АЭРОДИНАМИКА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Н. С. Аржаников
(1905—1982)

Н. С. АРЖАНИКОВ
Г. С. САДЕКОВА

АЭРОДИНАМИКА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов авиационных специальностей вузов

МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 22.253.3
А80
УДК 533.6 (075.8)

Рецензенты:
кафедра аэродинамики Московского высшего технического училища им. Н. Э. Баумана (зав. кафедрой — д-р техн. наук, проф. *Н. Ф. Краснов);* заслуженный деятель науки и техники РСФСР, д-р техн. наук, проф. *А. К. Мартынов* (Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского)

Аржаников Н. С., Садекова Г. С.
А80 Аэродинамика летательных аппаратов: Учебник для студентов авиационных специальностей вузов. — М.: Высш. шк., 1983. — 359 с., ил.

В пер.: 1 р. 10 к.

В учебнике систематически изложены теоретические основы аэродинамики, а также методы определения аэродинамических характеристик современных летательных аппаратов и их частей (крыльев и корпусов) при дозвуковых, сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях полета. Приведены сведения об особенностях обтекания и аэродинамических характеристиках тел в разреженной среде.

А $\frac{3606030000-196}{001(01)-83}$ 158—83

ББК 22.253.3
533

НИКОЛАЙ СЕРГЕЕВИЧ АРЖАНИКОВ

Предлагаемый вниманию читателей учебник обобщает и систематизирует материал лекционных курсов, на протяжении многих лет читавшихся *Николаем Сергеевичем Аржаниковым* студентам и аспирантам Московского ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции авиационного института им. Серго Орджоникидзе (МАИ).

Выдающийся педагог и крупный ученый Н. С. Аржаников начал свою научную деятельность в аспирантуре Московского государственного университета, а затем в Центральном аэрогидродинамическом институте им. Н. Е. Жуковского (ЦАГИ) в конце 20-х годов под руководством крупнейших ученых-механиков нашей страны академиков *С. А. Чаплыгина* и *А. И. Некрасова*. Уже в то время им были опубликованы фундаментальные работы по обтеканию тел несжимаемой жидкостью, теории крыла с закрылком, получившие заслуженное признание научной общественности.

Трудовая деятельность Н. С. Аржаникова началась в ЦАГИ и многие годы была связана с ним. В предвоенные годы он работал первым заместителем начальника этого ведущего научного центра отечественного авиастроения. Одновременно Н. С. Аржаников занимался педагогической работой, которую не оставлял до последних дней своей жизни. Им многое сделано для организации высшего инженерного образования в стране особенно для становления учебного процесса и научных исследований в МАИ, куда он пришел молодым профессором в год создания этого вуза (1930), где работал заведующим кафедрой, деканом самолетостроительного факультета, заместителем директора по учебно-научной работе.

В памяти многих поколений выпускников МАИ Н. С. Аржаников останется блестящим лектором, сочетавшим строгость и стройность изложения сложнейших вопросов теоретической аэродинамики с ясной их физической интерпретацией. Ему принадлежат ранее изданные учебники «Аэродинамика» (1952 и 1956 гг. совместно с В. Н. Мальцевым), «Аэродинамика больших скоростей» (1965 г. совместно с Г. С. Садековой), в которых на высоком научном и методическом уровне в сжатой форме, но с должной глубиной и широтой рассмотрены основные проблемы аэрогазодинамики. Этими учебниками и по сей день пользуются студенты авиационных специальностей вузов страны.

В послевоенные годы Н. С. Аржаников руководит системой высших технических учебных заведений сначала в авиационной промышленности, а затем в Министерстве высшего образования.

Николай Сергеевич пользовался заслуженным авторитетом среди ученых страны. Его научная эрудиция и высокая общая культура ярко проявилась во время работы (начиная с 1956 г.) ученым секретарем — членом Президиума Комитета по ленинским и государственным премиям СССР в области науки и техники, где он работал рядом с такими выдающимися учеными нашей страны, как *М. В. Келдыш* и *А. П. Александров.*

Коммунистическая партия и Советское правительство высоко оценили большую научно-педагогическую, общественную и организационную деятельность Н. С. Аржаникова, присвоив ему звание «Заслуженного деятеля науки РСФСР» и отметив многими высокими наградами Родины.

Николай Сергеевич скончался 4 июня 1982 г., когда эта книга готовилась издательством к печати.

Начальник ЦАГИ
академик Г. П. СВИЩЕВ

Июнь 1982 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Аэродинамика является одной из фундаментальных профилирующих дисциплин, необходимых специалистам, работающим в области авиационной и ракетно-космической техники. Она имеет важное значение и для ряда смежных наук. Данные аэродинамики широко используются при определении летно-технических характеристик летательного аппарата, исследовании его устойчивости и управляемости, расчете аппарата на прочность.

Без прочных и глубоких знаний аэродинамики невозможно стать квалифицированным инженером в области авиации, ракетостроения и космической техники. Важно прочно овладеть основами аэродинамики, достаточными и необходимыми для решения различных конкретных задач, связанных с полетом летательного аппарата.

Настоящая книга является учебником по курсу «Аэродинамика летательных аппаратов». Основой учебника послужили лекции, читаемые авторами студентам Московского орденов Ленина и Октябрьской революции авиационного института им. С. Орджоникидзе.

В учебнике достаточно полно представлены как теоретические основы аэродинамики, так и прикладные вопросы аэродинамики современных летательных аппаратов (ЛА). Изложению теоретических основ аэродинамики в учебнике уделено особое внимание, так как без этого невозможно изучение и глубокое понимание аэродинамики ЛА, а в дальнейшем и творческое решение практических задач в этой области.

В гл. 1—6 рассмотрены основные понятия и определения, теория вихревого движения, основные уравнения движения газа, вопросы аэродинамического подобия, теория скачков уплотнения и потенциальных течений.

Последующие четыре главы (гл. 7—10) содержат теоретические основы обтекания и методы расчета аэродинамических характеристик крыльев бесконечного и конечного размаха, тел вращения при малых и больших дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Здесь наряду с аналитическими зависимостями аэродинамических характеристик, важных для понимания физической сущности явлений, представлены также некоторые результаты численных решений задач аэродинамики на ЭВМ.

Вопросы аэродинамики гиперзвуковых скоростей сведены в отдельную главу (гл. 11), в которой изложены важнейшие результаты исследований применительно к гиперзвуковым ЛА. В частности, здесь рассмотрена теория скачков уплотнения с учетом реальных свойств газа при высоких температурах, характерных для обтекания тел гиперзвуковым потоком.

В гл. 12 в достаточно полном объеме описаны теория пограничного слоя и методы расчета сопротивления трения частей ЛА как при малых, так и при больших скоростях полета.

В гл. 13 приведены аэродинамические характеристики ЛА при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях полета. Здесь изложены вопросы интерференции частей ЛА, а также его аэродинамические характеристики в продольном и боковом движениях. Особое внимание уделено пониманию физической сущности сложных явлений взаимодействия частей ЛА.

Гл. 14 посвящена особенностям обтекания и аэродинамическим характеристикам простых тел в условиях разреженного газа.

Учебник написан в соответствии с программой курса по аэродинамике для студентов авиационных институтов.

Материал в учебнике распределен следующим образом. Введение, гл. 2, 4 и 6 написаны *Н. С. Аржаниковым*, гл. 9—11, 13 и 14 — *Г. С. Садековой*, а гл. 1, 3, 5, 7, 8, 12 написаны совместно.

Надеемся, что этот учебник позволит студентам творчески изучать вопросы аэродинамики ЛА и будет способствовать развитию у них навыков самостоятельной работы в этой области науки.

В работе над рукописью учтены ценные указания, полезные советы и предложения рецензентов — д-ра техн. наук, проф. *А. К. Мартынова* и сотрудников кафедры «Аэродинамика» Московского высшего технического училища им. Н. Э. Баумана, возглавляемой д-ром техн. наук, проф. *Н. Ф. Красновым*, которым приносим глубокое признание.

Особую благодарность выражаем научному редактору д-ру техн. наук, проф. *Ю. А. Рыжову* за большую помощь, оказанную при создании учебника.

Замечания и советы читателей, которые позволят в дальнейшем улучшить содержание учебника, будут приняты также с благодарностью; их следует направлять по адресу: *Москва, К-51, Неглинная, 29/14, издательство «Высшая школа».*

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Аэродинамика — наука, изучающая законы движения воздуха (газов), законы взаимодействия между воздушной средой и движущимся в ней твердым телом. Определение сил и моментов, действующих на твердое тело при его движении в воздушной среде — одна из основных задач аэродинамики. Аэродинамика является теоретической основой авиационной и ракетно-космической техники.

При малых скоростях движения воздуха, когда малы и разности давления в различных точках потока, влиянием сжимаемости воздуха можно пренебречь, т. е. считать плотность воздуха постоянной величиной. При этом законы движения воздуха и его взаимодействия с обтекаемыми телами совпадают с законами *гидродинамики* — науки о движении несжимаемой жидкости. Теоретические основы гидродинамики были заложены Л. Эйлером и Д. Бернулли.

При течении воздуха или газа с большими скоростями, соизмеримыми со скоростью звука, влиянием сжимаемости нельзя пренебречь. Такое движение газа сопровождается большими изменениями давления, плотности и температуры. Поэтому законы движения воздуха (газа) с большими скоростями, изучаемые в аэродинамике больших скоростей (в газодинамике), отличны от законов движения несжимаемой жидкости.

Аэродинамика больших скоростей (*газодинамика*) — раздел аэродинамики, в котором изучаются законы движения газа (воздуха) при больших дозвуковых и сверхзвуковых скоростях, законы взаимодействия между воздушной средой и телом, движущимся в ней с большой дозвуковой и сверхзвуковой скоростями. Применительно к летательным аппаратам газодинамика стала интенсивно развиваться в начале 40-х годов в связи с созданием и совершенствованием сверхзвуковых летательных аппаратов. В дальнейшем успехи, достигнутые в создании мощных ракетных двигателей, позволили увеличить скорости полета летательных аппаратов до космических — первой космической скорости, приблизительно равной 8 км/с, и второй космической скорости — 11,2 км/с.

В связи с потребностями ракетной и космической техники, наряду с газодинамикой умеренных сверхзвуковых скоростей, бурное развитие получила *аэродинамика больших сверхзвуковых* (*гиперзвуковых*) *скоростей*.

При полетах космических аппаратов на очень больших высотах, т. е. в условиях разреженной атмосферы, воздух нельзя рассматривать как сплошную среду. При этом нужно учитывать молекулярно-кинетическую структуру газа, что составляет основу *аэродинамики разреженных газов.*

Таким образом, по диапазону скоростей (чисел **М**) и высот полета можно выделить следующие разделы аэродинамики: аэродинамика несжимаемой среды, аэродинамика больших скоростей (газодинамика), аэродинамика гиперзвуковых скоростей и аэродинамика разреженных газов.

При аэродинамических исследованиях широко используется *принцип обращения движения,* в соответствии с которым вместо движущегося с постоянной скоростью в неподвижной среде тела рассматривают обтекание неподвижного тела потоком со скоростью, равной скорости движения тела. Прием обращения движения следует из общего принципа относительности, применяемого к системе среда — тело, согласно которому обращение движения не влияет на действующие на тело аэродинамические силы и моменты.

При изучении обтекания тел потоком обычно рассматривают упрощенные модели жидкости и газа. Например, во многих случаях можно пренебречь влиянием вязкости среды. Тогда рассматривают модели идеальной жидкости: при малых скоростях — *модель идеальной несжимаемой жидкости,* а при больших скоростях — *модель идеальной сжимаемой жидкости.*

В тех случаях, когда влиянием вязкости нельзя пренебречь, например при определении сопротивления трения, вводят *модель вязкой жидкости.* При обтекании тел в большинстве случаев влияние вязкости проявляется только в тонком пристеночном слое, называемом *пограничным слоем.* Поток вне пограничного слоя можно считать невязким. Исследования пограничного слоя проводятся с целью определения как сопротивления трения, так и аэродинамического нагрева поверхности летательного аппарата при больших скоростях полета. Современная теория пограничного слоя базируется на фундаментальных исследованиях Л. Навье, Д. Стокса, О. Рейнольдса, Л. Прандтля, Т. Кармана и др.

Большую роль в решении задач аэродинамики играют экспериментальные исследования, проводимые в аэродинамических трубах и газодинамических установках.

Первые в России аэродинамические лаборатории (в Московском государственном университете, Московском высшем техническом училище им. Н. Э. Баумана и в Кучино под Москвой) были созданы под руководством проф. Н. Е. Жуковского (1847—1921). В 1918 г. по его инициативе был организован Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), который стал одним из крупнейших мировых научно-исследовательских центров в области аэродинамики.

Н. Е. Жуковский является признанным основателем и подлинным руководителем русской школы авиационной науки и техники, создателем основ теоретической и экспериментальной аэродинамики, организатором высшего авиационного образования. В. И. Ленин назвал его «отцом русской авиации». Еще в 1909/10 учебном году

Н. Е. Жуковский впервые в мире в МВТУ начал читать лекции, в которых в систематическом изложении были разобраны теоретические вопросы, связанные с авиацией, разработанные как русскими учеными, в том числе и самим Н. Е. Жуковским, так и зарубежными; показана необходимость сочетания теоретических и экспериментальных исследований. Курс лекций, названный им «Теоретические основы воздухоплавания» был издан в России в 1912, 1925, 1938, 1950 гг. и во Франции в 1916 и 1931 гг.

Осуществление первых полетов на аппаратах тяжелее воздуха в начале XX в. настоятельно поставило перед учеными задачу о создании теории, объясняющей причину образования подъемной силы крыла и способов ее определения. Эту задачу также решил Н. Е. Жуковский. Исключительная важность его открытия заключается в том, что, используя модель идеальной несжимаемой жидкости, он впервые в мире предложил искать источник силового воздействия на тело в образовании циркуляции, создаваемой присоединенными вихрями. Так, 15 ноября 1906 г. Н. Е. Жуковский сообщает Московскому математическому обществу о своем открытии и формулирует знаменитую теорему о подъемной силе, носящей в международной литературе его имя. Однако перед ученым возникла трудность в практическом применении этой теоремы к крыловым профилям из-за произвола в выборе циркуляции для наперед заданной величины скорости обтекания. Это блестяще решил С. А. Чаплыгин, предложивший ввести постулат, заключавшийся в требовании плавного схода струй с задней кромки профиля, что дало возможность однозначно определить величину циркуляции, а следовательно, и величину подъемной силы. Через 10 лет теорему Н. Е. Жуковского обобщает в Германии проф. Л. Прандтль для крыла конечного размаха произвольной формы в плане. Начиная с 1912 г. внимание Н. Е. Жуковского сосредоточивается на второй основополагающей проблеме — создании вихревой теории гребного винта самолета. И это он успешно выполнил и опубликовал работу под названием «Вихревая теория гребного винта».

Открытия, явившиеся основой создания теоретической и экспериментальной аэродинамики, упрочили за Н. Е. Жуковским мировую известность, как одного из главных создателей классической аэродинамики.

Другой крупнейший ученый, имя которого неразрывно связано с созданием классической аэродинамики, — это соратник и продолжатель работ Н. Е. Жуковского — академик С. А. Чаплыгин (1869—1942), являющийся одним из основоположников газодинамики. Его докторская диссертация «О газовых струях», опубликованная в 1902 г., опередила мировую науку на несколько десятилетий. Отличную характеристику значимости этой работы дал ученик С. А. Чаплыгина — выдающийся академик М. В. Келдыш. «Работу С. А. Чаплыгина «О газовых струях» постигла интересная судьба. В 1903 г. он защитил ее как докторскую диссертацию, однако в то время она осталась почти незамеченной. Ни сам Сергей Алексеевич и никто другой не продолжили развитых в ней идей, и никто не при-дал работе исключительного значения... Только через 30 лет, после появления работы «О газовых струях», когда авиация стала подходить к скоростям полета, близким к звуковым, и вопросы изучения газовых потоков с большими скоростями стали актуальнейшими вопросами, было раскрыто все значение этой работы.... Работа С. А. Чаплыгина стала в центре многочисленных исследований аэродинамиков, она явилась основой для решения задач о дозвуковых течениях, и развитие созданных в ней методов привело к решению вопросов, связанных с работой крыла при больших дозвуковых скоростях и других вопросов современной аэродинамики»*. Эта работа стала классическим трудом по аэродинамике больших дозвуковых скоростей, после появились работы как советских, так и виднейших зарубежных аэродинамиков (Л. Прандтль, Т. Карман, А. Буземан, Х. Ш. Тзян и др.).

Обращаясь к последующему развитию аэродинамики, следует отметить грандиозный количественный и качественный скачок в скоростях полета, который произошел за сравнительно небольшой исторический отрезок времени. Скорости полетов аппаратов от сверхзвуковых и гиперзвуковых значений достигли космических. Этому росту содействовало бурное развитие ракетной техники. И здесь высшим авторитетом становится выдающийся ученый современности М. В. Келдыш (1911—1978) — главный теоретик космонавтики.

Работы М. В. Келдыша в области космической науки явились продолжением комплекса его исследований в области специальных проблем математики и аэродинамики. Он оставил в науке огромный след в виде фундаментальных работ, создания новых направлений и новых теорий. Из числа его великолепных исследований по аэродинамике следует указать на обобщение М. В. Келдышем теоремы Н. Е. Жуковского на случай обтекания профиля сжимаемым газом.

Из всех крупнейших открытий М. В. Келдыша в период его работы в ЦАГИ следует особенно отметить блестящее решение такой сложнейшей проблемы, как проблема флаттера. Работами М. В. Келдыша были не только заложены фундаментальные основы теории этого сложнейшего явления, но и разработан практический метод решения этой задачи.

С именем М. В. Келдыша связано создание совершенно новой науки — вычислительной математики, возникшей на базе классической математики и новых вычислительных средств. Без этой науки были бы невозможны многие фундаментальные достижения современности, в частности развитие ракетной и космической науки и техники.

Разработка межконтинентальной баллистической ракеты позволила открыть перспективу создания первого поколения ракет-носителей и предоставить уникальную возможность для человечества вырваться из сферы земного притяжения. Такую возможность отчетливо видел М. В. Келдыш, под руководством которого с середины 50-х годов начали разрабатываться теоретические предпосылки вывода

---

* *Келдыш М. В.* Сергей Алексеевич Чаплыгин. Биографический очерк. — В кн.: Классики науки. С. А. Чаплыгин. Избр. труды. — М., Наука, 1976.

искусственных тел на околоземные орбиты, а в дальнейшем — к Луне и планетам Солнечной системы. Так, под руководством М. В. Келдыша, в тесном сотрудничестве с Генеральным конструктором С. П. Королевым 4 октября 1957 г. был выведен на орбиту первый искусственный спутник Земли.

М. В. Келдыш становится главным научным руководителем огромного комплекса сложнейших космических исследований и конструкторских разработок. С именем М. В. Келдыша связано не только проведение серии полетов к Луне, Венере и другим планетам, но и подготовка и осуществление первого выхода человека в космос. Исторический полет 12 апреля 1961 г. первого космонавта планеты Ю. А. Гагарина на космическом корабле «Восток» открыл новую эру освоения человеком космического пространства. Это было обеспечено советскими учеными и конструкторами под непосредственным руководством главного теоретика космонавтики акад. М. В. Келдыша и Генерального конструктора акад. С. П. Королева.

Отметим, что отличительной чертой многих выдающихся русских ученых-механиков было органическое сочетание их научных исследований с решением чисто практических инженерных задач. К их числу принадлежал и проф. Н. Е. Жуковский — создатель основ аэродинамической науки и авиационной техники. Эту отличительную особенность — сочетание теории с практикой — Н. Е. Жуковский привил и своим ученикам — академикам А. Н. Туполеву, Б. С. Стечкину, Л. С. Лейбензону и Б. Н. Юрьеву, профессорам А. М. Черемухину, Г. Н. Мусиньянцу, Г. Х. Сабинину, В. П. Ветчинкину, К. А. Ушакову, Н. И. Ворогушину, И. И. Сидорину, А. А. Архангельскому, И. И. Погосскому и другим — подлинной авиационной когорте прославленных ученых и конструкторов. Эта особенность ярко проявилась в поразительном по своей могучей силе творчестве акад. М. В. Келдыша, разработавшего блестящие математические приемы для решения сложнейших инженерных задач.

Решения XXVI съезда КПСС, нацелившие ученых на еще большее расширение фронта научных исследований, активно способствуют более интенсивному развитию научных исследований, органически связанных с эффективным решением сложных практических задач в области народного хозяйства и новой техники.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

R — удельная газовая постоянная, Дж/(кг·К);
p — давление, Па;
ρ — плотность, кг/м^3;
T — абсолютная температура, К;
c_v, c_p — удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении, Дж/(кг·К);
k — отношение удельных теплоемкостей;
s — удельная энтропия, Дж/(кг·К);
i — удельная энтальпия, Дж/кг;
$\vec{v}$ — вектор скорости потока, м/с;
a — скорость звука, м/с;
v_x, v_y, v_z — составляющие скорости потока по осям координат;
Γ — циркуляция скорости, м^2/с;
μ — динамическая вязкость, Па·с;
ν — кинематическая вязкость, м^2/с;
τ_{xy}, ..., τ_{xz} — касательные напряжения, Па;
p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} — нормальные напряжения, Па;
$T_{ст}$ — температура стенки, К;
T_r — температура восстановления, К;
T^* — определяющая температура, К;
α — угол атаки, рад, град;
β — угол скольжения, рад, град;
c_x — коэффициент аэродинамической продольной силы (коэффициент продольной силы);
c_y — коэффициент аэродинамической нормальной силы (коэффициент нормальной силы);
c_z — коэффициент аэродинамической поперечной силы (коэффициент поперечной силы);
c_{xa} — коэффициент лобового сопротивления;
c_{ya} — коэффициент аэродинамической подъемной силы (коэффициент подъемной силы);
c_{za} — коэффициент аэродинамической боковой силы (коэффициент боковой силы);
$\bar{p}$ — коэффициент давления;
q — скоростной напор, Па;
X — аэродинамическая продольная сила (продольная сила), Н;
Y — аэродинамическая нормальная сила (нормальная сила), Н;
Z — аэродинамическая поперечная сила (поперечная сила), Н;
X_a — сила лобового сопротивления, Н;
Y_a — аэродинамическая подъемная сила (подъемная сила), Н;
Z_a — аэродинамическая боковая сила (боковая сила), Н;
M_x — аэродинамический момент крена (момент крена), Н·м;
M_y — аэродинамический момент рыскания (момент рыскания), Н·м;
M_z — аэродинамический момент тангажа (момент тангажа), Н·м;
$M_ш$ — шарнирный момент органов управления, Н·м;
m_x — коэффициент аэродинамического момента крена (коэффициент момента крена);
m_y — коэффициент аэродинамического момента рыскания (коэффициент момента рыскания);
m_z — коэффициент аэродинамического момента тангажа (коэффициент момента тангажа);
$m_ш$ — коэффициент шарнирного момента;
Ox — продольная ось;
Oy — нормальная ось;
Oz — поперечная ось;
Ox_a — скоростная ось;
Oy_a — ось подъемной силы;
Oz_a — боковая ось;
x, y, z — координаты по осям Ox, Oy, Oz;
x_a, y_a, z_a — координаты по осям Ox_a, Oy_a, Oz_a;

$\bar{z} = 2z/l$ — относительная координата вдоль оси Oz;

$\bar{c}$ — относительная толщина сечения крыла;

$\bar{x}_c$ — относительная координата максимальной толщины сечения крыла;

$\bar{x}_д$ — относительная координата центра давления;

$\bar{x}_F$ — относительная координата аэродинамического фокуса;

$\bar{x}_t$ — относительная координата точки перехода;

$\bar{x}_т$ — относительная координата центра масс летательного аппарата;

$\delta_в$, $\delta_э$, $\delta_н$ — углы отклонения органов управления тангажом (рулей высоты), креном (элеронов) и рысканием (рулей направления);

$\delta_р$ — угол отклонения рулей;

ω_x, ω_y, ω_z — угловые скорости летательного аппарата вокруг осей Ox, Oy, Oz, рад/с;

c_y^α, $c_{y_а}^\alpha$, m_z^α, $m_z^{c_y}$, c_y^δ — производные аэродинамических коэффициентов;

Re, **M**, **Fr**, **Sh**, **St**, **Pr** — числа Рейнольдса, Маха, Фруда, Струхаля, Стантона, Прандтля;

$\mathbf{M}_{кр}$ — критическое число **M**;

c_F — коэффициент подсасывающей силы;

c_f — местный коэффициент трения;

C_f — суммарный коэффициент сопротивления трения плоской пластинки;

b — хорда крыла, м;

b_0, $b_к$ — корневая и концевая хорды крыла, м;

b_A — средняя аэродинамическая хорда, м;

$b_{ср}$ — средняя хорда, м;

$\chi_{п.к}$ — угол стреловидности по передней кромке;

χ_c — угол стреловидности по линии максимальных толщин сечений крыла;

$\chi_{0,5}$ — угол стреловидности по линии середин хорд;

$\chi_{з.к}$ — угол стреловидности по задней кромке;

$\chi_р$ — угол стреловидности по оси вращения руля;

λ — удлинение крыла с подфюзеляжной частью;

$\lambda_к$ — удлинение двух консолей крыла;

$\lambda_ф$ — удлинение корпуса (фюзеляжа);

$\lambda_{нос}$, $\lambda_ц$, $\lambda_{корм}$ — удлинения носовой, цилиндрической и кормовой частей корпуса (фюзеляжа);

$\eta_{корм}$ — сужение кормовой части корпуса (фюзеляжа);

S — характерная площадь летательного аппарата, м^2;

$S_к$ — площадь двух консолей крыла, м^2;

$S_ф$ — площадь миделя корпуса, м^2;

l — размах крыла, м;

$L_ф$ — длина корпуса (фюзеляжа) м;

$L_{нос}$, $L_{корм}$, $L_{хв}$ — длина носовой, кормовой и хвостовой частей корпуса (фюзеляжа);

ε — угол скоса потока.

Индексы

∞ — невозмущенный поток;

i — индуктивный;

бал — балансировка;

в — верхний;

вихр — вихревое;

в. о — вертикальное оперение;

г. о — горизонтальное оперение;

оп — оперение;

дон — донный срез корпуса (фюзеляжа);

из. кр — изолированное крыло;

из. ф — изолированный корпус (фюзеляж);

ист — истинный;

кр — критический;

корм — кормовая часть корпуса (фюзеляжа);

н — нижний;

нс — несжимаемый;

нос — носовая часть корпуса;

р — рули;

сеч — сечение;

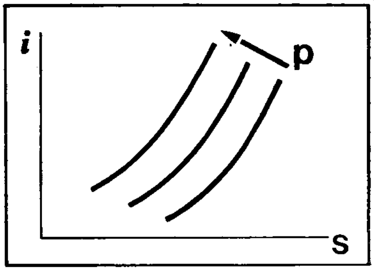
тр — трение;

ф — корпус (фюзеляж);

ш — шарнирный;

ц — цилиндрическая часть корпуса (фюзеляжа).

1
ГЛАВА



ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА, ПАРАМЕТРЫ И ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ ГАЗА

§ 1.1. ГИПОТЕЗА СПЛОШНОСТИ СРЕДЫ. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАЗА

Гипотеза сплошности среды. Движение жидкости и газа значительно сложнее движения твердого тела, так как в них отсутствуют жесткие связи, присущие твердому телу.

Истинное строение жидкости и газа — молекулярное, т. е. среда состоит из большого числа отдельных молекул, хаотически движущихся друг относительно друга с довольно большими скоростями. Однако при изучении практических вопросов силового взаимодействия между средой и движущимся в ней твердым телом (в чем и состоит основная задача аэродинамики) жидкость и газ можно рассматривать как сплошную среду, в которой отсутствуют пустоты, межмолекулярные промежутки и молекулярное движение. Это предположение называется *гипотезой непрерывности или сплошности среды.*

Гипотеза сплошности дает возможность рассматривать кинематические и динамические элементы (скорость, давление и др.) как непрерывные функции координат x, y, z и времени t, что позволяет использовать хорошо известный математический аппарат, базирующийся на этих непрерывных функциях. Молекулярное строение жидкостей и газов при этом учитывается косвенно — через физические свойства среды — плотность, вязкость, теплопроводность и др.

Гипотеза сплошности среды неприменима для сильно разреженных газов, когда длина свободного пробега молекул становится соизмеримой с линейными размерами обтекаемого тела.

В рамках гипотезы сплошности основными параметрами, характеризующими среду, являются плотность ρ, давление p и температура T. В термодинамике часто вместо плотности ρ используется удельный объем $V = 1/\rho$.

Уравнение состояния газа. Рассмотрим некоторые сведения из термодинамики, которые необходимы для изучения свойств потоков газа. К ним прежде всего относится уравнение состояния газа.

Опыт показывает, что между основными параметрами, характеризующими состояние газа (давлением, плотностью и температурой), существует определенная зависимость. Уравнение $f(\rho, \ p, \ T) = 0$, устанавливающее связь между этими параметрами, называется *уравнением состояния.* Поэтому состояние любого газа определяется двумя параметрами (например, плотностью и температурой), так как третий параметр (давление) можно найти из уравнения состояния. Для идеального газа уравнение состояния можно представить в виде

$$p = R\rho T, \tag{1.1}$$

где $R = 8314/m$ — газовая постоянная, зависящая от относительной молекулярной массы газа m. Для воздуха $m = 29$, $R = 287$ Дж/(кг · К).

Под идеальным газом принято понимать газ, в котором взаимодействие молекул между собой осуществляется посредством упругих столкновений, а линейный размер молекул по сравнению со средним молекулярным расстоянием мал.

Многочисленные эксперименты подтверждают справедливость уравнения (1.1) и для реальных газов в широком диапазоне изменения давления и температуры.

Существенное отклонение свойств воздуха от свойств идеального газа наблюдается при высоких давлениях и низких температурах. При высокой температуре термодинамические свойства воздуха могут также существенно отличаться от свойств идеального газа. В этом случае в молекулах возбуждаются колебательные (внутренние) степени свободы. При более высокой температуре ($T > 2000$ К) происходит *диссоциация молекул*, а при дальнейшем увеличении температуры ($T > 5000$ К) — *ионизация газа*. Степени диссоциации и ионизации зависят от температуры и давления. Повышение температуры и снижение давления приводят к увеличению степеней диссоциации и ионизации.

До наступления диссоциации относительная молекулярная масса m и соответственно газовая постоянная не изменяются. Уравнение состояния для воздуха в этих условиях совпадает с уравнением (1.1), где $R = \text{const}$.

Для диссоциированного и ионизированного воздуха относительная молекулярная масса уменьшается и зависит от температуры и давления $m = m(T, p)$, а газовая постоянная R соответственно возрастает: $R = R(T, p)$. Например, при $T = 10\,000$ К и $p = 10$ Па газовая постоянная $R = 614,2$ Дж/(кг · К). В тех случаях, когда $R = R(T, p)$, уравнение, устанавливающее связь между параметрами состояния газа, усложняется [21]. При этом вместо уравнения состояния можно пользоваться соответствующими таблицами термодинамических функций [30] или диаграммами состояния газа [12].

§ 1.2. УДЕЛЬНЫЕ ТЕПЛОЕМКОСТИ ГАЗА

Рассмотрим некоторый произвольный термодинамический процесс. Количество теплоты dq, подведенное к 1 кг газа в этом процессе, выразим через приращение температуры газа dT:

$$dq = c\,dT. \tag{1.2}$$

Множитель c, представляющий собой количество теплоты, необхо-

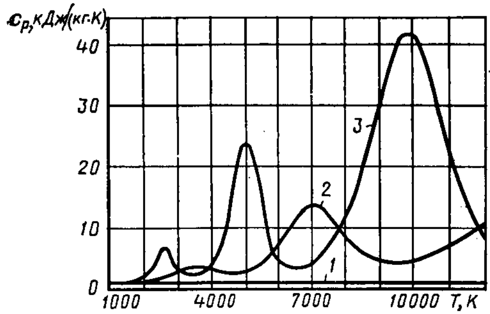


Рис. 1.1. Изменение удельной теплоемкости воздуха в зависимости от температуры и давления:

1 — c_p=const; *2* — p=100 кПа; *3* — p=100 Па

димое для подогрева 1 кг газа на 1 град в данном процессе, называется *удельной теплоемкостью.*

Удельная теплоемкость существенно зависит от характера процесса.

Рассмотрим теплоемкости, соответствующие процессам, происходящим при постоянных объеме c_v и давлении c_p. Зависимость между удельными теплоемкостями идеального газа c_v и c_p определяется следующим соотношением:

$$c_p - c_v = R. \qquad (1.3)$$

В термодинамике и газодинамике важное значение имеет отношение теплоемкостей $k = c_p/c_v$. Величина k зависит прежде всего от структуры молекулы газа. Так, для идеальных одноатомных газов k = 1,66, для двухатомных газов, в том числе и для воздуха, k = 1,4, для многоатомных газов k = 1,33.

Удельные теплоемкости реальных газов c_v, c_p зависят от температуры — при ее увеличении удельные теплоемкости возрастают. Как указывалось выше, при высокой температуре свойства воздуха существенно отличаются от свойств идеального газа с постоянными теплоемкостями.

При возбуждении внутренних степеней свободы молекул, диссоциации молекул компонентов воздуха и ионизации атомов подводимая к воздуху теплота идет не только на увеличение энергии поступательного движения молекул, но и на увеличение энергии вращательного, колебательного движения атомов, преодоление сил взаимодействия между атомами при диссоциации и отрыв электронов от атома при ионизации. Вследствие этого теплоемкость воздуха при высокой температуре значительно возрастает.

Ввиду того что теплоемкости c_v, c_p зависят от температуры, их отношение k также изменяется с температурой — при ее увеличении оно уменьшается. Поскольку при одной и той же температуре понижение давления приводит к усилению эффектов диссоциации и ионизации, то удельные теплоемкости c_v, c_p и их отношение зависят также от давления: $c_v(T, p)$, $c_p(T, p)$, $k(T, p)$. Зависимость c_p от температуры при различных давлениях воздуха показана на рис. 1.1.

§ 1.3. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ. ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ ГАЗА

Первый закон термодинамики. Пусть некоторое количество газа находится в равновесном состоянии. Обозначим dQ количество подведенной к газу извне теплоты. В общем случае подвод теплоты приводит к изменению внутренней энергии газа dU и объема. При изменении объема газ совершает внешнюю работу, равную $dL = pdV$. Поэтому

$$dQ = dU + pdV \quad (1.4)$$

или, относя все величины к 1 кг массы газа, получим

$$dq = du + pd(1/\rho), \quad (1.5)$$

где dq — суммарная теплота, подведенная к 1 кг массы газа извне; du — изменение внутренней энергии 1 кг массы газа; $pd(1/\rho)$ — работа, затрачиваемая на расширение ($1/\rho$ — объем, занимаемый 1 кг массы газа).

При постоянном объеме $dV = 0$, $dQ = dU$ или $dg = du$, т. е. вся теплота, подводимая извне к газу, целиком тратится на увеличение его внутренней энергии. Поэтому

$$du = c_v dT. \quad (1.6)$$

Пренебрегая зависимостью c_v от температуры и имея в виду, что при $T = 0$ $u = 0$, имеем

$$u = c_v T. \quad (1.7)$$

Внутренняя энергия является одной из функций состояния газа. Используя формулу (1.6), уравнение (1.5) можно представить в виде

$$dq = c_v\, dT + pd(1/\rho). \quad (1.8)$$

Уравнения (1.5) и (1.8) являются математическим выражением *первого закона термодинамики.*

Энтальпия. Введем еще одну функцию состояния i, определяемую соотношением

$$di = c_p dT, \quad (1.9)$$

или, пренебрегая изменением c_p, представим (1.9) в виде

$$i = c_p T. \quad (1.10)$$

Эта функция называется *энтальпией.* Из определения энтальпии (1.9) следует, что ее приращение di представляет собой приращение теплоты dq в процессе $p = \text{const}$. Имея это в виду, из уравнения (1.8), интегрируя его в предположении $p = \text{const}$, получим

$$i = u + p/\rho. \quad (1.11)$$

Используя уравнение (1.1), а также выражения (1.3) и (1.10), имеем

$$i = [k/(k-1)]\, RT = [k/(k-1)]\, p/\rho. \quad (1.12)$$

Из формулы (1.12) следует, что для идеального газа энтальпия зависит только от температуры и пропорциональна ей. Отметим, что для реальных газов энтальпия является функцией двух любых параметров состояния, например температуры и давления: $i = (T,\ p)$.

Энтропия. При изучении течения газа часто пользуются еще одной функцией состояния газа s, которая называется *энтропией*. Эта функция определяется дифференциальным соотношением

$$ds = dq/T. \tag{1.13}$$

Найдем выражение для энтропии в конечной форме, предварительно установив связь между энтальпией и энтропией. Так как из (1.13) $Tds = dq$ и, как следует из уравнения (1.5), $dq = du + pd(1/\rho) = d(u + p/\rho) - dp/\rho = di - dp/\rho$, то

$$Tds = di - dp/\rho. \tag{1.14}$$

Заменяя di на $c_p dT$ и учитывая, что на основании уравнения состояния (1.1) $dp/\rho = RdT - pd(1/\rho)$, получаем $ds = c_p dT/T - [RdT - pd(1/\rho)]/T$, откуда после простых преобразований имеем

$$ds = R\{[1/(k-1)]\,dT/T + d\,(1/\rho)\,(1/\rho)\}. \tag{1.15}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (1.15), находим выражение для энтропии:

$$s = R\ln\left(T^{1/(k-1)}/\rho\right) + \mathrm{const}. \tag{1.16}$$

Из формулы (1.16) следует, что энтропия s является функцией состояния газа, зависящей от двух независимых параметров состояния (в данном случае T и ρ). Пользуясь уравнением состояния (1.1), нетрудно выразить энтропию через другие параметры, например через p, ρ:

$$s = c_v \ln\left(p/\rho^k\right) + \mathrm{const}. \tag{1.17}$$

Реальные течения сопровождаются необратимыми потерями энергии и теплообменом с окружающей средой. В необратимых термодинамических процессах энтропия растет ($ds > 0$), а в обратимых процессах она остается неизменной ($ds = 0$). Из выражения (1.17) следует, что если энтропия $s = \mathrm{const}$, то

$$p/\rho^k = \mathrm{const}. \tag{1.18}$$

Процессы, протекающие с постоянной энтропией, называют изэнтропическими. Используя выражения (1.18) и уравнение (1.1), для изэнтропических течений получим следующие соотношения:

$$p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^k; \quad \rho_2/\rho_1 = (T_2/T_1)^{1/(k-1)}; \quad p_2/p_1 = (T_2/T_1)^{k/(k-1)}, \tag{1.19}$$

где индексы 1 и 2 относятся к каким-либо двум состояниям газа в изэнтропическом процессе.

§ 1.4. СЖИМАЕМОСТЬ ГАЗА. СКОРОСТЬ ЗВУКА

Важным свойством газа является *сжимаемость* — свойство газа изменять объем, а следовательно, и плотность при изменении давления и температуры. Предположим, что изменение давления на величину Δp вызывает изменение плотности на величину $\Delta\rho$. При этом сжимаемость газа характеризуется отношением $\Delta p/\Delta\rho$. Чем больше $\Delta\rho$ при заданном Δp (чем меньше отношение $\Delta p/\Delta\rho$), тем сжимаемость газа больше. Это отношение при $\Delta p \to 0$ и $\Delta\rho \to 0$ определяет скорость распространения малых возмущений — скорость звука:

$$a = \sqrt{dp/d\rho}. \qquad (1.20)$$

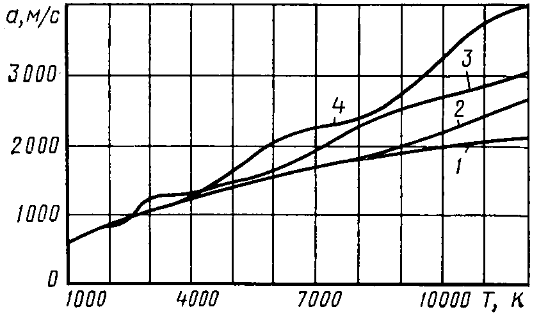


Рис. 1.2. Зависимости скорости звука от температуры и давления:

1 — $a = \sqrt{kRT}$; 2 — $p = 100$ Па; 3 — $p = 100$ кПа; 4 — $p = 100$ МПа

В несжимаемой среде $a = \infty$. Эту формулу легко получить, пользуясь известной формулой распространения звука в упругой среде

$$a = \sqrt{E/\rho}, \qquad (1.21)$$

где E — модуль объемной упругой деформации.

Изменение давления на малую величину dp в сжимаемой среде вызывает изменение объема на dV, причем $dp = -EdV/V$. Здесь $dV/V = -d\rho/\rho$. Это непосредственно следует из закона сохранения массы $d(\rho V) = 0$ или $\rho dV + Vd\rho = 0$. Тогда

$$E/\rho = dp/d\rho. \qquad (1.22)$$

Подставляя (1.22) в (1.21), получаем (1.20).

Для изэнтропических течений, используя (1.18), имеем $dp/d\rho = kp/\rho$. Следовательно,

$$a = \sqrt{kp/\rho}. \qquad (1.23)$$

Учитывая, что $p/\rho = RT$, выражение (1.23) можно представить в следующем виде:

$$a = \sqrt{kRT}. \qquad (1.24)$$

Таким образом, в сжимаемой среде малые возмущения распространяются с конечной скоростью a, зависящей от температуры.

При диссоциации и ионизации воздуха скорость звука отличается от значений, вычисленных по формуле (1.24). При этом скорость звука зависит не только от температуры, но и от давления. Характер зависимости a от T и p при высоких температурах приведен на рис. 1.2.

Отношение скорости потока к местной скорости звука называется *числом* **M**; $\mathbf{M} = v/a$. Это число является одним из основных *критериев подобия* при больших скоростях потока (см. § 3.3).

Как уже указывалось, влиянием сжимаемости воздуха можно пренебречь только при малых скоростях $v \ll a$, $M \ll 1$. В этом случае воздух можно рассматривать как несжимаемую среду, полагая приближенно $\rho = \text{const}$.

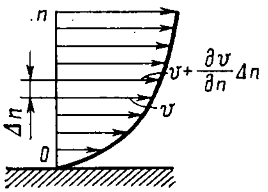


Рис. 1.3. Течение вязкой жидкости

Пренебрежение фактором сжимаемости при малых скоростях движения с математической точки зрения стирает различие между жидкостью и воздухом, а найденные при этом условии законы движения оказываются одинаково применимыми как к жидкости, так и к воздуху.

§ 1.5. ВЯЗКОСТЬ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ГАЗА

Вязкость. Рассмотрим движение жидкости или газа вдоль плоской твердой стенки (рис. 1.3). Если бы жидкость была невязкой (идеальной), то скорости всех частиц, находящихся в данный момент времени на нормали On к поверхности, были бы одинаковыми. В действительности частицы реальной жидкости, непосредственно примыкающие к поверхности, под действием молекулярных сил сцепления прилипают к ней и скорость таких частиц оказывается равной нулю. При удалении от стенки скорость частиц увеличивается. Характер распределения скорости по нормали к поверхности зависит от режима течения вязкой среды. Течение жидкости (газа) может быть ламинарным или турбулентным. Упорядоченное течение жидкости (газа), происходящее параллельными слоями, называется *ламинарным течением.*

Турбулентное течение в отличие от ламинарного сопровождается беспорядочным движением частиц, приводящим к поперечному перемешиванию вязкой среды и к пульсации параметров потока (скорости, давления, плотности и температуры). Значения возникающих в вязкой среде касательных напряжений в случае ламинарного течения можно определить с помощью *закона Ньютона.* Сущность этого закона состоит в том, что напряжение трения τ(Н/м^2), возникающее между слоями, зависит от вязкости и относительной скорости скольжения одного слоя по отношению к другому. Формула Ньютона имеет вид

$$\tau = \mu \partial v / \partial n, \tag{1.25}$$

где μ — динамическая вязкость, Па · с; $\partial v / \partial n$ — градиент скорости по нормали к поверхности, характеризующий скорость движения одного слоя жидкости относительно другого.

Отсюда следует, что вязкость проявляется только в том случае, когда градиент скорости по нормали к поверхности отличен от нуля, т. е. в непосредственной близости от поверхности обтекаемого тела. Тонкий слой жидкости или газа, примыкающий к поверхности тела, называется *пограничным слоем.*

Динамическая вязкость зависит от вида жидкости (газа) и температуры. При увеличении температуры динамическая вязкость газа возрастает. При высоких температурах коэффициент μ зависит также от давления $\mu(T, p)$[12]. Для характеристики вязкости газа кроме величины μ вводят также кинематическую вязкость: $\nu = \mu/\rho$ (м^2/с).

Решение задач аэродинамики с учетом вязкости вызывает большие математические трудности. Вместе с тем в ряде случаев вязкость не имеет большого значения и ею можно пренебречь. В этом случае можно пользоваться упрощенной моделью *идеальной* (*невязкой*) *жидкости**.

Теплопроводность. Процесс теплопроводности в газе, так же как происхождение сил вязкости, связан с молекулярным строением газа.

Удельный тепловой поток, переданный посредством теплопроводности, определяется по *закону Фурье*:

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T, \tag{1.26}$$

где λ — теплопроводность, Вт/(м· К).

Коэффициент λ, так же как коэффициент μ, зависит от вида газа и температуры. При увеличении температуры значение λ возрастает. При высоких температурах теплопроводность реальных газов зависит от двух параметров состояния — температуры и давления [12].

§ 1.6. ПОНЯТИЕ О СТАНДАРТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Все параметры атмосферы Земли — давление, плотность, температура, скорость звука, динамическая и кинематическая вязкости, теплопроводность и др. — изменяются с высотой. Давление и плотность воздуха с высотой уменьшаются. Например, давление на высоте 11 000 м по сравнению с давлением на уровне моря оказывается меньше почти в 4,5 раза, а плотность — примерно в 3,35 раза; к высоте 20 000 м давление падает в 18,3 раза, а плотность — в 13,8 раза. На больших высотах значения давления и плотности воздуха отличаются от земных значений в десятки тысяч раз. Например, к высоте 80 000 м давление уменьшается примерно в 96,5 тыс. раз, а плотность — в 66,5 тыс. раз.

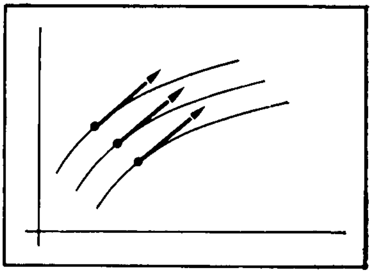
Немонотонный характер изменения температуры обусловил принятое деление атмосферы на различные слои: *тропосфера* (условно до 11 000 м); *стратосфера* (условно до 20 000 м); *хемосфера*, простирающаяся до 80 000 м; далее следуют *ионосфера* и *мезосфера*.

Многолетние наблюдения состояния атмосферы показывают, что, кроме того, давление, плотность, температура воздуха изменяются как в течение суток, так и в течение года. Они зависят и от географической широты, метеорологических явлений, солнечной активности и пр. Изменение физических параметров атмосферы в широких пределах не позволяет предсказывать состояние атмосферы в момент полета. В связи с этим для практического использования введены условные характеристики атмосферы Земли в виде *стандартной атмосферы*, в которой представлены статистически осредненные значения физических параметров атмосферы для широты 45°32′33″, соответствующие среднему уровню солнечной активности в зависимости от высоты (ГОСТ 4401—73). В настоящее время накапливаются и уточняются сведения о строении атмосферы и других планет — Марса, Венеры, Юпитера [10].

---

* Следует отметить, что понятия «идеальный газ» и «идеальная жидкость» имеют различный смысл. Идеальный газ — газ, удовлетворяющий уравнению состояния (1.1), а идеальная жидкость — невязкая жидкость (газ).

2
ГЛАВА



КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ (ГАЗА)

§ 2.1. МЕТОДЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ (ГАЗА)

Задача кинематического анализа движения жидкости заключается в определении значений скорости в каждой точке движущейся жидкости для любого момента времени t. Зная значения скоростей, можно, как показано ниже, найти распределение давления, а следовательно, и силы, действующие в жидкости. Движение жидкости можно изучать методами Эйлера и Лагранжа.

Метод Эйлера. В методе Эйлера фиксируется точка пространства с координатами x, y, z и исследуется изменение скорости в этой точке с течением времени. Совокупность величин x, y, z, t называют *переменными Эйлера.* Следовательно, движение жидкости по методу Эйлера задается следующим образом:

$$v_x = f_1(x, y, z, t); \quad v_y = f_2(x, y, z, t); \quad v_z = f_3(x, y, z, t). \qquad (2.1)$$

Предполагая движение жидкости непрерывным, будем считать указанные функции однозначными, непрерывными и дифференцируемыми функциями координат x, y, z и времени t.

Проекции ускорения жидких частиц в переменных Эйлера

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

или так как $\dfrac{dx}{dt} = v_x$, $\dfrac{dy}{dt} = v_y$, $\dfrac{dz}{dt} = v_z$,

то

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}. \qquad (2.2)$$

Аналогично,

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z};\\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Следует еще раз отметить, что когда берутся полные производные (2.2) и (2.3), то учитывается не только изменение составляющих скорости по времени t, но и их изменение в зависимости от координат частицы жидкости x, y, z. Эти производные *называются конвективными*. Частные производные по времени берутся, как обычно, при фиксированных значениях координат x, y, z и называются *локальными производными*.

Метод Лагранжа. Второй путь изучения движения жидкости, называемый *методом Лагранжа*, в отличие от метода Эйлера рассматривает движение индивидуальных жидких частиц вдоль их траектории. Так как жидких частиц бесчисленное множество, то данную частицу следует как-то характеризовать. Это можно сделать, если в качестве характеристики жидкой частицы выбрать ее координаты в начальный момент времени $t = 0$. Пусть при $t = 0$ координаты частицы будут a, b, c. Это означает, что из всей бесчисленной совокупности траекторий частице принадлежит та, которая проходит через точку a, b, c. Таким образом, координаты рассматриваемой жидкой частицы x, y, z зависят от величин a, b, c, t, называемых *переменными Лагранжа*, т. е.

$$x = \varphi_1(a, b, c, t); \quad y = \varphi_2(a, b, c, t); \quad z = \varphi_3(a, b, c, t). \qquad (2.4)$$

Выражения (2.4) представляют собой уравнения семейства траекторий, заполняющих все пространство, занятое жидкостью; величины a, b, c являются параметрами, определяющими траекторию.

Таким образом, если в методе Эйлера траектории жидких частиц получаются путем интегрирования дифференциальных уравнений, в методе Лагранжа они оказываются заданными уравнениями (2.4). Пользуясь уравнениями (2.4), находим проекции скорости и ускорения частиц:

$$\left.\begin{aligned}&v_x = \partial x/\partial t, \quad v_y = \partial y/\partial t, \quad v_z = \partial z/\partial t;\\ &w_x = \partial^2 x/\partial t^2, \quad w_y = \partial^2 y/\partial t^2, \quad w_z = \partial^2 z/\partial t^2.\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Метод Эйлера получил преимущественное применение в аэродинамике, так как он более прост и дает возможность широко использовать хорошо развитый раздел математики — векторный анализ.

Классификация движений жидкости (газа). Проекции скорости v_x, v_y, v_z в наиболее общем случае неустановившегося движения жидкости (газа) являются функциями координат x, y, z и времени t:

$$v_x = f_1(x, y, z, t); \quad v_y = f_2(x, y, z, t); \quad v_z = f_3(x, y, z, t). \qquad (2.6)$$

Если в фиксированной точке пространства величины v_x, v_y, v_z со временем не изменяются, то движение называется установившимся. В этом случае

$$v_x = f_1(x, y, z); \quad v_y = f_2(x, y, z); \quad v_z = f_3(x, y, z). \qquad (2.7)$$

Движение жидкости (газа) называется *плоскопараллельным*, если все частицы, находящиеся на одном и том же перпендикуляре к некоторой фиксированной плоскости, движутся параллельно этой плоскости с одинаковыми скоростями. В плоскопараллельном ($v_z = 0$) неустановившемся потоке $v_x = f_1(x, y, t)$, $v_y = f_2(x, y, t)$, а в установившемся потоке $v_x = f_1(x, y)$, $v_y = f_2(x, y)$.

