти турбинки и, вращая послед-

нюю, совершает работу. При этом его давление падает до атмосферного и температура снижается дополнительно на некоторую величину  $\Delta T$ . Расширившийся и охлажденный воздух поступает в конденсатор  $C$ , поднимается по трубам вверх и затем выходит через теплообменник  $T$  наружу. Сжатый воздух, не прошедший через детандер, поступает в межтрубное пространство конденсатора, где охлаждается встречным потоком воздуха. При температуре, достигаемой в конденсаторе, упругость насыщенных паров воздуха превышает  $1 \text{ атм}$ , но менее  $5 \text{ атм}$ . Поэтому сжимается не основная масса воздуха, расширившаяся в детандере, а оставшийся сжатым воздух в межтрубном пространстве. Жидкий воздух перепускается через дроссель  $B$  в конденсатор. При уменьшении его давления часть жидкого воздуха испаряется и поднимается вверх, а вследствие затраты на это скрытой теплоты испарения оставшаяся жидкость охлаждается до температуры, при которой упругость насыщенных паров не превышает  $1 \text{ атм}$ .

Жидкий воздух имеет при атмосферном давлении температуру  $-180^\circ\text{C}$ . При его испарении в первую очередь улетучивается азот и остается жидкий кислород. Таким путем можно отделить друг от друга основные составляющие атмосферного воздуха и использовать их для различных целей. Из чистых азота и водорода при повышенных давлениях на специальных катализаторах получают аммиак. Жидкий кислород применяется в медицине, для автогенной сварки, для ускорения доменного процесса. Смешанный с органическими горючими, он дает взрывчатые вещества, так называемые о к с и л и к в и т ы, применяемые в горнорудной промышленности.

## ГЛАВА XI

### СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

#### § 42. Сцепление жидкостей. Испарение и кипение

Молекулы в жидкости расположены друг около друга на расстояниях порядка  $r_0$  (см. рис. 3.2) и интенсивно взаимодействуют между собой. Силы их взаимодействия специфичны, т. е. существенно зависят от природы взаимодействия специфичны, т. е. существенно зависят от природы взаимодействующих молекул и сильно различаются по величине для разных жидкостей. Поэтому установление закономерностей, общих для всех жидкостей, т. е. построение теории жидкого состояния, представляет значительно большие трудности, чем создание теории газов.

При увеличении внешнего давления на величину  $\Delta p$  объем жидкости уменьшается на некоторую величину  $-\Delta V$ . При этом между сближающимися молекулами возникают огромные силы отталкивания, так что уменьшение объема может составить лишь незначительную долю первоначального объема  $V$ . Поэтому изотермическая сжимаемость жидкости

$$K = \frac{-\Delta V/V}{\Delta p} \quad (42.1)$$

очень мала и составляет обычно  $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ атм}^{-1} = 10^{-9} \div 10^{-10} \text{ м}^2/\text{н}$ . Иными словами, при увеличении внешнего давления на  $1 \text{ атм}$  объем жидкости уменьшается на  $10^{-4} \div 10^{-5}$  от своего первоначального значения. Для заметного изменения объема жидкости необходимы давления в десятки и даже сотни тысяч атмосфер.

Сравнительно мало меняют свой объем жидкости и при нагревании. Термический коэффициент расширения жидкости

$$\beta = \frac{\Delta V/V}{\Delta t} \quad (42.2)$$

имеет порядок  $10^{-4}$  град $^{-1}$ , т. е. в десятки раз меньше, чем для газов. Поэтому в отличие от газов работа изобарического расширения при нагревании жидкости на  $1^\circ$  относительно мала:

$$p\Delta V \ll R \Delta T. \quad (42.3)$$

Следовательно, теплоемкости жидкости при постоянном объеме и постоянном давлении близки друг другу:

$$C_p - C_v = \frac{p\Delta V}{\Delta T} \ll C_p \text{ и } C_v \approx C_p. \quad (42.4)$$

Величины  $\alpha$  и  $\beta$  различны для разных жидкостей, непостоянны и являются сложными функциями давления и температуры. Для воды, например, в интервале от 0 до  $4^\circ\text{C}$  наблюдается аномалия: при нагревании происходит уменьшение объема, т. е. величина  $\beta$  становится отрицательной.

Д. И. Менделеев в 1884 г. предложил очень простую приближенную формулу для нахождения объема жидкости  $V_t$  при температуре  $t$ , если известен ее объем  $V_0$  при температуре  $0^\circ\text{C}$ :

$$V_t = \frac{V_0}{1 - kt}. \quad (42.5)$$

Коэффициент  $k$ , различный для разных жидкостей, Менделеев назвал определителем расширения жидкости. Из (42.5) следует, что плотность жидкости  $\rho = \frac{1}{V}$  изменяется с температурой по закону

$$\rho_t = \rho_0(1 - kt), \quad (42.6)$$

т. е. линейно уменьшается. При  $t = \frac{1}{k}$  плотность жидкости по этой формуле должна обратиться в нуль. Однако уже при значительно более низких температурах жидкость превращается в газ. Поскольку плотность жидкости очень мало меняется с изменением давления, то на уравнения (42.5) и (42.6) следует смотреть как на хорошие приближения для уравнения состояния жидкости.

Характер теплового движения молекул в жидкости существенно отличается от теплового движения молекул газа. Поскольку средние расстояния  $r$  между молекулами в жидкости близки к  $r_0$ , отвечающему минимальному значению потенциальной энергии взаимодействия, т. е. равновесию (см. рис. 3.2), то молекулы большую часть времени колеблются около своих положений равновесия. В силу хаотич-

ности теплового движения скорости и амплитуды колебаний соседних молекул различны, и время от времени соседние молекулы расходятся друг от друга настолько, что отдельные молекулы перескакивают на расстояние порядка  $d$ , «настревают» в новых положениях равновесия и начинают колебаться около них. С ростом температуры растет средняя энергия теплового движения, а с ней и амплитуда колебаний и частота перескоков молекул из одного положения равновесия в соседние. При этом жидкость «разрыхляется», т. е. при нагревании объем ее возрастает.

Указанные особенности жидкости, своеобразный характер теплового движения ее молекул объясняют качественно и количественно целый ряд свойств и характеристик жидкостей. Огромные заслуги в области создания теории жидкостей и объяснения их свойств, обусловленных молекулярным строением, принадлежат советскому ученому Я. И. Френкелю. Некоторые результаты его исследований по механизму движения и взаимодействия молекул в жидкости и твердом теле излагаются в этой и следующей главах.

Поскольку в жидкости  $r$  близко к  $r_0$ , то потенциальная энергия взаимодействия соседних молекул близка к величине  $U_{\text{мин}}$  и изображенной на рис. 3.2. При плотной упаковке молекул каждая из них окружена 12 ближайшими соседями (рис. 3.17), и ее потенциальная энергия внутри жидкости приближенно равна

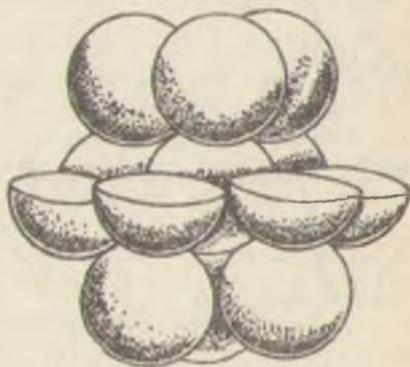


Рис. 3.17

$$U_{\text{ж}} = 12U_{\text{мин}} \quad (42.7)$$

Так как силы взаимодействия между молекулами очень быстро убывают с расстоянием между ними, то при приближенном подсчете величины  $U_{\text{ж}}$  можно практически пренебречь взаимодействием данной молекулы со всеми остальными, удаленными от нее на расстояния большие, чем  $r$ , за исключением ближайших 12.

Как указывалось в предыдущей главе, над поверхностью жидкости находится насыщенный пар. При не слишком высоких упругостях насыщенного пара расстояния между

молекулами в паре велики по сравнению с их диаметрами, и потенциальная энергия молекулы в паре практически равна нулю:

$$U_{\text{п}} \approx 0. \quad (42.8)$$

Поскольку  $U_{\text{мин}} < 0$ , то и  $U_{\text{ж}} < 0$  и, следовательно,

$$U_{\text{ж}} < U_{\text{п}}, \quad (42.9)$$

т. е. потенциальная энергия молекулы внутри жидкости меньше, чем потенциальная энергия той же молекулы в паре.

Мы можем здесь провести полную аналогию с потенциальной энергией тела, находящегося на поверхности земли в поле тяжести, и того же тела, лежащего в яме (рис. 3.18, а). Отсчитывая высоту  $z$  от уровня земли, можно написать, что на поверхности земли ( $z=0$ ) потенциальная энергия тела массы  $m$  равна

$$U_3 = mgz = 0,$$

а в яме ( $z < 0$ )

$$U_{\text{я}} = mgz < 0,$$

и, следовательно,

$$U_{\text{я}} < U_3.$$

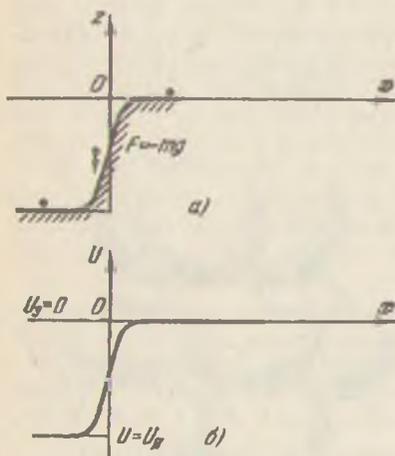


Рис. 3.18.

И на поверхности земли, и в яме тело находится

в равновесии под действием приложенных к нему сил (веса и реакции опоры). Однако, если поднимать тело из ямы на поверхность земли, то придется совершить работу против сил тяжести, действующих на этом пути:

$$\Delta A' = -F \Delta z = \Delta U = U_3 - U_{\text{я}} = 0 - U_{\text{я}} = |U_{\text{я}}|, \quad (42.10)$$

равную «глубине» потенциальной ямы (рис. 3.18, б).

Аналогично молекула, расположенная внутри жидкости, находится в равновесии с соседями. Однако при переходе этой молекулы в пар необходима затрата работы на преодоление сил сцепления ее с окружающими соседями:

$$A' = - \sum_c^{\infty} F \Delta z = \Delta U = U_{\text{п}} - U_{\text{ж}} =$$

$$= 0 - U_{\text{ж}} = |U_{\text{ж}}| \approx 12 |U_{\text{мин}}|. \quad (42.11)$$

Следовательно, на испарение 1 моля, т. е.  $N_0$  молекул жидкости, необходимо затратить работу

$$q' = N_0 A' = N_0 (U_{\text{п}} - U_{\text{ж}}) \approx 12 N_0 |U_{\text{мин}}| \quad (42.12)$$

на преодоление внутренних сил сцепления между молекулами, т. е. на разрыв связей между ними.

Поскольку молярный объем жидкости  $v_{\text{ж}}$  меньше, чем молярный объем пара  $v_{\text{п}}$ , то при испарении будет происходить расширение вещества, что связано с добавочной работой расширения против сил внешнего давления

$$q_a = p \Delta v = p_{\text{нас}} (v_{\text{п}} - v_{\text{ж}}). \quad (42.13)$$

Таким образом, полная работа, производимая при испарении 1 моля жидкости, равна

$$q = q' + q_a = N_0 (U_{\text{п}} - U_{\text{ж}}) + p_{\text{п}} (v_{\text{п}} - v_{\text{ж}}). \quad (42.14)$$

При испарении жидкости необходимую для этого энергию подводят в виде тепла. Поскольку температура вещества при этом не меняется, величину  $q$  называют скрытой теплотой испарения жидкости. В зависимости от того, на какое количество вещества она рассчитывается, различают  $q$  молярное (дж/кмоль) и  $q$  удельное (дж/кг). Легко видеть, что

$$q_{\text{мол}} = \mu q_{\text{уд}}, \quad (42.15)$$

где  $\mu$  — молекулярный вес вещества (кг/кмоль).

Величины  $q'$ ,  $q_a$  и  $q$  являются функциями температуры испарения. Как мы видели в предыдущей главе, по мере повышения температуры растет  $v_{\text{ж}}$ , а  $v_{\text{п}}$  убывает, и свойства жидкости и ее насыщенного пара сближаются. С увеличением плотности насыщенного пара расстояние между его молекулами уменьшается, потенциальная энергия  $U_{\text{п}}$  становится отличной от нуля и стремится к  $U_{\text{ж}}$ . В критической

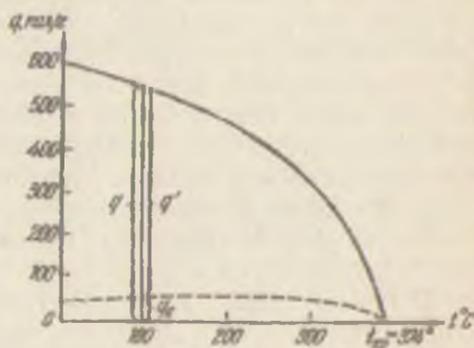


Рис. 3.19.

точке, т. е. при критической температуре  $T_k$

$$v_n = v_{ж} \text{ и } U_n = U_{ж}, \quad (42.16)$$

а следовательно, в этой точке

$$q' = 0, \quad q_a = 0 \text{ и } q = 0. \quad (42.17)$$

Так как при этой температуре исчезает разница между жидкостью и паром, то при  $T = T_k$  скрытая теплота испарения уменьшается температуры, возрастает разница между свойствами и строением пара и жидкости, а вместе с тем возрастает и скрытая теплота испарения  $q$ . Для примера на рис. 3.19 приведен график зависимостей  $q$  от  $T$  для воды. Пунктиром на этом рисунке изображена зависимость  $q_a$  от  $T$ . Поскольку с ростом температуры  $\rho_{нас}(T)$  растет, а  $v_n - v_{ж}$  убывает, то величина  $q_a$  имеет максимум. На общем ходе изменения величины  $q = q' + q_a$  с изменением температуры наличие этого максимума не сказывается, так как при всех температурах работа преодоления сил сцепления в жидкости  $q'$  много больше работы расширения против сил внешнего давления  $> q_a$ . Поэтому *полная скрытая теплота испарения  $q$  монотонно падает с ростом температуры.*

Для воды при  $0^\circ\text{C}$  упругость насыщенного пара составляет всего 4,6 мм рт. ст. При таком давлении насыщенный водяной пар является практически идеальным газом, и в нем  $U_n \approx 0$ . Внутренняя скрытая теплота испарения воды  $q'$  составляет 564 кал/г или  $564 \cdot 18 \approx 10\,000$  кал/моль  $\approx 4 \cdot 10^7$  дж/кмоль. Из (42.12) тогда можно оценить:

$$|U_{мин}| = \frac{4 \cdot 10^7}{12 \cdot 6 \cdot 10^{26}} = 5,5 \cdot 10^{-21} \text{ дж.}$$

При наличии свободной поверхности жидкости отдельные молекулы, случайно обладающие избытком кинетической энергии, будут вырываться наружу. Жидкость будет постепенно испаряться. Средняя энергия молекул, оставшихся внутри жидкости, при этом понижается, и жидкость будет охлаждаться, если к ней не подводится тепло извне. На этом основана защитная реакция нашего организма при жаре. Выделяющийся в этом случае пот испаряется и охлаждает тело. Подобное испарительное охлаждение широко применяется в различных отраслях техники, например в так называемых градирнях.

По мере возрастания упругости пара, находящегося над жидкостью, все большее число отдельных хаотически движущихся молекул пара будет попадать на поверхность жидкости и присоединяться к последней. При

$$\rho_n = \rho_{нас}(T) \quad (42.18)$$

скорость испарения жидкости и скорость обратной конденсации пара сравниваются и между жидкостью и паром устанавливается динамическое равновесие. Дальнейшее испарение жидкости станет возможным, если образовавшийся непосредственно над ее поверхностью насыщенный пар сдувать, откачивать насосом или конденсировать на другой, более холодной поверхности.

Чем выше температура, тем легче и интенсивнее идет испарение жидкости и тем больше упругость насыщенного пара  $p_{\text{нас}}(T)$ , при которой наступает динамическое равновесие.

Наряду с поверхностным испарением жидкости возможно и объемное ее испарение, т. е. интенсивное образование пузырьков пара во всем объеме жидкости — кипение. Если упругость насыщенного пара при данной температуре  $p_{\text{нас}}(T)$  меньше, чем внешнее давление  $p_{\text{внешн}}$ , то кипение невозможно. Образовавшийся случайно внутри жидкости пузырек насыщенного пара будет сжиматься внешним давлением, и так как давление в нем не может возрасти выше  $p_{\text{нас}}$ , то весь пар в нем сконденсируется обратно в жидкость.

Условие наступления кипения

$$p_{\text{нас}}(T) = p_{\text{внешн}} \quad (42.19)$$

при выполнении которого образующиеся в объеме жидкости пузырьки становятся устойчивыми, может быть достигнуто двумя путями:

1) нагреванием жидкости до такой температуры  $T_{\text{кип}}$ , при которой упругость насыщенного пара станет равной внешнему давлению. Условие

$$p_{\text{нас}}(T_{\text{кип}}) = p_{\text{внешн}} \quad (42.20)$$

определяет тогда температуру кипения  $T_{\text{кип}}$  в зависимости от внешнего давления;

2) понижением внешнего давления до величины упругости насыщенного пара при данной температуре. Если вода находится в закрытом сосуде, то, уменьшив давление воздуха над водой до 17,5 мм рт. ст., можно заставить воду закипеть при температуре 20 °С вместо 100 °С при атмосферном давлении. На вершине Эльбруса (~ 5000 м) давление воздуха составляет ~0,5 атм и вода закипает при температуре 82 °С.

Практически образование пузырьков в жидкости несколько затруднено из-за наличия поверхностного натяжения (см. § 43 и 44), и требует небольшого перегрева выше температуры, определяемой из уравнения (42.20). Такой

перегрев всегда имеет место у более горячих стенок сосуда, в котором происходит кипение жидкости. Поэтому пузырьки пара в первую очередь образуются на стенках и на дне подогреваемого сосуда с жидкостью.

### § 43. Поверхностное натяжение жидкости

Жидкости, так же как и твердые тела, обладают большой объемной упругостью, т. е. сопротивляются изменению своего объема, но, как и газы, не обладают упругостью формы. Жидкость, налитая в сосуд, заполняет его и принимает форму сосуда. Действие силы тяжести прижимает жидкость ко дну сосуда, а свободная поверхность жидкости устанавливается горизонтально. Над поверхностью жидкости находятся насыщенный пар и газообразный воздух. Таким образом, объем жидкости оказывается ограниченным стенками сосуда и газом. При этом условия, в которых молекулы жидкости находятся на границах раздела, будут отличаться от условий внутри объема жидкости.

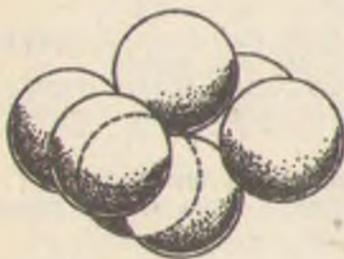


Рис. 3.20.

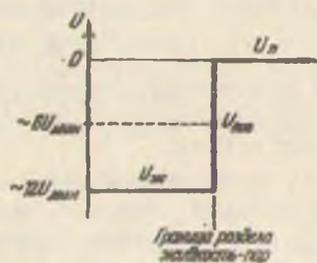


Рис. 3.21.

Рассмотрим первоначально молекулы, находящиеся в поверхностном слое свободной поверхности жидкости, т. е. на границе жидкость — газ. Легко понять (рис. 3.20), что такая молекула имеет в среднем только шесть ближайших соседей, а не 12. Поэтому ее потенциальная энергия примерно равна

$$U_{\text{пов}} \approx 6U_{\text{мин}} \quad (43.1)$$

и выше, чем потенциальная энергия той же молекулы внутри жидкости,  $U_{\text{ж}} \approx 12U_{\text{мин}}$  (так как  $U_{\text{мин}} < 0$ , см, рис. 3.21). Поэтому для извлечения молекулы изнутри жидкости на ее свободную поверхность надо затратить внешнюю работу

$$\Delta = U_{\text{пов}} - U_{\text{ж}} \approx 6U_{\text{мин}} - 12U_{\text{мин}} = -6U_{\text{мин}} = 6|U_{\text{мин}}|. \quad (43.2)$$

При обратном переходе молекулы из поверхностного слоя жидкости внутрь объема ее потенциальная энергия будет уменьшаться на ту же величину  $\approx 6|U_{\text{мин}}|$ . Как тело в поле тяжести стремится занять наинизшее положение с наименьшей потенциальной энергией (если ему в этом не препятствуют другие силы), так и молекулы, находящиеся на свободной поверхности жидкости, будут стремиться перейти внутрь ее объема. Поскольку число молекул на поверхности жидкости пропорционально величине свободной поверхности, то стремление молекул поверхности стянуться внутрь объема жидкости означает, другими словами, стремление сократить свободную поверхность жидкости.

Таким образом, мы приходим к выводу, подтверждаемому на опыте, что *жидкость под действием внутренних сил стремится уменьшить свою свободную поверхность, если ей в этом не препятствуют какие-либо силы*. И действительно, если, как в известном опыте Плато, скомпенсировать действие силы тяжести, то жидкость примет форму шара, так как шар обладает наименьшей поверхностью при заданном объеме.

Потенциальная энергия жидкости в поле тяжести пропорциональна ее массе, т. е. полному числу молекул  $N$  или объему жидкости  $V$ . Избыточная потенциальная энергия поверхностных молекул жидкости пропорциональна поверхности жидкости  $S$ . Отношение  $\frac{V}{S}$  пропорционально линейным размерам тела и растет с увеличением его объема и массы.

Для больших масс жидкости ( $\frac{V}{S}$  велико!) основную роль играет не поверхностная энергия ( $\sim S$ ), а энергия в поле тяжести («объемная» энергия,  $\sim V$ ). Жидкость, налитая в сосуд, принимает такую форму, при которой центр ее массы имеет наинизшее положение; ртуть, налитая в плоский сосуд, растекается по его дну. В то же время маленькая капелька ртути принимает форму шарика: ее потенциальная энергия в поле тяготения также уменьшилась бы при растекании по столу, но здесь превалирующую роль играет энергия свободной поверхности

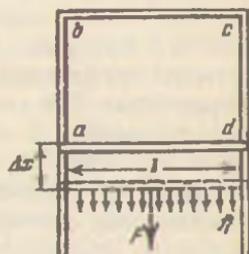


Рис. 3.22.

( $\frac{V}{S}$  мало) Сплющивая капельку ртути, мы производим работу, затрачиваемую на «вытягивание» новых молекул из объема на ее поверхность (возрастающую при сплющивании).

Влияние «поверхностной» энергии существенно также для тонких жидких пленок.

Возьмем проволочный каркас с подвижным ребром, изображенный на рис. 3.22, и окунем его в мыльную воду. При осторожном извлечении каркаса из раствора в нем останется натянутой тончайшая мыльная пленка. Передвинем теперь нижнее подвижное ребро на некоторое расстояние  $\Delta x$ , как это показано на рис. 3.22 пунктиром. При этом слой жидкости на каркасе растянется и несколько утончится, а его полная поверхность (с обеих сторон каркаса) увеличится на

$$\Delta S = 2l \Delta x. \quad (43.3)$$

Если обозначить через  $n_0$  число молекул, заполняющих единицу площади поверхности пленки, то при таком ее растяжении  $n_0 \Delta S$  молекул перейдут из объема жидкого слоя на его поверхность. Поскольку извлечение одной молекулы на свободную поверхность связано с увеличением ее потенциальной энергии на  $\approx 6 |U_{\text{мин}}|$ , то для растяжения мыльной пленки придется затратить внешнюю работу

$$\Delta A = 6 |U_{\text{мин}}| n_0 \Delta S = \alpha \Delta S. \quad (43.4)$$

Величина  $\alpha \approx 6 |U_{\text{мин}}| n_0$  называется коэффициентом поверхностного натяжения, или просто поверхностным натяжением данной жидкости. Из (43.4) вытекает, что

$$\alpha = \frac{\Delta A}{\Delta S}, \quad (43.5)$$

и  $\alpha = \Delta A$  при  $\Delta S = 1$ . Следовательно, коэффициент поверхностного натяжения  $\alpha$  численно равен работе, которую нужно затратить для увеличения поверхности жидкости на единицу площади. В системе СГС величина  $\alpha$  измеряется в эрг/см<sup>2</sup>, в СИ — в дж/м<sup>2</sup>.

Отпустим подвижное ребро рассматриваемого каркаса и дадим ему возвратиться в исходное положение. Тогда молекулы, вышедшие на поверхность, вернутся обратно внутрь жидкости и внутренние силы сцепления совершат точно такую же работу  $\Delta A = \alpha \Delta S$ . Микроскопическая картина сил, действующих на каждую отдельную молекулу, при таком перемещении будет весьма сложной и запутанной. Макроскопически это проявится в том, что на свободное

ребро каркаса действует по всей линии соприкосновения его с поверхностью жидкости (длиной  $2l$ ) результирующая сила  $F = \alpha \Sigma f_l$ , называемая силой поверхностного натяжения жидкости. Эта сила направлена касательно к поверхности жидкости и перпендикулярна к контуру, ограничивающему поверхность жидкости, т. е. в данном случае к линии соприкосновения поверхности жидкости с любым ребром каркаса, в том числе и подвижным.

При перемещении подвижного ребра каркаса на величину  $\Delta x$  эта сила поверхностного натяжения совершает работу

$$\Delta A = F \Delta x. \quad (43.6)$$

Сравнивая полученные два выражения (43.4) и (43.6) для работы и учитывая (43.3), найдем:

$$\alpha \cdot 2l \Delta x = F \Delta x,$$

откуда

$$\alpha = \frac{F}{2l}, \quad (43.7)$$

т. е.  $\alpha = F$  при  $2l = 1$ . Формула (43.7) дает нам второе определение коэффициента поверхностного натяжения (вытекающее из первого): *коэффициент поверхностного натяжения численно равен силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины контура, ограничивающего поверхность*. В системе СГС он измеряется в *дин/см* (что совпадает с предыдущим определением, так как  $\text{эрг} = \text{дин} \cdot \text{см}$ ), в СИ — в *н/м*.

Выделим мысленно на поверхности жидкости площадку, ограниченную контуром  $\Pi$  (рис. 3.23). Молекулы стремятся уйти внутрь жидкости с поверхности этой площадки, а площадка — сократиться. Поскольку пленка находится в равновесии, значит, на нее со стороны остальной поверхности действуют макроскопические растягивающие силы, так что к каждому элементу контура  $\Delta l$  приложена сила поверхностного натяжения

$$F \Delta = \alpha \Delta l. \quad (43.8)$$

Как указывалось выше, сила  $\Delta F$  перпендикулярна к элементу контура  $\Delta l$  и лежит в плоскости, касательной к поверхности. Из (43.4) следует, что  $\alpha$  представляет собой избыточную потенциальную энергию единицы площади поверхности жидкости. При переходе молекул с поверхности жидкости внутрь и обратно изменяется и кинетическая энергия их хаотического теплового движения. Следовательно, быстро сжимающаяся пленка будет нагреваться, а быстро растягивающаяся пленка — охлаждаться. Поэтому соотношения

(43.5) и (43.7), строго говоря, являются справедливыми лишь при достаточно медленных изотермических процессах. Величина  $\alpha$ , входящая в эти выражения, носит название свободной энергии единицы площади поверхности.

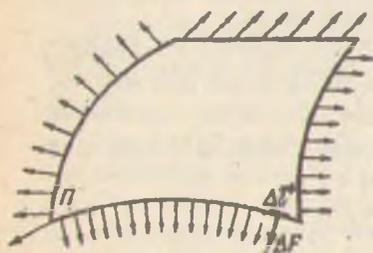


Рис. 3.23.

Особые свойства поверхностного слоя и наличие в нем сил поверхностного натяжения обуславливают целый ряд своеобразных явлений. Если осторожно положить на поверхность жидкости стальную иголку или лезвие безопасной бритвы, то под действием ее веса поверхность в этом месте «прогнется» (рис. 3.24). При этом площадь поверхности возрастет и силы поверхностного натяжения не дадут телу опускаться далее.

Если пленка жидкости натянута на проволочный каркас, изображенный на рис. 3.25, а, но нить  $abc$ , прикрепленная к каркасу, лежит на поверхности пленки свободно. Если же нижнюю половину пленки проткнуть, то оставшаяся верхняя ее половина будет стремиться сжаться и натянет нить, как это показано на рис. 3.25, б.

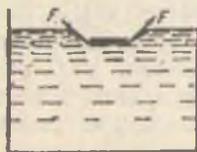


Рис. 3.24.

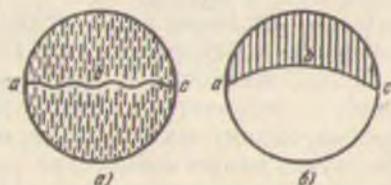


Рис. 3.25.

Если давление газа или пара над свободной поверхностью жидкости мало превышает атмосферное, то газ можно считать идеальным газом и пренебрегать его взаимодействием с молекулами поверхностного слоя жидкости. Поэтому при низких давлениях поверхностное натяжение жидкости практически не зависит от давления газа над жидкостью.

С ростом температуры взаимодействие молекул жидкости несколько ослабляется, так как при увеличении кинетической энергии молекул жидкость «разрыхляется» и среднее

расстояние между молекулами возрастает. Поэтому с увеличением температуры величина  $\alpha$  должна уменьшаться. В том же направлении должно действовать и возрастание плотности насыщенного пара с повышением температуры. При приближении  $T$  и  $T_k$  свойства пара приближаются к свойствам жидкости и условия взаимодействия, в которых находятся молекулы поверхностного слоя, перестают практически отличаться от условий внутри жидкости.

Поэтому при  $T=T_k$ , в критической точке, поверхностное натяжение жидкости  $\alpha$  должно обращаться в нуль.

На этот факт, как уже упоминалось в предыдущей главе, впервые указал Д. И. Менделеев в 1860 г. Для большинства жидкостей *поверхностное натяжение падает с температурой практически линейно по закону*

$$\alpha_t = \alpha_0 (1 - at). \quad (43.9)$$

Из (43.9) следует, что  $\alpha=0$  при  $t = \frac{1}{a}$ . Следовательно,  $\frac{1}{a} = t_k$  есть критическая температура данной жидкости, и (43.9) можно преобразовать к виду

$$\alpha_t = \alpha_0 \left(1 - \frac{t}{t_k}\right). \quad (43.10)$$

До сих пор мы исходили, в первом приближении, из предположения, что любая молекула взаимодействует лишь со своими ближайшими 12 соседями. Строго говоря, это, конечно, не так. Молекулы взаимодействуют и на больших расстояниях, но силы взаимодействия быстро убывают. Как показывает детальное рассмотрение этой задачи, энергия взаимодействия между двумя молекулами с ростом  $r$  убывает как  $\frac{1}{r^6}$ . Разделив мысленно

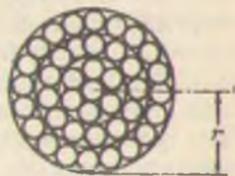


Рис. 3.26.

жидкость, окружающую молекулу, на концентрические слои одинаковой толщины, как это показано на рис. 3.26, мы видим, что число молекул в каждом последующем слое возрастает как  $r^2$ . Следовательно, энергии взаимодействия молекул с каждым концентрическим слоем изменяется с расстоянием слоя от центральной молекулы пропорционально  $r^2 \cdot \frac{1}{r^6} = \frac{1}{r^4}$ , т. е. все еще очень быстро. Практически с данной молекулой внутри жидкости взаимодействует только относительно небольшое число молекул.

Поэтому полную энергию любой молекулы внутри жидкости можно практически считать не зависящей от объема жидкости.

Однако, если слой жидкости достаточно тонок, то энергия молекул будет зависеть уже от его толщины. Это обстоятельство

оказывается особенно существенным при наличии в жидкости растворенных ионов (диссоциировавших ионных молекул типа NaCl и др.), взаимодействие между которыми убывает значительно медленнее, чем по закону  $\frac{1}{r^6}$ .

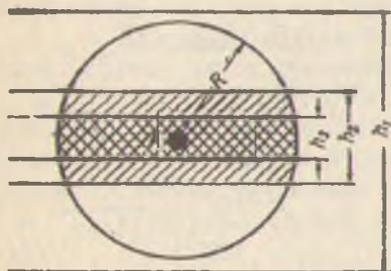


Рис. 3.27.

Рассмотрим тонкую пленку жидкости (рис. 3.27), толщина которой сравнима с «эффективным радиусом действия»  $R$  молекулярных сил (где  $R$  — расстояние на котором молекулярные силы становятся пренебрежимо малы). При толщине пленки  $h_1 > 2R$  молекула  $A$  будет обладать такой же потенциальной энергией, как и любая молекула внутри жидкости.

При толщине же пленки  $h_2$  молекула  $A$  будет взаимодействовать с меньшим числом молекул (в области, отмеченной простой штриховкой), т. е. ее энергия будет больше, чем в случае  $h_1$  (следует помнить, что  $U < 0$  и уменьшение  $|U|$  означает возрастание энергии!). При толщине  $h_3$  потенциальная энергия молекул будет еще больше, значительно превышая потенциальную энергию молекулы на поверхности толстого слоя жидкости. Как видно из рис. 3.28, в случае пленки очень малой толщины  $h$  отпадает энергия взаимодействия (отрицательная!) с молекулами, лежащими в редко штрихованной области. При этом энергия всех молекул, как находящихся на поверхности пленки, так и внутри нее, примерно одинакова, превышая энергию молекулы не только внутри жидкости, но и на поверхности толстого слоя жидкости.

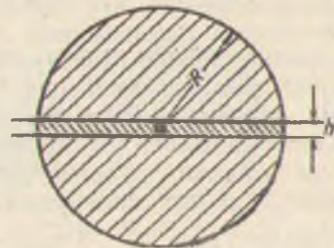


Рис. 3.28.

Уменьшение энергии этих молекул, а значит, и всей

жидкости в целом возможно, следовательно, за счет увеличения толщины пленки. Стремление к увеличению толщины пленки выражается в появлении добавочного давления в пленке. Это избыточное давление было обнаружено и изучено Б. В. Дерягиным и названо расклинивающим давлением. Оно становится особенно заметным при наличии в жидкости ионов, взаимодействие между которыми убывает значительно медленнее, чем по закону  $1/r^6$ , справедливому для нейтральных молекул. Наличие расклинивающего давления во многих случаях объясняет важный факт устойчивости коллоидных и дисперсных систем. На рис. 3.29 показана схема, объясняющая, как расклинивающее давление препятствует слипанию пузырьков газа внутри жидкости при сближении их на очень малые расстояния.