Если движение жидкости (газа) симметрично относительно некоторой оси, т. е. одинаково во всех плоскостях, проходящих через ось симметрии, то такое течение называется *осесимметричным*. Осесимметричными являются движения жидкости и газа в соплах и диффузорах круглого сечения, а также течение, возникающее при обтекании любого тела вращения потоком, направленным вдоль его оси.

В некоторых случаях, например при обтекании конуса под углом атаки, скорость сохраняет постоянное значение вдоль прямых, проведенных из некоторой фиксированной точки. Такое течение называется коническим, а фиксированная точка — полюсом конического течения.

§ 2.2. ЛИНИЯ ТОКА

Рассмотрим в момент времени t какую-либо точку пространства, заполненного жидкостью. Пусть скорость находящейся в ней частицы жидкости изображается вектором $\vec{v}_1$ (рис. 2.1). В этот же момент времени t возьмем на векторе скорости $\vec{v}_1$ точку *2*, бесконечно близкую к точке *1*. В этой точке находится другая частица жидкости. Так как точка *2* имеет другие координаты, чем точка *1*, то и скорость в ней другая, изображаемая вектором $\vec{v}_2$. В тот же момент времени t возьмем на векторе скорости $\vec{v}_2$ точку *3*, бесконечно близкую к точке *2*. В ней вектор скорости $\vec{v}_3$ и т. д. В результате такого построения (в данный момент времени) получается ломаная *1-2-3-4-5-...*, обладающая тем свойством, что вектор скорости, соответствующий начальной точке любого ее звена, направлен вдоль этого звена.

Будем неограниченно увеличивать число звеньев ломаной, устремляя к нулю длину каждого ее звена. Тогда в пределе (рис. 2.2) получится кривая, называемая *линией тока*.

Следовательно, *линия тока обладает тем свойством, что каждая частица жидкости (газа), находящаяся на ней в данный момент времени, имеет скорость, совпадающую по направлению с касательной к этой линии.*

Рассмотрим распределение скоростей в момент времени t'. Если движение неустановившееся, то в момент t' в точке *1* скорость $\vec{v}\,'_1$ отлична от вектора $\vec{v}_1$. Следовательно, для того чтобы передвинуться в соседнюю бесконечно близкую точку, нужно двигаться по новому направлению, изображенному на рис. 2.1 пунктиром. Отсюда следует, что для момента t' линия тока иная. Это означает, что при не-

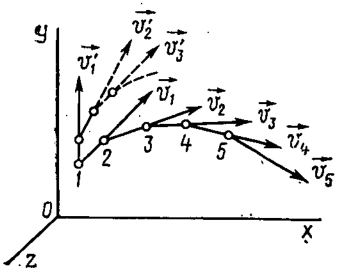


Рис. 2.1. Построение линии тока

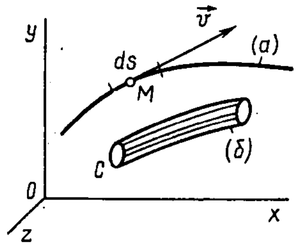


Рис. 2.2. Линия тока (*а*) и трубка тока (*б*)

установившемся движении совокупность линий тока изменяется по времени.

Если же движение установившееся, т. е. скорости в точках *1*, *2* и других не изменяются по времени, то очевидно, что и линии тока не изменяются с течением времени. В случае установившегося движения линии тока и траектории совпадают. Составим дифференциальное уравнение линий тока. Из условия совпадения в данной точке линии тока вектора скорости $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ с касательной к этой линии $\vec{ds}(dx, dy, dz)$ следует, что

$$dx/[v_x(x, y, z, t)] = dy/[v_y(x, y, z, t)] = dz/[v_z(x, y, z, t)]. \qquad (2.8)$$

Выражение (2.8) представляет собой *дифференциальное уравнение линий тока.*

Введем понятие о трубке тока. Для этого проведем в жидкости некоторый малый замкнутый контур C, не являющийся линией тока, и через каждую точку этого контура проведем линию тока. Совокупность проведенных таким образом линий тока образует поверхность, называемую *трубкой тока*. Жидкость, протекающую внутри трубки тока, принято называть *струйкой.*

§ 2.3. ЦИРКУЛЯЦИЯ СКОРОСТИ

В аэродинамике, как теоретической, так и прикладной, исключительно большое значение имеет понятие о циркуляции скорости. С величиной циркуляции связывается понятие интенсивности (напряжения) вихрей. От закона распределения циркуляции по размаху крыла зависят значения сил и моментов, действующих на это крыло.

Выделим в движущейся жидкости произвольный фиксированный в пространстве замкнутый контур C (рис. 2.3). Пусть в некоторой его точке M скорость изображается вектором $\vec{v}$. Составим произведение $v_s ds$, где v_s — проекция вектора скорости на направление касательной к контуру в точке M. Возьмем от этого выражения криволинейный интеграл по дуге AB. Тогда

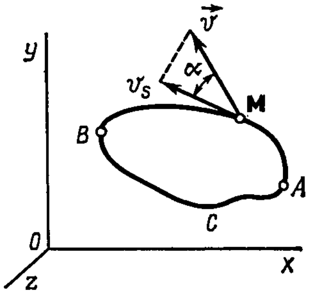


Рис. 2.3. Определение циркуляции скорости

$$\Gamma = \int\limits_{AB} v_s ds. \tag{2.9}$$

Это выражение называется *циркуляцией скорости* по дуге AB. Обычно циркуляцию Γ определяют по всему замкнутому контуру C:

$$\Gamma = \oint_C v_s ds. \tag{2.10}$$

Направление обхода контура C будем считать положительным, если охватываемая контуром C область остается при этом слева. Заменяя в выражении (2.10) v_s на $v \cos\alpha$, получаем

$$\Gamma = \oint_C v \cos\alpha \, ds. \tag{2.11}$$

Замечая, что подынтегральное выражение в формуле (2.10) является скалярным произведением векторов $\vec{v}$ и $\vec{ds}$, циркуляцию представим в следующем виде:

$$\Gamma = \oint_C v_x dx + v_y dy + v_z dz, \tag{2.12}$$

где v_x, v_y, v_z — составляющие скорости потока.

§ 2.4. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ

В кинематике твердого тела доказывается, что в общем случае движение твердого тела в каждый момент времени складывается из поступательного перемещения и вращения вокруг некоторой оси, называемой мгновенной осью вращения. Движение жидкости гораздо сложнее, так как всякая жидкая частица при своем движении не только перемещается поступательно и вращательно, но и деформируется.

Рассмотрим в какой-либо момент времени t движение бесконечно малой жидкой частицы. Пусть в некоторой точке $M(x, y, z)$ внутри частицы (рис. 2.4) проекции скорости суть $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$. Тогда проекции скорости в некоторой точке $M_1(x + x_1, y + y_1, z + z_1)$ на поверхности частицы можно представить в виде

$$v_{x1} = v_x (x + x_1, \quad y + y_1, \; z + z_1);$$
$$v_{y1} = v_y (x + x_1, \quad y + y_1, \quad z + z_1);$$
$$v_{z1} = v_z (x + x_1, \; y + y_1, \; z + z_1).$$

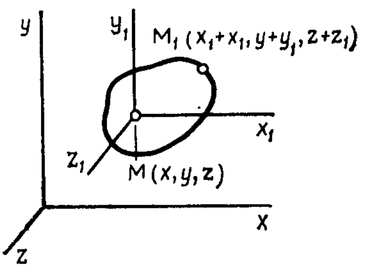


Рис. 2.4. Движение частицы жидкости

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора и удерживая в нем только величины первого порядка малости, т. е. члены, содержащие x_1, y_1, z_1 в степени не выше первой, получим следующее выражение для скоростей:

$$\left.\begin{aligned} v_{x1} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1; \\ v_{y1} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_y}{\partial z} z_1; \\ v_{z1} &= v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_z}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1, \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

где для краткости положено $v_x = v_x(x, y, z)$, $v_y = v_y(x, y, z)$, $v_z = v_z(x, y, z)$.

Преобразуем эти выражения, для чего прибавим к правой части первого уравнения (2.13) величины $\pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} y_1$ и $\pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} z_1$ и перегруппируем члены. В результате будем иметь

$$v_{x1} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) y_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) z_1 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) z_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) y_1.$$

Аналогичными преобразованиями из второго и третьего уравнений (2.13) можно получить:

$$v_{y1} = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) z_1 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) x_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) z_1;$$

$$v_{z1} = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) y_1 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) y_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) x_1.$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right); \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \tag{2.15}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right); \qquad (2.15')$$

$$e_x = \partial v_x/\partial x, \quad e_y = \partial v_y/\partial y, \quad e_z = \partial v_z/\partial z. \qquad (2.16)$$

Тогда полученные выше выражения для v_{x1}, v_{y1}, v_{z1} можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} v_{x1} &= v_x + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1) + e_x x_1 + (\varepsilon_y z_1 + \varepsilon_z y_1); \\ v_{y1} &= v_y + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1) + e_y y_1 + (\varepsilon_z x_1 + \varepsilon_x z_1); \\ v_{z1} &= v_z + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1) + e_z z_1 + (\varepsilon_y x_1 + \varepsilon_x y_1). \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

Рассмотрим вспомогательную квадратичную функцию

$$\Phi = (1/2)\left(e_x x_1^2 + e_y y_1^2 + e_z z_1^2 + 2\varepsilon_x y_1 z_1 + 2\varepsilon_y x_1 z_1 + 2\varepsilon_z x_1 y_1\right), \qquad (2.18)$$

производные которой по координатам x_1, y_1, z_1 имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \partial\Phi/\partial x_1 &= e_x x_1 + \varepsilon_y z_1 + \varepsilon_z y_1; \\ \partial\Phi/\partial y_1 &= e_y y_1 + \varepsilon_x z_1 + \varepsilon_z x_1; \\ \partial\Phi/\partial z_1 &= e_z z_1 + \varepsilon_x y_1 + \varepsilon_y x_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

С помощью функции Φ выражения для проекций скоростей можно представить в следующем компактном виде:

$$\left.\begin{aligned} v_{x1} &= v_x + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1) + \partial\Phi/\partial x_1; \\ v_{y1} &= v_y + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1) + \partial\Phi/\partial y_1; \\ v_{z1} &= v_z + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1) + \partial\Phi/\partial z_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.20)$$

Выясним физический смысл выражений (2.20). Члены v_x, v_y, v_z представляют собой, очевидно, проекции скорости поступательного перемещения рассматриваемой частицы в пространстве твердого тела; члены $(\omega_y z_1 - \omega_z y_1)$, $(\omega_z x_1 - \omega_x z_1)$, $(\omega_x y_1 - \omega_y x_1)$ — проекции угловой скорости частицы жидкости (так же как твердого тела) вокруг мгновенной оси, проходящей через точку M. Такое вращательное движение частиц жидкости называется *вихревым движением*, а компоненты угловой скорости ω_x, ω_y, ω_z — *компонентами вихря*.

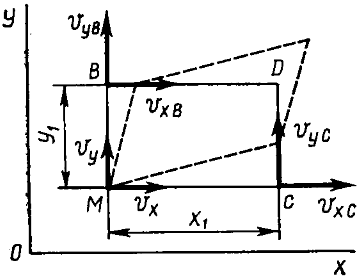


Рис. 2.5. Деформация частицы жидкости

Как следует из равенств (2.14),

$$\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}. \qquad (2.21)$$

Выясним смысл слагаемых $\partial\Phi/\partial x_1$, $\partial\Phi/\partial y_1$, $\partial\Phi/\partial z_1$. Прежде всего из физических соображений ясно, что жидкая частица при движении деформируется. Члены $\partial\Phi/\partial x_1$, $\partial\Phi/\partial y_1$, $\partial\Phi/\partial z_1$ представляют собой компоненты скорости деформации частицы. Покажем это на простом примере.

Пусть бесконечно малая жидкая частица имеет в момент времени t форму прямоугольного параллелепипеда. Для упрощения рассмотрим проекцию этой частицы на плоскость x, y, т. е. бесконечно малый прямоугольник $MBDC$ (рис. 2.5). Если компоненты скорости в точке $M(x, y)$ прямоугольника обозначить v_x, v_y, то составляющие скорости в точках $C(x + x_1, y)$ и $B(x, y + y_1)$ можно представить в виде (с точностью до малых первого порядка)

$$\left.\begin{aligned} v_{xC} = v_x + (\partial v_x/\partial x)\, x_1, \quad v_{yC} = v_y + (\partial v_y/\partial x)\, x_1; \\ v_{xB} = v_x + (\partial v_x/\partial y)\, y_1, \quad v_{yB} = v_y + (\partial v_y/\partial y)\, y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

Поскольку рассматривается относительное перемещение точек C и B (относительно точки M), приведем равенства (2.22) в следующем виде:

$$v_{xC} - v_x = (\partial v_x/\partial x)\, x_1, \quad v_{yC} - v_y = (\partial v_y/\partial x)\, x_1;$$

$$v_{xB} - v_x = (\partial v_x/\partial y)\, y_1, \quad v_{yB} - v_y = (\partial v_y/\partial y)\, y_1.$$

Очевидно, что скорости $(\partial v_x/\partial x)x_1 = e_x x_1, (\partial v_y/\partial y)y_1 = e_y y_1$ являются скоростями линейной деформации ребер прямоугольника $MBDC$; скорости $(\partial v_y/\partial x)x_1$, $(\partial v_x/\partial y)y_1$ указывают на поворот ребер MC и MB (рис. 2.5), т. е. являются скоростями деформации скашивания прямоугольника $MBDC$ в некоторый косоугольник (пунктир на рис. 2.5). Очевидно, что ребро MC поворачивается с угловой скоростью $\partial v_y/\partial x$, а ребро MB — с угловой скоростью $\partial v_x/\partial y$. Так как скорость изменения прямого угла BMC складывается из угловых скоростей вращения ребер MC и MB, то, следовательно, она представляет собой сумму: $\partial v_y/\partial x + \partial v_x/\partial y = 2\varepsilon_z$.

Проводя аналогичные рассуждения для других граней параллелепипеда (или их проекций на координатные плоскости), можно так же просто показать, что величина $(\partial v_z/\partial z)z_1 = e_z z_1$ является скоростью линейной деформации вдоль оси z и что значения угловых скоростей скашивания остальных прямых углов параллелепипеда выражаются соотношениями $\partial v_z/\partial y + \partial v_y/\partial z = 2\varepsilon_x$ и $\partial v_z/\partial x + \partial v_x/\partial z = 2\varepsilon_y$.

Из изложенного следует, что величины $\partial \Phi/\partial x_1$, $\partial \Phi/\partial y_1$, $\partial \Phi/\partial z_1$ действительно представляют собой компоненты скорости деформации жидкой частицы, причем величины ε_x, ε_y, ε_z характеризуют деформацию скашивания, а величины e_x, e_y, e_z — линейную деформацию (растяжение или сжатие). Обращаясь вновь к формулам (2.20), физический смысл которых теперь полностью выяснен, можно сделать следующий вывод.

Элементарное перемещение частицы жидкости (газа) состоит из поступательного перемещения ее центра со скоростью $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ вращения относительно некоторой оси, проходящей через этот центр с угловой скоростью $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, и деформационного движения, характеризуемого функцией $\Phi(x_1, y_1, z_1)$.

§ 2.5. ПОНЯТИЕ О ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ

При исследовании обтекания тел во многих случаях можно принять, что движение жидкости является потенциальным.

Потенциальным движением жидкости называется безвихревое движение, т. е. такое движение, в котором компоненты вихря ω_x, ω_y, ω_z *равны нулю.* Из условия отсутствия вихрей $\omega_x = (1/2)(\partial v_z/\partial y - \partial v_y/\partial z) = 0$, $\omega_y = (1/2)(\partial v_x/\partial z - \partial v_z/\partial x) = 0$, $\omega_z = (1/2)(\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y) = 0$ следует, что

$$\partial v_z/\partial y = \partial v_y/\partial z, \quad \partial v_x/\partial z = \partial v_z/\partial x, \quad \partial v_y/\partial x = \partial v_x/\partial y. \tag{2.23}$$

Рассмотрим теперь дифференциальный трехчлен $v_x dx + v_y dy + v_z dz$. Как известно, равенства (2.23) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы этот дифференциальный трехчлен был полным дифференциалом некоторой функции, т. е. $v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\varphi(x,\ y,\ z)$.

Функцию φ называют *потенциалом скорости*. Раскрывая полный дифференциал $d\varphi$, т. е. $v_x dx + v_y dy + v_z dz = (\partial\varphi/\partial x)dx + (\partial\varphi/\partial y)dy + (d\varphi/dz)dz$, и сравнивая коэффициенты при dx, dy, dz, имеем

$$v_x = \partial\varphi/\partial x, \quad v_y = \partial\varphi/\partial y, \quad v_z = \partial\varphi/\partial z, \tag{2.24}$$

т. е. *проекция скорости на координатную ось равна частной производной от потенциала скорости по соответствующей координате.*

Это важное свойство потенциала скорости сохраняется и для произвольного направления, т. е. *проекция скорости на произвольное направление равна производной от потенциала скорости по этому направлению.*

§ 2.6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВИХРЕЙ

Изучение вихревого движения жидкости и газа в аэродинамике имеет исключительно важное практическое значение. Как показано ниже, на вихревой теории основаны методы определения аэродинамических характеристик крыльев бесконечного и конечного размаха. При обтекании тел реальным потоком может происходить отрыв потока с образованием вихрей, которые оказывают существенное влияние на их аэродинамические характеристики. Рассмотрим основные положения теории вихрей.

Вихревая линия. Вращательные движения частиц характеризуются угловыми скоростями:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= (1/2)(\partial v_z/\partial y - \partial v_y/\partial z); \\ \omega_y &= (1/2)(\partial v_x/\partial z - \partial v_z/\partial x); \\ \omega_z &= (1/2)(\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y). \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Это означает, что в каждой точке пространства вращение жидких частиц можно охарактеризовать вектором угловой скорости $\vec{\omega}$, модуль которого

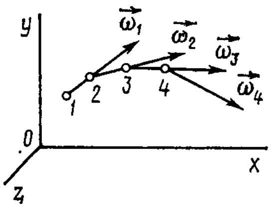


Рис. 2.6. Построение вихревой линии

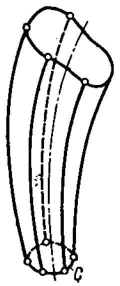


Рис. 2.7. Вихревая трубка

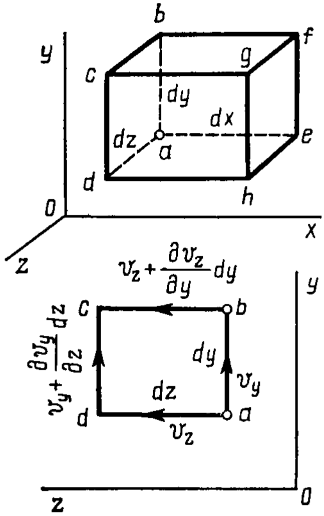


Рис. 2.8. Схема вычисления циркуляции по бесконечно малому прямоугольному контуру

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \tag{2.26}$$

Каждый такой вектор $\vec{\omega}$ характеризует местное вращение жидкости (газа). Допустим, что в данный момент времени t в какой-либо точке 1 вектор угловой скорости равен $\vec{\omega}_1$ (рис. 2.6). Возьмем в этот же момент времени на этом векторе близкую к точке 1 точку 2 и построим соответствующий ей вектор угловой скорости $\vec{\omega}_2$.Продолжая это построение, в данный момент времени получим ломаную линию 1- 2- 3- 4- ..., которая в пределе, т. е. при стремлении длины каждого звена ломаной к нулю превращается в так называемую вихревую линию. *Вихревой линией называется линия, проведенная в данный момент времени в потоке жидкости (газа), в каждой точке которой вектор угловой скорости касателен к ней.*

Дифференциальное уравнение вихревых линий имеет вид

$$dx/\omega_x = dy/\omega_y = dz/\omega_z. \tag{2.27}$$

Вихревая трубка. Рассмотрим произвольный малый замкнутый контур C, не являющийся вихревой линией, и проведем через каждую точку этого контура вихревую линию. Тогда совокупность этих линий образует поверхность, называемую *вихревой трубкой* (рис. 2.7). Жидкость (газ), заключенная в ней, называется *вихревым шнуром, вихревой нитью или вихрем. Под напряжением или интенсивностью* вихря понимают величину $\varkappa = 2\iint_\sigma \omega d\sigma$, где σ — площадь нормального (поперечного) сечения вихревой трубки. Пренебрегая изменением ω по сечению вихревой трубки, получим

$$\varkappa = 2\omega\sigma. \tag{2.28}$$

Значение напряжения (интенсивности) вихря $\varkappa$ связано с возникающей вокруг вихря циркуляцией Γ. Установлению этой связи посвящена теорема Стокса.

Теорема Стокса. Рассмотрим в движущейся жидкости вихревое поле, т. е. предположим, что в жидкости непрерывно распределены вихри (векторы $\vec{\omega}$). Выделим бесконечно малый объем в форме прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz (рис. 2.8). Рассмотрим в плоскости yz бесконечно малый прямоугольник $abcda$ со сторонами dy и dz, являющийся проекцией рассматриваемого параллелепипеда на плоскость yz. Подсчитаем циркуляцию Γ_x по элементарному контуру $abcda$, приписывая индексу x смысл обхода вокруг оси, параллельной оси x.

Пусть v_y и v_z — проекции вектора скорости точки a на оси y, z. Подсчитаем значения скоростей, направленных вдоль сторон bc и dc в точках b и d, т. е. $(v_z)_b = v_z + (\partial v_z/\partial y)dy$, $(v_y)_d = v_y + (\partial v_y/\partial z)dz$.

Циркуляция $d\Gamma_x$ по контуру $abcda$ складывается, очевидно, из циркуляций вдоль бесконечно малых сторон, равных произведению скорости на длины соответствующих сторон прямоугольника. Таким образом,

$$d\Gamma_x = v_y dy + [v_z + (\partial v_z/\partial y)\, dy]\, dz - [v_y + (\partial v_y/\partial z)\, dz]\, dy - v_z dz.$$

Знак «—» вдоль сторон cd и da берется потому, что направление обхода обратно направлению скорости. Отсюда $d\Gamma_x = (\partial v_z/\partial y - \partial v_y/\partial z)dydz$, или, обозначая $dydz = d\sigma_x$, получаем

$$d\Gamma_x = 2\omega_x d\sigma_x. \tag{2.29а}$$

Аналогично, для контуров, расположенных в плоскостях, перпендикулярных осям y и z,

$$d\Gamma_y = 2\omega_y d\sigma_y; \tag{2.29б}$$

$$d\Gamma_z = 2\omega_z d\sigma_z. \tag{2.29в}$$

Распространяя полученный результат на произвольно расположенную в пространстве бесконечно малую прямоугольную площадку $d\sigma$, имеем

$$d\Gamma = 2\omega_n d\sigma, \tag{2.30}$$

где ω_n — проекция угловой скорости $\vec{\omega}$ на нормаль к площадке.

Таким образом, *циркуляция по бесконечно малому прямоугольному контуру равна напряжению вихря, пронизывающего этот контур.*

Полученный результат можно легко распространить на произвольный конечный плоский контур L (рис. 2.9). Для этого разобьем

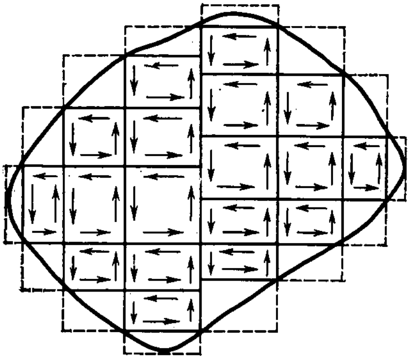


Рис. 2.9. Схема вычисления циркуляции по замкнутому плоскому контуру

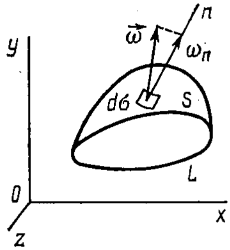


Рис. 2.10. Произвольная поверхность, пронизываемая потоком вихрей

Рис. 2.11. Контур, расположенный на поверхности вихревой трубки

площадь, ограниченную контуром L, системой взаимно ортогональных прямых на бесконечно большое число элементарных прямоугольников. Рассматривая внешние стороны прямоугольников, расположенных на периферии, замечаем, что они составляют многоугольник, вписанный в данный контур. Рассмотрим циркуляцию вдоль сторон каждого бесконечно малого прямоугольника в отдельности. Согласно доказанному, циркуляция равна напряжению пронизывающего его вихря. Суммируя циркуляции по всем бесконечно малым прямоугольникам, замечаем, что циркуляции по смежным сторонам прямоугольников взаимно уничтожаются, как разные по знаку. Следовательно, в пределе при неограниченном увеличении числа бесконечно малых прямоугольников суммарная циркуляция дает циркуляцию вдоль контура L (так как в пределе вписанный многоугольник превращается в контур L) и поэтому

$$\Gamma = 2 \iint_S \omega_n d\sigma. \tag{2.31}$$

Формулу (2.31) можно обобщить на случай произвольной поверхности S, опирающейся на произвольный контур L (рис. 2.10). Действительно, разобьем, как и выше, поверхность S на бесконечно большое число бесконечно малых площадок $d\sigma$. Тогда, считая площадки $d\sigma$ вследствие их малости плоскими, для любой из них циркуляцию $d\Gamma$ можно определить по формуле (2.30).

Суммируя выражение (2.30) по всем площадкам и переходя к пределу, получаем формулу (2.31). Формула (2.31) называется *интегральной формулой Стокса*. Она показывает, что *циркуляция по произвольному контуру в пространстве равна сумме напряжений (интенсивностей) вихрей, пронизывающих поверхность, опирающуюся на этот контур.*

Теорема Гельмгольца о вихрях. Сформулируем ряд теорем о вихрях, составляющих наряду с теоремой Стокса основу теории вихрей. Одной из основных является следующая теорема: *напряжение по длине вихревой трубки не изменяется.*

Для доказательства рассмотрим часть вихревой трубки (рис. 2.11), заключенную между двумя произвольными сечениями I и II. Очевидно, теорема будет доказана, если докажем, что напряжение в сечениях I и II одинаково, т. е. что $\varkappa_I = \varkappa_{II}$. Для этого соединим точки a и b обоих сечений произвольной линией ab, лежащей на поверхности вихревой трубки, и рассмотрим циркуляцию по контуру $abcdebafgha$. Так как этот контур является простым замкнутым контуром и лежит на поверхности вихревой трубки, то $\Gamma = 0$. Но циркуляция по нему состоит из циркуляции по контурам I, II и линиям ab и ba. Следовательно, $\Gamma_I + \Gamma_{ab} - \Gamma_{II} + \Gamma_{ba} = 0$. Так как очевидно, что $\Gamma_{ab} = - \Gamma_{ba}$, то $\Gamma_I = \Gamma_{II}$ и, следовательно, на освании теоремы Стокса $\varkappa_I = \varkappa_{II}$.

Из этой теоремы можно сделать вывод о возможных формах существования вихрей. Важным следствием этой теоремы является то, что из-за постоянства напряжения вдоль вихревой трубки вихрь не может обрываться в жидкости ($\sigma \neq 0$), так как в противном случае (при $\sigma = 0$) $\omega \to \infty$, что физически невозможно.

Вихри могут быть замкнутыми, образуя вихревые кольца, могут опираться на граничные области — на поверхность твердого тела либо на поверхность раздела двух сред с различной плотностью. Вихри теоретически могут иметь также бесконечную протяженность. Однако форма существования вихря в виде бесконечного или полубесконечного вихревого шнура возможна только в невязком газе (в идеальной жидкости). В реальных условиях под действием вязкости вихрь постепенно разрушается (затухает).

В невязком газе (идеальной жидкости), где отсутствуют касательные силы — силы вязкости, тормозящие вращение, вихри не исчезают. По этой же причине в идеальной жидкости вихри не возникают. Рассматривая вихри в невязкой среде, изучают модель явления, причиной которого является вязкость.

Формула Био — Савара о вихревом влиянии. Найдем скорость, вызываемую вихрем произвольной формы с напряжением Γ в какой-либо точке A жидкости (рис. 2.12). Для этого выделим элемент dL. Обозначим r расстояние от точки A до элемента dL; α — угол, образуемый радиусом r с касательной к оси элемента вихря dL. Тогда скорость dv, индуцируемая элементом вихря dL в точке A,

$$dv = [\Gamma/(4\pi r^2)] \sin \alpha dL. \qquad (2.32)$$

Эта формула носит название *формулы Био—Савара*.

Для определения полной скорости, индуцируемой всем вихрем в точке A, выражение (2.32) надо проинтегрировать по длине вихря:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\sin \alpha dL}{r^2}. \qquad (2.33)$$

Применим формулу (2.33) к случаю бесконечно длинного прямо-

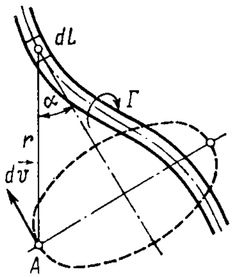


Рис. 2.12. Схема вихревого влияния

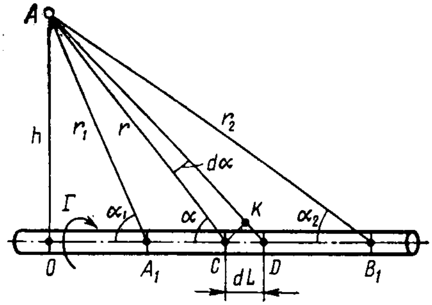


Рис. 2.13. Схема для определения скоростей, индуцируемых прямолинейным бесконечно длинным вихрем

линейного вихря с напряжением $\varkappa = \Gamma$. Сначала найдем скорость v, индуцируемую в точке A конечным участком этого вихря (рис. 2.13).

Радиус-векторы r_1, r_2 и углы α_1, α_2, соответствующие точкам A_1, B_1, а также длину перпендикуляра h, опущенного из точки A на ось вихря, считаем заданными (задана также и величина Γ). Выделим на участке A_1B_1 вихря бесконечно малый элемент $CD = dL$. Из треугольников CKD и CAK находим $CD = dL = r d\alpha/\sin\alpha$.

С другой стороны, из треугольника OAC имеем $r = h/\sin\alpha$.

Подставляя значения r и dL в формулу (2.32), получаем

$$dv = [\Gamma/(4\pi h)] \sin \alpha d\alpha.$$

Для определения скорости, индуцируемой вихрем A_1B_1 в точке A, это выражение надо проинтегрировать в пределах от α_2, до α_1. Тогда

$$v = [\Gamma/(4\pi h)] (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \tag{2.34}$$

Обозначая $OA_1 = x_1$ и $OB_1 = x_2$, формуле (2.34) можно придать вид

$$v = [\Gamma/(4\pi h)] \left(x_2 \Big/ \sqrt{x_2^2 + h^2} - x_1 \Big/ \sqrt{x_1^2 + h^2}\right). \tag{2.35}$$

Рассмотрим два частных случая.

П е р в ы й с л у ч а й: полубесконечный вихрь, простирающийся от точки O до бесконечности. При этом $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 0$ и, следовательно,

$$v = \Gamma/(4\pi h). \tag{2.36}$$

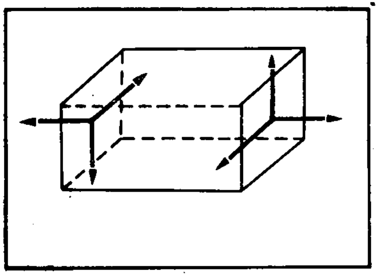
В т о р о й с л у ч а й: бесконечно длинный вихревой шнур, простирающийся в обе стороны до бесконечности. При этом $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$ и формула (2.34) принимает вид

$$v = \Gamma/(2\pi h). \tag{2.37}$$

Формулами (2.36) и (2.37) широко пользуются при рассмотрении теории крыла конечного и бесконечного размаха.

3

ГЛАВА



ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Рассмотрим произвольное пространственное неустановившееся течение газа. В этом случае при заданных массовых силах движение газа можно считать известным, если известны три проекции скорости потока v_x, v_y, v_z и параметры состояния газа — давление p, плотность ρ и температура T.

Для определения шести указанных неизвестных величин нужно составить шесть уравнений. Выведем основные уравнения движения газа. При этом будем пользоваться методом Эйлера, в котором исследуется изменение v_x, v_y, v_z, p, ρ, T в зависимости от положения точки (координат x, y, z) и времени. Для установившегося движения эти величины зависят только от координат.

Для того чтобы сформулировать общие законы механики применительно к жидкой или газообразной среде, необходимо выделить в этой среде некоторую ее часть и заменить действие окружающей ее среды соответствующими силами. В том случае, когда в результате решения задачи должны быть известны распределенные характеристики (распределение скорости и давления), применяется метод элементарных объемов. При этом из жидкой или газообразной среды выделяется элементарный объем, в пределах которого изменением скорости и плотности можно пренебречь. Применительно к этому объему можно составить соответствующие уравнения механики, относящиеся к динамике точки. Тогда в результате предельного перехода при стягивании элементарного объема в точку получаются дифференциальные уравнения движения.

При составлении дифференциальных уравнений искомые функции (скорость, давление, плотность) предполагаются непрерывными дифференцируемыми функциями координат. Как показано в гл. 5, это не всегда возможно.

В некоторых случаях (например, при определении суммарных аэродинамических характеристик тел — аэродинамической подъемной силы, сопротивления и момента аэродинамических сил) можно применять метод конечных объемов. Для этого в жидкой или газообразной среде выделяют конечный объем, в пределах которого необходимо учитывать изменение скорости и плотности. Применительно ко всей массе, заключенной в этом объеме, можно составить уравнение механики, относящееся к системе материальных точек (например, теореме об изменении количества движения). При этом для определения сил с необходимой точностью в ряде случаев достаточно знать распределение скорости весьма приближенно. Уравнения, полученные с помощью метода конечных объемов, применимы и к областям с разрывным изменением параметров потока.

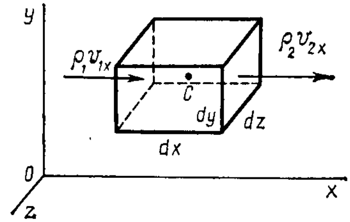


Рис. 3.1. Схема для вывода уравнения неразрывности

§ 3.2. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Уравнение неразрывности представляет собой уравнение сохранения массы применительно к неразрывным течениям жидкости и газа.

Для вывода этого уравнения рассмотрим в потоке газа фиксированный в пространстве объем V в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz, параллельными осям координат, и с центром в точке C (рис. 3.1). Обозначим v_x, v_y, v_z, ρ составляющие скорости потока и плотность газа в точке C в момент времени t. Масса газа, вытекающего из объема V в направлении оси x в единицу времени, $(\rho_2 v_{2x} - \rho_1 v_{1x})dydz$, где индексы 1 и 2 — плотность и составляющие скорость v_x на левой и правой гранях параллелепипеда.

Так как $\rho v_x = f(x, y, z, t)$, то $\rho_2 v_{2x}$ и $\rho_1 v_{1x}$ с точностью до малых первого порядка можно представить в следующем виде:

$$\rho_2 v_{2x} = f(x + dx/2,\ y,\ z,\ t) = \rho v_x + [\partial(\rho v_x)/\partial x]\, dx/2;$$

$$\rho_1 v_{1x} = f(x - dx/2,\ y,\ z,\ t) = \rho v_x - [\partial(\rho v_x)/\partial x]\, dx/2.$$

Тогда

$$(\rho_2 v_{2x} - \rho_1 v_{1x})\, dydz = [\partial(\rho v_x)/\partial x]\, dxdydz.$$

Аналогичные выражения можно привести для массы газа, вытекающего из параллелепипеда в направлении осей y и z:

$$\partial(\rho v_y)/\partial y]\, dxdydz, \quad [\partial(\rho v_z)/\partial z]\, dxdydz.$$

Если эти выражения сложить, то получим суммарную массу газа, вытекающего из параллелепипеда в единицу времени:

$$[\partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y + \partial(\rho v_z)/\partial z]\, dxdydz. \tag{3.1}$$

Согласно закону сохранения массы для неразрывных течений, выражение (3.1) должно быть равно изменению массы газа в объеме V за единицу времени. Масса газа в объеме V в момент времени t равна $\rho dxdydz$, а в момент времени $t + dt$ будет $[\rho + (\partial\rho/\partial t)dt]dxdydz$.

Следовательно, в единицу времени масса газа объема V изменяется на величину

$$(\partial\rho/\partial t)\,dxdydz, \tag{3.2}$$

причем при положительном знаке выражения (3.1) масса газа в объеме V уменьшается, т. е. при этом $\partial\rho/\partial t < 0$. Приравнивая выражения (3.1) и (3.2) с учетом их знака, получаем

$$\partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y + \partial(\rho v_z)/\partial z = -\partial\rho/\partial t$$

или

$$\partial\rho/\partial t + \partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y + \partial(\rho v_z)/\partial z = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) представляет собой уравнение неразрывности. Его можно представить в виде

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0, \tag{3.4}$$

или

$$(1/\rho)\,d\rho/dt + \operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{3.4'}$$

В частном случае установившегося движения $\partial\rho/\partial t = 0$. Тогда уравнение неразрывности приобретет вид

$$\partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y + \partial(\rho v_z)/\partial z = 0; \tag{3.5}$$

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0. \tag{3.6}$$

Для несжимаемой среды ($\rho = \text{const}$)

$$\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z = 0; \tag{3.7}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{3.8}$$

Выведем уравнения неразрывности применительно к плоскому потоку. В этом случае, принимая за плоскость потока плоскость x, y, будем иметь $v_x(x, y, t)$, $v_y(x, y, t)$, $v_z = 0$, $\rho(x, y, t)$. Тогда вместо уравнений (3.3), (3.5) и (3.7) получим

$$\left.\begin{aligned} &\partial\rho/\partial t + \partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y = 0;\\ &\partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y = 0;\\ &\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Чтобы составить уравнения неразрывности в цилиндрических и сферических координатах, достаточно воспользоваться формулами для вычисления дивергенции в соответствующих системах координат.

Приведем уравнение неразрывности для потока, обладающего осевой симметрией (осесимметричного потока), для которого во всех меридиональных плоскостях течения газа одинаковы. Рассмотрим сначала сферическую систему координат и воспользуемся выражением дивергенции в сферических координатах:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho v_r)\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\psi)}{\partial\psi} +$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\rho v_\theta)\Big], \quad (3.10)$$

где r — длина радиус-вектора; θ — полярный угол; ψ — долгота.

В случае осесимметричного потока $v\psi = 0$, а v_r, v_θ и плотность ρ зависят только от r, θ и t. Тогда из выражения (3.10)

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \partial(\rho v_r)/\partial r + (1/r)\,\partial(\rho v_\theta)/\partial\theta + (2/r)\,\rho v_r + (1/r)\,\rho v_\theta \operatorname{ctg}\theta.$$

Подставляя это выражение в уравнения (3.4) и (3.6), получаем уравнения неразрывности для неустановившегося и установившегося осесимметричного потока в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\partial\rho/\partial t + \partial(\rho v_r)/\partial r + (1/r)\,\partial(\rho v_\theta)/\partial\theta + (2/r)\,\rho v_r + (1/r)\,\rho v_\theta \operatorname{ctg}\theta = 0;\\ &r\,\partial(\rho v_r)/\partial r + \partial(\rho v_\theta)/\partial\theta + 2\rho v_r + \rho v_\theta \operatorname{ctg}\theta = 0.\end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

Аналогично, используя соответствующее выражение $\operatorname{div}(\rho\vec{v})$, можно составить уравнение неразрывности в цилиндрических координатах. Для осесимметричного потока уравнение неразрывности в цилиндрических координатах имеет вид

$$r\,\partial\rho/\partial t + \partial(r\rho v_x)/\partial x + \partial(r\rho v_r)/\partial r = 0.$$

Здесь v_r, v_x — составляющие скорости по осям цилиндрической системы координат.

В случае установившегося одномерного движения газа можно пользоваться также уравнением неразрывности в форме массового расхода:

$$\rho v F = \mathrm{const},$$

где F — площадь поперечного сечения трубки тока.

Для несжимаемой среды ($\rho = \mathrm{const}$) это уравнение можно представить в форме объемного расхода:

$$vF = \mathrm{const}.$$

§ 3.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕВЯЗКОГО ГАЗА (ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ) В ФОРМЕ ЭЙЛЕРА

Уравнения движения невязкого газа можно получить как частный случай из уравнений движения вязкой среды. Рассмотрим вывод этих уравнений в другой последовательности — сначала дадим вывод уравнений движения невязкого газа, а затем подробно изучим течение вязкого газа. Это позволит прежде всего четко представить влияние вязкости на поверхностные силы и отметить сложности, возникающие при решении задачи движения вязкой жидкости по сравнению с идеальной.

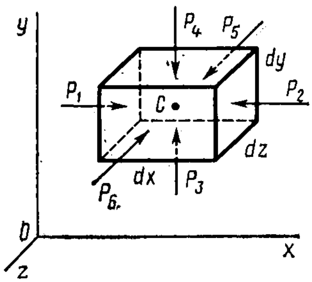


Рис. 3.2. Поверхностные силы, действующие на частицу идеальной жидкости

Для вывода дифференциальных уравнений движения невязкого газа воспользуемся методом элементарных объемов и выделим в потоке малую частицу в форме прямоугольного параллелепипеда с центром в заданной точке пространства C и с длинами ребер dx, dy, dz (рис. 3.2). Масса частицы $\rho dxdydz$. Применяя принцип Даламбера, рассмотрим равновесие сил, действующих на выделенную частицу. Силы, действующие в жидкости, можно представить в виде массовых и поверхностных сил. Следует отметить, что поверхностные силы при изучении движения газа являются основными.

Массовые силы распределены по всему объему жидкости и пропорциональны массе рассматриваемой частицы. Обозначим $\vec{f}$ вектор массовой силы, отнесенной к единице массы, а X, Y, Z — его проекции на оси координат. Примером массовой силы является сила тяжести. При этом $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$.

Проекции массовой силы, действующей на данную частицу, в общем случае можно представить в виде $\rho Xdxdydz$, $\rho Ydxdydz$, $\rho Zdxdydz$.

Со стороны окружающей среды на частицу действуют поверхностные силы, распределенные по граням параллелепипеда. В случае невязкой среды вектор поверхностной силы — силы давления — направлен по внутренней нормали к поверхности. Обозначим p_1, p_2 давления по граням, перпендикулярным оси x, p_3, p_4 и p_5, p_6 — давления по граням, перпендикулярным осям y и z. Тогда проекция поверхностных сил, действующих на частицу, в направлении оси x будет равна $(p_1 - p_2)dydz$, в точке C давление $p = f(x, y, z, t)$. Давления на левой и правой гранях параллелепипеда с точностью до малых первого порядка могут быть представлены в следующем виде:

$$p_1 = f(x - dx/2, y, z, t) = p - (\partial p/\partial x)(dx/2);$$

$$p_2 = f(x + dx/2, y, z, t) = p + (\partial p/\partial x)(dx/2),$$

а суммарная проекция сил давления в направлении оси x будет $-(\partial p/\partial x)dxdydz$. Аналогично получим проекции сил давления на направления осей y и z, т. е. $-(\partial p/\partial y)dxdydz$, $-(\partial p/\partial z)dxdydz$.

Суммарные проекции всех сил, действующих на частицу, в направлении осей x, y, z:

$$F_x = [X - (1/\rho)(\partial p/\partial x)]\rho dxdydz;$$

$$F_y = [Y - (1/\rho)(\partial p/\partial y)]\rho dxdydz;$$

$$F_z = [Z - (1/\rho)(\partial p/\partial z)]\rho dxdydz.$$

Согласно принципу Даламбера, действующие на частицу поверхностные и массовые силы в каждый момент времени должны уравновешиваться силами инерции. Проекции инерционной силы:

$$-(dv_x/dt)\rho dxdydz, \quad -(dv_y/dt)\rho dxdydz, \quad -(dv_z/dt)\rho dxdydz.$$

Тогда, приравнивая проекции сил инерции проекциям суммарной силы, действующей на частицу, получим уравнения движения невязкой среды (идеальной жидкости) в форме Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} dv_x/dt &= X-(1/\rho)\,\partial p/\partial x;\\ dv_y/dt &= Y-(1/\rho)\,\partial p/\partial y;\\ dv_z/dt &= Z-(1/\rho)\,\partial p/\partial z. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Уравнения (3.12) применимы для исследования движения как сжимаемой, так и несжимаемой среды. Каждый член уравнений представляет собой ускорение; dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt — проекции полного ускорения движения; X, Y, Z — проекции ускорения частицы газа, вызываемого массовыми силами, а $-(1/\rho)\,\partial p/\partial x$, $-(1/\rho)\partial p/\partial y$, $-(1/\rho)\partial p/\partial z$ — проекции ускорения частицы от сил давления. Полное ускорение движения частицы складывается из ускорений, вызываемых массовыми и поверхностными силами (силами давления).

Учитывая, что составляющие скорости потока v_x, v_y, v_z являются функциями координат x, y, z и времени t, уравнения (3.12) представим в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \partial v_x/\partial t + v_x\partial v_x/\partial x + v_y\partial v_x/\partial y + v_z\partial v_x/\partial z &= X-(1/\rho)\,\partial p/\partial x;\\ \partial v_y/\partial t + v_x\partial v_y/\partial x + v_y\partial v_y/\partial y + v_z\partial v_y/\partial z &= Y-(1/\rho)\,\partial p/\partial y;\\ \partial v_z/\partial t + v_x\partial v_z/\partial x + v_y\partial v_z/\partial y + v_z\partial v_z/\partial z &= Z-(1/\rho)\,\partial p/\partial z. \end{aligned}\right\} \tag{3.12'}$$

Уравнения Эйлера приведем также в векторной форме:

$$d\vec{v}/dt = \vec{f}-(1/\rho)\operatorname{grad} p. \tag{3.13}$$

§ 3.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА

Вязкость приводит не только к появлению касательных напряжений, но и к изменению нормальных напряжений по сравнению с их значениями в невязкой среде (в идеальной жидкости). Это значительно усложняет дифференциальные уравнения движения вязкого газа по сравнению с уравнениями Эйлера.

Рассмотрим движение частицы газа в виде элементарного параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат с центром в точке C (рис. 3.3).

Различие в поверхностных силах по сравнению с невязкой средой состоит в том, что в этом случае на грани частицы действуют не только нормальные напряжения, но и касательные, так как поверхностные силы в вязком газе не ортогональны к рассматриваемой поверхности. Это означает, что направление поверхностной силы, действующей на

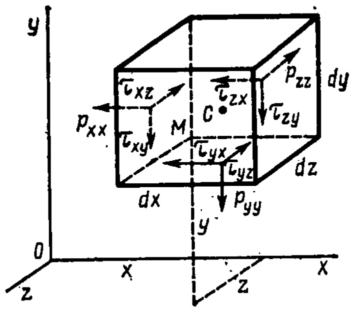


Рис. 3.3. Поверхностные силы, действующие на частицу вязкой жидкости

каждую грань параллелепипеда, не совпадает с нормалью к грани и, следовательно, каждая такая сила (напряжение) имеет три проекции на координатные оси.

Введем следующие обозначения. Для каждой проекции вектора напряжения, действующего на рассматриваемую грань, примем два индекса: первый указывает направление нормали к рассматриваемой грани, а второй — ось, на которую проецируется поверхностная сила (напряжение), действующая на эту грань. В этих обозначениях составляющие поверхностного напряжения, действующего на левую грань, перпендикулярную оси x, можно представить в виде p_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}; составляющие, действующие на грань, перпендикулярную оси y, — в виде τ_{yx}, p_{yy}, τ_{yz}, а составляющие поверхностного напряжения, действующие на грань, перпендикулярную оси z, — в виде τ_{zx}, τ_{zy}, p_{zz}, где p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} — нормальные напряжения, действующие на грани рассматриваемого элементарного параллелепипеда; τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy} — касательные напряжения.

За положительные направления нормальных составляющих примем направления вдоль внешних нормалей к граням. На трех гранях, проходящих через точку M, за положительные направления касательных составляющих примем отрицательные направления осей координат, а на остальных трех гранях — в сторону положительного направления координатных осей.

Рассмотрим проекции на ось x поверхностных сил, действующих на выделенную частицу газа. Проекции на ось x дают нормальные напряжения, действующие на левую и правую грани:

$$-p_{xx}dydz; \quad [p_{xx} + (\partial p_{xx}/\partial x)\, dx]\, dxdy;$$

касательные напряжения, действующие на заднюю и переднюю грани:

$$-\tau_{zx}dxdy; \quad [\tau_{zx} + (\partial \tau_{zx}/\partial z)\, dz]\, dxdy,$$

а также касательные напряжения, приложенные к нижней и верхней граням:

$$-\tau_{yx}dxdz; \quad [\tau_{yx} + (\partial \tau_{yx}/\partial y)\, dy]\, dxdz.$$

Суммарная проекция на ось x поверхностных сил, действующих на все грани параллелепипеда,

$$(\partial p_{xx}/\partial x + \partial \tau_{yx}/\partial y + \partial \tau_{zx}/\partial z)\, dxdydz.$$

Проекции массовых сил, отнесенных к единице массы, по-прежнему обозначим X, Y, Z. Тогда проекция на ось x всех сил

$$F_x = [X + (1/\rho)\,(\partial p_{xx}/\partial x + \partial \tau_{yx}/\partial y + \partial \tau_{zx}/\partial z)]\, \rho dxdydz.$$

Используя принцип Даламбера, получаем:

$$-(dv_x/dt)\rho dxdydz + [X + (1/\rho)(\partial p_{xx}/\partial x + \partial\tau_{yx}/\partial y +$$
$$+ \partial\tau_{zx}/\partial z)]\rho dxdydz = 0;$$

$$dv_x/dt = X + (1/\rho)(\partial p_{xx}/\partial x + \partial\tau_{yx}/\partial y + \partial\tau_{zx}/\partial z). \quad (3.14)$$

Аналогично можно получить еще два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} dv_y/dt &= Y + (1/\rho)(\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial p_{yy}/\partial y + \partial\tau_{zy}/\partial z);\\ dv_z/dt &= Z + (1/\rho)(\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial p_{zz}/\partial z).\end{aligned}\right\} \quad (3.15)$$

Покажем, что из шести касательных напряжений независимыми являются лишь три, причем $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Составим уравнения моментов, действующих на частицу сил, относительно осей, проходящих через центр частицы и параллельных осям координат. Моменты массовой силы и нормальных составляющих поверхностных сил относительно указанных осей равны нулю. Поэтому при составлении уравнений моментов необходимо учитывать только моменты от сил, определяемых касательными напряжениями. Например, уравнение моментов относительно оси, параллельной оси z, имеет вид

$$-\tau_{yx}dxdzdy/2 - [\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial y)\,dy]\,dxdzdy/2 +$$
$$+ \tau_{xy}dydzdx/2 + [\tau_{xy} + (\partial\tau_{xy}/\partial x)\,dx]\,dydzdx/2 = 0.$$

Отсюда, отбрасывая малые члены четвертого порядка, получаем $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Аналогично, из уравнений моментов относительно осей x и y имеем $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Система трех уравнений (3.14) и (3.15) содержит шесть напряжений — три нормальных p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} и три касательных $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Представим нормальные напряжения в следующем виде:

$$p_{xx} = -p + \pi_{xx},\ p_{yy} = -p + \pi_{yy},\ p_{zz} = -p + \pi_{zz}, \quad (3.16)$$

где π_{xx}, π_{yy}, π_{zz} — дополнительные нормальные напряжения, зависящие от вязкости. В невязкой среде и в покоящейся вязкой среде $\pi_{xx} = \pi_{yy} = \pi_{zz} = 0$.