По-видимому, это расклинивающее давление играет существенную роль в открытом П. А. Ребиндером эффекте облегчения деформирования и механического разрушения твердых тел при воздействии растворов — понизителей твердости. Проникая, например, в микроскопические трещины в породе и оказывая расклинивающее давление на их стенки, подобные жидкости облегчают разрушение горных пород при бурении.

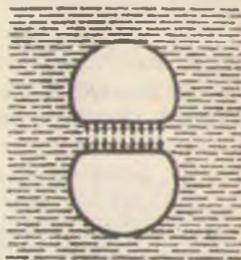


Рис. 3.29.

Кроме температуры и толщины слоя, на величину поверхностного натяжения жидкости существенно влияют растворенные в последней, даже в малых количествах, примеси. Если энергия взаимодействия молекулы растворенного вещества с молекулой растворителя  $|U_{\text{мин}}^*|$  меньше энергии взаимодействия молекул растворителя  $|U_{\text{мин}}|$  между собой, то при выходе растворенной молекулы на поверхность и вытеснении ею одной молекулы растворителя из поверхности в объем жидкости будет выделяться энергия

$$\Delta W^* \approx 6|U_{\text{мин}}| - 6|U_{\text{мин}}^*| > 0. \quad (43.11)$$

Так как  $\Delta W^* > 0$ , то растворенные молекулы будут вытесняться на поверхность жидкости и одновременно будут понижать поверхностное натяжение раствора.

Такие вещества носят название поверхностно-активных веществ по отношению к данной жидкости. Простейшими поверхностно-активными веществами по

отношению к воде являются спирты, жирные кислоты и их соли (мыла). В расплавленных металлах подобными поверхностно-активными веществами, концентрирующимися на поверхности расплава, являются обычно более легкоплавкие примеси.

Если жидкость находится в сосуде, то, кроме свободной поверхности, существует еще граница раздела между жидкостью и твердым телом — стенками сосуда. Молекулы жидкости, соприкасающиеся со стенкой сосуда, взаимодействуют со своими ближайшими соседями как жидкости, так и твердого тела. Энергия такого взаимодействия приближенно равна

$$W^T = 6|U_{\text{мин}}^*| + 6|U_{\text{мин}}^T|, \quad (43.12)$$

где  $|U_{\text{мин}}^T|$  — энергия взаимодействия молекулы жидкости с молекулой твердого тела.

При переходе такой молекулы из пограничного слоя в объем жидкости будет выделяться энергия

$$\Delta W = W^T - 12|U_{\text{мин}}^*| = 6\{|U_{\text{мин}}^T| - |U_{\text{мин}}^*|\}. \quad (43.13)$$

Если молекула жидкости сильнее взаимодействует с молекулами твердого тела, чем с молекулами той же жидкости, то

$$|U_{\text{мин}}^T| > |U_{\text{мин}}^*| \text{ и } \Delta W > 0.$$



Рис. 3.30.

В этом случае жидкость будет стремиться увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом и растечься по последнему. Принято говорить, что в этом случае жидкость смачивает твердое тело.

Так, вода смачивает стекло. Если поместить маленькую каплю воды на поверхность стеклянной пластинки, то вода будет растекаться по стеклу, как это показано на рис. 3.30. При таком растекании, однако, будет одновременно возрастать и свободная поверхность капли, на что необходима затрата энергии. Процесс растекания жидкости прекратится, когда угол  $\theta$  между свободной поверхностью жидкости и твердым телом делается достаточно малым, достигнув некоторого предельного значения  $\theta_k$ , характерного для данной пары жидкость — твердое тело и называемого краевым углом. Для жидкости, смачивающей данную поверхность,

краевой угол  $\theta_k$  — острый ( $\theta_k < \frac{\pi}{2}$ ) и тем меньше, чем лучше смачивание.

Для очень хорошо смачивающих жидкостей, как, например, для комбинации вода — стекло, можно практически считать  $\theta_k \approx 0$ .

Если  $|U_{\text{мин}}^*| < |U_{\text{мин}}^0|$ , то  $\Delta W < 0$  и жидкость будет стремиться сократить поверхность соприкосновения с твердым телом. Примером такой не смачивающей жидкости является по отношению к стеклу ртуть. Капля ртути, помещенная на стеклянную пластинку, стягивается и принимает вид, изображенный на рис. 3.31. Краевой угол для таких несмачивающих жидкостей — тупой ( $\frac{\pi}{2} < \theta_k < \pi$ ).

На приведенных примерах мы выяснили, что одно и то же твердое тело (стекло) может смачиваться одной жидкостью (водой) и не смачиваться другой (ртутью). С другой стороны, одна и та же жидкость (например ртуть) может не смачивать одну твердую поверхность (стекло) и смачивать другую (цинк).

Поверхностно-активные вещества, растворенные в жидкости, могут концентрироваться на границе раздела и покрывать тончайшей, мономолекулярной пленкой (пленкой, состоящей из одного слоя молекул) поверхность твердого тела. В таких случаях принято говорить, что вещество адсорбируется на поверхности твердого тела. В зависимости от свойств адсорбированных на поверхности твердого тела молекул его смачиваемость может резко измениться (как в сторону увеличения, так и уменьшения). На этом явлении основан широко применяющийся в технике метод обогащения руд («флотация»).

Руда, содержащая различные минералы, мелко раздробляется и высыпается в чаны с водой, содержащей специально подобранные поверхностно-активные вещества. Часть минералов адсорбирует их. Через чаны продувается воздух. Крупинки минералов, у которых адсорбированные вещества понизили смачиваемость, «прилипают» к воздушным пузырькам и выносятся на поверхность жидкости, а остальные опускаются на дно. В результате достигается предварительное разделение компонентов руды — ее обогащение.

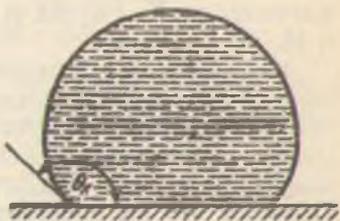


Рис. 3.31.

## § 44. Капиллярные явления

Форма, которую принимает свободная поверхность жидкости, зависит от сил поверхностного натяжения, от взаимодействия с ограничивающими поверхность твердыми стенками, а также от силы земного тяготения, действующей на жидкость. Особыми оказываются условия равновесия на

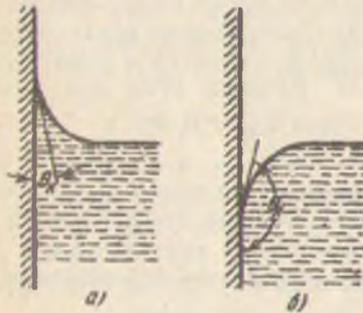


Рис. 3.32.

линии раздела жидкость — газ — твердая стенка (рис. 3.32, а и б) в тонких пленках и в узких сосудах — капиллярах.

Наблюдающиеся в этих случаях явления получили общее название капиллярных. Детальная теория капиллярных явлений была разработана в XIX веке главным образом в работах английского физика Т. Юнга, французского физика П. Лапласа, немецкого

математика К. Гаусса и русских ученых А. Ю. Давидова и И. С. Громеки.

Капиллярные эффекты, широко известные в технике и быту, в основном обусловлены тем, что благодаря действию сил поверхностного натяжения давление внутри жидкости может отличаться на некоторую величину  $\Delta p$  от внешнего давления  $p$  газа или пара над поверхностью жидкости. Поясним это на простейшем примере.

Пусть свободная поверхность жидкости представляет собой сферу радиуса  $R$  (капля) или ограниченный участок такой сферической поверхности (уровень жидкости в тонком цилиндрическом капилляре). Отсечем мысленно произвольной плоскостью от этой сферы шаровой сегмент, как показано на рис. 3.33. Внешняя поверхность этого сегмента ограничена от остальной поверхности жидкости окружностью радиуса  $r = R \sin \beta$ . На каждый бес-

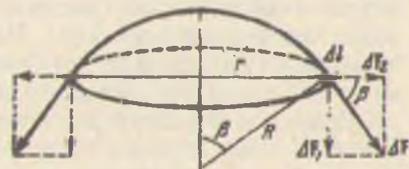


Рис. 3.33.

конечно малому элементу  $dS$  поверхности жидкости (рис. 3.33) действуют силы: атмосферное давление  $p$ , действующее на элемент сверху, и сила поверхностного натяжения  $\sigma$ , действующая по окружности элемента.

конечно малый элемент длины этого контура  $\Delta l$  действует сила поверхностного натяжения

$$\Delta F = \alpha \Delta l \quad (44.1)$$

в направлении, касательном к поверхности сферы, т. е. под тем же самым углом  $\beta$  к плоскости сечения.

Разложим эту силу на две составляющие

$$\Delta F_1 = \Delta F \sin \beta$$

и

$$\Delta F_2 = \Delta F \cos \beta, \quad (44.2)$$

расположенные соответственно перпендикулярно и вдоль плоскости сечения. Геометрическая сумма сил  $\Delta F_2$  равна нулю, так как эти силы на противоположных сторонах контура направлены в обратные стороны и взаимно уравновешиваются. Поэтому равнодействующая всех сил поверхностного натяжения, действующих на вырезанный сегмент  $F$ , будет направлена перпендикулярно к плоскости сечения внутрь жидкости и равна алгебраической сумме составляющих  $\Delta F_1$ :

$$F = \sum \Delta F_1 = \sum \Delta F \sin \beta = \sum \alpha \Delta l \frac{r}{R} = \frac{\alpha r}{R} \sum \Delta l = \frac{\alpha \cdot 2\pi r^2}{R}, \quad (44.3)$$

так как полная длина контура  $\sum \Delta l$  равна  $2\pi r$ .

Эта сила  $F$  будет прижимать сегмент к остальной части жидкости по всей разделяющей их поверхности  $S = \pi r^2$ . Дополнительное давление, создаваемое силами поверхностного натяжения внутри жидкости, тогда равно

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{\alpha \cdot 2\pi r^2}{R\pi r^2} = \frac{2\alpha}{R}. \quad (44.4)$$

Как и следовало ожидать, это дополнительное давление не зависит от  $r$ , т. е. от того, в каком месте поверхности жидкости мы произвели мысленное сечение.

Плоскую поверхность жидкости можно рассматривать как предельный случай сферы бесконечно большого радиуса  $R = \infty$ . В этом случае согласно (44.4)  $\Delta p = \frac{2\alpha}{\infty} = 0$ . Для плоской поверхности силы поверхностного натя-

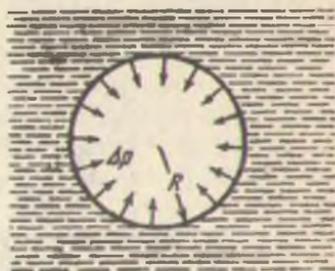


Рис. 334.

жения направлены вдоль поверхности и не создают дополнительного давления: *давление внутри жидкости равно внешнему давлению.*

В случае вогнутой поверхности жидкости, например, если внутри жидкости находится пузырек газа радиуса  $R$  (рис. 3.34), повторяя весь предыдущий вывод, мы убедимся, что результирующая сила  $F$  направлена из жидкости в газ. В этом случае

$$\Delta p = -\frac{2\alpha}{R}, \quad (44.5)$$

т. е. давление внутри жидкости под вогнутой поверхностью меньше, чем в газе (внутри пузырька) на величину  $\Delta p$ .

Чтобы не выписывать двух различных формул (44.4) и (44.5) для выпуклой и вогнутой поверхностей, принято радиусу кривизны поверхности  $R$  приписывать знак в зависимости от его направления.

Если радиус кривизны  $R$  направлен внутрь жидкости (выпуклая поверхность), то полагают  $R > 0$ ; если же радиус кривизны направлен наружу (поверхность вогнутая), то полагают  $R < 0$ . Тогда с учетом знака можно написать единую формулу для дополнительного давления под сферической поверхностью жидкости

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}. \quad (44.6)$$

Уравнение (44.6) носит название формулы Лапласа.

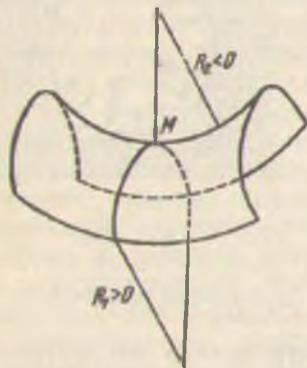


Рис. 3.35.

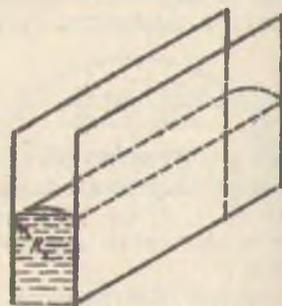


Рис. 3.36.

В общем случае произвольной поверхности двойкой кривизны, пример которой изображен на рис. 3.35, кривизна в двух взаимно-перпендикулярных сечениях поверхности может быть разной и радиусы кривизны этих сечений  $R_1$  и  $R_2$  в данной точке  $M$  могут отличаться друг от друга по величине и по знаку. Для такой поверхности формула Лапласа может быть обобщена:

$$\Delta p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (44.7)$$

В зависимости от значений и знаков  $R_1$  и  $R_2$  величина  $\Delta p$  может оказаться положительной или отрицательной.

В частном случае сферы  $R_1 = R_2 = R$  и формула (44.7) переходит в (44.6).

Если слой жидкости расположить между двумя близкими параллельными пластинками, то поверхность жидкости примет форму кругового цилиндра некоторого радиуса  $R$  (рис. 3.36). В этом частном случае  $R_1 = R$ , а  $R_2 = \infty$ , так как в перпендикулярном сечении кривизна равна нулю. Из обобщенной формулы Лапласа тогда следует, что дополнительное давление в жидкости под цилиндрической поверхностью равно

$$\Delta p_{\text{ц}} = \alpha \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\alpha}{R}, \quad (44.8)$$

т. е. вдвое меньше, чем под сферической поверхностью того же радиуса.

В узких трубках (капиллярах) вследствие смачивания или несмачивания жидкостью стенок капилляра кривизна поверхности жидкости (т. е. мениск) становится значительной. Возникающее при этом дополнительное давление  $\Delta p$  вызывает заметное поднятие или опускание уровня жидкости.

Рассмотрим для примера случай круглого капилляра радиуса  $r$ , погруженного в большой сосуд с жидкостью, не смачивающей стенки капилляра. При этом внутри капилляра образуется мениск, и под действием дополнительного давления  $\Delta p$  жидкость в капилляре опускается на некоторую глубину, как это показано на рис. 3.37. В широком сосуде благодаря действию силы тяжести можно считать поверхность жидкости практически плоской. В узкой трубке, напротив, можно пренебречь действием сил тяжести по сравнению с силами поверхностного натяжения и поверхность жидкости считать сферой некоторого радиуса  $R$ . Из рис. 3.37 видно, что

$$R = \frac{r}{|\cos \theta|}, \quad (44.9)$$

где  $\theta$  — краевой угол на границе жидкость — твердая стенка.

На уровне поверхности жидкости в капилляре давление в жидкости равно  $p + \Delta p = p + \frac{2\alpha}{R}$ , где  $p$  — внешнее давление в газе. По закону сообщающихся сосудов оно должно

быть равно полному давлению на том же уровне в широком сосуде  $p + \rho gh$ , где  $\rho gh$  — гидростатическое давление столба жидкости плотности  $\rho$  на глубине  $h$  ( $g$  — ускорение силы тяжести). Приравнявая, получим:

$$p + \frac{2\alpha}{R} = p + \rho gh, \quad (44.10)$$

откуда

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g R} = \frac{2\alpha |\cos \theta|}{\rho g r}. \quad (44.11)$$

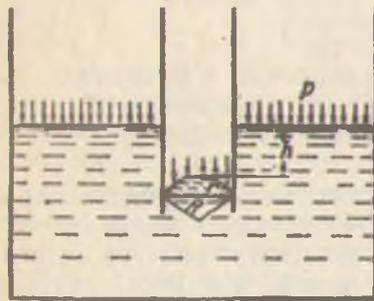


Рис. 3.37.

В точности такое же выражение мы получим и для высоты поднятия жидкости, смачивающей стенки капилляра радиуса  $r$ . При полном смачивании (например вода — стекло)  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ , радиус мениска  $R$  равен радиусу капилляра  $r$  и высота поднятия жидкости равна

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r}. \quad (44.12)$$

Из (44.11) и (44.12) следует, что высота поднятия или опускания уровня жидкости в капилляре обратно пропорциональна его радиусу (рис. 3.38). Для воды при обычных условиях ( $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\alpha = 0,071 \text{ н/м}$ ) в капилляре диаметром  $d = 2r = 1 \text{ мк} = 10^{-6} \text{ м}$  уровень поднимается на высоту

$$h = \frac{2 \cdot 0,071}{10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} \approx 30 \text{ м.}$$

Капиллярные явления играют большую роль в природе, технике, сельском хозяйстве, в быту и при научных исследованиях. По тонким капиллярным каналам в фитиле керосин поднимается из резервуара к горелке. Если между фундаментом и стенами строящегося здания не проложить слой гидроизоляции, то влага из почвы будет подниматься по капиллярным порам кирпича и вызовет отсыревание всего

здании. Если диаметр обоих колен ртутного манометра неодинаков и притом один из них — капилляр, то ртуть в них будет находиться на неодинаковом уровне (рис. 3.39), что приведет к ошибкам в измерении давления.

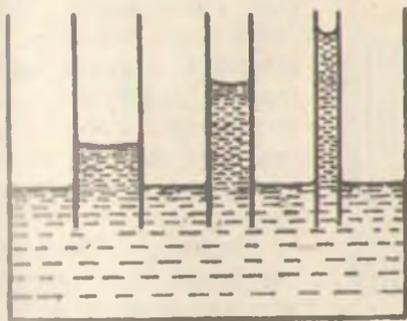


Рис. 3.38.



Рис. 3.39.

#### § 45. Явления переноса. Вязкость жидкости

При хаотическом тепловом движении, как указывалось в § 42, молекулы жидкости перескакивают из одних временных положений равновесия в соседние.

В отличие от газа «длина свободного пробега» при подобных перескоках имеет порядок диаметра молекул и практически не зависит от внешнего давления и температуры. Примерный путь, совершаемый молекулой в жидкости, изображен на рис. 3.40, где стрелками показаны колебания молекулы около временных положений равновесия, а линиями — перескоки их с места на место.

Переходя с места на место, молекулы диффундируют внутри жидкости. Это явление с а м о д и ф ф у з и и можно наблюдать, если примешать к жидкости некоторое число молекул радиоактивного изотопа, за движением которых можно следить по их излучению.

Поток  $j$  молекул, диффундирующих через единицу площади за единицу времени, так же как и при диффузии в газе, определяется уравнением

$$j = -D \frac{dn}{dx}, \quad (45.1)$$

где  $n$  — концентрация диффундирующих молекул,  $\frac{dn}{dx}$  — градиент этой концентрации, а  $D$  — коэффициент диффузии.

Этим же уравнением (45.1) описывается и диффузия посторонних молекул и ионов, растворенных в жидкости. Чем выше температура, тем меньшее число колебаний совершает молекула в положении равновесия до своего перескока,

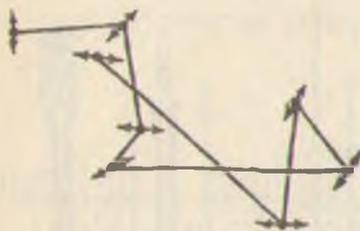


Рис. 3.40.

тем интенсивнее процесс диффузии и тем больше величина  $D$ . Однако коэффициенты диффузии в жидкости все же имеют порядок  $10^{-9}$  м<sup>2</sup>/сек, т. е. во много раз меньше, чем в газах.

Перенос количества движения между слоями жидкости, движущимися с различными скоростями, также описывается фор-

мально теми же уравнениями, что и в газе. Сила трения между соседними слоями равна

$$\frac{F}{S} = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (45.2)$$

где  $S$  — площадь соприкосновения слоев,  $\frac{dv}{dx}$  — градиент скорости движения жидкости (рис. 3.41) и  $\eta$  — коэффициент внутреннего трения, или вязкость жидкости.

В газе перенос количества движения осуществляется при переходе молекул из одного слоя в другой. Благодаря одинаковому механизму диффузии и внутреннего трения, коэффициенты  $D$  и  $\eta$  в газе прямо пропорциональны друг другу:

$$D_c \sim \eta_c. \quad (45.3)$$

В жидкости же механизм внутреннего трения отличен от механизма диффузии. Так как молекулы жидкости большую часть времени находятся около положений равновесия, то движущаяся масса жидкости увлекает соседние слои в основном за счет сил сцепления. С ростом температуры текучесть жидкости возрастает, а вязкость падает. Поэтому, как показал Я. И. Френкель, вязкость жидкости обратно пропорциональна коэффициенту диффузии:

$$\eta_c \sim \frac{1}{D_c}. \quad (45.4)$$

При нагревании жидкость «разрыхляется» и возрастает ее свободный объем  $V - b$  (где  $b$  — постоянная в уравнении ван-дер-Ваальса, характеризующая недоступную для моле-

куд долю полного объема системы  $V$ ). Учитывая это, А. И. Бачинский предложил очень простую формулу, описывающую зависимость вязкости от температуры:

$$\eta_{ж} = \frac{B}{V - b}. \quad (45.5)$$

где  $B$  — константа, различная для разных жидкостей.

Формула Бачинского хорошо оправдывается на опыте, но не показывает явной зависимости  $\eta_{ж}$  от температуры. Я. И. Френкель вывел формулу, непосредственно связывающую  $\eta_{ж}$  с  $T$ :

$$\eta_{ж} = \text{const} \cdot e^{\frac{\omega}{kT}}. \quad (45.6)$$

Здесь  $\omega$  — энергия, которую нужно сообщить молекуле жидкости, чтобы она могла перескочить из одного положения равновесия в соседнее. Величина  $\omega$  обычно имеет порядок  $(2 \div 3) \cdot 10^{-20}$  дж. Поэтому согласно (45.6) при нагревании жидкости, например, на  $10^\circ\text{C}$  вязкость ее падает на 30—30 %.

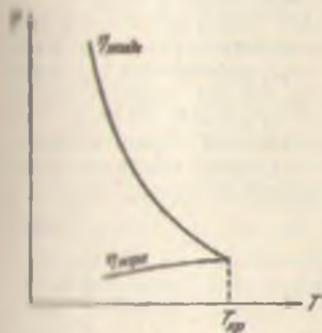


Рис. 3.42.

Вязкость жидкости обычно во много раз больше, чем вязкость газа. Так, для воды при  $25^\circ\text{C}$   $\eta_{\text{вода}} = 0,01$  пауза  $= 0,01$  г/см·сек  $= 10^{-3}$  кг/м·сек, а для насыщенного водяного пара  $\eta_{\text{пар}} = 10^{-4}$  пауза. С ростом температуры вязкость жидкости быстро падает, а вязкость пара медленно возрастает, и при критической температуре  $T_{\text{кр}}$  они сравниваются друг с другом, как это показано на рис. 3.42.

При понижении температуры вязкость большинства жидкостей быстро возрастает. Однако из этого общего правила имеется исключение. П. Л. Капица выяснил, что при приближении к абсолютному нулю температуры гелий не только не увеличивает своей вязкости, но переходит в «сверхтекучее» состояние, характеризуемое пол-

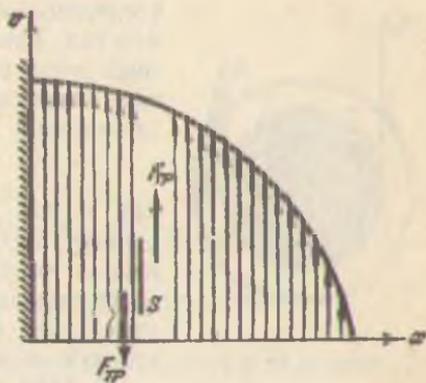


Рис. 3.41

ным отсутствием вязкости. Природа этого явления чисто квантовая, и касаться ее здесь мы не будем.

Вязкость жидкости определяет силу сопротивления жидкости движению в ней тел. Так, сила сопротивления движению шара радиуса  $r$  при малых скоростях движения находится по тому же уравнению

$$F = 6\pi r \eta v, \quad (45.7)$$

как и при движении в газе (формула Стокса). Эта сила прямо пропорциональна вязкости среды  $\eta$  и скорости движения шара  $v$ . Также прямо пропорциональна  $\eta$  и  $v$  и сила сопротивления движению жидкости в капиллярах.

В 1883 г. Н. П. Петров, исходя из уравнения (45.2), рассчитал силу трения, действующую на смазанный шип, вращающийся и

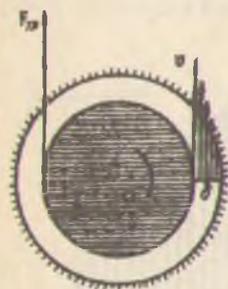


Рис. 3.43.

подшипнике:

$$F = \eta \frac{v}{\delta} S, \quad (45.8)$$

где  $v$  — окружная скорость шипа,  $S$  — его поверхность и  $\delta$  — толщина зазора между шипом и подшипником (рис. 3.43). На этой основе была создана гидродинамическая теория смазки, применяемая для расчета трения и износа трущихся поверхностей машин.

Отметим, что с точностью до безразмерного коэффициента формула (45.7) может быть получена из анализа размерностей входящих в нее величин. Действительно, имеется сила  $F$ , размерность которой  $[F] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{сек}^2$ . Эта сила по характеру задачи должна зависеть от: 1) вязкости среды  $\eta$  с размерностью  $[\eta] = \text{кг} / \text{м} \cdot \text{сек}$ , 2) радиуса шарика  $[r] = \text{м}$  и 3) его скорости  $[v] = \text{м} / \text{сек}$ . Из этих трех величин можно получить величину размерности  $F$  только одним способом: если составить их произведение. Следовательно, с точностью до безразмерного множителя  $a$

$$F = a r \eta v. \quad (45.9)$$

Для определения значения  $a = 6\pi$  учет размерностей уже недостаточен.

Аналогичный «поиск» предварительного результата до точных расчетов с помощью анализа размерностей может быть применен в самых различных задачах.

## ГЛАВА XII СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### § 46. Кристаллические и аморфные тела

В отличие от жидкостей *твердые тела обладают упругостью формы*. Прикладывая к твердому телу внешние силы, можно изменить его форму тем сильнее, чем больше приложенные усилия. При этом, если не перейден некоторый уровень деформации, то при снятии нагрузки твердое тело принимает свою первоначальную форму. На рис. 3.44 изображена типичная для твердых тел упругая деформация сдвига.

Подобная деформация в жидкости инадеется неупругой. Если заставить жидкость течь, то, как мы указывали в предыдущей главе, между движущимися с различной скоростью слоями жидкости появляются силы трения, препятствующие этому движению.

Однако при прекращении действия сил, вызвавших движение, сдвинувшиеся друг относительно друга слои жидкости в отличие от твердых тел не возвращаются в исходное положение.

Эти качественные различия жидкого и твердого состояний вещества обусловлены различием в их молекулярном строении и в характере теплового движения молекул. При нагревании твердое тело при определенных условиях переходит в жидкое состояние — плавится. Жидкость при понижении температуры затвердевает.

Поместим кусок твердого тела в пробирку и будем нагревать ее на горелке. Термопара, опущенная в пробирку

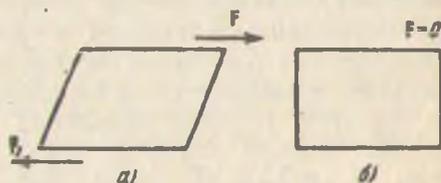


Рис. 3.44.

и касающаяся поверхности твердого тела, будет отмечать его температуру (рис. 3.45).

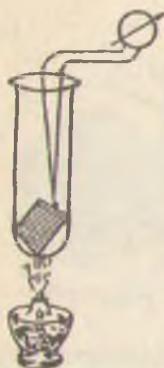


Рис. 3.45.

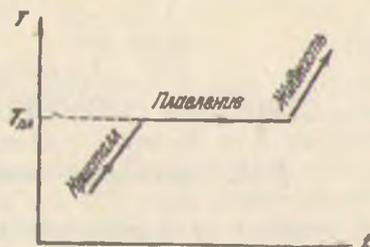


Рис. 3.46.

С течением времени  $t$  температура  $T$  твердого тела непрерывно растет, как это показано на рис. 3.46. По достижении некоторой, характерной для данного вещества температуры  $T_{пл}$  тело начинает плавиться, и при дальнейшем нагревании температура его остается постоянной. Все подводимое тепло при этом затрачивается на плавление твердого тела. Величина скрытой теплоты плавления  $q_{пл}$  обычно в несколько раз меньше скрытой теплоты испарения. Так, для воды  $q_{исп} = 2,25 \cdot 10^6$  Дж/кг при  $100^\circ\text{C}$ , а для льда  $q_{пл} = 3,31 \cdot 10^5$  Дж/кг при  $0^\circ\text{C}$ .

Температура смеси твердого тела с его расплавом остается постоянной и равной температуре плавления до тех пор, пока все твердое тело не превратится в жидкость. При дальнейшем нагревании температура жидкости начнет опять расти, как показано на рис. 3.46.

Если прекратить нагревание, жидкость начнет охлаждаться, и температура ее со временем будет падать, как это показано на рис. 3.47. По достижении температуры плавления жидкость должна начать кристаллизироваться. Практически, однако, при отсутствии з а т р а в к и в чистой жидкости образование первоначальных микрокристалликов, являющихся центрами кристаллизации, затруднено и вещество, оставаясь в жидком состоянии, остынет до температуры  $T < T_{пл}$ .

При достаточном переохлаждении через некоторое время в жидкости появятся центры кристаллизации, которые начнут расти. При этом выделяется скрытая теплота плавления или кристаллизации  $q_{пл}$ , и температура расплава поднимается вновь до  $T_{пл}$ . После этого на кривой охлаждения появляется такая же горизонтальная линия, как и при плавлении. Когда вся жидкость закристаллизуется, скрытая теплота кристаллизации перестанет выделяться, и образовавшиеся кристаллики будут в дальнейшем остывать.

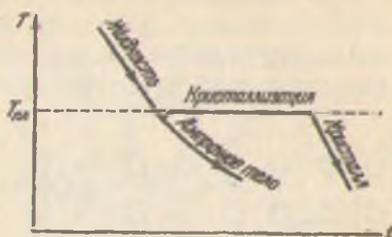


Рис. 3.47.

При кристаллизации металлов переохлаждение расплава не превышает нескольких долей градуса. В других случаях возможны переохлаждения расплава на градусы и десятки градусов.

Ряд веществ, как, например, стекло, могут быть переохлаждены на сотни градусов. Вязкость этих сильно переохлажденных жидкостей с падением температуры возрастает столь сильно, что перемещения атомов в них и образование центров кристаллизации становятся почти невозможными.

Такие сильно переохлажденные жидкости практически теряют текучесть и постепенно приобретают твердость и другие свойства твердого тела. Подобные тела носят название аморфных твердых тел.

Возможны случаи, когда одно и то же вещество, в зависимости от условий охлаждения, может быть получено как в кристаллическом, так и аморфном твердом состоянии. Например, стекло при очень медленном охлаждении расплава может кристаллизоваться (как говорят, «зарухать»). При этом на границах мелких образовавшихся кристалликов будет происходить многократное отражение и рассеяние света, и закристаллизовавшееся стекло потеряет свое самое важное свойство — прозрачность.

И в кристаллическом и в аморфном состоянии твердого тела атомы находятся в определенных положениях равновесия. Под действием внешних сил атомы несколько смещаются из этих положений и по снятии нагрузки возвращаются в них обратно, если эти смещения не превышают определенной, характерной для данного тела величины. Этим и обусловлена упругость формы твердых тел.

При нагревании твердого тела от абсолютного нуля его атомы начинают совершать малые колебания около своих положений равновесия; энергия и амплитуда этих колебаний возрастают с температурой. Благодаря хаотичности теплового

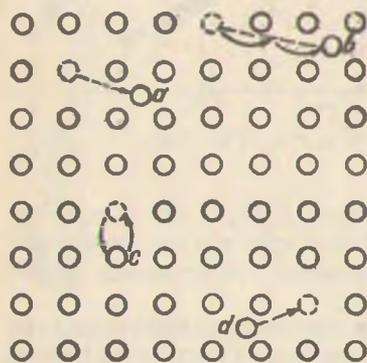


Рис. 3.48.

движения отдельные атомы, обладающие случайным избытком тепловой энергии, срываются со своих мест и проталкиваются между соседями (рис. 3.48). Сорванный со своего места атом попадает во временное, менее устойчивое положение равновесия (атом *a*) и после ряда колебаний перескакивает далее, в соседнее положение временного равновесия (атом *b*). В оставшуюся на месте сорванного атома «дырку» (вакансию), т. е. незаполненное положение устойчивого равновесия, может перескочить со-

седний атом, и тем самым формально дырка тоже будет «перемещаться» в твердом теле (атом *c*). При встрече сорванного со своего места атома и дырки возможна их взаимная рекомбинация (атом *d*).

Такое перемещение отдельных сорванных атомов и дырок обуславливает возможность самодиффузии и диффузии в твердых телах. Поскольку число таких атомов и дырок составляет лишь небольшую долю от всех атомов твердого тела, то коэффициенты диффузии в твердых телах во много раз меньше, чем в жидкостях, и обычно имеют порядок  $10^{-14} \text{ м}^2/\text{сек} \approx 10^{-9} \text{ м}^2/\text{сутки}$ .

С ростом температуры концентрация подобных дефектов в строении твердого тела сильно возрастает, что приводит к соответствующему росту коэффициентов диффузии.

В аморфных твердых телах ближайшие соседние атомы располагаются в определенном порядке на определенных расстояниях, зависящих от строения атомов и характера возникающих между ними связей. Если рассматривать некоторый из атомов как центральный, то атомы ближайшего к нему слоя расположатся в определенном порядке по отношению к этому центральному. Атомы второго слоя будут располагаться в определенном порядке и на определенных расстояниях от атомов первого слоя, но их порядок относи-

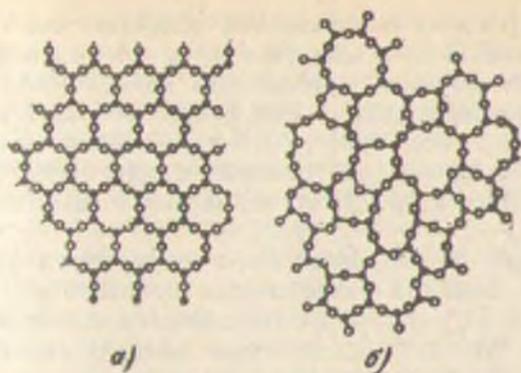


Рис. 3.49.

Только центрального атома уже несколько нарушается. Это нарушение быстро возрастает с удалением от «центра», и взаимное расположение атомов, удаленных друг от друга на 3—5 диаметров, может быть весьма различным, подчиняясь закону случая, как это схематически изображено на рис. 3.49, б.

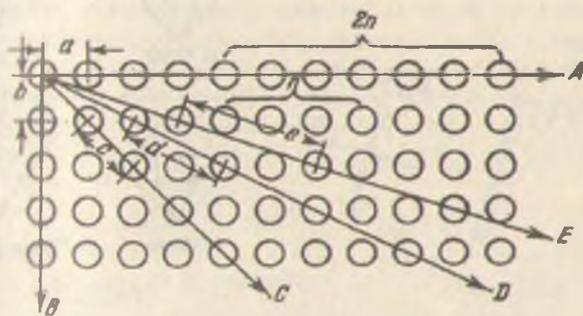


Рис. 3.50.

Таким образом, в аморфных телах существует лишь ближний порядок во взаимном расположении соседних атомов. В этом отношении аморфные тела по своей структуре похожи на жидкости и отличаются от последних лишь малой подвижностью своих атомов. С ростом температуры эта подвижность возрастает и аморфное тело постепен-

но и непрерывно переходит в жидкое состояние. Так же как и жидкость, аморфное тело изотропно, т. е. свойства его во всех направлениях одинаковы.

В твердом кристалле атомы располагаются в определенном порядке во всем теле (рис. 3.49, а). Атом, находящийся в  $n$ -м слое от данного центрального атома, всегда находится от него на расстоянии, точно в два раза меньшем, чем атом  $2n$ -го слоя.

В отличие от аморфных тел и жидкостей в кристаллах существует, как это схематически показано на рис. 3.50, дальний порядок в расположении атомов всего твердого тела. Атомы в этом случае располагаются в узлах правильной пространственной сетки, так называемой кристаллической решетки. Для любого направления в пространстве  $A, B, C, D, E, \dots$ , проходящего через центры атомов, расстояния между центрами двух соседних атомов ( $a, b, c, d, e, \dots$ , соответственно) остаются неизменными вдоль всей прямой (но отличаются для разных направлений!).

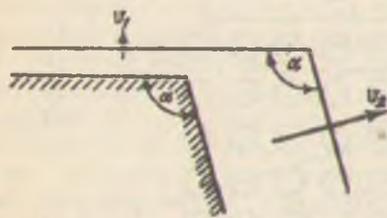


Рис. 3.51.

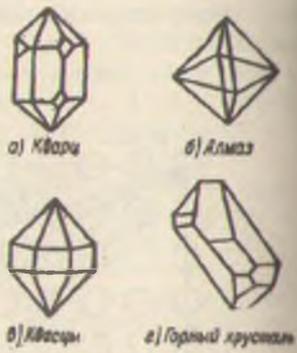


Рис. 3.52.

Как указывалось выше, с увеличением температуры возрастает число атомов, сорванных со своих нормальных положений равновесия, и число «дырок». Однако наличие подобных дефектов в отдельных местах кристаллической решетки не нарушает дальнего порядка вплоть до температуры плавления. При плавлении дальний порядок скачкообразно разрушается и в жидкости остается лишь ближний порядок расположения атомов.

Как видно из рис. 3.50, расстояние между соседними атомами в кристалле зависит от направления. В соответ-

ствии с этим и многообразные физические свойства — упругие, механические, тепловые, электрические, магнитные, оптические и другие свойства кристаллов будут различными по различным направлениям. В отличие от аморфных тел кристаллы анизотропны. Всем известны листочки слюды, которые легко скалываются и расщепляются в одном направлении и с трудом режутся в перпендикулярном к нему.

Анизотропия кристаллов резко проявляется и в процессе их роста. При образовании кристаллика из расплава или раствора скорости роста различных его граней отличаются в определенное число раз друг от друга. Это, в частности, обуславливает правильную форму возникающих кристалликов. На рис. 3.51 показано, как растут грани кристалла, имеющие различные скорости роста  $v_1$  и  $v_2$ .

На рис. 3.52 изображены одиночные кристаллы (так называемые монокристаллы) некоторых веществ. Монокристаллы различных веществ имеют разное число граней и разные углы между гранями и заметно различаются по внешнему виду. В зависимости от условий роста некоторые грани кристалликов могут «зарастать», так что внешний вид кристаллов одного и того же вещества может оказаться различным, и только тщательное измерение углов между соответствующими гранями сможет выявить принадлежность этих кристаллов к одному и тому же веществу и точность строения их кристаллической решетки.

Выращивание крупных правильных монокристаллов представляет собой трудную задачу. Ряд методов и приемов выращивания кристаллов различных веществ (широко используемых в технике) был разработан Бриджменом, Толмэном и А. В. Шубниковым.

При кристаллизации металлов обычно в расплаве возникает сразу много зародышей кристаллизации, расположенных хаотически и растущих до соприкосновения. Поэтому затвердевший металл представляет собой совокупность большого числа сцепленных друг с другом мелких кристалликов или зерен, ориентированных различным образом (так называемое поликристаллическое тело).

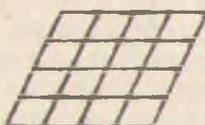
Различная ориентация зерен приводит к тому, что свойства поликристаллического тела по всем направлениям в среднем одинаковы.

## § 47. Типы кристаллических решеток

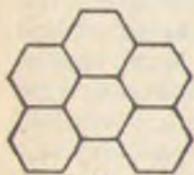
Правильное расположение атомов в кристалле обуславливает их правильное огранение и другие свойства. Порядок расположения атомов в пространстве может быть различным, но не любым. Из рис. 3.53, *а*, *б* и *в* видно, что,



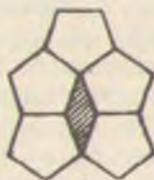
*а)*



*б)*



*в)*



*г)*

например, прямоугольники, ромбы или правильные шестиугольники могут полностью покрыть плоскость без пустот, сохраняя дальний порядок взаимного расположения. В противоположность этому совокупность правильных пятиугольников (рис. 3.53, *г*) не может повсюду плотно заполнить плоскость и сохранить дальний порядок, характерный для кристаллического тела.

Рис. 3.53.

Для кристаллических решеток характерно наличие симметрии по отношению к определенным направлениям и плоскостям. В соответствии с вышесказанным число различных возможных элементов и типов симметрии также ограничено.

Как показал А. В. Гадолин, существует 32 различных класса симметрии кристаллов. Знаменитый русский кристаллограф Е. С. Федоров установил, что эти классы в свою очередь подразделяются на 230 видов, и указал свойства каждого из последних. Последующее изучение сотен тысяч кристаллических тел, как природных, так и искусственных, позволило найти представителей каждого из этих 230 видов и подтвердило вывод Федорова. Видов, отличных от одного из 230 федоровских, обнаружено не было.

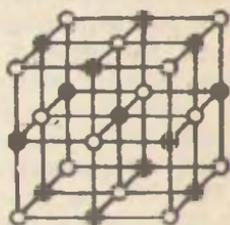
Структурными элементами кристаллической решетки могут являться отдельные атомы, группы атомов, молекул или ионов. По типу сил взаимодействия между элементами можно разделить решетки на четыре основные группы.

1. Ионные решетки. В узлах кристаллической решетки солей обычно располагаются попеременно положительные и отрицательные ионы. Эти ионы притягиваются

друг к другу, и решетка удерживается обычными электростатическими (кулоновскими) силами.

Простейшим примером ионной решетки является изображенная на рис. 3.54 решетка каменной соли ( $\text{NaCl}$ ). Для большей наглядности ионы на этом рисунке несколько отодвинуты друг от друга. На самом деле ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  почти вплотную соприкасаются своими электронными оболочками.

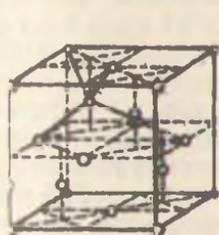
Как видно из рис. 3.54, каждый ион  $\text{Na}^+$  одинаково связан со всеми ближайшими ионами  $\text{Cl}^-$ , и наоборот. Следовательно, в кристалле нет отдельных молекул  $\text{NaCl}$ . Скорее, весь кристалл следует рассматривать как одну гигантскую молекулу  $\text{Na}_n\text{Cl}_n$ .



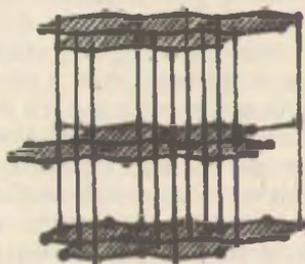
○  $\text{Na}^+$       ●  $\text{Cl}^-$

Рис. 3.54.

2. Атомные решетки. Типичными представителями решеток, в узлах которых расположены отдельные нейтральные атомы, являются изображенные на рис. 3.55 решетки



а) алмаз



б) графит

Рис. 3.55.

графита и алмаза. Атомы углерода в этих решетках связаны друг с другом химическими валентными связями, как и молекулах углеводородов. В молекулах бензола и других так называемых циклических углеводородов атомы углерода  $\text{C}$  под действием валентных сил располагаются в правильные шестиугольники.

Так же располагаются атомы углерода в решетке графита, которая принадлежит к гексагональной (шестиугольной) кристаллографической системе. Решетка графита состоит из ряда параллельных плоскостей. Каждая из плоскостей заполнена тесно связанными атомами углерода, рас-

положенными в углах правильного шестиугольника и находящимися друг от друга на расстоянии в  $1,42 \cdot 10^{-10}$  м. Атомы же соседних плоскостей слабо связаны друг с другом, расстояние между соседними плоскостями более чем в два раза превышает расстояния между атомами шестиугольников и равно  $3,40 \cdot 10^{-10}$  м. Поэтому кристалл графита легко скалывается вдоль этих плоскостей спайности. В противоположность этому, в кристалле алмаза соседние атомы углерода расположены таким образом, что они находятся на одном и том же расстоянии друг от друга, равном  $1,54 \cdot 10^{-10}$  м. Они одинаково и весьма тесно связаны во всех направлениях, что является причиной исключительной прочности и твердости алмаза. Четырехвалентные атомы С связаны каждый со своими ближайшими четырьмя соседями и располагаются по вершинам правильной четырехгранной пирамиды — тетраэдра (один из видов кубической кристаллографической системы).

3. Молекулярные решетки. Молекулы двухатомных газов ( $O_2$ ,  $H_2$ ,  $Cl_2$  и др.), как указывалось в гл. X, могут слабо взаимодействовать друг с другом. Силы взаимодействия между молекулами обусловлены небольшим взаимным смещением электронов в электронных оболочках атомов. Эти так называемые поляризационные силы являются причиной отклонений от уравнения состояния Менделеева — Клапейрона в реальных газах и поэтому часто называются вандерваальсовыми силами.

Кристаллы таких веществ состоят из отдельных молекул, расположенных в узлах пространственной решетки, правильно ориентированных и связанных между собой вандерваальсовыми силами. Различие в сцеплении атомов внутри молекул и между молекулами резко сказывается и на их взаимных расстояниях. Так, в твердом хлоре расстояние между атомами внутри молекулы  $Cl_2$  составляет  $1,99 \cdot 10^{-10}$  м, а расстояние между соседними молекулами —  $2,79 \cdot 10^{-10}$  м.

Инертные газы (Ne, Ar, Kr, Xe) практически не образуют химических соединений. Молекулы этих газов одноатомны, и кристаллы этих элементов тоже следует отнести к типу молекулярных решеток.

Большинство органических соединений с вытянутыми молекулами и молекулами сложной формы (парафины, спирты, целлюлоза, резина и др.) также образует молекулярные решетки.

Малая энергия связи в молекулярных кристаллах является причиной их слабого сцепления, легкой деформируемости и низких температур плавления.

4. Металлические решетки. В молекулярных кристаллах электронные конфигурации и орбиты электронов внутри молекул лишь незначительно деформируются при взаимодействии с соседними молекулами. В ионных кристаллах один или несколько электронов отрываются от так называемого электроположительного атома (например, Na) и прочно связываются с электроотрицательным атомом (например, Cl).

В атомных решетках валентные связи осуществляются парами электронов, движущихся по определенным орбитам, охватывающим оба связанных атома.

Иная картина наблюдается в металлах. В них самые внешние, валентные электроны сравнительно слабо связаны с атомами и легко отрываются при образовании кристаллической решетки. В узлах решетки остаются положительно заряженные ионы металла. Освободившиеся электроны перестают принадлежать определенным атомам и хаотически движутся по сложным орбитам, охватывающим весь металл. Таким образом, весь металл заполнен своеобразным «электронным газом», стягивающим положительные ионы в плотную кристаллическую решетку. Наличие свободных электронов является причиной хорошей электропроводности металлов.

Приведенный пример алмаза и графита показывает, что одно и то же вещество может кристаллизоваться в различных системах и обладать при этом различными физическими свойствами. Алмаз и графит являются различными аллотропическими модификациями одного и того же вещества — углерода. Явление аллотропии широко распространено в природе. Можно привести еще пример. Обычное «белое» олово — серебристо-белый ковкий металл с плотностью  $7,3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> — кристаллизуется в так называемой тетрагональной системе. Ниже 18 °С белое олово оказывается неустойчивым и может превращаться в серое олово, которое имеет кубическую решетку и плотность  $5,85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Появление серых пятен на оловянных предметах при длительном хранении на морозе носит название «оловянной чумы». При температуре 161 °С олово переходит в третью (ромбическую) модификацию и становится очень хрупким.

Различные кристаллические модификации данного вещества имеют различную энергию решетки. Поэтому при превращении одной модификации в другую поглощается или выделяется скрытая теплота превращения, так же как и в процессах плавления или кристаллизации. Каждая модификация является устойчивой в определенной области дав-



ничтожно мала. С ростом температуры эта упругость быстро возрастает, так же как и в случае жидкостей. Поэтому некоторые твердые тела могут непосредственно возгоняться в пар, минуя жидкую фазу. Примерами таких тел могут служить кристаллический иод и нафталин. При медленном нагревании под нормальным давлением иод возгоняется, образуя фиолетовые пары. При охлаждении пара он сублимирует, т. е. образует сразу кристаллы твердого иода, минуя жидкую фазу.

### § 48. Механические свойства твердых тел

Независимо от природы сил, связывающих атомы в твердом теле (валентных, кулоновских и т. д.), характер изменения этих сил с расстоянием  $r$  между атомами будет таким же, как и в жидкости и в реальном газе. При больших расстояниях между атомами (или другими элементами, составляющими решетку) преобладают силы притяжения, быстро убывающие с ростом  $r$ . При сближении атомов вплотную друг к другу начинает превалировать взаимное отталкивание электронных оболочек.

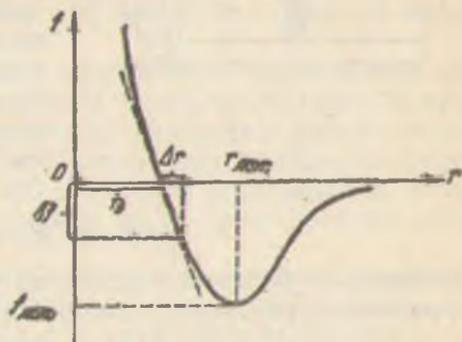


Рис. 3.57.

Общий вид зависимости силы  $f$  от расстояния  $r$  приведен на рис. 3.57 (аналогичном рис. 3.2, а). При  $r=r_0$  силы отталкивания и притяжения уравниваются друг друга, и атомы твердого тела при отсутствии внешних сил располагаются на расстояниях  $r_0$  друг от друга.

Приложим к обоим концам стержня длины  $l$  и площади поперечного сечения  $S$  растягивающие усилия  $F$  (рис. 3.58). Под действием этих сил стержень удлинится на некоторую величину  $\Delta l$ . При этом расстояния между соседними атомами вдоль оси стержня возрастут на некоторую величину  $\Delta r$  (рис. 3.57). Удлинение всей цепочки атомов  $\Delta l$  связано с  $\Delta r$  очевидным соотношением

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta r}{r_0} \quad (48.1)$$

При смещении атомов из своих положений равновесия между ними возникнут силы притяжения  $\Delta f$ , причем  $|\Delta f|$  возрастает с увеличением  $\Delta r$ . При малых растяжениях, пока  $\Delta r \ll r_0$  (а следовательно, и  $\Delta l \ll l$ ), сложную криволинейную зависимость  $\Delta f$  от  $\Delta r$  можно практически заменить прямой линией (пунктир на рис. 3.57). Тогда  $\Delta f$  будет прямо пропорционально  $\Delta r$ , и с учетом знака можно написать:

$$\Delta f = -K \Delta r, \quad (48.2)$$

где  $K$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от конкретного вида кривой взаимодействия для атомов данного твердого тела.

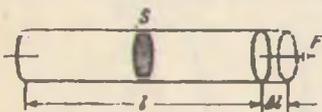


Рис. 3.58.

Мысленно расчленим рассматриваемый стержень на ряд параллельных цепочек атомов. Число этих цепочек, приходящихся на единицу поперечного сечения стержня, обозначим через  $n_0$ . Тогда во всем поперечном сечении будет действовать суммарная сила притяжения

$$\sum \Delta f = -K \Delta r n_0 S. \quad (48.3)$$

Величина  $\Delta r$  будет возрастать до тех пор, пока эта сила не уравновесит растягивающее усилие  $F$ , т. е.

$$F = -\sum \Delta f. \quad (48.4)$$

Отсюда, учитывая (48.1), получим:

$$F = K n_0 \Delta r S = K n_0 r_0 \frac{\Delta l}{l} S. \quad (48.5)$$

Обозначим

$$K n_0 r_0 = E. \quad (48.6)$$

Тогда из (48.5) и (48.6) следует, что

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}. \quad (48.7)$$

Соотношение (48.7) выражает так называемый закон Гука: *относительное удлинение* ( $\Delta l/l$ ) *прямо пропорционально приложенному напряжению* (т. е. растягивающему усилию на единицу площади  $F/S$ ).

Коэффициент пропорциональности  $E$  носит название модуля растяжения, или модуля Юнга. Для

Если величина  $E$  достигает  $2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$ .

Из (48.7) следует также, что

$$E = \frac{F}{S} \text{ при } \frac{\Delta l}{l} = 1,$$

т. е. модуль упругости численно равен напряжению, которое нужно приложить к образцу, чтобы увеличить его длину вдвое, если бы, конечно, закон Гука соблюдался до столь больших удлинений. По самому смыслу вывода, однако, очевидно, что применимость этого закона ограничена условием малости относительных удлинений:

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{\Delta l}{l} \ll 1. \quad (48.8)$$

При  $r = r_0$  кривая зависимости  $f$  от  $r$  непрерывна и имеет одинаковый наклон касательной по обе стороны от этой точки. Поэтому соотношение (48.7) остается справедливым и при сжатии стержня ( $\Delta l < 0$  и  $F < 0$ ), с тем же самым значением модуля  $E$ .

При удлинении атомных цепочек расстояния между атомами вдоль цепочек возрастают. При этом изменяется взаимодействие между соседними цепочками, и они несколько сближаются друг с другом. Поэтому при растяжении стержня его поперечные размеры несколько уменьшаются, в первом приближении также прямо пропорционально напряжению  $F/S$ .

Величина модуля упругости  $E$  различна для разных веществ. В монокристаллах вследствие их анизотропии значение  $E$  существенно зависит от направления деформации по отношению к осям кристаллической решетки. В поликристаллических телах отдельные микрокристаллы ориентированы самым беспорядочным образом и модуль  $E$  для всего тела имеет вполне определенное среднее значение, одинаковое для всех направлений.

Из рис. 3.57 видно, что при больших деформациях удлинение  $\Delta r$  растет быстрее, чем сила  $\Delta f$ , что обуславливает отклонения от закона Гука. При некотором вполне определенном расстоянии  $r_{\text{макс}}$  между атомами сила притяжения принимает наибольшее возможное значение  $|f_{\text{макс}}|$ . При дальнейшем растяжении тела силы взаимодействия между его атомами и а д а ю т и уже не могут уравновесить приложенную нагрузку. Тело при этом р а з р ы в а е т с я. Из графика тогда можно определить максимальное разрывное напряжение, которое может выдержать данное тело:

$$\sigma_{\text{разр}} = \frac{F_{\text{макс}}}{S} = |f_{\text{макс}}| n_0. \quad (48.9)$$

Для простейших ионных кристаллов величина  $\sigma_{\text{разр}}$  была вычислена теоретически. Опыт, однако, показал, что разрыв кристалла наступает при значениях  $\sigma_{\text{разр}}$  раз в 400 меньших, чем теоретически вычисленные. Причина такого резкого понижения прочности реальных тел по сравнению с теоретической была объяснена А. Ф. Иоффе.

На поверхности твердого тела всегда имеются микроскопические трещинки, неоднородности и другие дефекты кристаллической решетки.

Рассмотрим такую трещинку площадью  $\Delta S$ . При растяжении с напряжением  $\sigma = \frac{F}{S}$  на долю поверхности трещинки приходится сила  $\sigma \Delta S$ . Как видно из рис. 3.59, силы, приложенные к трещинке, не уравниваются, поскольку действуют на разные ее поверхности. Таким образом, у края трещинки сверх напряжения  $\sigma$  действуют еще силы  $\sigma \Delta S$ , стремящиеся расширить трещинку.

Как показывает расчет, у краев микроскопических трещин могут возникать очень большие силы, приводящие к разрыву твердого тела. Поэтому современная технология обработки деталей машин уделяет столь большое внимание свойствам поверхности деталей.

Для проверки этого предположения А. Ф. Иоффе поставил следующий опыт. Кристалл калийной соли был погружен одним концом в воду (рис. 3.60). Вода непрерывно растворяла поверхностный слой кристалла, содержащий микротрещины. В результате растворения поперечное сечение участка образца, погруженного в воду, сильно уменьшалось. Когда к такому растворяющемуся кристаллу был подвешен значительный груз, то образец разорвался не в тонком месте, а в широком сечении на воздухе, где оставался нарушенный поверхностный слой. При таком непрерывном растворении поверхностного слоя удалось измерить прочность кристалла на разрыв, близкую к теоретической.

За последние десятилетия в технику стали широко внедряться органические аморфные вещества, построенные из гигантских молекул с молекулярным весом порядка  $10^4$ — $10^6$  кг/кмоль, так называемые полимеры. При определенных условиях некоторые органические молекулы могут связываться друг с другом химическими валентными силами в длинные цепочки или в плоские и пространственные образо-

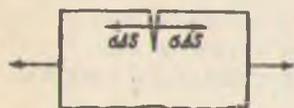


Рис. 3.59.

ваний, как говорят, полимеризоваться. К таким высокополимерным соединениям принадлежат, например, каучук, целлюлоза, белки.

Особенно важным техническим свойством полимеров является их способность выдерживать огромные обратимые удлинения (до 1000 % от первоначального размера) при сравнительно небольших нагрузках.

Причиной подобной высокоэластичной деформации является возможность длинных молекул полимера сворачиваться в клубки и распрямляться при нагрузке. Как показал П. П. Кобеко, высокоупругая деформация зависит от температуры и скорости приложения нагрузки. С понижением температуры такая деформация осуществляется лишь при медленном приложении нагрузки; если же нагрузку прикладывать быстро, то полимеры деформируются слабо и часто претерпевают хрупкий излом.

Многообразный арсенал исходных естественных и синтетических органических соединений позволяет создавать полимеры с самыми разнообразными свойствами. Существуют и применяются в технике полимеры более прочные (в определенных интервалах температур), чем сталь.

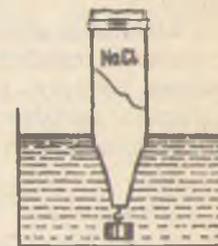


Рис. 3.60.

#### § 49. Тепловое движение в твердых телах

При абсолютном нуле температуры атомы твердого тела располагаются в определенных положениях равновесия в пространстве. Потенциальную энергию атомов в этих положениях равновесия условно считают равной нулю.

С ростом температуры атомы начинают колебаться около своих положений равновесия. При малом смещении атома из положения равновесия в произвольном направлении  $x$  на него, согласно (48.2), действует квазиупругая сила

$$f = -Kx. \quad (49.1)$$

Потенциальная энергия смещенного атома

$$u = \frac{Kx^2}{2}. \quad (49.2)$$

Кинетическая энергия его равна  $\frac{mv^2}{2}$ , а полная энергия

$$\epsilon_{\text{полн}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}. \quad (49.3)$$

При колебании атома происходит непрерывный переход его кинетической энергии в потенциальную и обратно. При данной температуре  $T$  средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии колебательного движения равны друг другу и по теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы (см. гл. VIII, § 33) составляют:

$$\frac{mv_x^2}{2} = \frac{Kx^2}{2} = \frac{1}{2} kT. \quad (49.4)$$

Колеблющийся атом в твердом теле обладает тремя степенями свободы и может совершать колебательные движения по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Средняя энергия колебательного движения одного атома в кристалле поэтому равна

$$\bar{\varepsilon} = 3 \left( \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT \right) = 3kT \quad (49.5)$$

и на один килограмм-атом вещества составляет:

$$E = N_0 \bar{\varepsilon} = 3n_0 kT = 3RT, \quad (49.6)$$

где  $N_0$  — число Авогадро.

Количество теплоты, необходимое для нагревания одного килограмм-атома твердого тела, т. е. его теплоемкость, согласно (49.6) равно

$$C = \frac{dE}{dT} = 3r \approx 25 \text{ кдж/кг-атом} \cdot \text{град}. \quad (49.7)$$

Соотношение (49.7) было сначала установлено на опыте и носит название закона Дюлонга и Пти. В таком виде оно справедливо для одноатомных кристаллических решеток. Для более сложных решеток следует учитывать возможность колебаний всех элементов решетки.

Для пояснения этого рассчитаем теоретически удельную теплоемкость каменной соли. Молекулярный вес  $\text{NaCl } \mu = 23 + 35,5 = 58,5 \text{ кг/кмоль}$ . Сле-

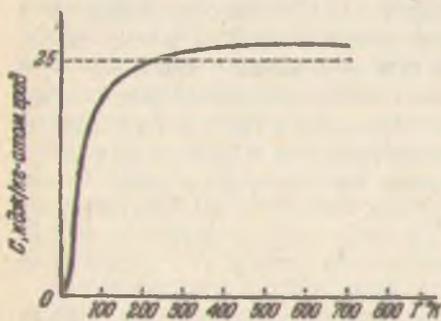


Рис. 3.61.

довательно, в 1 кг содержится  $\frac{1}{\mu} = 0,0171 \text{ кмоль NaCl}$ . Однако в узлах решетки  $\text{NaCl}$  расположены не целые молекулы, а

порознь ионы  $\text{Na}^+$  и ионы  $\text{Cl}^-$ , колеблющиеся независимо друг от друга. Поэтому теплоемкость 1 кмоль соли равна не 25 дж/град, а вдвое больше. Следовательно,  $C_{\text{уд}} = 0,0171 \text{ кмоль/кг} \times$

$$\times 50 \text{ кдж/кмоль} \cdot \text{град} = 0,85 \text{ кдж/кг} \cdot \text{град}.$$

С понижением температуры начинается постепенное «вымораживание» колебательных степеней свободы (см. гл. VIII, § 33) и теплоемкость твердых тел постепенно уменьшается, стремясь к нулю при  $T \rightarrow 0$ , как это изображено на рис. 3.61.

Возрастание амплитуды тепловых колебаний атомов является причиной расширения твердых тел при нагревании. На рис. 3.62 приведен примерный график зависимости потенциальной энергии взаимодействия соседних атомов  $U$  от расстояния между их

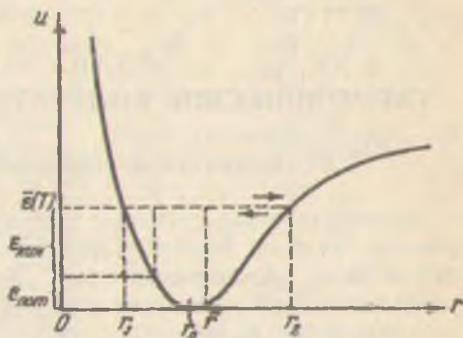


Рис. 3.62.

центрами  $r$ , соответствующий графику рис. 3.57 для сил. Пунктиром на этом рисунке показан уровень полной энергии взаимного колебания атомов при данной температуре  $\epsilon(T)$ .

При изменении взаимного расстояния от  $r_1$  до  $r_2$  происходит непрерывный переход кинетической энергии в потенциальную и обратно. Как видно из рисунка, вследствие несимметричности кривой  $U(r)$ , среднее расстояние между соседними атомами при данной температуре

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

больше, чем  $r_0$ , и возрастает с ростом  $T$ . Относительное удлинение тела  $\frac{r - r_0}{r_0} = \frac{\Delta l}{l}$  растет примерно пропорционально  $T$ :

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha T, \quad (49.8)$$

где  $\alpha$  — так называемый коэффициент линейного расширения твердого тела, имеющий обычно порядок  $10^{-5} \text{ град}^{-1}$ .

## ЧАСТЬ IV КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

---

### ГЛАВА XIII ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

#### § 50. Кинематика гармонического колебания

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике. Качание маятника часов, волны на воде, переменный электрический ток, свет, звук являются примерами колебаний различных физических величин. При движении маятника колеблется координата его центра тяжести. В случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Эти два процесса качественно совершенно различны по своей физической природе. Однако количественные закономерности этих процессов имеют между собой очень много общего.

Основные характеристики колебательных процессов мы изучим сначала на примере механических колебаний материальной точки. Ранее мы уже познакомились с другими типами механических движений — поступательным и вращательным. Материальная точка  $M$ , обладающая одной степенью свободы и движущаяся вдоль некоторой линии, может с течением времени сколько угодно удаляться от своего исходного положения; такое движение называется чисто поступательным. В противоположность этому колебательным мы будем называть такое движение, когда точка  $M$  не выходит за пределы какого-либо отрезка  $KL$  на этой линии и многократно проходит через одни и те же положения внутри  $KL$ .

Если, кроме того, существует такой промежуток времени  $T$ , что каждый раз спустя время  $T$  все движение точки  $M$  в точности повторяется, то колебание мы назовем периодическим. Промежуток времени  $T$ , в конце которого точка оказывается в том же положении и движется с той же скоростью, как и в его начале, называется

периодом колебания. Простейшим случаем периодического колебания будет так называемое гармоническое колебательное движение, к рассмотрению которого мы и перейдем.

Представим себе произвольную точку  $D$ , равномерно вращающуюся по окружности радиуса  $A$  против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$  радианов в секунду (рис. 4.1). Уравнение движения точки  $D$  примет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (50.1)$$

где  $\varphi$  — угол поворота подвижного радиуса  $OD$  относительно неподвижного  $OK$ , а  $\varphi_0$  — начальное значение угла  $\varphi$  в момент времени  $t=0$ .

По мере того как точка  $D$  будет вращаться по окружности от  $K$  к  $L$  и, далее, снова к  $K$ , проекция точки  $D$  на диаметр  $LK$  — точка  $M$  — будет двигаться вдоль отрезка  $KL$  от од-

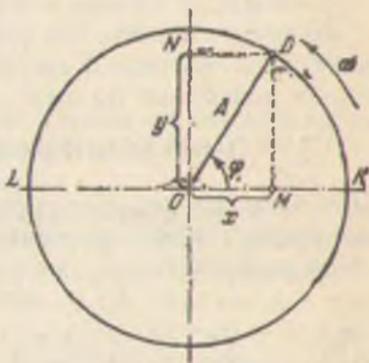


Рис. 4.1.

ного из его концов к другому и обратно, т. е. будет совершать колебательное движение. Обозначим расстояние  $OM$  этой точки от центра через  $x$ . Тогда уравнение движения точки  $M$  примет вид

$$x = A \cos \varphi = A \cos (\omega t + \varphi_0). \quad (50.2)$$

Выбор начального момента отсчета времени совершенно произволен. Мы можем выбрать этот момент так, что  $\varphi_0$  будет равно нулю. При этом уравнение гармонического колебания (50.2) примет вид

$$x = A \cos \varphi = A \cos \omega t. \quad (50.3)$$

В дальнейшем воспользуемся тем обстоятельством, что добавка  $\varphi_0$  в аргумент косинуса не меняет характера движения, а означает лишь изменение начального момента в отсчете времени.

Функция  $\cos \omega t$  является простейшей периодической функцией от времени с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Действительно, спустя промежуток времени  $T$  функция  $\cos \omega t$  примет значение

$$\cos \omega(t + T) = \cos \omega \left( t + \frac{2\pi}{\omega} \right) = \cos (\omega t + 2\pi),$$

равное своему первоначальному значению  $\cos \omega t$ . Таким образом, точка  $M$  совершает периодическое колебание. Подобное простейшее периодическое колебание, при котором смещение  $x$  меняется со временем по закону косинуса (или синуса, что безразлично, так как одну из этих функций можно перевести в другую изменением  $\varphi_0$  или, что то же, изменением начального момента времени), называется гармоническим колебанием.

Нетрудно видеть, что проекция точки  $D$  на вертикальный диаметр, т. е. точка  $N$  на рис. 4.1, также совершает гармоническое колебание по закону

$$y = A \sin \varphi = A \sin \omega t = A \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (50.4)$$

(Легко сообразить, что гармоническое колебательное движение будет также совершать и проекция точки  $D$  на любую прямую, проходящую или не проходящую через  $O$ ).

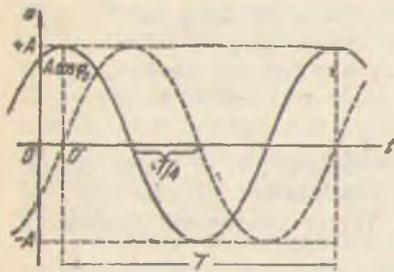


Рис. 4.2.

На рис. 4.2 приведен график зависимости  $x$  от  $t$  по уравнению (50.2). На графике отмечена точка  $O'$  — другое начало отсчета времени  $t$ , при котором  $\varphi$  принимает нулевое значение, а уравнение колебания приобретает более простой вид (50.3). Поскольку  $\cos \varphi$  меняется в пределах от  $+1$  до  $-1$ , то смещение  $x$  точки  $M$  от центра колебаний  $O$  находится в пределах

$$-A \leq x \leq +A.$$

Максимальная величина этого смещения  $|x|_{\text{макс}} = A$  называется амплитудой колебания.

Аргумент  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ , стоящий под знаком косинуса и определяющий, таким образом, долю (равную  $\cos \varphi$ ), которую смещение  $x$  составляет от максимального, называется фазой колебания или, коротко, фазой.