Воспользуемся гипотезой пропорциональности напряжений соответствующим скоростям деформационного движения. Согласно этой гипотезе, касательные напряжения пропорциональны скоростям деформации скашивания угла, а нормальные напряжения π_{xx}, π_{yy}, π_{zz}, зависящие от вязкости, пропорциональны соответствующим скоростям линейной деформации (в случае несжимаемой среды), скоростям линейной и объемной деформации (в случае сжимаемой среды):

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu(\partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x);\\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu(\partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x);\\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu(\partial v_y/\partial z + \partial v_z/\partial y);\end{aligned}\right\} \quad (3.17)$$

$$\left.\begin{aligned}\pi_{xx} &= 2\mu\partial v_x/\partial x + \tilde{\mu}\operatorname{div}\vec{v};\\ \pi_{yy} &= 2\mu\partial v_y/\partial y + \tilde{\mu}\operatorname{div}\vec{v};\\ \pi_{zz} &= 2\mu\partial v_z/\partial z + \tilde{\mu}\operatorname{div}\vec{v},\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

где μ — динамическая вязкость, а $\tilde{\mu}$ — величина, зависящая от коэффициента μ.

В частности, из уравнений (3.17) можно получить известный закон Ньютона для одномерного течения жидкости параллельными слоями. Действительно, полагая, что жидкость движется вдоль оси $x(v_y = v_z = 0)$, из первого выражения (3.17) получаем $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\partial v_x/\partial y$ или $\tau = \mu\partial v/\partial n$, т. е. соотношения (3.17) являются обобщением закона трения Ньютона.

Из формул (3.18) следует, что в общем случае $\pi_{xx} \neq \pi_{yy} \neq \pi_{zz}$, т. е. нормальные напряжения p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} по трем взаимноперпендикулярным площадкам, проведенным через точку M, различны. Примем за давление в данной точке вязкой среды величину

$$p = -(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})/3. \tag{3.19}$$

Подставляя в равенство (3.19) выражения (3.16) и (3.18), получаем, что в несжимаемой среде оно выполняется тождественно, так как при этом $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, а для его выполнения в сжимаемой среде необходимо, чтобы

$$2\mu + 3\tilde{\mu} = 0, \quad \tilde{\mu} = -(2/3)\mu. \tag{3.20}$$

В результате, используя (3.16), (3.18) и (3.20), имеем

$$\left.\begin{aligned}p_{xx} &= -p + 2\mu\partial v_x/\partial x - (2/3)\mu\operatorname{div}\vec{v};\\ p_{yy} &= -p + 2\mu\partial v_y/\partial y - (2/3)\mu\operatorname{div}\vec{v};\\ p_{zz} &= -p + 2\mu\partial v_z/\partial z - (2/3)\mu\operatorname{div}\vec{v}.\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Подставим выражения (3.21) и (3.17) в уравнения (3.14) и (3.15) и представим в них проекции полного ускорения dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt в развернутом виде:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Тогда получаем уравнения движения вязкой среды:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}+\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\operatorname{div}\bar v\right)\right]+\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right];\\
&\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\rho Y-\frac{\partial p}{dy}+\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{2}{3}\operatorname{div}\bar v\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right];\\
&\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\operatorname{div}\bar v\right)\right]+\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right].
\end{aligned}
\right\}\qquad(3.22)
$$

Дифференциальные уравнения (3.22) называются *уравнениями Навье — Стокса.* В этих уравнениях шесть неизвестных величин: v_x, v_y, v_z, p, ρ, T. Динамическая вязкость зависит от температуры. В уравнениях (3.22) закон изменения μ в зависимости от температуры считается известным.

Представим уравнения (3.22), предполагая, что коэффициент вязкости является постоянной величиной ($\mu = \text{const}$), в виде

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\\
&+\nu\Delta v_x+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\left(\operatorname{div}\vec v\right)}{\partial x};\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\\
&+\nu\Delta v_y+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\left(\operatorname{div}\vec v\right)}{\partial y};\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\\
&+\nu\Delta v_z+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\left(\operatorname{div}\vec v\right)}{\partial z},
\end{aligned}
\right\}\qquad(3.23)
$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость.

В векторной форме уравнения (3.23) имеют вид

$$d\vec{v}/dt = \vec{f} - (1/\rho)\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta\vec{v} + (\nu/3)\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{v}). \qquad (3.24)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа.

В декартовых координатах

$$\Delta\vec{v} = \partial^2\vec{v}/\partial x^2 + \partial^2\vec{v}/\partial y^2 + \partial^2\vec{v}/\partial z^2.$$

Уравнения (3.24) по сравнению с уравнениями Эйлера (3.13) имеют два дополнительных члена: первый из них учитывает влияние вязкости в несжимаемой среде, когда $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, а второй— дополнительное влияние вязкости с учетом сжимаемости (т. е. при $\mathrm{div}\vec{v} \neq 0$).

§ 3.5. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Выведем уравнение энергии для частицы газа в виде прямоугольного параллелепипеда с массой $\rho dxdydz$. Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии частицы равно сумме работы всех сил, приложенных к частице, и количества подводимой извне теплоты вследствие теплопроводности.

Приращение энергии частицы за время dt

$$\rho dxdydz d/dt\,(u + v^2/2),$$

где u — внутренняя энергия частицы, отнесенная к единице массы ($u = c_v T$).

Составим выражение для работы внешних сил, действующих на частицу. Работа массовых сил при перемещении частицы за время dt

$$\rho\,(Xv_x + Yv_y + Zv_z)\,dxdydzdt.$$

Работа поверхностных сил, действующих в направлении оси x,

$$[\partial(p_{xx}v_x)/\partial x + \partial(\tau_{yx}v_x)/\partial y + \partial(\tau_{zx}v_x)/\partial z]\,dxdydzdt.$$

Аналогично представим выражения работы сил, действующих в направлении осей y и z:

$$[\partial(\tau_{xy}v_y)/\partial x + \partial(p_{yy}v_y)/\partial y + \partial(\tau_{zy}v_y)/\partial z]\,dxdydzdt;$$

$$[\partial(\tau_{xz}v_z)/\partial x + \partial(\tau_{yz}v_z)/\partial y + \partial(p_{zz}v_z)/\partial z]\,dxdydzdt.$$

В этих выражениях нормальные напряжения равны $p_{xx} = -p + \pi_{xx}$, $p_{yy} = -p + \pi_{yy}$, $p_{zz} = -p + \pi_{zz}$.

Определим приток энергии вследствие теплопроводности газа. Обозначим $q_x dydzdt$ количество теплоты, которое за время dt протекает через левую грань параллелепипеда. Тогда количество теплоты, втекающей за время dt через левую и правую грани частицы,

$$q_x dydzdt - [q_x + (\partial q_x/\partial x)\,dx]\,dydzdt = -(\partial q_x/\partial x)\,dxdydzdt.$$

Проводя аналогичное рассуждение для граней, перпендикулярных осям y и z, получим выражение для полного количества теплоты, втекающей через все грани параллелепипеда за время dt:

$$-(\partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y + \partial q_z/\partial z)\, dxdydzdt,$$

где, согласно закону Фурье, $q_x = -\lambda\partial T/\partial x$, $q_y = -\lambda\partial T/\partial y$, $q_z = -\lambda\partial T/\partial z$; λ — теплопроводность, Вт/(м · К).

Приравнивая изменение энергии частицы за время dt сумме работы всех сил и притока теплоты через все грани параллелепипеда, после некоторых упрощений получаем уравнение энергии для вязкого теплопроводного газа:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(c_v T + \frac{v^2}{2}\right) = \rho(Xv_x + Yv_y + Zv_z) - \left[\frac{\partial(pv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(pv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(pv_z)}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial x}(\pi_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}v_x + \pi_{yy}v_y + \tau_{yz}v_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}v_x + \tau_{zy}v_y + \pi_{zz}v_z) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right). \quad (3.25)$$

Преобразуем уравнение (3.25). Для этого умножим уравнение (3.14) и (3.15) соответственно на v_x, v_y, v_z; сложим их и полученное уравнение вычтем из уравнения (3.25). Тогда

$$\rho \frac{d}{dt}(c_v T) = -p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \left(\pi_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \pi_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y} + \pi_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \tau_{xz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Используя уравнение неразрывности (3.3) и уравнения состояния идеального газа $p = R\rho T$, получаем

$$-p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{dt} - R\rho\frac{dT}{dt}.$$

Учтем, что $c_p - c_v = R$. Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{v}.$$

Тогда, подставляя вместо касательных и нормальных напряжений τ_{xy}, τ_{xz}, ..., π_{xx}, π_{yy}, π_{zz} выражения из формул (3.17) и (3.18) и предполагая, что $c_p = \text{const}$, имеем

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \mu \left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\bar{v})^2\right\}. \quad (3.26)$$

В уравнении (3.26) члены правой части, заключенные в фигурные скобки, представляют собой теплоту, подводимую к единице объема в единицу времени вследствие трения. Эти члены называются *членами рассеивания или диссипации* энергии, а функция

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\bar{v})^2 \quad (3.27)$$

называется *диссипативной функцией.*

Введя функцию Φ, уравнение (3.26) можно представить в виде

$$\rho c_p dT/dt = dp/dt + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \mu\Phi. \quad (3.28)$$

Левая часть уравнения (3.28) представляет собой суммарное количество теплоты, подводимой к единице объема газа в единицу времени. Оно складывается из количества теплоты, подводимой к частице вследствие теплопроводности $\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$, работы сил давления dp/dt и сил трения $\mu\Phi$.

Из уравнения (3.25) легко получить уравнение энергии для невязкого и нетеплопроводного газа (без учета массовых сил):

$$\rho(d/dt)(c_v T + v^2/2) = -[\partial(pv_x)/\partial x + \partial(pv_y)/\partial y + \partial(pv_z/\partial z]. \quad (3.29)$$

Преобразуем уравнение (3.29) применительно к установившемуся движению. В этом случае

$$\partial(pv_x)/\partial x + \partial(pv_y)/\partial y + \partial(pv_z)/\partial z = dp/dt + p \operatorname{div}\bar{v}. \quad (3.30)$$

Здесь $p\operatorname{div}\bar{v} = -dp/dt + R\rho dT/dt.$

Подставляя выражения (3.30) в уравнения (3.29), имеем $(d/dt)(v^2/2 + c_v T) = -R dT/dt$. Отсюда

$$(d/dt)(v^2/2 + c_p T) = 0 \text{ или } (d/dt)(v^2/2 + i) = 0, \quad (3.31)$$

где $i = c_pT = [k/(k-1)]RT = [k/(k-1)]p/\rho$ — энтальпия газа [см. (1.12)].

В случае установившегося одномерного течения это уравнение можно представить в виде

$$v^2/2 + i = \text{const}. \tag{3.32}$$

§ 3.6. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим систему уравнений невязкого газа. В этом случае для несжимаемой среды неизвестными величинами являются три составляющие скорости v_x, v_y, v_z и давление p, а полная система уравнений состоит из уравнений Эйлера и уравнения неразрывности:

$$d\vec{v}/dt = \vec{f} - (1/\rho)\,\text{grad}\,p, \ \text{div}\,\vec{v} = 0. \tag{3.33}$$

С учетом сжимаемости полная система уравнений должна включать шесть независимых уравнений для определения шести неизвестных величин — составляющих скорости v_x, v_y, v_z, давления p, плотности ρ и температуры T. К их числу относятся уравнения движения, неразрывности и уравнение состояния газа. В качестве шестого уравнения необходимо составить уравнение термодинамического процесса. Для изэнтропических течений $s = c_v \ln p/\rho^k = \text{const}$ зависимость между давлением и плотностью описывается уравнением $p/\rho^k = \text{const}$. В дифференциальной форме это уравнение применительно к движению газа имеет вид

$$(d/dt)\,p/\rho^k = 0;$$

$$(\partial/\partial t)\,p/\rho^k + v_x(\partial/\partial x)\,p/\rho^k + v_y(\partial/\partial y)\,p/\rho^k + v_z(\partial/\partial z)\,p/\rho^k = 0$$

или

$$(\partial/\partial t)\,p/\rho^k + \vec{v}\,\text{grad}\,(p/\rho^k) = 0. \tag{3.34}$$

Используя уравнение (3.34), получаем полную систему уравнений для невязкого сжимаемого газа:

$$d\vec{v}/dt = \vec{f} - (1/\rho)\,\text{grad}\,p, \quad \partial\rho/\partial t + \text{div}\,(\rho\vec{v}) = 0,$$

$$p = R\rho T, \ (\partial/\partial t)\,(p/\rho^k) + \vec{v}\,\text{grad}\,(p/\rho^k) = 0. \tag{3.35}$$

В случае вязкой несжимаемой среды полная система уравнений состоит из уравнения Навье — Стокса и уравнения неразрывности:

$$d\vec{v}/dt = \vec{f} - (1/\rho)\,\text{grad}\,p + \nu\Delta\vec{v}, \ \text{div}\,\vec{v} = 0. \tag{3.36}$$

Здесь неизвестными являются составляющие скорости и давление.

В общем случае вязкой сжимаемой среды необходимо использовать уравнение движения вязкого сжимаемого газа (3.22), уравнение неразрывности (3.4), уравнение энергии для вязкого теплопроводного газа (3.28) и уравнение состояния газа (1.1).

Решения системы уравнений должны удовлетворять начальным и граничным условиям. Начальные условия необходимы при решении задачи для неустановившегося движения и определяют значения искомых функций в некоторый заданный момент времени.

Граничные условия задаются при решении задачи как установившегося, так и неустановившегося движения газа и должны выполняться в каждый момент времени. В невозмущенном потоке $\vec{v} = \vec{v}_\infty$, $p = p_\infty$, $\rho = \rho_\infty$, $T = T_\infty$.

При рассмотрении задачи обтекания тела потоком невязкого газа должно выполняться условие безотрывности обтекания (условие непротекания). Поскольку при этом вектор скорости потока направлен по касательной к поверхности, то нормальная составляющая скорости в каждой точке поверхности равна нулю: $(v_n)_S = 0$. Если поверхность задана уравнением $f(x, y, z) = 0$, то направление нормали к поверхности в любой точке совпадает с направлением вектора:

$$\operatorname{grad} f = \vec{i}\partial f/\partial x + \vec{j}\partial f/\partial y + \vec{k}\partial f/\partial z.$$

На основании условия безотрывности обтекания векторы скорости $\vec{v}$ и $\operatorname{grad} f$ в каждой точке поверхности должны быть ортогональны, т. е. скалярное произведение этих векторов должно быть равным нулю. Тогда условие безотрывности обтекания $(v_n)_S = 0$ можно представить в следующем виде: $(\vec{v}\operatorname{grad} f) = 0$, или

$$v_x\partial f/\partial x + v_y\partial f/\partial y + v_z\partial f/\partial z = 0. \tag{3.37}$$

Следовательно, в случае невязкого газа необходимо задать значение v_x, v_y, v_z, p, ρ, T на бесконечности, а на поверхности задается одно условие — равенство нулю линейной комбинации v_x, v_y, v_z с переменными коэффициентами (3.37).

При исследовании обтекания тела потоком вязкого газа на поверхности тела выполняются граничные условия прилипания вязкой среды к поверхности, т. е. условие равенства нулю скорости потока $(v)_S = 0$.

Кроме того, на поверхности необходимо задать граничные условия для температуры газа. В зависимости от решаемой задачи эти условия могут быть сформулированы по-разному: а) задана температура поверхности тела $(T)_S = T_{\text{ст}}$; б) в каждой точке поверхности и в любой момент времени может быть задан удельный тепловой поток q. Поскольку удельный тепловой поток, осуществляемый посредством теплопроводности, согласно закону Фурье, можно представить в виде $q = -\lambda\partial T/\partial n$, то в этом случае граничное условие эквивалентно заданным значениям производной температуры по нормали к поверхности тела, $\partial T/\partial n$. В случае теплоизолированной стенки $\partial T/\partial n = 0$; в) задана связь между неизвестными значениями $T_{\text{ст}}$ и $(\partial T/\partial n)_s$:

$$\alpha(T_{\text{ст}} - T_r) = -\lambda \partial T/\partial n, \tag{3.38}$$

где α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2 · К); T_r — температура восстановления, К.

При малых скоростях значение T_r близко к T_∞, а при больших скоростях движения газа оно может быть значительно выше (см. гл. 12).

Следует отметить, что в случае вязкого газа полная система дифференциальных уравнений имеет первый порядок относительно давления и плотности и второй порядок относительно составляющих скорости и температуры. Поэтому для определения давления и плотности по-прежнему достаточно задать одно условие (на бесконечности), а для нахождения v_x, v_y, v_z и T необходимы два условия — на бесконечности и на поверхности тела.

§ 3.7. ИНТЕГРАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕВЯЗКОГО ГАЗА

Интегралы дифференциальных уравнений (3.12′) могут быть получены в двух частных случаях — для потенциального течения (уравнение Лагранжа) и для установившегося движения (уравнение Бернулли).

Уравнение Лагранжа. Рассмотрим случай неустановившегося потенциального движения газа. При этом $\vec{\omega} = \operatorname{rot}\vec{v}/2 = 0$, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Отсюда $\partial v_y/\partial z = \partial v_z/\partial y$, $\partial v_x/\partial z = \partial v_z/\partial x$, $\partial v_y/\partial x = \partial v_x/\partial y$.

Преобразуем левые части уравнений (3.12′). Используя условие потенциальности течения, получаем:

$$\partial v_x/\partial t = (\partial/\partial t)(\partial\varphi/\partial x) = (\partial/\partial x)(\partial\varphi/\partial t);\ v_y \partial v_x/\partial y = v_y \partial v_y/\partial x =$$

$$= (\partial/\partial x)\left(v_y^2/2\right);\ v_z \partial v_x/\partial z = v_z \partial v_z/\partial x = (\partial/\partial x)\left(v_z^2/2\right).$$

Тогда

$$dv_x/dt = (\partial/\partial x)(\partial\varphi/\partial t + v^2/2), \tag{3.39а}$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Аналогично,

$$dv_y/dt = (\partial/\partial y)(\partial\varphi/\partial t + v^2/2);\quad dv_z/dt = (\partial/\partial z)(\partial\varphi/\partial t + v^2/2). \tag{3.39б}$$

Для того чтобы преобразовать правые части уравнений (3.12′), введем функцию давления P, определяемую из соотношения $dp/\rho = dP$ или $\int dp/\rho = P$. Тогда

$$(1/\rho)\,\partial p/\partial x = \partial P/\partial x;\ (1/\rho)\,\partial p/\partial y = \partial P/\partial y;\ (1/\rho)\,\partial p/\partial z = \partial P/\partial z. \tag{3.40}$$

Если известна однозначная зависимость между давлением и плотностью $p(\rho)$, функцию давления определить легко.

Кроме того, примем, что массовые силы обладают потенциалом. Обозначим потенциал единичной массовой силы U. При этом

$$X = \partial U/\partial x,\quad Y = \partial U/\partial y,\quad Z = \partial U/\partial z. \tag{3.41}$$

Для силы тяжести $U = -gy$.

Подставляя выражения (3.39)—(3.41) в систему уравнений (3.12′), получаем:

$$(\partial/\partial x)\left(\partial\varphi/\partial t + v^2/2 + \int dp/\rho - U\right) = 0;\ (\partial/\partial y)(\partial\varphi/\partial t + v^2/2 +$$

$$+ \int dp/\rho - U\Big) = 0; \quad (\partial/\partial z)\left(\partial\varphi/\partial t + v^2/2 + \int dp/\rho - U\right) = 0.$$

Отсюда следует, что выражение $\partial\varphi/\partial t + v^2/2 + \int dp/\rho$ не зависит от координат, т. е. имеет одинаковые значения для любых точек потенциального потока. В случае неустановившегося движения оно является функцией только времени:

$$\partial\varphi/\partial t + v^2/2 + \int dp/\rho - U = C(t). \tag{3.42}$$

Уравнение (3.42) называется *уравнением Лагранжа.*

В случае установившегося потенциального течения $\partial\varphi/\partial t = 0$ величина C не зависит от времени. Тогда интеграл (3.42) приобретет вид

$$v^2/2 + \int dp/\rho - U = \mathrm{const}. \tag{3.43}$$

Интеграл (3.43) называется *уравнением Лагранжа — Бернулли.*

Уравнение Бернулли. Рассмотрим установившееся движение газа. При этом $\partial v_x/\partial t = \partial v_y/\partial t = \partial v_z/\partial t = 0$, $p = p(x, y, z)$. Преобразуем левую часть первого уравнения системы уравнений (3.12):

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_y^2}{2}\right) +$$

$$+ v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_z^2}{2}\right) + v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right);$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2(v_z\omega_y - v_y\omega_z),$$

где выражение $(v_z\omega_y - v_y\omega_z)$ — проекция вектора $[\vec{\omega}\vec{v}]$ на направление оси x.

Тогда

$$dv_x/dt = (\partial/\partial x)(v^2/2) + 2[\vec{\omega}\,\vec{v}]_x. \tag{3.44}$$

Аналогично, для производных dv_y/dt и dv_z/dt

$$dv_y/dt = (\partial/\partial y)(v^2/2) + [\vec{\omega}\vec{v}]_y; \quad dv_z/dt = (\partial/\partial z)(v^2/2) + [\vec{\omega}\vec{v}]_z. \tag{3.45}$$

Здесь $[\vec{\omega}\vec{v}]_x$, $[\vec{\omega}\vec{v}]_y$, $[\vec{\omega}\vec{v}]_z$ — проекции вектора $[\vec{\omega}\vec{v}]$ по осям координат.

Подставим выражения (3.44) и (3.45) в уравнения (3.12). Кроме того, введем функцию давления (3.40) и потенциал единичной массовой силы U (3.41). Тогда

$$(\partial/\partial x)\left(v^2/2 + \int dp/\rho - U\right) = -2[\vec{\omega}\vec{v}]_x; \quad (\partial/\partial y)\left(v^2/2 + \right.$$

$$\left. + \int dp/\rho - U\right) = -2\left[\vec{\omega}\vec{v}\right]_y; \; (\partial/\partial z)\left(v^2/2 + \int dp/\rho - U\right) =$$

$$= -2[\vec{\omega}\vec{v}]_z.$$

Умножим первое уравнение на dx, второе — на dy, третье — на dz и почленно сложим. В результате для установившегося движения

$$d\left(v^2/2 + \int dp/\rho - U\right) = -2\left([\vec{\omega}\vec{v}]\vec{ds}\right),$$

где $\vec{ds}$ — вектор элементарной дуги с проекциями dx, dy, dz.

Скалярное произведение $([\vec{\omega}\vec{v}]\vec{ds}) = 0$ вдоль линии тока и вдоль вихревой линии, так как векторы $[\vec{\omega}\vec{v}]$ и $\vec{ds}$ перпендикулярны. Таким образом, вдоль линий тока и вихревых линий

$$d\left(v^2/2 + \int dp/\rho - U\right) = 0; \; v^2/2 + \int dp/\rho - U = \text{const} \tag{3.46}$$

где значение постоянной различно для разных линий тока и вихревых линий.

Уравнение (3.46) называется *уравнением или интегралом Бернулли*. Это уравнение имеет фундаментальное значение в теории движения невязких жидкостей и газов и является теоретической основой для практических расчетов.

Рассмотрим уравнения Бернулли для различных частных случаев движения жидкости и газа. Для несжимаемой среды ($\rho = \text{const}$) функция давления равна $P = p/\rho$. Примем $U = -gy$. Тогда уравнение (3.46) приобретет вид

$$v^2/2 + p/\rho + gy = \text{const}. \tag{3.47}$$

Если пренебречь массовыми силами, то (3.47) примет вид

$$p + \rho v^2/2 = \text{const}. \tag{3.48}$$

Из уравнения (3.48) следует, что при установившемся движении несжимаемой среды полное давление, равное $p + \rho v^2/2$, вдоль линии тока или вихревой линии остается неизменным.

Для сжимаемого газа без учета массовых сил

$$v^2/2 + \int dp/\rho = \text{const}. \tag{3.49}$$

Допустим, что течение газа является изэнтропическим. Тогда $p/\rho^k = C$. Отсюда

$$dp = Ck\rho^{k-1}d\rho \text{ и } dp/\rho = Ck\rho^{k-2}d\rho, \int dp/\rho = C[k/(k-1)]\rho^{k-1} =$$

$= [k/(k-1)]\, p/\rho.$

Подставляя выражение интеграла в (3.49), получаем:

$$v^2/2 + [k/(k-1)]\, p/\rho = \text{const}; \tag{3.50}$$

$$v^2/2 + [k/(k-1)]\, RT = \text{const}. \tag{3.51}$$

Учитывая, что $[k(k-1)]p/\rho = [k/(k-1)]RT = i$, имеем

$$v^2/2 + i = \text{const}. \tag{3.52}$$

Уравнение Бернулли в форме (3.52) совпадает с уравнением энергии для невязкого и нетеплопроводного газа (3.32).

Выясним, какова ошибка в определении давления при использовании уравнения Бернулли (3.48), полученного без учета сжимаемости. Допустим, что поток воздуха обтекает какое-либо тело. Пусть на достаточно большом удалении от тела скорость потока v_∞ и давление p_∞. В критической точке на поверхности скорость равна нулю, а давление равно давлению торможения p_0. Используем уравнение Бернулли для несжимаемой среды (3.48). Постоянную C определим из условий на бесконечности:

$$C = p_\infty + \rho v_\infty^2/2.$$

Подставляя найденное значение в уравнение (3.48), находим

$$p_i' = p_\infty + \rho v_\infty^2/2 - \rho v^2/2.$$

Для определения давления в критической точке положим $v = 0$. В результате

$$p_0 = p_\infty + \rho v_\infty^2/2. \tag{3.53}$$

Определим теперь давление в критической точке с учетом сжимаемости. Для этого найдем постоянную C в уравнении (3.50) из условий на бесконечности:

$$C = [k/(k-1)]\, p_\infty/\rho_\infty + v_\infty^2/2.$$

Подставляя найденное значение C в уравнение (3.50) и используя выражение $p/\rho^k = p_\infty/\rho_\infty^k$, получаем

$$[k/(k-1)]\,(p_\infty/\rho_\infty)\,(p/p_\infty)^{(k-1)/k} + v^2/2 = [k/(k-1)]p_\infty/\rho_\infty + v_\infty^2/2.$$

Положив в этом уравнении $v = 0$, что соответствует критической точке, будем иметь

$$[k/(k-1)]\,(p_\infty/\rho_\infty)\,(p_0/p_\infty)^{(k-1)/k} = [k/(k-1)]\, p_\infty/\rho_\infty + v_\infty^2/2$$

или, учитывая, что $kp_\infty/\rho_\infty = a_\infty^2$, $v_\infty/a_\infty = \mathrm{M}_\infty$, после несложных преобразований получаем

$$p_0/p_\infty = \left(1 + [(k-1)/2]\,\mathrm{M}_\infty^2\right)^{k/(k-1)}. \tag{3.54}$$

Формулой (3.54) можно пользоваться для определения давления в критической точке p_0 с учетом сжимаемости.

Поскольку влиянием сжимаемости потока можно пренебречь только при малых значениях числа M_∞, то, для того чтобы выяснить пределы применимости формулы (3.53), полученной без учета сжимаемости, в формуле (3.54) примем $M_\infty \ll 1$. При этом условии разложим правую часть выражения (3.54) в ряд по степеням $[(k-1)/2]\,M_\infty^2 \ll 1$ по формуле бинома Ньютона:

$$\frac{p_0}{p_\infty} = 1 + \frac{k}{k-1}\,\frac{k-1}{2}\,M_\infty^2 + \frac{1}{2}\,\frac{k}{k-1}\left(\frac{k}{k-1}-1\right)\left(\frac{k-1}{2}M_\infty^2\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{6}\,\frac{k}{k-1}\left(\frac{k}{k-1}-1\right)\left(\frac{k}{k-1}-2\right)\left(\frac{k-1}{2}\,M_\infty^2\right)^3+\cdots,$$

или

$$p_0/p_\infty = 1 + (k/2)\,M_\infty^2\left(1 + M_\infty^2/4 + [(2-k)/24]\,M_\infty^4 + \cdots\right).$$

Отсюда, учитывая, что $(k/2)p_\infty M_\infty^2 = \rho_\infty v_\infty^2/2$, имеем

$$p_0 = p_\infty + \rho_\infty v_\infty^2/2\left(1 + M_\infty^2/4 + [(2-k)/24]\,M_\infty^4 + \cdots\right).$$

Представим это выражение в виде

$$p_0 = p_\infty + [(\rho_\infty v_\infty^2)/2\,](1+\varepsilon_p), \tag{3.55}$$

где

$$\varepsilon_p = 1 + M_\infty^2/4 + [(2-k)/24]\,M_\infty^4 + \cdots . \tag{3.56}$$

Сравнивая формулы (3.55) и (3.53), замечаем, что величина ε_p в формуле (3.55) представляет собой погрешность, отнесенную к скоростному напору при определении давления в критической точке без учета сжимаемости. Величину ε_p можно трактовать также как относительную поправку, учитывающую влияние сжимаемости. Из формулы (3.56) следует, что величина ε_p зависит от числа M_∞.

Ниже приведены значения ε_p в зависимости от M_∞ при $k = 1{,}4$:

M	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ε_p	0,25	1,0	2,25	4,0	6,2	9,0

Отсюда следует, что, допуская ошибку не более 2%, при определении давления p_0 можно пользоваться уравнением Бернулли, полученным без учета сжимаемости воздуха при $M < 0{,}3$. При больших скоростях ($M > 0{,}3$) ошибка в определении p_0 возрастает.

§ 3.8. АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ

Методы теории подобия используются как при теоретических, так и при экспериментальных исследованиях аэродинамических характеристик летательных аппаратов и их элементов. Важное значение теория подобия имеет в экспериментальной аэродинамике. Она позволяет установить требования к моделям, к условиям проведения эксперимента в аэродинамических трубах и к обработке результатов испытаний моделей, которые обеспечивают возможность перенесения данных эксперимента на натурные объекты.

Понятие о подобии потоков. Рассмотрим два потока, обтекающих натурный объект и его модель. Назовем сходственными такие точки этих потоков, которые геометрически подобно расположены относительно рассматриваемых тел, т. е. координаты таких точек удовлетворяют условию $x_2 = K_l x_1$, $y_2 = K_l y_1$, $z_2 = K_l z_1$, где K_l — линейный масштаб. Аналогично можно ввести понятие о сходственных моментах времени: $t_2 = K_t t_1$. Здесь K_t — масштаб времени.

Два потока называются *подобными*, если все физические величины для любых сходственных точек и в любые сходственные моменты времени пропорциональны друг другу, т. е. два подобных потока в сходственных пространственно-временных точках различаются между собой только масштабами характерных величин. Подобие потоков предполагает наличие геометрического, кинематического и динамического подобия. Кинематическое подобие означает, что в сходственных точках геометрически подобных потоков в сходственные моменты времени отношение скоростей $v_2/v_1 = K_v$ одинаково. Здесь $K_v = K_l K_t^{-1}$ — масштаб скорости. При геометрическом и кинематическом подобии отношение ускорений движения в сходственных точках $K_w = w_2/w_1 = K_l K_t^{-2}$ также одинаково.

Потоки называются динамически подобными, если силы, действующие на их сходственные элементы в сходственные моменты времени, пропорциональны, т. е. при этом должно соблюдаться подобие сил — инерционной силы, сил давления, вязкости и массовой силы соответственно.

Критерии подобия. Рассмотрим условия динамического подобия при обтекании тел потоком вязкого сжимаемого газа. Для этого составим систему уравнений — уравнения Навье — Стокса, неразрывности, уравнения энергии и состояния газа, а также соответствующие граничные и начальные условия в безразмерной форме. При этом будем считать $\mu = \mathrm{const}$, $\lambda = \mathrm{const}$, $c_p = \mathrm{const}$.

Примем за характерную длину некоторый линейный размер (например, хорду крыла или длину корпуса). Другие характерные величины — их значения в невозмущенном потоке: скорость v_∞, давление p_∞, плотность ρ_∞, температура T_∞, энтальпия i_∞, кинематическая вязкость ν_∞; характерное время процесса $t_\infty = l/v_\infty$.

Введем следующие безразмерные величины: $x' = x/l$, $y' = y/l$, $z' = z/l$, $t' = t/t_\infty$, $\vec{v}' = \vec{v}/v_\infty$, $p' = p/p_\infty$, $\rho' = \rho/\rho_\infty$. $T' = T/T_\infty$, $\nu' = \nu/\nu_\infty$, $\vec{f}' = \vec{f}/g$. Здесь $\vec{f}$ — вектор единичной массовой силы.

Преобразуем сначала уравнения Навье — Стокса (3.24) и уравнение неразрывности (3.4). Выражая в них все размерные величины через безразмерные, получаем:

$$\frac{v_\infty}{t_\infty}\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \frac{v_\infty^2}{l}\left(v_x'\frac{\partial \vec{v}'}{\partial x'} + v_y'\frac{\partial \vec{v}'}{\partial y'} + v_z'\frac{\partial \vec{v}'}{\partial z'} = g\vec{f}' -\right.$$

$$-\frac{p_\infty}{\rho_\infty l}\frac{1}{\rho'}\,\mathrm{grad}' p' + \frac{\nu_\infty v_\infty}{l^2}\left[\nu'\Delta'\vec{v}' + (\nu'/3)\,\mathrm{grad}'(\mathrm{div}'\vec{v}')\right]; \qquad (3.57)$$

$$\frac{\rho_\infty}{t_\infty}\frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{\rho_\infty v_\infty}{l}\,\mathrm{div}'\left(\rho'\vec{v}'\right) = 0. \qquad (3.58)$$

Здесь символы div',grad', Δ' означают, что дифференцирование производится в безразмерных координатах.

Уравнения (3.57) и (3.58) являются размерными. Однако в них размерные величины представлены в виде коэффициентов с одинаковыми размерностями. В уравнении (3.57) такими размерными множителями являются v^2_∞/l, $p_\infty/(\rho_\infty l)$, $\nu_\infty v_\infty/l^2$, v_∞/t_∞, g (м/с^2), а в уравнении (3.58) — ρ_∞/t_∞, $\rho_\infty v_\infty/l$ [кг/(м^3 · с)].

Поделив на любой из указанных размерных множителей, получим уравнения в безразмерной форме.

Для того чтобы получить принятые критерии подобия, разделим обе части уравнения (3.57) на величину v^2_∞/l, а уравнения неразрывности (3.58) — на $\rho_\infty v_\infty/l$. Тогда

$$\frac{l}{v_\infty t_\infty}\frac{\partial\vec{v}'}{\partial t'} + v'_x\frac{\partial\vec{v}'}{\partial x'} + v'_y\frac{\partial\vec{v}'}{\partial y'} + v'_z\frac{\partial\vec{v}'}{\partial z'} = \frac{gl}{v^2_\infty}\vec{f}' -$$

$$-\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\frac{1}{v^2_\infty}\frac{1}{\rho'}\,\mathrm{grad}'\, p' + \frac{\nu_\infty}{v_\infty l}\left[\nu'\Delta'\vec{v}' + \frac{\nu'}{3}\,\mathrm{grad}'(\mathrm{div}'\,\vec{v}')\right]; \qquad (3.59)$$

$$l/(v_\infty t_\infty)\,\partial\rho'/\partial t' + \mathrm{div}'(\rho'\vec{v}') = 0. \qquad (3.60)$$

Здесь $p_\infty/\rho_\infty = a^2_\infty/k$ и $(p_\infty/\rho_\infty)(1/v^2_\infty) = 1/(k\mathbf{M}^2_\infty)$.

В этих уравнениях содержится ряд безразмерных параметров, составленных из размерных величин: $v_\infty l/\nu_\infty = \mathrm{Re}$ — число Рейнольдса; $v_\infty/a_\infty = \mathbf{M}_\infty$ — число Маха; $v^2_\infty/gl = \mathbf{Fr}$ — число Фруда; $v_\infty t_\infty/l = \mathrm{Sh}$ —число Струхаля.

Число Re равно отношению размерных величин v^2_∞/l и $\nu_\infty v_\infty/l^2$, характеризующих соответственно инерционные силы и силы вязкости, и *представляет собой критерий вязкости.* Если для двух геометрически подобных потоков числа Re одинаковы (Re = idem), то в них одинаково проявляется влияние вязкости.

Число **M** — критерий сжимаемости и характеризует отношение инерционной силы к силе давления. Если для двух геометрически подобных потоков одинаковы числа **M** (**M** = idem), то в них влияние сжимаемости проявляется одинаково.

Число Fr определяет отношение инерционной силы к силе тяжести и является критерием подобия, учитывающим влияние силы тяжести газа. В задачах аэродинамики в большинстве случаев число Fr не имеет существенного значения, поскольку, как правило, влиянием тяжести воздуха в этих задачах можно пренебречь.

Число Sh характеризует отношение конвективного ускорения движения частицы к локальному ускорению и учитывает нестационарность движения.

Используя безразмерные числа **Re**, **M**, **Fr**, **Sh**, уравнения (3.59) и (3.60) представим в следующем виде:

$$\frac{1}{\mathrm{Sh}}\frac{\partial\vec{v}'}{\partial t'}+v_x\frac{\partial\vec{v}'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial\vec{v}'}{\partial y'}+v_z'\frac{\partial\vec{v}'}{\partial z'}=\frac{1}{\mathrm{Fr}}\vec{f}'-$$

$$-\frac{1}{k\mathrm{M}_\infty^2}\frac{1}{\rho'}\mathrm{grad}'p'+\frac{1}{\mathrm{Re}}[\nu'\Delta'\vec{v}'+(\nu'/3)\,\mathrm{grad}'(\mathrm{div}'\vec{v}')];\qquad(3.61)$$

$$(1/\mathrm{Sh})\,\partial\rho'/\partial t'+\mathrm{div}'(\rho'\vec{v}')=0.\qquad(3.62)$$

Аналогично, в безразмерном виде можно представить уравнение энергии (3.28), заменяя в нем полную производную выражением

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z};$$

$$\rho_\infty c_p\frac{T_\infty}{t_\infty}\rho'\frac{\partial T'}{\partial t'}+\rho_\infty c_pT_\infty\frac{v_\infty}{l}\rho'\left(v_x'\frac{\partial T'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial T'}{\partial y'}+v_z'\frac{\partial T'}{\partial z'}\right)=$$

$$=\frac{p_\infty}{t_\infty}\frac{dp'}{dt'}+\lambda\frac{T_\infty}{l^2}\mathrm{div}'(\mathrm{grad}'T')+\frac{\mu v_\infty^2}{l^2}\Phi',$$

где Φ' — диссипативная функция, определяемая по формуле (3.27), в которой размерные величины составляющих скорости и координат заменены соответствующими безразмерными параметрами.

Поделим все члены уравнения на величину $\rho_\infty c_p T_\infty v_\infty/l$. Кроме того, учтем, что на основании уравнения состояния идеального газа $p_\infty/\rho_\infty=RT_\infty$, где газовая постоянная $R=c_p-c_v$, $c_p/c_v=k$. Тогда

$$\frac{1}{\mathrm{Sh}}\rho'\frac{\partial T'}{\partial t'}+\rho'\left(v_x'\frac{\partial T'}{\partial x'}+v_y'\frac{\partial T'}{\partial y'}+v_z'\frac{\partial T'}{\partial z'}\right)=$$

$$=\frac{k-1}{k}\frac{1}{\mathrm{Sh}}\frac{dp'}{dt'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\mathrm{div}'(\mathrm{grad}'T')+(k-1)\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{Re}^2}\Phi'.\qquad(3.63)$$

Здесь $\mathrm{Pr}=c_p\mu/\lambda$ — число Прандтля, являющееся мерой относительной значимости влияния вязкости и теплопроводности ($\mathrm{Pr}<1$; для воздуха при $T<1300$ К число $\mathrm{Pr}\leqslant 0{,}72$). Таким образом, число **Pr** является критерием подобия, учитывающим одновременно влияние вязкости и теплопроводности.

Уравнение состояния газа в безразмерной форме имеет вид

$$p'=\rho'T'.\qquad(3.64)$$

К системе уравнений (3.61)—(3.64) необходимо добавить безразмерные начальные и граничные условия. К граничным условиям относятся безразмерные значения скорости, давления, температуры в невозмущенном потоке. Согласно выбранным характерным величинам, их значения равны единице. На поверхности тела, уравнение которой должно быть в безразмерных координатах, граничными условиями являются равенство нулю безразмерной скорости ($v'=0$), а также условие, накладываемое на температуру. Граничные условия для скорости и давления нового критерия подобия не дают, а требование выполнения граничных условий для температуры приводит к дополнительным условиям подобия. Это следует из граничного условия для температуры (3.38), приведенного в безразмерной форме:

$$(\alpha l/\lambda)\left(T'_{\text{ст}}-T'_r\right)=-\partial T'/\partial n'.$$

Здесь $\alpha l/\lambda = \mathbf{Nu}$ — число Нуссельта.

Безразмерное отношение $T_{\text{ст}}/T_\infty = T'_{\text{ст}}$ принято называть температурным фактором, $T'_r = T_r/T_\infty$ зависит от числа $\mathbf{M}_\infty$ (см. гл. 12). Число $\mathbf{Nu}$ можно выразить через числа Стантона $\mathbf{St} = \alpha/(c_p\rho_\infty v_\infty)$, $\mathbf{Re}$ и $\mathbf{Pr}$:

$$\mathbf{Nu}=(c_p\mu/\lambda)(\rho_\infty v_\infty l/\mu)[\alpha/(c_p\rho_\infty v_\infty]=\mathbf{Pr}\,\mathbf{Re}\,\mathbf{St}.$$

Система уравнений в безразмерной форме позволяет установить условия, необходимые для подобия двух потоков.

Рассмотрим два подобных потока. Из условия подобия следует, что безразмерные величины $\vec{v}'$, p', ρ', T' в сходственных точках потоков и в сходственные моменты времени должны быть одинаковы. С другой стороны, параметры $\vec{v}'$, p', ρ, T' являются решениями безразмерной системы уравнений (3.61)—(3.64) с безразмерными граничными условиями. Следовательно, для обоих потоков должны быть одинаковыми и уравнения с соответствующими граничными условиями. Отсюда следует, что если два потока вязкого газа подобны, то числа $\mathbf{Re}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{Fr}$, $\mathbf{Sh}$, $\mathbf{Pr}$, $\mathbf{St}$ и отношение c_p/c_v, а также температурный фактор $T_{\text{ст}}/T_\infty$ для этих потоков должны быть соответственно одинаковыми. В этом случае подобие потоков называется полным. Однако во многих случаях можно ограничиться условиями частичного подобия. Например, как отмечалось выше, в большинстве задач аэродинамики влиянием числа $\mathbf{Fr}$ можно пренебречь. При малых скоростях потока $\mathbf{M} \ll 1$ можно пренебречь и влиянием сжимаемости, т. е. числа $\mathbf{M}$. Тогда в случае установившегося движения для подобия таких потоков требуется только равенство чисел $\mathbf{Re}$.

При дозвуковых и умеренных сверхзвуковых скоростях основными критериями подобия являются числа $\mathbf{Re}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{Sh}$ (в случае неустановившегося движения), $\mathbf{St}$, в гиперзвуковом потоке недиссоциированного газа, кроме того, должны сохраняться величины температурного фактора, числа $\mathbf{Pr}$ и отношения удельных теплоемкостей $k = c_p/c_v$.

§ 3.9. ПОНЯТИЕ ОБ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ. ПРОИЗВОДНЫЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Аэродинамические коэффициенты. Рассмотрим два подобных потока: один — обтекающий натурный объект, а другой — обтекающий его модель. Выделив в потоках два сходственных бесконечно малых элемента. Пусть на эти элементы действуют силы dR и dR_1, создающие ускорения w и w_1. Очевидно, можно составить следующие равенства: $dR = w dm$, $dR_1 = w_1 dm_1$, где dm, dm_1 — массы этих элементов.

Выразим массы dm, dm_1 через плотность и линейные размеры: $dm = \rho(dl)^3$, $dm_1 = \rho_1(dl_1)^3$. Тогда, подставляя их в выражения для сил, получаем $dR = \rho(dl)^3 w$, $dR_1 = \rho_1(dl_1)^3 w_1$. Деля эти равенства почленно, имеем $K_R = dR_1/dR = K_\rho K_l^3 K_w$. Так как $K_w = K_l K_t^{-2}$, то выражение для K_R можно представить в виде $K_R = K_l^4 K_\rho K_t^{-2}$. Замечая, что $K_l^2 K_t^{-2} = K_v^2$, находим

$$K_R = K_\rho K_v^2 K_l^2. \tag{3.65}$$

Полученное соотношение для элементарных сил можно распространить и на силы R, R_1, действующие на конечные объемы, так как любой конечный объем можно разбить на бесконечно большое число элементарных объемов, для каждого из которых выполняется выражение (3.65). Силы R, R_1 равны по величине и противоположны по направлению силам, действующим со стороны потока на обтекаемые тела. Сила воздействия потока на тело называется *аэродинамической силой*. Тогда, подразумевая под R, R_1 полные аэродинамические силы, действующие на геометрически подобные тела, можно вывести следующее соотношение:

$$K_R = R_1/R = \rho_1 v_1^2 l_1^2/(\rho v^2 l^2) \text{ или } R/(\rho v^2 l^2) = R_1/(\rho_1 v_1^2 l_1^2).$$

Учитывая, что вследствие геометрического подобия тел $l_1^2/l^2 = S_1/S$, получим

$$R/(S\rho v^2/2) = R_1/(S_1\rho_1 v_1^2/2) = c_R$$

или

$$R = c_R S\rho v^2/2, \tag{3.66}$$

где c_R — безразмерный коэффициент полной аэродинамической силы; $\rho v^2/2 = q$ — скоростной напор, Па; S—характерная площадь, которой может быть площадь крыла в плане или площадь миделева сечения корпуса.

Распределенные по поверхности тела аэродинамические силы (силы давления и касательного напряжения) можно привести к результирующей силе $\vec{R}$ (полной аэродинамической силе), приложенной в выбранной точке (в центре масс — применительно к летательному аппарату), и к результирующему моменту (полному аэродинамическому моменту), действующему относительно оси, проходящей через эту точку.

Вместо векторов $\vec{R}$, $\vec{M}$ в аэродинамике рассматривают их проекции по осям координат. Обычно используются две системы координат — скоростная и связанная, каждая из которых представляет собой декартову прямоугольную правую систему осей координат.

В скоростной системе $Ox_a y_a z_a$ скоростная ось Ox_a направлена вдоль скорости полета летательного аппарата (рис. 3.4), ось подъемной силы $Oy_а$ перпендикулярна оси $Ox_а$ и расположена в плоскости симметрии летательного аппарата; боковая ось $Oz_а$ перпендикулярна плоскости $Ox_аy_а$.

В связанной системе координат $Oxyz$ (рис. 3.4) продольная Ox и нормальная Oy оси расположены в плоскости симметрии летательного аппарата, причем ось Ox направлена вперед либо вдоль оси корпуса, либо вдоль хорды крыла, поперечная ось перпендикулярна плоскости симметрии.

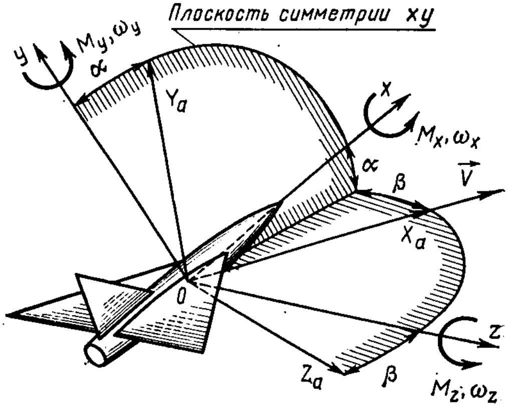


Рис. 3.4. Связанная $Oxyz$ и скоростная $Ox_аy_аz_а$ системы координат

Ориентация аппарата относительно вектора скорости определяется углами атаки α, скольжения β. Угол атаки α — угол между проекцией вектора скорости на плоскость симметрии аппарата Oxy и продольной осью Ox, угол скольжения β — угол между вектором скорости и плоскостью симметрии Oxy.

Проецируя полную аэродинамическую силу $\vec{R}$ на оси скоростной и связанной систем, соответственно получаем $X_а$, $Y_а$, $Z_а$, и X, Y, Z, где $X_а$ — сила лобового сопротивления, $Y_а$ — аэродинамическая подъемная сила (подъемная сила), $Z_а$ — аэродинамическая боковая сила (боковая сила), X — аэродинамическая продольная сила, (продольная сила), Y — аэродинамическая нормальная сила (нормальная сила), Z — аэродинамическая поперечная сила (поперечная сила).

Ввиду того что проекция вектора $\vec{R}$ на ось $Ox_а$ всегда отрицательна, принято, что $X_а$ и X — составляющие силы по осям $Ox_а$ и Ox, взятые с обратным знаком.

В соответствии с формулой (3.66) для проекций суммарной аэродинамической силы можно составить следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} X_а &= c_{xа}qS, & X &= c_xqS; \\ Y_а &= c_{yа}qS, & Y &= c_yqS; \\ Z_а &= c_{zа}qS, & Z &= c_zqS, \end{aligned}\right\} \tag{3.67}$$

где $c_{xа}$ — коэффициент лобового сопротивления; $c_{yа}$ — коэффициент аэродинамической подъемной силы (коэффициент подъемной силы); $c_{zа}$ — коэффициент аэродинамической боковой силы (коэффициент боковой силы); c_x — коэффициент аэродинамической продольной силы (коэффициент продольной силы); c_y — коэффициент аэродинамической нормальной силы (коэффициент нормальной силы); c_z — коэффициент аэродинамической поперечной силы (коэффициент поперечной силы).

Полный аэродинамический момент $\vec{M}$ обычно проецируют на оси связанной системы осей координат: M_x, M_y, M_z. Здесь M_x — аэродинамический момент крена, M_y — аэродинамический момент рыскания, M_z — аэродинамический момент тангажа, или продольный момент. Положительные направления моментов указаны на рис. 3.4.

Аналогично (3.67) вводятся коэффициенты моментов: $M_x = m_x qSl$, $M_y = m_y qSl$, $M_z = m_z qSL$, где m_x — коэффициент аэродинамического момента крена (коэффициент момента крена); m_y — коэффициент аэродинамического момента рыскания (коэффициент момента рыскания); m_z — коэффициент аэродинамического момента тангажа (коэффициент момента тангажа); l, L — характерные линейные размеры летательного аппарата.

Обычно при определении коэффициентов m_x, и m_y за характерный размер принимают размах крыльев, а для коэффициента m_z — среднюю аэродинамическую хорду (см. § 7.8). Однако в качестве l и L можно использовать и другие характерные размеры, например в качестве L длину корпуса.

Аналогично можно ввести понятие о коэффициенте давления $\bar{p}$. *Под коэффициентом давления* понимают отношение разности давления в данной точке и давления в невозмущенном потоке $(p - p_\infty)$ к скоростному напору невозмущенного потока:

$$\bar{p} = (p - p_\infty)/\left(\rho_\infty v_\infty^2/2\right). \tag{3.68}$$

Покажем, что в сходственных точках подобных потоков коэффициенты давления одинаковы. Для этого представим отношение разности давлений $(p - p_\infty) = \Delta p$ в рассматриваемых точках в следующем виде:

$$\Delta p_1/\Delta p = (\Delta R_1/\Delta S_1)/(\Delta R/\Delta S) = (\Delta R_1/\Delta R)(\Delta l)^2/(\Delta l_1)^2.$$

Здесь ΔS_1, ΔS — элементарные сходственные площадки, а $\Delta R_1/\Delta R = K_R$.

Отсюда, используя выражение (3.65), получаем $\Delta p_1/\Delta p = \rho_1 v_1^2/(\rho v^2)$ или $\Delta p_1/(\rho_1 v_1^2) = \Delta p/(\rho v^2)$. Последнее выражение означает, что $\bar{p}_1 = \bar{p}$. Отношение $\Delta p/(\rho v^2) = \mathbf{Eu}$ называется *числом Эйлера.*

Преобразуем выражение скоростного напора:

$$\rho v^2/2 = (\rho a^2/2)\,\mathbf{M}^2,$$

где $a^2 = kRT = kp/\rho$.

Тогда

$$\rho v^2/2 = kp\mathbf{M}^2/2. \tag{3.69}$$

Подставляя выражение (3.69) в (3.68), получаем

$$\bar{p} = [2/(k\mathbf{M}^2)]\,(p/p_\infty - 1). \tag{3.70}$$

Для воздуха при $k = 1{,}4$

$$\bar{p} = (1{,}43/\mathbf{M}_\infty^2)\,(p/p_\infty - 1). \tag{3.71}$$

Аэродинамические коэффициенты для заданной формы летательного аппарата или его частей являются функциями безразмерных параметров. Такими безразмерными величинами, очевидно, являются соответствующие критерии подобия, рассмотренные в § 3.3. Другие параметры, определяющие движение летательного аппарата, — углы атаки α, скольжения β и углы отклонения органов управления δ_i тангажом, рысканием и креном, а также угловые скорости летательного аппарата вокруг связанных осей (ω_x, ω_y, ω_z). Кроме того, в общем случае неустановившегося движения летательного аппарата необходимо учитывать влияние изменения по времени углов $d\alpha/dt$ $d\beta/dt$, $d\delta_i/dt$, угловых скоростей $d\omega_x/dt$, $d\omega_y/dt$, $d\omega_z/dt$.

Введем безразмерные кинематические параметры в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{2v_\infty}, \quad \bar{\omega}_y = \frac{\omega_y l}{2v_\infty}, \quad \bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_A}{v_\infty};\\
&\bar{\dot{\alpha}} = \frac{d\alpha}{dt}\,\frac{b_A}{v_\infty}, \quad \bar{\dot{\beta}} = \frac{d\beta}{dt}\,\frac{l}{2v_\infty}, \quad \bar{\dot{\delta}} = \frac{d\delta_\text{в}}{dt}\,\frac{b_A}{v_\infty};\\
&\bar{\dot{\delta}}_\text{н} = \frac{d\delta_\text{н}}{dt}\,\frac{l}{2v_\infty}, \quad \bar{\dot{\delta}}_\text{э} = \frac{d\delta_\text{э}}{dt}\,\frac{l}{2v_\infty}, \quad \bar{\dot{\omega}}_x = \frac{d\omega_x}{dt}\,\frac{l^2}{4v_\infty^2};\\
&\bar{\dot{\omega}}_y = \frac{d\omega_y}{dt}\,\frac{l^2}{4v_\infty^2}, \quad \bar{\dot{\omega}}_z = \frac{d\omega_z}{dt}\,\frac{b_A^2}{v_\infty^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.72}$$

Здесь за характерные линейные размеры приняты средняя аэродинамическая хорда b_A и половина размаха крыльев $l/2$; $\delta_\text{в}$, $\delta_\text{н}$, $\delta_\text{э}$ — углы отклонения органов управления тангажом (рулей высоты), рысканием (рулей направления) и креном (элеронов).

Производные аэродинамических коэффициентов. В общем случае зависимость аэродинамических коэффициентов от углов α, β, δ_i и безразмерных кинематических параметров (3.68) имеет сложный нелинейный характер. В том случае, когда эти параметры малы, аэродинамические коэффициенты можно представить в виде рядов Тейлора вблизи $\alpha = \beta = \delta = \omega_x = \omega_y = \omega_z = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = \dot{\delta}_i = \dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ с сохранением членов до первого или второго порядка малости. Коэффициентами таких рядов являются производные от аэродинамических коэффициентов по этим параметрам.

Частные производные по какому-либо углу c_y^α, $c_y^{\delta_\text{в}}$, ..., m_z^α, $m_z^{\delta_\text{в}}$,..., c_z^β, $c_z^{\delta_\text{н}}$, m_x^β, $m_x^{\delta_\text{э}}$, m_y^β, $m_y^{\delta_\text{н}}$ называются *статическими производными*, а производные по параметрам $\bar{\omega}_x$, $\bar{\omega}_y$, $\bar{\omega}_z$, а также по скорости изменения углов ($\bar{\dot{\alpha}}$, $\bar{\dot{\beta}}$, $\bar{\dot{\delta}}_i$) и угловым ускорениям $\bar{\dot{\omega}}_x$ $\bar{\dot{\omega}}_y$, $\bar{\dot{\omega}}_z$) — *вращательными производными*.

Одни из рассмотренных производных характеризуют аэродинамические свойства летательного аппарата при $\delta_i = 0$ (c_y^α, c_z^β, m_z^α, m_x^β, ..., $m_z^{\bar{\omega}_z}$, $m_x^{\bar{\omega}_x}$,...), а другие связаны с отклонением органов управления

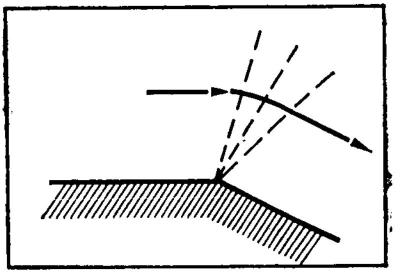
($c_y^{\delta_в}$, $m_z^{\delta_в}$, $m_x^{\delta_э}$, ...). При этом каждая из этих производных имеет определенный физический смысл.

Статические производные c_y^{α} и c_z^{β} характеризуют изменение нормальной и поперечной сил при изменении углов атаки и скольжения, производные $c_y^{\delta_в}$ и $c_z^{\delta_н}$ — при изменении углов отклонения соответствующих органов управления. Производные c_y^{α} и c_z^{β} имеют важное значение для управления движения центра масс летательного аппарата в продольном и боковом направлениях.

Статические производные m_z^{α}, m_x^{β}, m_y^{β} дают представление о степени изменения коэффициентов моментов m_z при изменении угла атаки; m_x и m_y — при изменении углов скольжения и поэтому характеризуют устойчивость продольного, поперечного и бокового движений летательного аппарата. Производные $m_z^{\delta_в}$, $m_y^{\delta_н}$, $m_x^{\delta_э}$ характеризуют эффективность соответствующих органов управления.

Вращательные производные $m_z^{\bar{\omega}_z}$, $m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}$ определяют продольное демпфирование, $m_y^{\bar{\omega}_y}$, $m_y^{\bar{\dot{\beta}}}$ — демпфирование рыскания, а $m_x^{\bar{\omega}_x}$ — крена. Производная $m_y^{\bar{\omega}_x}$ характеризует влияние вращения летательного аппарата вокруг оси Ox на значение коэффициента момента m_y, а $m_x^{\bar{\omega}_y}$ — влияние вращения вокруг оси Oy на величину m_x.

4
ГЛАВА



ИЗЭНТРОПИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

§ 4.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ОДНОМЕРНЫХ ИЗЭНТРОПИЧЕСКИХ ПОТОКОВ ГАЗА

Рассмотрим изэнтропическое течение газа вдоль трубки тока (рис. 4.1). Установим связь между основными параметрами — скоростью, давлением, плотностью, температурой, скоростью звука. Обозначим v_1, i_1, T_1, p_1, ρ_1, a_1 параметры потока в сечении A_1, B_1; v, i, T, p, ρ, a — эти же параметры в сечении AB.

При изэнтропическом течении газа энтропия вдоль линии тока не изменяется: $s = \text{const}$. Энтропия является функцией состояния и для идеального газа определяется по формуле (1.17) $s = c_v \ln(p/\rho^k)$. Если $s = \text{const}$, то $p/\rho^k = \text{const}$. Тогда, рассматривая два сечения трубки тока A_1, B_1 и AB, получим $(p/p_1) = (\rho/\rho_1)^k$. Для тех же сечений на основании уравнения состояния идеального газа $p/p_1 = (T/T_1)(\rho/\rho_1)$. Используя это выражение для изэнтропических течений, получаем связь между давлением и температурой газа $p/p_1 = (T/T_1)^{k/k-1}$ а также между плотностью и температурой газа $\rho/\rho_1 = (T/T_1)^{1/k-1}$.

На основании уравнения (3.52) для сечений A_1B_1 и AB можно написать $i + v^2/2 = i_1 + v^2{}_1/2$. Если положить $v_1 = 0$ и при этом i обозначить i_0, то

$$i + v^2/2 = i_0 \tag{4.1}$$

или

$$v^2/2 + [k/(k-1)]\,RT = [k/(k-1)]\,RT_0. \tag{4.1'}$$

Из этих выражений следует, что при $i_0 = \text{const}$ с изменением скорости течения газа изменяется и значение энтальпии (температура газа). Это одно из характерных отличий течения газа от течения несжимаемой среды, температура которой изменяется только при подводе теплоты извне или при отводе ее наружу. Условия движения жидкости, например сужение или расширение струи, не могут вызвать изменения ее температуры (если пренебречь трением). В газе же темпера-

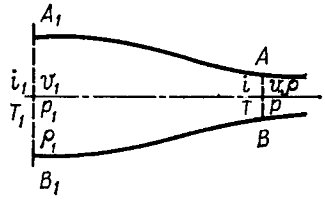


Рис. 4.1. Одномерное течение газа

тура изменяется в зависимости от условий его движения; с уменьшением скорости течения температура газа возрастает. Наибольшая температура достигается при $v = 0$. С другой стороны, из уравнения (4.1) видно, что скорость газа, обладающего в состоянии покоя определенной энтальпией, не может превышать некоторого максимального значения v_{max}, при приближении к которому величины i, T, p, a стремятся к нулю. Скорость потока достигает максимального значения при расширении газа до абсолютного вакуума. В этом случае $i_0 = v_{max}^2/2$, откуда

$$v_{max} = \sqrt{2i_0}. \tag{4.2}$$

Из выражения (4.2) можно сделать вывод, что максимальная скорость v_{max} является функцией только энтальпии i_0. Используя формулу $i_0 = [k/(k-1)]RT_0$ и уравнение состояния $p_0 = R\rho_0 T_0$, а также формулу скорости звука $a^2_0 = kRT_0$, выражение (4.2) для v_{max} представим в виде

$$v_{max} = \sqrt{2i_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2}{k-1}}\,a_0. \tag{4.3}$$

Параметры газа, соответствующие $v = 0$, называются *параметрами торможения*. В частности, давление, плотность, температура и энтальпия, соответствующие этому состоянию, называются *давлением, плотностью, температурой и энтальпией торможения* и обозначаются p_0, ρ_0, T_0, i_0. Как видим, формула (4.3) отражает связь между максимальной скоростью потока и значениями параметров торможения.

Отметим, что давление p_0 не влияет на величину v_{max}, а только лишь на величину расхода газа.

Определим, в какой мере повышается температура газа при его торможении от некоторой скорости v до нуля. Из уравнения (4.1′)

$$\Delta T = T_0 - T = [(k-1)/(2k)]\, v^2/R.$$

При $k = 1{,}4$ и $R = 287$ Дж/(кг · К) имеем $\Delta T \sim v^2/2000$.

Чтобы вывести формулы для определения давления, плотности, температуры и скорости звука в зависимости от скорости потока, надо воспользоваться уравнением (4.1), приводя его в виде

$$i/i_0 = T/T_0 = 1 - v^2/v_{max}^2. \tag{4.4}$$

Считая течение газа изэнтропическим и подставляя выражение (4.4) в формулы $p/p_0 = (T/T_0)^{k/(k-1)}$, $\rho/\rho_0 = (T/T_0)^{1/(k-1)}$, получаем:

$$p/p_0 = \left(1 - v^2/v_{max}^2\right)^{k/(k-1)}; \tag{4.5}$$

$$\rho/\rho_0 = \left(1 - v^2/v_{max}^2\right)^{1/(k-1)}; \tag{4.6}$$

$$T/T_0 = 1 - v^2/v_{max}^2. \tag{4.7}$$

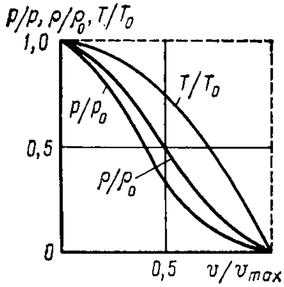


Рис. 4.2. Зависимости давления, плотности и температуры от скорости потока

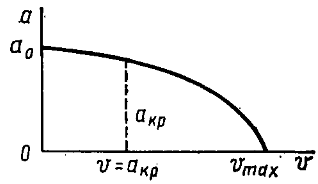


Рис. 4.3. Изменение скорости звука в зависимости от скорости потока

Пользуясь формулой (4.6), можно установить, что при малых скоростях течения плотность изменяется весьма незначительно. Действительно, разлагая ρ/ρ_0 в ряд, получаем

$$\rho/\rho_0 = 1 - [1/(k-1)]\, v^2/v_{\max}^2 + \{(2-k)/[2(k-1)^2]\}\, v^4/v_{\max} - \cdots .$$

Отсюда, отбрасывая малые величины выше второго порядка, находим

$$(\rho - \rho_0)/\rho_0 = -[1/(k-1)]\, v^2/v_{\max}^2 .$$

Если принять $T_0 = 288$ К ($v_{\max} = 756$ м/с), то при скоростях $v < 75$ м/с плотность будет изменяться в пределах 2%. В этом случае для давления, используя формулу (4.5), находим

$$p/p_0 = 1 - [k/(k-1)]\, v^2/v_{\max}^2 + \cdots .$$

Подставляя сюда выражение (4.3) в виде $v_{\max}^2 = [2k/(k-1)]p_0/\rho_0$ и отбрасывая малые члены выше второго порядка, имеем $p = p_0 - \rho v^2/2$, т. е. при малых скоростях движения газа давление определяется из уравнения Бернулли для несжимаемой среды.

Зависимости давления, плотности и температуры от скорости течения газа (в безразмерных величинах) представлены на рис. 4.2. Полученным зависимостям нетрудно дать простое физическое толкование.

При изэнтропическом течении газа возрастание его кинетической энергии может происходить только при условии понижения потенциальной энергии газа. Поэтому увеличение скорости потока при изэнтропическом течении газа связано с падением его температуры и давления. Но так как при этом давление падает интенсивнее, чем температура, то плотность газа с ростом скорости течения уменьшается.

Так как скорость звука в потоке газа зависит от температуры [см. (1.24)], то

$$a^2/a_0^2 = T/T_0 = 1 - v^2/v_{\max}^2 , \tag{4.8}$$

где a_0 — скорость звука при $v = 0$.

Используя формулы (4.3), получаем

$$a^2 = [(k-1)/2]\,(v_{\max}^2 - v^2)\,. \qquad (4.9)$$

Из формулы (4.9) следует, что с увеличением скорости потока скорость звука уменьшается и при некоторой скорости потока становится равной ей (рис. 4.3). Эта местная скорость потока, равная местной скорости звука, называется *критической скоростью* и обозначается $a_{кр}$.

Сечение трубки тока, в котором местная скорость потока равна местной скорости звука, называется *критическим*. Все остальные параметры потока — давление, плотность, температура — при $v = a_{кр}$ тоже называются *критическими* и обозначаются соответственно $p_{кр}$, $\rho_{кр}$, $T_{кр}$.

Если в формуле (4.9) скорости v и a считать равными $a_{кр}$, то

$$a_{кр}^2 = [(k-1)/(k+1)]\,v_{\max}^2. \qquad (4.10)$$

Для воздуха ($k = 1{,}4$) критическая скорость $a_{кр} = 0{,}408\ v_{\max}$. Из выражения (4.10) следует, что критическая скорость зависит только от температуры торможения T_0. Действительно, подставляя в (4.10) значение $v_{\max}$ по формуле (4.3), имеем

$$a_{кр}^2 = [(k-1)/(k+1)]\,2i_0 = [2k/(k+1)]\,RT_0 = [2k/(k+1)]\,p_0/\rho_0. \qquad (4.11)$$

В частности, по формуле (4.11) для воздуха [$k = 1{,}4$, $R = 287$ Дж/(кг · К)]

$$a_{кр} = 18{,}3\sqrt{T_0}\,. \qquad (4.12)$$

Если критическую скорость $a_{кр}$ выразить через критическую температуру $T_{кр}$, то на основании формулы $a_{кр} = \sqrt{kRT_{кр}}$

$$a_{кр} = 20{,}1\sqrt{T_{кр}}\,. \qquad (4.13)$$

Для температуры газа $T_{кр}$, соответствующей критической скорости, по формуле (4.7)

$$T_{кр}/T_0 = 1 - a_{кр}^2/v_{\max}^2,$$

откуда, используя формулу (4.10), получаем

$$T_{кр} = [2/(k+1)]\,T_0. \qquad (4.14)$$

Так как для изэнтропического течения $\rho_{кр}/\rho_0 = (T_{кр}/T_0)^{1/(k-1)}$, $p/p_{кр} = (T_{кр}/T_0)^{k/(k-1)}$, то

$$\rho_{кр} = [2/(k+1)]^{1/(k-1)}\,\rho_0; \qquad (4.15)$$

$$p_{кр} = [2/(k+1)]^{k/(k-1)}\,p_0. \qquad (4.16)$$

Таким образом, все параметры газа в сечении, где скорость потока достигает скорости звука, являются функциями только параметров торможения T_0, p_0, ρ_0. Формулы (4.14)—(4.16) при $k = 1{,}4$ принимают вид

$$T_{\text{кр}} = 0{,}831T_0; \quad \rho_{\text{кр}} = 0{,}636\rho_0; \quad p_{\text{кр}} = 0{,}528p_0. \tag{4.17}$$

Таким образом, при изменении скорости потока от $v = 0$ до $v = a_{\text{кр}}$ температура воздуха уменьшается на 16,9%, плотность — на 36,4, а давление — на 47,2%.

Введем безразмерную величину

$$\lambda = v/a_{\text{кр}}, \tag{4.18}$$

которую назовем *приведенной скоростью*. Приведенная скорость в отличие от числа **M** пропорциональна скорости потока, так как критическая скорость в потоке с постоянной температурой торможения не изменяется.

В большинстве случаев удобно пользоваться формулами для параметров газа, выраженными не через скорость потока, как в уравнениях (4.5)—(4.7), а через величины **M** и λ. Получим эти формулы. Используя формулу (4.8), имеем

$$v^2/v_{\max}^2 = \left(a^2/a_0^2\right)\left(a_0^2/v_{\max}^2\right)\left(v^2/a^2\right) = \left(1 - v^2/v_{\max}^2\right)[(k-1)/2]\,\mathbf{M}^2,$$

откуда

$$\frac{v^2}{v_{\max}^2} = \frac{[(k-1)/2]\,\mathbf{M}^2}{1 + [(k-1)/2]\,\mathbf{M}^2}, \quad \text{а} \quad 1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} = \frac{1}{1 + [(k-1)/2]\,\mathbf{M}^2}.$$

С другой стороны, учитывая равенства (4.10) и (4.18), имеем

$$v^2/v_{\max}^2 = \left(a_{\text{кр}}^2/v_{\max}^2\right)v^2/a_{\text{кр}}^2 = [(k-1)/(k+1)]\,\lambda^2.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} = \frac{1}{1 + (k-1)\ \mathbf{M}^2/2} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda^2, \tag{4.19}$$

откуда

$$\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{2}}\,\frac{\mathbf{M}}{\sqrt{1 + (k-1)\ \mathbf{M}^2/2}}. \tag{4.20}$$

Используя выражения (4.19), формулы (4.5)—(4.7) можно привести к виду

$$p_0/p = [1 + (k-1)\,\mathbf{M}^2/2]^{k/(k-1)}; \tag{4.21}$$

$$\rho_0/\rho = [1 + (k-1)\,\mathbf{M}^2/2]^{1/(k-1)}; \tag{4.22}$$

$$T_0/T = 1 + (k-1)\,\mathbf{M}^2/2 \tag{4.23}$$

или

$$\left.\begin{aligned} p/p_0 &= [1-(k-1)\lambda^2/(k+1)]^{k/(k-1)};\\ \rho/\rho_0 &= [1-(k-1)\lambda^2/(k+1)]^{1/(k-1)};\\ T/T_0 &= 1-(k-1)\lambda^2/(k+1). \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Из формул (4.21)—(4.24) видно, что с ростом числа **M** и приведенной скорости λ температура, скорость звука, давление и плотность газа уменьшаются. Формула (4.21) имеет большое практическое значение. Ею, в частности, обычно пользуются для нахождения числа **M** в дозвуковых аэродинамических трубах, определяя экспериментально давление торможения p_0 и статическое давление p в потоке.

Из формулы (4.23) следует, что температура торможения зависит от температуры и числа **M** потока:

$$T_0 = T[1+(k-1)\mathbf{M}^2/2], \tag{4.25}$$

для $k = 1{,}4$

$$T_0 = T(1+0{,}2\ \mathbf{M}^2). \tag{4.26}$$

При больших числах **M** температура торможения значительно превышает температуру набегающего потока. Например, для $k = 1{,}4$ при $\mathbf{M} = 1$ температура торможения $T_0 = 1{,}2\ T$, при $\mathbf{M} = 5$ температура $T_0 = 6T$ и при $\mathbf{M} = 10$ температура $T_0 = 21\ T$.

При численных расчетах изэнтропических течений удобно пользоваться таблицами газодинамических функций [12], в которых приведены значения отношений p/p_0, ρ/ρ_0, T/T_0 в зависимости от числа **M** и приведенной скорости λ.

§ 4.2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СКОРОСТЬЮ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И ФОРМОЙ ТРУБКИ ТОКА

Для установления зависимости между изменением скорости потока и формой струи воспользуемся уравнением неразрывности $\rho vF = \mathrm{const}$. В результате дифференцирования и почленного деления на ρvF получим

$$d\rho/\rho + dv/v + dF/F = 0. \tag{4.27}$$

Используя формулу (4.6), выразим $d\rho/\rho$ через относительное изменение скорости dv/v:

$$d\rho/\rho = -(v^2/a^2)(dv/v). \tag{4.28}$$

Тогда, подставляя выражение (4.28) в (4.27), имеем

$$dF/F = -(1-v^2/a^2)\,dv/v. \tag{4.29}$$

Здесь возможны следующие случаи:

1. Скорость течения газа меньше скорости звука ($v < a$), т. е. $(1-v^2/a^2) > 0$.

Из уравнения (4.29) следует, что при этом с увеличением скорости ($dv>0$) площадь поперечного сечения струи уменьшается, т. е. $dF < 0$.

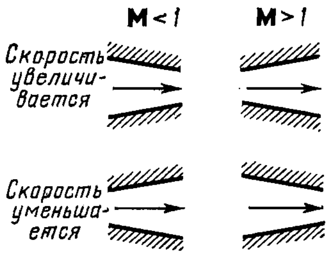


Рис. 4.4. Зависимость скорости течения газа от формы канала

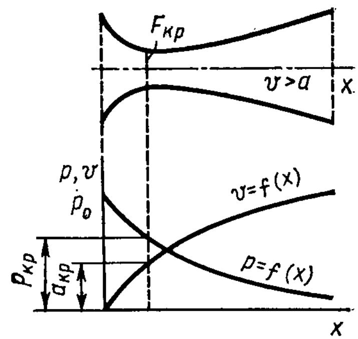


Рис. 4.5. Схема сверхзвукового сопла

2. Скорость течения газа больше скорости звука ($v > a$). В этом случае $(1 - v^2/a^2) < 0$ и, следовательно, знаки dv и dF совпадают. Это означает, что при увеличении сечения струи скорость потока возрастает.

Заметим, что в обоих рассмотренных случаях характер зависимости между скоростью и давлением не изменяется. Например, если скорость возрастает, то давление падает, и наоборот. На характер зависимости между скоростью (или давлением) и сечением струи существенно влияют отношения скорости потока к скорости звука, т. е. число $\mathbf{M} = v/a$ (рис. 4.4).

3. Скорость потока равна скорости звука ($v = a$). В этом случае $(1 - v^2/a^2) = 0$ и из уравнения (4.29) следует, что $dF = 0$.

Поскольку при ускорении дозвукового потока площади сечений струи уменьшаются, а при ускорении сверхзвукового потока они увеличиваются, то отсюда следует, что при непрерывном переходе скорости потока от дозвуковых значений к сверхзвуковым сечения сначала уменьшаются, а затем увеличиваются. В наименьшем сечении струи скорость потока достигает скорости звука ($v = a_{кр}$). Как видно, *критическое сечение газовой струи является ее минимальным сечением*. На рис. 4.5 приведена форма сопла, предназначенного для получения сверхзвуковых скоростей (сопло Лаваля). Там же показан характер изменения скорости и давления по длине такого сопла.

Рассмотрим зависимость удельного расхода газа ρv от скорости потока. Удельный расход можно представить в следующем виде: $\rho v = \rho_0 v \rho/\rho_0$, где ρ_0 — плотность при скорости газа, равной нулю. Используя формулу (4.6), имеем

$$\rho v = \rho_0 v \left(1 - v^2/v_{max}^2\right)^{1/(k-1)}. \qquad (4.30)$$

Отсюда видно, что удельный расход газа равен нулю при $v = 0$ и $v = v_{max}$. Используя условие $d(\rho v)/dv = 0$, легко показать, что удельный расход достигает максимального значения при $v = a_{кр}$. Зависимость относительной величины удельного расхода $\rho v/\rho_{кр} a_{кр}$ от приведенной скорости $\lambda = v/a_{кр}$ представлена на рис. 4.6.

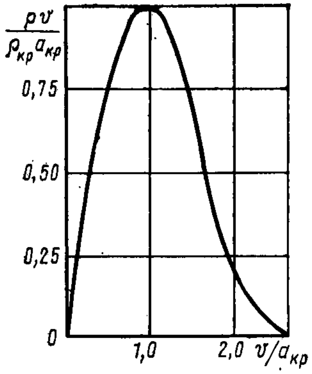


Рис. 4.6. Зависимость относительного удельного расхода газа от приведенной скорости

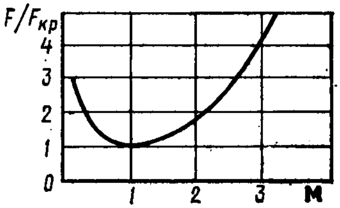


Рис. 4.7. Зависимость отношения площади сечения сверхзвукового сопла к площади критического сечения от числа М

Найдем отношение площадей $F/F_{кр}$ в зависимости от числа **М**. Для этого воспользуемся уравнением неразрывности $\rho vF = \rho_{кр} a_{кр} F_{кр}$, откуда

$$F/F_{кр} = (\rho_{кр}/\rho)(a_{кр}/v). \tag{4.31}$$

В формуле (4.31) сделаем следующую замену:

$$\left.\begin{aligned} &v = a\mathbf{M},\ \rho_{кр} = [2/(k+1)]^{1/(k-1)}\rho_0;\\ &\rho_0/\rho = [1 + (k-1)\mathbf{M}^2/2]^{1/(k-1)};\\ &\frac{a_{кр}}{a} = \sqrt{\frac{T_{кр}}{T}} = \sqrt{\frac{2}{(k+1)}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

В результате подстановки (4.32) в формулу (4.31) получаем

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{[1 + (k-1)\,\mathbf{M}^2/2]^{(k+1)/[2\,(k-1)]}}{[(k+1)/2]^{(k+1)/[2\,(k-1)]}\,\mathbf{M}}. \tag{4.33}$$

Для воздуха при $k = 1{,}4$

$$F/F_{кр} = (1 + 0{,}2\mathbf{M}^2)^3/(1{,}73\ \mathbf{M}). \tag{4.34}$$

Значения отношения $F_{кр}/F = \rho v/\rho_{кр} a_{кр}$ в зависимости от числа **М** и λ приведены в таблицах газодинамических функций [12]. Из формул (4.33) и (4.34) или таблиц следует, что отношение площадей $F/F_{кр}$ зависит от числа **М**, которое необходимо получить в данном сечении (рис. 4.7). При заданной конфигурации сопла формулами (4.33) и (4.34) можно пользоваться для определения числа **М** в выбранных сечениях. Давление в этих сечениях можно найти по формуле (4.21).

Если расчетное давление на срезе сверхзвукового сопла равно наружному давлению $p_и$, т. е. давлению в среде, куда происходит истечение из сопла, то режим истечения называется *расчетным*. При этом давление вдоль сопла непрерывно уменьшается от давления p_0 до наружного давления $p_н$ (кривая C_1-C_3-C_2 на рис. 4.8).

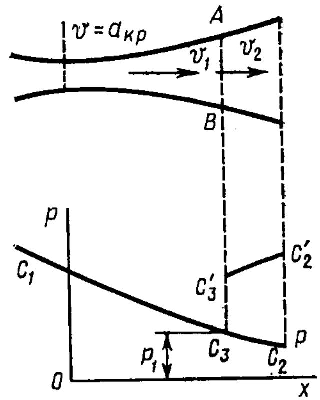


Рис. 4.8. Расчетный и нерасчетный режимы работы сверхзвукового сопла

Все другие режимы истечения газа, когда наружное давление не равно расчетному ($p \neq p_н$), называются *нерасчетными*. При этом могут быть следующие случаи: а) режим недорасширения, когда давление на срезе сопла больше, чем наружное давление ($p > p_н$); б) режим перерасширения ($p < p_н$). Если наружное давление $p_н$ меньше расчетного, то распределение давления вдоль сопла по сравнению с расчетным режимом не изменяется. Понижение наружного давления по сравнению с расчетным приводит только к расширению струи после выхода из сопла.

Характер течения газа за соплом и внутри него может существенно измениться, если наружное давление больше расчетного. В этом случае у выхода из сопла может сформироваться система так называемых скачков уплотнения (см. гл. 5), которая при дальнейшем увеличении наружного давления $p_н$ может переместиться внутрь сопла, приводя к существенному отклонению характера течения газа в сопле от расчетного.

На рис. 4.8 показан примерный характер распределения давления вдоль сопла при некотором значении наружного давления, большем расчетного (кривая C_1-C_3-C'_3-C'_2). Заметим, что в этом случае течение газа внутри сопла не является изэнтропическим. Энтропия постоянна только на отдельных участках сопла — до скачка уплотнения $s_1 = \text{const}$ и после него $s_2 = \text{const}$ ($s_2 > s_1$).

§ 4.3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. КОНУС ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим источник малых возмущений, расположенный в точке O. Такие возмущения в покоящемся газе ($v = 0$) распространяются во все стороны одинаково со скоростью звука, образуя сферические звуковые волны с центром в точке O. Иной характер происходит в движущемся газе ($v \neq 0$). Здесь могут быть два случая: 1) скорость потока дозвуковая $v < a$, 2) скорость потока сверхзвуковая $v > a$.

При $v \neq 0$ мгновенный центр возмущений уносится по потоку. Например, к моменту времени $t = 1$ с эта точка находится от точки O на расстоянии $v \cdot 1$, а радиус сферической волны при этом равен $a \cdot 1$ (рис. 4.9, 4.10). Тогда в дозвуковом потоке передний край волны возмущений будет находиться всегда перед точкой O, а в сверхзвуковом потоке — за источником возмущений, т. е. в дозвуковом потоке воз-

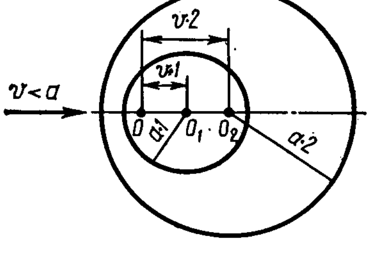


Рис. 4.9. Распространение малых возмущений в дозвуковом потоке

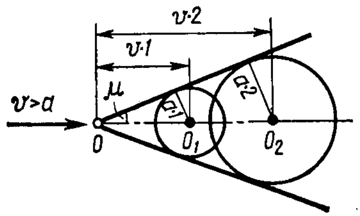


Рис. 4.10. Распространение малых возмущений в сверхзвуковом потоке

мущения от источника O распространяются во всех направлениях, в том числе и против потока, а в сверхзвуковом потоке возмущения вперед не распространяются.

Огибающая сферических волн, построенных для различных моментов времени при $v > a$ (рис. 4.10), называется *конусом возмущений* (конусом Маха) и представляет собой границу возмущенного и невозмущенного потоков. Угол полураствора конуса возмущений называется *углом возмущений*. Из рис. 4.10 видно, что $\sin\mu = at/(vt) = 1/\mathbf{M}$; $\operatorname{tg}\mu = 1/\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}$. Отсюда следует, что с увеличением числа $\mathbf{M}$ зона возмущенного движения сужается. Огибающая звуковых волн на плоскости состоит из двух полупрямых, называемых *линиями возмущений*.

§ 4.4. ОБТЕКАНИЕ ВЫПУКЛОГО ТУПОГО УГЛА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ. ТЕЧЕНИЕ ПРАНДТЛЯ — МАЙЕРА

При сверхзвуковом обтекании тупого угла, большего 180° (рис. 4.11, *а*), происходит непрерывное ускорение потока от скорости v_1 на участке AO до скорости v_2 на стенке OC. При этом давление, плотность, температура в соответствии с законами изэнтропических течений уменьшаются.

Поворот потока на конечный угол θ_0 можно представить как последовательные повороты на малые углы θ_0', θ_0'', θ_0''', ... (рис. 4.11, *б*). В результате такой замены получаем обтекание поверхности, состоящей из плоских участков O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, ... При этом в каждой угловой точке O_1, O_2, O_3, ... возникает слабая волна возмущений, составляющая с направлением скорости на предыдущем участке угол $\mu = \arcsin(1/\mathbf{M})$. Вследствие того, что вдоль направления движения число $\mathbf{M}$ увеличивается, угол возмущений уменьшается. Поэтому при обтекании такой поверхности возникает расходящееся семейство слабых волн разрежения, причем первая линия OB $[\mu_1 = \arcsin(1/\mathbf{M}_1)]$ является границей областей невозмущенного I и возмущенного потоков, а последняя линия OD представляет собой границу возмущен-

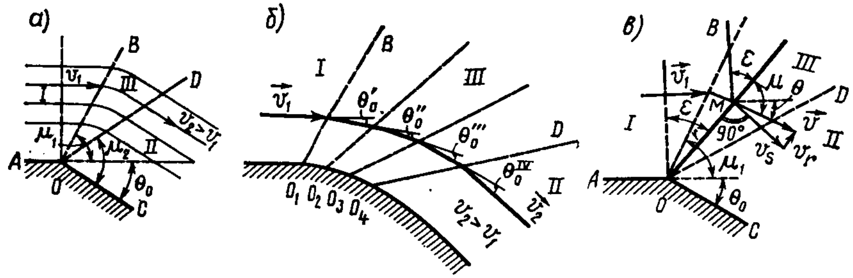


Рис. 4.11. Обтекание выпуклого тупого угла сверхзвуковым потоком

ной области *II* с постоянной скоростью $\vec{v}_2$ и области *III*, в которой происходит непрерывное изменение направления и значения скорости потока от $\vec{v}_1$ до $\vec{v}_2$.

Если участок ломаной линии O_1-O_2-O_3... стянуть в точку, то вместо расходящегося семейства линий разрежения получим пучок линий разрежения (рис. 4.11, *а*).

Определим значение скорости потока в области *III*. Для этого введем полярные координаты r, ε, взяв начало координат в точке O (рис. 4.11, *в*). Угол отсчитываем от вертикали вправо. Соответственно введем составляющие скорости по направлению полярного радиуса v_r и по направлению, перпендикулярному полярному радиусу v_s. Учтем, что обе эти составляющие скорости зависят только от полярного угла ε, так как скорость вдоль линии возмущения постоянна. Кроме того, введем потенциал скорости $\varphi(r, \varepsilon)$. Тогда

$$v_r = \partial\varphi/\partial r = v_r(\varepsilon), \quad v_s = (1/r)(\partial\varphi/\partial\varepsilon) = v_s(\varepsilon). \tag{4.35}$$

Так как $\partial v_r/\partial\varepsilon = (\partial/\partial\varepsilon)(\partial\varphi/\partial r) = (\partial/\partial r)(\partial\varphi/\partial\varepsilon)$, то, используя выражения (4.35), получим

$$\partial v_r/\partial\varepsilon = (\partial/\partial r)(rv_s) = v_s + r\partial v_s/\partial r. \tag{4.36}$$

Составляющие скорости v_r, v_s не зависят от радиуса, т. е. $\partial v_s/\partial r = 0$, а $\partial v_r/\partial\varepsilon = dv_r/d\varepsilon$, поэтому

$$v_s = dv_r/d\varepsilon. \tag{4.37}$$

В качестве второго уравнения для нахождения составляющих скорости v_r, v_s используем уравнение Бернулли (3.50):

$$(v_r^2 + v_s^2)/2 + [k/(k-1)]\,p/\rho = v_{\max}^2/2. \tag{4.38}$$

Учитывая, что составляющая скорости в направлении, перпендикулярном линии возмущения, всегда равна скорости звука, получим

$$v_s = a = \sqrt{kp/\rho}.$$

Отсюда

$$kp/\rho = v_s^2 . \tag{4.39}$$

Используя (4.39) и (4.37), приведем уравнение (4.38) к виду

$$[(k+1)/(k-1)]\,(dv_r/d\varepsilon)^2 + v_r^2 = v_{\max}^2 . \tag{4.40}$$

Отсюда $dv_r/d\varepsilon = \sqrt{(k-1)(k+1)}\sqrt{v_{\max}^{a} - v_r^2}$. Интегрируя это уравнение, имеем

$$v_r = v_{\max} \sin\left[\sqrt{(k-1)/(k+1)}\,(\varepsilon + C)\right], \tag{4.41}$$

где C — постоянная интегрирования.

Используя уравнение (4.37), найдем вторую составляющую скорости:

$$v_s = \sqrt{(k-1)/(k+1)}\; v_{\max} \cos\left[\sqrt{(k-1)/(k+1)}\,(\varepsilon + C)\right]. \tag{4.42}$$

Установим теперь зависимость между числом $\mathbf{M}$ и углом поворота потока θ (рис. 4.11, *в*). Для этого в формуле (4.41) заменим v_r на

$v_r = v\cos\mu = v\sqrt{1 - 1/\mathbf{M}^2}$, а в формуле (4.42) v_s на $v\sin\mu = a$.

Тогда

$$v_r/v_s = \sqrt{\mathbf{M}^2 - 1} = \sqrt{(k+1)/(k-1)}\;\mathrm{tg}\sqrt{(k-1)/(k+1)}\,(\varepsilon + C).$$

Отсюда

$$\varepsilon + C = \sqrt{(k+1)/(k-1)}\;\mathrm{arctg}\sqrt{(k-1)/(k+1)}\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}. \tag{4.43}$$

Из рис. 4.11 видно, что угол поворота потока $\theta = \mu + \varepsilon - \pi/2$, где $\pi/2 - \mu = \mathrm{arctg}\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}$.

Поэтому

$$\varepsilon = \theta + \mathrm{arctg}\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}. \tag{4.44}$$

Подставляя в уравнение (4.43) выражение (4.44), устанавливающее зависимость между углами ε и θ, получаем

$$C + \theta = \sqrt{(k+1)/(k-1)}\;\mathrm{arctg}\sqrt{(k-1)/(k+1)}\,\times$$
$$\times\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1} - \mathrm{arctg}\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}. \tag{4.45}$$

Для определения постоянной интегрирования достаточно воспользоваться граничным условием на линии возмущения OB, т. е. при $\theta = 0$ число $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$. Тогда

$$C = \sqrt{(k+1)/(k-1)}\;\mathrm{arctg}\sqrt{(k-1)/(k+1)}\sqrt{\mathbf{M}_1^2 - 1} -$$
$$- \mathrm{arctg}\sqrt{\mathbf{M}_1^2 - 1}. \tag{4.46}$$

Отсюда следует, что для данного газа постоянная интегрирования C зависит только от числа $\mathbf{M}_1$. При $\mathbf{M}_1$ постоянная $C = 0$. Из сравнения формул (4.46) и (4.45) следует, что постоянная C представляет собой угол поворота звукового потока до получения заданного числа $\mathbf{M}_1$ (рис. 4.12). Этот угол назовем *фиктивным углом поворота потока* и обозначим $\theta_ф$. Тогда

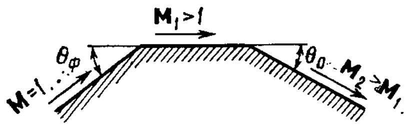


Рис. 4.12. Фиктивный и суммарный углы поворота потока

$$\theta + \theta_ф = \sqrt{(k+1)/(k-1)}\ \operatorname{arctg} \sqrt{(k-1)/(k+1)}\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1} - \\ - \operatorname{arctg} \sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}. \qquad (4.47)$$

Подставляя в уравнение (4.47) $\theta = \theta_0$, получаем значение числа $\mathbf{M}_2$. Далее, пользуясь основными соотношениями для изэнтропических течений (4.21)—(4.23), можно определить давление, плотность и температуру.

Результаты расчета числа $\mathbf{M}$ по формуле (4.47) в [12] приведены в виде подробной таблицы значений $\mathbf{M}$ в зависимости от угла поворота потока θ_0 при $\mathbf{M}_1 = 1$. Там же приведены соответствующие значения p/p_0, ρ/ρ_0, T/T_0. Этой таблицей можно пользоваться для расчета параметров потока при любом значении $\mathbf{M}_1$. Для этого прежде всего, пользуясь таблицей, по заданному значению $\mathbf{M}_1$ необходимо найти фиктивный угол $\theta_ф$. Тогда по величине $(\theta_ф + \theta_0)$ суммарного угла поворота звукового потока из таблицы можно найти значения $\mathbf{M}_2$, p_2/p_0, ρ_2/ρ_0, T_2/T_0.

Используя табличные значения отношения p/p_0, можно определить и коэффициент давления: $\bar{p} = (p_2 - p_1)/(\rho_1 v_1^2/2)$. В соответствии с формулой (3.70) имеем

$$\bar{p} = -(2/k)(1/\mathbf{M}_1^2)(1 - p_2/p_1), \qquad (4.48)$$

где $p_2/p_1 = (p_2/p_0)1/(p_1/p_0)$. Здесь p_2/p_0 определяется по значению суммарного угла поворота потока $(\theta_ф + \theta_0)$, а p_1/p_0 — по известному значению числа $\mathbf{M}_1$.

Найдем максимально возможный угол поворота потока. Очевидно, что он представляет собой угол поворота звукового потока $v_1 = a_{кр}$, $\mathbf{M}_1 = 1$ до получения после поворота скорости $v_2 = v_{max}$, $\mathbf{M}_2 = \infty$.

Подставляя в формулу (4.47) $\theta_ф = 0$, $\mathbf{M}_2 = \infty$, получаем

$$\theta_{max} = (\pi/2)\left[\sqrt{(k+1)/(k-1)} - 1\right]. \qquad (4.49)$$

При $k = 1{,}4$ угол $\theta_{max} = 130{,}4°$.

Предельный угол, на который может повернуться сверхзвуковой

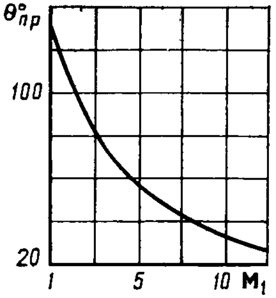


Рис 4.13. Зависимость предельного угла поворота потока от числа $\mathbf{M}_1$

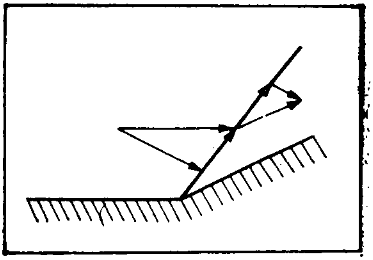
поток, зависит от числа $\mathbf{M}_1$:

$$\theta_{пр} = \theta_{max} - \theta_{ф}(\mathbf{M}_1). \tag{4.50}$$

Эта зависимость приведена на рис. 4.13.

Если рассматривается обтекание тупого угла при $\theta_0 > \theta_{пр}$, то после поворота поток следует не вдоль стенки, а по лучу, соответствующему углу $\theta_{пр}$. При этом скорость $v \to v_{max}$, а давление и плотность стремятся к нулю ($p \to 0$, $\rho \to 0$). Необходимо отметить, что эти результаты получены как предел теории, основанной на гипотезе сплошности. Очевидно, что при $p \to 0$, $\rho \to 0$ гипотеза сплошности не выполняется.

5
ГЛАВА



ТЕОРИЯ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

§ 5.1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

Одна из особенностей сверхзвуковых течений заключается в том, что в ряде случаев основные параметры, характеризующие движение и состояние газа, не являются непрерывными функциями. При торможении сверхзвукового потока возникают поверхности, на которых параметры потока изменяются скачкообразно. Места резкого скачкообразного увеличения давления, плотности и температуры и уменьшения скорости называют *скачками уплотнения.*

На рис. 5.1 показаны скачки уплотнения, возникающие при обтекании остроносого тела сверхзвуковым потоком. В этом случае при определенных условиях (см. § 5.5) скачок начинается на острой кромке тела и называется *присоединенным скачком уплотнения.*

Во многих случаях скачок уплотнения образуется на некотором расстоянии от носовой части обтекаемого тела и имеет криволинейную форму (рис. 5.2, *а*). Такой скачок уплотнения называется *отсоединенным* (*отошедшим*).

Поверхности скачков уплотнения могут быть перпендикулярны-

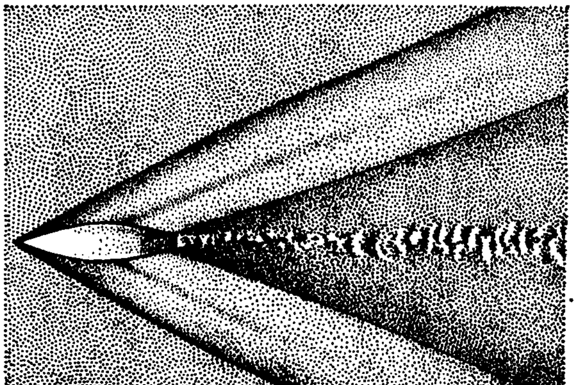


Рис. 5.1. Обтекание остроносого тела сверхзвуковым потоком

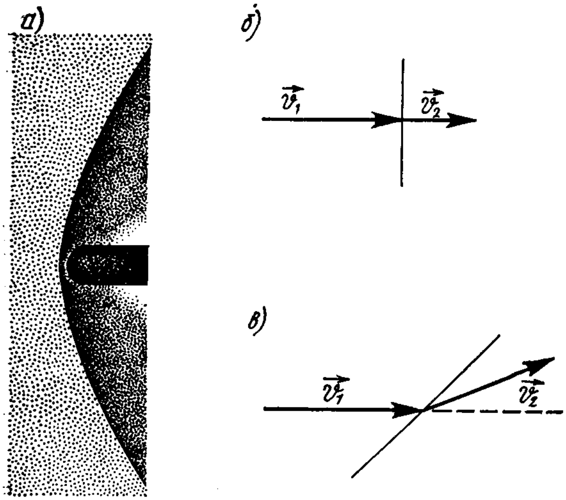


Рис. 5.2. Криволинейный скачок уплотнения (*а*), элементы прямого (*б*) и косого (*в*) скачков уплотнения

ми направлению скорости набегающего потока (рис. 5.2, *б*), и не перпендикулярными ей (рис.5.2, *в*). В первом случае скачок уплотнения называется *прямым*, а во втором—*косым*. Очевидно, что криволинейный скачок уплотнения (рис. 5.2, *а*) состоит из элемента прямого скачка (в центральной части), плавно переходящего в криволинейную поверхность, каждый элемент которой представляет собой косой скачок уплотнения.

Возникновение скачков уплотнения объясняется характером распространения возмущений в сверхзвуковом потоке.

В дозвуковом потоке возмущения распространяются во всех направлениях, в том числе и против направления скорости потока. Поэтому волна повышенного давления, возникающая, например, перед телом, распространяясь вперед, деформирует набегающий поток, при этом линии тока искривляются уже перед телом. Поток как бы заранее приспосабливается к обтеканию тела, «ощущая» его присутствие. Вдоль нулевой линии тока скорость непрерывно уменьшается от v_∞ до $v = 0$ в критической точке, а давление возрастает от p_∞ до давления торможения p_0. Поэтому в дозвуковом потоке скачки уплотнения не возникают.

В сверхзвуковом потоке возмущения не могут распространяться навстречу набегающему потоку. Поэтому непосредственно перед заостренным телом с малым углом полураствора ($\theta < \theta_{max}$, (см. § 5.5) поток не возмущен. При встрече с таким телом направление скорости потока внезапно изменяется. Это приводит к скачкообразному изменению значений скорости потока, давления, плотности и температуры. Тогда возникает присоединенный скачок уплотнения.

При обтекании затупленного или заостренного тела при $\theta > \theta_{max}$ появляется сильная волна повышенного давления, которая распространяется навстречу потоку со скоростью, превышающей скорость звука. По мере распространения волны повышенного давления интенсивность ее падает. При этом уменьшается и скорость ее распространения. Поэтому скачок уплотнения возникает перед телом и на таком расстоянии от него, когда скорость распространения волны повышенного давления становится равной скорости набегающего потока. Расстояние между отсоединенным криволинейным скачком уплотнения и телом зависит от формы тела и скорости невозмущенного потока.

Очевидно, что чем больше v_∞, тем ближе располагается скачок уплотнения к телу.

Скачок уплотнения представляет собой не поверхность, а слой весьма малой толщины (порядка длины свободного пробега молекул). Поэтому математически скачки уплотнения заменяют поверхностями разрыва. Исключение составляют, например, скачки уплотнения в потоках разреженного газа.

В скачках уплотнения происходит торможение потока — скорость потока уменьшается ($v_2 < v_1$), давление, плотность, температура, энтальпия возрастают ($p_2 > p_1$, $\rho_2 > \rho_1$, $T_2 > T_1$, $i_2 > i_1$). При этом увеличивается и энтропия, так как в скачках уплотнения происходят необратимые переходы механической энергии в тепловую.

§ 5.2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ

Рассмотрим основные свойства скачков уплотнения. Допустим, что в некотором сечении AB сверхзвукового потока газа образовался прямой скачок уплотнения. Обозначим параметры состояния газа до скачка p_1, ρ_1, T_1 и скорость v_1, а после скачка — p_2, ρ_2, T_2, v_2. На рис. 5.3 показан характер изменения скорости и давления в прямом скачке уплотнения. Для определения зависимости между параметрами газа за скачком уплотнения и перед ним используем уравнения неразрывности, количества движения, энергии и состояния газа.

Уравнение неразрывности, выражающее равенство секундных масс газа до и после скачка, представим в виде

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2. \tag{5.1}$$

Так как количество движения газа при прохождении через плоскость скачка изменяется в результате разности давлений ($p_2 - p_1$), то

$$\rho_1 v_1 (v_1 - v_2) = p_2 - p_1. \tag{5.2}$$

Равенство полной удельной энергии перед скачком и за ним имеет вид

$$v_1^2/2 + i_1 = v_2^2/2 + i_2 = i_0. \tag{5.3}$$

Возможность применения этого уравнения к сечениям трубки тока, расположенным по разные стороны от плоскости скачка, обусловливается тем, что процесс сжатия газа в скачке уплотнения можно считать адиабатическим. При прохождении газа через скачок его полная энергия не изменяется, а происходит только перераспределение различных

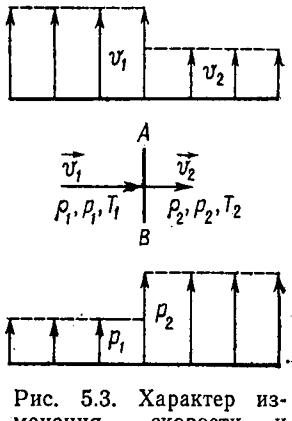


Рис. 5.3. Характер изменения скорости и давления в скачке уплотнения

видов энергии; в результате уменьшения кинетической энергии энтальпия газа увеличивается.

Используя уравнение состояния газа, имеем

$$p_2 = R\rho_2 T_2. \tag{5.4}$$

Система уравнений (5.1)—(5.4) позволяет определить параметры газа за скачком по их значениям перед ним.