Величина  $\varphi_0$  есть соответственно начальная фаза колебания. Сопоставляя (50.4) с (50.3), мы видим, что колебание точки  $N$ , изображенное на рис. 4.2. пунктиром, отстает по фазе от колебаний точки  $M$  на  $\frac{\pi}{2}$ , т. е. по времени на четверть периода  $\frac{T}{4}$  (поскольку весь период  $T$ , как мы видели выше, соответствует изменению фазы на  $2\pi$ ).

Величина  $\omega$ , характеризующая угловую скорость вращения точки  $D$ , называется угловой частотой гармонического колебания точки  $M$ . Она связана с периодом  $T$  и обычной частотой  $\nu$  (числом колебаний за единицу времени)

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (50.5)$$

соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (50.6)$$

В электро- и радиотехнике для измерения частот  $\nu$  принята единица, носящая название герца:

1 герц = 1 колебание в секунду.

При гармоническом колебательном движении смещение точки  $M$  меняется со временем по закону (50.3). Дифференцируя это выражение по  $t$ , находим скорость движения точки  $M$  в любой момент времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t = \omega A \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (50.7)$$

Дифференцируя (50.7) еще раз по  $t$ , найдем ускорение колеблющейся точки:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos \omega t = \omega^2 A \cos (\omega t + \pi). \quad (50.8)$$

Мы видим, что скорость и ускорение колеблющейся точки меняются со временем также по гармоническому закону, с той же самой угловой частотой  $\omega$  и периодом

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Амплитуда скорости равна  $v_0 = \omega A$ , а амплитуда ускорения  $w_0 = \omega^2 A$ .

Колебания скорости опережают колебания смещения по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  (или отстают

по фазе на  $\frac{3\pi}{2}$ , что одно

и то же), а колебания ускорения опережают колебания смещения по фазе на  $\pi$  (или отстают на  $\pi$ ), как это изображено на рис. 4.3.

Подробнее соотношение между этими величинами мы рассмотрим в следующем параграфе, в котором в круг рассматриваемых величин войдут также и силы.

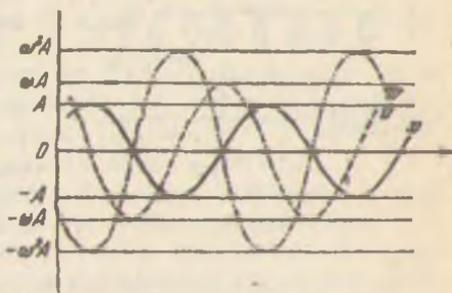


Рис. 4.3.

## § 51. Упругие и квазиупругие силы

Выясним, какими силами вызываются гармонические колебания, воспользовавшись законами динамики.

По второму закону динамики сила  $F$ , действующая на материальную точку, численно равна произведению массы точки  $m$  на ее ускорение  $\omega$ . Подставляя в это соотношение найденное выше выражение  $\omega$  для гармонического колебания, определим значение силы

$$F = m\omega = -m\omega^2 A \cos \omega t, \quad (51.1)$$

действующей на точку в каждый момент времени. Сравнивая (51.1) с (50.3), замечаем, что

$$F = -m\omega^2 x = -kx, \quad k = m\omega^2, \quad (51.2)$$

т. е. сила, вызывающая гармоническое колебание, обладает двумя важными свойствами:

1) величина силы прямо пропорциональна смещению точки от центра колебания;

2) направление силы противоположно направлению смещения, т. е. сила всегда направлена к центру (при  $x > 0$   $F < 0$ , а при  $x < 0$   $F > 0$ ).

Кроме того, из (51.2) следует, что при  $x=0$  и  $F=0$ , т. е. в центре колебания  $O$  на точку  $M$  сила не действует. Иными словами, центр колебаний является положением равновесия точки  $M$ .

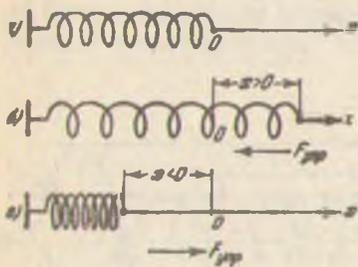


Рис. 4.4.

Рассмотрим движение материальной точки массы  $m$  под действием упругой пружины (рис. 4.4), массой которой мы пренебрежем. Точка движется вдоль горизонтальной оси  $x$  так, что сила тяжести не оказывает влияния на ее движение. Точка  $O$  на оси  $x$  отвечает положению равновесия материальной точки, т. е. положению, при котором пружина не деформирована (рис. 4.4, а).

При смещении точки вправо на величину  $x$  (рис. 4.4, б) на нее будет действовать сила  $F$  упругости растянутой пружины, равная по закону Гука

$$F_{\text{уп}} = -kx < 0. \quad (51.3)$$

Эта сила направлена влево ( $F < 0$ ), т. е. к положению равновесия — точке  $O$ .

При смещении материальной точки влево от  $O$  на величину  $x$  (рис. 4.4,  $\theta$ ) на нее будет действовать сила

$$F_{\text{упр}} = -kx > 0, \quad (51.4)$$

направленная вправо ( $F > 0$ ), так как  $x < 0$ .

Следовательно, при любых смещениях от положения равновесия, т. е. от точки  $O$ , материальная точка будет находиться под воздействием силы, направленной к  $O$  и равной

$$F_{\text{упр}} = -kx. \quad (51.5)$$

Сравнивая (51.2) и (51.5), видим, что материальная точка  $m$ , будучи выведена из состояния равновесия, начнет совершать гармонические колебания.

Коэффициент  $k$  есть коэффициент упругости, или жесткость пружины. Численно он равен силе, которую нужно приложить к пружине, чтобы растянуть (или сжать) пружину на единицу длины.

Частоту колебаний материальной точки  $m$  под действием пружины (массой которой мы пренебрегаем) с коэффициентом упругости  $k$  можно получить из (51.2) и (51.5):

$$m\omega^2 = k,$$

т. е.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (51.6)$$

что отвечает периоду  $T$ , равному

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (51.7)$$

*Частота и период не зависят от амплитуды колебаний и определяются только величинами  $m$  и  $k$ . Амплитуда и фаза колебания (или начальная фаза  $\varphi_0$ ) определяются из начальных условий, при которых возникло движение.*

Аналогичное гармоническое движение возникает и при движении груза  $m$ , подвешенного на пружине. Отличие от рассмотренного выше случая состоит в том, что положение равновесия будет иметь место при несколько растянутой пружине. Упругая сила растяжения в положении равновесия в точности равна силе тяжести и, будучи направлена вверх, уравновешивает ее:

$$F_{\text{упр}} = -mg.$$

Чтобы материальная точка  $m$  совершала гармоническое колебательное движение, не обязательно, чтобы на нее дей-

ствовали именно упругие силы. Достаточно, чтобы сила при смещении от положения равновесия менялась согласно закону (51.2):

$$F = -kx.$$

Если сила, не являющаяся по своей природе упругой, подчиняется закону (51.2), то она называется «квазиупругой силой» (по-латыни «quasi» означает «как бы»).

Рассмотрим теперь движение материальной точки под действием квазиупругой силы (рис. 4.5) детальнее. Пусть в начальный момент материальная точка смещена в положение  $A$  и скорость ее равна нулю (рис. 4.5, а):

$$x = A \cos \omega t \Big|_{t=0} = A,$$

$$v = -\omega A \sin \omega t \Big|_{t=0} = 0,$$

$$w = -\omega^2 A \cos \omega t \Big|_{t=0} = -\omega^2 A.$$

В этом положении на точку действует квазиупругая сила  $F$ , равная

$$F = -kA = -m\omega^2 A$$

и направленная влево. Под действием этой силы точка  $m$  будет двигаться влево с ускорением

$$w = \frac{F}{m} = -\omega^2 A.$$

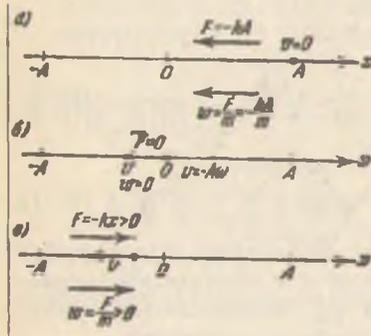


Рис. 4.5.

В течение первой четверти периода  $(0 < t < \frac{T}{4})$  будет происходить ускоренное движение точки от  $A$  к  $O$ . Скорость ее будет возрастать по величине вплоть до точки  $O$ , достигая в ней значения:

$$v = -\omega A \sin \omega t \Big|_{t=\frac{T}{4}} = -\omega A \sin \omega \frac{2\pi}{4\omega} = -\omega A \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$= -\omega A = -v_0$$

при

$$x = A \cos \omega t \Big|_{t=\frac{T}{4}} = A \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

В точке  $O$  сила и ускорение обращаются в нуль (рис. 4.5, б), а затем, после ее прохождения, меняют знак. В течение второй четверти периода, т. е. в пределах

$$\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2},$$

материальная точка движется влево ( $v < 0$ ) от  $O$  к  $-A$  под действием силы, направленной вправо ( $F > 0$ ) (рис. 4.5, в). Движение происходит замедленно, и в точке  $x = -A$  материальная точка останавливается с тем, чтобы двинуться от  $x = -A$  к  $x = 0$  и, далее, к  $x = +A$ . Это движение происходит так же, как и разобранные выше движение от  $x = A$  к  $x = 0$  и  $x = -A$ , а затем весь цикл повторяется.

Таким образом, при движении  $m$  от крайних точек к  $O$  скорость и сила (ускорение) параллельны и скорость возрастает, достигая наибольшего значения в положении равновесия. При удалении от точки равновесия скорость и сила (ускорение) направлены противоположно, движение происходит замедленно и скорость обращается в нуль в крайних точках.

Эта физическая картина количественно описывается формулами § 50. Сдвиг фаз между координатой  $x$  и скоростью  $v$  на  $\pi/2$  отвечает тому, что при  $x = 0$  скорость  $v$  достигает максимума и, наоборот, при  $|x|_{\text{макс}}$  скорость обращается в нуль. Сдвиг фаз между координатой  $x$  и ускорением  $\psi$  на  $\pi$  означает, что координата и ускорение всегда имеют противоположные знаки.

Гармоническое колебательное движение играет исключительно большую роль в природе и технике. Поэтому следует хорошо представлять себе все этапы этого движения, описанные выше, смысл фазовых отношений координат, скоростей и ускорений (сил).

Рассмотрим примеры гармонического колебательного движения под действием квазиупругих сил.

**Пример 1.** Математический маятник. Маятник стальных часов представляет собой тяжелый груз, который укреплен на длинном тонком стержне, подвешенном шарнирно на горизонтальной оси  $C$ , перпендикулярной к

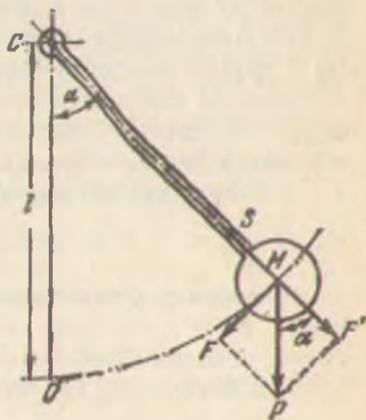


Рис. 4.6.

стержню (рис. 4.6). В первом приближении пренебрежем массой стержня и будем считать всю массу груза  $m$  сосредоточенной в его центре тяжести  $M$ . Подобная система, состоящая из материальной точки  $m$ , подвешенной на невесомом твердом стержне или на нерастяжимой нити длины  $CM=l$ , называется математическим маятником.

Отклоним стержень на некоторый угол  $\alpha$  от вертикали и разложим мысленно силу веса  $P=mg$ , действующую на точку  $M$ , на две составляющие  $F'$  и  $F$ , направленные соответственно вдоль стержня и перпендикулярно к нему. Сила  $F'=P \cos \alpha$  будет растягивать стержень и уравнивается реакцией стержня  $S$ . Неуравновешенной останется составляющая силы  $F=P \sin \alpha$ . Таким образом, на точку  $M$  всегда будут действовать две силы  $P$  и  $S$ , направленные под углом  $\pi - \alpha$  друг к другу. Равнодействующей этих сил по правилу параллелограмма будет сила  $F=P \sin \alpha$ , направленная по касательной к дуге  $OM$  в сторону точки  $O$ .

Когда груз придет в наинизшее положение, т. е. в точку  $O$ , силы  $P$  и  $S$  полностью уравниваются. Таким образом, точка  $O$  есть положение равновесия груза  $m$ . Обозначим отрезок дуги  $OM$ , характеризующий путь, пройденный точкой  $M$  из положения равновесия, через  $x$  и будем считать угол  $\alpha$  и величину  $x$  положительными при отклонении стержня с грузом вправо от вертикали и отрицательными — при отклонении влево. Угол  $\alpha$ , измеряемый в радианах, численно равен отношению длины дуги  $x$ , на которую он опирается, к радиусу окружности  $l$ . Тогда (с учетом направления) сила  $F$ , действующая на точку  $M$ , может быть выражена в виде

$$F = -P \sin \alpha = -mg \sin \frac{x}{l}. \quad (51.8)$$

Для малых углов отклонения от вертикали, не превышающих  $5-6^\circ$ , т. е. при  $\alpha < 0,1$ , с достаточной степенью точности можно заменить  $\sin \alpha$  углом  $\alpha$  (в радианах). Тогда сила, действующая на точку  $M$ , будет равна

$$F \approx -\frac{mg}{l} x. \quad (51.9)$$

Сравнивая (51.9) с (51.5), видим, что результирующая сила  $F$ , действующая на математический маятник, находящийся в поле земного тяготения, является квазиупругой силой с коэффициентом  $k = \frac{mg}{l}$ . Поэтому математический маятник будет совершать гармоническое колебательное движение по закону (50.4) с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (51.10)$$

Амплитуда колебаний  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  будут зависеть от начального смещения и начальной скорости точки  $M$ .

Реальный, так называемый физический маятник при малых углах отклонения от вертикали будет также совершать гармонические колебания. Его центр тяжести (уже не совпадающий с центром тяжести груза) будет двигаться по дуге окружности по закону (50.4) с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}, \quad (51.11)$$

где  $m$  — масса всей системы,  $l$  — расстояние от центра тяжести маятника до оси вращения  $C$  и  $I$  — момент инерции системы относительно оси  $C$ .

При больших углах отклонения маятник будет совершать более сложное периодическое колебательное движение. Период этого негармонического колебания зависит от амплитуды колебания и возрастает с ее увеличением.

Из соотношения (51.10) следует, что период колебаний математического маятника не зависит от его массы  $m$ , а определяется лишь его длиной  $l$  и ускорением силы тяжести  $g$  в данной точке земного шара. Период колебаний физического маятника зависит также не от массы маятника  $m$ , а от распределения масс в нем, характеризуемого отношением  $\frac{I}{m}$ .

В последнем случае можно ввести так называемую приведенную длину физического маятника

$$l_s = \frac{I}{ml}, \quad (51.12)$$

т. е. длину эквивалентного математического маятника, имеющего тот же период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_s}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (51.13)$$

Из (51.13) можно определить приведенную длину секундного маятника, т. е. маятника, время качания которого  $\frac{T}{2}$  составляет 1 сек в данной точке земного шара. И наоборот, зная эквивалентную длину данного маятника  $l_s$  и перенося его с места на место, можно определять величину ускорения поля земного тяготения. Поскольку Земля является не точным шаром, а эллипсоидом, несколько сплюснутым у полюсов, и, кроме того, на тела действуют центробежные силы,

особенно заметные на экваторе, то величина  $g$  зависит от географической широты и на полюсе несколько больше, чем на экваторе, как это видно из приводимой ниже таблицы.

Положение точки	Географическая широта, °	Ускорение земного тяготения, $м/сек^2$
Полюс	90	9,83219
Москва	53	9,81558
Экватор	0	9,78049

Таким образом, если перенести на полюс стенные часы, выверенные на экваторе, то период колебаний маятника уменьшится и часы начнут уходить вперед на 3,8 минуты за сутки. Чтобы эти часы на полюсе шли верно, придется увеличить  $l$ , т. е. передвинуть груз маятника вдоль стержня дальше от оси. Подобным передвижением груза следует регулировать ход часов с маятником и в других случаях. Если часы отстают, то надо передвигать груз ближе к оси, и наоборот.

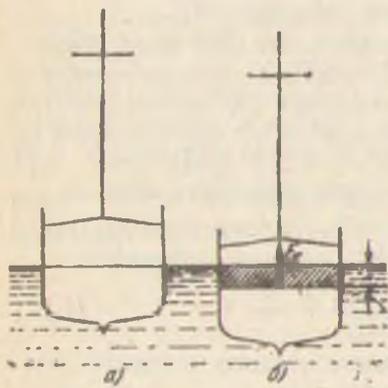


Рис. 4.7.

Пример 2. Вертикальные колебания корабля. Плавающий корабль погружается в воду до уровня, при котором по закону Архимеда вес вытесненной им воды равен весу корабля с грузом (рис. 4.7, а). Если по каким-либо внешним причинам, например при волнах, корабль случайно погрузится глубже на величину  $x$  (рис. 4.7, б), то подъемная сила увеличится и корабль будет выталкиваться к поверхности. Избыточная сила  $F_x$ , действующая на погруженный корабль, будет равна весу воды в объеме, заштрихованном на рис. 4.7, б. Обозначая плотность воды через  $\rho$ , получаем:

$$F_x = -g\rho Sx, \quad (51.14)$$

где  $S$  — площадь горизонтального сечения корабля на уровне воды. Сравнивая (51.14) и (51.15), видим, что на погруженный корабль действует квазиупругая сила с коэффициентом

том  $k = g\rho S$ , и, следовательно, он будет совершать вертикальные гармонические колебания по закону (50.4) с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g\rho S}}, \quad (51.15)$$

где  $m$  — масса корабля. Для грузового судна водоизмещением 10 000  $t$  и площадью горизонтального сечения на уровне ватерлинии  $S = 1000 \text{ м}^2$  период вертикальных колебаний составит  $T \approx 6 \text{ сек.}$

## § 52. Энергия гармонических колебаний

При гармоническом колебательном движении кинетическая энергия колеблющейся материальной точки непрерывно меняется. Меняется и потенциальная энергия взаимодействия между точкой и окружающими телами, приводящего к появлению квазиупругих сил.

Это есть энергия не самой материальной точки (например, это — энергия деформированной пружины или энергия взаимодействия маятник — Земля). Однако для нас это обстоятельство не существенно. Мы можем не интересоваться природой возникновения сил взаимодействия, зная, что сила квазиупруга, и зная коэффициент  $k$ . Как сила, так и потенциальная энергия при этом определяются положением колеблющейся точки  $m$ , т. е. ее координатой  $x$ .

Поэтому мы будем в дальнейшем как кинетическую, так и потенциальную энергию относить к самой колеблющейся материальной точке  $m$ .

Полная энергия механического движения есть сумма кинетической и потенциальной энергий. Согласно (50.7) кинетическая энергия гармонически колеблющейся точки массы  $m$  равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2 \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (52.1)$$

Пользуясь известным тригонометрическим равенством

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi),$$

перепишем выражение для кинетической энергии в таком виде:

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}} &= \frac{m\omega^2 A^2}{4} \left[ 1 + \cos 2 \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 + \cos (2\omega t + \pi)]. \end{aligned} \quad (52.2)$$

Таким образом,  $E_{кин}$  меняется со временем также по гармоническому закону, но по сравнению с координатой  $x$  — с удвоенной частотой. Кроме того, значение  $E_{кин}$  колеблется не около нуля, но около  $\frac{m\omega^2 A^2}{4}$ , меняясь от нуля до  $\frac{m\omega^2 A^2}{2}$ , как это показано на рис. 4.8. Физически удвоение частоты колебания  $E_{кин}$  по сравнению с  $x$  объясняется просто. Кинетическая энергия дважды за период обращается

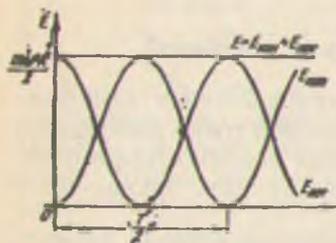


Рис. 4.8.

в нуль в точках, где  $v=0$ , — крайних точках движения. Максимального значения  $E_{кин}$  достигает также два раза за период при прохождении точки  $x=0$ , где скорость  $v$  максимальна. В силу того, что в (52.1) скорость входит во второй степени, знак ее не существен, т. е.  $E_{кин}$  принимает последовательно при движении от  $-A$  к  $A$  те же значения, что и при движении от  $A$  к  $-A$ .

При вычислении потенциальной энергии квазиупругих сил условимся отсчитывать ее от положения равновесия, т. е. положим, что при  $x=0$   $E_{пот}=0$ . Тогда потенциальная энергия в точке  $x$  будет численно равна работе квазиупругой силы, совершенной при перемещении из положения равновесия в данную точку и взятой с обратным знаком:

$$E_{пот} = - \int_0^x F_{кв-упр} dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Подставляя вместо  $x$  его значение по уравнению (50.3), получим окончательно:

$$E_{пот} = \frac{kA^2 \cos^2 \omega t}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2 \omega t = \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 + \cos 2\omega t]. \quad (52.3)$$

Следовательно, потенциальная энергия  $E_{пот}$  меняется с частотой  $2\omega$  и в тех же пределах, что и  $E_{кин}$ , но со сдвигом фазы относительно  $E_{кин}$  на  $\pi$ . График изменения  $E_{пот}$  со временем приведен на том же рис. 4.8.

Найдем теперь полную энергию  $E$  материальной точки  $m$ , совершающей гармоническое колебательное движение с час-

той  $\omega$  и амплитудой  $A$  (напомним, что мы условились  $E_{\text{пот}}$  также относить к точке  $m$ ):

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} [\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t] = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad (52.4)$$

так как по известному тригонометрическому соотношению сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же угла всегда равна единице.

Таким образом, полная энергия гармонически колеблющейся точки есть величина постоянная и пропорциональная квадрату амплитуды колебаний  $A^2$  (см. рис. 4.8). В процессе движения происходит непрерывный переход кинетической энергии в потенциальную и обратно, но сумма их остается при этом постоянной. Когда точка проходит через положение равновесия  $x=0$ , потенциальная энергия обращается в нуль, а кинетическая максимальна и равна полной. Когда же колеблющаяся точка доходит до одного из своих крайних положений  $x = \pm A$ , то  $v=0$ , кинетическая энергия обращается в нуль, а потенциальная максимальна и равна полной.

### § 53. Сложение гармонических колебаний

Пусть на материальную точку действует несколько различных упругих или квазиупругих сил. Каждая из этих сил заставляет точку совершать гармоническое колебательное движение. При одновременном воздействии этих сил точка будет одновременно участвовать во всех этих движениях. С такими примерами сложения гармонических колебаний мы встретимся ниже, в гл. XIV, при рассмотрении суперпозиции и интерференции волн.

Различные звуковые волны, одновременно воспринимаемые нашим ухом, заставляют барабанную перепонку принимать участие сразу в нескольких гармонических колебаниях. Электромагнитные волны, приходящие одновременно от ряда радиостанций, возбуждают в приемном контуре электрические колебания различных частот. Аналогичным образом складываются и различные синусоидальные переменные токи, подходящие по нескольким проводам к точке разветвления цепи, например при соединении потребителей трехфазного переменного тока на «звезду».

При сложении двух гармонических колебаний одного направления получается колебательное движение, вообще говоря, более сложное. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Сложение колебаний с одинаковыми периодами. Пусть материальная точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях с одинаковым перио-

дом  $T$  и угловой частотой  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , но с различными начальными фазами и амплитудами:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \varphi_1 = A_1 \cos (\omega t + \varphi_{10}) \\ x_2 &= A_2 \cos \varphi_2 = A_2 \cos (\omega t + \varphi_{20}) \end{aligned} \right\} \quad (53.1)$$

Тогда результирующее смещение точки равно алгебраической сумме обоих смещений:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos (\omega t + \varphi_{10}) + A_2 \cos (\omega t + \varphi_{20}). \quad (53.2)$$

Поскольку  $x_1$  и  $x_2$ , спустя промежуток времени  $T$ , возвращаются к своим первоначальным значениям, то их сумма  $x$

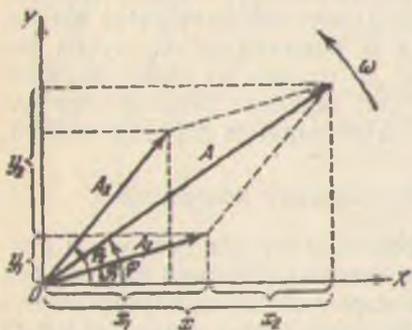


Рис. 4.9.

представляет собой периодическое колебательное движение с тем же самым периодом  $T$ . Для более точного анализа характера этого движения построим так называемую векторную диаграмму (рис. 4.9).

Отложим от центра  $O$  два вектора длиной  $A_1$  и  $A_2$  соответственно под углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  к оси абсцисс. Проекции этих векторов на горизонтальную ось будут согласно (53.1) давать значения смещений  $x_1$  и  $x_2$ .

При вращении обоих векторов против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  проекции  $x_1$  и  $x_2$  их концов на ось  $Ox$  будут совершать гармонические колебания по закону (53.1). Заметим теперь, что в силу равенства угловых скоростей  $\omega$  обоих векторов угол между ними  $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$  со временем меняться не будет:

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \text{const.} \quad (53.3)$$

Построим на том же чертеже по правилу параллелограмма вектор  $A$ , являющийся геометрической суммой обоих векторов  $A_1$  и  $A_2$ . Как видно, проекция этого вектора  $x$  на горизонтальную ось равна алгебраической сумме проекций исходных векторов  $x_1 + x_2 = x$ . При вращении исходных векторов диагональ  $A$ , как и весь параллелограмм, будет вращаться с той же угловой скоростью  $\omega$ . Следовательно, величина  $x$ , как проекция вектора  $A$ , равномерно вращающе-

гося с угловой скоростью  $\omega$ , будет меняться со временем по закону

$$x = A \cos \varphi = A \cos (\omega t + \varphi_0), \quad (53.4)$$

т. е. будет представлять собой гармоническое колебание с тем же самым периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  этого результирующего гармонического колебания находятся из простых тригонометрических соотношений

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y_{10} + y_{20}}{x_{10} + x_{20}} = \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}}, \quad (53.5)$$

а по теореме косинусов, учитывая также (53.3), имеем:

$$\begin{aligned} A^2 &= |\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_{20} - \varphi_{10}). \end{aligned} \quad (53.6)$$

Если не требуется слишком большая точность, то амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  сложного колебания могут быть измерены прямо по графику. Для этого следует построить рис. 4.9 для момента  $t=0$ , т. е. вектор  $\mathbf{A}_1$  провести так, чтобы он составлял с осью  $OX$  угол  $\varphi_{10}$ , вектор  $\mathbf{A}_2$  — соответственно угол  $\varphi_{20}$ , и, сложив их, измерить угол  $\varphi_0$  между вектором  $\mathbf{A}$  и осью  $OX$ .

Итак, при сложении двух гармонических колебаний одинакового периода, направленных по одной и той же прямой, результирующее движение есть также гармоническое колебание с тем же периодом и с амплитудой  $A$ , лежащей в пределах

$$|A_2 - A_1| \leq A \leq A_2 + A_1. \quad (53.7)$$

Если фазы обоих колебаний одинаковы,  $\varphi_2 = \varphi_1$ , т. е.  $\varphi_{20} = \varphi_{10}$ ; то амплитуды обоих колебаний просто складываются:

$$A = A_1 + A_2.$$

Если  $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pi$ , то говорят, что оба колебания находятся в противоположной фазе. При этом  $\cos (\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \cos \pi = -1$  и  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_2 - A_1)^2$ , т. е. амплитуда результирующего колебания равна абсолютному значению разности амплитуд обоих исходных колебаний:  $A = +\sqrt{(A_2 - A_1)^2} = |A_2 - A_1|$ .

В частности, если складываются два колебания с одинаковыми амплитудами  $A_1 = A_2$ , но противоположными фазами, то  $A = 0$ , т. е. оба колебания взаимно уничтожаются.

Аналогично можно поступать при сложении многих коле-

баний одинаковой частоты (периода), но различных амплитуд и начальных фаз. Если

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20}),$$

.....

$$x_n = A_n \cos(\omega t + \varphi_{n0}),$$

то суммарное движение

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

можно легко получить графически, как это показано на рис. 4.10; для этого нужно лишь измерить величины амплитуды  $A$  и угла  $\varphi_0$ . Этим способом сложения колебаний равной частоты широко пользуются в электротехнике.

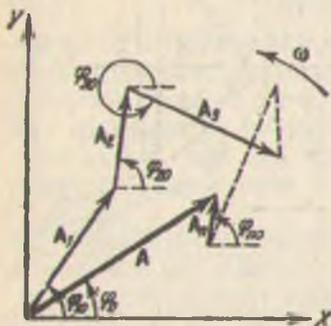


Рис. 4.10.

**Пример 2.** Сложение колебаний с близкими периодами. Пусть точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях с близкими частотами вдоль одного направления. Для простоты мы рассмотрим случай равных нулю начальных фаз  $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$  и равных по величине амплитуд:

$$x_1 = A \cos \varphi_1 = A \cos \omega_1 t$$

и

$$x_2 = A \cos \varphi_2 = A \cos \omega_2 t, \quad (53.8)$$

где  $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$ . Тогда, пользуясь известными тригонометрическими тождествами, результирующее колебание можно привести к виду

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = \\ &= 2A \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right). \end{aligned} \quad (53.9)$$

Получившееся выражение есть произведение двух колебаний. Первый множитель,  $\cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$ , имеет частоту, среднюю для двух слагаемых колебаний, т. е. близкую к их частотам. Второй же множитель,  $\cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$ , обладает (в силу условия близости  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) малой частотой, т. е.

большим периодом. Это позволяет рассматривать результирующее движение (53.9) как почти гармоническое колебание со средней угловой частотой  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  и медленно меняющейся амплитудой

$$2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right). \quad (53.10)$$

Подобное колебание изображено на рис. 4.11. Пунктирные линии представляют график медленно меняющейся по уравнению (53.10) амплитуды. Сплошной линией на том же

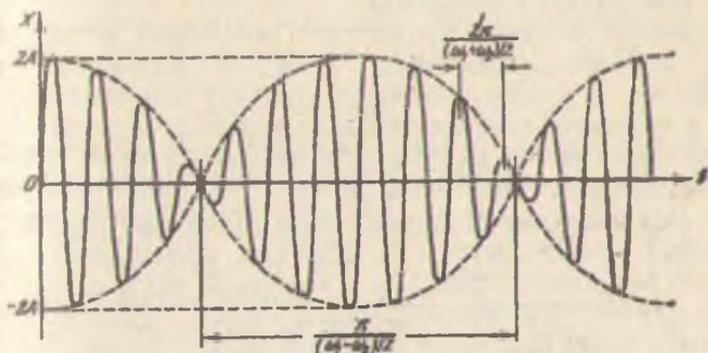


Рис. 4.11.

чертеже представлен график результирующего колебания (53.9). В те моменты времени, когда фазы обоих исходных колебаний  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  близки друг другу, колебания складываются и амплитуда результирующего колебания приближается к  $2A$ . Так как частоты исходных колебаний несколько отличаются друг от друга, то, спустя некоторый промежуток времени, близкий к  $\pi/(\omega_1 - \omega_2)$ , одно из колебаний отстанет от другого по фазе примерно на  $\pi$ , фазы этих колебаний станут почти противоположными и амплитуда результирующего колебания уменьшится почти до нуля. Такое постепенное возрастание и убывание амплитуды результирующего колебания носит название б е и т а.

Если периоды и частоты обоих исходных колебаний соизмеримы, т. е. можно найти два таких целых числа  $n_1$  и  $n_2$ , что

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (53.11)$$

то через промежуток времени

$$\tau = (n_1 - n_2) \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = (n_1 + n_2) \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} \quad (53.12)$$

аргументы обоих сомножителей в (53.9) изменятся на целое (хотя и различное) число раз  $2\pi$ , их произведение примет то же значение, что и в начале этого промежутка. Величина  $\tau$  тогда явится периодом результирующего колебания.

Если же частоты обоих колебаний несоизмеримы, то результирующее колебание будет непериодическим.

Явлением биений пользуются настройщики музыкальных инструментов, которые судят по исчезновению биений о точном совпадении частоты струны и эталонного источника звука (например, камертона).

Сложение близких по частоте колебаний используется также в радиоприемниках, носящих название гетеродина. В ряде случаев производить усиление поступающих в приемник слабых сигналов высокой частоты неудобно. Это имеет место, например, в радиолокаторах, работающих на длине волны  $\sim 0,1$  м (т. е. на частоте порядка  $3 \cdot 10^9$  гц). Обычные радиолампы на такой частоте работать не могут. Кроме того, и в обычных приемниках сигнал проходит несколько каскадов усиления, и настраивать каждый из них на принимаемую частоту очень неудобно. Чтобы устранить эту трудность, в приемник вводят генератор высокой частоты (и малой мощности) — гетеродин, частота которого, при необходимости, может меняться. Принимаемые приемником колебания складываются с колебаниями гетеродина, частота которого подбирается так, чтобы в результате получились биения более низкой частоты. При изменении частоты входящих колебаний меняется и частота колебаний гетеродина так, чтобы частота биений оставалась одной и той же. В результате последующие каскады усиления работают на постоянной частоте, т. е. не требуют настройки. Таким образом, гетеродины позволяют принимать сигналы сверхвысокой частоты, на которые обычные радиолампы не рассчитаны, и чрезвычайно облегчают настройку радиоприемников обычного диапазона частот.

**Пример 3.** Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний имеет место при наложении лучей поляризованного света и в ряде других случаев. С помощью электронного луча и электронно-лучевой трубке (осциллографе), совершающего колебания в горизонтальном и вертикальном направлениях, удается изучать весьма быстрые колебательные процессы.

Рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты:

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_{10}), \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi_{20}). \end{aligned} \right\} \quad (53.13)$$

Чтобы получить уравнение траектории, нужно из (53.13) исключить время  $t$ . Мы сделаем это не в общем случае, но для нескольких наиболее простых значений начальных фаз.

а) Положим

$$\varphi_{20} = \varphi_{10}. \quad (53.14)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{A}{B}, \\ y &= \frac{B}{A}x. \end{aligned} \right\} \quad (53.15)$$

Траектория представляет прямую линию — диагональ прямоугольника со сторонами  $2A$  (по оси  $X$ ) и  $2B$  (по оси  $Y$ ), показанную на рис. 4.12, а.

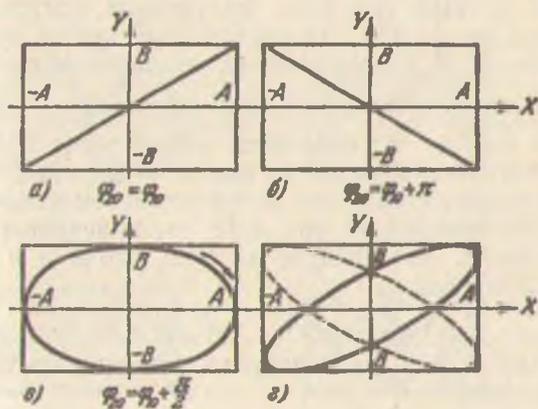


Рис. 4.12.