Из условия постоянства полной удельной энергии i_0 до и после скачка уплотнения следует, что температура торможения в скачке уплотнения не изменяется. Тогда, пользуясь формулами (4.3) и (4.10), получаем, что в потоках до и после скачка уплотнения максимальная $v_{\max}$ и критическая $a_{\text{кр}}$ скорости имеют одинаковые значения. Следовательно, в потоках до и после скачка уплотнения значения удельных расходов ρv, полной удельной энергии i_0, температуры торможения T_0, максимальной $v_{\max}$ и критической $a_{\text{кр}}$ скоростей одинаковы.

Получим формулу для определения скорости потока за скачком уплотнения. Из уравнения (5.2) $v_1 - v_2 = p_2/(\rho_2 v_2) - p_1/(\rho_1 v_1)$. Умножим обе части этого уравнения на произведение скоростей $v_1 v_2$:

$$v_1 v_2 (v_1 - v_2) = (p_2/\rho_2)\, v_1 - (p_1/\rho_1)\, v_2. \tag{5.5}$$

Выразим отношение p/ρ через скорость потока. Для этого представим p/ρ в следующем виде: $p/\rho = a^2/k$, где a^2 можно определить по формуле (4.9). Тогда

$$p/\rho = [(k-1)/(2k)]\,(v_{\max}^2 - v^2); \tag{5.6}$$

$$\left.\begin{aligned} p_1\rho_1 &= [(k-1)/(2k)]\,(v_{\max}^2 - v_1^2); \\ p_2/\rho_2 &= [(k-1)/(2k)]\,(v_{\max}^2 - v_1^2). \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Подставляя в уравнение (5.5) отношения p_2/ρ_2 и p_1/ρ_1 из (5.7), получаем

$$v_1 v_2 (v_1 - v_2) = [(k-1)/(2k)]\,[\,v_{\max}^2 (v_1 - v_2) - v_1 v_2 (v_1 - v_2)].$$

В скачке уплотнения $v_1 \neq v_2$. Поэтому, сокращая обе части этого уравнения на разность $(v_1 - v_2)$, в результате простых преобразований имеем

$$v_1 v_2 = [(k-1)/(k+1)]\, v_{\max}^2, \text{ или } v_1 v_2 = a_{\text{кр}}^2. \tag{5.8}$$

Выражение (5.8) называется *формулой Прандтля*.

Обозначим приведенную скорость до скачка уплотнения $\lambda_1 = v_1/a_1$, за скачком — $\lambda_2 = v_2/a_2$. Тогда из формулы (5.8)

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \tag{5.9}$$

В формулах (5.8) и (5.9) скорость потока до скачка уплотнения сверхзвуковая: $v_1 > a_1 (\lambda_1 > 1)$. Поэтому скорость за скачком уплотнения, равная $v_2 = a^2_{\text{кр}}/v_1$, всегда меньше скорости звука ($v_2 < a_2$, $\lambda_2 < 1$). Следовательно, при переходе через прямой скачок уплотнения сверхзвуковой поток становится дозвуковым.

Получим формулу для определения отношения v_2/v_1 в зависимости от числа M_1. Из формулы (5.8) получим

$$v_2/v_1 = a_{\text{кр}}^2/v_1^2. \tag{5.10}$$

Представим выражение $a^2{}_{\text{кр}}/v_1{}^2$ в следующем виде:

$$\frac{a_{\text{кр}}^2}{v_1^2} = \frac{a_{\text{кр}}^2}{a_1^2}\frac{1}{M_1^2} = \frac{T_{\text{кр}}}{T_0}\frac{T_0}{T_1}\frac{1}{M_1^2} = \frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)\frac{1}{M_1^2}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (5.10), имеем

$$v_2/v_1 = [M_1^2 + 2/(k-1)]/\{[(k+1)/(k-1)]\,M_1^2\}. \tag{5.11}$$

Из формулы (5.11) следует, что чем больше число M_1, тем больше относительное изменение скорости в прямом скачке уплотнения, т. е. чем больше число M_1, тем интенсивнее скачок уплотнения.

Получим формулы для определения изменения давления p_2/p_1, плотности ρ_2/ρ_1 и температуры T_2/T_1 в прямом скачке уплотнения в зависимости от числа M_1. Из уравнения (5.2)

$$p_2/p_1 = 1 + (\rho_1/p_1)\,v_1^2(1 - v_2/v_1).$$

Подставляя сюда v_2/v_1 по формуле (5.11) и принимая $\rho_1/p_1 = k/a_1^2$, имеем

$$p_2/p_1 = [2k/(k+1)]\,M_1^2 - (k-1)/(k+1). \tag{5.12}$$

Из формулы (5.12) следует, что изменение давления в прямом скачке уплотнения для данного газа зависит только от числа M_1 (рис. 5.4). При $M_1 = 1$ отношение $p_2/p_1 = 1$, а при $M_1 \to \infty$ отношение неограниченно возрастает.

Для определения отношения ρ_2/ρ_1 воспользуемся уравнением (5.1), т. е. $\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2$. Подставляя сюда отношение v_2/v_1 из (5.11), имеем

$$\rho_2/\rho_1 = [(k+1)/(k-1)]\,M_1^2/[M_1^2 + 2/(k-1)]. \tag{5.13}$$

Отсюда следует, что при $M_1 = 1$ отношение $\rho_2/\rho_1 = 1$, а

$$\lim_{M_1\to\infty}\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Следовательно, при переходе через прямой скачок уплотнения плотность возрастает, но не более чем в $(k+1)/(k-1)$ раз (для воздуха при $k = 1{,}4$ не более чем в шесть раз). Кривая зависимости от M_1 представлена на рис. 5.5.

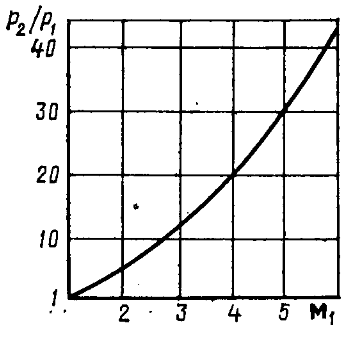


Рис. 5.4. Относительное изменение давления в прямом скачке уплотнения в зависимости от числа M_1

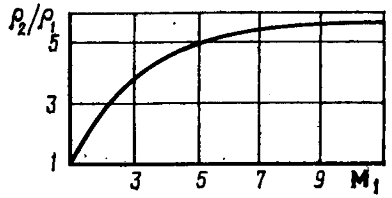


Рис. 5.5. Относительное изменение плотности в прямом скачке уплотнения в зависимости от числа M_1

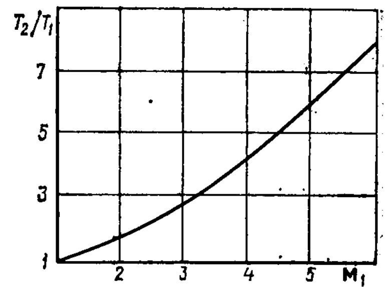


Рис. 5.6. Относительное изменение температуры в прямом скачке уплотнения в зависимости от числа M_1

Возрастание температуры можно определить, пользуясь уравнением состояния (5.4):

$$T_2/T_1 = (p_2/p_1)\, 1/(\rho_2/\rho_1), \tag{5.14}$$

где отношения p_2/p_1 и ρ_2/ρ_1 можно найти по формулам (5.12) и (5.13). Кривая зависимости отношения T_2/T_1 от M_1 показана рис. 5.6.

Из формулы (5.14) следует, что при $M_1 = 1$ отношение $T_2/T_1 = 1$, а при $M_1 \to \infty$ отношение температур T_2/T_1 неограниченно возрастает. Например, при $M_1 = 10$ температура воздуха за скачком уплотнения больше температуры перед скачком примерно в 20 раз.

По известным отношениям v_2/v_1 из (5.11) и T_2/T_1 из (5.14) можно определить число M_2:

$$M_2 = M_1 (v_2/v_1) \sqrt{T_1/T_2}\,.$$

Значения p_2/p_1, ρ_2/ρ_1, T_2/T_1 и M_2 при заданном значении числа M_1 можно определить, используя таблицы газодинамических функций для прямого скачка уплотнения [12].

§ 5.3. СРАВНЕНИЕ СЖАТИЯ В СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ С ИЗЭНТРОПИЧЕСКИМ СЖАТИЕМ

При изэнтропическом течении изменение параметров состояния газа определяется соотношением

$$p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^k. \tag{5.15}$$

Из уравнения (5.15) следует, что при неограниченном возрастании давления плотность увеличивается неограниченно. Кривую зависимости давления от плотности при изэнтропическом течении называют *изэнтропой*.

Получим соотношение, связывающее давление и плотность газа до и за скачком уплотнения. Для этого воспользуемся уравнениями (5.12) и (5.13). Из уравнения (5.13)

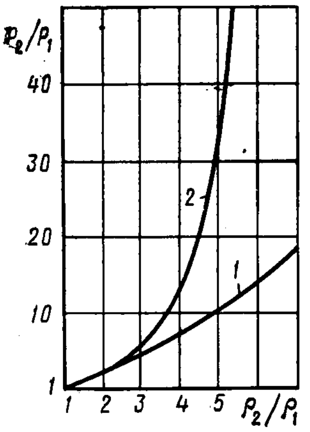


Рис. 5.7. Изэнтропа и ударная адиабата в координатах p_2/p_1, ρ_2/ρ_1:

1 — изэнтропа; *2* — ударная адиабата

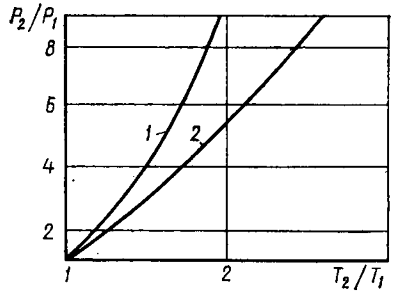


Рис. 5.8. Изэнтропа и ударная адиабата в координатах p_2/p_1, T_2/T_1:

1 — изэнтропа; *2* — ударная адиабата

$$\mathrm{M}_1^2 = \left(\frac{2}{k-1}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\Big/\left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right);$$

подставим это выражение в уравнение (5.12). Тогда

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{k+1}{k-1}\,\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\Big/\left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right). \tag{5.16}$$

Соотношение (5.16) выражает закон ударной *адиабаты Гюгонио*.

На рис. 5.7 изображены два закона: изэнтропический и закон ударной адиабаты в координатах p_2/p_1 и ρ_2/ρ_1.

Пользуясь уравнением состояния газа до скачка уплотнения $p_1 = R\rho_1 T_1$ и за скачком $p_2 = R\rho_2 T_2$, для прямого скачка уплотнения можно вывести зависимость между отношениями давлений p_2/p_1 и температур T_2/T_1. Для этого в уравнении (5.16) надо выразить плотность через температуру и давление:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{k+1}{k-1}\,\frac{p_2}{p_1}\,\frac{T_1}{T_2} - 1\right)\Big/\left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{p_2}{p_1}\,\frac{T_1}{T_2}\right).$$

Решаем это уравнение относительно T_2/T_1:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{k+1}{k-1}\,\frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right]\Big/\left(\frac{k+1}{k-1}\,\frac{p_2}{p_1} + 1\right). \tag{5.17}$$

На рис. 5.8, так же как и на рис. 5.7, изображены два закона: изэнтропический и закон ударной адиабаты, но только в координатах p_2/p_1 и T_2/T_1. Из рис. 5.8 следует, что при одинаковых отношениях давлений температура при скачкообразном (ударном) сжатии больше, чем при изэнтропическом. Сильный разогрев газа в скачке является

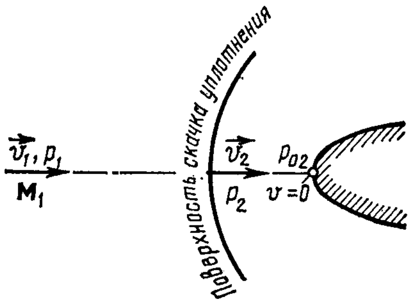


Рис. 5.9. Давление торможения за прямым скачком уплотнения

причиной того, что плотность газа за скачком даже при неограниченном возрастании давления остается конечной величиной.

§ 5.4. ДАВЛЕНИЕ ТОРМОЖЕНИЯ ЗА ПРЯМЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

Обозначим v_1, ρ_1, p_1 соответственно скорость, плотность и давление в сверхзвуковом потоке перед прямым скачком уплотнения; v_2, ρ_2, p_2 — скорость, плотность и давление непосредственно за скачком уплотнения, а p_{01} и p_{02} — давления изэнтропического торможения и торможения за прямым скачком уплотнения (рис. 5.9). Отношение давлений торможения

$$p_{02}/p_{01} = \sigma \tag{5.18}$$

называется *коэффициентом восстановления полного давления.*

Выведем формулы для определения отношения p_{02}/p_1 и коэффициента σ. Для этого представим отношение p_{02}/p_1 в следующем виде:

$$p_{02}/p_1 = (p_2/p_1)(p_{02}/p_2). \tag{5.19}$$

Отношение p_2/p_1 найдем по формуле (5.12):

$$p_2/p_1 = [(k-1)/(k+1)]\, \mathrm{M}_1^2 [2k/(k-1) - 1/\mathrm{M}_1^2]. \tag{5.20}$$

По формуле (4.5) для изэнтропического течения

$$p_2/p_{02} = \left(1 - v_2^2/v_{\max}^2\right)^{k/(k-1)}$$

или, используя формулу (5.8),

$$p_2/p_{02} = \{1 - [(k-1)/(k+1)]\, v_2/v_1\}^{k/(k-1)}.$$

Если в этой формуле заменить отношение скоростей v_2/v_1 по формуле (5.11), то

$$p_2/p_{02} = [2(k-1)/(k+1)^2]^{k/(k-1)} (2k/(k-1) - 1/\mathrm{M}_1^2)^{k/(k-1)}. \tag{5.21}$$

Подставляя в выражение (5.19) значения p_2/p_1 и p_{02}/p_2 из (5.20) и (5.21), получим искомую формулу для давления в критической точке за прямым скачком уплотнения:

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{k-1}{k+1}\left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)}\right]^{k/(k-1)} \frac{\mathrm{M}_1^2}{[2k/(k-1) - 1/\mathrm{M}_1^2]^{1/(k-1)}}, \tag{5.22}$$

которая при $k = 1{,}4$ приобретает вид

$$p_{02}/p_1 = 166{,}7\mathrm{M}_1^2/(7 - 1/\mathrm{M}_1^2)^{2{,}5}. \tag{5.22'}$$

Формулы (5.22) и (5.22′) называются *формулами Рэлея.*

Зависимость p_{02}/p_1 от M_1 изображена на рис. 5.10. Для сравнения здесь приведена кривая, определяющая давление в критической точке p_{01}/p_1 из (4.21) при отсутствии скачка уплотнения (давление изэнтропического торможения).

Исключая из формул (5.21) и (4.21) давление p_1, получаем выражение для коэффициента $\sigma = p_{02}/p_{01}$:

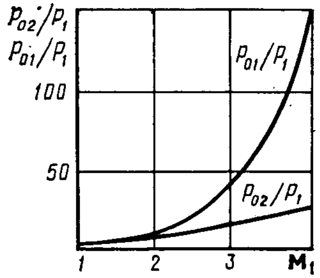


Рис. 5.10. Зависимости отношений p_{02}/p_1 и p_{01}/p_1 от числа M_1

$$\sigma = \frac{k-1}{k+1}\left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)}\right]^{k/(k-1)} \frac{M_1^2}{\left(\dfrac{2k}{k-1}-\dfrac{1}{M_1^2}\right)^{1/(k-1)}\left(1+\dfrac{k-1}{2}M_1^2\right)^{k/(k-1)}}; \tag{5.23}$$

при $k = 1{,}4$

$$\sigma = 166{,}7M_1^2/[(7-1/M_1^2)^{2,5}(1+0{,}2M_1^2)^{3,5}]. \tag{5.23′}$$

Зависимость коэффициента σ от числа M_1 приведена на рис. 5.11. При $M_1 = 1$ коэффициент $\sigma = 1$ ($p_{02} = p_{01}$), а при $M_1 > 1$ коэффициент $\sigma < 1$. С ростом числа M_1 коэффициент σ убывает (потери полного давления возрастают).

Значения p_{02}/p_1 и σ можно определить также по таблице газодинамических функций [12].

Формула Рэлея (5.22) позволяет, в частности, определить число M_1 сверхзвукового потока по замеренным значениям давлений p_{02} и p_1.

Для наглядности иллюстрации необратимых потерь в скачках уплотнения сравним параметры потока за скачком уплотнения и при изэнтропическом торможении. В прямом скачке уплотнения энтропия по всем линиям тока возрастает на одну и ту же величину. Поэтому за таким скачком уплотнения поток также является изэнтропическим ($s_2 = \text{const}$). Ввиду того что температура торможения T_0, максимальная и критическая скорости в адиабатических потоках до и после скачка уплотнения одинаковы, для определения изэнтропы за скачком уплотнения достаточно построить семейство изэнтроп $p = p_0(1 - v^2/v_{\max}^2)^{k/(k-1)}$, соответствующих различным изэнтропическим течениям с одинаковой температурой торможения T_0 и переменным давлением торможения p_0 (рис. 5.12). Рассмотрим возможные скачкообразные переходы с одной из этих кривых на другую.

Определим производную:

$$dp/dv = -[p_0 k/(k-1)](1 - v^2/v_{\max}^2)^{1/(k-1)}\, 2v/v_{\max}^2.$$

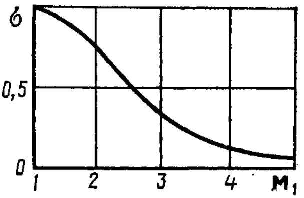


Рис. 5.11. Зависимость коэффициента восстановления полного давления от числа M_1

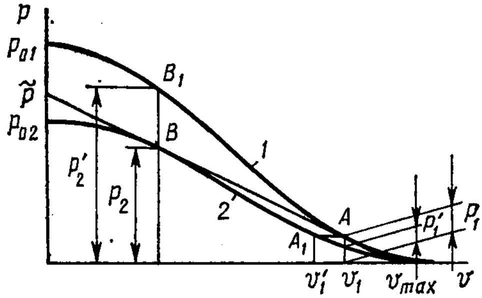


Рис. 5.12. Необратимые потери в скачках уплотнения

Отсюда, используя формулы (4.3) и (4.6), получим $dp/dv = -\rho v$. Так как в прямом скачке уплотнения $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, то $(dp/dv)_1 = (dp/dv)_2$, т. е. углы наклона касательных к изэнтропам до и после скачка уплотнения при скоростях соответственно v_1 и v_2 должны быть одинаковыми.

Найдем отрезки, отсекаемые касательными на оси давления. Из рис. 5.12 следует, что $\tilde{p} = p + \rho v^2$. Тогда, согласно уравнению (5.2), $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$, т. е. отрезки, отсекаемые касательными к изэнтропам до и после скачка уплотнения на оси p, также одинаковы. Следовательно, скачок с кривой *1* (с энтропией s_1) на кривую *2* (с энтропией s_2) происходит между точками A и B, в которых касательные к кривым $p = p(v)$ совпадают.

Из рис. 5.12 видно, что в скачке уплотнения происходят необратимые потери механической энергии. Прежде всего отметим, что в скачке уплотнения давление возрастает менее интенсивно, чем при изэнтропическом торможении до той же скорости $v_2 (p_2 < p_2')$.

При ускорении потока за скачком уплотнения до первоначальной скорости v_1 давление в потоке за скачком уплотнения меньше, чем давление в обратимом изэнтропическом течении: $p_1' < p_1$. При ускорении потока за скачком уплотнения до скорости v_1', при которой давление становится равным первоначальному давлению p_1, $v_1' < v_1$. При полном торможении потока ($v = 0$) $p_{02} < p_{01}$. При одной и той же скорости v_1 в потоках до и после скачка уплотнения происходят необратимые потери давления, при одинаковом давлении p_1 — потери скорости.

Таким образом, в скачках уплотнения происходят необратимые превращения механической энергии в тепловую. Чем сильнее скачок уплотнения, чем больше прирост энтропии, тем больше в нем потери полного давления.

Установим зависимость между изменением энтропии в скачке уплотнения и коэффициентом восстановления полного давления σ. Значения энтропии перед скачком уплотнения и за ним определяются по формулам $s_1 = c_v \ln p_1/\rho_1^k$, $s_2 = c_v \ln p_2/\rho_2^k$. Представим отношения p_1/ρ_1^k и p_2/ρ_2^k через соответствующие параметры торможения $p/\rho^k = p_0/\rho_0^k$. Подставляя сюда ρ_0 из уравнения состояния $1/\rho_0 = RT_0/p_0$, получаем $p/\rho^k = R^k T_0^k / p_0^{k-1}$. Используя это выражение и учитывая, что температура торможения при этом не изменяется, найдем прирост энтропии в скачке уплотнения:

$$s_2 - s_1 = -c_v \ln (p_{02}/p_{01})^{k-1}, \text{ или } s_2 - s_1 = -R \ln \sigma. \tag{5.24}$$

Отсюда следует, что чем больше прирост энтропии, тем меньше коэффициент σ, т. е. больше потери полного давления.

§ 5.5. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОСОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ

Рассмотрим обтекание вогнутого тупого угла (клина с углом полураствора, равным θ) сверхзвуковым потоком (рис. 5.13). Как указывалось в § 5.1, при этом непрерывность течения нарушается и при определенных условиях возникает косой скачок уплотнения, образование которого можно обосновать следующим образом. Через точку O проведем две линии возмущений: линию OB' под углом μ_1 к первоначальному направлению скорости потока $\vec{v}_1$ [$\mu_1 = \arcsin(1/\mathbf{M}_1)$] и линию OB'' под углом μ_2 к направлению скорости потока $\vec{v}_2$ [$\mu_2 = \arcsin(1/\mathbf{M}_2)$].

Ввиду того что $\mu_2 > \mu_1$, линия возмущения OB'' располагается перед линией OB', т. е. изменение параметров газа должно закончиться на линии возмущения OB'', лежащей в области, где это изменение еще не начиналось. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае непрерывное изменение параметров газа невозможно. При сравнительно небольших значениях угла поворота потока скачок уплотнения располагается между линиями возмущения OB' и OB''. Положение косого скачка OK определим с помощью угла β, отсчитываемого от направления скорости невозмущенного потока $\vec{v}_1$.

Определим параметры потока за косым скачком уплотнения. Разложим векторы скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ на две составляющие: v_{1n}, v_{2n} — по

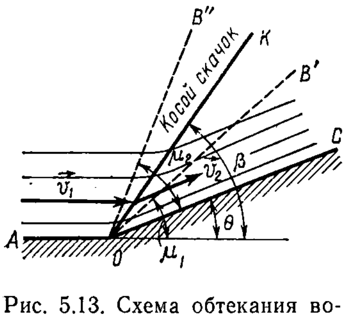


Рис. 5.13. Схема обтекания вогнутого тупого угла сверхзвуковым потоком

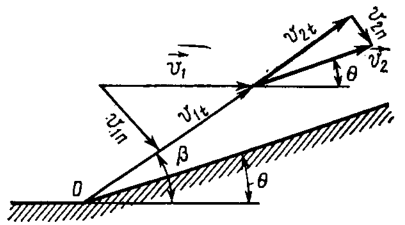


Рис. 5.14. Составляющие скорости потока до и за косым скачком уплотнения

нормали к плоскости скачка уплотнения и v_{1t}, v_{2t} — вдоль скачка уплотнения (рис. 5.14). Для нахождения скорости, давления, плотности и температуры газа за косым скачком уплотнения используем уравнения неразрывности, количества движения, энергии и состояния. Уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}. \tag{5.25}$$

Используем уравнение изменения количества движения, применив его для направления, перпендикулярного плоскости скачка уплотнения. Это уравнение можно представить так же, как и для случая прямого скачка, с тем лишь различием, что вместо скоростей v_1 и v_2 уравнение будет содержать их нормальные составляющие:

$$\rho_1 v_{1n}(v_{1n} - v_{2n}) = p_2 - p_1. \tag{5.26}$$

Представим это уравнение для направления, параллельного плоскости скачка уплотнения: $\rho_1 v_{1n}(v_{1t} - v_{2t}) = 0$, откуда $v_{1t} = v_{2t} = v_t$, т. е. касательная составляющая скорости при переходе через плоскость косого скачка уплотнения не изменяется. Поэтому *косой скачок уплотнения — это скачок нормальной составляющей скорости.*

При адиабатическом течении полная удельная энергия в скачке уплотнения не изменяется $v_1^2/2 + i_1 = v_2^2/2 + i_2 = i_0$, где $v_1^2 = v_{1n}^2 + v_t^2$, $v_2^2 = v_{2n}^2 + v_t^2$.

Подставляя в уравнение энергии эти выражения, получаем

$$v_{1n}^2/2 + i_1 = v_{2n}^2/2 + i_2 = i_0 - v_t^2/2. \tag{5.27}$$

Сравнивая уравнения (5.25)—(5.27) с соответствующими уравнениями (5.1)—(5.3), замечаем, что основные уравнения для косого скачка уплотнения можно получить из уравнений для прямого скачка путем замены в них скоростей потока v_1 и v_2 их нормальными составляющими v_{1n}, v_{2n} и замены полной удельной энергии i_0 удельной энергией $i_0^* = i_0 - v_t^2/2$. Для определения нормальной составляющей скорости, давления, плотности и температуры потока за косым скачком уплотнения можно воспользоваться соответствующими формулами для прямого скачка со следующими изменениями. В формулу (5.8) вместо v_1 и v_2 необходимо подставить v_{1n} и v_{2n}, а $a_{кр}^2$ нужно заменить величиной $a_{кр}^{*2}$, найденной по удельной энергии $i_0^* = i_0 - v_t^2/2$:

$$a_{кр}^{*2} = [(k-1)/(k+1)]\,2\left(i_0 - v_t^2/2\right) = a_{кр}^2 - [(k-1)/(k+1)]\,v_t^2,$$

где $a_{кр}^2 = [(k-1)/(k+1)]2i_0 = [(k-1)/(k+1)]v_{max}^2$.

Тогда для определения нормальной составляющей скорости за косым скачком уплотнения получим следующую формулу:

$$v_{1n}v_{2n} = a_{кр}^2 - [(k-1)/(k+1)]\,v_t^2, \tag{5.28}$$

где

$$v_{1n} = v_1 \sin\beta; \quad v_t = v_1 \cos\beta. \tag{5.29}$$

Из формулы (5.28) следует, что значение нормальной составляющей скорости потока v_{2n} зависит от v_1 и угла наклона скачка уплотнения, причем $v_{2n} < a_2$. От тех же параметров зависит и скорость $v_2 = \sqrt{v_{2n}^2 + v_t^2}$. При $\beta = \pi/2$ составляющая скорости $v_t = 0$ и формула (5.28) совпадает с формулой (5.8) для прямого скачка уплотнения. При сравнительно слабых косых скачках уплотнения (при малых углах β) касательная составляющая скорости по величине мало отличается от v_1. Поэтому скорость v_2 может быть больше скорости звука. При сильных косых скачках уплотнения с углом β, близким к $\pi/2$, скорость потока за скачком уплотнения дозвуковая. Следовательно, в зависимости от угла β поток за косым скачком уплотнения может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым.

Выведем формулы для определения давления, плотности и давления торможения за косым скачком уплотнения. Для этого в формулах (5.12), (5.13) и (5.23) для прямого скачка уплотнения достаточно заменить число $\mathbf{M}_1$ числом $\mathbf{M}_1 \sin\beta$, найденным по нормальной составляющей скорости потока v_{1n}. В результате получим:

$$p_2/p_1 = [2k/(k+1)]\, \mathbf{M}_1^2 \sin^2\beta - (k-1)/(k+1); \tag{5.30}$$

$$\rho_2/\rho_1 = \frac{[(k+1)/(k-1)]\, \mathbf{M}_1^2 \sin^2\beta}{\mathbf{M}_1^2 \sin^2\beta + 2/(k-1)}; \tag{5.31}$$

$$\sigma = \left[\frac{k-1}{k+1}\right]\left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)}\right]^{k/(k-1)} \mathbf{M}_1^2 \sin^2\beta \Bigg/ \left[\left(\frac{2k}{k-1} - \frac{1}{\mathbf{M}_1^2 \sin^2\beta}\right)^{1/(k-1)} \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_1^2 \sin^2\beta\right)^{k/(k-1)}\right]. \tag{5.32}$$

Отношение температур определяется, так же как для прямого скачка, на основании уравнения состояния:

$$T_2/T_1 = (p_2/p_1)/(\rho_2/\rho_1). \tag{5.33}$$

Уравнение ударной адиабаты для косого скачка останется, очевидно, тем же, что и для прямого (5.16) или (5.17), так как в него не входят ни скорость, ни полная энергия газа.

Из формул (5.30)—(5.32) следует, что изменение параметров потока в косом скачке уплотнения несравненно меньше, чем в прямом скачке уплотнения.

При обтекании тел вместо одного может возникнуть система последовательно расположенных скачков уплотнения. Такая система, например, возникает при обтекании тел, образованных ломаными поверхностями. В этом случае расчет каждого последующего скачка уплотнения производится по параметрам за предыдущим скачком. Суммарный коэффициент восстановления полного давления представим в следующем виде:

$$\sigma = p_{0i}/p_{01} = (p_{02}/p_{01})(p_{03}/p_{02}) \dots (p_{0\,(i+1)}/p_{0i}),$$

где p_{01} — давление изэнтропического торможения; p_{02}, p_{03}, ...— давления торможения за скачками уплотнения (p_{02} — за первым, p_{03} — за вторым скачком и т. д.).

Учитывая, что $p_{02}/p_{01} = \sigma_1$, $p_{03}/p_{02} = \sigma_2, \ldots, p_{0i+1}/p_{0i} = \sigma_i$, получим

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_i. \tag{5.34}$$

Можно показать, что потери полного давления в системе скачков уплотнения оказываются меньше, чем в одном прямом скачке уплотнения. Это используется, в частности, при торможении потока в сверхзвуковых воздухозаборниках.

§ 5.6. ЗАВИСИМОСТЬ УГЛА НАКЛОНА КОСОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ ОТ УГЛА ПОВОРОТА СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА

Формулы, приведенные в § 5.5, показывают, что все параметры газа за косым скачком уплотнения зависят от угла β — угла наклона скачка уплотнения к направлению набегающего потока. Установим зависимость угла β от угла поворота потока θ. Из рис. 5.14

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = v_{2n}/v_t. \tag{5.35}$$

Преобразуем выражение (5.35), используя соотношения (5.28), (5.29) и введя число $\mathbf{M}_1$:

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = \{a_{\text{кр}}^2/a_1^2 - [(k-1)/(k+1)]\,\mathbf{M}_1^2\cos^2\beta\}/(\mathbf{M}_1^2 \times \\ \times \sin\beta\cos\beta). \tag{5.36}$$

Так как $a_{\text{кр}}^2/a_1^2 = T_{\text{кр}}/T_1 = (T_{\text{кр}}/T_0)T_0/T_1 = [2/(k+1)]T_0/T_1$ и $T_0/T = 1 + (k-1)\mathbf{M}_1^2/2$, то

$$a_{\text{кр}}^2/a_1^2 = [2/(k+1)[1 + (k-1)\,\mathbf{M}_1^2/2\,].$$

Подставляя выражение для $a_{\text{кр}}^2/a_1^2$ в (5.36), получаем

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = [2 + (k-1)\,\mathbf{M}_1^2\sin^2\beta]/[(k+1)\,\mathbf{M}_1^2\sin\beta\cos\beta]. \tag{5.37}$$

Используя соотношение $\operatorname{tg}(\beta - \theta) = (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\theta)/(1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\theta)$, уравнение (5.37) можно представить в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{ctg}\beta\,(\mathbf{M}_1^2\sin^2\beta - 1)/\{1 + \mathbf{M}_1^2\,[(k+1)/2 - \sin^2\beta]\}. \tag{5.38}$$

На рис. 5.15 приведено семейство кривых зависимости угла β от угла поворота потока θ при различных значениях $\mathbf{M}_1$. Из уравнения (5.38) следует, что угол поворота потока θ равен нулю в двух случаях:

а) когда $\mathbf{M}_1^2\sin^2\beta - 1 = 0$, т. е. когда $\sin\beta = 1/\mathbf{M}_1$ и $\beta = \mu$. Здесь угол наклона скачка уплотнения равен углу возмущения. В этом случае скачок уплотнения преобразуется в слабую волну возмущений;

б) когда $\operatorname{ctg}\beta = 0$, $\beta = \pi/2$, т. е. в прямом скачке уплотнения.

Из рис. 5.15 следует также, что для каждого числа M_1 существует максимальное значение угла поворота потока θ_{max}, на который сверхзвуковой поток может повернуться, пройдя через косой скачок уплотнения. Величина θ_{max} возрастает при увеличении числа M_1. При заданном числе M_1 одному и тому же углу поворота потока θ соответствуют два положения скачка, принадлежащих семейству сравнительно слабых и сильных скачков уплотнения (на рис. 5.15 участок кривой, характеризующий сильные скачки уплотнения, проведен пунктирной линией).

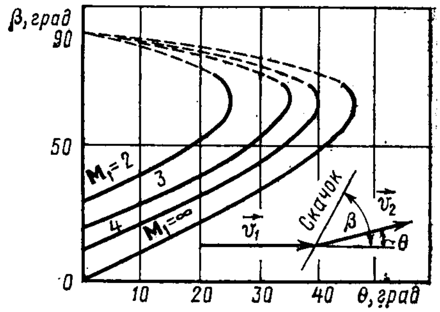


Рис. 5.15. Зависимость угла наклона скачка уплотнения от угла поворота потока при различных значениях числа M_1

Если угол полураствора клина $\theta_{кл}$ меньше максимального угла отклонения потока при данном значении числа M_1, то возникает присоединенный (сравнительно слабый) косой скачок уплотнения. При этом для определения угла наклона присоединенного скачка уплотнения нужно пользоваться сплошными кривыми, изображенными на рис. 5.15, считая при этом, что угол поворота потока равен углу полураствора клина ($\theta = \theta_{кл}$).

Если угол $\theta_{кл}$ больше θ_{max} для данного числа M_1, то образуется отсоединенный криволинейный скачок уплотнения, расположенный на некотором расстоянии от тела. На нулевой линии тока угол наклона скачка уплотнения равен $\pi/2$, т. е. имеется элемент прямого скачка уплотнения. По мере удаления от нулевой линии тока угол наклона скачка непрерывно уменьшается от $\pi/2$ до μ. При этом нигде в скачке уплотнения угол поворота потока не равен $\theta_{кл}$. Вдоль криволинейного скачка уплотнения угол поворота потока изменяется в зависимости от угла β. На нулевой линии тока $\theta = 0$, затем он возрастает до θ_{max}, а при дальнейшем удалении уменьшается до $\theta = 0$.

§ 5.7. УДАРНАЯ ПОЛЯРА

Так как угол наклона скачка уплотнения зависит от угла поворота потока, то, изменяя углы θ при постоянной скорости $\vec{v}_1$, получим различные углы наклона скачков уплотнения. При этом изменяются значение и направление скорости потока $\vec{v}_2$. Поэтому одной и той же скорости до скачка уплотнения v_1 соответствуют различные векторы скорости $\vec{v}_2$ за скачком. Соединяя концы векторов $\vec{v}_2$ при неизменной скорости v_1, получим годограф скорости за скачком уплотнения.

Найдем уравнение годографа скорости $v_{2y} = f(v_{2x}, v_1)$. Для этого в плоскости годографа направим ось абсцисс вдоль скорости v_1

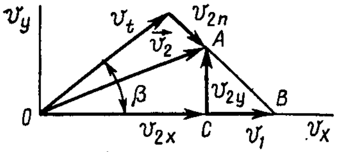


Рис. 5.16. Составляющие скорости потока за косым скачком уплотнения

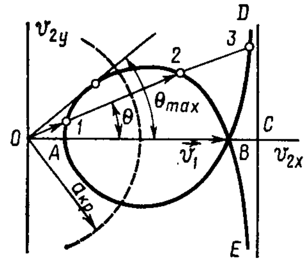


Рис. 5.17. Ударная поляра

(рис. 5.16). Тогда составляющие скорости по осям координат можно представить в следующем виде:

$$v_{2x} = v_t \cos\beta + v_{2n} \sin\beta; \quad v_{2y} = v_t \sin\beta - v_{2n} \cos\beta. \tag{5.39}$$

Используя соотношения (5.28) и (5.29), выражение для v_{2x} можно преобразовать:

$$v_{2x} = a_{кр}^2/v_1 + [2/(k+1)]\, v_1 \cos^2\beta. \tag{5.40}$$

Исключим из (5.40) угол β. Для этого воспользуемся свойством постоянства касательной составляющей скорости в скачке уплотнения. Ввиду того что $v_{1t} = v_{2t}$, прямая, соединяющая концы векторов скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, должна быть перпендикулярна плоскости косого скачка уплотнения.

Из треугольника ABC следует, что $\operatorname{ctg}\beta = v_{2y}/(v_1 - v_{2x})$. Отсюда

$$\cos^2\beta = v_{2y}^2/[(v_1 - v_{2x})^2 + v_{2y}^2]. \tag{5.41}$$

Подставляя выражение (5.41) в уравнение (5.40), получаем уравнение годографа скорости:

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_{2x} - a_{кр}^2/v_1}{[2/(k+1)]\, v_1 + a_{кр}^2/v_1 - v_{2x}}. \tag{5.42}$$

Из уравнения (5.42) следует, что годограф скорости за скачком уплотнения представляет собой кривую, симметричную относительно оси абсцисс с вертикальной асимптотой $v_{2x} = [2/(k+1)]v_1 + a_{кр}^2/v_1$ (рис. 5.17). Составляющая скорости v_{2y} равна нулю при следующих значениях v_{2x}:

а) при $v_{2x} = v_2 = v_1$, при этом значение и направление скорости не изменяются, а скачок уплотнения преобразуется в слабую волну возмущений ($\beta = \mu$);

б) при выполнении условия $v_{2x} - a_{кр}^2/v_1 = 0$ или $v_2 = a_{кр}^2/v_1$. Это значение скорости потока при заданной скорости v_1 соответствует прямому скачку уплотнения (точка A на рис. 5.17).

Следовательно, годограф скорости за скачком уплотнения состоит из петли, расположенной между точками $A(v_2 = a^2_{кр}/v_1)$ и $B(v_2 = v_1)$, и двух бесконечных ветвей BD и BE. Кривая, представляемая уравнением (5.42), называется *строфоидой*; петля этой кривой — *ударной полярой*.

Покажем, что бесконечные ветви строфоиды физического смысла не имеют. Для этого из начала координат в плоскости годографа скорости проведем луч под некоторым углом Θ, который пересечет строфоиду в трех точках (*1*,*2*,*3*). Эти точки при заданном угле поворота потока дают три математически возможных значения скорости за скачком уплотнения. В точке *3*, расположенной на бесконечной ветви строфоиды, $v_2 > v_1$, т. е. эта точка соответствует скачку разрежения. Покажем, что при адиабатическом течении скачки разрежения невозможны.

В скачке уплотнения $p_{02} < p_{01}$. Допустим, что возникает скачок разрежения, т. е. газ, наоборот, из состояния *2*, характеризуемого давлением p_2, плотностью ρ_2 и давлением торможения p_{02}, переходит в состояние *1* с давлением $p_1 < p_2$, плотностью $\rho_1 < \rho_2$ и давлением торможения $p_{01} > p_{02}$. При этом энтропия уменьшается, что следует непосредственно из формулы (5.24): $s_1 - s_2 = -c_v \ln(p_{01}/p_{02})^{(k-1)}$. Так как уменьшение энтропии противоречит второму закону термодинамики, отсюда следует вывод *о невозможности существования в адиабатическом потоке скачков разрежения.*

Следует иметь в виду, что условие адиабатичности, на котором основывается невозможность скачка разрежения, весьма существенно. При неадиабатических течениях скачки разрежения возможны и наблюдаются на практике. Примерами скачков разрежения являются фронт пламени в потоке газа, скачок конденсации, который возникает при конденсации влаги, находящейся в газообразном состоянии в сверхзвуковом потоке воздуха.

Ввиду того что в адиататическом потоке скачков разрежения быть не может, бесконечные ветви строфоиды физического смысла не имеют.

Таким образом, для данного угла поворота потока θ возможны два значения скорости, соответствующие сравнительно слабым (точка *2*) и сильным (точка *1*) скачкам уплотнения. Проведем окружность радиусом $a_{кр}$ с центром в начале координат, которая разделит ударную поляру на две части. Точки, расположенные вне этой окружности, соответствуют сравнительно слабым скачкам уплотнения со сверхзвуковой скоростью v_2, внутри окружности — сильным скачкам уплотнения с дозвуковой скоростью v_2.

Угол наклона касательной к ударной поляре, проведенной из начала координат, определяет максимальный угол поворота потока θ_{max} для заданной скорости v_1. Как отмечено в § 5.6, при малых углах $\theta_{кл}$ ($\theta_{кл} < \theta_{max}$) образуется присоединенный скачок уплотнения. Угол поворота потока при этом равен углу $\theta_{кл}$, а из двух возможных решений реализуется б о л ь ш а я скорость потока $v_2 > a_{кр}$ (точка *2* на рис. 5.17). Это подтверждается и тем, что при $\theta \to 0$ значение скорости потока за скачком уплотнения должно увеличиваться и приближаться к скорости v_1, а не к $a^2_{кр}/v_1$.

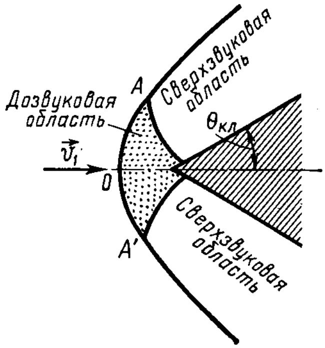


Рис. 5.18. Отсоединенный скачок уплотнения ($\theta_{кл} > \theta_{max}$)

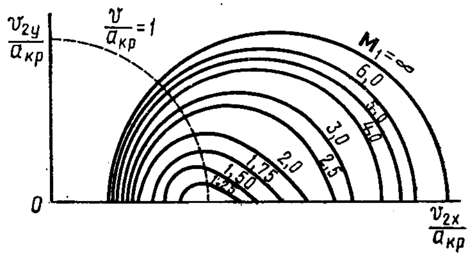


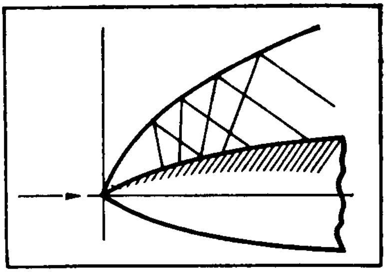
Рис. 5.19. Семейство ударных поляр

При $\theta_{кл} > \theta_{max}$ возникает отсоединенный криволинейный скачок уплотнения (рис. 5.18). Центральный элемент поверхности волны перпендикулярен вектору скорости $\vec{v}_1$ (элемент прямого скачка уплотнения), скорость потока за этим элементом — дозвуковая. По мере удаления от точки O вдоль скачка уплотнения углы наклона элементов скачка уплотнения уменьшаются ($\pi/2 \geqslant \beta \geqslant \mu$). На различных участках криволинейного скачка уплотнения угол поворота потока, степень уменьшения скорости и соответствующее изменение всех остальных параметров потока различны. За участком AA', соответствующим сильным скачкам уплотнения, образуется дозвуковое течение. Каждой точке на криволинейном скачке уплотнения соответствует определенная точка на ударной поляре.

На рис. 5.19 приведено семейство ударных поляр, построенных для различных значений чисел $\mathbf{M}_1$ ($1 \leqslant \mathbf{M}_1 \leqslant \infty$). Скорости, отложенные на диаграмме, отнесены к критической скорости потока $a_{кр}$.

6

ГЛАВА



ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

§ 6.1. КРИТЕРИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ПОТОКА ГАЗА

Выясним, при каком условии в потоке отсутствуют вихри, т. е. поток является потенциальным. Рассмотрим линию тока aA (рис. 6.1). Проведем в точке a касательную, направленную вдоль вектора скорости $\vec{v}$ и внутреннюю нормаль n. Составим уравнение движения газа в проекции на нормаль n:

$$v^2/r = -(1/\rho)\,dp/dn, \tag{6.1}$$

где r — радиус кривизны, равный Oa; v^2/r — центростремительное ускорение частиц газа.

Допустим, что при переходе от одной линии тока к другой полная энергия i_0 и энтропия s изменяются. Тогда, используя выражения (4.1) и (1.16), получим:

$$vdv + di = di_0 \neq 0; \tag{6.2}$$

$$1/T\,(di - dp/\rho) = ds \neq 0. \tag{6.3}$$

Исключая из уравнений (6.2) и (6.3) величину di, находим $dp/\rho = di_0 - vdv - Tds$. Подставляя значение dp/ρ в уравнение движения (6.1), имеем $v^2/r = -di_0/dn + vdv/dn + Tds/dn$ или

$$v\,(dv/dn - v/r) = di_0/dn - Tds/dn. \tag{6.4}$$

Рассмотрим выражение, стоящее в скобках, для чего используем рис. 6.1. Возьмем бесконечно близкую линию тока dc и элементарную площадку $abcda$, ограниченную двумя линиями тока и бесконечно близкими полярными радиусами Oa и Ob. Применим к этой площадке теорему Стокса:

$$\Gamma_{abcda} = 2\omega_z\Delta\sigma_z = 2\omega_z r\Delta r\Delta\alpha.$$

Кроме того, по определению циркуляции,

$$\Gamma_{abcda} = vr\Delta\alpha - [v + (dv/dn)\,\Delta r]\,(r - \Delta r)\,\Delta\alpha,$$

или, раскрывая скобки,

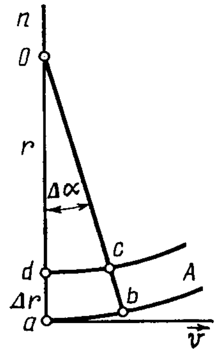


Рис. 6.1. Схема для вывода условия потенциальности потока

$$\Gamma_{abcda} = (v - r dv/dn)\,\Delta r \Delta\alpha + (dv/dn)(\Delta r)^2 \Delta\alpha.$$

Отбрасывая бесконечно малые третьего порядка, находим

$$\Gamma_{abcda} = (v - r dv/dn)\,\Delta r \Delta\alpha = 2\omega_z r \Delta r \Delta\alpha.$$

Отсюда $2\omega_z = v/r - dv/dn$.

Подставляя полученное выражение в (6.4), получаем $di_0/dn - T ds/dn = -2\omega_z v$, т. е., для того чтобы вихрь отсутствовал, необходимо следующее условие: $di_0/dn - T ds/dn = 0$.

Очевидно, что это равенство выполняется при $i_0 = \mathrm{const}$ и $s = \mathrm{const}$. В общем случае оно выполняется при

$$di_0/dn = 0 \text{ и } ds/dn = 0. \tag{6.5}$$

Заметим, что случай выполнения условия $di_0/dn - T ds/dn = 0$ при $di_0/dn \neq 0$ и $ds/dn \neq 0$ не представляет интереса, так как ему соответствует движение с линиями тока либо в виде концентрических окружностей, либо параллельных прямых [14].

Следовательно, *если полная удельная энергия и энтропия при переходе от одной линии тока к другой не изменяются, то поток газа является потенциальным.*

Если в сверхзвуковом потоке возникает скачок уплотнения с прямолинейной образующей, то в потоке за ним энтропия $s_2 = \mathrm{const}$, т. е., согласно (6.5), поток за таким скачком уплотнения остается потенциальным. В случае криволинейного скачка уплотнения энтропия вдоль каждой линии тока возрастает по-разному. Наибольшее увеличение энтропии происходит за элементом прямого скачка уплотнения. По мере отклонения скачка от прямого возрастание энтропии уменьшается, т. е. при этом $ds/dn < 0$. Следовательно, за криволинейным скачком уплотнения поток вдоль линии тока может быть изэнтропическим, но энтропия при этом изменяется при переходе от одной линии тока к другой. Вследствие этого при переходе через криволинейный скачок уплотнения потенциальный поток становится вихревым.

§ 6.2. ОСНОВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОТОКА ГАЗА

Выведем сначала дифференциальное уравнение для плоского установившегося потенциального потока газа. Используем уравнение неразрывности, которое в этом случае имеет вид $\partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y = 0$. Выполняя дифференцирование, находим

$$v_x \partial\rho/\partial x + v_y \partial\rho/\partial y + \rho\,(\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y) = 0. \tag{6.6}$$

Выразим значения производных $\partial\rho/\partial x$, $\partial\rho/\partial y$ через компоненты скорости v_x, v_y, для чего представим эти производные в следующем виде:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp}\,\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{d\rho}{dp}\,\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{6.7}$$

Заменим с помощью уравнений Эйлера (3.12) в выражениях (6.7) производные от давления p на производные от компонентов скорости:

$$\left.\begin{aligned}\partial p/\partial x &= -\rho dv_x/dt = -\rho\,(v_x\partial v_x/\partial x + v_y\partial v_x/\partial y);\\ \partial p/\partial y &= -\rho dv_y/dt = -\rho\,(v_x\partial v_y/\partial x + v_y\partial v_y/\partial y).\end{aligned}\right\} \qquad (6.8)$$

Используя выражения (6.7) и (6.8), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\partial\rho/\partial x &= -(\rho/a^2)\,(v_x\partial v_x/\partial x + v_y\partial v_x/\partial y);\\ \partial\rho/\partial y &= -(\rho/a^2)\,(v_x\partial v_y/\partial x + v_y\partial v_y/\partial y).\end{aligned}\right\} \qquad (6.9)$$

Подставляя выражения (6.9) в уравнение (6.6) и учитывая, что $v_x = \partial\varphi/\partial x$, $v_y = \partial\varphi/\partial y$, получим следующее уравнение для потенциала скорости $\varphi(x, y)$:

$$\left(a^2 - v_x^2\right)\partial^2\varphi/\partial x^2 - 2v_xv_y\partial^2\varphi/\partial x\partial y + \left(a^2 - v_y^2\right)\partial^2\varphi/\partial y^2 = 0, \qquad (6.10)$$

где a — скорость звука, определяемая по формуле (4.9).

Уравнение (6.10) *является основным дифференциальным уравнением для плоского потенциального установившегося потока газа.*

Таким же образом можно вывести уравнение для установившегося пространственного потенциального потока. Для этого достаточно воспользоваться уравнением неразрывности (3.5). Тогда в результате аналогичных преобразований получим

$$\left(a^2 - v_x^2\right)\partial^2\varphi/\partial x^2 - 2v_xv_y\partial^2\varphi/\partial x\partial y + \left(a^2 - v_y^2\right)\partial^2\varphi/\partial y^2 -$$

$$- 2v_xv_z\partial^2\varphi/\partial x\partial z - 2v_yv_z\partial^2\varphi/\partial y\partial z + \left(a^2 - v_z^2\right)\partial^2\varphi/\partial z^2 = 0. \qquad (6.10')$$

Уравнения (6.10) и (6.10′) являются нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных относительно потенциала скорости. В уравнения (6.10) и (6.10′) вторые производные входят линейно. Поэтому эти уравнения называются *квазилинейными дифференциальными уравнениями.*

Покажем, что в частном случае для небольших скоростей движения газа по сравнению со скоростью звука уравнения (6.10) и (6.10′) превращаются в уравнение Лапласа. Действительно, деля их почленно на a^2 и полагая скорости движения газа настолько малыми, что величинами v_x^2/a^2, v_y^2/a^2, v_z^2/a^2, v_xv_y/a^2, v_yv_z/a^2 и v_xv_z/a^2 можно пренебречь, приведем уравнение (6.10′) к виду $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0$, т. е. к уравнению Лапласа, справедливому для случая $\rho = \text{const}$.

Для решения уравнений (6.10) и (6.10′) используются два метода: а) метод малых возмущений (метод линеаризации), широко применяемый при определении аэродинамических характеристик тонких тел при малых углах атаки как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоках; б) метод характеристик для определения поля скоростей в сверхзвуковом потоке.

§ 6.3. МЕТОД МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим основные положения метода малых возмущений. Практическое использование этого метода для определения аэродинамических характеристик тел приведено в гл. 7—9.

Изучим обтекание тонкого тела под малым углом атаки. Поток около такого тела мало отличается от невозмущенного потока. Тогда составляющие скорости $\vec{v}$ в окрестности тела можно представить в следующем виде:

$$v_x = v_\infty + v'_x; \quad v_y = v'_y; \quad v_z = v'_z, \tag{6.11}$$

а вектор скорости $\vec{v} = \vec{v}_\infty + \vec{v}'$, где $\vec{v}'$ — вектор скорости возмущения, а v'_x, v'_y, v'_z — составляющие этого вектора.

Здесь направление оси x принято вдоль скорости $\vec{v}_\infty$. В выражении (6.11) v'_x, v'_y, v'_z и v' — малые величины ($|v'_x| \ll v_\infty$; $|v'_y| \ll v_\infty$, $|v'_z| \ll v_\infty$, $|v'| \ll v_\infty$).

Утверждение о малости возмущений справедливо всюду, за исключением области критической точки, в которой скорость потока равна нулю и $v'_x = -v_\infty$, $v_y = v_z = 0$. В области критической точки составляющая скорости возмущения v'_x примерно равна скорости невозмущенного потока.

Предполагая, что малому возмущению скорости соответствуют малые изменения давления, плотности и температуры, получаем $p = p_\infty + p'$, $\rho = \rho_\infty + \rho'$, $T = T_\infty + T'$, где $p' \ll p_\infty, \rho' \ll \rho_\infty$, $T' \ll T_\infty$. При этих условиях нелинейные уравнения можно привести к линейному виду, т. е. линеаризовать их.

Сущность метода малых возмущений (метода линеаризации) заключается в том, что во всех формулах и уравнениях удерживаются только малые члены первого порядка. Полученные уравнения и описываемый ими слабовозмущенный поток называются *линеаризованными*. Рассмотрим прежде всего квадрат скорости потока:

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 &= (v_\infty + v'_x)^2 = v_\infty^2 + 2v_\infty v'_x + v'^2_x; \\ v^2 &= (v_\infty + v'_x)^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_\infty^2 + 2v_\infty v'_x + v'^2_x + v_y^2 + v_z^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Отбрасывая в (6.12) v'^2_x, v_y^2, v_z^2, имеем

$$v_x^2 = v_\infty^2 + 2v_\infty v'_x; \quad v^2 = v_\infty^2 + 2v_\infty v'_x. \tag{6.13}$$

Отсюда $v = (v_\infty^2 + 2v_\infty v'_x)^{1/2}$. Разлагая в ряд, предполагая что $v'_x/v_\infty \ll 1$, и отбрасывая малые высших порядков, получаем

$$v = v_\infty + v'_x. \tag{6.14}$$

Как известно из (4.9),

$$a^2 = [(k-1)/2](v_{\max}^2 - v^2).$$

Это же выражение для невозмущенного потока можно представить в виде

$$a_\infty^2 = [(k-1)/2]\left(v_{\max}^2 - v_\infty^2\right).$$

Отсюда $a^2 = a_\infty^2 - [(k-1)/2](v^2 - v_\infty^2)$ или, используя (6.13), получаем

$$a^2 = a_\infty^2 - (k-1)\, v_\infty v_x'. \tag{6.15}$$

Отсюда, разлагая в ряд, получаем линеаризованное выражение скорости звука:

$$a = a_\infty \{1 - [(k-1)/2]\, \mathrm{M}_\infty^2 v_x'/v_\infty\}. \tag{6.15'}$$

Найдем теперь давление p в возмущенном потоке. Из уравнения Бернулли (3.49) следует

$$dp = -\rho v dv. \tag{6.16}$$

Интегрируя уравнение (6.16), получаем

$$p = p_\infty - \int_{v_\infty}^{v} \rho v dv,$$

где p_∞ — давление в невозмущенном потоке.

Применяя теорему о среднем, имеем

$$p = p_\infty - (\rho v)_{\text{ср}}(v - v_\infty), \tag{6.17}$$

здесь $(\rho v)_{\text{ср}}$ — среднее значение удельного расхода на рассматриваемом интервале. Так как $(\rho v)_{\text{ср}} = [\rho_\infty v_\infty + (\rho_\infty + \rho')(v_\infty + v_x')]/2$, то пренебрегая малыми величинами $\rho' v_\infty$, $\rho_\infty v_x'$, $\rho' v_x'$, найдем $(\rho v)_{\text{ср}} = \rho_\infty v_\infty$. Тогда

$$p = p_\infty - \rho_\infty v_\infty v_x'. \tag{6.18}$$

Выражение (6.18) называется *линеаризованным уравнением Бернулли.*

Используя уравнение (6.18), найдем коэффициент давления: $\bar{p} = -2v_x'/v_\infty$. Определим угол возмущения в линеаризованном потоке: $\sin\mu = 1/M = a/v$. Подставляем сюда выражения (6.14) и (6.15'):

$$\sin\mu = \sin\mu_\infty \left[1 - \frac{v_x'}{v_\infty}\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_\infty^2\right)\right].$$

Отсюда следует, что в линеаризованной постановке, т. е. при $v_x'/v_\infty \ll 1$, в любой точке потока угол возмущения $\mu = \mu_\infty$.

Для того чтобы провести линеаризацию основного уравнения (6.10), являющегося нелинейным дифференциальным уравнением, заменим в нем величины a^2, v_x^2, v_y^2, v_x, v_y по формулам (6.15), (6.13) и (6.11). Тогда с принятой точностью

$$[a_\infty^2 - v_\infty^2 - (k+1)v_\infty v_x'] \partial^2\varphi/\partial x^2 - 2v_\infty v_y \partial^2\varphi/\partial x\partial y +$$
$$+ [a_\infty^2 - (k-1)v_\infty v_x'] \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0. \qquad (6.19)$$

Заметим, что вторые производные по координатам от потенциала φ для тонких тел при малом угле атаки являются малыми величинами. Например,

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 = \partial v_x/\partial x = \partial(v_\infty + v_x')/\partial x = \partial v_x'/\partial x.$$

Поэтому, отбрасывая в уравнении (6.19) члены второго порядка и деля его на $a_\infty{}^2$, окончательно имеем

$$(1 - \mathrm{M}_\infty^2)\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0. \qquad (6.20)$$

Аналогично можно привести к линейному виду уравнение (6.10′) для пространственного потока:

$$(1 - \mathrm{M}_\infty^2)\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0. \qquad (6.21)$$

Суммарный потенциал скорости линеаризованного потока можно представить в виде $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, где φ_∞ — потенциал скорости невозмущенного потока; в выбранной системе координат $\varphi_\infty = v_\infty x$, а φ' — потенциал скорости возмущения. Очевидно, что функция φ' удовлетворяет тем же линейным уравнениям (6.20) и (6.21).

Линеаризованные уравнения (6.20) и (6.21) справедливы как при дозвуковых ($\mathrm{M}_\infty < 1$), так и при сверхзвуковых ($\mathrm{M}_\infty > 1$) скоростях. Однако методы решения этих уравнений при $\mathrm{M}_\infty < 1$ и $\mathrm{M}_\infty > 1$ различны, так как при $\mathrm{M}_\infty < 1$ уравнения (6.20) и (6.21) являются уравнениями эллиптического типа, а при $\mathrm{M}_\infty > 1$ — гиперболического.

§ 6.4. ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ ОБТЕКАНИЕ ТУПЫХ УГЛОВ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Рассмотрим обтекание тупых углов сверхзвуковым потоком в линеаризованной постановке, предполагая, что углы мало отличаются от 180° (рис. 6.2). Угол $\Delta\theta$ будем считать положительным в случае обтекания угла, большего 180° (рис. 6.2, *а*), и отрицательным в случае обтекания угла, меньшего 180° (рис. 6.2, *б*).

Очевидно, что скачок уплотнения преобразуется в слабую волну возмущения, т. е. $\beta = \mu$, а веер линий разрежения — в одну линию разрежения. Здесь $\operatorname{tg}\mu = 1/\sqrt{\mathrm{M}_1^2 - 1}$. Тогда, проводя, линию возмущения $y = x\operatorname{tg}\mu$, получим области невозмущенного *I* и возмущенного *II* потоков. Составим граничные условия задачи. В области *I* скорость всюду постоянна и равна v_1, т. е. в области *I* ($y > x\operatorname{tg}\mu$) $v_x' = v_y' = 0$, $\varphi' = 0$.

На второй стенке, т. е. при $y = -x\Delta\theta$, выполняется следующее граничное условие: $-v_y'/v_x' = \Delta\theta$ или $-v_y'/(v_1 + v_x') = \Delta\theta$. Отсюда в пределах линеаризованной теории, отбрасывая величину второго порядка малости $v_x'\Delta\theta$, получаем

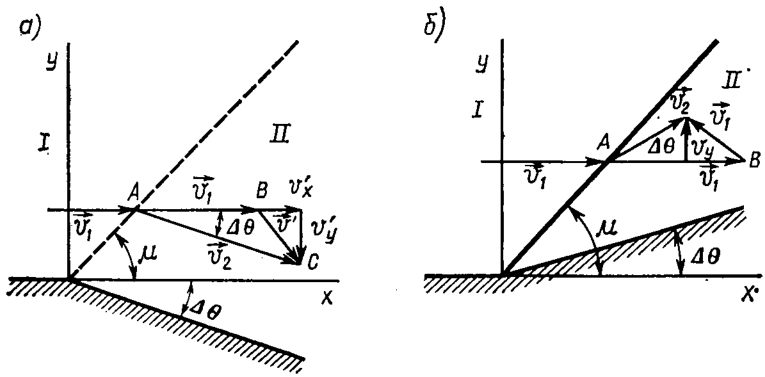


Рис. 6.2. Линеаризованное обтекание тупых углов сверхзвуковым потоком

$$v'_y = -v_1\Delta\theta. \tag{6.22}$$

Потенциал скорости возмущения удовлетворяет волновому уравнению (6.20), общим решением которого является функция

$$\varphi' = f_1(y - x\,\mathrm{tg}\,\mu) + f_2(y + x\,\mathrm{tg}\,\mu). \tag{6.23}$$

В этом можно убедиться путем непосредственной подстановки функции (6.23) в уравнение (6.20). Здесь f_1 и f_2 — произвольные функции, определяемые из граничных условий задачи. В рассматриваемой задаче обтекания тупых углов частное решение f_2 $(y + x\mathrm{tg}\mu)$ физического смысла не имеет, так как линия возмущения $y + x\mathrm{tg}\mu = 0$ наклонена навстречу потоку, что физически невозможно. Поэтому функцию φ' можно представить в виде

$$\varphi' = f_1(y - x\,\mathrm{tg}\,\mu),$$

т. е. потенциал φ' вдоль линии возмущения $y - x\mathrm{tg}\mu = 0$ не изменяется.

Дифференцируя функцию φ' по x и y, находим составляющие скорости: $v'_x = \partial\varphi'/\partial x = -\dot{f}_1\mathrm{tg}\mu$, $v'_y = \partial\varphi'/\partial y = \dot{f}_1$, где $\dot{f}_1$ — производная функции f_1 по аргументу $(y - x\mathrm{tg}\mu)$. Отсюда

$$v'_x = -v'_y \Big/ \sqrt{\mathrm{M}_1^2 - 1}\,.$$

Используя граничное условие (6.22), получаем

$$v'_x = v_1\Delta\theta \Big/ \sqrt{\mathrm{M}_1^2 - 1}\,. \tag{6.24}$$

Из формулы (6.24) следует, что если $\Delta\theta > 0$ (тупой угол больше 180°), то $v'_x > 0$. При этом $v_2 > v_1$, т. е. происходит течение разрежения. Если $\Delta\theta < 0$ (тупой угол меньше 180°), то $v'_x < 0$, $v_2 < v_1$, что соответствует течению уплотнения. Линию возмущения при $\Delta\theta > 0$ назовем *линией разрежения* и обозначим пунктирной линией, а при

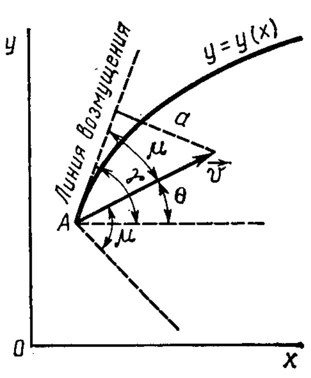


Рис. 6.3. Построение характеристик в физической плоскости

$\Delta\theta < 0$ — *линией уплотнения* и обозначим сплошной линией (рис. 6.2, *а*).

Найдем изменение давления. Для этого воспользуемся линеаризованным уравнением Бернулли (6.18):

$$p_2 = p_1 - 2q_1\Delta\theta \Big/ \sqrt{M_1^2 - 1}\,, \qquad (6.25)$$

где $q_1 = \rho_1 v_1^2/2$ — скоростной напор невозмущенного потока.

Отсюда найдем коэффициент давления:

$$\bar{p} = (p_2 - p_1)/q_1 = -2\Delta\theta \Big/ \sqrt{M_1^2 - 1}\,. \qquad (6.26)$$

При $\Delta\theta > 0$ (рис. 6.2, *а*) $\bar{p} < 0$, а при $\Delta\theta < 0$ (рис. 6.2, *б*) $\bar{p} > 0$.

§ 6.5. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

Метод малых возмущений, описанный выше, позволяет получить аналитическое решение уравнений газодинамики, основанное на линеаризации этих уравнений. Рассмотрим также метод численного решения исходного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (6.10).

Из различных численных методов в газодинамике наиболее развиты разностные методы, к которым относится, в частности, и метод характеристик. Изложим основную идею метода характеристик применительно к плоскому установившемуся потенциальному потоку газа. Введем понятие о характеристиках в плоскости потока.

Предположим, что газ движется слева направо со сверхзвуковой скоростью $v > a$. В каждой точке плоскости x, y можно провести два направления линий возмущения. При переходе от одной точки к другой направление линий возмущения изменяется, так как значения v и a в различных точках плоскости x, y в общем случае различны. Имея это в виду, найдем в плоскости x, y (рис. 6.3) такую кривую $y = y(x)$, в каждой точке которой направление касательной совпадало бы с направлением одной из линий возмущения для данной точки. Эту кривую назовем *характеристикой.*

Из рис. 6.3 следует, что $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\gamma - \theta)$ или $\operatorname{tg}\mu = (\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\theta)/(1 + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\theta)$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\mu = 1/\sqrt{(v^2/a^2) - 1}$, $\operatorname{tg}\gamma = dy/dx$, $\operatorname{tg}\theta = v_y/v_x$, имеем

$$\sqrt{(v^2/a^2) - 1}\,(dy/dx - v_y/v_x) = 1 + (v_y/v_x)\,dy/dx.$$

После небольших преобразований получаем уравнение

$$(v_x^2 - a^2)(dy/dx)^2 - 2v_xv_y\,dy/dx + (v_y^2 - a^2) = 0. \qquad (6.27)$$

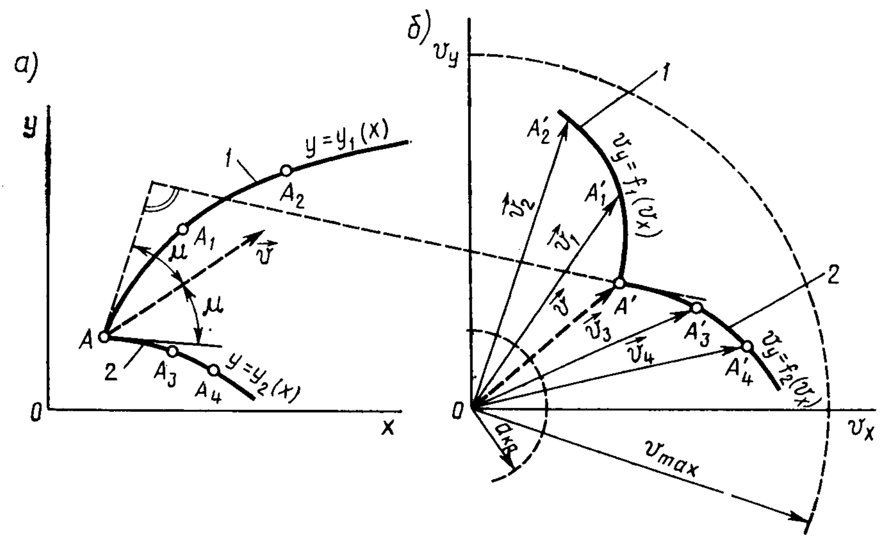


Рис. 6.4. Характеристики в физической плоскости *(а)* и в плоскости годографа скорости *(б)*:

1 — характеристика первого семейства; *2* — характеристика второго семейства

Отсюда

$$dy/dx = (v_x v_y \pm \sqrt{v^2 - a^2})/(v_x^2 - a^2). \tag{6.28}$$

Уравнение (6.28) является дифференциальным уравнением характеристик. Отсюда следует, что если $v > a$, то уравнение (6.28) имеет два различных вещественных корня. В соответствии с этим через каждую точку плоскости x, y, где $v > a$, можно провести два элемента характеристик, а вся плоскость может быть покрыта двумя семействами характеристик. Уравнение (6.10) в этом случае является *уравнением гиперболического типа.*

Для определенности интегральные кривые $y = y(x)$, соответствующие уравнению (6.28) с положительным знаком перед радикалом, назовем *характеристиками первого семейства*, а интегральные кривые $y = y(x)$, соответствующие отрицательному знаку перед радикалом, — *характеристиками второго семейства.*

Если $v = a$, то уравнение (6.28) имеет один вещественный корень, т. е. при $v = a$ получим только одно семейство характеристик. В этом случае уравнение (6.10) является *уравнением параболического типа.* Из уравнений (6.28) следует, что для определения характеристик в физической плоскости надо знать поле скоростей $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$.

Определим изменение скорости вдоль характеристик в физической плоскости. Пусть в точке A (рис. 6.4, *а*) известны значение и направление скорости потока $\bar{v}$. Тогда в плоскости (v_x, v_y) точке A будет соответствовать точка A'. При перемещении вдоль характеристики первого семейства в плоскости x, y (вдоль кривой AA_1A_2...) концы векторов скорости опишут кривую $A'A_1'A_2'$... — характеристику первого семейства в плоскости годографа скорости (рис. 6.4, *б*). Аналогично, характеристике второго семейства AA_3A_4... (рис. 6.4, *а*) в физической плоскости будет соответствовать характеристика второго семейства $A'A_3'A_4'$... (рис. 6.4, *б*) в плоскости v_x, v_y.

Характеристики в плоскости v_x, v_y располагаются в области, ограниченной двумя окружностями, описанными из начала координат радиусами $a_{кр}$ и v_{max} (рис. 6.4, *б*): $a_{кр} \leqslant v \leqslant v_{max}$.

Для того чтобы найти уравнение характеристик в плоскости годографа скорости, воспользуемся уравнением (6.10), которому должны удовлетворять составляющие скорости v_x и v_y сверхзвукового потока газа. Это уравнение представим в следующем виде:

$$(a^2-v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}-v_xv_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+(a^2-v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \qquad (6.29)$$

или

$$(a^2-v_x^2)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)-v_xv_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{a^2-v_y^2}{v_xv_y}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0. \qquad (6.30)$$

Рассматривая изменение скорости вдоль характеристик $y = y(x)$, составим два очевидных соотношения:

$$dv_x/dx = \partial v_x/\partial x + (\partial v_x/\partial y)\,dy/dx = \partial v_x/\partial x + m\partial v_x/\partial y;$$
$$dv_y/dx = \partial v_y/\partial x + (\partial v_y/\partial y)\,dy/dx = \partial v_y/\partial x + m\partial v_y/\partial y, \qquad (6.31)$$

где $m = dy/dx$ — тангенс угла наклона касательной к характеристике в плоскости x, y.

Кроме того, для потенциального потока составляющие скорости связаны соотношением

$$\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y = 0. \qquad (6.32)$$

Используя выражения (6.31) и (6.32), приведем уравнение (6.30) к виду

$$(a^2-v_x^2)\frac{dv_x}{dx}-v_xv_y\frac{dv_y}{dx}=(a^2-v_x^2)\left(m+\frac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{v_xv_y\left[m+(a^2-v_y^2)/(v_xv_y)\right]}{(a^2-v_x^2)\left[m+v_xv_y/(a^2-v_x^2)\right]}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right]=0. \qquad (6.33)$$

Уравнение (6.33) выполняется вдоль характеристик в плоскости x, y, и поэтому входящие в него составляющие скорости v_x и v_y являются составляющими скорости вдоль этих характеристик. Отсюда следует, что это уравнение является дифференциальным уравнением характеристик в плоскости годографа скорости. Рассмотрим дробь, стоящую в квадратных скобках уравнения (6.33):

$$A = v_x v_y\,[m + (a^2 - v_y^2)/v_x v_y]/[(a^2 - v_x^2)\,(m + v_x v_y)/(a^2 - v_x^2)] =$$
$$= [m v_x v_y/(a^2 - v_x^2) + (a^2 - v_y^2)/(a^2 - v_x^2)]/[m + v_x v_y/(a^2 - v_x^2)]. \tag{6.34}$$

Используя известное свойство квадратного уравнения (6.27), имеем

$$m_1 + m_2 = 2v_x v_y/(v_x^2 - a^2)\,;\ m_1 m_2 = (v_y^2 - a^2)/(v_x^2 - a^2), \tag{6.35}$$

где m_1, m_2 — тангенсы углов наклона касательных к характеристикам соответственно первого и второго семейств в плоскости x, y.

Тогда выражение (6.34) можно привести к виду

$$A = -[m(m_1 + m_2) - 2m_1 m_2]/(2m - m_1 - m_2).$$

Вдоль характеристик первого семейства, для которых $m = m_1$, $A = -m_1$. Вдоль характеристик второго семейства, для которых $m = m_2$, $A = -m_2$, т. е. $A = -m = -dy/dx$.

В таком случае выражение, стоящее в квадратных скобках уравнения (6.33), является полной производной dv_y/dx вдоль характеристик в плоскости x, y. Тогда уравнение (6.33) можно представить в виде

$$(a^2 - v_x^2)\,dv_x/dx - [v_x v_y + (a^2 - v_x^2)\,(m + v_x v_y)/(a^2 - v_x^2)]dv_y/dx = 0,$$

откуда

$$dv_y/dv_x = (a^2 - v_x^2)/\{v_x v_y + (a^2 - v_x^2)\,[m + v_x v_y/(a^2 - v_x^2)]\},$$

или $dv_y/dv_x = 1/[2v_x v_y/(a^2 - v_x^2) + m]$.

Используя выражение (6.35), получаем

$$dv_y/dv_x = 1/(m - m_1 - m_2). \tag{6.36}$$

Отсюда следует, что для характеристик первого семейства, где $m = m_1$,

$$(dv_y/dv_x)_1 = -1/m_2 = -1/(dy/dx)_2, \tag{6.37}$$

а для характеристик второго семейства, где $m = m_2$,

$$(dv_y/dv_x)_2 = -1/m_1 = -1/(dy/dx)_1. \tag{6.38}$$

Подставляя сюда выражения (6.28), приведем уравнения характеристик в плоскости годографа скорости (6.37) и (6.38) к виду

$$dv_y/dv_x = (v_x^2 - a^2)\Big/\left(v_x v_y \pm a\sqrt{v_x^2 + v_y^2 - a^2}\right). \tag{6.39}$$

Из дифференциальных соотношений (6.37) и (6.38) следует, что при выборе осей x и y параллельно осям v_x, v_y характеристика первого семейства в произвольной точке плоскости x, y перпендикулярна характеристике второго семейства в соответствующей точке плоскости v_x, v_y и, наоборот, характеристика второго семейства в плоскости x, y перпендикулярна характеристике первого семейства в плоскости v_x, v_y (рис. 6.4). Вдоль характеристик в физической плоскости составляющие вектора скорости потока удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению в переменных v_x, v_y, поскольку правые части уравнений (6.39) зависят только от v_x и v_y и не зависят от координат x, y. Поэтому для любых безвихревых течений газа характеристики в плоскости годографа скорости имеют всегда один и тот же вид и могут быть точно рассчитаны. При этом следует иметь в виду, что в физической плоскости x, y характеристики для разных задач различны.

Проинтегрируем уравнение (6.39). Для этого перейдем от переменных v_x, v_y к переменным v и θ, где θ — угол наклона вектора скорости к оси x. Правую часть уравнения (6.39) легко привести к переменным v и θ:

$$(dv_y/dv_x)_1 = -1/(dy/dx)_2 = -\mathrm{ctg}(\theta - \mu);$$

$$(dv_y/dv_x)_2 = -1/(dy/dx)_1 = -\mathrm{ctg}(\theta + \mu),$$

т. е. уравнение характеристик в плоскости годографа скорости можно представить в таком виде:

$$dv_y/dv_x = -\mathrm{ctg}(\theta \pm \mu). \tag{6.40}$$

Переходя в левой части этого уравнения к новым переменным v и θ ($v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$, $dv_x = \cos\theta dv - v\sin\theta d\theta$, $dv_y = \sin\theta dv + v\cos\theta d\theta$), получаем

$$d\theta = \{[\sin\theta + \mathrm{ctg}(\theta \pm \mu)\cos\theta]/[\sin\theta\,\mathrm{ctg}(\theta \pm \mu) - \cos\theta]\}\, dv/v,$$

или

$$d\theta = \{[\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}(\theta \pm \mu) + 1]/[\mathrm{tg}\,\theta - \mathrm{tg}(\theta \pm \mu)]\}\, dv/v,$$

откуда $d\theta = \pm(1/\mathrm{tg}\mu)dv/v$, но $\mathrm{tg}\,\mu = 1/(\sqrt{(v^2/a^2) - 1})$, а потому

$$d\theta = \pm\sqrt{(v^2/a^2) - 1}\, dv/v. \tag{6.41}$$

В результате интегрирования уравнений (6.41) получаем уравнения характеристик в плоскости годографа скорости:

$$\theta = \pm\left[\sqrt{(k+1)/(k-1)}\,\mathrm{arctg}\sqrt{(k-1)/(k+1)}\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1} - \right.$$
$$\left. - \mathrm{arctg}\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}\right] + C, \tag{6.42}$$

где знаки «+» и «—» относятся к различным семействам характеристик, а C — постоянная интегрирования.

В уравнении (6.42) $1 \leqslant \mathbf{M} \leqslant \infty$, что соответствует изменению скорости потока от $a_{кр}$ до v_{max}.

Характеристики в плоскости потока (6.28) и годографа скорости (6.42) позволяют рассчитать поле скоростей в плоском установившемся сверхзвуковом потоке.

Ниже это показано на конкретных примерах.

§ 6.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ПЛОСКОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

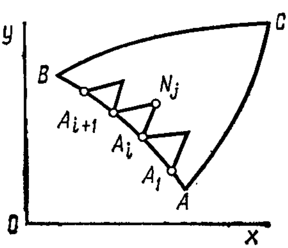


Рис. 6.5. Схема для решения задачи 1

Рассмотрим решение некоторых частных задач.

Задача 1. В физической плоскости x, y на некоторой кривой AB (рис. 6.5), не являющейся характеристикой, даны скорости потока. Требуется определить скорости потока в области, ограниченной этой кривой и двумя характеристиками AC и BC разных семейств, проведенными из точек A и B. Эти характеристики надо определить в процессе решения задачи.

Рассмотрим на кривой AB ряд точек A_1, ..., A_i, A_{i+1}, ... и проведем из каждой точки линии возмущения двух направлений. Уравнения этих прямых в конечных разностях имеют вид $y-y_i=m_{1i}(x-x_i)$ и $y-y_i=m_{2i}(x-x_i)$.

Обозначим точки пересечения линий возмущения разных направлений, проведенных из соседних точек, N_1, N_2, ..., N_j. Координаты точки N_j определяются из уравнений $y-y_i=m_{1i}(x-x_i)$, $y-y_{i+1}=m_{2(i+1)}(x-x_{i+1})$, где x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1} — координаты соседних точек на кривой AB. Точки N_1, N_2, ..., N_j можно принять за точки пересечения характеристик разного семейства. Назовем их *узловыми точками*. Их количество на единицу меньше количества выбранных точек на кривой AB.

Для определения скорости потока в узловых точках достаточно составить уравнения соответствующих характеристик в плоскости годографа скорости (6.37) и (6.38). В конечных разностях они имеют вид

$$v_y - v_{yi} = -\frac{1}{m_{2i}}\,(v_x - v_{xi}),\quad v_y - v_{yi+1} = -\frac{1}{m_{1i+1}}\,(v_x - v_{xi+1}).$$

Решая эту систему уравнений, найдем составляющие скорости в узловой точке N_j.

Таким образом можно найти скорости во всех узловых точках N. Принимая эти точки за начальные и проводя для них те же расчеты, можно определить скорости в последующих узловых точках и т. д. В результате найдем поле скоростей в узловых точках в криволинейном треугольнике, ограниченном кривой AB и двумя характеристиками AC и BC. Точность расчета зависит от количества выбранных точек на исходной кривой AB. Чем их больше, тем точнее результаты.

Задача 2. Заданы скорости на двух характеристиках AB и AC разных семейств, выходящих из точки A (рис. 6.6). Требуется определить поле скоростей в криволинейном четырехугольнике, ограниченном данными характеристиками и двумя характеристиками BD и CD, исходящими из точек B и C, которые надо определить в процессе решения задачи.

Рассмотрим на дугах AB и AC ряд точек A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... Тогда узловую точку P_1, найдем как точку пересечения линий возмущения разного направления, проведенных из точек A_1 и B_1:

$$y - y_{A_1} = m_{1A_1}(x - x_{A_1});\quad y - y_{B_1} = m_{1B_1}(x - x_{B_1}).$$

Составляющие скорости в этой точке определяются из уравнений

$$v_y - vy_{A_1} = -\frac{1}{m_{2A_1}}\,(v_x - v_{xA_1});\quad v_y - v_{yB_1} = -\frac{1}{m_{1B_1}}\,(v_x - v_{xB_1}).$$

Затем можно определить координаты узловой точки P_2 и составляющие скорости в ней, принимая за начальные данные известные составляющие ско-

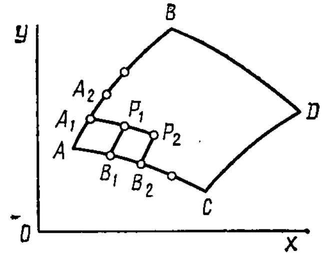


Рис. 6.6. Схема для решения задачи 2

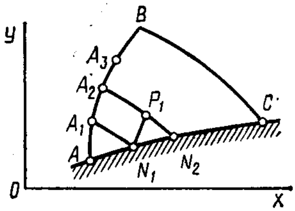


Рис. 6.7. Схема для решения задачи 3

рости в точках B_2 и P_1 и т. д. Таким образом, можно определить поле скоростей в узловых точках в криволинейном четырехугольнике $ABDC$.

Задача 3. Заданы скорости на характеристике AB. Известно, что точка A лежит на твердой стенке. Требуется определить поле скоростей в области, ограниченной дугой AB, твердой стенкой AC и дугой BC характеристики другого семейства, которая определяется в процессе решения задачи.

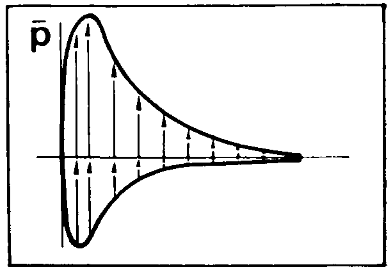
Возьмем на характеристике AB ряд точек A_1, A_2, A_3, ... (рис. 6.7). Из точки A_1 проведем линию возмущения второго направления до пересечения со стенкой в точке N_1. Координаты этой точки определяются из совместного решения уравнений линий возмущения $y-y_{A_1}=m_{2A_1}\left(x-x_{A_1}\right)$ и заданной поверхности стенки $y=y(x)$. Отрезок A_1N_1 можно принять за элемент характеристики второго семейства, а точку N_1 — за точку пересечения проведенной из точки A_1 характеристики второго семейства со стенкой. Кроме того, учтем, что в точке N_1 направление скорости известно — на основании граничного условия безотрывности обтекания (условия непротекания) она направлена вдоль касательной к поверхности, т. е. в точке N_1 должно выполняться условие $v_y/v_x=(dy/dx)_{N_1}$. Поэтому составляющие скорости потока в этой точке определяются из совместного решения уравнения характеристики в плоскости годографа скорости

$$v_y-v_{yA_1}=-\left(v_x-v_{xA_1}\right)/m_{1A_1} \quad \text{и уравнения} \quad v_y=v_x(dy/dx)_{N_1}.$$

Затем, зная составляющие скорости потока в точках A_2 и N_1, так же как в задаче 2, можно найти скорость потока в точке P_1. Скорость потока в точке N_2 определяется аналогично скорости в точке N_1. Таким образом, последовательно рассчитываем скорости в узловых точках, расположенных в области ABC.

Отметим, что рассмотренные здесь основные задачи можно использовать при решении общей задачи, например для расчета обтекания профиля произвольной формы сверхзвуковым потоком [3].

7
ГЛАВА



ПРОФИЛЬ И КРЫЛО КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ

§ 7.1. ПЛОСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Функция тока. При исследовании плоских потенциальных потоков кроме потенциала скорости φ [см. (2.24)] большое значение имеет функция тока. Рассмотрим ее применительно к плоскому установившемуся потенциальному потоку несжимаемой жидкости.

Из уравнения неразрывности (3.9) $\partial v_x/\partial x = \partial(-v_y)/dy$. Это равенство означает, что дифференциальный двучлен $(v_x dy - v_y dx)$ равен полному дифференциалу некоторой функции ψ:

$$v_x dy - v_y dx = d\psi. \tag{7.1}$$

Кроме того, используя уравнение линии тока (2.8) $dx/v_x = dy/v_y$, имеем

$$v_x dy - v_y dx = 0. \tag{7.2}$$

Сравнивая выражения (7.1) и (7.2), получаем, что вдоль линии тока $d\psi = 0$, откуда, интегрируя, найдем уравнение семейства линий тока

$$\psi(x, y) = C, \tag{7.3}$$

где C — произвольная постоянная.

Различным линиям тока соответствуют различные значения постоянной C. Функция ψ называется *функцией тока.*

Из соотношения (7.1) следует, что составляющие скорости v_x и v_y можно выразить через функцию тока:

$$v_x = \partial\psi/\partial y, \quad v_y = -\partial\psi/\partial x. \tag{7.4}$$

Составляющие скорости v_x и v_y представим также в виде производных потенциала скорости φ [см. (2.24)]:

$$v_x = \partial\varphi/\partial x, \quad v_y = \partial\varphi/\partial y. \tag{7.5}$$

Сравнение формул (7.4) и (7.5) приводит к важному соотношению

$$\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y, \quad \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x. \tag{7.6}$$

Если потенциал скорости φ, являющийся функцией координат x и y, приравнять постоянной $\varphi(x, y) = C$, то, очевидно, будем иметь семейство линий, обладающих тем свойством, что вдоль каждой такой линии потенциал скорости сохраняет постоянное значение. Такие линии называются *эквипотенциальными*.

Из формул (7.6) следует соотношение между функциями φ и ψ, т. е. $(\partial\varphi/\partial x)\partial\psi/\partial x + (\partial\varphi/\partial y)\, \partial\psi/\partial y = 0$. Это соотношение является условием ортогональности кривых $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$. Таким образом, в плоском установившемся потенциальном потоке семейство линий тока и семейство эквипотенциальных линий ортогональны.

Потенциал скорости и функция тока удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0; \tag{7.7}$$

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 0. \tag{7.8}$$

Уравнение (7.7) следует из уравнения неразрывности $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$ после подстановки в него выражений (7.5), а уравнение (7.8) — из условия потенциальности потока $\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y = 0$ в результате использования выражений (7.4).

Метод наложения потенциальных потоков. В исследовании потенциальных потоков большое практическое значение имеет метод наложения потенциальных потоков, заключающийся в следующем. Пусть имеется два потенциальных потока, обладающих потенциалами φ_1 и φ_2, удовлетворяющими уравнению Лапласа (7.7):

$$\partial^2\varphi_1/\partial x^2 + \partial^2\varphi_1/\partial y^2 = 0; \quad \partial^2\varphi_2/\partial x^2 + \partial^2\varphi_2/\partial y^2 = 0.$$

В таком случае вследствие линейности этого уравнения потенциал скорости, равный их сумме $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, также удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. представляет собой некоторый новый поток несжимаемой жидкости.

Новый сложный поток с потенциалом $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, является результатом наложения двух исходных потоков, т. е. результатом геометрического суммирования в каждой точке пространства скоростей первого и второго потоков, так как для сложного потока $v_x = \partial\varphi/\partial x = \partial\varphi_1/\partial x + \partial\varphi_2/\partial x = v_{1x} + v_{2x}$; $v_y = \partial\varphi/\partial y = \partial\varphi_1/\partial y + \partial\varphi_2/\partial y = v_{1y} + v_{2y}$.

Аналогично можно показать, что для нового сложного потока функция тока $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Следовательно, наложение двух (и более) потоков сводится к простому алгебраическому суммированию потенциалов и функций тока исходных потоков. Поэтому, имея ряд решений, соответствующих некоторым простейшим течениям жидкости, путем суммирования их в различных сочетаниях можно получить решения, соответствующие более сложным течениям.

Комплексный потенциал. Эффективным методом изучения свойств плоского течения является метод комплексного переменного, получивший в аэродинамике большое применение. Основные функции, характеризующие свойства плоского потенциального течения, — функция тока $\psi(x, y)$ и потенциал скорости $\varphi(x, y)$ определяются соотношениями (7.6).

В теории функции комплексного переменного эти соотношения, как известно, носят название *уравнений Коши—Римана* и выражают то условие, что комплексная комбинация из этих функций от двух действительных переменных, т. е. $\varphi(x, y) + i\ \psi(x, y)$, является аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Обозначим эту функцию

$$w(z) = \varphi + i\psi. \qquad (7.9)$$

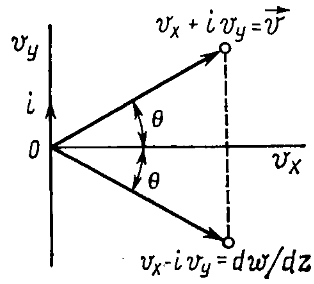


Рис. 7.1. Определение комплексной скорости

Функцию $w(z)$ называют *комплексным потенциалом или характеристической функцией течения.*

Как показано ниже, комплексный потенциал $w(z)$ дает возможность использовать хорошо разработанный аппарат теории функций комплексного переменного для решения задачи об обтекании тел и играет исключительно важную роль в аэродинамике плоскопараллельных течений.

Введем понятие о комплексной скорости. Возьмем производную от комплексного потенциала $w(z)$ по комплексному переменному z. Как известно из теории функций комплексного переменного, производная $dw/dz = \partial\varphi/\partial x + i\partial\psi/\partial x = -i\partial\varphi/\partial y + \partial\psi/\partial y$. Отсюда, используя выражения (7.4), получаем

$$dw/dz = v_x - iv_y. \qquad (7.10)$$

Производная dw/dz называется *комплексной скоростью.* Очевидно, модуль комплексной скорости бедет давать значение самой скорости v. Комплексную скорость можно интерпретировать геометрически как вектор, представляющий собой заркальное отображение относительно действительной оси вектора скорости $v_x + iv_y$ (рис. 7.1). Выражению (7.10) для комплексной скорости можно придать также и другой вид. Для этого представим составляющие скорости v_x, v_y в виде $v_x = v\cos\theta^*$, $v_y = v\sin\theta^*$ (θ^* — угол наклона $\vec{v}$). Тогда

$$dw/dz = v(\cos\theta^* - i\sin\theta^*) = ve^{-i\theta^*}. \qquad (7.11)$$

Из выражений (7.9) — (7.11) следует, что если известен комплексный потенциал потока, то достаточно просто можно определить линии тока $\psi = C$, где функция тока ψ равна мнимой части комплексного потенциала: $\psi = \mathrm{Jm}\,[w(z)]$, а также направление и значение скорости потока в любой точке (по значению производной комплексного потенциала dw/dz).

Примеры плоскопараллельных потенциальных течений. Рассмотрим прежде всего наиболее характерные примеры простейших плоских установившихся потенциальных потоков, комбинацией (наложением) которых можно получить сложные практически важные потоки.

Прямолинейный равномерный поток. Предположим, что плоское течение задано комплексным потенциалом

$$w = az, \qquad (7.12)$$

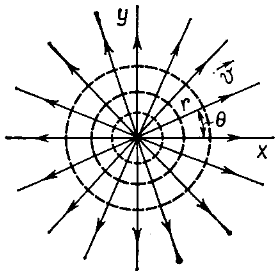


Рис. 7.2. Источник в начале координат

где $a = a_1 - ia_2$ — комплексная величина.

Требуется определить характер течения.

Подставляя в (7.12) выражения w, a и z, получаем $\varphi + i\psi = (a_1 - ia_2)(x + iy)$, откуда, приравнивая действительные и мнимые части, находим $\varphi = a_1x + a_2y$, $\psi = -a_2x + a_1y$.

Приравнивая функции φ и ψ постоянным, составляем уравнения эквипотенциальных линий и линий тока:

$$a_1x + a_2y = C_1, \quad -a_2x + a_1y = C_2,$$

т. е. уравнения семейств взаимно ортогональных прямых. В этом случае комплексная скорость $dw/dz = a = a_1 - ia_2$. Следовательно, поток течет по прямым, наклоненным к оси x под углом $\alpha(\operatorname{tg}\alpha = a_2/a_1)$, со скоростью $v = |dw/dz| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

При $a_2 = 0$ $(a = a_1 > 0)$ получим поток вдоль оси x со скоростью $v = a$. Комплексный потенциал такого потока имеет вид

$$w(z) = vz. \tag{7.12'}$$

Источник и сток. Пусть поток задан комплексным потенциалом

$$w(z) = \ln z. \tag{7.13}$$

В этом случае для исследования характера течения жидкости удобнее пользоваться представлением комплексной координаты z через полярные координаты рассматриваемой точки r и θ (рис. 7.2): $z = re^{i\theta}$. Тогда $w(z) = \varphi + i\psi = \ln r + i\theta$, откуда $\varphi = \ln r$, $\psi = \theta$.

Очевидно, линии тока $\psi = \theta = C$ представляют собой семейство лучей, исходящих из начала координат, т. е. начало координат является источником. Покажем, что направление течения соответствует направлению, показанному на рис. 7.2. Для этого найдем комплексную скорость: $dw/dz = 1/z = (1/r)e^{-i\theta}$. Отсюда, используя выражение (7.11), найдем значение скорости потока

$$v = 1/r \tag{7.14}$$

и угол наклона вектора скорости $\theta^* = \theta$, т. е. направление потока совпадает с положительным направлением полярного радиуса. Следовательно, комплексный потенциал (7.13) соответствует потоку от источника, расположенного в начале координат.

Заметим, что в рассматриваемом примере начало координат является особой точкой: для функции w — изолированной логарифмической точкой, а для комплексной скорости dw/dz — полюсом первого порядка, так как при $z = 0$ $(r = 0)$ величины w и dw/dz бесконечны. Формулой (7.14) можно пользоваться во всех точках, за исключением начала координат.

Найдем удельный расход жидкости Q, т. е. количество жидкости, вытекающей в единицу времени из источника. Удельный расход принято называть *мощностью источника*. Она равна $Q = v2\pi r$. Подставляя сюда выражение (7.14) для рассматриваемого примера, имеем $Q = 2\pi$.

Следовательно, в общем случае комплексный потенциал источника мощностью Q

$$w(z) = [Q/(2\pi)] \ln z. \tag{7.15}$$

Если источник находится не в начале координат, а в точке $z = a$, то

$$w(z) = [Q/(2\pi)] \ln (z - a). \tag{7.16}$$

Случай, когда жидкость течет в обратном направлении, т. е. втекает в начало координат по прямолинейным лучам, соответствует стоку. Очевидно, что функция $w(z)$ для стока мощностью Q отличается от аналогичной функции для источника только знаком, т. е.

$$w(z) = -[Q/(2\pi)] \ln z \text{ и } w(z) = -(Q/2\pi) \ln (z - a). \tag{7.17}$$

Вихрь. Зададим комплексный потенциал в виде

$$w(z) = -[i\Gamma/(2\pi)] \ln z, \tag{7.18}$$

т. е. линии тока представляют собой семейство концентрических окружностей $r = C$ (рис. 7.3).

Для установления направления потока найдем комплексную скорость:
$dw/dz = -[(i\Gamma/(2\pi)]1/z$, или $dw/dz = [\Gamma/(2\pi r)]\, e^{-i(\pi/2+\theta)}$. Отсюда, используя выражение (7.11), найдем

$$v = \Gamma/(2\pi r), \tag{7.19}$$

а $\theta^* = \pi/2 + \theta$, т. е. движение жидкости совершается в сторону возрастания угла θ, т. е. против часовой стрелки.

Таким образом, все частицы жидкости движутся по концентрическим окружностям с постоянной для данной окружности скоростью. Это означает, что вдоль оси, перпендикулярной плоскости x, y и проходящей через начало координат, расположен бесконечно длинный прямолинейный вихрь, вызывающий в перпендикулярной ему плоскости движение частиц жидкости по концентрическим окружностям.

Постоянная Γ в выражении (7.18) представляет собой циркуляцию скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Действительно, циркуляция скорости по окружности с центром в точке O при этом равна $v2\pi r$. Подставляя сюда выражение (7.19), получаем, что она равна постоянной Γ. Как и в случае источника, начало координат является особой точкой.

Если вихрь находится не в начале координат, а в точке $z = a$, то $w = -[i\Gamma/(2\pi)]\ln(z - a)$. В общем случае

$$w = \pm [i\Gamma/(2\pi)] \ln (z - a), \tag{7.20}$$

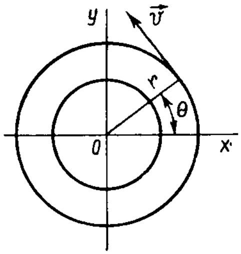


Рис. 7.3. Вихрь в начале координат

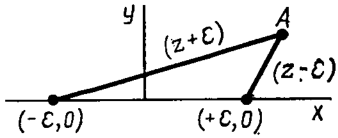


Рис. 7.4. Схема для определения комплексного потенциала диполя

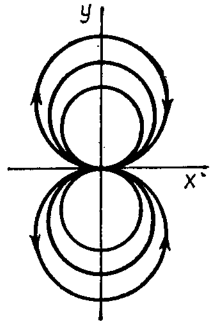


Рис. 7.5. Диполь в начале координат с осью вдоль оси x

где знак «+» соответствует направлению вращения вихря по часовой стрелке, а знак «—» — против часовой стрелки.

Д и п о л ь   н а   п л о с к о с т и. *Диполем* называется комбинация источника и стока одинаковой мощности, помещенных на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Сближая источник и сток, предполагаем, что мощности их неограниченно возрастают так, что в пределе произведение $Q2\varepsilon$ стремится к некоторой конечной величине m, называемой *моментом диполя*. Прямая, соединяющая источник и сток, называется *осью диполя.*

Рассмотрим диполь с осью вдоль оси x (рис. 7.4). Предположим, что в точке $(-\varepsilon, 0)$ расположен источник, а в точке $(+\varepsilon, 0)$ — сток. Используя метод наложения потенциальных потоков, найдем суммарный комплексный потенциал:

$$w = w_1 + w_2 = [Q/(2\pi)] \ln [(z+\varepsilon)/(z-\varepsilon)].$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем комплексный потенциал диполя в начале координат с моментом m и осью вдоль оси x в виде

$$w(z) = [m/(2\pi)]/z. \qquad (7.21)$$

Отсюда найдем функцию тока $\psi = -[m/(2\pi)]y/(x^2 + y^2)$ и уравнение семейства линий тока $y/(x^2 + y^2) = C$, откуда $x^2 + [y - - 1/(2C)]^2 = 1/(4C^2)$.

Очевидно, совокупность линий тока представляет собой семейство окружностей с центрами на оси y, касающихся оси x в начале координат (рис. 7.5). Таким образом, жидкость по указанным окружностям вытекает из начала координат и вновь в него втекает. Очевидно, в этом случае расход жидкости через произвольный замкнутый контур, окружающий диполь, равен нулю. Если же диполь расположен в точке $z = a$, то комплексный потенциал имеет вид

$$w(z) = [m/(2\pi)]\, 1/(z-a). \qquad (7.22)$$

§ 7.2. ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА

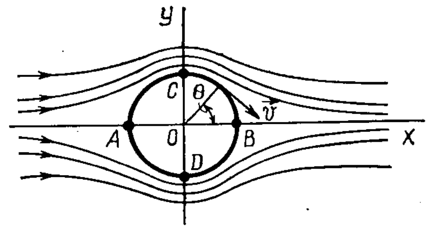


Рис. 7.6. Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра

Рассмотрим обтекание цилиндра круглого сечения при $\Gamma = 0$ (бесциркуляционное обтекание) и $\Gamma \neq 0$ (циркуляционное обтекание).

Бесциркуляционное обтекание цилиндра. Наложим друг на друга два потока: равномерный прямолинейный поток, движущийся в направлении оси x со скоростью v_∞, и поток, получаемый от диполя, расположенного в начале координат, с осью вдоль оси x и моментом m.

Для нахождения комплесного потенциала сложного течения нужно сложить комплексные потенциалы исходных потоков (7.12′) и (7.21). Следовательно, в рассматриваемом случае комплексный потенциал имеет вид

$$w(z) = v_\infty \{z + [m/(2\pi v_\infty)]/z\}. \tag{7.23}$$

Отсюда найдем функцию тока:

$$\psi = v_\infty \{y - [m/(2\pi v_\infty)]\, y/(x^2 + y^2)\}.$$

Чтобы найти линии тока, приравняем функцию тока постоянной $y - [m/(2\pi v_\infty)]\,[y/(x^2 + y^2)] = C$, откуда $y[(x^2 + y^2) - m/(2\pi v_\infty)] = C(x^2 + y^2)$.

Как видим, линии тока представляют собой семейство кривых третьего порядка. Для выяснения характера течений найдем нулевую линию тока, соответствующую $C = 0$. Для нулевой линии тока получаем два уравнения: $y = 0$ и $x^2 + y^2 = m/(2\pi v_\infty)$.

Следовательно, нулевая линия тока представляет собой участок оси x и окружность радиусом $r = \sqrt{m/(2\pi v_\infty)}$ с центром в начале координат. Принимая указанную окружность за твердую границу и рассматривая течение жидкости вне этой окружности, можно трактовать полученный поток как поток, обтекающий бесконечно длинный цилиндр радиусом $r = \sqrt{m/(2\pi v_\infty)}$.

Для того чтобы получить обтекание цилиндра заданного радиусом r_0, необходимо подобрать момент диполя из условия $r_0^2 = m/(2\pi v_\infty)$, т. е.

$$m = 2\pi v_\infty r_0^2. \tag{7.24}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае воздействие цилиндра на поток заменяется воздействием диполя. Задавая постоянной C различные значения, получаем семейство линий тока в окрестности цилиндра (рис. 7.6).

Подставляя выражение (7.24) в формулу (7.23), получаем комплексный потенциал потока, обтекающего цилиндр радиусом r_0:

$$w = v_\infty (z + r_0^2/z). \tag{7.25}$$

Найдем распределение скорости по поверхности цилиндра. Для этого, как и в предыдущих примерах, достаточно определить производную $dw/dz = v_\infty(1 - r_0^2/z^2)$.