б) Пусть

$$\varphi_{20} = \varphi_{10} + \pi. \quad (53.16)$$

В этом случае косинусы будут отличаться знаком, и мы аналогично получим:

$$y = -\frac{B}{A}x, \quad (53.17)$$

т. е. траектория будет другой диагональю прямоугольника (рис. 4.12, б).

в) Пусть

$$\varphi_{20} = \varphi_{10} + \frac{\pi}{2}. \quad (53.18)$$

Траекторию легко найти следующим приемом:

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_{10}),$$

$$\frac{y}{B} = \cos\left[\left(\omega t + \varphi_{10}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin(\omega t + \varphi_{10}).$$

Возводя в квадрат и складывая почленно, получим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_{10}) + \sin^2(\omega t + \varphi_{10}),$$

или

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (53.19)$$

Таким образом, траекторией будет эллипс, показанный на рис. 4.12, в. При  $A=B=a$  траектория превращается в окружность радиуса  $a$ . За период этот эллипс будет обходить точку  $M$  в направлении, показанном стрелкой.

г) Легко показать, что при  $\varphi_{20} = \varphi_{10} - \frac{\pi}{2}$  траектория останется той же, но изменится направление обхода.

д) В случае произвольных значений  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{20}$ , точнее, их разности, траектория будет также эллипсом (подобным одному из показанных на рис. 4.12, з), вписанным в тот же прямоугольник. Это следует из того, что  $x$  и  $y$  меняются всегда в пределах

$$-A \leq x \leq A, \quad -B \leq y \leq B.$$

Прямые рис. 4.12, а и б следует рассматривать как вырожденный эллипс.

Таким образом, в случае равных частот суммарное колебание происходит в общем случае по эллипсу. Амплитуды складываемых колебаний равны половинам сторон прямоугольника, в который вписан эллипс, а сдвиг фаз определяет вид эллипса и направление его обхода.

Более сложные кривые получаются при неравных частотах. При этом, если отношение частот (периодов) не является рациональным числом, то кривая будет незамкнутой (не повторяющейся) и с течением времени заполнит собой весь прямоугольник.

В случае рационального отношения частот будут иметь

место различные кривые, вид которых зависит от отношения частот и сдвига начальных фаз. На рис. 4.13 показаны следующие случаи:

а)

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin \omega t, \\ y &= B \sin 2\omega t; \end{aligned} \right\} \quad (53.20)$$

б)

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin \omega t, \\ y &= B \sin \left( 2\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (53.21)$$

(движение происходит вперед и назад по той же траектории);

в) одна из кривых при отношении частот 2 : 3;

г) одна из кривых при отношении частот 3 : 4.

Задавая, например, колебания электронного луча в электронно-лучевой трубке вдоль оси  $X$  с известной частотой и отклоняя его вдоль оси  $Y$  напряжением, частота которого

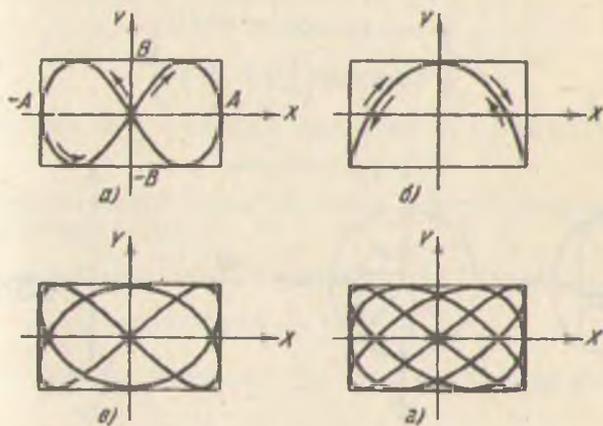


Рис. 4.13.

неизвестна, можно с помощью получаемого изображения кривой (фигуры Лиссажу) определить неизвестную частоту.

Рассмотренные выше примеры показывают, что различные сложные периодические движения могут быть представлены в виде суммы гармонических колебаний разных направлений, частот, амплитуд и начальных фаз.

Так, например, равномерное движение плоскости  $X, Y$  по окружности радиуса  $a$  с угловой частотой  $\omega$  может быть представлено в виде суммы двух гармонических колебаний по осям  $X$  и  $Y$  с одинаковыми амплитудами  $A=B=a$  и частотами  $\omega$ , сдвинутыми по фазе на  $\pm\pi/2$ . В зависимости от знака смещения фазы вращение будет происходить по или против часовой стрелки (см. рис. 4.12,  $b$  и  $z$ ).

В дальнейшем мы используем тот факт, что в результате сложения двух вращательных движений можно получить гармоническое колебание. В качестве примера рассмотрим два вращательных движения по окружности радиуса  $a$  с частотой  $\omega$ , происходящих в противоположных направлениях. Начальные фазы выберем так, чтобы фазы колебаний по оси  $X$  совпадали. Тогда вращательное движение, происходящее против часовой стрелки, описывается формулами

$$\left. \begin{aligned} x' &= a \cos \omega t, \\ y' &= a \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (53.22)$$

а по часовой стрелке —

$$\left. \begin{aligned} x'' &= a \cos \omega t, \\ y'' &= a \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (53.23)$$

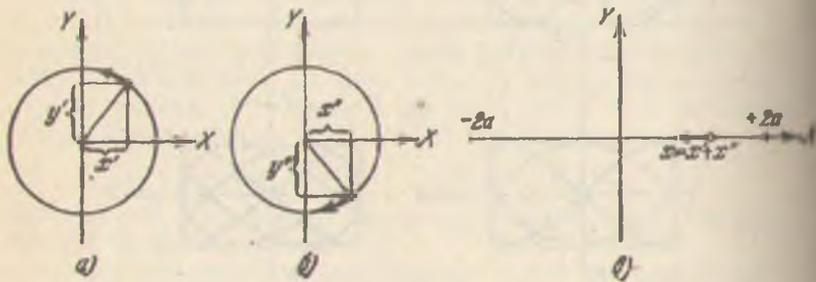


Рис. 4.14.

Складывая эти движения, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + x'' = 2a \cos \omega t, \\ y &= y' + y'' = a \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ a \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (53.24)$$

На рис. 4.14 показаны положения точки, задаваемые для одного и того же момента времени налагающимися друг на друга вращательными движениями [рис. 4.14, *а* соответствует (53.22), а рис. 4.14, *б* — (53.23)]. Из чертежа видно, что смещения  $x'$  и  $x''$  вдоль оси  $X$  складываются, в то время как смещения вдоль оси  $Y$ , будучи равными по величине, противоположны по направлению и в результате сложения взаимно погашаются. Таким образом, результирующее движение, показанное на рис. 4.14, *в*, происходит вдоль оси  $X$ , представляя собой, согласно (53.24), гармоническое колебание частоты  $\omega$  и амплитуды  $2a$ .

Аналогично, подбирая начальные фазы вращательных движений, можно получить результирующее гармоническое колебание вдоль оси  $Y$  или вдоль прямых, составляющих любые углы с осью  $X$ .

Можно также получить гармоническое колебательное движение вдоль любой прямой, складывая равномерное вращательное движение и одномерное колебательное движение. Так, например, при сложении вращательного движения, заданного формулами

$$\left. \begin{aligned} x' &= a \cos \omega t, \\ y' &= a \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (53.25)$$

и колебательного движения вдоль оси  $X$  по формуле

$$x'' = a \cos (\omega t + \pi), \quad (53.26)$$

получаем результирующее движение в виде гармонического колебания вдоль оси  $Y$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + x'' = a \cos \omega t + a \cos (\omega t + \pi) = 0, \\ y &= y' = a \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (53.27)$$

При сложении вращения (53.25) с колебанием вдоль оси  $Y$ :

$$y'' = a \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (53.28)$$

получаем результирующее движение в виде гармонических колебаний вдоль оси  $X$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= x' = a \cos \omega t, \\ y &= y' + y'' = a \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ a \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (53.29)$$

Рассмотренные примеры понадобятся нам при изучении оптики (том III).

#### § 54. Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс

В условиях, когда на тело действует только одна квазиупругая сила, оно будет совершать незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой  $A = \text{const}$ . На реально же движущиеся тела всегда будут действовать со стороны окружающей среды силы трения, препятствующие их движению. На преодоление сопротивления среды, на трение в опорах, на создание волн, на возникновение неупругих деформаций и т. п. будет затрачиваться энергия. Вследствие этого механическая энергия колеблющегося тела будет непрерывно уменьшаться, переходя в другие формы энергии и рассеиваясь в окружающую среду. Согласно (52.4) с уменьшением энергии колебания будет уменьшаться его амплитуда и колебание станет затухающим.

Полная сила  $F$ , действующая на колеблющуюся точку, будет тогда суммой квазиупругой силы  $F_{\text{кв-упр}}$  и силы трения  $F_{\text{тр}}$ . При малых скоростях движения сопротивление обычно пропорционально первой степени скорости и направлено противоположно ей, т. е.

$$F_{\text{тр}} = -rv, \quad (54.1)$$

где  $r$  — коэффициент трения, зависящий от свойств среды, формы и размеров движущегося тела.

Чтобы решить задачу о колебательном движении при наличии трения, мы вернемся к уже разобранным задаче о гармоническом колебательном движении и найдем строгое математическое ее решение.

Заменяя во втором законе динамики ускорение  $\omega$  второй производной от смещения по времени, мы получим основное дифференциальное уравнение движения (одномерного!):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F. \quad (54.2)$$

При наличии одной только квазиупругой силы  $F_{\text{кв-упр}} = -kx$  это уравнение примет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (54.3)$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения материальной точки массы  $m$  под действием квазиупругой силы с коэффициентом «жесткости»  $k$ .

Неизвестная функция  $x(t)$ , характеризующая движение

точки под действием квазиупругой силы, входит в уравнение (54.3) сама и под знаком второй производной. Для решения этого дифференциального уравнения вспомним, что функциями, которые при двукратном дифференцировании превращаются сами в себя с обратным знаком, являются синус и косинус (или показательная функция с чисто мнимым показателем степени). Будем искать решение уравнения (54.3) в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (54.4)$$

с произвольными значениями постоянных  $A$ ,  $\varphi_0$  и  $\omega$ . Введем начальной фазы  $\varphi_0$  мы объединяем синус и косинус в одну функцию, поскольку они отличаются друг от друга только значением этой начальной фазы. Выполняя двукратное дифференцирование выражения (54.4) по  $t$  и подставляя найденные значения  $x$  и  $\frac{d^2x}{dt^2}$  в уравнение (54.3), получаем:

$$-m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -kA \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Поскольку обе части этого равенства можно сократить на  $A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , то, следовательно, оно выполняется при произвольных значениях величин  $A$  и  $\varphi_0$ . Эти постоянные  $A$  и  $\varphi_0$  могут быть любыми, в зависимости от начальных условий движения, а угловая частота  $\omega$  равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (54.5)$$

в соответствии с тем, что было получено раньше.

Таким образом, мы математически доказали высказанное в § 51 утверждение, что если на материальную точку действует квазиупругая сила, то эта точка будет совершать гармоническое колебательное движение по закону (54.4) с угловой частотой, определяемой соотношением (54.5).

Разберем теперь аналогичным методом затухающие колебания при наличии сил трения. Подставляя в (54.2) полное выражение для силы  $F = F_{\text{кв. упр}} + F_{\text{тр}} = -kx - r\dot{x} = -kx - r \frac{dx}{dt}$ , получим:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx,$$

или

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (54.6)$$

— дифференциальное уравнение движения материальной

точки массы  $m$  под действием квазиупругой силы и силы трения.

Не касаясь общих методов решения дифференциальных уравнений, отметим, что в случае уравнения (54.6) искомого функция  $x(t)$  должна обладать следующим свойством: как первая, так и вторая производная по времени от  $x(t)$  должны отличаться от самой функции  $x(t)$  лишь численными множителями. Такой функцией в самом общем случае является показательная функция с комплексным показателем степени или, что то же, произведение показательной функции на синус или косинус. Будем тогда искать решение дифференциального уравнения (54.6) в виде

$$x = A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (54.7)$$

с произвольными значениями постоянных  $A_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\omega$  и  $\alpha$ . Вычисляя первую и вторую производные от выражения (54.7) и подставляя найденные значения  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{d^2x}{dt^2}$  в (54.6), получим, собирая члены суммы, содержащие общие множители:

$$A_0 e^{-\alpha t} \{ [m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k] \cos(\omega t + \varphi_0) + [m2\alpha\omega - r\omega] \sin(\omega t + \varphi_0) \} = 0.$$

Множители  $A_0 e^{-\alpha t}$  здесь можно сократить, так как  $A_0$  — постоянная, а  $e^{-\alpha t}$  ни при каком конечном значении  $t$  не обращается в нуль. Оставшееся выражение будет равно нулю при любых значениях  $t$ , если порознь будут равны нулю коэффициенты при  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  и  $\sin(\omega t + \varphi_0)$ . Действительно, с изменением  $t$  в некоторый момент времени, например  $t'$ , функция  $\sin(\omega t' + \varphi_0)$  обратится в нуль. При этом  $\cos(\omega t' + \varphi_0)$  будет равен  $\pm 1$ . Следовательно, это равенство будет удовлетворяться, если коэффициент при  $\cos(\omega t' + \varphi_0)$  равен нулю. Аналогично доказывается необходимость равенства нулю множителя при  $\sin(\omega t + \varphi_0)$ . Таким образом, получаем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k &= 0, \\ m2\alpha\omega - r\omega &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\alpha = \frac{r}{2m} \quad (54.8)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \quad (54.9)$$

Постоянные  $A_0$  и  $\varphi_0$ , как и в предыдущем примере, могут быть любыми, в зависимости от начальных условий движения.

Выражение (54.7), в котором значения  $\alpha$  и  $\omega$  определены из (54.8) и (54.9), является общим решением уравнения затухающих колебаний (54.6). Оно отличается от чисто гармонического колебания (54.4) тем, что амплитуда колебания

$$A(t) = A_0 e^{-\alpha t} \quad (54.10)$$

является убывающей функцией времени. На рис. 4.15 представлен график зависимости  $x$  от  $t$  для затухающих колебаний, аналитически описываемых (54.7). Пунктиром на этом рисунке изображена зависимость (54.10) амплитуды от времени,

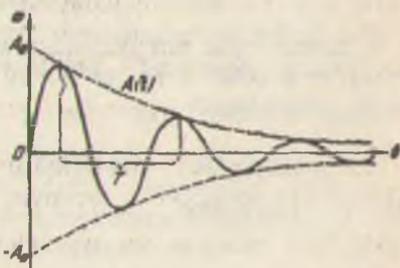


Рис. 4.15.

а сплошной линией — полная зависимость (54.7). Чем больше коэффициент трения  $r$ , тем больше величина  $\alpha$  и показателе степени и тем быстрее амплитуда затухающих колебаний убывает со временем. Напротив, при полном отсутствии трения, когда  $r=0$ , то  $\alpha=0$ ,  $e^{-\alpha t}=e^0=1$ ,  $x=A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , и мы приходим к уже рассмотренному случаю чисто гармонических колебаний с угловой частотой.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

При наличии трения не только убывает со временем амплитуда колебания, но и уменьшается угловая частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad (54.11)$$

где  $\omega_0$  — угловая частота собственных колебаний точки при отсутствии трения.

Соответственно период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \quad (54.12)$$

С увеличением трения период колебаний возрастает, и при

$\alpha = \omega_0$  период становится бесконечным:  $T = \infty$ . При дальнейшем увеличении  $\alpha$  период  $T$  становится мнимым, а движение точки — аperiодическим, как это изображено на рис. 4.16.

Сопоставим  $\alpha < \omega_0$  значения амплитуды в два соседние момента времени, отличающиеся друг от друга на один период, т. е.  $A(t) = A_0 e^{-\alpha t}$  и  $A(t+T) = A_0 e^{-\alpha(t+T)}$ , и разделим первое из этих значений на второе. Тогда получим:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\alpha T} = \text{const}, \quad (54.13)$$

т. е. амплитуда затухающих колебаний за каждый период убывает в одно и то же число раз. Натуральный логарифм этого отношения

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \alpha T = d \quad (54.14)$$

носит название логарифмического декремента затухания.

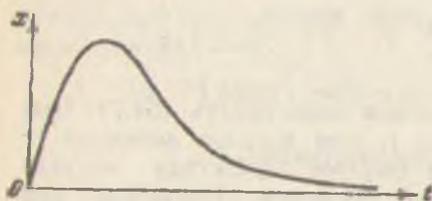


Рис. 4.16.

Материальная точка, на которую действует квазиупругая сила, будучи выведена из положения равновесия  $x=0$ , начнет совершать колебания около этого положения. Из-за наличия сил трения подобные собственные, или, как их иногда называют,

свободные колебания точки всегда будут затухающими.

Для получения незатухающих колебаний необходимо воздействие дополнительной переменной внешней силы, которая подталкивала бы точку то в одну, то в другую сторону и работа которой непрерывно восполняла бы убыль энергии, затрачиваемой на преодоление трения. Подобная переменная сила называется вынуждающей, ( $F_{\text{вын}}$ ), а возникающие под ее действием незатухающие колебания — вынужденными.

Разберем простейший случай вынуждающей силы, меняющейся по закону синуса или косинуса, т. е. положим

$$F_{\text{вын}} = F_0 \cos(\Omega t). \quad (54.15)$$

Здесь  $F_0$  есть амплитуда вынуждающей силы, т. е. максимальное возможное ее значение, а  $\Omega$  — угловая частота колебаний вынуждающей силы. Полная сила, действующая

ни колеблющуюся точку, будет алгебраической суммой квазиупругой силы, силы трения и вынуждающей силы, и дифференциальное уравнение движения (54.2) примет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\Omega t). \quad (54.16)$$

Как известно из курса высшей математики, решение этого уравнения,

$$x(t) = x_{\text{своб}}(t) + x_{\text{вын}}(t), \quad (54.17)$$

представляет собой сумму свободных колебаний  $x_{\text{своб}}(t)$  и вынужденных колебаний  $x_{\text{вын}}(t)$ . Свободные колебания будут происходить с собственной угловой частотой

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$  и довольно быстро затухнут по закону

(54.7). Что же касается вынужденных колебаний, то их частота должна, очевидно, совпадать с частотой вынуждающей силы. Амплитуда этих колебаний должна быть постоянной, поскольку амплитуда вынуждающей силы не меняется со временем.

Поэтому, пренебрегая собственными колебаниями системы, играющими существенную роль лишь в самом начале процесса, мы будем искать решение уравнения (54.16) в виде

$$x = x_{\text{вын}}(t) = A \cos(\Omega t + \Phi) \quad (54.18)$$

с неизвестными заранее амплитудой  $A$  и сдвигом фазы  $\Phi$ .

Продифференцируем выражение (54.18) дважды по времени и подставим найденные значения  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{d^2x}{dt^2}$  в дифференциальное уравнение (54.16). Воспользовавшись известными тригонометрическими тождествами для синуса и косинуса суммы, получим:

$$-m\Omega^2 A [\cos \Omega t \cos \Phi - \sin \Omega t \sin \Phi] =$$

$$= -kA [\cos \Omega t \cos \Phi - \sin \Omega t \sin \Phi] +$$

$$+ r\Omega A [\cos \Omega t \sin \Phi + \sin \Omega t \cos \Phi] + F_0 \cos \Omega t.$$

Приравнявая друг другу коэффициенты, стоящие в обеих частях равенства при синусе и соответственно при косинусе, получаем два уравнения, из которых находятя искомые величины:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + r^2\Omega^2}}, \quad (54.19)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = -\frac{r\Omega}{k - m\Omega^2}. \quad (54.20)$$

Следует ясно представлять себе различие между решениями  $x_{\text{своб}}(t)$  и  $x_{\text{вын}}(t)$ . Функция  $x_{\text{своб}}(t)$  содержит две произвольные постоянные  $A_0$  и  $\varphi_0$ , которые определяются из добавочных условий, например начальных условий движения. Функция же  $x_{\text{вын}}(t)$  не содержит произвольных постоянных. Все входящие в нее величины определяются из самого дифференциального уравнения движения. Поэтому  $x_{\text{вын}}(t)$  не зависит от начальных условий движения. Это значит, что когда в силу затухания  $x_{\text{своб}}$  обратится в нуль, колебательное движение будет определяться только свойствами колеблющейся системы и амплитудой и частотой вынуждающей силы.

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы (54.15) возникают гармонические вынужденные колебания (54.18) с той же частотой  $\Omega$ . Амплитуда вынужденных колебаний согласно (54.19) прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы  $F_0$ , зависит от характеристик свободно колеблющейся точки  $m$ ,  $k$  и  $r$  и, кроме того, является функцией угловой частоты колебаний вынуждающей силы  $\Omega$ . Графики зависимости  $A$  и сдвига фаз  $\Phi$  от  $\Omega$  (для нескольких значений  $r$ ) представлены на рис. 4.17, а и б.

Как видно из этих графиков, характер этих зависимостей существенно различен в трех областях изменения угловой частоты  $\Omega$ .

1) Область малых частот:

$$\Omega \ll \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0. \quad (54.21)$$

В этой области сдвиг фаз  $\Phi$  близок к нулю, а выражение для амплитуды, используя формулы (54.8) и (54.19), можно преобразовать к виду

$$A = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega_0^4}}} = \frac{x_{0\text{остат}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (54.22)$$

В предельном случае, когда  $\Omega = 0$  (при постоянной на-

грузке),  $A = \frac{F_0}{k} = x_{0 \text{ стат}}$ , где  $x_{0 \text{ стат}}$  — статическое смещение точки под действием постоянной силы  $F = F_0$ . При  $0 < \Omega \ll \omega_0$  и малом трении ( $a \ll \omega_0$ ) приближенно получим:

$$x \approx \frac{F_0}{k} \cos \Omega t = \frac{F}{k}, \quad (54.23)$$

т. е. смещение колеблющейся точки почти без искажений

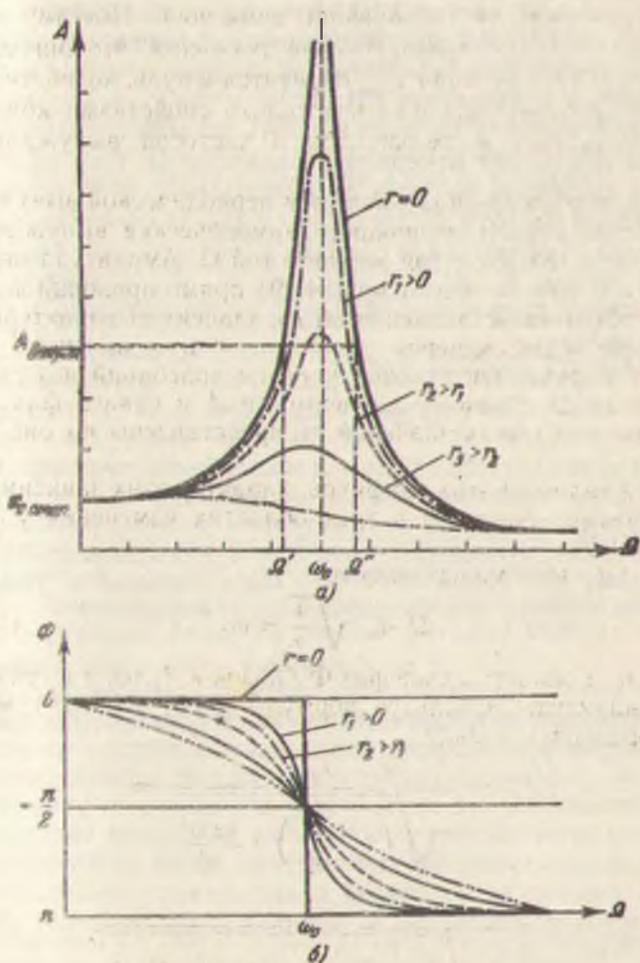


Рис. 4.17

следует за изменением вынуждающей силы. Этот случай представляет практический интерес для измерительной техники. Различные самопишущие приборы для регистрации быстропеременных усилий (например, мембранный индикатор, записывающий давление в быстроходном двигателе) представляют собой системы, на которые действуют упругие или квазиупругие силы, возвращающие систему в положение равновесия после снятия нагрузки. Переменное усилие является для такой системы вынуждающей силой со своей характерной угловой частотой  $\Omega$  (или несколькими угловыми частотами  $\Omega_i$ ). Чтобы вынужденные колебания прибора успевали следовать за изменениями вынуждающей силы, должно выполняться неравенство (54.21), т. е. собственная частота колебаний прибора  $\omega_0$  должна быть во много раз больше частоты изменения измеряемой величины  $\Omega$ . При  $\omega_0 > 10\Omega$  ошибка измерений не будет превышать 1—2%. Увеличение собственной частоты  $\omega_0$  достигается как за счет увеличения жесткости измерительной системы  $k$ , так и за счет уменьшения ее массы  $m$  [из (54.20) следует, что с ростом  $k$  и уменьшением  $m$  величина  $\text{tg } \Phi \rightarrow 0$ , а следовательно, и сдвиг фаз  $\Phi \rightarrow 0$ ].

2. Область высоких частот:

$$\Omega \gg \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0. \quad (54.24)$$

При таких частотах  $\Phi \approx -\pi$  и колебания точки происходят в фазе, противоположной колебаниям вынуждающей силы. Когда смещение положительно, вынуждающая сила отрицательна, и наоборот. Вследствие этого амплитуда вынужденных колебаний не может быть большой и убывает с ростом частоты вынуждающей силы по закону

$$A \approx x_{0\text{стат}} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2. \quad (54.25)$$

Подобный случай также имеет важное практическое значение. Например, для предотвращения воздействия качки корабля на различные приборы их следует подвешивать на сравнительно мягких пружинах и максимально утяжелять. Если при этом частота собственных колебаний системы  $\omega_0$  будет сделана много меньше частоты качки  $\Omega$ , то согласно (54.25) амплитуда колебаний подвешенного прибора будет много меньше амплитуды колебаний точки подвеса.

3. Область резонанса:

$$\Omega \approx \omega_0. \quad (54.26)$$

При частотах колебания вынуждающей силы, близких

к частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний сильно возрастает и начинает во много раз превышать статическое смещение:

$$A_{\text{резон}} \approx x_{0 \text{ стат}} \frac{\omega_0}{2\alpha}. \quad (54.27)$$

Чем меньше коэффициент трения, тем больше эта амплитуда. В пределе,  $A_{\text{резон}} \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при  $\Omega \approx \omega_0$  носит название механического резонанса.

Явления резонанса, как вредные, так и полезные, широко распространены в природе и технике. Когда войсковая часть идет по мосту, то обязательно подается команда идти «не в ногу». Периодические толчки, создаваемые строем солдат при ходьбе «в ногу», могут попасть в резонанс с собственными колебаниями моста и привести к его разрушению. Мало-мощный двигатель, если он плохо уравновешен и при вращении «бьет», может в случае резонанса разрушить или сильно повредить сооружение, на котором он укреплен, и т. п.

При запуске в ход машины вибрация ее деталей будет зависеть от частоты вращения машины. Обозначим через  $A_{\text{допуст}}$  максимальную амплитуду, которая допустима при вибрации данной детали без опасности ее поломки.

Из рис. 4.17, а видно, что при пренебрежимо малом трении ( $r \approx 0$ ) в некоторой области частот  $\Omega$ , заключенной в пределах

$$\Omega' < \Omega < \Omega'',$$

амплитуда колебаний детали становится очень большой и превышает  $A_{\text{допуст}}$ , что грозит аварией машины.

Чем больше трение, тем уже опасная полоса частот, и при достаточно большом трении  $r > r_2$  вся область частот безопасна для работы машины.

Однако добиваться снижения амплитуды вынужденных колебаний машины, увеличивая трение, было бы нелепо. Это не означает, с другой стороны, что машина должна работать всегда в области малых частот

$$\Omega < \Omega'.$$

Следует твердо помнить, что движение

$$x = x_{\text{вын}}(t)$$

устанавливается лишь спустя достаточно большой промежуток времени (по сравнению с периодом колебания  $T$ ) после изменения характера движения, когда  $x_{\text{своб}}$  вследствие наличия трения затухает. Затухание же тем меньше, чем меньше

трение. Следовательно, и при изменении режима работы машины амплитуда вынужденных колебаний устанавливается не сразу. Это означает, что опасная зона частот от  $\Omega'$  до  $\Omega''$  может быть пройдена, если ускорение хода машины (или замедление) не слишком мало. Не следует лишь задерживаться в этой опасной для машины области частот.

С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если частота их совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Вся прикладная акустика и радиотехника, аппараты, воспринимающие звуковые и электрические колебания, основаны на явлениях резонанса.

Возможность поддерживать незатухающие колебания представляет чрезвычайный интерес для техники. Особенно важными и широко применяемыми являются колебательные движения, возникающие и поддерживающиеся за счет постоянного, неколебательного источника энергии. Такие системы называются автоколебательными. Теория автоколебаний разрабатывалась главным образом советскими

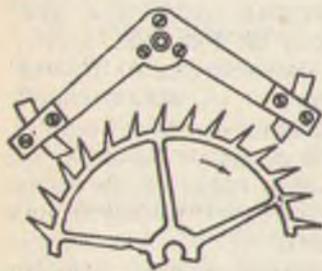


Рис. 4.18.

учеными (Мандельштам, Папалекси, Андронов, Хайкин, Теодорчик, Харкевич и др.). В качестве примеров автоколебательных систем можно привести: часы, в которых постоянные колебания маятника поддерживаются за счет энергии спиральной пружины или поднятого груза; радиопередатчик, энергия колебаний которого поддерживается за счет энергии аккумуляторных батарей; электрический звонок, пневматический молоток и многие другие приборы.

Чтобы колебательное движение не затухало, к колеблющейся системе необходимо подводить энергию для компенсации ее потерь в процессе колебаний. Подвод энергии осуществляется в виде «толчков» в подходящие моменты времени. Толчок должен ускорить, а не замедлить колебание. В автоколебательной системе включение источника энергии для получения нужного толчка производится самой системой, что гарантирует получение толчков в нужные моменты времени.

Рассмотрим, например, работу простейших ственных часов, в которых энергия груза тратится на поддержание колебаний маятника, расходующего свою энергию на трение.

Существуют различные конструкции (так называемые «ходы»), связывающие механизм часов и пружину с маятником. В наиболее распространенном «анкерном ходе» механизм часов и пружина связаны с помощью системы зубчатых колес. Над одним из зубчатых колес (рис. 4.18) находится рычаг — «якорь», к которому прикреплены два зуба специальной формы — «палетты». Якорь укреплен на оси маятника и качается вместе с ним.

При качании маятника палетты по очереди то опускаются, заходя между зубьями шестерни, то поднимаются. При подъеме очередной палетты, когда срез ее соскальзывает с конца зуба шестерни, шестерня под действием пружины поворачивается, и кончик зуба, скользя по нижней, косо срезанной поверхности палетты, подталкивает ее, а вместе с ней — якорь и маятник. В это время противоположная палетта опускается между зубьями, позволяя повернуться шестерне лишь на один зуб. Таким образом, маятник получает непрерывные толчки, поддерживающие его незатухающие колебания. В свою очередь скорость вращения зубчатого колеса, а вместе с ним и всего механизма часов определяется периодом колебания маятника.

Советским ученым принадлежит открытие нового типа резонанса, получившего название параметрического резонанса.

Представим себе, что одна из физических величин («параметров»), определяющая свойства колебательной системы, сама периодически меняется. Таким параметром в случаях маятника или качелей может быть расстояние от оси колебаний до центра инерции системы.

При наличии малых колебаний системы периодическое изменение такого параметра может, при соответствующей частоте, привести к значительному усилению колебаний — это и есть параметрический резонанс.

Если качели совершают малые колебания, то эти колебания можно усилить, поднимаясь и приседая в «такт», т. е. меняя положение центра инерции системы относительно оси колебаний.

## ГЛАВА XIV

### ВОЛНЫ

#### § 55. Распространение колебаний. Уравнение луча

Колеблющееся материальное тело, помещенное в упругую среду, будет увлекать за собой и приводить в колебательное движение прилегающие к нему частицы среды. Последные в свою очередь будут воздействовать на соседние частицы и приводить их также в колебательное движение и т. д. При этом существенно, что увлекаемые частицы среды будут несколько отставать по фазе от ранее приходящих в движение частиц, так как передача колебаний от точки к точке всегда осуществляется с конечной скоростью, характерной для данной среды. Таким образом, колеблющееся материальное тело, помещенное в упругую среду, является источником колебаний, распространяющихся от него в среде во все стороны. Этот процесс распространения колебаний в упругой среде называется *волной*.

Камень, брошенный в воду, вызывает распространение от места падения однократной непериодической поверхностной волны. Тело, гармонически колеблющееся на поверхности воды, вызывает распространяющиеся, периодически повторяющиеся поверхностные волны.

Волна, проходящая через данную точку среды, характеризуется определенным направлением распространения. Область пространства, внутри которой колеблются все частицы среды, называется *волновым полем*. Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц, еще не начавших колебаться, носит название *фронта волны*. *В однородной среде направление распространения перпендикулярно к фронту волны.*

Частица среды, до которой дошел фронт волны, приходит в колебательное движение, амплитуда, частота и направление которого в пространстве зависят от амплитуды, частоты и направления колебаний предшествующих частиц. Направ-

ление движения колеблющихся точек может не совпадать с направлением распространения волны. На рис. 4.19 изображена длинная проволочная спираль, витки которой упруго связаны друг с другом. Возбудим колебания крайнего витка в точке  $O$ . Волна начнет распространяться вдоль спирали по направлению  $OM$ . На рис. 4.19, *а* изображен случай, когда мы заставляем крайний виток колебаться в направлении, перпендикулярном к  $OM$ . В этом случае и для всех последующих витков направление колебаний будет перпендикулярным к направлению их распространения. Подобные волны называются поперечными. На

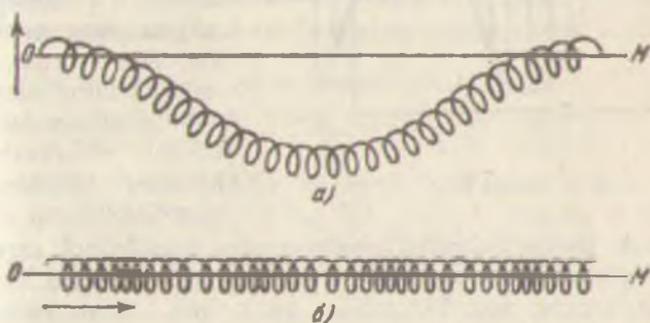


Рис. 4.19.