На поверхности цилиндра (рис. 7.6) $z = r_0 e^{i\theta}$. Тогда

$$dw/dz = v_\infty(1 - e^{-2i\theta}) = ie^{-i\theta}\, 2v_\infty \sin\theta.$$

Отсюда найдем скорость потока:

$$v = 2v_\infty \mid \sin\theta \mid . \tag{7.26}$$

Из формулы (7.26) следует, что распределение скорости по верхней и нижней поверхностям цилиндра симметрично. При этом циркуляция скорости $\Gamma = 0$. В точках $A(\theta = \pi)$ и B $(\theta = 0)$ скорости потока равны нулю $(v = 0)$. Эти точки называются *критическими*. В точках C $(\theta = \pi/2)$ и $D(\theta = -\pi/2)$ скорость принимает максимальное значение, не зависящее от радиуса цилиндра и равное удвоенной скорости на бесконечности: $v = 2v_\infty$.

Вычислим давление на цилиндре, используя уравнение Бернулли: $p = p_\infty + \rho v_\infty^2/2 - \rho v^2/2$. Подставляя скорости v из (7.26), находим

$$p - p_\infty = (1 - 4\sin^2\theta)\,\rho v_\infty^2/2.$$

Введя безразмерный коэффициент давления $\bar{p} = (p - p_\infty)/(\rho v_\infty^2/2)$, имеем

$$\bar{p} = 1 - 4\sin^2\theta. \tag{7.27}$$

Как видим, безразмерный коэффициент давления не зависит от v_∞ и p_∞. При $\theta = 0, \pi$ (в точках B и A) $\bar{p} = 1$, а при $\theta = \pi/2, -\pi/2$ (в точках C и D) $\bar{p} = \bar{p}_{\min} = -3$, т. е. в этих точках наблюдается максимальное разрежение.

Из симметричного распределения давления по цилиндру следует, что результирующая сила давления потока на цилиндр равна нулю, т. е. при этом тело не испытывает сопротивления. В этом заключается известный парадокс Эйлера — Даламбера. Этот результат можно распространить и на случай произвольного контура при его безотрывном обтекании потоком идеальной несжимаемой жидкости.

На рис. 7.7 приведена теоретическая кривая *1* распределения коэффициента давления $\bar{p}$ по поверхности $\bar{p} = f(\theta)$, рассчитанная по формуле (7.27). Там же для сравнения представлена экспериментальная *2* кривая $\bar{p} = F(\theta)$. Из рис. 7.7 видно, что теоретическая кривая существенно отличается от экспериментальной в кормовой части цилиндра. Это объясняется тем, что на этом участке поверхности реальный поток вязкой жидкости (газа) перестает омывать цилиндр и отрывается от него, образуя за ним вихревую область (см. гл. 12).

Циркуляционное обтекание цилиндра. Чтобы получить циркуляционное обтекание круглого цилиндра, наложим на рассмотренное выше течение чисто циркуляционный поток от плоского вихря, расположенного в начале координат с направлением вращения по ча-

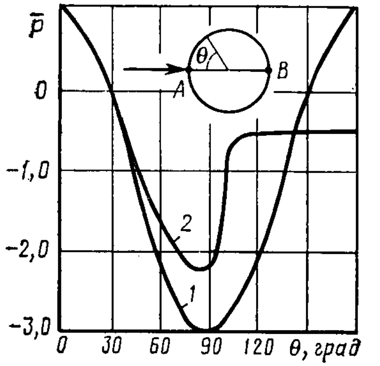


Рис. 7.7. Изменение коэффициента давления в зависимости от положения точки (угла θ) на поверхности цилиндра:

1 — теоретические данные; *2* — экспериментальные данные

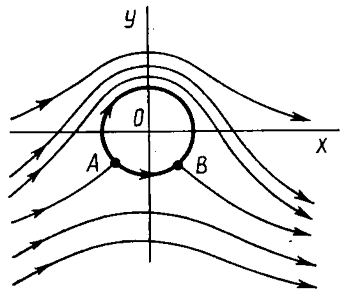


Рис. 7.8. Циркуляционное обтекание круглого цилиндра в случае $\Gamma < 4\pi v_\infty r_0$

совой стрелке. Сложив комплексные потенциалы указанных потоков (7.25) и (7.20), получим

$$w(z) = v_\infty \left(z + r_0^2/z\right) + [i\Gamma/(2\pi)] \ln z. \qquad (7.28)$$

В этом случае в каждой точке пространства к скорости бесциркуляционного потока, обтекающего цилиндр, прибавляется скорость от чисто циркуляционного потока. Наложение циркуляционного потока нарушает симметрию линий тока, так как на верхней поверхности скорость от чисто циркуляционного потока направлена в ту же сторону, что и скорость бесциркуляционного потока, а внизу скорость чисто циркуляционного потока направлена в обратную сторону. Вследствие сложения скоростей над цилиндром образуется область повышенных, а под цилиндром — область пониженных скоростей. Суммарная скорость потока на поверхности цилиндра

$$v = \mid 2v_\infty \sin\theta + \Gamma/(2\pi r_0) \mid . \qquad (7.29)$$

Критические точки A и B (рис. 7.8) в этом случае сходят с оси x и располагаются на нижней поверхности цилиндра. Найдем угол $\theta_{\text{кр}}$, определящий положение критических точек, для чего приравняем нулю скорость потока (7.29). Тогда

$$\sin\theta_{\text{кр}} = -\Gamma/(4\pi v_\infty r_0). \qquad (7.30)$$

Очевидно, значению $\Gamma < 4\pi v_\infty r_0$ соответствуют две критические точки A и B. Как видно из формулы (7.30), с увеличением Γ критические точки смещаются вниз. В случае, когда $\Gamma = 4\pi v_\infty r_0$, получаем $\sin\theta_{\text{кр}} = -1$, т. е. критические точки сливаются в одну точку. При

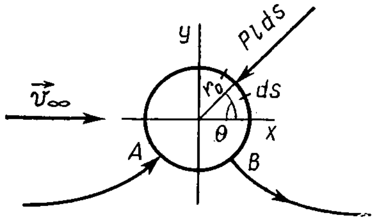


Рис. 7.9. Схема для определения подъемной силы, возникающей при циркуляционном обтекании цилиндра

дальнейшем увеличении Г, т. е. при $\Gamma > 4\pi v_\infty r_0$, критическая точка сходит с цилиндра.

На рис. 7.8 показан характер обтекания цилиндра, соответствующий случаю $\Gamma < 4\pi v_\infty r_0$.

Найдем распределение давления по поверхности цилиндра. Используя уравнение Бернулли $p + \rho v^2/2 = p_\infty + \rho v_\infty{}^2/2$, для определения коэффициента давления $\bar{p} = (p - p_\infty)/(\rho v_\infty^2/2)$ получим $\bar{p} = 1 - v^2/v_\infty^2$. Подставляя сюда выражение (7.29), имеем

$$\bar{p} = 1 - [2\sin\theta + \Gamma/(2\pi v_\infty r_0)]^2. \quad (7.31)$$

Из формулы (7.31) следует, что распределение коэффициента давления симметрично относительно оси y. Поэтому при циркуляционном обтекании цилиндра, так же как при $\Gamma = 0$, сопротивление равно нулю: $X_а = 0$ (парадокс Эйлера — Даламбера). При этом подъемная сила не равна нулю. Она определяется по формуле Жуковского.

§ 7.3. ФОРМУЛА ЖУКОВСКОГО

В основе современной теории крыла лежит *теорема Жуковского* о результирующей силе давления потока на обтекаемое им тело. Н. Е. Жуковский, используя модель идеальной жидкости, предложил искать источник силового воздействия потока на тело в образовании циркуляции.

Поясним это на частном случае обтекания круглого цилиндра. Как показано выше, при бесциркуляционном обтекании цилиндра скорости и давления распределяются симметрично, что приводит к отсутствию результирующей силы давления. Если цилиндр обтекается с циркуляцией, то симметрия в распределении скоростей и давлений относительно оси x нарушается, в результате чего появляется подъемная сила. Образование циркуляции можно представить как результат воздействия на поток вихря, расположенного вдоль оси цилиндра.

Вычислим значение подъемной силы, возникающей при обтекании цилиндра. Найдем сначала подъемную силу, действующую на элементарную площадку $l ds$ (здесь l — длина участка цилиндра вдоль его оси) в направлении оси y, т. е. в направлении перпендикуляра к вектору скорости невозмущенного потока $\bar{v}_\infty$ (рис. 7.9). Она равна $dY_а = -pl ds \sin\theta$. Введем коэффициент давления $\bar{p}$. Тогда $p = p_\infty + \bar{p}\rho v_\infty^2/2$ и $dY_а = -\bar{p}(\rho v_\infty^2/2) l ds \sin\theta - p_\infty l ds \sin\theta$. Здесь $ds =$

$= r_0 d\theta$. Тогда, интегрируя по углу θ от 0 до 2π и имея в виду, что интеграл от второго члена равен нулю, получим суммарную подъемную силу:

$$Y_{\text{а}} = -\frac{\rho v_\infty^2}{2} l r_0 \int_0^{2\pi} \overline{p} \sin\theta d\theta.$$

Подставляя сюда выражение $\overline{p}$ (7.31) и учитывая, что

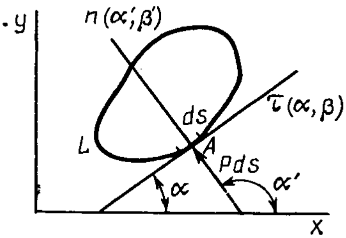


Рис. 7.10. Схема для вывода формул Чаплыгина о результирующей силе давления и о моменте

$\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$, получаем *формулу Жуковского*:

$$Y_{\text{а}} = \rho \Gamma v_\infty l. \tag{7.32}$$

Итак, при безотрывном обтекании цилиндра установившимся потоком идеальной жидкости результирующая сила давления перпендикулярна вектору скорости набегающего потока. Значение ее не равно нулю только при циркуляции: $\Gamma \neq 0$.

§ 7.4. ФОРМУЛА ЧАПЛЫГИНА О РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ СИЛЕ ДАВЛЕНИЯ

Покажем, как непосредственно по комплексному потенциалу потока вычислить результирующую силу давления.

В 1910 г. акад. С. А. Чаплыгин в своей известной работе «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела» дал общий прием определения результирующей силы и ее момента, создав основы теории крыла бесконечного размаха*.

Сущность метода Чаплыгина сводится к следующему. Допустим, что задан описываемый комплексным потенциалом $w = \varphi + i\psi$ плоский поток, плавно обтекающий цилиндрическое тело произвольной формы, ограниченное в плоскости x, y контуром L.

Рассмотрим на контуре произвольную точку A (рис. 7.10). Проведем в ней касательную τ и нормаль n к контуру. Обозначив α и β углы, образуемые касательной с координатными осями, α' и β' — те же углы для нормали, получим:

$$\cos\alpha' = -dy/ds = -\sin\alpha; \quad \cos\beta' = +dx/ds = \cos\alpha. \quad (7.33$$

---

* Позже эти формулы были получены немецким профессором Блазиусом и в зарубежной литературе носят его имя.

Давление p в точке A контура определим из уравнения Лагранжа—Бернулли

$$p = C - \rho v^2/2,$$

где v — скорость на контуре.

Умножая элементарную силу давления pds в точке A на $\cos\alpha'$ и $\cos\beta'$, найдем ее проекции на оси x и y'. Проекции результирующей силы давления на координатные оси X и Y, очевидно, выразятся в виде $X = \int\limits_L pds\cos\alpha'$, $Y = \int\limits_L pds\cos\beta'$,

или в соответствии с формулой (7.33)

$$X = -\int\limits_L p\sin\alpha ds; \quad Y = \int\limits_L p\cos\alpha ds. \tag{7.34}$$

Используя формулы (7.34), получаем

$$Y + iX = \int\limits_L p(\cos\alpha - i\sin\alpha)\,ds.$$

Подставляя выражение для p из уравнения Лагранжа — Бернулли, имеем

$$Y + iX = \int\limits_L (C - \rho v^2/2)(\cos\alpha - i\sin\alpha)\,ds.$$

Здесь

$$\int\limits_L C\cos\alpha ds = C\int\limits_L \frac{dx}{ds}\,ds = C\int\limits_L dx = 0;$$

$$\int\limits_L C\sin\alpha ds = C\int\limits_L \frac{dy}{ds}\,ds = C\int\limits_L dy = 0,$$

так как координаты x и y при полном обходе по контуру принимают первоначальное значение. Тогда выражение для $Y + iX$ примет следующий вид:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2}\int\limits_L v^2(\cos\alpha - i\sin\alpha)\,ds. \tag{7.35}$$

Преобразуем в формуле (7.35) подынтегральное выражение. Так как на контуре скорость направлена по касательной, то $v = d\varphi/ds$ или $d\varphi = vds$.

Так как контур L является линией тока, на которой $\psi = \text{const}$, то, следовательно, на контуре $dw = d(\varphi + i\psi) = d\varphi$ и поэтому

$$vds = dw. \tag{a}$$

Кроме того, на контуре L для комплексной скорости dw/dz имеем

$$dw/dz = v_x - iv_y = v(\cos\alpha - i\sin\alpha). \qquad (б)$$

При подстановке выражения (а) и (б) в формулу (7.35)

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2}\int\limits_L \frac{dw}{dz}\,dw.$$

Но так как $dw = (dw/dz)dz$, то окончательно

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2}\int\limits_L \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \qquad (7.36)$$

Это формула, позволяющая для потока, заданного комплексным потенциалом w, найти проекции X и Y результирующей силы давления по осям координат, называется *формулой Чаплыгина.*

Полная сила давления при этом равна $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Заметим, что здесь X, Y — силы, действующие на единицу длины тела в направлении оси, перпендикулярной к плоскости x, y.

§ 7.5. ФОРМУЛА ЧАПЛЫГИНА О МОМЕНТЕ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ

Для определения аэродинамических характеристик важно знать не только значение результирующей силы давления потока на тело, но и точку ее приложения, называемую *центром давления*, который будет известен, если подсчитать момент результирующей силы давления.

По формуле Чаплыгина можно вычислить момент результирующей силы давления, зная комплексный потенциал потока. Для нахождения момента M результирующей силы давления относительно начала координат поступим следующим образом.

Представим момент dM элементарной силы давления pds (рис. 7.10) относительно начала координат в следующем виде: $dM = p(x\cos\beta' - y\cos\alpha')ds$. Результирующий момент сил давления, очевидно, получится, если мы от этого выражения возьмем интеграл по замкнутому контуру L тела:

$$M = \int\limits_L p(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds. \qquad (7.37)$$

Подставим в этот интеграл выражение для давления p из уравнения Лагранжа — Бернулли $p = C - \rho v^2/2$. Тогда

$$M = \int\limits_L (C - \rho v^2/2)(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds,$$

или

$$M = C\int\limits_L (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds - \frac{\rho}{2}\int\limits_L v^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds.$$

Покажем, что первый интеграл равен нулю:

$$\int_L (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds = \int_L \left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds}\right) ds =$$

$$= \int_L xdx + ydy = \int_L d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0,$$

так как при полном обходе контура L координаты x и y приобретают первоначальные значения. Следовательно, выражение для момента M принимает следующий вид:

$$M = -\frac{\rho}{2}\int_L v^2 (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds. \qquad (7.38)$$

Для преобразования подынтегрального выражения вычислим произведение:

$$zdw/dz = (x+iy)(v_x - iv_y) = (xv_x + yv_y) + i(yv_x - xv_y).$$

Вводя обозначения $xv_x + yv_y = m$, $yv_x - xv_y = n$, получаем

$$zdw/dz = m + in. \qquad \text{(а)}$$

Вычислим теперь произведение $(dw/dz)dz$:

$$(dw/dz)\,dz = (v_x - iv_y)(dx + idy) = (v_x dx + v_y dy) + i(v_x dy - v_y dx).$$

Так как $v_x dx + v_y dy = d\varphi$, $v_x dy - v_y dx = d\psi$ и на контуре L, являющемся линией тока, $d\psi = 0$, $d\varphi = vds$, то

$$(dw/dz)\,dz = vds. \qquad \text{(б)}$$

Перемножаем выражения (а) и (б):

$$z(dw/dz)^2 dz = v(m + in)\,ds. \qquad \text{(в)}$$

Так как $m = xv_x + yv_y = v(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$, $n = yv_x - xv_y = v(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$, то соотношение (в) можно представить в следующем виде:

$$z(dw/dz)^2 dz = v^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds + iv^2(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\,ds,$$

т. е. $v^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds = \mathrm{Reel}\,[z(dw/dz)^2 dz]$.

Подставляя это выражение в (7.38), окончательно находим

$$M = -\mathrm{Reel}\left[\frac{\rho}{2}\int_L z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right]. \qquad (7.39)$$

Формулу (7.39) называют *формулой Чаплыгина*, которая позволяет для заданного комплексным потенциалом w потока вычислить результирующий момент M силы давления.

В качестве примера, иллюстрирующего применение выведенных формул (7.36) и (7.39), рассмотрим циркуляционное обтекание цилиндра. В этом случае комплексный потенциал определяется по формуле (7.28). Дифференцируя w по z, т. е. $dw/dz = v_\infty(1 - r_0^2/z^2) + (i\Gamma/2\pi)/z$, и подставляя найденное значение dw/dz в формулу Чаплыгина (7.36), получаем

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2}\int\limits_L \left[v_\infty^2\left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right)\frac{iv_\infty \Gamma}{\pi}\frac{1}{z} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{z^2}\right] dz.$$

Вычет относительно полюса $z = 0$ даст лишь член, содержащий $1/z$, т. е. $(iv_\infty\Gamma/\pi)/z$. В таком случае

$$Y + iX = -(\rho/2)\,2\pi i\,(v_\infty i\Gamma/\pi), \text{ или } Y + iX = \rho v_\infty \Gamma,$$

откуда $X = 0$, $Y = \rho v_\infty \Gamma$.

Поскольку в рассматриваемой задаче обтекания цилиндра направление оси x совпадает с направлением скорости невозмущенного потока, то $X = X_а$, $Y = Y_а$, т. е. полученный результат означает, что при этом лобовое сопротивление отсутствует ($X_а = 0$), а подъемная сила, отнесенная к единице длины цилиндра ($l = 1$), определяется по известной формуле Жуковского $Y_а = \rho v_\infty \Gamma$ [см. формулу (7.32)].

Для нахождения момента M результирующей силы давления, действующей на цилиндр, используем формулу (7.39). Подставим в нее выражение $z(dw/dz)^2$. Тогда

$$M = \text{Reel}\,\{(\rho/2)\,2\pi i\,[\Gamma^2/(4\pi^2) + 2v_\infty^2 r_0^2]\}.$$

Так как выражение в фигурных скобках представляет собой чисто мнимую величину, то $M = 0$, т. е. в этом случае результирующая сила $Y_а$ проходит через ось цилиндра.

§ 7.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЖУКОВСКОГО В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНТУРА

Для определения по формуле (7.36) результирующей силы давления и ее проекций X и Y, действующих на контур, нужно задать комплексный потенциал потока $w(z)$, как при определении подъемной силы, возникающей на цилиндре (см. § 7.5). Для доказательства *теоремы Жуковского* в случае произвольного контура вместо потенциала $w(z)$ рассмотрим производную dw/dz и представим ее в окрестности бесконечно удаленной точки в виде следующего ряда Лорана:

$$dw/dz = a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \cdots. \tag{а}$$

Очевидно, что для определения результирующей силы по формуле (7.36) в разложении dw/dz достаточно знать значения только двух коэффициентов: a_0 и a_1. Найдем их. Из выражения (а) следует, что

$$a_0 = \lim_{z\to\infty}(dw/dz).$$

Вследствие того что скорость набегающего потока v_∞ известна и составляет некоторый угол θ с осью x, то согласно выражению (7.11) $\lim\limits_{z\to\infty}(dw/dz) = v_\infty e^{-i\theta}$.

Тогда $a_0 = v_\infty e^{-i\theta}$. Если принять, что ось x направлена вдоль вектора скорости $\vec{v}_\infty$, то $\theta = 0$ и $a_0 = v_\infty$.

Для нахождения a_1 проинтегрируем dw/dz по некоторому замкнутому контуру C, охватывающему заданный контур L:

$$\int\limits_C \frac{dw}{dz}\,dz = 2\pi i a_1. \tag{б}$$

Кроме того, учтем, что

$$\int\limits_C \frac{dw}{dz}\,dz = \int\limits_C (v_x - iv_y)(dx + idy) = \int\limits_C v_x dx + v_y dy + \int\limits_C v_x dy - v_y dx.$$

Здесь $\int\limits_C v_x dx + v_y dy = \Gamma$ — циркуляция скорости по контуру C [см. (2.12)], а $\int\limits_C v_x dy - v_y dx = Q$ — количество жидкости, протекающей через замкнутый контур C. Согласно уравнению неразрывности, в случае установившегося движения оно равно нулю. Поэтому

$$\int\limits_C \frac{dw}{dz}\,dz = \Gamma. \tag{в}$$

Приравнивая правые части выражений (б) и (в), имеем $a_1 = \Gamma/(2\pi i)$.

После подстановки значений a_0 и a_1 в ряд (а) получаем выражения производной dw/dz и квадрата производной $(dw/dz)^2$:

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i}\,\frac{1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots;$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = v_\infty^2 + \frac{\Gamma v_\infty}{\pi i}\,\frac{1}{z} - \left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} - 2a_2 v_\infty\right)\frac{1}{z^2} + \cdots.$$

Подставляя выражение $(dw/dz)^2$ в формулу Чаплыгина (7.36) и замечая, что

$$\int\limits_C dz/z = 2\pi i, \text{ а } \int\limits_C dz/z^n = 0$$

при любом $n \neq 1$, находим $Y_а + iX_а = -\rho v_\infty \Gamma$. Отсюда $Y_а = -\rho v_\infty \Gamma$, а $X_а = 0$. Здесь знак «—» указывает на то, что при выбранном направлении вектора $\vec{v}_\infty$ вдоль положительной оси x подъемная сила $Y_а > 0$, если $\Gamma < 0$ (циркуляция скорости по часовой стрелке), и, наоборот, $Y_а < 0$, если $\Gamma > 0$ (циркуляция скорости против часовой стрелки). Итак, доказана **теорема Н. Е. Жуковского**: *результирующая сила, действующая на плавно обтекаемый произвольный контур (на единичный участок бесконечно длинного цилиндрического тела произвольного поперечного сечения), по значению равна* $Y_а = \rho v_\infty \Gamma$. Для того чтобы получить направление силы, нужно вектор скорости $\bar{v}_\infty$ повернуть на 90° против направления циркуляционного движения.

§ 7.7. ТОНКИЙ ПРОФИЛЬ КРЫЛА В НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ. ТЕОРИЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

Профиль крыла представляет собой контур сечения крыла бесконечного размаха плоскостью, перпендикулярной его размаху. Для характеристики формы этого профиля (рис. 7.11) рассмотрим его основные геометрические параметры.

Линией, относительно которой определяются координаты верхней и нижней плоскостей профиля $y_в$ и $y_н$, является его хорда. *Хорда* b — это отрезок прямой, соединяющий две наиболее удаленные точки профиля (переднюю и заднюю кромки). Обычно координаты профиля определяются в долях хорды $\bar{y}_в = y_в/b$, $\bar{y}_н = y_н/b$. Толщина профиля в данной точке равна длине перпендикулярного хорде отрезка, соединяющего точки верхнего и нижнего контуров профиля. Обычно под толщиной профиля c понимают его максимальную толщину. Одним из основных геометрических параметров профиля является относительная толщина профиля: $\bar{c} = c/b$. Форму профиля определяет также расстояние x_c от его передней кромки до точки на хорде, в которой профиль имеет максимальную толщину. Это расстояние также определяется в долях хорды: $\bar{x}_c = x_c/b$.

В значительной степени форму профиля определяет его *средняя линия* — линия, соединяющая точки, расположенные посередине толщин профиля. Расстояние от хорды до средней линии называется *вогнутостью*. Максимальная вогнутость f, выражаемая в долях хорды, называется относительной вогнутостью или относительной кривизной профиля. Расстояние от передней кромки профиля до точки на хорде, соответствующей максимальной вогнутости, обозначается x_f, а в долях хорды $\bar{x}_f = x_f/b$. Для симметричного профиля средняя линия совпадает с хордой и $f = 0$.

В § 7.2 рассмотрена задача обтекания контура в виде круга (сечения круглого цилиндра). Задача об обтекании профиля произвольной формы решается до конца, если известно конформное преобразование внешности этого профиля на внешность круга. Однако отыскание такого конформного преобразования в явном виде для профиля произвольной формы связано с большими трудностями.

Классические работы Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина по теоретическим профилям, основанные на введении отображающих функций, дали возможность построить точное решение для ограниченного класса профилей [2]. Поэтому представляют интерес прибли-

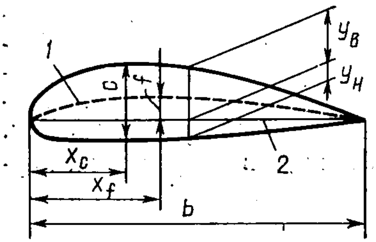


Рис. 7.11. Геометрические характеристики тонкого профиля: *1* — средняя линия; *2* — хорда

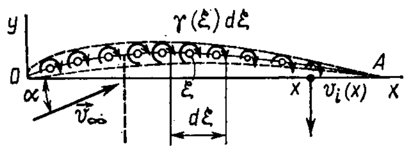


Рис. 7.12. Тонкий профиль в несжимаемом потоке

женные методы решения задачи обтекания профилей произвольной формы. Наибольшее применение при определении аэродинамических характеристик профиля находят результаты теории тонкого профиля, основанной на замене профиля системой простых особенностей в виде присоединенных вихрей. Рассмотрим обтекание тонкого слабоизогнутого профиля под малым углом атаки α установившимся потоком невязкой несжимаемой среды с заданной скоростью v_∞.

Поместим начало координат в передней кромке профиля, ось x направим вдоль хорды, ось y — перпендикулярно ей вверх (рис. 7.12). Введем следующие упрощения:

а) предполагая профиль достаточно тонким, считаем, что он мало отличается от своей средней линии, и рассмотрим вместо профиля обтекание его средней линии;

б) предполагая профиль слабоизогнутым, принимаем, что средняя линия незначительно отличается от хорды профиля;

в) рассматривая обтекание тонкого слабоизогнутого профиля под малым углом атаки, считаем, что обтекание безотрывно, т. е. средняя линия является линией тока.

Затем заменим профиль непрерывно расположенными по его средней линии вихрями бесконечного размаха с осями вращения вдоль оси z (вдоль перпендикуляра к плоскости xy).

Возможность такой замены подтверждается следующими соображениями. Согласно формуле Жуковского (7.32), подъемная сила профиля $Y_а \neq 0$, если циркуляция скорости по контуру L, охватывающему профиль, отлична от нуля: $\Gamma \neq 0$. С другой стороны, на основании теоремы Стокса о вихрях условие $\Gamma \neq 0$ означает, что область, ограниченная контуром L, пронизывается вихрями с суммарной интенсивностью, равной циркуляции Γ. Отсюда следует, что профиль по своему воздействию на обтекающий его поток эквивалентен вихрям. Эти вихри называются *присоединенными*.

Обозначим $\gamma(x)$ погонную циркуляцию скорости:

$$\gamma(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [\Delta\Gamma/(\Delta x)].$$

Здесь $\Delta\Gamma$ — циркуляция скорости от вихрей, расположенных на элементе Δx средней линии. Функцию $\gamma(x)$ следует подобрать из условия, что средняя линия профиля является линией тока. Напомним, что в случае круглого цилиндра достаточно ввести один присоединенный вихрь, расположенный вдоль его оси.

Вектор скорости в окрестности профиля и на его средней линии можно представить в виде суммы: $\vec{v} = \vec{v}_\infty + \vec{v}_i$, где $\vec{v}_i$ — вектор скорости, индуцированной в данной точке присоединенными вихрями. Для тонкого профиля примем, что вихри расположены вдоль хорды, а не на его средней линии. По формуле Био — Савара (2.37), скорость, индуцированная элементом с циркуляцией $d\Gamma = \gamma(\xi)d\xi$ в некоторой точке хорды с координатой x, равна $dv_i = [\gamma(\xi)d\xi]/[2\pi(x - \xi)]$. Здесь за положительное направление скорости v_i принято направление вниз. Тогда скорость, индуцированная в этой точке всеми вихрями,

$$v_i(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^b \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi}. \tag{7.40}$$

Эту индуцированную скорость $v_i(x)$ на хорде профиля можно принять равной индуцированной скорости на поверхности профиля. Наличие этой скорости изменяет угол атаки в данной точке на величину $\Delta\alpha = v_i(x)/v_\infty$. При этом местный угол атаки будет $\alpha - v_i(x)/v_\infty$.

Для того чтобы профиль обтекался безотрывно, необходимо, чтобы в каждой его точке местная скорость была направлена по касательной к поверхности, т. е. должно быть равенство

$$\alpha - v_i/v_\infty = dy/dx, \tag{7.41}$$

где $y = y(x)$ — уравнение средней линии профиля.

Используя выражение (7.40) для v_i, равенство (7.41) можно представить в следующем виде:

$$\alpha - \frac{1}{2\pi v_\infty}\int_0^b \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi} = \frac{dy}{dx}. \tag{7.42}$$

Уравнение (7.42) — интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\gamma(\xi)$. Введем вместо x и ξ новые независимые переменные θ_1 и θ, определяемые равенствами $x = (b/2)\ (1 - \cos\theta_1)$, $\xi = (b/2)\ (1 - \cos\theta)$. Очевидно, когда x и ξ изменяются в пределах $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \xi \leqslant b$, переменные θ_1 и θ изменяются в пределах $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Будем искать $\gamma(\theta)$ в виде ряда

$$\gamma(\theta) = 2v_\infty\left[A_0 \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta\right], \tag{7.43}$$

коэффициенты которого A_0, A_1, A_2, ... должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялось условие безотрывности обтекания, т. е. уравнение (7.42). Для этого прежде всего приведем выражение (7.40) и уравнение (7.42) к переменному θ:

$$v_i = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^b \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\gamma(\theta)\sin\theta d\theta}{\cos\theta-\cos\theta_1}. \tag{7.44}$$

Найдем теперь выражение $\gamma(\theta)$ $\sin\theta$:

$$\gamma(\theta)\sin\theta = 2v_\infty\left(A_0\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin n\theta\right)\sin\theta =$$

$$= 2v_\infty\left[A_0(1+\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin n\theta\sin\theta\right] =$$

$$= 2v_\infty\left[A_0(1+\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\frac{\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta}{2}\right].$$

Подставляя полученное выражение в формулу (7.44), имеем

$$v_i = \frac{v_\infty}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{A_0 d\theta}{\cos\theta-\cos\theta_1} + \frac{v_\infty}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{A_0\cos\theta d\theta}{\cos\theta-\cos\theta_1} +$$

$$+\frac{v_\infty}{2\pi}\int\limits_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n\frac{\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta}{\cos\theta-\cos\theta_1}d\theta. \tag{7.45}$$

Так как

$$\int\limits_0^\pi d\theta/(\cos\theta-\cos\theta_1) = 0, \quad \int\limits_0^\pi \cos k\theta d\theta/(\cos\theta-\cos\theta_1) = \pi\sin k\theta_1/\sin\theta_1,$$

то, подставляя значения этих интегралов в формулу (7.45), после некоторых преобразований получаем

$$v_i = v_\infty\left[A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\theta_1\right]. \tag{7.46}$$

Теперь уравнение (7.42) можно представить в следующем виде:

$$\alpha - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\theta = \frac{dy}{dx}. \tag{7.47}$$

Коэффициенты A_n этого уравнения определяются методом, обычным для рядов Фурье. Умножая обе части уравнения (7.47) поочередно на 1, $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$, ... и интегрируя в пределах от 0 до π, получаем:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{dy}{dx}\, d\theta; \; A_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{dy}{dx} \cos n\theta d\theta, \tag{7.48}$$

где $y(x)$ выражено через θ с помощью подстановки $x = (b/2)(1 - \cos\theta)$.

В случае симметричного профиля $y = 0$, $dy/dx = 0$ и $A_0 = \alpha$, $A_1 = A_2 = \ldots = 0$. Тогда $\gamma = 2v_\infty \alpha \operatorname{ctg}\theta/2$. Отсюда очевидно, что при удалении от передней кромки профиля интенсивность присоединенных вихрей уменьшается. На задней кромке ($\theta = \pi$) $\gamma = 0$.

Зная распределение интенсивности присоединенных вихрей по хорде, легко найти подъемную силу и момент, действующие на профиль. По теореме Жуковского, $dY_a = \rho\gamma(x) v_\infty l dx$ и, следовательно,

$$Y_a = \rho v_\infty l \int\limits_0^b \gamma(x)\, dx.$$

Переходя к переменному θ, получаем

$$Y_a = \rho v_\infty^2 lb \int\limits_0^\pi \left[A_0 (1 + \cos\theta) + \sum_{n=1}^\infty A_n \sin n\theta \sin\theta \right] d\theta =$$

$$= \rho v_\infty^2 lb (A_0 + A_1/2)\pi,$$

откуда коэффициент подъемной силы

$$c_{ya} = 2\pi (A_0 + A_1/2). \tag{7.49}$$

Аналогично вычисляется момент относительно передней кромки профиля:

$$M = -\rho v_\infty l \int\limits_0^b \gamma(x)\, x dx.$$

Переходя к переменной θ, имеем

$$\rho v_\infty l \gamma(x)\, x dx = v_\infty^2 l \frac{b^2}{2} \left[A_0 (1 - \cos^2\theta) + \right.$$

$$\left. + (1 - \cos\theta) \sum_{n=1}^\infty A_n \sin n\theta \sin\theta \right] d\theta = v_\infty^2 l \frac{b^2}{2} \left[A_0 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^\infty A_n \sin n\theta \left(\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right] d\theta.$$

Тогда

$$M = -\frac{\rho v_\infty^2}{2} lb^2 \left[\int\limits_0^\pi A_0 \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta + \int\limits_0^\pi \sum_{n=1}^\infty A_n \sin n\theta (\sin\theta - \right.$$

$$-\frac{\sin 2\theta}{2}\Big) d\theta\Big] = -\frac{\rho v_\infty^2}{2} lb^2 \frac{\pi}{2}\left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2}\right).$$

Отсюда коэффициент момента

$$c_m = -(\pi/2)(A_0 + A_1 - A_2/2). \tag{7.50}$$

Как видим, значения подъемной силы и момента определяются лишь первыми тремя коэффициентами разложения: A_0, A_1 и A_2; остальные коэффициенты не влияют на суммарные аэродинамические характеристики (подъемную силу и момент), но влияют на распределение $\gamma(x)$.

Подставляя в формулы (7.49) и (7.50) выражения (7.48), получаем:

$$c_{ya} = 2\pi(\alpha - \alpha_0); \tag{7.51}$$

$$c_m = c_{m0} - c_{ya}/4, \tag{7.52}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}(1-\cos\theta)\,d\theta; \\ c_{m0} &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}(\cos\theta - \cos 2\theta)\,d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

Угол α_0 называется *углом атаки* нулевой подъемной силы, т. е. при $\alpha = \alpha_0$ эта сила равна нулю.

Из формулы для c_{ya} следует, что для тонких профилей коэффициент подъемной силы линейно зависит от угла атаки α, а производная $c_{ya}^\alpha = 2\pi$ не зависит от формы профиля. Коэффициент c_{m0} равен коэффициенту момента при нулевой подъемной силе.

Из формулы (7.53) следует, что величины α_0 и c_{m0} зависят только от формы средней линии профиля (от вогнутости). Для симметричных профилей $\alpha_0 = 0$, $c_{m0} = 0$. При увеличении относительной вогнутости профиля α_0 и c_{m0} по абсолютной величине увеличиваются.

При малых углах атаки зависимость коэффициента момента от коэффициента подъемной силы (угла атаки), так же как зависимость c_{ya} от α, линейна [см. (7.52)]. Однако при больших углах атаки безотрывность обтекания профиля нарушается — происходит отрыв потока (см. гл. 12). При этом зависимости $c_{ya}(\alpha)$ и $c_m(\alpha)$ становятся нелинейными.

На рис. 7.13 приведен типичный характер зависимости коэффициентов c_{ya} и c_m от угла атаки для несимметричного профиля. Здесь $\alpha_{кр}$ — критический угол атаки, при котором коэффициент подъемной силы имеет максимальное значение $c_{ya} = c_{ya\,max}$, а диапазон углов атаки $\alpha \leqslant \alpha^*$ соответствует безотрывному обтеканию профиля с линейным характером зависимости коэффициента c_{ya} от α. При малых углах атаки теоретические результаты удовлетворительно согласуются с опытными данными. Опыт подтверждает, что кривизна профиля не влияет на значения производных c_{ya}^{α} и c_m^{α}. Однако теория дает завышенные значения производной c_{ya}^{α}, так как на величину c_{ay}^{α} влияет относительная толщина профиля. С увеличением относительной толщины $\bar{c}$ производная c_{ya}^{α} уменьшается.

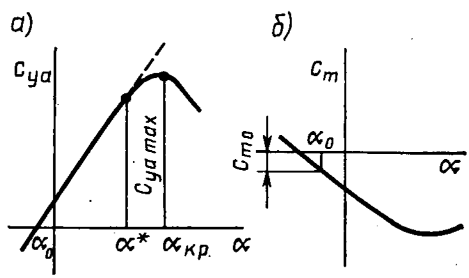


Рис. 7.13. Зависимости коэффициентов подъемной силы (*а*) и момента (*б*) от угла атаки

На значения коэффициента c_{m0} и угла α_0 существенно влияет кривизна профиля [см. (7.53)]. При этом теория дает завышенные значения c_{m0} и α_0. Относительная толщина на c_{m0} и α_0 практически не влияет.

Введем понятия о центре давления и фокусе профиля.

Центром давления называется точка на хорде профиля, через которую проходит равнодействующая аэродинамической силы.

Фокусом профиля называется точка на хорде, относительно которой (или относительно оси, проходящей через эту точку) момент не зависит от угла атаки.

Обозначим $\bar{x}_д$ и $\bar{x}_F$ соответственно относительные координаты центра давления и фокуса. Для определения координат центра давления и фокуса приведем выражение момента $M(x)$ относительно произвольной точки на хорде: $M(x) = M + Yx$, где M — момент относительно передней кромки; x — координата рассматриваемой точки. Отсюда коэффициент момента $c_m(\bar{x}) = c_m + c_{ya}\bar{x}$. Подставляя сюда выражение (7.52), находим

$$c_m(\bar{x}) = c_{m0} + (\bar{x} - 1/4)\, c_{ya}. \qquad (7.54)$$

Здесь при малых углах атаки $c_y = c_{ya}$.

Для центра давления, т. е. при $\bar{x} = \bar{x}_д$, коэффициент $c_m(\bar{x}) = 0$, тогда, используя выражение (7.54), получим

$$\bar{x}_д = 1/4 - c_{m0}/c_{ya}. \qquad (7.55)$$

Из формулы (7.55) следует, что для симметричных профилей независимо от формы $\bar{x}_д = 1/4$. В случае несимметричных профилей относительная координата центра давления зависит от формы профиля и коэффициента подъемной силы c_{ya} (угла атаки). При увеличении угла атаки центр давления смещается к передней кромке.

Поскольку относительно фокуса момент не зависит от угла атаки, то из выражения (7.54) следует, что при $\bar{x} = \bar{x}_F$

$$(\bar{x}_F - 1/4)\, c_y = 0, \text{ т. е. } \bar{x}_F = 1/4. \qquad (7.56)$$

Таким образом, фокус тонкого профиля независимо от формы располагается на расстоянии $^1/_4$ хорды от передней кромки.

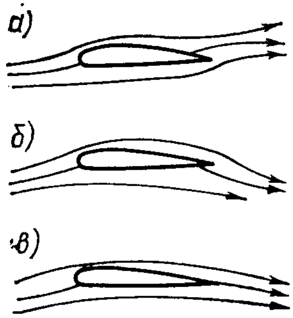


Рис. 7.14. Различные схемы циркуляционного обтекания профиля

Рассмотрим еще одну существенную особенность обтекания профилей. При обтекании цилиндра с заданной скоростью на бесконечности v_∞ имеется много решений, так как, выбирая разную циркуляцию Г, можно получить различный характер обтекания цилиндра с различным расположением на нем критических точек [см. (7.30)]. Это наблюдается и для профиля с острой задней кромкой. При обтекании профиля с заданной скоростью v_∞ из бесчисленного множества решений можно выделить три случая, отличающихся характером обтекания задней кромки профиля (рис. 7.14).

Первые два случая (рис. 7.14, *а*, *б*) не дают плавного обтекания, так как при перетекании струй с одной поверхности профиля на другую на острой задней кромке теоретически скорость становится бесконечной, что физически невозможно. Плавное обтекание профиля возможно только тогда, когда поток не огибает острую заднюю кромку, а сходит с нее (рис. 7.14, *в*). Это условие представляет собой известную гипотезу Чаплыгина — Жуковского о сходе потока с задней кромки профиля. Гипотезу Чаплыгина — Жуковского можно трактовать как условие о конечности скорости на острой задней кромке. Для каждого профиля крыла с острой задней кромкой существует диапазон углов атаки, при котором профиль обтекается без отрыва потока (рис. 7.14, *в*) с конечной скоростью на острой задней кромке.

Легко убедиться, что ряд (7.43) удовлетворяет условию Чаплыгина — Жуковского, так как при этом на задней кромке ($x = b$, $\theta = \pi$) индуцированная скорость имеет конечное значение. При $\theta = \pi$ функция $\gamma = 0$.

§ 7.8. ОСОБЕННОСТИ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА. ВИХРЕВЫЕ СИСТЕМЫ КРЫЛА

Аэродинамические характеристики крыла конечного размаха зависят как от формы сечения, т. е. профиля, так и от формы крыла в плане. Форма крыла, показанная на рис. 7.15, *а*, характеризуется углом стреловидности передней кромки $\chi_{п.к}$ и двумя безразмерными параметрами — удлинением $\lambda = l/b_{ср}$, но $b_{ср} = S/l$ и $\lambda = l^2/S$, сужением $\eta = b_0/b_к$, где l — размах крыла, S — площадь крыла в плане, b_0, $b_к$ — корневая и концевые хорды крыла.

На рис. 7.15 приведено крыло с прямой стреловидностью: $\chi_{п.к} > 0$. Для крыльев обратной стреловидности $\chi_{п.к} < 0$. В частных случаях, например для прямоугольного крыла, $\chi = 0$, $\eta = 1$, поэтому достаточно ввести один параметр — $\lambda = l/b$; для треугольного крыла $\eta = \infty$, а $\lambda \operatorname{tg} \chi_{п.к} = 4$, т. е. также достаточно задать один параметр: λ или $\chi_{п.к}$.

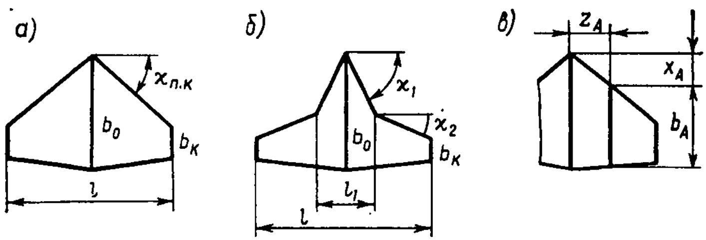


Рис. 7.15. Стреловидное крыло (*а*) и крыло сложной формы в плане (*б*), средняя аэродинамическая хорда b_A (*в*)

Для крыльев сложной формы в плане требуется задать более трех параметров. Например, для крыла, показанного на рис. 7.15, *б*, кроме удлинения и сужения необходимо ввести два угла стреловидности χ_1 и χ_2, а также относительную координату точки излома передней кромки $\bar{z}_1 = l_1/l$.

В качестве характерного линейного размера крыла обычно рассматривают среднюю хорду $b_{ср} = S/l$ либо среднюю аэродинамическую хорду (САХ). Под средней аэродинамической хордой понимают хорду равновеликого прямоугольного крыла, имеющего те же аэродинамические характеристики M_z, Y, X, что и у исходного крыла.

Из равенства моментов M_z для заданного и прямоугольного крыльев, принимая, что коэффициенты момента и нормальной силы сечений вдоль размаха крыльев не изменяются, найдем среднюю аэродинамическую хорду b_A и координату x_A передней кромки САХ (рис. 7.15, *в*):

$$b_A = \frac{2}{S}\int_0^{l/2} b^2 dz, \quad x_A = \frac{2}{S}\int_0^{l/2} bx dz.$$

Здесь b — хорда сечения крыла; x — координата передней кромки сечений крыла.

Форма сечений крыла по его размаху может изменяться. Тогда имеют в виду аэродинамическую крутку. Крыло может иметь также геометрическую крутку, образованную переменным по размаху углом между хордой данного сечения и плоскостью xz.

Рассмотрим некоторые особенности обтекания крыла конечного размаха. Как известно (см. § 7.7), аэродинамические характеристики сечений крыла бесконечного размаха одинаковы. Если же крыло имеет конечный размах, то в основном из-за перетекания воздуха через кромки с нижней поверхности на верхнюю (при положительном угле атаки) характеристики его сечений различны. При этом концы крыла оказывают существенное влияние на распределение скорости и давления по всей поверхности, особенно вблизи боковых кромок. Чем ближе к концам крыла, тем циркуляция скорости становится меньше: $\Gamma = \Gamma(z)$.

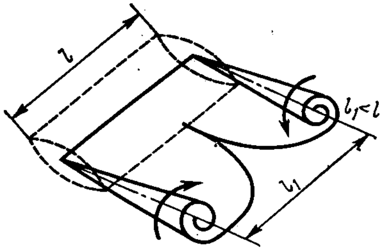


Рис. 7.16. Свертывание вихревой пелены за крылом

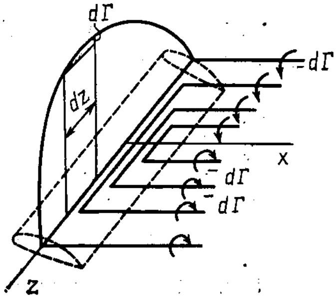


Рис. 7.17. Вихревая система крыла в виде совокупности П-образных вихрей

Поскольку циркуляция скорости в сечении по теореме Стокса равна суммарной интенсивности вихрей, проходящих внутри контура, охватывающего сечение крыла, то интенсивность присоединенных вихрей, заменяющих крыло конечного размаха, изменяется не только по хорде, но и по размаху $\gamma(x, z)$. С другой стороны, на основании теоремы Гельмгольца интенсивность вихрей по длине вихревой трубки не изменяется. Поэтому уменьшение интенсивности присоединенного вихря вдоль размаха крыла возможно только в том случае, если с задней и боковых кромок крыла сходят вихри интенсивностью, соответствующей изменению циркуляции скорости по размаху $(-d\Gamma)$. Эти вихри называются *свободными* и образуют за крылом вихревую пелену.

Исследования вихревой пелены показывают, что она неустойчива и на некотором расстоянии от задней кромки сворачивается в два вихревых шнура (рис. 7.16). При теоретических исследованиях крыло конечного размаха заменяется эквивалентной вихревой системой, состоящей из присоединенных вихрей $\gamma(x, z)$, образующих несущую поверхность, и вихревой пелены, сходящей с задней и боковых кромок крыла, при малых углах атаки — параллельно скорости невозмущенного потока. Подобная вихревая система положена в основу теории несущей поверхности.

В случае крыла достаточно большого удлинения ($\lambda > 3$), пренебрегая изменениям интенсивности присоединенных вихрей по хорде, вихревую поверхность приближенно можно заменить одним присоединенным вихрем (несущей линией) с интенсивностью $\Gamma(z) = \int\limits_0^b \gamma(x, z)\, dx$. Этот вихрь обычно располагают вдоль линии центров давления. Тогда приближенно крыло можно заменить вихревой системой, состоящей из одного присоединенного вихря и вихревой пелены. Такая вихревая система используется в теории несущей линии. Вихревую систему крыла представим также в виде совокупности

П-образных вихрей (рис. 7.17). П-образный вихрь состоит из отрезка присоединенного вихря и двух полубесконечных вихрей, сходящих с концов присоединенного вихря.

Интенсивность каждого такого П-образного вихря постоянна и изменяется при переходе от одного вихря к другому.

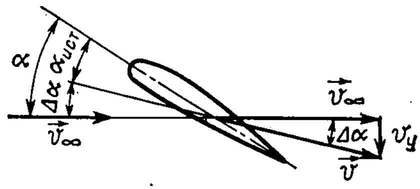


Рис. 7.18. Скос потока и истинный угол атаки

§ 7.9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕСУЩЕЙ ЛИНИИ. ПОНЯТИЯ О СКОСЕ ПОТОКА И ИНДУКТИВНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ КРЫЛА

Рассмотрим обтекание крыла под некоторым углом атаки потоком со скоростью v_∞. В соответствии с теорией несущей линии заменим крыло одним присоединенным вихрем и вихревой пеленой (рис. 7.17). На рис. 7.17 ось x направлена вдоль скорости невозмущенного потока $\vec{v}_\infty$. При этом в окрестности и, в частности, на поверхности крыла скорость $\vec{v} = \vec{v}_\infty + \vec{v}_i$, где $\vec{v}_i$ — скорость, индуцированная вихрями в рассматриваемой точке. Так же как в теории тонкого профиля, на поверхности крыла примем $\vec{v}_i$ равной скорости в точках ее проекции на плоскость xOz. Эта скорость перпендикулярна плоскости xOz (перпендикулярна направлению скорости невозмущенного потока), т. е. $\vec{v}_i = v_y$, и называется *скоростью скоса потока*. Скорость v_y изменяется как по размаху, так и по хорде крыла: $v_y(x, z)$. Однако для крыла достаточно большого удлинения, когда хорда мала по сравнению с размахом, изменением скорости v_y по хорде в пределах одного и того же сечения можно пренебречь, считая ее постоянной и равной скорости скоса потока от свободных вихрей на оси присоединенного вихря. При этом v_y изменяется по размаху: $v_y(z)$.

Выясним, какие изменения в характер обтекания крыла вносит появление скорости v_y. Для этого рассмотрим произвольнсе сечение крыла (рис. 7.18). Наличие скорости v_y здесь приводит к отклонению потока на угол $\Delta\alpha$, называемый *углом скоса потока*.

Так как угол $\Delta\alpha$ мал, то $\Delta\alpha \approx \mathrm{tg}\Delta\alpha = v_y/v_\infty$. В результате изменяется угол атаки сечений и крыла в целом. Истинный угол атаки $\alpha_{ист} = \alpha - \Delta\alpha$.

Воспользуемся теперь гипотезой плоских сечений, заключающейся в том, что при обтекании крыла каждое его сечение можно считать сечением крыла бесконечного размаха с соответствующим истинным углом атаки. Поэтому аэродинамические характеристики сечений крыла конечного размаха будем определять как характеристики профиля с учетом истинного угла атаки. Это основное положение теории несущей линии справедливо для крыльев достаточно большого удлинения ($\lambda > 3$) и при малых углах атаки.

Для крыла бесконечного размаха вектор результирующей силы согласно теореме Жуковского нормален к направлению невозмущен-

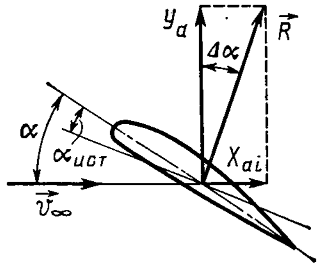


Рис. 7.19. Индуктивное сопротивление крыла

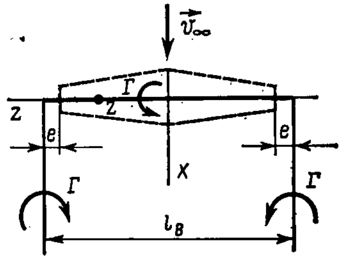


Рис. 7.20. Вихревая система крыла для приближенного определения среднего угла скоса потока

ного потока. Тогда при наличии скоса потока вектор результирующей силы должен быть перпендикулярен направлению истинной скорости $\vec{v}$. Следовательно, скос потока приводит к отклонению результирующей силы от направления, перпендикулярного скорости невозмущенного потока, на угол $\Delta\alpha$ (рис. 7.19). В результате появляется проекция силы вдоль направления невозмущенного потока. Эта дополнительная сила $X_{ai} \approx Y_a\Delta\alpha$, которая возникает из-за скоса потока, называется индуктивным сопротивлением. Если эту силу разделить на скоростной напор и площадь $\rho v_\infty^2 S/2$, то получим величину коэффициента индуктивного сопротивления:

$$c_{xai} = X_i/(\rho v_\infty^2 S/2) = c_{ya}\Delta\alpha. \tag{7.57}$$

Таким образом, сопротивление крыла конечного размаха состоит из профильного c_{xap} и индуктивного сопротивлений, обусловленных скосом потока, т. е. для крыла конечного размаха $c_{xa} = c_{xap} + c_{xai}$. У крыла бесконечного размаха, где скос потока отсутствует, индуктивное сопротивление равно нулю.