рис. 4.19, *б* изображен иной случай, когда направление колебаний параллельно направлению распространения. Подобные волны называются продольными.

В случае поперечных волн колебания точек совершаются в плоскости, в которой лежит вектор, указывающий направление распространения волны. Эта плоскость носит название плоскости колебания, или плоскости поляризации, а сама волна называется линейно поляризованной. При данном направлении распространения, очевидно, возможна различная ориентация плоскости поляризации в пространстве. В случае рис. 4.19, *а* эта ориентация совпадает с плоскостью чертежа.

Скорость движения каждой колеблющейся точки непрерывно меняется по величине и зависит, как мы установили выше [формула (50.7)], от амплитуды, частоты и фазы колебаний. В противоположность этому скорость перемещения фронта данной волны в однородной среде постоянна. Она зависит только от свойств среды и характера колебания. Для выяснения основных характеристик распространяющей-

ся волны выведем уравнение, называемое уравнением луча. Рассмотрим простейший случай гармонического колебания, распространяющегося вдоль прямой — оси  $X$  (рис. 4.20). Обозначим смещение колеблющейся точки из положения равновесия через  $y$ . Для продольных волн смещение

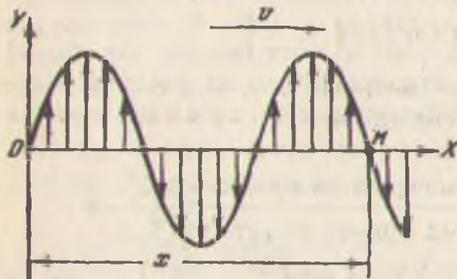


Рис. 4.20.

$y$  параллельно  $x$ , а для поперечных — перпендикулярно к  $x$ .

Для наглядности будем считать, что на рис. 4.20 изображен случай поперечной волны, распространяющейся от точки  $O$  — начала координат, так что показанные смещения отвечают реальным отклонениям колеблющихся точек

от оси  $X$ . Будем считать, что источник колебаний, помещенный в точке  $O$ , в момент времени  $t=0$  начал совершать гармоническое колебательное движение вдоль оси  $Y$  по закону

$$y_0(t) = A \sin 2\pi vt = A \sin \omega t. \quad (55.1)$$

Это колебание источника вызовет гармоническое колебательное движение упруго связанных с ним соседних точек с теми же амплитудой  $A$  и угловой частотой  $\omega$ . Однако последующие точки начнут колебаться с некоторым запозданием, тем большим, чем дальше они находятся от источника. Для точки  $M$ , находящейся на расстоянии  $x$  от источника, начало колебаний отстает от начала колебаний точки  $O$  на промежуток времени  $\tau = \frac{x}{v}$ , где  $v$  — скорость распространения волны в рассматриваемой упругой среде.

Таким образом, смещение точки  $M$ , которое мы обозначим  $y_M$ , в момент времени  $t$  будет равно смещению  $y_0$  точки  $O$  в момент времени  $t'$ , равный

$$t' = t - \tau = t - \frac{x}{v}. \quad (55.2)$$

По амплитуде это смещение будет равно исходному в случае отсутствия затухания, что мы и будем предполагать (для простоты) в дальнейшем. Следовательно,

$$y_M(t) = y_0(t') = A \sin \omega t'. \quad (55.3)$$

Подставляя сюда значение  $t'$  из (55.2), находим, что отклонение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии  $x$  от источника волны, в момент времени  $t$  равно

$$y_M(t) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (55.4)$$

При движении волны справа налево знак скорости меняется:

$$y_M(t) = A \sin 2\pi\nu \left( t + \frac{x}{v} \right). \quad (55.4a)$$

Из (55.4) следует, что смещение  $y$  произвольной точки  $M$  в бегущей волне зависит от двух переменных: времени наблюдения  $t$  и расстояния до источника  $x$ . Если заменить в (55.4) угловую частоту  $\omega$  периодом колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$ , то искомое *уравнение луча* примет вид

$$y = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{vT} \right). \quad (55.5)$$

Из (55.4) или (55.5) следует, что все точки волны колеблются с одинаковой амплитудой  $A$ , одним и тем же периодом  $T$ , но с различными начальными фазами. Так, фаза точки  $M$  отличается от фазы точки, находящейся в начале координат, на

$$\frac{2\pi x}{vT}.$$

Рассмотрим теперь положения различных точек волны в один и тот же момент времени для всей волны. Для этого в формуле (55.4) или (55.5) фиксируем значение  $t$  и рассмотрим  $y$  как функцию от  $x$ . Но согласно (55.4), (55.5)  $y$  есть периодическая функция  $x$ . График  $y$  как функции  $x$  при постоянном  $t$  (рис. 4.20) можно рассматривать как мгновенную фотографию бегущей поперечной волны (в случае продольной волны смещения  $y$  лежат вдоль оси  $X$ ).

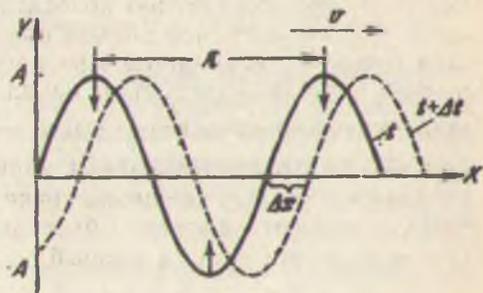


Рис. 4.21.

Для момента времени  $t + \Delta t$  картина будет той же, но только сдвинется вправо на величину  $\Delta x = v\Delta t$ . На рис. 4.21 приведены два последова-

тельных «снимка» волны, сделанные в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$ .

Точки, в которых смещение  $y$  достигает своего максимального значения  $y_{\max} = +A$ , называются гребнями волны, а точки, в которых  $y$  принимает минимальное значение  $y_{\min} = -A$ , — впадинами. Расстояние  $\lambda$  между двумя соседними гребнями или впадинами носит название длины волны. Величина  $\lambda$  есть также расстояние между двумя любыми точками волны, фазы колебаний которых отличаются друг от друга на  $2\pi$ , поскольку при изменении аргумента на  $2\pi$  синус и косинус принимают первоначальные значения.

Согласно (55.4) тогда имеем:

$$\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right) - \left(\omega t - \frac{\omega(x+\lambda)}{v}\right) = 2\pi,$$

что дает после сокращений:

$$\frac{\omega\lambda}{v} = 2\pi \text{ или } \frac{v\lambda}{v} = 1,$$

т. е.

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vT. \quad (55.6)$$

Как видно из рис. 4.21, спустя промежуток времени  $\Delta t$  вся волна переместится на некоторое расстояние  $\Delta x$  вправо, в то время как сами колеблющиеся точки останутся на тех же расстояниях  $x$  от источника. Отношение  $\Delta x/\Delta t$  представляет собой скорость распространения волны  $v$ , которая согласно (55.6) равна

$$v = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda. \quad (55.7)$$

*Скорость волны равна ее частоте (т. е. числу волн, испускаемых источником в секунду), умноженной на длину волны. За время  $T$  волна перемещается на расстояние  $\lambda$ .*

Подставляя выражение (55.7) для скорости волны в (55.5), мы можем привести уравнение луча к симметричному виду:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \quad (55.8)$$

Введенное нами понятие длины волны и полученное уравнение луча остаются в силе и для продольных колебаний. В этом случае под  $x$  следует понимать расстояние от источника до положения равновесия колеблющейся точки  $M$ , а под  $y$  — смещение этой же точки от положения равновесия. Поскольку для продольных волн  $y$  параллельно  $x$ , то

для этого случая расположение координатных осей на графиках рис. 4.20 и 4.21 следует считать чисто условным и не соответствующим их реальному расположению в пространстве.

### § 56. Скорость распространения волн в упругой среде

Как видно из уравнения луча (55.5), при распространении волны в упругом теле смещения соседних колеблющихся точек этого тела в один и тот же момент времени будут различными. Колеблющееся тело непрерывно изменяет свою форму — деформируется. В продольных волнах имеет место деформация попеременного растяжения и сжатия. При поперечных волнах в среде распространяется периодически колеблющаяся деформация сдвига.

Если деформировать (сжать, растянуть или сдвинуть друг относительно друга) крайние точки упругого тела, то эта деформация будет распространяться в теле с некоторой скоростью  $v$ . Для теоретического вычисления величины  $v$  рассмотрим сначала схематически простейший случай передачи деформации через упругий стержень. Пусть в течение короткого промежутка времени  $\Delta t$  ударом молотка мы сообщили этому стержню некоторый импульс (рис. 4.22). За это время точки торца стержня сместятся на некоторое расстояние  $\Delta l$ . Возникшая деформация будет перемещаться от точки к точке, и по стержню побегит волна сжатия. К концу промежутка  $\Delta t$  сжатие охватит участок стержня длиной  $l$ . Отношение  $\frac{l}{\Delta t} = v$  представляет собой скорость распространения волны сжатия по стержню.

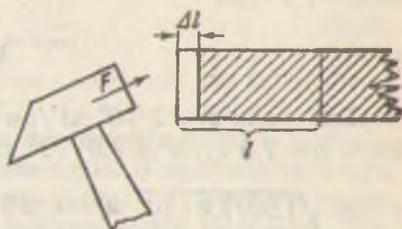


Рис. 4.22.

К концу промежутка  $\Delta t$  все частицы участка стержня длины  $l$  будут двигаться со скоростью  $u = \frac{\Delta l}{\Delta t}$  вправо. Поскольку в начале этого промежутка частицы были неподвижны, то приращение количества движения стержня будет равно  $mu = 0$ , где  $m$  — масса участка  $l$ . Обозначив площадь поперечного сечения стержня через  $S$ , а плотность материала стержня через  $\rho$ , мы получим  $m = \rho Sl$ . По законам динамики, приращение количества движения равно импуль-

су внешней силы  $F$ , действовавшей при ударе на стержень т. е.

$$F\Delta t = \rho S l u. \quad (56.1)$$

С другой стороны, сила, сжимавшая стержень, связана с деформацией  $\Delta l$  сжатого участка  $l$  по закону Гука соотношением

$$F = ES \frac{\Delta l}{l}, \quad (56.2)$$

где  $E$  — модуль упругости. Исключая из уравнений (56.1) и (56.2) силу  $F$ , мы получим:

$$ES \frac{\Delta l}{l} \Delta t = \rho S l \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

и, после сокращений,

$$\frac{E}{\rho} = \left( \frac{l}{\Delta t} \right)^2 = v^2.$$

Отсюда скорость распространения волны сжатия в упругом стержне равна

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (56.3)$$

Для стали  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \approx 1,96 \cdot 10^{11} \text{ кг/м} \cdot \text{сек}^2$ , плотность  $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

и  $v = \sqrt{1,96/7,8 \cdot 10^4} \text{ м/сек} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м/сек} = 5 \text{ км/сек}$ .

Если первоначально стержень растягивать, а не сжимать, то величины  $F$ ,  $\Delta l$  и  $u$  изменят свой знак на обратный, а величина  $v$  останется той же самой. Таким образом, выражение (56.3) дает скорость распространения волн растяжения и сжатия в упругом стержне. Очевидно, с такой же

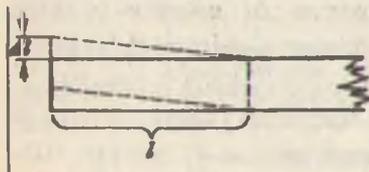


Рис. 4.23.

скоростью по стержню будут распространяться и более сложные импульсы поперечного растяжения и сжатия. Величина  $v$  есть скорость распространения любых продольных волн в стержне, в частности синусоидальных волн.

В случае поперечных волн приведенная схема расчета и уравнение (56.1) остаются в силе, с той разницей, что величины  $F$ ,  $\Delta l$  и  $u$  будут перпендикулярны к направлению распространения (оси стержня), как это изображено на

рис. 4.23. Кроме того, в этом случае мы имеем другой вид деформации стержня — деформацию сдвига. Поэтому уравнение (56.2) следует заменить аналогичным уравнением

$$F = GS \frac{\Delta l}{l}, \quad (56.4)$$

где  $G$  — так называемый модуль сдвига. Скорость распространения поперечных волн  $v_{\text{попер}}$  тогда получится равной

$$v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (56.5)$$

В упругих твердых телах деформации растяжения и сжатия сопровождаются небольшим изменением поперечных размеров тел. У тонких стержней эти изменения поперечных размеров происходят беспрепятственно и скорость распространения продольных волн  $v_{\text{прод}}$  определяется уравнением (56.3). В телах больших поперечных размеров поперечные деформации затруднены и скорость распространения продольных волн равна

$$v_{\text{прод}} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}, \quad (56.6)$$

где  $E'$  — модуль сжатия слоя, близкий по величине к модулю  $E$ .

Изучая скорость распространения продольных и поперечных волн, можно сделать заключения о природе веществ, через которые проходят упругие волны. На этом основаны сейсмические методы геологической разведки. При сильном взрыве от места взрыва через землю бегут волны деформации, скорость которых согласно (56.6) и (56.5) зависит от механических свойств пород. Поэтому, измеряя скорость распространения волн на различных расстояниях от точки взрыва, можно оценить характер залеганий.

Такие же волны деформации бегут по земной коре и от места землетрясения. Поскольку модуль сдвига  $G$  в твердых телах примерно в два раза меньше модуля упругости  $E$ , то продольные волны от места, где произошло землетрясение, бегут в 1,4 раза быстрее поперечных. Поэтому приборы, расположенные на сейсмической станции, регистрируют толчок от происшедшего на расстоянии  $L$  от станции землетрясения дважды, через промежуток времени

$$t = \frac{L}{v_{\text{попер}}} - \frac{L}{v_{\text{прод}}}. \quad (56.7)$$

Измеряя этот промежуток времени между приходом продольных и поперечных волн, можно оценить расстояние от

сейсмической станции до очага землетрясения или места подземного атомного взрыва.

В жидкости и газе деформации сдвига неупруги. Если сдвинуть один слой относительно другого, то в этих случаях, в противоположность твердым телам, сдвинутые слои не стремятся вернуться в исходное состояние. Поэтому в жидкостях и газах могут распространяться только продольные волны — волны расширения и сжатия. Скорость этих волн в жидкости равна

$$v_{ж} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (56.8)$$

где  $K$  — модуль сжатия и  $\rho$  — плотность жидкости.

Скорость распространения продольных волн в газах вычисляется аналогичным образом. В продольной волне при одностороннем растяжении относительное удлинение  $\Delta l/l$  равно относительному увеличению объема  $\Delta V/V$ . Это изменение объема вызывается уменьшением давления —  $\Delta p$  в данном месте, которое играет в этом случае роль напряжения  $\frac{F}{S}$  в твердом теле. Модуль в газе будет равен отношению —  $\Delta p$  к  $\Delta V/V$ , и скорость распространения продольных волн будет равна

$$v_{г} = \sqrt{-\frac{\Delta p}{\Delta V} V^2} = \sqrt{-V^2 \frac{dp}{dV}}, \quad (56.9)$$

поскольку плотность газа  $\rho$  обратна его удельному объему  $V$  (через  $V$  обозначен *удельный объем газа*).

Если колебания плотности газа в продольных волнах происходят очень медленно (с малой частотой), то температура соседних участков, попеременно растянутых и сжатых, быстро выравнивается и деформации растяжения и сжатия происходят изотермически. Тогда по уравнению Менделеева — Клапейрона для одного моля газа

$$p = \frac{RT}{\mu V},$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu$  — молекулярный вес и  $T$  — абсолютная температура газа.

Отсюда

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{изотерм} = -\frac{RT}{\mu V^2} = -\frac{p}{V}. \quad (56.10)$$

Для быстрых колебаний сравнительно высокой частоты сжатие и разрежение происходят адиабатически. По уравнению адиабаты

$$pV^\gamma = \text{const},$$

где  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении  $C_p$  и постоянном объеме  $C_v$  :

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{\text{адиабат}} = -\gamma \frac{RT}{\mu V^2} = -\gamma \frac{p}{V}. \quad (56.11)$$

Соответственно этому изотермические волны в газах будут распространяться со скоростью

$$v_{\text{изотерм}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{pV} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \quad (56.12)$$

и скорость распространения адиабатических волн равна

$$v_{\text{адиабат}} = \sqrt{\gamma pV} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}. \quad (56.13)$$

### § 57. Эффект Доплера

Источник колебаний возбуждает волны в окружающей среде, которые распространяются в ней со скоростью, зависящей только от свойств этой среды (как было показано в § 56), но не зависящей от скорости движения источника по отношению к среде. Однако частота (длина волны) наблюдаемых волн зависит и от скорости источника волн, и от скорости наблюдателя по отношению к среде.

Рассмотрим простейшие случаи, когда источник волн и наблюдатель движутся относительно среды вдоль одной прямой. Координатные оси будем считать неподвижными относительно среды; скорость распространения волн в среде примем равной  $v$ . Скорости источника волн и наблюдателя, движущихся вдоль оси  $X$ , обозначим через  $u_{\text{н}}$  и  $u_{\text{и}}$  соответственно.

Пусть наблюдатель неподвижен, а источник волн  $S$  движется вдоль оси  $X$  вправо со скоростью  $u_{\text{и}} < v$ . Примем, что частота колебаний источника равна  $\nu_0$ . Выберем в качестве

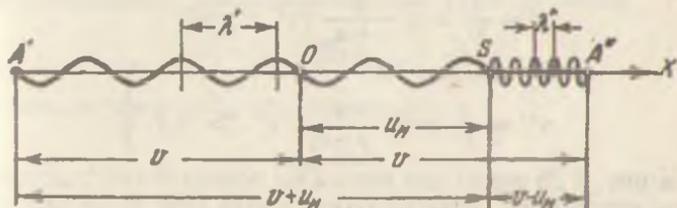


Рис. 4.24.

начала координат точку, в которой источник начал испускать волны в момент времени  $t=0$  (рис. 4.24). Колебания, возникшие в точке  $x=0$  в момент  $t=0$ , будут распространяться вправо и влево, и через секунду фронт волны будет находиться от точки  $O$  на расстоянии  $v$  (справа и слева, как это показано на рис. 4.24), дойдя до точек  $A'$  и  $A''$ . Источник  $S$  испустит за секунду  $\nu_0$  волн, которые справа расположатся в интервале  $SA''$ , а слева —  $SA'$ . Длину волны справа  $\lambda''$  и слева  $\lambda'$  легко получить, разделив длины интервалов на число разместившихся в них волн:

$$\left. \begin{aligned} \lambda'' &= \frac{v - u_n}{\nu_0} = \lambda_0 - \frac{u_n}{\nu_0}, \\ \lambda' &= \frac{v + u_n}{\nu_0} = \lambda_0 + \frac{u_n}{\nu_0}, \end{aligned} \right\} \quad (57.1)$$

где  $\lambda_0 = \frac{v}{\nu_0}$  — длина волны, распространяющейся в среде в случае неподвижного по отношению к ней источника колебаний частоты  $\nu_0$ .

Таким образом, длина волны, распространяющейся в направлении движения источника, уменьшается, в противоположном — возрастает.

Физически этот результат совершенно очевиден. Волна, испускаемая источником в направлении движения, нагоняется самим источником. Испустив гребень волны, источник испустит следующий не на расстоянии  $\lambda_0$  от него, а пройдя за это время вслед за ним путь  $u_n T = \frac{u_n}{\nu_0}$ , т. е. расстояние между гребнями будет  $\lambda_0 - \frac{u_n}{\nu_0}$ . От волн, испускаемых в обратном направлении, источник уходит, «растягивая» тем самым длину волны.

Наблюдатели в точках  $A'$  и  $A''$  определяют соответственно частоты волн:

1) в точке  $A'$

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \nu_0 \frac{v}{v + u_n} \quad (\nu' < \nu_0);$$

2) в точке  $A''$

$$\nu'' = \frac{v}{\lambda''} = \nu_0 \frac{v}{v - u_n} \quad (\nu'' > \nu_0).$$

На рис. 4.25 показаны волны на поверхности, расходящиеся от источника, движущегося вдоль оси  $X$  со скоростью  $u_n < v$ . Полученные формулы верны для наблюдателей, неподвижных относительно среды и расположенных на оси

$X$ , вдоль которой движется источник волн. Изменение частоты в других направлениях (мгновенное, так как для всех остальных точек, кроме расположенных на оси  $X$ , оно меняется со временем) мы вычислять не будем. Читатель при желании с помощью рис. 4.25 сможет вычислить  $\lambda'''$  для любого мгновенного направления  $SA'''$ , образующего угол  $\nu$  с направлением движения источника.

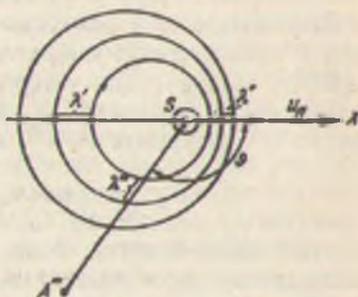


Рис. 4.25.

Пусть теперь источник неподвижен относительно среды, а наблюдатель движется по отношению к источнику со скоростью  $u_n$  (рис. 4.26). Частота источника по-прежнему равна  $\nu_0$ . Если бы наблюдатель был неподвижен, то за секунду мимо него прошло бы  $\nu_0$  волн. Приближаясь к источнику со скоростью  $u_n$ , он встречает на своем пути за секунду столько добавочных волн, сколько их укладывается на отрезке длины  $u_n$ , т. е.

$$\Delta\nu = \frac{u_n}{\lambda_0}.$$

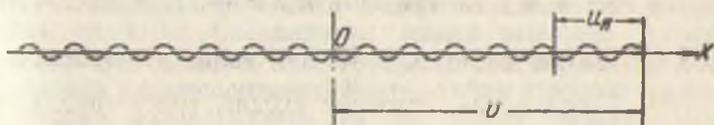


Рис. 4.26.

Следовательно, наблюдаемая им частота равна

$$\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu = \nu_0 + \frac{u_n}{\lambda_0}. \quad (57.3)$$

Подставляя вместо  $\lambda_0$  его значение

$$\lambda_0 = \frac{v}{\nu_0},$$

получаем:

$$\nu_2 = \nu_0 + \nu_0 \frac{u_n}{v} = \nu_0 \frac{v + u_n}{v}. \quad (57.4)$$

Аналогично, при удалении от источника, когда наблюдатель догоняет волны, частота прохождения волн уменьшается. Эту частоту  $\nu_1$  легко получить, заменяя в (57.4) величину  $u_{||}$  на  $-u_{||}$ :

$$\nu_1 = \nu_0 - \nu_0 \frac{u_{||}}{v} = \nu_0 \frac{v - u_{||}}{v}, \quad (57.4a)$$

Выражение для частоты  $\nu$  при движении и источника волн и наблюдателя мы легко получим, комбинируя (57.2) и (57.4), (57.4a). Для этого нужно либо (в 57.2) вместо  $\nu_0$  подставить  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  из (57.4), (57.4a), либо в (57.4), (57.4a) вместо  $\nu_0$  подставить  $\nu'$ ,  $\nu''$  из (57.2). Тогда мы найдем:

$$\nu = \nu_0 \frac{v \pm u_{||}}{v \mp u_{||}}. \quad (57.5)$$

Верхний знак берется, если при движении источника или наблюдателя происходит их сближение; нижний знак — в случае их взаимного удаления.

Изменение частоты волны, воспринимаемой наблюдателем, в зависимости от его скорости по отношению к среде, в которой распространяются волны, а также от скорости источника волн по отношению к среде, носит название эффекта Доплера. Математическое выражение этого эффекта в случае движения вдоль одной прямой дается формулой (57.5).

Заметим, что хотя явление Доплера наблюдается и в оптике, но там оно имеет совершенно иную природу. В случае световых волн среда — носитель колебаний — отсутствует, световые волны материальны сами по себе. В этом случае нельзя, следовательно, вводить скорость источника и скорость наблюдателя (по отношению к среде) — эффект зависит только от их относительной скорости. К этому вопросу мы вернемся в томе III.

## § 58. Интерференция волн

Если через данную область пространства распространяется одновременно несколько волн, то колебания любой точки среды, вызванные каждой волной в отдельности, будут складываться друг с другом по правилам сложения колебаний, рассмотренным в § 53.

Это обстоятельство отнюдь не является очевидным и в ряде случаев может не иметь места. В § 53 рассматривалось движение изолированной материальной точки, для которой результирующее колебание равно сумме отдельных колебаний, в которых она участвует. Сейчас же речь идет

о непрерывной упругой среде, все точки которой взаимосвязаны.

Напомним механизм возникновения колебаний любой частицы упругой среды. Эта частица приходит в движение в результате возникающих напряжений, вызванных деформацией среды (сжатием при продольной волне, сдвигом — при поперечной). Если складывающиеся колебания обладают малой амплитудой, то согласно закону Гука напряжения будут пропорциональны деформациям. Результирующее напряжение в этом случае будет равно сумме составляющих его, а результирующее колебание частицы среды будет равно сумме колебаний, вызванных отдельными волнами.

При больших амплитудах колебаний закон Гука уже не выполняется. Результирующее напряжение приводит к колебаниям, которые отличны от суммы колебаний, вызванных отдельными волнами. Подобные колебания имеют место при распространении так называемых ударных волн, возникающих при взрывах. Скорость ударных волн превышает скорость обычных волн и тем больше, чем больше их амплитуда.

Мы ограничимся здесь рассмотрением волн малой амплитуды. В этом случае *колебание каждой точки среды является суммой независимых колебаний, вызванных каждой из проходящих через данную точку волн в отдельности*. Другими словами, независимые волны, которые в процессе своего распространения одновременно проходят через одну и ту же точку среды, складываются, но друг друга не искажают. Перекрещивающиеся волны, разойдясь, не несут на себе никаких следов происшедшего наложения.

Если это имеет место, то принято говорить, что при наложении волн удовлетворяется принцип суперпозиции.

Принцип суперпозиции фактически впервые был сформулирован известным итальянским ученым эпохи Возрождения Леонардо да Винчи. Простейшей иллюстрацией его является независимое распространение волн по поверхности воды от двух брошенных камешков, изображенное на рис. 4.27. Обе волны в результате наложения не изменились (что не имело бы места в случае ударных волн).

Принцип суперпозиции и вычисленные нами в предыдущем параграфе выражения для скоростей распространения волн выполняются в точности лишь для волн бесконечно малой амплитуды. Для волн конечной амплитуды все эти соотношения являются лишь некоторым приближением к действительности, тем лучшим, чем меньше их амплитуда.

Ниже мы будем рассматривать только простейший слу-

чай синусоидальных волн очень малой амплитуды, подчиняющихся принципу суперпозиции.

Если частоты колебаний двух волн одинаковы и разность фаз не меняется со временем, то такие волны называются когерентными. В результате суперпозиции (наложения) когерентных волн наблюдается явление, носящее на-

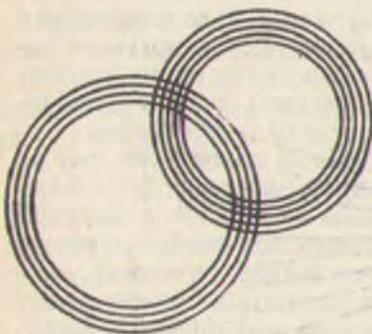


Рис. 4.27

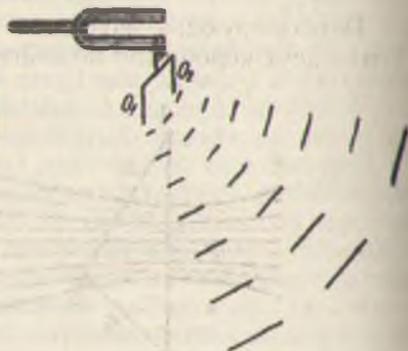


Рис. 4.28.

звание интерференции волн. Для простоты рассмотрим суперпозицию когерентных волн на поверхности воды.

Когерентные волны можно получить, если источники волн связаны и совершают колебания совместно, например, если волны вызываются двумя стерженьками, погруженными в воду в точках  $O_1$  и  $O_2$  и прикрепленными к одной из ножек камертона (рис. 4.28).

Рассмотрим результирующее колебание в фиксированной точке  $M$  (рис. 4.29). Обозначим расстояние  $O_1M$  через  $x_1$  и  $O_2M$  — через  $x_2$ . В рассматриваемом случае не только частоты, но и начальные фазы обоих источников волн совпадают; мы положим начальные фазы равными нулю.

Согласно (55.8) колебание  $y_1$ , вызванное первой волной в точке  $M$ , будет равно

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right), \quad (58.1)$$

и, аналогично, колебание  $y_2$ , вызванное в этой же точке второй волной, составит:

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right), \quad (58.2)$$

где через  $A_1$  и  $A_2$  обозначены амплитуды обеих волн в точке  $M$ .

Рассмотрим важный для дальнейших разделов нашего курса случай, когда источники  $O_1$  и  $O_2$  имеют одинаковую мощность. В этом случае амплитуды обеих волн будут практически одинаковы, если  $x_1$  и  $x_2$  не очень отличаются друг от друга:

$$A_1 = A_2 = A. \quad (58.3)$$

Результирующее колебание  $y$  в точке  $M$  будет равно сумме двух колебаний, вызванных обеими волнами (так как

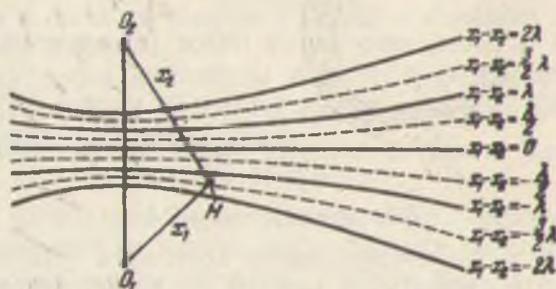


Рис. 4.29.

оба колебания направлены одинаково). Как следует из (58.1), (58.2), (58.3), эти колебания будут отличаться лишь фазами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  приходящих в точку  $M$  волн, поскольку эти фазы зависят от расстояний  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\varphi_1 = -2\pi \frac{x_1}{\lambda}, \quad \varphi_2 = -2\pi \frac{x_2}{\lambda}.$$

Следовательно, смещение  $y$  в точке  $M$  будет равно

$$y = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right).$$

Вынося общий множитель  $A$  и используя формулу для суммы двух синусов, находим:

$$\begin{aligned} y &= 2A \cos \left( 2\pi \frac{x_1 - x_2}{2\lambda} \right) \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right) = \\ &= B \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right), \end{aligned} \quad (58.4)$$

где амплитуда результирующего колебания  $B$  имеет вид

$$B = 2A \cos \left( 2\pi \frac{x_1 - x_2}{2\lambda} \right). \quad (58.5)$$

В выражении (58.4) множитель, зависящий от времени,

показывает, что  $y$  будет гармоническим колебанием с тем же периодом  $T$ , что и для источников (начальная фаза  $y$  для нас интереса сейчас не представляет).

Весьма существенно, что амплитуда  $B$  суммарного колебания  $y$  зависит от разности расстояний точки  $M$  от источников.

Рассмотрим два предельных случая.

1) Пусть разность хода от источников до  $M$  равна целому числу длин волн:

$$x_1 - x_2 = n\lambda, \quad (58.6)$$

где через  $n$  обозначено любое целое (положительное или отрицательное) число:

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots \quad (58.7)$$

Во всех точках, в которых имеет место (58.6) для  $B$  получим:

$$B = 2A \cos n\pi = \pm 2A \quad (58.8)$$

— амплитуда результирующего колебания удвоилась по сравнению с амплитудой каждой из волн, следовательно, волны взаимно усилились. Формула (58.8) дает максимальное возможное значение амплитуды, поскольку косинус не может принимать значения, большего единицы.

2) Пусть разность хода равна целому числу волн с половиной, или, что то же, нечетному числу полуволн:

$$x_1 - x_2 = n\lambda + \frac{1}{2}\lambda = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}. \quad (58.9)$$

В этом случае

$$B = 2A \cos \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (58.10)$$

— волны взаимно уничтожили друг друга.

Физически понять этот результат нетрудно. Если разность хода от источников волн одинаковой амплитуды до  $M$  равна целому числу длин волн [условие (58.6)], то в точке  $M$  обе волны одновременно вызовут одинаковое смещение — вверх либо вниз. Если разность хода отличается на целое число волн с половиной (нечетное число полуволн), то смещения, вызываемые волнами, одинаковы по величине, но противоположны по направлению. В таких точках волны гасят друг друга.

Геометрическое место точек, разность расстояний от которых до  $O_1$  и  $O_2$  равна постоянной величине,  $x_1 - x_2 = \text{const}$ , есть, как это доказывается методами аналитической геометрии, гипербола.

Меняя значение  $n$  в выражениях  $x_1 - x_2 = n\lambda$  и  $x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ , получаем семейства гипербол, показанные на рис. 4.29.

Вдоль гипербол, показанных сплошными линиями, колебания происходят с максимальной амплитудой (здесь  $x_1 - x_2 = n\lambda$ ).

Вдоль гипербол, показанных пунктиром, амплитуда равна нулю, так как  $x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ . При переходе от одной гиперболы к соседней амплитуда плавно меняется в пределах от нуля и до  $2A$ .

В случае, если амплитуды волн  $A_1$  и  $A_2$  различны, то в точках (гипербол), удовлетворяющих условию (58.6), результирующая амплитуда равна

$$B = A_1 + A_2.$$

В точках, удовлетворяющих условию (58.9), полного погашения произойти не может, но амплитуда достигает наименьшего возможного значения, равного модулю разности амплитуд  $|A_1 - A_2|$ . В остальных точках пространства в зависимости от разности фаз складывающихся колебаний, т. е. от разности хода волн, амплитуда принимает различные значения, непрерывно меняясь в пределах

$$|A_1 - A_2| \leq B \leq A_1 + A_2. \quad (58.11)$$

Это явление взаимного усиления или ослабления волн (в зависимости от значения  $x_1 - x_2$ ), идущих от когерентных источников, и называется интерференцией волн. Аналогично можно рассмотреть интерференцию от многих точечных или непрерывно распределенных источников.

Вспомним теперь, что, как было доказано в § 52, энергия колебания  $E$  пропорциональна квадрату амплитуды, что справедливо для любой точки волнового поля. В простейшем случае равенства амплитуд интерферирующих волн находим, что энергия колебания в данной точке волнового поля пропорциональна  $B^2$  и согласно (58.5)

$$E \propto B^2 = 4A^2 \cos^2 \left( 2\pi \frac{x_1 - x_2}{2\lambda} \right). \quad (58.12)$$

В области максимума амплитуд энергия возрастает в 4 раза (по сравнению с энергией колебаний, возбуждаемых одним источником) в области минимума — равна нулю.

Интерференцию волн можно использовать для определения длины волны  $\lambda$ . В томе III будет показано, как можно таким способом определять длины волн светового излучения.

Покажем, как можно определить длину волны с помощью интерференции от двух щелей. Пусть поток волн с длиной  $\lambda$ , которую нужно определить, падает нормально на экран  $\mathcal{E}_1$  (рис. 4.30) с двумя щелями, находящимися на расстоянии  $h$  одна от другой (ширину щелей примем, ради простоты, пренебрежимо малой по сравнению с длиной волны). Рассмотрим распределение интенсивности колебаний на экране

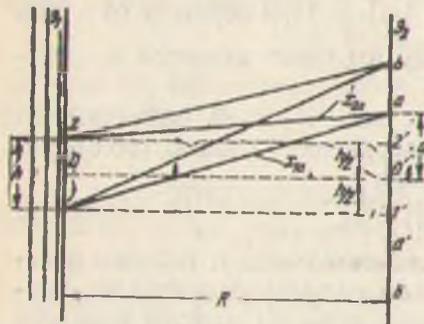


Рис. 4.30.

$\mathcal{E}_2$ , помещенном параллельно экрану со щелями на расстоянии  $R$  от последнего.

Щели 1 и 2 на  $\mathcal{E}_1$  будут являться точечными источниками волн справа от  $\mathcal{E}_1$ , причём фазы обоих источников будут совпадать. В точке  $O'$  на экране  $\mathcal{E}_2$ , лежащей на равном расстоянии от обоих источников, мы получим, следовательно, максимум колебаний. Найдем теперь

расстояние от  $O$  до симметрично расположенных точек  $a$  и  $a'$ , в которых будут ближайшие к  $O'$  максимумы. Согласно (58.6) разность хода от источников 1 и 2 должна быть равна одной длине волны. Обозначая расстояния от 1 до 2 до  $a$  через  $x_{1a}$  и  $x_{2a}$  соответственно, имеем:

$$x_{1a} - x_{2a} = \lambda \quad (58.13)$$

(для точки  $a'$  мы имели бы  $x_{2a'} - x_{1a'} = \lambda$ , и вычисление было бы тождественным с проведённым для точки  $a$ ). Обозначим расстояние между максимумами  $O'a$  через  $d$ . Из чертежа видно, что  $x_{1a}$  есть гипотенуза прямоугольного треугольника  $11'a$  с катетами  $1'l = R$  и  $l'a = d + \frac{h}{2}$ , а  $x_{2a}$  — гипотенуза прямоугольного треугольника  $22'a$ , где катет  $2'2' = R$ , а катет  $2'a = d - \frac{h}{2}$ . Имеем, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} x_{1a}^2 &= R^2 + \left(d + \frac{h}{2}\right)^2, \\ x_{2a}^2 &= R^2 + \left(d - \frac{h}{2}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (58.14)$$

Воспользуемся тем, что в выражении

$$x_{1a}^2 - x_{2a}^2 = (x_{1a} + x_{2a})(x_{1a} - x_{2a})$$

величина  $x_{1a} + x_{2a}$  весьма мало отличается от  $2R$  (так как и  $h$ , и  $d$  много меньше  $R$ ). Полагая приближенно

$$x_{1a} + x_{2a} \approx 2R \quad (58.15)$$

и  $x_{1a} - x_{2a} = \lambda$  [согласно (58.13)], имеем:

$$x_{1a}^2 - x_{2a}^2 = 2R\lambda.$$

Внося сюда значения  $x_{1a}^2$  и  $x_{2a}^2$  из (58.14) и производя сокращения, находим:

$$2dh = 2R\lambda,$$

откуда

$$\lambda = \frac{h}{R} d. \quad (58.16)$$

Предоставляем читателю показать (таким же путем), что не только расстояния  $O'a'$  будет также равно  $d$ , но и для других, ближайших к центральному, максимумов расстояние между максимумами оказывается одинаковым и равным той же величине  $d$ .

Таким образом, зная характерное для используемого прибора отношение  $h/R$  и определяя на опыте  $d$ , можно найти длину волны  $\lambda$  падающего (нормально) на экран потока волн.

## § 59. Отражение волн. Стоячие волны

Волна, приходящая на границу раздела двух сред, частично проходит через нее, а частично отражается. При этом в зависимости от отношений плотностей этих сред процесс происходит по разному. Начнем рассмотрение с двух предельных случаев:

а) вторая среда является менее плотной, а в пределе вообще отсутствует, т. е. упругое тело имеет свободную границу;

б) вторая среда более плотная, что отвечает в пределе неподвижно закрепленному концу упругого тела.

Рассмотрим распространение упругой, для определенности — продольной, волны в стержне для случая а). Пусть левый конец стержня связан с источником колебаний, а правый — свободен. Изучим отдельную деформацию, вызванную источником волны. Пусть, например, в результате движения источника у левого конца стержня возникла деформация сжатия. Эта деформация будет перемещаться вдоль стержня слева направо. Когда деформация достигнет правого, незакрепленного конца стержня, он в результате

возникшего слева сжатия получит ускорение вправо. При этом в силу отсутствия упругой среды справа это движение не вызовет никакого дальнейшего сжатия. Деформация слева будет все уменьшаться, а скорость движения — расти. К моменту исчезновения деформации конец стержня будет двигаться с наибольшей скоростью. В силу инерции конца стержня движение в этот момент (в момент исчезновения деформации) не прекратится. Оно будет продолжаться с замедлением, вызывая слева деформацию, но теперь уже — растяжения. Последняя деформация будет перемещаться теперь справа налево.

Аналогично, созданная источником и перемещающаяся вправо деформация растяжения, отразившись от свободного конца стержня, будет перемещаться обратно в виде деформации сжатия.

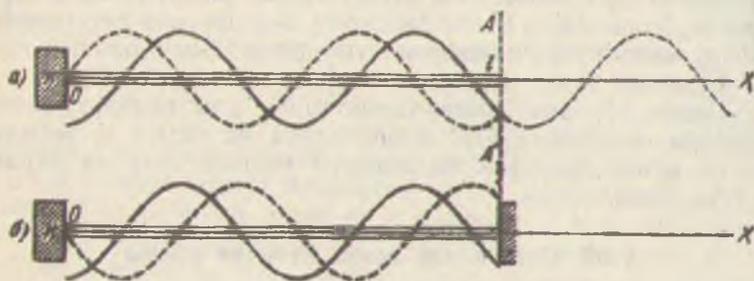


Рис. 4.31.

Когда источник совершает гармоническое колебание, он вызывает в стержне попеременно деформации сжатия и растяжения. Эти деформации будут отражаться от свободного конца стержня соответственно в виде деформаций растяжения и сжатия. Поэтому в точке отражения заходящим сжатием следует уходящее растяжение, и наоборот, сжатие и растяжение чередуются в том же порядке, как и в свободно распространяющейся волне. Это значит, что на свободном конце стержня волна отражается, меняя свое направление на обратное, причем никакого изменения фазы волны в точке отражения не происходит. Сказанное иллюстрируется рис. 4.31, а. К стержню длины  $l$  в точке  $O$  присоединен источник гармонического колебания  $I$ . Сплошной кривой показана волна, распространяющаяся в стержне от источника направо. Тонкий пунктир показывает вид волны, если стержень не обрывался бы в точке  $I$ . Жирный пунктир

соответствует волне, отраженной от свободного конца стержня  $I$ . Последняя имеет такой вид, как если бы волна, показанная тонким пунктиром, была повернута на  $180^\circ$ , т. е. отразилась от «зеркала»  $AA'$ .

Во втором предельном случае, когда правый конец упругого стержня закреплен неподвижно, дошедшая до него деформация сжатия не может привести этот конец в движение. Возникшее здесь сжатие начнет распространяться влево. Аналогично и деформация растяжения будет отражаться от неподвижно закрепленного конца стержня в виде такой же деформации растяжения. При гармоническом колебании источника за деформациями сжатия будут следовать деформации растяжения. Но при отражении от закрепленного конца за сжатием в приходящей волне будет следовать не растяжение, а сжатие в отраженной волне. За растяжением в приходящей волне будет следовать опять-таки растяжение в отраженной волне. Следовательно, процесс происходит так, как если бы в точке отражения терялась половина волны. Другими словами, фаза волны при отражении меняется на  $\pi$  или, как говорят, меняется на противоположную. Сказанное иллюстрируется рис. 4.31, б.

Волна, отраженная от закрепленного конца стержня, отличается в точке отражения от волны, отраженной от свободного конца стержня, обратной фазой — все смещения имеют ту же величину, но обратное направление.

Из чертежа можно непосредственно видеть, каким будет смещение концов стержня в обоих случаях. В случае свободного конца стержня смещения, вызванные пришедшей и отраженной волнами, складываются, так что конец стержня колеблется с удвоенной амплитудой. В случае закрепленного конца стержня приходящая и отраженная волны дают на конце равные по величине, но противоположные по направлению смещения, так что конец стержня остается неподвижным, чего и следовало ожидать, поскольку этот конец закреплен.

Рассмотренные примеры являются предельными случаями следующих реальных. Распространяющаяся от источника в среде  $I$  упругая волна приходит на границу раздела этой и менее плотной среды  $II$ . Волна, падающая на границу раздела двух сред, частично отразится, а частично пройдет во вторую среду. Отраженная волна, как и в предельном случае отсутствия второй среды (бесконечно малой плотности среды  $II$ ), также не меняет фазы. Отличие от рассмотренного выше предельного случая будет состоять лишь в том, что амплитуда отраженной волны будет меньше: часть энер-

гии падающей волны в этом случае тратится на возбуждение волн во второй среде.

Пример закрепленного конца является предельным для случая, когда вторая среда более плотная, чем первая. Очевидно, что и здесь проходящая волна не испытывает на границе раздела сред изменения фазы. Отраженная волна меняет фазу на обратную (т. е. на  $\pi$ ). Амплитуда отраженной волны будет меньше, чем падающей, так как последняя расходует часть своей энергии на возбуждение волн во второй среде. Следует иметь в виду, что во второй среде скорость распространения волны  $v_{II}$  будет, вообще говоря, отличаться от скорости распространения волны  $v_I$  в первой среде. А так как частота волны сохраняется — она равна частоте колебаний на границе раздела двух сред, т. е. равна частоте источника волн  $\nu$ , — то меняется длина волны

$$\lambda_{II} = \frac{v_{II}}{\nu} \neq \lambda_I = \frac{v_I}{\nu}.$$

При непрерывной работе источника волн волна, идущая от него, будет складываться с отраженной волной. Ограничимся, для простоты, случаем, когда отраженная волна имеет практически ту же амплитуду, что и падающая. Это будет иметь место, если прошедшая во вторую среду волна обладает весьма малой интенсивностью по сравнению с падающей волной (среда II очень разрежена либо же очень плотна) и когда можно пренебречь потерями на трение. Таким образом, результирующее колебание любой точки среды будет получаться в результате сложения двух когерентных волн равной амплитуды, распространяющихся в противоположных направлениях, вправо и влево вдоль оси X. Будем называть волну, идущую вправо, «прямой», противоположную — «обратной». Эти волны отличаются лишь знаком скорости  $v$ . Что касается фаз, то, поскольку положения точки, где происходит отражение, и условия отражения не указаны, мы можем распорядиться начальными фазами, как нам удобно. Это не лишит результаты общности.

Положим, что смещения, вызванные прямой и обратной волнами, задаются согласно (55.4) формулами

$$\left. \begin{aligned} y_{\text{прям}}(t) &= A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right), \\ y_{\text{обр}}(t) &= A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (59.1)$$

В результате интерференции прямой и обратной волн колебание в точке  $x$  будет происходить по закону

$$y = y_{\text{прям}} + y_{\text{обр}} = A \left[ \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right) + \sin \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v} \right) \right] =$$

$$= 2A \cos \left( 2\pi \frac{x}{vT} \right) \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right), \quad (59.2)$$

или, так как  $vT = \lambda$ :

$$y(x, t) = 2A \cos \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) =$$

$$= B(x) \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right). \quad (59.3)$$

Таким образом, амплитуды колебаний  $B(x)$  различных точек результирующей волны различны. Получившаяся волна носит название **стоячей волны**.

Рассмотрим точки оси  $X$ , удовлетворяющие условию

$$x_y = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (n - \text{целое число}). \quad (59.4)$$

В этих точках

$$\cos \frac{2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}}{\lambda} = \cos \left( n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

т. е.

$$y \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}, t \right] = 0. \quad (59.5)$$

Эти точки волны все время остаются неподвижными. Они носят название **узлов** стоячей волны.

Промежуточные между узлами точки с координатами, отличными на величину  $\lambda/4$ ,

$$x_n = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (n - \text{целое число}) \quad (59.6)$$

в силу того, что

$$\cos \frac{2\pi \cdot \frac{\lambda}{2}}{\lambda} = \cos(n\pi) = \pm 1,$$

обладают наибольшей возможной амплитудой, равной  $2A$ . Эти точки носят название **пучностей** стоячей волны.

Точки с промежуточными координатами, т. е. значениями  $x$ , не совпадающими с  $x_y$  и  $x_n$ , обладают промежуточными амплитудами в соответствии с формулой (59.3).

Сравним характер колебаний в стоячей и обычной бегущей волне при отсутствии затухания.

В бегущей волне каждая точка совершает колебания,

амплитуда которых не отличается от амплитуды колебания других точек. Но колебания различных точек происходят с различными фазами. В любой момент времени одни точки волны достигают наибольшего отклонения, в то время как другие проходят через нуль. Картина поперечной бегущей волны может быть представлена синусоидой, движущейся со скоростью  $v$ .

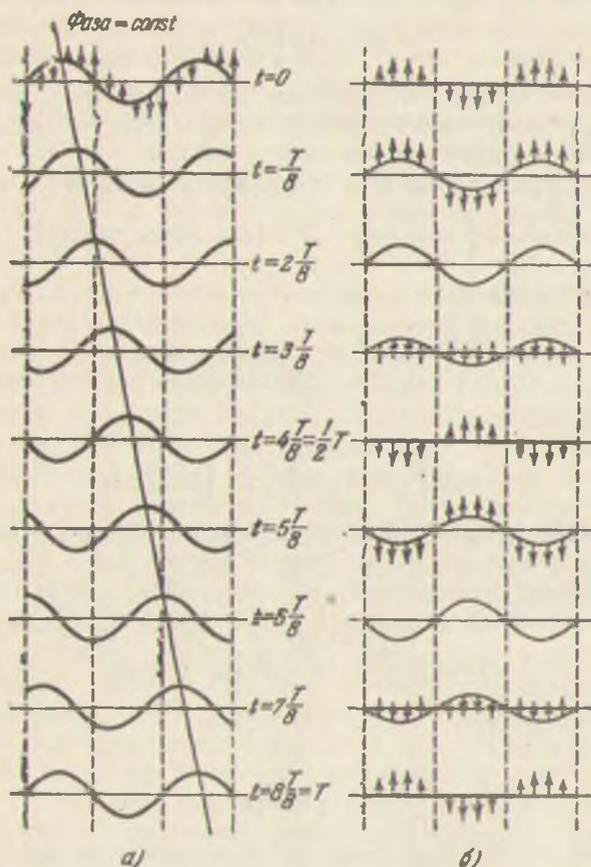


Рис. 4.32.

В стоячей же волне все точки оси  $X$  одновременно проходят через положения равновесия:

$$y(x, t) = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

так что

$$y(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad t = n \frac{T}{2} \quad (n - \text{целое число}) \quad (59.7)$$

для всех значений  $x$ .

В моменты времени  $t = n \frac{T}{2} + \frac{T}{4}$  все точки одновременно достигают наибольших отклонений. На рис. 4.32 приведены серии «мгновенных фотографий» бегущей а) и стоячей б) волн, показанные через промежутки времени, равные  $T/8$ .

Стрелками указаны величины и направления скоростей отдельных точек волны. Для бегущей волны это сделано только на одной «фотографии», так как картина на других подобных «фотографиях» просто сдвинута относительно данной. В моменты  $t = 2 \frac{T}{8}$  и  $t = 6 \frac{T}{8}$  все частицы стоячей волны на мгновение останавливаются: вся энергия волны переходит в форму потенциальной энергии.

Легче всего можно получить стоячую волну, прикрепив один конец струны к стене (рис. 4.33). Прямая волна, бегущая справа налево, показанная тонкой линией, отразится от нее. Обратная волна, показанная пунктирной линией,

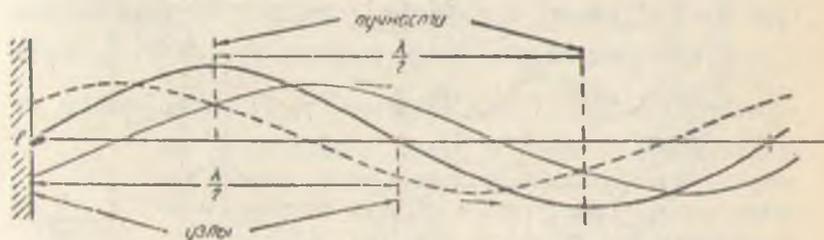


Рис. 4.33.

будет обладать такой же амплитудой, как и прямая, поскольку потеря энергии, связанная с прохождением волны в стену и с трением, ничтожна. В данном случае мы имеем отражение волны в точке  $l$  от «бесконечно плотной среды». Следовательно, точка закрепления струны  $l$  неподвижна и совпадает с одним из узлов струны. Результирующая стоячая волна изображена жирной линией. Совместим начало отсчета по оси  $X$  с точкой  $l$  и определим фазу в выражении для амплитуды стоячей волны [см. (59.3)]:

$$B(x) = 2A \cos \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right). \quad (59.8)$$

Значение  $\varphi_0$  находится из условия, чтобы амплитуда  $B(x)$  обращалась в нуль в точке  $x=0$ :

$$B(0)=0,$$

откуда

$$\frac{2\pi 0}{\lambda} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е. } \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, для рассматриваемого примера

$$B(x) = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right). \quad (59.9)$$

Будем двигаться вдоль оси  $X$ , следя за изменением амплитуды стоячей волны. Координаты  $x_{yn}$  узлов найдем из условия

$$\frac{2\pi x_{yn}}{\lambda} = n\pi, \quad (59.10)$$

где  $n$  — целое число; при значениях аргумента косинуса, равных (59.10), амплитуда (59.9) будет обращаться в нуль.

Отсюда значение координаты  $x_{yn}$   $n$ -го узла

$$x_{yn} = n\pi \frac{\lambda}{2\pi} = n \frac{\lambda}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (59.11)$$

При  $n=0$  получаем координату узла в точке закрепления  $x_{y0}=0$ . Следующий узел имеет координату  $x_{y1}=1 \cdot \frac{\lambda}{2}$ , затем  $x_{y2}=2 \cdot \frac{\lambda}{2}$  и т. д. Таким образом, узлы расположены на

расстоянии  $\lambda/2$  друг от друга. Очевидно и без расчета, что пучности располагаются между узлами также на расстоянии  $\lambda/2$  друг от друга и на расстоянии  $\lambda/4$  от узлов (см. рис. 4.33).

Заметим теперь, что, называя  $B(x)$  амплитудой стоячей волны, мы допустили некоторую неточность: величина  $B(x)$  меняет знак, и амплитудой волны является модуль этой величины  $|B(x)|$ . Изменение знака  $B(x)$  при прохождении через точку  $x_y$  (узел) обязано тому, что в стоячей волне колебания по разные стороны от узла происходят в разных направлениях (см. рис. 4.32, б).

Если присоединить конец упругого стержня или верхний конец свободно висящей струны к источнику гармонических колебаний, то на свободном, незакрепленном конце образуется пучность (рис. 4.34). Рас-

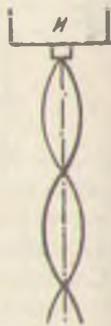


Рис. 4.34.

стояние между узлами и пучностями здесь будет таким же, как и в рассмотренном случае с закрепленным концом.

До сих пор мы рассматривали образование стоячих волн при отражении одномерной волны. Аналогично можно получить двумерные стоячие волны, например, при отражении волн, бегущих по поверхности воды, от плотины. В этом случае узлы и пучности образуются вдоль линий, параллельных линии берега. При изучении оптики и строения атома мы встретимся также со стоячими волнами в пространстве.

### § 60. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн

Как мы видели выше, упругие колебания передаются на большие расстояния не мгновенно, а распространяются постепенно, от одной точки среды к соседней. Это обстоятельство лежит в основе принципа, предложенного в конце

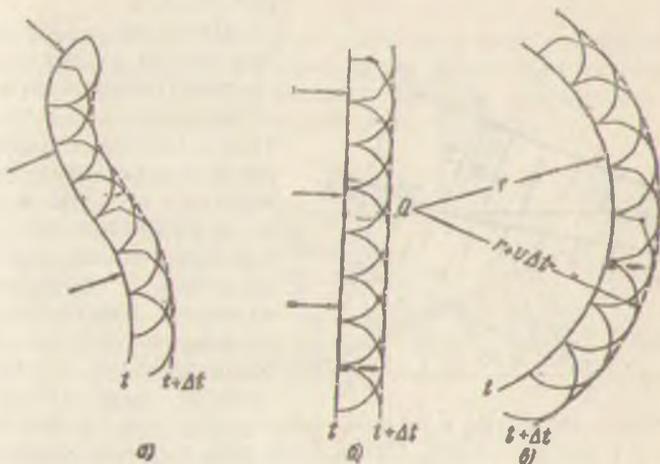


Рис. 4.35.

XVII века голландским физиком Гюйгенсом для установления некоторых количественных закономерностей распространения волн.

Согласно принципу Гюйгенса каждая точка волнового поля, пришедшая в колебание, становится сама источником вторичных волн. Результирующая волна, распространяющаяся дальше, возникает вследствие наложения и интерференции всех волн от этих вторичных элементарных источников.

Назовем волновой поверхностью геометри-

ческое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Фронт волны также является волновой поверхностью, точки которой одновременно начинают колебательное движение. На рис. 4.35, а изображено положение фронта волны в некоторый произвольный момент времени  $t$ . С помощью принципа Гюйгенса можно найти вид фронта волны через малый промежуток времени  $\Delta t$ . Для этого нужно из каждой точки фронта, являющейся вторичным источником волн, провести в направлении распространения сферическую волну радиуса  $\Delta r = v \Delta t$ , где  $v$  — скорость распространения волн. Новый фронт волны получается как огибающая этих вторичных волн\*.

Применяя построение Гюйгенса в случае плоской волны, изображенной на рис. 4.35, б, мы приходим к выводу, что в однородной среде плоская волна при своем распространении остается плоской. Аналогичным свойством сохранения формы обладает и сферическая волна, изображенная на рис. 4.35, в.

Построение Гюйгенса применимо и для волн, распространяющихся в неоднородной среде. В этом случае скорость распространения  $v$  будет меняться от точки к точке и соответственно будут различными радиусы полусфер, проводимых из разных точек исходного фронта. Для примера рассмотрим преломление плоской волны на грани-

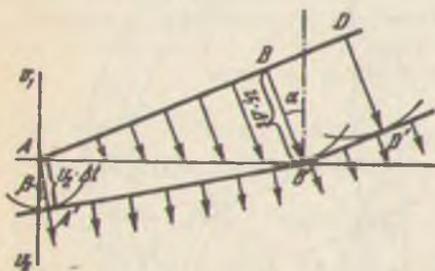


Рис. 4.36.

це раздела двух сред с различными скоростями распространения  $v_1$  и  $v_2$  (рис. 4.36). Пусть  $ABD$  есть положение фронта плоской волны в первой среде в момент времени  $t$ . Из точек  $B$  и  $D$  опишем вперед полусферы радиуса  $v_1 \Delta t$ . Их огибающая  $B'D'$  даст положение фронта волны в первой среде в момент  $t + \Delta t$ . Луч  $BB'$ , перпендикулярный к фронту исходной волны, указывает направление ее распространения в первой среде. Угол  $\alpha$  между направлением падающих лучей  $BB'$  и перпендикуляром к границе раздела называется углом падения.

\* Доказательство того факта, что вторичные волны не дают заметной волны, бегущей назад, может быть получено лишь из строгой математической теории волн, разработанной Кирхгофом.

Из точки  $A$ , лежащей на поверхности раздела сред, опишем во второй среде полусферу радиуса  $v_2 \Delta t$ . Для построения огибающей проведем из точки  $B'$  касательную к этой полусфере  $A'B'$ . Касательная  $A'B'$  и будет изображать положение фронта волны во второй среде в момент  $t + \Delta t$ . Луч  $AA'$ , перпендикулярный к этому фронту, укажет направление распространения этой волны. Угол  $\beta$  между направлением преломленных лучей и перпендикуляром к границе раздела называется углом преломления.

Прямоугольные треугольники  $ABB'$  и  $AA'B'$  имеют общую гипотенузу  $AB'$ . Поэтому

$$AB' = \frac{v_1 \Delta t}{\sin \alpha} = \frac{v_2 \Delta t}{\sin \beta}$$

и

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const}, \quad (60.1)$$

т. е. отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная, не зависящая от направления падающего луча и численно равная отношению скоростей распространения волн в обеих средах.

Аналогичным образом можно вывести и закон отражения. На рис. 4.37 изображен по-прежнему фронт падающей плоской волны  $ABD$  в момент времени  $t$  и построено его продолжение  $B''D''$  в момент  $t + \Delta t$ . Из точки  $A$  опишем полусферу радиуса

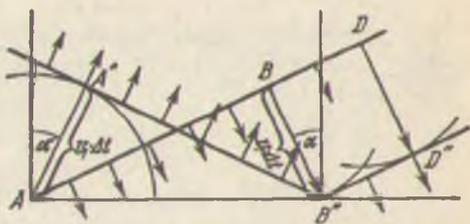


Рис. 4.37.

$v_1 \Delta t$  в той же первой среде. Для построения огибающей проведем из точки  $B''$  касательную  $A''B''$  к этой полусфере. Касательная  $A''B''$  будет изображать фронт отраженной волны, распространяющейся в той же среде в момент  $t + \Delta t$ . Перпендикулярный к ней луч  $AA''$  указывает направление отраженной волны и пересекает перпендикуляр к границе раздела под некоторым углом  $\alpha'$ , называемым углом отражения. Прямоугольные треугольники  $AA''B''$  и  $ABB''$ , как имеющие общую гипотенузу  $AB''$  и одинаковые катеты  $AA'' = BB'' = v_1 \Delta t$ , равны друг другу. Отсюда следует, что *угол падения равен углу отражения*. Если отсчитывать углы от перпендикуляра к границе раздела и принимать

направление по часовой стрелке положительным, а против часовой стрелки — отрицательным, то закон отражения можно записать в виде

$$\alpha' = -\alpha. \quad (60.2)$$

Принцип Гюйгенса позволяет объяснить характерное для волнового движения явление непрямолинейного распространения волн, носящее название *д и ф р а к ц и и*.

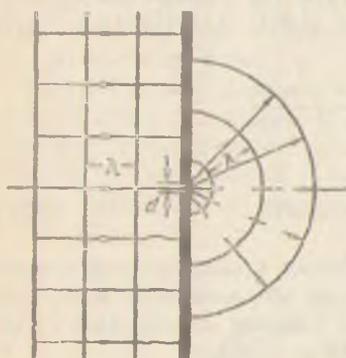


Рис. 4.38.

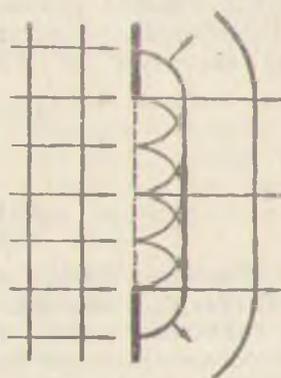


Рис. 4.39.

Рассмотрим плоскую волну, падающую на поверхность экрана, в котором имеется отверстие, малое по сравнению с длиной волны ( $d \ll \lambda$ ). Когда фронт волны дойдет до экрана, вторичные источники, расположенные в плоскости отверстия, создадут расходящуюся от него сферическую волну за экраном, как это показано на рис. 4.38. Это иллюстрирует принцип Гюйгенса, согласно которому отверстие в экране можно рассматривать как одиночный элементарный источник (если ширина его много меньше  $\lambda$ ).

Таким образом, волна распространяется, вообще говоря, непрямолинейно. При широком фронте волны прямолинейное распространение есть результат интерференции волн от многих вторичных источников. Однако и в этом случае ( $d \gg \lambda$ ) на боковых границах волнового фронта будут наблюдаться отклонения от прямолинейного распространения (рис. 4.39).

Аналогично можно показать, что в результате дифракции за малой по сравнению с длиной волны преградой не образуется тени (рис. 4.40), а преграда, соизмеримая с длиной волны, сильно рассеивает волны. В случае преграды, размеры которой много больше длины волны, за преградой обра-

зуется тень. Однако и здесь волны частично огибают препятствие, заходя в область геометрической тени (рис. 4.41).

Назовем **лучами** линии, показывающие направления распространения волн. В однородной среде лучи являются семействами линий, перпендикулярных к волновым поверхностям. На предыдущих чертежах лучи указывались стрелками.

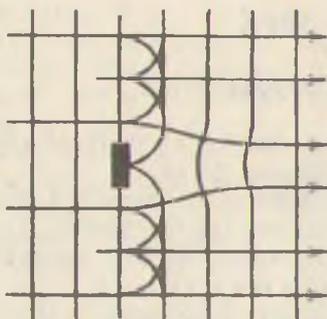


Рис. 4.40.

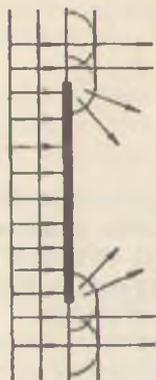


Рис.4.41.

Построение лучей позволяет в ряде случаев сделать картину распространения волн более наглядной. Однако не следует забывать, что понятие луча является чисто вспомогательным, и приписывать ему слишком большой физический смысл, рассматривая, например, бегущую волну как совокупность распространяющихся лучей, нельзя. Действительно, в силу наличия дифракции волн выделить физически узкий пучок лучей из этой совокупности невозможно. Возвращаясь к рис. 4.39, мы видим, что попытка выделить тонкий пучок параллельных лучей, например с помощью экрана с малым отверстием, не приводит к цели.

Количественный расчет некоторых дифракционных явлений и их практические применения будут подробнее рассмотрены в оптике (том III).

## ГЛАВА XV

### ЗВУК

#### § 61. Природа звука

Звук представляет собой колебания упругой среды, воспринимаемые нашими органами слуха.

Физиологическое восприятие звука является отражением соответствующих физических его характеристик. Так, гармоническое колебание определенной частоты воспринимается нами как определенный музыкальный тон. Физической характеристике — частоте колебаний — соответствует физиологическое понятие — высота звука. Малые частоты колебаний вызывают ощущение так называемого низкого тона (бас, баритон). Большие частоты колебаний вызывают ощущение звука высокого тона (сопрано, дискант). *Чем больше частота колебаний, тем больше высота тона воспринимаемого звука.*

Следует отметить, что благодаря своему устройству нормальное человеческое ухо способно воспринимать не любые колебания, а лишь такие, частота которых лежит в пределах от 16 до 20 000 колебаний в секунду. Этот интервал частот носит название собственно звуковых колебаний. Колебания с частотами, большими 20 000 герц, носят название ультразвуков и могут быть восприняты специальными приборами. Колебания с частотами, меньшими 16 герц, носят название инфразвуков, и для их восприятия также сконструированы специальные приборы, расширяющие возможности наших органов чувств.

Несколько одновременно приходящих звуковых колебаний, частоты которых находятся в определенном соответствии, создают впечатление созвучия, приятного (консонанс) или неприятного (диссонанс). Большое число одновременных звуковых колебаний с самыми различными частотами создает впечатление шума.

Интенсивность звука может быть охарактеризована различными величинами. В звуковом поле периодически колеб-

лются частицы среды, периодически меняются их скорости и силы давления (в жидкости или газе) или нормальные и касательные напряжения (в твердых телах). Интенсивность звука может характеризовать амплитуду колебаний любой из этих величин. Однако, поскольку все эти величины, как показано в гл. XIII, связаны между собой определенными соотношениями, то целесообразно ввести единую энергетическую характеристику. Такая характеристика для волн любого типа была предложена в 1877 г. Н. А. Умовым.

В § 52 было показано, что полная энергия гармонически колеблющейся точки остается постоянной. В случае бегущей волны можно мысленно вырезать из фронта волны площадку  $dS$  (рис. 4.42).

За время  $dt$  волна распространится на расстояние  $v dt$  перпендикулярно к этому фронту. Если обозначить через  $W$   $\text{дж/м}^3$  энергию единицы объема колеблющейся упругой среды, то энергия всех ее частиц, пришедших в колебательное движение в объеме  $dSv dt$ , будет равна  $W dSv dt$   $\text{дж}$ . Эта энергия была принесена за время  $dt$  в данный объем волной, распространяющейся через площадку  $dS$ . Разделив полученную объем энергия на  $dS$  и  $dt$ , мы получим величину потока энергии

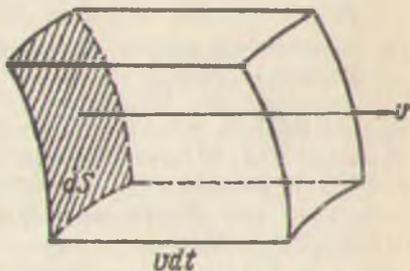


Рис. 4.42.

$$I = Wv \quad (61.1)$$

т. е. энергию, переносимую распространяющейся волной через единицу площади за единицу времени. Вектор  $I$  направлен в сторону распространения волны и носит название вектора Умова. Величина  $I$  измеряется в  $\text{вт/м}^2$  и для звукового поля называется силой звука.

Сила звука является физической характеристикой интенсивности звуковых колебаний. Мы оцениваем ее субъективно как громкость звука. Нормальное человеческое ухо способно воспринимать звуки, сила которых превышает некоторое минимальное значение, различное для различных частот,

$$I_{\text{мин}} = f(v). \quad (61.2)$$

Величина  $I_{\text{мин}}$  называется порогом слышимости

звука и для средних частот  $\nu \approx 10^3$  гц, лучше всего воспринимаемых ухом, составляет около  $10^{-12}$  вт/м<sup>2</sup>. При очень большой силе звука порядка  $10$  вт/м<sup>2</sup> звук начинает восприниматься, кроме уха, органами осязания, а в ушах вызывает болевое ощущение.

Поскольку наше ухо способно воспринимать звуки, отличающиеся по силе в  $10^{13}$  раз, то оно нечувствительно к малым изменениям силы звука и замечает прирост громкости звука при увеличении силы последнего не менее, чем на  $10-20$  %. Поэтому в качестве характеристики интенсивности звука выбирают обычно не силу звука  $I$ , а десятичный логарифм последней, точнее, величину

$$\beta = \lg \frac{I}{I_0}, \quad (61.3)$$

где  $I_0$  — условно выбранный нулевой уровень  $I_0 = 10^{-12}$  дж/м<sup>2</sup>·сек =  $10^{-12}$  вт/м<sup>2</sup>. Величина  $\beta$  называется уровнем силы звука и измеряется в белах. Из (61.3) следует, что уровень силы звука в  $1$  бел соответствует силе звука, равной  $I = 10I_0$ . Наряду с этой единицей пользуются в  $10$  раз более мелкой единицей, называемой децибелом (дб):

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ дб}. \quad (61.4)$$

Для человеческих ощущений приближенно справедлив психофизиологический закон — *интенсивность ощущения пропорциональна логарифму степени раздражения*. Это означает, что уровень громкости звука пропорционален  $\beta$ .

Скорость распространения звука в различных средах различна. Как мы видели выше (в § 56), в твердых телах могут распространяться звуковые упругие колебания двух типов: продольные и поперечные. В изотропных твердых телах скорости этих двух типов колебаний равны соответственно

$$v_{\text{прод}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (61.5)$$

$$v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (61.6)$$

где  $E$  — модуль упругости,  $G$  — модуль сдвига и  $\rho$  — плотность среды. В анизотропных кристаллах упругие свойства и модули упругости различны по разным направлениям. Поэтому скорость звука в анизотропных телах зависит от

направления распространения волны по отношению к кристаллографическим осям, а для поперечных волн — еще и от ориентации плоскости их поляризации.

В жидкостях могут распространяться практически только продольные звуковые волны сжатия и разрежения. Их скорость равна

$$v_{ж} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (61.7)$$

где  $K$  — модуль сжатия жидкости. В твердых телах скорость звука составляет от 2 до 5 км/сек, а в жидкостях от 0,7 до 2 км/сек (в воде  $v_{зв} = 1,34$  км/сек).

Для скорости распространения упругих колебаний в газе мы вывели в гл. XIV два выражения (56.12) и (56.13) в зависимости от термических характеристик процесса. Формула (56.12) принадлежит Ньютону, который предполагал, что звук распространяется изотермически. Однако опыт показал, что даже для звуковых колебаний с минимальными частотами за время одного колебания ( $\sim 0,1$  сек) температура между сжатыми (и тем самым разогретыми) и разреженными (и тем самым охлажденными) областями волны не успевает выравняться. Практически процесс распространения звука можно считать адиабатическим, так что скорость распространения звука в идеальном газе определяется выражением

$$v_{г} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (61.8)$$

где  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  — отношение теплоемкостей при постоянном объеме и постоянной температуре.

Для одноатомных газов  $\gamma = 1,67$ , а для многоатомных  $\gamma$  приближается к единице. Поэтому, сравнивая выражение (61.8) со скоростью хаотического теплового движения молекул газа

$$\bar{v}_{\text{мол}} = \sqrt{3 \frac{RT}{\mu}}, \quad (61.9)$$

мы видим, что последняя лишь ненамного превышает скорость звука. В частности, для воздуха при  $0^\circ\text{C}$   $v_{\text{мол}} = 500$  м/сек, а  $v_{\text{зв}} = 331$  м/сек.

Анализируя выражение (61.8), видим, что скорость звука в газе зависит не от давления  $p$  и плотности  $\rho$  по отдельности, а от их отношения, т. е. в конечном счете от абсолютной температуры газа  $T$ . Если поместить звонок под колокол воздушного насоса и откачивать воздух, то одновременное

уменьшение плотности и давления не изменит скорости распространения звука под колоколом. Откачка воздуха будет уменьшать лишь интенсивность звука, поскольку по мере разрежения язычок звонка будет приводить в колебание все меньшие и меньшие массы воздуха. Наконец, в полном вакууме распространение звука прекратится вовсе из-за отсутствия упругой среды.

Таким образом, скорость звука в газах зависит от температуры и состава газа, поскольку последний влияет на величину  $\gamma$  и  $\mu$ . В частности, для наиболее легкого газа — водорода ( $\mu=2$ ) скорость звука максимальна и при  $0^\circ\text{C}$  равна  $1263\text{ м/сек}$ .

### § 62. Распространение звука. Источники и приемники звука

Если размеры источника малы по сравнению с длиной волны, то от него распространяется во все стороны сферическая звуковая волна (рис. 4.43). Если же размеры источника велики по сравнению с длиной волны, то вследствие

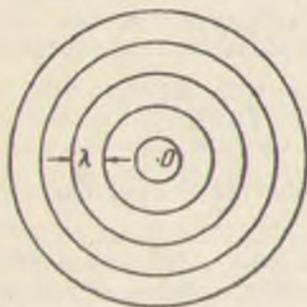


Рис. 4.43.

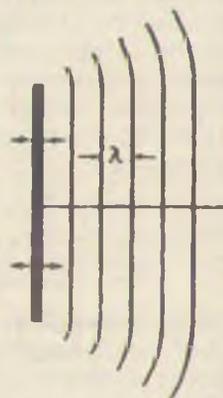


Рис. 4.44.

интерференции и дифракции он излучает направленную звуковую волну (рис. 4.44). В воздухе при  $v=331\text{ м/сек}$  и  $\nu_{\text{мин}}=16\text{ гц}$  соответственно длина волны  $\lambda_{\text{макс}} = \frac{331\text{ м/сек}}{16\text{ сек}^{-1}} = 20,7\text{ м}$ . При  $\nu_{\text{макс}}=20\,000\text{ гц}$  соответствующая длина волны в воздухе  $\lambda_{\text{мин}} = \frac{331\text{ м/сек}}{20\,000\text{ сек}^{-1}} = 0,0165\text{ м}$ .

Поэтому для получения направленного звукового пучка на обычных речевых частотах (300—2000 гц) необходимо

применять рупоры диаметром порядка 1 м. Для получения же направленных ультразвуковых пучков ( $\lambda_{уз} < 0,0165$  м) применяются излучающие пластинки диаметром в несколько сантиметров. При указанных выше длинах волн звука можно наблюдать дифракционные явления, в частности огибание звуком препятствий даже большой протяженности (стена, дом).

При встрече с препятствием больших размеров звуковые волны отражаются и возвращаются обратно. Это явление называется эхо. В гористой местности благодаря многократному отражению звука наблюдается длительное эхо, иногда до 5-10 сек.

Человек обладает довольно сложным аппаратом для восприятия звуков. Звуковые колебания собираются ушной раковиной и через слуховой канал воздействуют на барабанную перепонку. Колебания последней через систему маленьких косточек передаются второй упругой мембране, так называемому овальному окну, закрывающему небольшую полость улитки, заполненной жидкостью (лимфой). Внутри улитки расположено большое число специальных волокон, имеющих

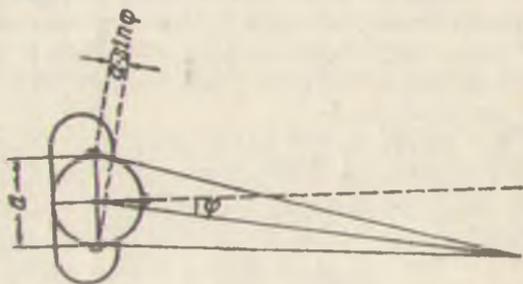


Рис. 4.45.

различную длину и натяжение, а следовательно, различные собственные частоты колебаний. При действии сложного звука каждое из этих волокон резонирует на тот составляющий тон, частота которого совпадает с собственной частотой волокна, и раздражает соответствующее окончание слухового нерва. Набор резонансных частот в слуховом аппарате и определяет область воспринимаемых нами звуковых колебаний (16—20 000 гц).

Наличие у человека двух ушей позволяет определять направление приходящего звука (бинауральный эффект). Как видно из рис. 4.45, разность хода двух

звуковых лучей при угле между направлением на источник звука и плоскостью симметрии человеческого тела, равном  $\varphi$ , составляет  $\Delta l = a \sin \varphi$ , где  $a \approx 20$  см — среднее расстояние между ушами. При  $\varphi = 3^\circ$  разность хода  $\Delta l \approx 1$  см, а разность времен достижения сигналом обоих ушей  $\Delta t = \frac{\Delta l}{v_{\text{зв}}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$  сек. При периоде колебания  $T = 10^{-4}$  сек

сдвиг фазы между обоими звуковыми ощущениями достигает 0,3 от периода и вполне ощутим. Для высоких частот и малых длин волн голова создает уже значительную акустическую «тень», что вызывает заметную разность амплитуд сигналов в обоих ушах.

Если от источника малых размеров звук распространяется одинаково во все стороны, то сила звука будет убывать с ростом расстояния от источника. Считая источник практически точечным, опишем из него сферу произвольного радиуса  $r$  м. Пусть мощность источника равна  $\Pi$  дж/сек. Тогда сила звука  $I$  на расстоянии  $r$  от источника, очевидно, равна

$$I = \frac{\Pi}{4\pi r^2} \text{ вт/м}^2, \quad (62.1)$$

т. е. убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. В противоположность этому, для направленного звукового пучка площадь поперечного сечения пучка, а следовательно, и сила звука должны практически не зависеть от расстояния до источника.

Однако и в этом случае наблюдается затухание звука, связанное с различными необратимыми процессами, происходящими в звуковой волне. При колебательных движениях частиц упругой среды между ними возникают силы внутреннего трения (вязкость), и за счет работы последних часть звуковой энергии непрерывно переходит в тепло. Кроме того, как уже указывалось выше, в звуковой волне в каждый данный момент в соседстве находятся разогретые области сжатия и охлажденные области разрежения. Вследствие теплопроводности среды разность температур между этими областями выравнивается, что снижает максимальное давление и максимальное разрежение, т. е. амплитуду звуковой волны. Это в свою очередь связано с уменьшением энергии колебаний, переходящей в тепло. Таким образом, внутреннее трение (вязкость) и теплопроводность среды приводят к поглощению звуковой энергии и непрерывному уменьшению интенсивности распространяющейся звуковой волны. Если вначале сила звука составляла  $I_0$ , то после прохождения им участка длины  $x$  сила звука  $I(x)$  будет равна

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (62.2)$$

где  $\alpha$  — так называемый коэффициент поглощения звука. Величина  $\alpha$  возрастает примерно пропорционально квадрату частоты звука, поэтому низкие звуки распространяются дальше высоких. Особенно сильно поглощаются ультразвуки. Так, при частоте  $1 \text{ Мгц} = 10^6 \text{ гц}$  ультразвук распространяется в воздухе на 5 см. Коэффициент поглощения звука в воде примерно в 700 раз меньше, чем в воздухе. Соответственно во столько же раз больше дальность распространения звука. Так, при частоте  $0,1 \text{ Мгц} = 10^5 \text{ гц}$  она равна в воде 3 км. Это обстоятельство позволяет осуществлять связь и гидролокацию в воде на ультразвуковых частотах, при которых легче создать направленные пучки и избежать уменьшения интенсивности с расстоянием по закону (62.2).

При частотах  $\nu \sim 10^9 \text{ гц}$  в газах длина волны ультразвука  $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^3}{10^9} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , т. е. становится сравнимой с длиной свободного пробега молекул при атмосферном давлении. Поскольку механическая связь между соседними объемами газа осуществляется обменом молекул и взаимными столкновениями последних (см. теорию явлений переноса), то при столь коротких волнах газ уже нельзя рассматривать как сплошную упругую среду. Практически в этом случае вся энергия ультразвука будет поглощаться на протяжении одной длины волны.

В пористых материалах (войлок, бархат, штукатурка и т. п.) воздух заключен в огромном числе канальцев неправильной формы. При звуковых колебаниях эти отдельные объемы воздуха испытывают сильное трение о стенки канальцев, поэтому подобные материалы интенсивно поглощают падающие на них звуковые волны.

В архитектурной акустике для больших помещений (залы, аудитории) играет существенную роль так называемая гулкость, или реверберация этих помещений. Звуки испытывают многократное отражение (эхо) от ограждающих поверхностей и воспринимаются слушателем в течение некоторого довольно длительного промежутка времени. Подобная гулкость помещения увеличивает силу доходящего до нас звука, однако при слишком длительной реверберации отдельные звуки речи начинают накладываться один на другой и речь перестает восприниматься членораздельно. Поэтому стены залов и аудиторий покрывают специальными звукопоглощающими материалами для уменьшения гулкости.

Источником звуковых колебаний может служить любое колеблющееся тело: язычок звонка, камертон, струна скрипки или рояля, столб воздуха в духовых инструментах и т. п. Те же самые тела могут служить и приемниками звука, когда они приходят в движение под действием колебаний окружающей их упругой среды. Когда источником или

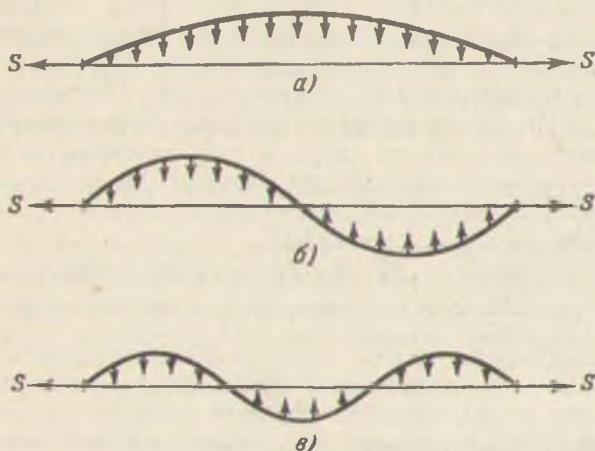


Рис. 4.46.

приемником звука служит протяженное тело, обладающее множеством степеней свободы, то характер его колебаний отличается от рассмотренного выше идеализированного случая колебаний материальной точки с одной степенью свободы.

Для выяснения возникающих в этом случае качественно новых явлений рассмотрим пример колебаний струны длины  $l$ , закрепленной по краям и натягиваемой с силой  $S$  ньютонов (рис. 4.46). Из условий закрепления струны вытекает, что концы струны должны оставаться неподвижными, т. е. на краях струны всегда должны быть узлы колебаний. Если других узловых точек на всей длине струны нет, то струна будет колебаться как целое (рис. 4.46, а) и длина стоячей волны  $\lambda_0$  будет равна удвоенной длине струны:

$$\lambda_0 = 2l. \quad (62.3)$$

По аналогии с формулами (61.5) и (61.6) скорость распространения колебаний вдоль натянутой струны будет равна

$$v_c = \sqrt{\frac{S}{\rho'}}, \quad (62.4)$$

где  $\rho'$  — масса единицы длины струны ( $\text{кг/м}$ ). Следовательно-

но, частота колебаний возникающего звука, так называемого основного тона струны, равна

$$v_0 = \frac{v_s}{\lambda_0} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{S}{\rho'}} \quad (62.5)$$

и зависит от длины струны  $l$ , ее массы  $\rho'$  и натяжения  $S$ .

По условиям возбуждения струна может начать колебаться и так, как это изображено на рис. 4.46, б, т. е. с одним дополнительным узлом посередине. Тогда на расстоянии  $l$  будет укладываться уже одна стоячая волна длиной

$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{2}$ , а соответствующая частота колебаний  $v_1 = 2v_0$ . Если

по длине струны возникнут два дополнительных узла, как показано на рис. 4.46, в, то соответствующая длина стоячей волны  $\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{3}$ , а частота колебаний струны  $v_2 = 3v_0$  и т. д.

Таким образом, колеблющаяся струна наряду с основным тоном частоты  $v_0$  издает еще целый ряд так называемых обертонов, или высших гармоник с частотами

$$v_n = (n + 1)v_0. \quad (62.6)$$

Примесь этих гармоник к основному тону создает «окраску», или тембр звука. Различные тела, издающие один и тот же основной тон, или различные люди, поющие одну и ту же музыкальную ноту, по-разному окрашивают ее примесью свойственных им гармоник, т. е. их звуки обладают различным тембром. Тембр звука характеризуется так называемым спектром частот, изображенным на рис. 4.47. По оси абсцисс на этом рисунке отложены частоты, а по оси ординат — амплитуды отдельных составляющих гармонических колебаний.

За последние десятилетия широко развилась область технических применений электроакустики, т. е. преобразования электрических колебаний в звуковые, ультразвуковые и обратного их превращения в электрические колебания. Эти методы будут описаны в томе II. Сейчас же укажем лишь на некоторые технические применения ультразвука.

Малая длина волны ультразвука обуславливает легкость получения направленных ультразвуковых пучков. Пропуская пучок ультразвуковых лучей через металлическую деталь, можно обнаружить в ней раковины и другие внутренние дефекты по характерному рассеянию пучка от границ дефекта и появлению ультразвуковой тени. На этом принципе основана так называемая ультразвуковая дефектоскопия, созданная С. Я. Соколовым.

Для определения глубины моря под кораблем применяют так называемый эхолот. Источник ультразвука в днище корабля периодически посылает сигналы. Отражаясь от поверхности дна моря, звук возвращается к кораблю и попадает в соответствующий приемник. По времени прохождения сигнала до дна и обратно  $\Delta t$  определяется глубина моря

$$h = v_{\text{из}} \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (62.7)$$

Применение обычных звуковых частот может привести к ошибкам в случае неровного дна, так как волна, отраженная от боковых выступов дна, может вернуться раньше, чем от точек, расположенных непосредственно под кораблем.

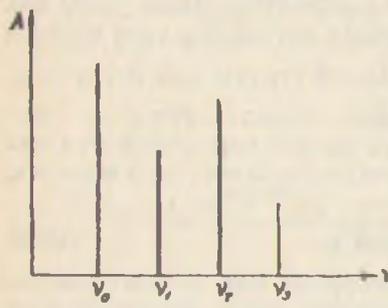


Рис. 4.47.

Поэтому в эхолоте существенно применение направленных ультразвуковых пучков. Таким же образом может быть обнаружено присутствие под водой посторонних тел, например подводной лодки или рыбного косяка. Эти методы ультразвуковой гидролокации были изобретены П. Ланжевенем.

Ультразвуковые волны большой амплитуды широко применяются в настоящее время в технике для механической обработки твердых материалов и т. п.

Как указывалось выше, ультразвуковые волны в воздухе сильно затухают. Это обстоятельство несколько затрудняет осуществление связи с помощью ультразвуковых сигналов и передачи их на большие расстояния.

В природе ультразвуковой локацией пользуются летучие мыши. Как показали наблюдения, слепые летучие мыши охотятся за насекомыми, легко минуя преграды — ветки деревьев, натянутые провода и т. д. Оказалось, что летучие мыши в полете периодически испускают свист в диапазоне не улавливаемых человеческим ухом ультразвуковых частот. В отличие от обычных звуковых волн сравнительно большой длины короткие ультразвуковые волны хорошо рассеиваются на самых незначительных преградах. Прослушивая в паузы между испускаемыми сигналами отраженные и возвращающиеся к ней ультразвуки, летучая мышь легко ориентируется в пространстве.

Колебания с частотами меньше 16 гц — инфразвуки — также могут найти практическое применение. Укажем лишь на пример так называемого «голоса моря», обнаруженного В. В. Шулейкиным. Шторм на море создает длинные звуковые волны, имеющие низкую частоту (8—13 гц). Скорость ветра и передвижение шторма порядка 20—30 м/сек, скорость же звука и в воздухе и в воде значительно больше. Поэтому инфразвуковой, очень низкий «голос моря» опережает шторм и сигнализирует о его приближении. Некоторые морские животные способны воспринимать столь низкие звуки и прячутся задолго до приближения бури, когда даже барометр еще не предсказывает шторма. С. В. Доброклонским были сконструированы соответствующие приборы, сигнализирующие о приближении шторма.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 298  
 Адсорбция 235  
 Альтиметр 112  
  
 Бисния 281  
   / в гетеродинах 283  
  
 Вакуум 128-131  
   —, методы измерения 131  
   —, — получения 130-131  
 Вектор Умова 333  
 Вероятность состояния статистическая 181  
   — термодинамическая 178  
 Волна, отражение 319-321  
   —, поляризация 301  
   —, преломление 329  
 Волны когерентные 314  
   —, плоские 327  
   —, поперечные 301  
   —, продольные 301  
   —, стоячие 323  
   —, сферические 327  
   \ ударные 313  
 Вязкость газа 121, 133-138  
   / —, коэффициент 136  
   — —, —, зависимость от давления 140-141  
   — жидкости 241-244  
   — —, формула Бачинского 243  
  
 Газ идеальный 76  
   — —, в поле тяжести 108-113  
   — —, распределение молекул по объему 81-87  
   — —, — —, скоростям 105-107  
   — —, уравнение состояния 75, 96  
   —, реальный 198-202  
   —, сжижение 212-217  
   —, уравнение состояния 204-210  
   —, электронный в металле 255  
 Гидролокация 342  
 Гироскоп 58  
 Градиент концентрации 131  
   — скорости 136  
   — температуры 139  
  
 Давление гидростатическое 64  
   — капиллярное 236-239  
   — расклинивающее 233  
 Движение броуновское 68, 113-119  
   — колебательное гармоническое 264-267  
   — молекул хаотическое 71, 78-81  
   — равномерное 6  
   — равноускоренное 11  
 Движение снаряда 12  
   — установившееся жидкости 61  
 Декремент затухания логарифмический 292  
 Диаграмма векторная 278  
   \  $pV$  163  
 Дифракция волн 330  
 Диффузия 67, 120  
   — в газах 130-132  
   — —, коэффициент 133  
   \ / —, —, зависимость от давления 140-141  
   — — жидкостях 242  
   — — твердых телах 248  
 Длина волны 304  
   — приведенная физического маятника 273  
   — свободного пробега 122  
   — — — средняя в газе 122-127  
  
 Жидкость идеальная 60  
   \, испарение 224  
   \, кипение 224  
   \, поверхностное натяжение 225-235  
   —, растянутая 211  
   —, сжимаемость 60-62  
   —, сцепление 221  
  
 Закон Бойля — Мариотта 72  
   — Гей-Люссака 72  
   — Гукса 58  
   — Дальтона 77  
   — Дюлонга и Пти 262  
   — количества движения 13-19  
   — кратных отношений 68  
   — пропорциональности массы и энергии 46  
   — психофизиологический 334  
   — сохранения и превращения энергии 34-35  
   — — количества движения 20-23  
   — — момента количества движения 57  
   — Стокса 137  
   — теплопроводности 139  
 Законы динамики 16-20  
   — —, второй 16

—, первый 13—14  
—, третий 19  
Звук, обертоны 332, 341  
—, поглощения 338  
—, реверберации 339  
—, сила 333  
Интерференция волн 312  
Инфразвуки 332, 343  
Когерентность волн 314  
Колебания вынужденные 292—297  
—, гармонические, амплитуда 266  
—, —, период 265  
—, —, фаза 266  
—, —, частота 265—266  
затухающие 288  
корабля 274  
—, распространение 299—305  
—, сложение 277—283  
—, векторная диаграмма 278  
Коэффициент линейного расширения 263  
—, объемного расширения 73  
—, поверхностного натяжения 228  
—, поглощения звука 339  
—, полезного действия тепловых машин 191  
—, —, цикла 171, 191  
—, расширения жидкости 220  
—, термического давления 73  
Кривизна поверхностей жидкости 236—240  
—, траектории 10  
Масса 15  
—, взаимосвязь с энергией 46  
—, единицы 16  
—, изменение при больших скоростях движения 45  
—, покоя 45  
Маятник математический 271  
—, физический 273  
Модуль сдвига 334, 260  
—, Юнга 259, 334  
Момент вращательный 52  
—, инерции 55  
—, количества движения 56  
—, —, закон сохранения 57  
Монокристаллы 251  
Мощность 27  
Напор гидравлический 64  
—, динамический 64  
—, статический 64  
Опыты Иоффе 260  
—, Перрена 113—115  
—, Штерна 103—105  
—, Эндриуса 202  
Отражение волн 319—321  
—, —, стоячие волны 321—325  
Полимеры 260  
Порядок ближний 249  
—, дальний в кристаллической решетке 250  
Постоянная Больцмана 97, 178  
—, газовая 76, 97, 152  
Принцип Больцмана 155  
—, Гюйгенса 327—329  
—, суперпозиции волн 313  
Процесс необратимый 173, 177  
—, обратимый 173, 177, 182

—, с газом 162—165  
—, —, —, адиабатический 167, 182  
—, —, —, изобарический 165  
—, —, —, изотермический 166, 183  
—, —, —, изохорический 164  
Работа 26—30  
—, и теплота 146—149  
Равновесие атомов в твердых телах 248  
—, динамическое жидкости и пара 224  
—, тепловое 176  
Разность хода 316  
Распределение Больцмана 113  
—, Максвелла 105—107  
—, равномерное молекул 85, 86  
Резонанс механический 297  
—, параметрический 299  
Решетка кристаллическая 250  
—, аллотропические модификации 255  
—, —, анизотропия 251  
—, —, атомная 253  
—, —, вакансии в ней 248  
—, —, ионная 252  
—, —, классы симметрии 251  
—, —, металлическая 255  
—, —, молекулярная 254  
Самодиффузия 241  
Сжижение газов 213—219  
Сила 14  
—, вынуждающая 292  
—, единицы 18  
—, звука 333  
—, поверхностного натяжения 229  
—, подъемная 65  
—, центробежная 51  
Силы в кристаллической решетке валентные 252  
—, —, —, —, ван-дер-ваальсовы 254  
—, —, —, —, кулоновские 253  
—, квазипружные 269—270  
—, молекулярные 193—197  
—, упругие 268—269  
Симметрия в кристаллах 252  
Системы единиц в механике 17, 18  
—, материальных точек 4  
—, молекул 78, 87  
—, —, макросостояние 82, 98, 178  
—, —, микросостояние 82, 98  
—, —, отсчета 4  
Скорость звука 336  
—, молекул наиболее вероятная 104  
—, —, распределение Максвелла 103—105  
—, —, средняя 88—90  
—, —, распространения волна 305—307  
—, точки 6  
—, —, мгновенная 7  
—, —, при колебании 268  
—, —, угловая 50  
Смазка 244  
Смачивание 234  
Состояние агрегатное 197  
—, газа 80  
—, —, необратимость 80  
Степени свободы 5, 49, 154—156, 264  
Сублимация 257  
Тело отсчета 4, 48  
—, поликристаллическое 251

— твердое абсолютно 48  
— — аморфное 247  
— —, кристаллизация 247  
— —, зародыши 251  
— —, механические свойства 256—260  
—, тепловое движение в нем 261  
Температура 96—98  
  абсолютная 73  
  абсолютного кипения 201  
—, абсолютный ноль 73, 101  
— кипения 223—226  
— критическая 202, 211—216  
— —, определение методом Навескина 215  
—, методы измерения 99—100  
Теплоемкость газа 149—152, 165—168  
  двухатомного 155  
  —, объяснение на основе квантовой механики 157—161  
  одноатомного 153—154  
  — при постоянном давлении 151, 152, 167  
  — — — объеме 151, 152, 164  
  — трехатомного 156  
— твердого тела 262  
— — —, закон Дюлонга и Пти 262  
Теплопроводность газа 121, 137—139  
  — коэффициент 139  
  —, зависимость от давления 141  
Теплота испарения 223  
  плавления 246  
— превращения кристаллических модификаций 255  
Термодинамика 67  
—, второе начало 184—188  
—, первое начало 147—149  
—, третье начало 189  
Термометры 99—100  
Точка критическая 211  
— материальная 3  
Траекторная точка 5  
— —, радиус кривизны 10  
Трение в колебательных системах 289  
— внутреннее 121, 135—139  
  
Угол красной 234  
— отражения 329  
— падения 328  
— преломления 329  
Удар центральный 39—43  
— —, абсолютно неупругий 42  
— —, — упругий 39  
Ультразвук 332  
—, дефектоскопия 341  
—, эхолоты 342

Уравнение Бернулли 61—63  
— Битти — Бриджмена 208  
— ван-дер-Ваальса 208  
— —, константы 211  
— Клаузиуса 95  
  колебаний 287, 290  
— луча 302  
— Менделеева — Клапейрона 74, 96, 162, 204  
Ускорение точки 7  
— — касательное 9  
Ускорение точки нормальное 10  
— — при колебании 267  
— угловое 51

Фигуры Лиссажу 285  
— классическая, границы применимости 45—49  
  — статическая 69—70, 79  
Флотация 235  
Флуктуация 86, 119, 188  
Формула барометрическая 109—111  
— Бачинского 243  
— Лапласа 238  
— Майера 153  
— Менделеева 220  
— Стокса 137  
— Френкеля 242  
Фронт волны 300

Цикл замкнутый с газом 170, 175, 190  
— Капины 218—219  
— Карно 190  
— Линде 217

Число Авогадро, определение 113—116

Энергия звука 333  
— кинетическая 27—29  
— колебания 275—277  
— покоя 48  
— полная вращающегося тела 59  
— потенциальная 28—39  
— — тяготения 35—37  
— — упругих деформаций 37—38  
— свободной поверхности жидкости 230  
— средняя молекул в газе 95—97  
Энтропия 177—182  
Эффект бинауральный 337  
— Допплера 309—311

Явления капиллярные 236—241  
— переноса в газах 120—122  
— — — жидкостях 239—241

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ЧАСТЬ I

#### ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Глава I. Кинематика точки . . . . .	3
§ 1. Материальная точка. Системы отсчета . . . . .	3
§ 2. Скорость и ускорение произвольно движущейся точки . . . . .	6
Глава II. Законы динамики . . . . .	13
§ 3. Законы Ньютона . . . . .	13
§ 4. Закон сохранения и изменения количества движения (импульса). Реактивное движение . . . . .	20
§ 5. Работа сил и кинетическая энергия . . . . .	26
§ 6. Потенциальная энергия. Закон сохранения и превращения энергии . . . . .	30
§ 7. Потенциальная энергия тяготения и упругих деформаций . . . . .	35
§ 8. Центральный удар шаров . . . . .	39
§ 9. Границы применимости законов классической механики . . . . .	44
Глава III. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси . . . . .	48
§ 10. Кинематика вращательного движения . . . . .	48
§ 11. Динамика вращения . . . . .	52
Глава IV. Движение жидкости (элементы гидро- и аэродинамики) . . . . .	60
§ 12. Уравнение Д. Бернулли . . . . .	60

### ЧАСТЬ II

#### ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Глава V. Основные представления молекулярно-кинетической теории . . . . .	66
§ 13. Введение. Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории . . . . .	66
✓ § 14. Опытные газовые законы. Уравнение Менделеева — Клапейрона . . . . .	72
§ 15. Хаотичность молекулярного движения . . . . .	77
§ 16. Статистические закономерности. Распределение молекул по объему . . . . .	81

**Глава VI. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа**

- § 17. Средняя скорость молекул. Поток молекул . . . . .
- ✓ § 18. Основное уравнение кинетической теории газов . . . . .
- ✓ § 19. Температура и методы ее измерения. Абсолютный нуль температуры . . . . .
- ✓ § 20. Скорости газовых молекул. Распределение Максвелла . . . . .
- ✓ § 21. Газ в поле тяжести. Барометрическая формула . . . . .
- § 22. Опыты Перрена. Определение числа Авогадро . . . . .
- § 23. Броуновское движение . . . . .

**Глава VII. Явления переноса в газах**

- § 24. Явления переноса . . . . .
- § 25. Число столкновений и длина свободного пробега молекул в газе . . . . .
- § 26. Вакуум. Методы его получения и измерения . . . . .
- § 27. Диффузия газов . . . . .
- § 28. Вязкость газа (внутреннее трение) . . . . .
- § 29. Теплопроводность газа . . . . .
- § 30. Коэффициенты переноса и их зависимость от давления . . . . .

**Глава VIII. Первое начало термодинамики**

- § 31. Работа и теплота. Первое начало термодинамики . . . . .
- § 32. Теплоемкость газа. Физический смысл универсальной газовой постоянной . . . . .
- § 33. Теплоемкости одноатомных и многоатомных газов . . . . .
- § 34. Процессы и циклы с газами и их графическое изображение . . . . .

**Глава IX. Второе начало термодинамики**

- § 35. Обратимые и необратимые процессы . . . . .
- § 36. Энтропия . . . . .
- § 37. Второе начало термодинамики . . . . .

**ЧАСТЬ III**

**АГРЕГАТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ**

**Глава X. Реальные газы**

- § 38. Молекулярные силы . . . . .
- § 39. Реальный газ. Пар. Жидкость . . . . .
- § 40. Уравнение состояния реального газа . . . . .
- § 41. Сжижение газов . . . . .

**Глава XI. Строение и свойства жидкостей**

- § 42. Сцепление жидкостей. Испарение и кипение . . . . .
- § 43. Поверхностное натяжение жидкости . . . . .
- § 44. Капиллярные явления . . . . .
- § 45. Явления переноса. Вязкость жидкости . . . . .

**Глава XII. Строение и свойства твердых тел**

- § 46. Кристаллические и аморфные тела . . . . .
- § 47. Типы кристаллических решеток . . . . .
- § 48. Механические свойства твердых тел . . . . .
- § 49. Тепловое движение в твердых телах . . . . .

**ЧАСТЬ IV**

**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

**Глава XIII. Гармоническое колебательное движение**

- § 50. Кинематика гармонического колебания . . . . .

88	§ 51. Упругие и квазиупругие силы . . . . .	268
88	§ 52. Энергия гармонических колебаний . . . . .	275
92	§ 53. Сложение гармонических колебаний . . . . .	277
	§ 54. Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс	288
98	<b>Глава XIV. Волны . . . . .</b>	<b>300</b>
102	§ 55. Распространение колебаний. Уравнение луча . . . . .	300
109	§ 56. Скорость распространения волн в упругой среде.	305
113	§ 57. Эффект Доплера . . . . .	309
117	§ 58. Интерференция волн . . . . .	312
120	§ 59. Отражение волн. Стоячие волны . . . . .	319
120	§ 60. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн . . . . .	327
	<b>Глава XV. Звук . . . . .</b>	<b>332</b>
122	§ 61. Природа звука . . . . .	332
128	§ 62. Распространение звука. Источники и приемники звука	336
130	Предметный указатель . . . . .	344
133		
138		
141		
145		
145		
149		
153		
162		
172		
172		
177		
184		
193		
193		
198		
204		
212		
219		
219		
226		
236		
241		
245		
245		
252		
257		
261		
264		
264		

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ, ТОМ I

*В основу положен «Курс общей физики»  
Г. А. Зисман, О. М. Тодес*

Сдано в набор 28.06.94. Подписано в печать  
22.08.94. Формат 84 × 108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага типогр. Гар-  
нитура литературная. Печать высокая. Усл. печ.  
л. 18,48. Зак. 4—1213.

Головное предприятие республиканского произ-  
водственного объединения «Полиграфкнига».  
252057, Киев, ул. Довженко, 3.