Выведем приближенные соотношения, позволяющие оценить значения угла скоса потока, производной c_{ya}^α и коэффициента c_{xai}. Для этого приближенно заменим крыло простейшей вихревой системой — одним П-образным вихрем (рис. 7.20). Циркуляция скорости П-образного вихря при этом определяется из условия равенства подъемной силы крыла силе, создаваемой П-образным вихрем: $Y_a = c_{ya}\rho v_\infty^2 S/2 = \rho v_\infty \Gamma l_в$, отсюда

$$\Gamma = (1/2)\, c_{ya} S v_\infty / l_в. \tag{7.58}$$

Расстояние между свободными вихрями при такой замене должно быть больше размаха крыла: $l_в = l + 2e$, где $e = (0{,}02 \div 0{,}04)l/2$.

Скорость скоса потока $v_y(z)$ в произвольной точке несущей линии, вызываемая правым и левым полубесконечными свободными вихрями, определяется по формуле Био — Савара (2.36):

$$v_y(z) = \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\frac{1}{l/2 + e + z} + \frac{1}{l/2 + l - z}\right), \tag{7.59}$$

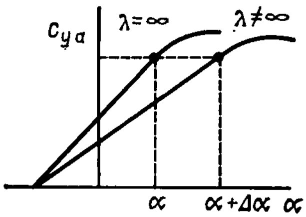


Рис. 7.21. Коэффициенты подъемной силы крыла конечного и бесконечного размаха

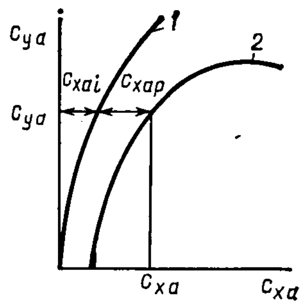


Рис. 7.22. Парабола индуктивного сопротивления *1* и поляра крыла *2*

а средняя по размаху крыла скорость скоса потока

$$v_y = \frac{1}{l} \int\limits_{-l/2}^{l/2} v_y(z)\, dz,$$

или, заменяя $v_y(z)$ выражением (7.59), имеем

$$v_y = \frac{\Gamma}{2\pi l} \ln \frac{l+e}{e}.$$

Подставим в эту формулу выражение циркуляции скорости (7.58). Кроме того, учтем, что $l_в = l(1 + 2e/l)$, а $l^2/S = \lambda$. При $e = 0{,}04l/2$ ориентировочно принимаем $\frac{1}{1+2e/l} \ln \frac{l+e}{e} \approx 4$. Тогда

$$v_y = c_{ya} v_\infty/(\pi\lambda); \tag{7.60}$$

$$\Delta\alpha = c_{ya}/(\pi\lambda). \tag{7.61}$$

Формулы (7.60) и (7.61) позволяют оценить значения скорости и угла скоса потока. Очевидно, что чем больше удлинение, тем меньше угол скоса потока. При $c_{ya} = 0$ угол $\Delta\alpha = 0$, а с увеличением коэффициента подъемной силы угол скоса потока увеличивается.

Используя выражение (7.61), выведем формулу для определения коэффициента подъемной силы. Для этого в формуле (7.51) заменим геометрический угол атаки α истинным углом атаки $\alpha_{ист} = \alpha - \Delta\alpha = \alpha - c_{ya}/(\pi\lambda)$. Тогда $c_{ya} = [2\pi(\alpha - \alpha_0)]/(1 + 2/\lambda)$. Дифференцируя по α, имеем

$$c_{ya}^{\alpha} = 2\pi\lambda/(\lambda + 2). \tag{7.62}$$

Отсюда следует, что с уменьшением удлинения коэффициент подъемной силы крыла уменьшается. Для получения одной и той же подъемной силы при прочих равных условиях крыло конечного размаха должно иметь больший угол атаки $\alpha + \Delta\alpha$, чем крыло бесконечного размаха (рис. 7.21).

Выведем также выражение для определения коэффициента индуктивного сопротивления. Для этого подставим выражение (7.61) в формулу (7.57):

$$c_{xai} = c_{ya}^2/(\pi\lambda). \tag{7.63}$$

Таким образом, значение коэффициента индуктивного сопротивления тем меньше, чем больше удлинение крыла. В зависимости от c_{ya} коэффициент c_{xai} изменяется по параболическому закону. Кривая $c_{xai} = f(c_{ya})$ называется *параболой индуктивного сопротивления*, а кривая полного коэффициента сопротивления крыла в зависимости от коэффициента подъемной силы $c_{xa} = F(c_{ya})$ — *полярой крыла* (рис. 7.22).

Следует иметь в виду, что формулы (7.62) и (7.63) являются приближенными и не учитывают влияния формы крыла в плане. Однако основные зависимости коэффициентов c_{ya} от λ, а c_{xai} от c_{ya} и λ представлены в них точно. Более того, как показано ниже, формулы (7.61) и (7.63) совпадают с соответствующими формулами, полученными по теории несущей линии для крыльев с эллиптическим законом распределения циркуляции по размаху. В этом случае угол скоса потока постоянен вдоль размаха и определяется по формуле (7.61), а индуктивное сопротивление имеет минимальное значение по сравнению с любой другой формой крыла в плане и вычисляется по формуле (7.63).

Применительно к крыльям произвольной формы в плане для определения производной c_{ya}^{α} вместо формулы (7.62) можно пользоваться следующим приближенным соотношением:

$$c_{ya}^{\alpha} = 2\pi\lambda/(P\lambda + 2), \tag{7.64}$$

где P — поправка, учитывающая влияние формы крыла в плане и представляющая собой отношение полупериметра крыла к его размаху.

Для крыльев с прямой нестреловидной задней кромкой

$$P = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{\lambda}\,\frac{4}{\eta + 1} + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\eta - 1}{\eta + 1}\right)^2}\,\right]. \tag{7.65}$$

При $\lambda \to 0$ по формуле (7.64) можно получить предельное значение производной c_{ya}^{α} для крыльев достаточно малого удлинения: $\lambda \ll 1$.

Из выражения (7.65) следует, что для треугольного крыла ($\eta = \infty$) при $\lambda \to 0$ значение $P\lambda \to 2$. Тогда

$$c_{ya}^{\alpha} = \pi\lambda/2. \tag{7.66}$$

Эта формула совпадает с формулой, полученной по теории тонкого тела [34], и дает удовлетворительные результаты при $\lambda < 1$.

Отметим, что формулы (7.62)—(7.64) являются приближенными. Поэтому ими можно пользоваться только для расчетов с целью приближенной оценки величин c_{ya}^{α} и c_{xai}.

§ 7.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ И ИНДУКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КРЫЛА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НЕСУЩЕЙ ЛИНИИ

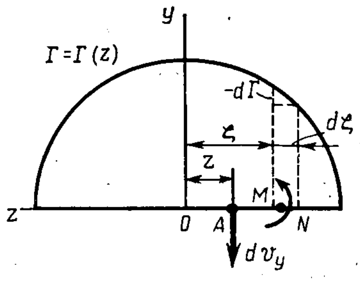


Рис. 7.23. Элементарная скорость скоса потока при $\Gamma = \Gamma(z)$

Если рассматривать крыло произвольной формы в плане, то циркуляция Γ по размаху крыла будет изменяться, т. е. $\Gamma = \Gamma(z)$. Получим основные соотношения, определяющие скос потока, подъемную силу Y_a и индуктивное сопротивление X_{ai} такого крыла.

Рассмотрим проекцию крыла на плоскость yz (рис. 7.23). Вдоль размаха крыла циркуляция Γ меняется по закону $\Gamma = \Gamma(z)$. Рассмотрим действие системы вихрей (вихревой пелены), сбегающей с крыла, на произвольную точку A. Очевидно, с каждого элемента крыла сбегает элементарный вихрь с циркуляцией $-d\Gamma$. Если положение точки A характеризуется координатой z, а положение элементарного вихря, сбегающего с участка крыла $d\zeta$, — координатой ζ, то выражение для скорости, индуцированной этим вихрем в точке A, очевидно, имеет вид $dv_y = -d\Gamma/[4\pi(\zeta - z)]$.

Скорость в точке A, индуцированная всей вихревой пеленой,

$$v_y = -\frac{1}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{(d\Gamma/d\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (7.67)$$

где Γ — функция ζ, а z — координата для данной точки A.

Скорость скоса потока также изменяется по размаху крыла, т. е. $v_y = v_y(z)$.

Для нахождения угла скоса $\Delta\alpha$ и истинного угла атаки, которые в общем случае также изменяются вдоль размаха крыла, можно воспользоваться формулами

$$\Delta\alpha = v_y/v_\infty; \qquad (7.67')$$

$$\alpha_{\text{ист}} = \alpha - \Delta\alpha, \qquad (7.68)$$

где α — угол атаки, определяемый по направлению скорости на бесконечности.

В общем случае угол атаки α также может изменяться вдоль размаха, например если крыло имеет геометрическую крутку.

Подставляя в формулу (7.67′) v_y из (7.67), получаем угол скоса потока для сечения крыла в виде

$$\Delta\alpha(z) = -\frac{1}{4\pi v_\infty}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{(d\Gamma/d\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (7.69)$$

Тогда средний по размаху крыла угол

$$\Delta\alpha = \frac{1}{l} \int\limits_{-l/2}^{l/2} \Delta\alpha(z)\, dz. \qquad (7.69')$$

Для нахождения подъемной силы и индуктивного сопротивления выделим элементарный участок крыла dz. Подъемную силу, действующую на этот участок, найдем по формуле Жуковского:

$$dY_{\text{a}} = \rho v_\infty \Gamma(z)\, dz; \qquad (7.70)$$

следовательно, для всего крыла

$$Y_{\text{a}} = \rho v_\infty \int\limits_{-l/2}^{l/2} \Gamma(z)\, dz. \qquad (7.71)$$

Элементарная сила индуктивного сопротивления $dX_{\text{a}i} = dY_{\text{a}}\Delta\alpha(z)$. Подставляя сюда выражения (7.69) и (7.70), имеем

$$dX_{\text{a}i} = -\frac{\rho}{4\pi}\Gamma(z)\, dz \int\limits_{-l/2}^{l/2} \frac{(d\Gamma/d\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Полная сила индуктивного сопротивления

$$X_{\text{a}i} = -\frac{\rho}{4\pi} \int\limits_{-l/2}^{l/2} \Gamma(z) \left[\int\limits_{-l/2}^{l/2} \frac{(d\Gamma/d\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \right] dz. \qquad (7.72)$$

Как видим, аэродинамические характеристики крыла Y_{a}, $X_{\text{a}i}$ можно определить, если известен закон изменения циркуляции, т. е. функция $\Gamma = \Gamma(z)$, так как все они зависят от этой функции.

Выведем уравнение, позволяющее найти функцию $\Gamma(z)$. Для этого составим выражение элементарной подъемной силы по формуле Жуковского $dY_{\text{a}} = \rho\Gamma(z)v_\infty dz$ и через коэффициент подъемной силы сечения $c_{y\text{a}}$, т. е. $dY_{\text{a}} = c_{y\text{a}}(z)\ (\rho v_\infty^2/2) b(z) dz$. Приравнивая эти выражения, получаем уравнение

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2}\, c_{y\text{a}}(z)\, b(z)\, v_\infty, \qquad (7.73)$$

устанавливающее связь между циркуляцией скорости и коэффициентом подъемной силы в сечении крыла.

Согласно гипотезе плоских сечений, на линейном участке зависимости $c_{y\text{a}}(\alpha)$

$$c_{y\text{a}}(z) = a_0 \alpha_{\text{ист}} = a_0(\alpha - \Delta\alpha), \qquad (7.74)$$

где a_0 — тангенс угла наклона прямолинейного участка кривой $c_{y\text{a}}(\alpha)$ для крыла бесконечного размаха (профиля).

В формуле (7.74) угол α отсчитывается от угла нулевой подъемной силы, а угол скоса потока $\Delta\alpha$ для данного сечения определяется по формуле (7.69). Тогда, подставляя выражение (7.74) в уравнение

(7.73), получаем уравнение для циркуляции скорости в следующем виде:

$$\Gamma(z) = \frac{a_0 b(z) v_\infty}{2} \left[\alpha(z) + \frac{1}{4\pi v_\infty} \int\limits_{-l/2}^{l/2} \frac{(d\Gamma/d\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}\right]. \tag{7.75}$$

Это уравнение носит название основного *интегро-дифференциального уравнения* крыла конечного размаха. Оно позволяет установить закон распределения циркуляции скорости по размаху крыла заданной формы в плане при условии, что известны функция $a_0(z)$, т. е. набор профилей по размаху, а также $\alpha(z)$ при наличии геометрической и аэродинамической крутки крыла.

Одним из распространенных методов решения уравнения (7.75) является метод, основанный на представлении неизвестной циркуляции скорости в виде тригонометрического ряда:

$$\Gamma = 2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta, \tag{7.76}$$

где A_1, A_2, A_n — постоянные коэффициенты, подлежащие определению, а $\theta = \arccos(-2\zeta/l)$ — новая переменная.

В результате подстановки ряда (7.76) в уравнение (7.75) получаем алгебраическое уравнение, содержащее в качестве неизвестных коэффициенты ряда A_n.

Как показывают расчеты, коэффициенты ряда (7.76) быстро убывают. Поэтому бесконечный ряд можно заменить конечной суммой из N членов. Тогда для определения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, ..., A_N полученное алгебраическое уравнение необходимо составить для N сечений крыла по числу неизвестных коэффициентов. В результате будем иметь систему из N алгебраических уравнений. Подробно метод расчета коэффициентов A_n изложен в [2].

Зная коэффициенты A_n, а по ним и распределение циркуляции по размаху (7.76), можно определить подъемную силу (7.71), индуктивное сопротивление (7.72) и угол скоса потока (7.69) и (7.69′).

Переходя в формуле (7.71) от переменной z к переменной $\theta (dz = (l/2)\sin\theta d\theta)$ и подставляя вместо Γ выражение (7.76), получаем:

$$Y_a = \rho v_\infty^2 l \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int\limits_0^\pi \sin n\theta \sin\theta d\theta.$$

Так как $\int\limits_0^\pi \sin n\theta \sin\theta d\theta = \begin{cases}\pi/2 \text{ при } n = 1; \\ 0 \text{ при } n \neq 1,\end{cases}$ то

$$Y = (\rho v_\infty^2/2)\, l^2 \pi A_1.$$

Отсюда коэффициент подъемной силы крыла

$$c_{ya} = \pi\lambda A_1. \tag{7.77}$$

Таким образом, подъемная сила крыла конечного размаха выражается только через первый коэффициент разложения циркуляции в тригонометрический ряд. Остальные коэффициенты, не изменяя общего значения подъемной силы, влияют лишь на характер распределения циркуляции по крылу, следовательно, на распределение аэродинамической нагрузки по размаху крыла.

Используя выражения (7.69), (7.76) и заменяя переменные ζ и z на переменные θ и θ_1, а также учитывая, что

$$\int\limits_0^\pi \cos n\theta d\theta/(\cos\theta - \cos\theta_1) = \pi \sin n\theta_1/\sin\theta_1,$$

найдем угол скоса потока в сечении крыла:

$$\Delta\alpha(z) = -\frac{1}{4\pi v_\infty}\int\limits_{-l/2}^{l/2}\frac{(d\Gamma/d\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta_1}{\sin\theta_1}. \tag{7.78}$$

Тогда, подставив выражение (7.78) в формулу (7.69′), получим средний по размаху крыла угол скоса потока:

$$\Delta\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n, \text{ или } \Delta\alpha = A_1\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_n}{A_1}\right).$$

Заменяя A_1, согласно формуле (7.77), выражением $A_1 = c_{ya}/(\pi\lambda)$ окончательно имеем

$$\Delta\alpha = [c_{ya}/(\pi\lambda)](1 + \tau), \tag{7.79}$$

где $\tau = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{A_n}{A_1}$.

Используя формулы (7.72), (7.76), (7.78) и переходя от переменных ζ и z к переменным θ и θ_1, представим индуктивное сопротивление в виде

$$X_{ai} = \rho v_\infty^2 l^2 \int\limits_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta_1\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} mA_m \sin m\theta_1\right) d\theta_1,$$

где первая сумма определяет циркуляцию скорости, а вторая — угол скоса потока в сечении крыла.

Отсюда, учитывая, что

$$\int\limits_0^\pi m \sin n\theta_1 \sin m\theta_1 d\theta_1 = \begin{cases} n\pi/2 & \text{при } n = m; \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

будем иметь

$$X_{ai} = \frac{\rho v_\infty^2}{2} \pi l^2 \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2.$$

Коэффициент индуктивного сопротивления

$$c_{xai} = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2.$$

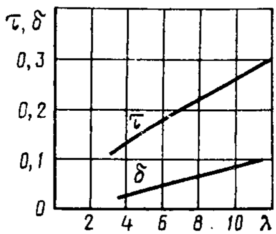


Рис. 7.24. Поправки τ и δ для прямоугольного крыла

Умножив и разделив правую часть в последнем выражении на A_1^2 и замечая, что $A_1 = c_{ya}/(\pi\lambda)$, получим

$$c_{xai} = [c_{ya}^2/(\pi\lambda)](1+\delta), \tag{7.80}$$

где $\delta = \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{A_n^2}{A_1^2}$.

В формулах (7.79) и (7.80) значения поправок τ и δ зависят от формы крыла в плане. При эллиптическом законе распределения циркуляции по размаху крыла коэффициенты A_n, за исключением A_1, равны нулю. В этом случае $\tau = 0$ и $\delta = 0$. Очевидно, что множитель $(1+\delta)$ в формуле (7.80) показывает, во сколько раз коэффициент индуктивного сопротивления данного крыла больше коэффициента индуктивного сопротивления крыла с эллиптическим законом распределения циркуляции по размаху при одинаковых значениях коэффициента c_{ya} и удлинения λ.

На рис. 7.24 в качестве примера приведена зависимость поправок τ и δ от λ для прямоугольного крыла.

§ 7.11. ФОРМА КРЫЛА В ПЛАНЕ С НАИМЕНЬШИМ ИНДУКТИВНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

При заданном значении c_{ya} крыла, очевидно, коэффициент c_{xai} минимален, если $\delta = 0$. В этом случае, согласно формуле (7.80), все коэффициенты A_n, за исключением A_1, равны нулю и циркуляция $\Gamma(z)$ выражается только через первый член ряда $\Gamma = 2lv_\infty A_1 \sin\theta$. Отсюда при $\theta = \pi/2$ циркуляция в корневом сечении крыла; $\Gamma_0 = 2lv_\infty A_1$, т. е. $A_1 = \Gamma_0/(2lv_\infty)$.

Так как $\bar{z} = 2z/l = -\cos\theta$, то $\Gamma = 2lv_\infty A_1 \sqrt{1-\bar{z}^2}$.

Учитывая, что A_1 в данном случае равно $\Gamma_0/(2lv_\infty)$, получаем

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1-\bar{z}^2}. \tag{7.81}$$

Как видим, циркуляция $\Gamma(z)$ изменяется по размаху, следуя эллиптическому закону, т. е. крыло имеет наименьшее индуктивное сопротивление при эллиптическом распределении циркуляции по размаху.

Подъемная сила крыла с эллиптическим распределением циркуляции определяется по формуле

$$Y_а = \rho v_\infty \int\limits_{-l/2}^{l/2} \Gamma(z)\, dz = \frac{\pi}{4} \rho v_\infty l \Gamma_0,$$

а коэффициент подъемной силы

$$c_{yа} = (\pi/2)\Gamma_0/(v_\infty b_{ср}). \qquad (7.82)$$

Здесь $b_{ср}$— средняя хорда крыла, $b_{ср} = S/l$.

В этом случае угол скоса потока (7.78) постоянен по размаху: $\Delta\alpha = A_1 = \Gamma_0/(2lv_\infty)$, или, представляя Γ_0, согласно формуле (7.82), через коэффициент $c_{yа}$,

$$\Delta\alpha = c_{yа}/(\pi\lambda). \qquad (7.83)$$

Имея в виду, что для любого сечения крыла $\Gamma(z) = (1/2)c_{yа}(z)v_\infty b(z)$, получаем, что эллиптического закона распределения циркуляции вдоль размаха крыла можно достичь путем соответствующего изменения величин $c_{yа}$и $b(z)$. При постоянном значении $c_{yа}$ вдоль размаха крыло должно иметь эллиптическую форму в плане: $b = b_0\sqrt{1 - \bar{z}^2}$, где $b_0 = 4A_1 l/c_{yа}$.

Отметим, что приведенные результаты теории несущей линии и более приближенные зависимости, рассмотренные в § 7.9, весьма полезны, так как они обладают достаточной простотой и потому позволяют получить представление как о характере обтекания крыла конечного размаха и процессе возникновения подъемной силы и индуктивного сопротивления, так и о зависимостях аэродинамических характеристик от формы крыла в плане и удлинения. Однако теория несущей линии дает удовлетворительные результаты только применительно к крыльям большого удлинения и со сравнительно небольшими углами стреловидности. Более точные сведения о распределенных и суммарных аэродинамических характеристиках стреловидных крыльев как большого, так и малого удлинения можно получить на основе теории несущей поверхности.

§ 7.12. ТЕОРИЯ НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

В общем случае для определения аэродинамических характеристик крыло необходимо заменить более сложной вихревой системой — вихревой поверхностью или присоединенными вихрями, интенсивность которых непрерывно изменяется как по размаху, так и по хорде, и вихревой пеленой, состоящей из свободных вихрей, сходящих с задней кромки и простирающихся до бесконечности.

Рассмотрим обтекание тонкого слабоизогнутого крыла при малом угле атаки. В этом случае, так же как для тонкого профиля, граничные условия безотрывности обтекания (условия непротекания) можно

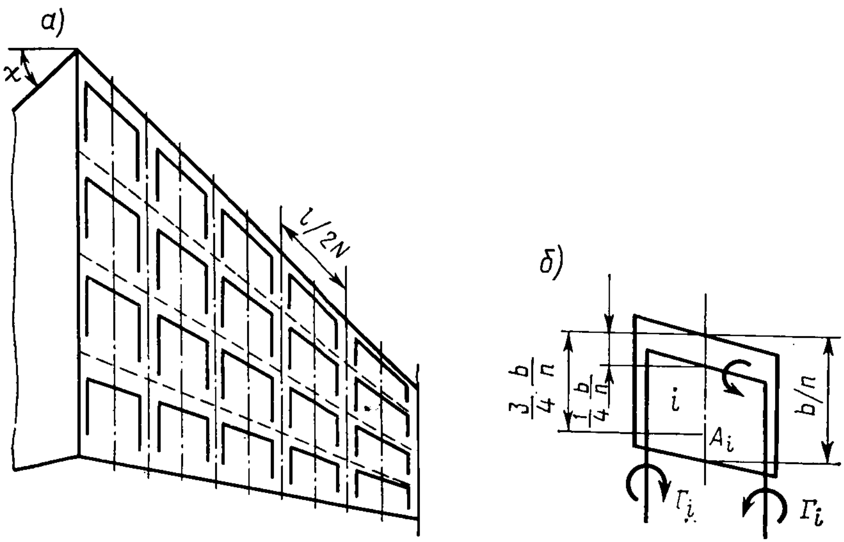


Рис. 7.25. Замена крыла косыми подковообразными вихрями (*а*) и косой подковообразный вихрь (*б*):

A_i — контрольная точка, в которой удовлетворяется граничное условие непротекания

удовлетворять в точках срединной поверхности, т. е. поверхности, проведенной через средние линии сечений крыла, а индуцированные скорости v_y определять в проекциях этих точек на плоскость xOz.

Заменим непрерывную вихревую поверхность приближенной системой дискретных вихрей. Для этого разобьем крыло на ряд ячеек, выбирая N полос по полуразмаху шириной $l/(2N)$ и n панелей в каждой полосе с размером вдоль хорды, равным b/n. На каждой ячейке разместим косой подковообразный вихрь интенсивностью Γ_i. Здесь i — номер косого подковообразного вихря $1 \leqslant i \leqslant nN$.

Расположение вихрей и контрольных точек, в которых удовлетворяются граничные условия непротекания, показаны на рис. 7.25. Присоединенный вихрь располагается на расстоянии $^1/_4$ ширины ячейки от ее передней границы $[^1/_4(b/n)]$, а контрольные точки выбираются посередине полосы на расстоянии $^3/_4(b/n)$ от той же границы. На рис. 7.25 свободные вихри, идущие от присоединенного вихря вниз по потоку до бесконечности, условно оборваны.

Рассматриваемая вихревая модель удобна для расчета аэродинамических характеристик на электронных цифровых машинах. Это объясняется прежде всего тем, что здесь обтекание крыла описывается набором простых особенностей в виде косых подковообразных вихрей.

При обтекании крыла симметричной формы в плане под углом атаки в симметричных точках правого и левого полукрыльев циркуляции Г одинаковы. Поэтому граничные условия достаточно удовлетворить только на правой половине крыла с учетом влияния левой.

При этом количество неизвестных Г равно nN. Для определения Γ_i используются граничное условие безотрывности обтекания ($v_n = 0$) в выбранных контрольных точках, количество которых также равно nN.

Нормальная составляющая скорости

$$v_n = v_x \cos(\widehat{nx}) + v_y \cos(\widehat{ny}) + v_z \cos(\widehat{nz}), \tag{7.84}$$

где $\cos(\widehat{nx})$, $\cos(\widehat{ny})$, $\cos(\widehat{nz})$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности.

Пусть $y = f(x, z)$ — уравнение срединной поверхности крыла в связанной системе осей координат. Для тонкого слабоизогнутого крыла $\cos(\widehat{nx}) = -\partial f/\partial x$, $\cos(\widehat{ny}) = 1$, $\cos(\widehat{nz}) = -\partial f/\partial z$. Тогда, подставляя в формулу (7.84) выражения направляющих косинусов, а также составляющих скорости $v_x = v_\infty + v_x'$, $v_y = v_\infty \alpha + v_y'$, $v_z = v_z'$ и пренебрегая малыми второго порядка, получаем $v_n = -v_\infty \partial f/\partial x + v_y' + v_\infty \alpha$. Приравнивая v_n нулю, имеем

$$v_y'/v_\infty = -\alpha(x, z), \tag{7.85}$$

где $\alpha(x,z) = (\alpha - \partial f/\partial x)$ — местный угол атаки в контрольных точках, а $v_y' = \sum_{n=1}^{nN} (v_{yi} + \Delta v_{yi})$. Здесь v_{yi} и Δv_{yi} — составляющие скорости, индуцируемые в данной контрольной точке соответственно i-м косым подковообразным вихрем правого крыла и симметричным вихрем левого крыла. Скорости v_{yi} и Δv_{yi} пропорциональны Γ_i.

Расчетные формулы для определения индуцированных скоростей, выведенные на основе формулы Био — Савара, приведены в [7].

Используя граничное условие (7.85), получаем систему nN алгебраических уравнений для определения Γ_i.

В результате решения системы уравнений для крыла заданной формы в плане и срединной поверхности найдем Γ_i, после чего нетрудно вычислить аэродинамические характеристики c_{ya}, m_z как крыла в целом, так и его сечений $\Gamma_{сеч}$, $c_{ya\,сеч}$, $m_{z\,сеч}$.

При расчете Γ_i удобно ввести безразмерную величину $\overline{\Gamma}_i = \Gamma_i / l_i v_\infty$, где $l_i = l/2N$ — размах i-го подковообразного вихря. Безразмерную величину можно представить в виде

$$\overline{\Gamma}_i = \overline{\Gamma}_i^\alpha \alpha + \overline{\Gamma}_{0i}. \tag{7.86}$$

Здесь $\overline{\Gamma}_{0i}$ — значение Γ_i при $\alpha = 0$, а $\overline{\Gamma}_i^\alpha$ — производная $\overline{\Gamma}_i$ по углу атаки. Первый член выражения (7.86) учитывает влияние угла атаки, а второй — формы срединной поверхности.

Для плоского крыла $\overline{\Gamma}_{0i} = 0$. Тогда $\overline{\Gamma}_i = \overline{\Gamma}_i^\alpha\,\alpha$.

Приведем формулы для распределенных и суммарных аэродинамических характеристик плоского крыла. Циркуляция скорости в заданном сечении крыла $z = \text{const}$

$$\Gamma_{\text{сеч}} = \sum_{i_{\text{сеч}}} \Gamma_i = \frac{lv_\infty}{2N} \sum_{i_{\text{сеч}}} \overline{\Gamma}_i^\alpha \alpha, \tag{7.87}$$

где $i_{\text{сеч}}$ означает, что суммирование происходит по сечению крыла.

Для производной коэффициента подъемной силы сечения, используя уравнение $c_{ya\,\text{сеч}} = 2\Gamma_{\text{сеч}}/(v_\infty b_{\text{сеч}})$, получим следующую формулу:

$$c_{ya\,\text{сеч}}^\alpha = \frac{1}{N} \frac{l}{b_{\text{сеч}}} \sum_{i_{\text{сеч}}} \overline{\Gamma}_i^\alpha \tag{7.88}$$

Продольный момент сечения относительно оси Oz

$$M_{z\,\text{сеч}} = \sum_{i_{\text{сеч}}} \rho v_\infty \Gamma_i dz x_i = \sum_{i_{\text{сеч}}} \rho v_\infty^2 l_i \overline{\Gamma}_i^\alpha \alpha dz x_i.$$

Коэффициент момента

$$m_{z\,\text{сеч}} = M_{z\,\text{сеч}} / [(\rho v_\infty^2/2)\, b_{\text{сеч}}^2 dz],$$

или

$$m_{z\,\text{сеч}} = \frac{1}{N} \frac{l}{b_{\text{сеч}}} \sum_{i_{\text{сеч}}} \overline{\Gamma}_i^\alpha \alpha \frac{x_i}{b_{\text{сеч}}},$$

а производная коэффициента продольного момента сечения относительно оси Oz

$$m_{z\,\text{сеч}}^\alpha = \frac{1}{N} \frac{l}{b_{\text{сеч}}} \sum_{i_{\text{сеч}}} \Gamma_i^\alpha \frac{x_i}{b_{\text{сеч}}}. \tag{7.89}$$

Здесь x_i — координата середины i-го вихря вдоль оси x.

Зная значения производных $c_{ya\,\text{сеч}}^\alpha$ и $m_{z\,\text{сеч}}^\alpha$, легко определить положение фокуса сечения крыла: $\overline{x}_{F\,\text{сеч}} = -m_{z\,\text{сеч}}^\alpha / c_{y\,\text{сеч}}^\alpha$, где $\overline{x}_F = x_F/b_{\text{сеч}}$ — безразмерная координата фокуса относительно начала координат. Очевидно, что для плоского крыла центр давления совпадает с фокусом.

Используя выражения (7.88) и (7.89), можно получить формулы для производных c_{ya}^α и m_z^α крыла в целом.

Представим суммарную подъемную силу Y_a и момент M_z в следующем виде:

$$Y_a = 2 \int_0^{l/2} c_{ya\,\text{сеч}}^\alpha \alpha \frac{\rho v_\infty^2}{2} b_{\text{сеч}} dz; \quad M_z = 2 \int_0^{l/2} m_{z\,\text{сеч}}^\alpha \alpha \frac{\rho v_\infty^2}{2} b_{\text{сеч}}^2 dz.$$

Отсюда

$$c_{ya}^\alpha = \frac{2}{S} \int_0^{l/2} c_{ya\,\text{сеч}}^\alpha b_{\text{сеч}} dz; \quad m_z^\alpha = \frac{2}{Sb} \int_0^{l/2} m_{z\,\text{сеч}}^\alpha b_{\text{сеч}}^2 dz,$$

где b — характерная хорда крыла.

Подставляя сюда выражения (7.88), (7.89) и переходя от интегралов к суммам с заменой dz на $l_i = l/2N$, получаем:

$$c_{ya}^{\alpha} = \frac{\lambda}{N^2} \sum_{i=1}^{nN} \overline{\Gamma}_i^{\alpha}; \tag{7.90}$$

$$m_z^{\alpha} = \frac{\lambda}{N^2} \sum_{i=1}^{nN} \Gamma_i^{\alpha} \frac{x_i}{b}. \tag{7.91}$$

Здесь $\lambda = l^2/S$.

Относительная координата фокуса крыла определяется из уравнения $M_z^{\alpha}\alpha = -Y^{\alpha} x_F$. Отсюда

$$\overline{x}_F = -m_z^{\alpha} / c_{ya}^{\alpha}. \tag{7.92}$$

Перейдем теперь к рассмотрению возможности вычисления коэффициента индуктивного сопротивления. Теория несущей поверхности позволяет найти два предельных значения индуктивного сопротивления — без учета так называемой подсасывающей силы и с учетом полностью реализованной подсасывающей силы. В зависимости от характера профилирования передней кромки крыла значение коэффициента индуктивного сопротивления находится между этими предельными теоретическими значениями.

Поясним физически механизм возникновения подсасывающей силы.

При обтекании передней кромки частицы жидкости протекают из области повышенного давления под крылом в область пониженного давления над крылом, огибая его переднюю кромку. При этом местные скорости потока возрастают, вследствие чего в этой области возникает разрежение. В результате появляется проекция сил давления, направленная навстречу набегающему потоку, т. е. подсасывающая сила.

При уменьшении толщины крыла разрежение, развивающееся около передней кромки, возрастает, а площадь лобовой проекции, на которую оно может действовать, становится меньше, причем их произведение остается почти постоянным и конечным до предельной нулевой толщины. Появление конечной подсасывающей силы в предельном случае нулевой толщины объясняется тем, что при этом в окрестности передней кромки скорости и разрежения стремятся к бесконечности. Хотя толщина крыла бесконечно мала, силы давления дают конечную подсасывающую силу, т. е. силу, направленную вперед.

Продемонстрируем появление подсасывающей силы на простом примере — пластинке бесконечного размаха (рис. 7.26). Согласно теореме Жуковского, на пластинку действует сила Y_a, перпендикулярная скорости набегающего потока. С другой стороны, суммарная

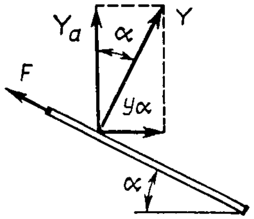


Рис. 7.26. Схема сил, действующих на плоскую пластинку:
F — подсасывающая сила

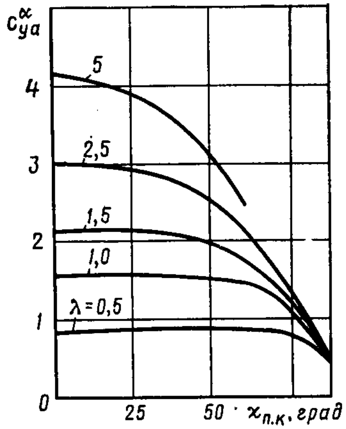


Рис. 7.27. Влияние угла стреловидности на несущие свойства крыла при различных удлинениях:
$\eta=1$; c_{ya}^{α} — производная по углу атаки, измеренному в радианах

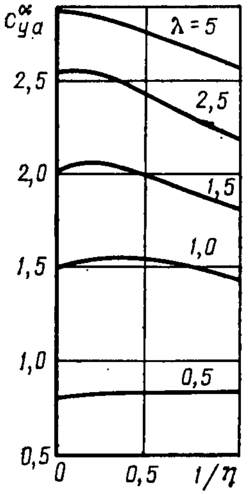


Рис. 7.28. Влияние сужения на несущие свойства крыла при различных удлинениях:
$\chi_{п.к}=60°$; c_{ya}^{α} — производная по углу атаки, измеренному в радианах

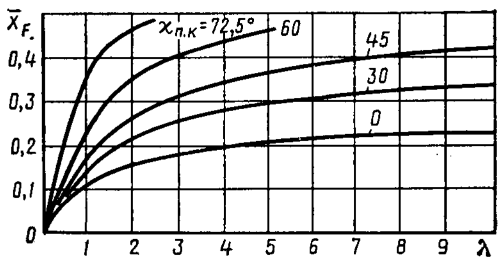


Рис. 7.29. Относительная координата фокуса стреловидных крыльев при $\eta=\infty$

сила давления Y должна быть перпендикулярна пластинке. Расхождение результатов объясняется подсасывающей силой. В теореме Жуковского она учитывается автоматически, а при определении силы Y она не учтена. Для крыла бесконечного размаха, когда сопротивление в идеальной несжимаемой жидкости отсутствует, подсасывающая сила равна проекции силы Y на направление скорости набегающего потока, т. е. $Y\sin\alpha$ или при малых углах атаки $F = Y\alpha$.

При реальном обтекании крыла с острой передней кромкой бесконечных разрежений быть не может. На малых углах атаки в окре-

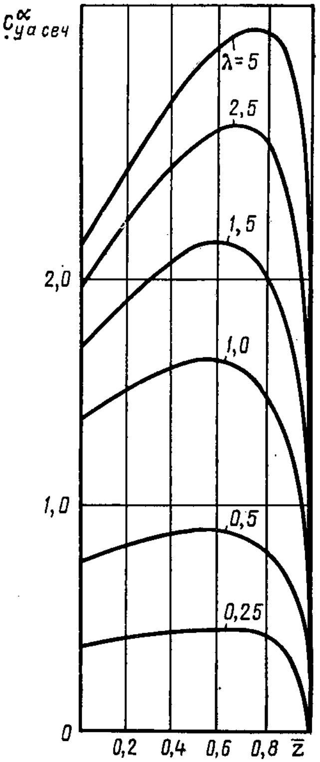


Рис. 7.30. Влияние удлинения крыла на несущие свойства его сечений: $\chi_{п.к}=60°$; $\eta=2$

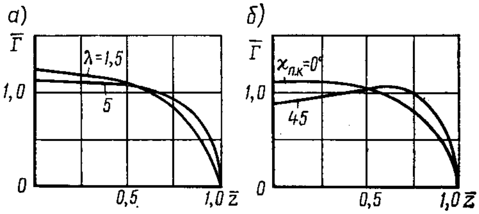


Рис. 7.31. Распределение $\overline{\Gamma} = c_{ya\,сеч} b_{сеч} c_{ya}/b_{ср}$ по размаху крыльев: *а* — при различных удлинениях для $\chi_{п.к}=60°$, $\eta=2$; *б* — при различных углах стреловидности для $\lambda=5$ и $\eta=1$

стности передних кромок образуется местный отрыв потока, в результате которого разрежение уменьшается, подсасывающая сила практически не реализуется.

Таким образом, предельные значения коэффициента индуктивного сопротивления соответствуют без учета подсасывающей силы крыльям с заостренными передними кромками, а с учетом подсасывающей силы — хорошо профилированным плавным передним кромкам. В первом случае $X_{ai} = Y_a\alpha$ и $c_{xai} = c_{ya}\alpha$. Для плоских крыльев, представляя $c_{ya} = c^{\alpha}_{ya}\alpha$ и $\alpha = c_{ya}/c^{\alpha}_{ya}$, получаем

$$c_{xai} = c^2_{ya}/\, c^{\alpha}_{ya}\,. \tag{7.93}$$

Здесь c^{α}_{ya} — производная коэффициента подъемной силы по углу атаки, выраженному в радианах.

При полностью реализованной подсасывающей силе коэффициент c_{xai} можно представить в виде (7.80): $c_{xai} = Bc^2_{ya}/(\pi\lambda)$, где множитель B зависит от формы крыла в плане [7]. Опыт показывает, что теоретическое значение подсасывающей силы реализуется неполностью. Это обычно учитывается эмпирическим коэффициентом реализации подсасывающей силы [19].

По изложенной методике теории несущей поверхности проведены систематические расчеты распределенных и суммарных аэродинамических характеристик крыльев различной формы в плане [7]. Пользуясь этими результатами, можно произвести анализ влияния геометрических параметров крыла на его аэродинамические характеристики. Приведем характерные результаты расчета.

На рис. 7.27 и 7.28 показаны кривые зависимости производной c^{α}_{ya}, характеризующей несущие свойства крыла, от угла стреловидности, удлинения и сужения. Увеличение угла стреловидности крыла приводит к заметному снижению производной c_{ya}^{α} крыла большого удлинения, а для крыла малого удлинения $\lambda \ll 1$ влияние угла стреловидности практически отсутствует; уменьшение удлинения приводит к существенному уменьшению производной c_{ya}^{α}, а изменение сужения при заданном λ и $\chi_{п.к}$ слабее влияет на величину c_{ya}^{α}.

Влияние удлинения и угла стреловидности на положение фокуса наглядно видно из рис. 7.29, на котором представлены кривые зависимости от λ и $\chi_{п.к}$ координаты фокуса $\bar{x}_F$, отсчитываемой от передней кромки средней аэродинамической хорды и отнесенной к величине b_A.

Для характеристики несущих свойств сечений крыла приведены также кривые изменения производных c_{ya}^{α} сечений по размаху крыльев различных удлинений при $\chi_{п.к} = 60°$, $\eta = 2$ (рис. 7.30). Видно, что при изменении удлинения стреловидного крыла изменяется как значение производной $c_{ya\,сеч}^{\alpha}$, так и закон ее распределения по размаху.

Для характеристики распределения нагрузки по размаху крыльев желательно сравнить крылья при одинаковом значении суммарного коэффициента подъемной силы. Удобной величиной для такого сравнения является $\bar{\Gamma} = (c_{ya\,сеч}^{\alpha} b_{сеч})/(c_{ya}^{\alpha} b_{ср})$. На рис. 7.31 показано изменение характера распределения $\bar{\Gamma}$ по размаху крыльев при изменении удлинения (*а*) и угла стреловидности (*б*). При уменьшении удлинения крыла происходит некоторое перераспределение нагрузки — величина $\bar{\Gamma}$ на концах крыла уменьшается, а в средней части крыла увеличивается. Увеличение угла стреловидности приводит к уменьшению $\bar{\Gamma}$ в средней части и к увеличению $\bar{\Gamma}$ на концах крыла.

§ 7.13. НЕЛИНЕЙНЫЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРЫЛЬЕВ МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ

При рассмотрении аэродинамических характеристик крыльев при малых углах атаки принимается, что происходит безотрывное обтекание. В результате зависимости коэффициентов подъемной силы c_{ya} от угла атаки и момента m_z от угла атаки (коэффициента c_{ya}) оказываются линейными. Тогда несущие свойства и моментные характеристики крыльев определяются значениями производных c_{ya}^{α}, m_z^{α} или $m_z^{c_{ya}}$.

Экспериментальные исследования показывают, что зависимости коэффициентов $c_{ya}(\alpha)$ и $m_z(\alpha)$ при умеренных и больших углах атаки становятся нелинейными. Это явление связано с отрывом потока. Возможны два типа отрыва потока. При больших углах атаки отрыв пограничного слоя обычно начинается с задней кромки и вызывает общий отрыв потока с поверхности крыла (см. гл. 12). Это приводит к уменьшению подъемной силы по сравнению с безотрывным обтеканием (см., например, рис. 7.13).

При умеренных углах атаки возникает отрыв потока у боковых и передних кромок стреловидных крыльев с острыми кромками. В

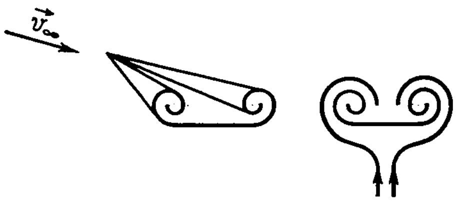


Рис. 7.32. Срыв потока с передней кромки тонкого крыла

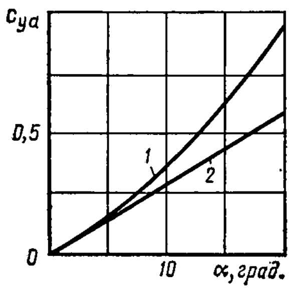


Рис. 7.33. Зависимость коэффициента подъемной силы треугольного крыла с острыми передними кромками от угла атаки:

$\lambda=1{,}5$; *1* — нелинейная зависимость c_{ya} от α; *2* — $c_{ya}=(c^{\alpha}_{ya})_{\alpha=0}\alpha$

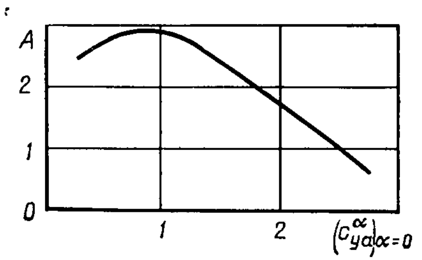


Рис. 7.34. Зависимость коэффициента, определяющего нелинейную составляющую c_{ya}, от величины $(c^{\alpha}_{ya})_{\alpha=0}$

результате отрыва потока над крылом малого удлинения большой стреловидности образуются два стационарных, сравнительно интенсивных вихря (рис. 7.32). Расположение вихрей и их интенсивность зависят от формы передних кромок, формы крыльев в плане и угла атаки. С увеличением угла атаки интенсивность вихрей возрастает.

Вихри, образовавшиеся в результате отрыва потока с передних кромок, создают на верхней поверхности дополнительные разрежения и вызывают перераспределение нагрузки по крылу. При этом подъемная сила возрастает, изменяются моментные характеристики. Особенно сильное влияние эти вихри оказывают на несущие свойства крыльев малого удлинения с острыми передними кромками. При сравнительно малых и умеренных углах атаки зависимости $c_{ya}(\alpha)$ и $m_z(\alpha)$ становятся нелинейными. В отличие от нелинейности, связанной с отрывом пограничного слоя с поверхностью крыла, приводящим к уменьшению подъемной силы, в этом случае подъемная сила возрастает (рис. 7.33). Здесь для сравнения приведена также прямая $c_{ya}=(c^{\alpha}_{ya})_{\alpha=0}\alpha$.

При изучении течений, сопровождающихся отрывом потока, решающая роль принадлежит эксперименту. В настоящее время начали развиваться также численные методы расчета отрывных течений [8].

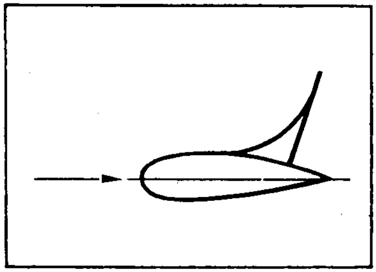
Для приближенного определения коэффициента подъемной силы с учетом дополнительной силы, вызываемой отрывом потока на передней кромке, можно пользоваться формулой

$$c_{ya} = \left(c_{ya}^{\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + A\alpha^2, \qquad (7.94)$$

где первое слагаемое $c_{ya}^{\alpha}\alpha$ определяет основную линейную зависимость, а второе слагаемое $A\alpha^2$ представляет собой коэффициент дополнительной нелинейной составляющей подъемной силы; α — угол атаки, рад.

Коэффициент A зависит от геометрических параметров $\chi_{п.к}$, λ, η и формы передних кромок профилей в различных сечениях крыла. Анализ экспериментальных данных показывает, что для крыльев с различными геометрическими параметрами, но одинаковыми значениями производной c_{ya}^{α} при $\alpha = 0$ значения коэффициентов A практически одинаковы, т. е. коэффициент A можно представить в виде функции от производной c_{ya}^{α} при $\alpha = 0$ (рис. 7.34). С увеличением значения производной c_{ya}^{α} при $\alpha = 0$, т. е. с ростом удлинения или уменьшением угла стреловидности, нелинейная составляющая коэффициента подъемной силы уменьшается.

8
ГЛАВА



ПРОФИЛЬ И КРЫЛО КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

§ 8.1. ПОНЯТИЕ О КРИТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ M

При обтекании плоской пластинки ($\bar{c} = 0$) под нулевым углом атаки местная скорость на ее поверхности при отсутствии вязкости всюду равна скорости невозмущенного потока. На профиле при $c \neq 0$ или $\alpha \neq 0$ местная скорость потока в некоторых точках поверхности становится больше скорости невозмущенного потока ($v > v_\infty$), причем для заданной скорости v_∞ местная скорость v в определенных областях течения тем больше, чем больше толщина и угол атаки. Поэтому при большой дозвуковой скорости набегающего потока местная скорость где-либо на его поверхности может стать равной или больше скорости звука.

Число M_∞ (невозмущенного дозвукового потока), при котором где-либо на поверхности обтекаемого тела впервые местная скорость потока достигает скорости звука ($v = a_{кр}$), называется критическим и обозначается $\mathrm{M}_{кр}$.

При дозвуковой скорости невозмущенного потока возможны два случая обтекания:

1. $\mathrm{M}_\infty < \mathrm{M}_{кр}$. При этом местная скорость потока всюду на поверхности меньше скорости звука. В этом случае происходит чисто дозвуковое обтекание профиля (крыла).

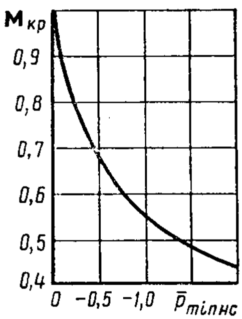


Рис. 8.1. Зависимость критического числа $\mathrm{M}_{кр}$ от коэффициента давления $\bar{p}_{min\,нс}$

2. $\mathrm{M}_{кр} < \mathrm{M}_\infty < 1$. При дозвуковой скорости невозмущенного потока в некоторых точках поверхности и в ее окрестности местная скорость становится больше скорости звука, возникает зона местных сверхзвуковых скоростей (рис. 8.2, область ABC). Поскольку при этом позади крыла скорость потока меньше скорости звука, то зона местных сверхзвуковых скоростей замыкается прямым скачком уплотнения BC*. Иногда перед прямым скачком располагается косой скачок уплотнения ED. В результате об-

* Здесь и далее замыкающий скачок называется прямым, так как он в каждой точке перпендикулярен местной линии тока.

разуется так называемый λ-образный скачок уплотнения (подробнее см. § 12.9).

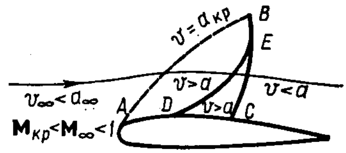


Рис. 8.2. Обтекание крыла при $M_{кр}<M_\infty<1$

Величина $M_{кр}$ зависит от относительной толщины $\bar{c}$ и кривизны профиля $\bar{f}$, формы профиля (прежде всего от положения точки максимальной толщины $\bar{x}_c$) и угла атаки. Для крыла конечного размаха $M_{кр}$ зависит, кроме того, от угла стреловидности и удлинения крыла.

Рассмотрим качественно влияние указанных параметров на величину $M_{кр}$. Очевидно, что местная скорость потока впервые станет равной скорости звука в той точке поверхности, в которой она имеет при данной скорости невозмущенного потока наибольшее значение. При увеличении относительной толщины $\bar{c}$ наибольшая скорость на поверхности профиля возрастает. В результате $M_{кр}$ уменьшается. Наличие кривизны ($\bar{f} \neq 0$) также вызывает увеличение местной скорости потока и, следовательно, приводит к уменьшению $M_{кр}$. Аналогичное влияние оказывает смещение максимальной толщины вперед (уменьшение координаты $\bar{x}_c$).

При увеличении угла атаки (коэффициента подъемной силы c_{ya}) $M_{кр}$, очевидно, уменьшается. Наличие угла стреловидности приводит к увеличению $M_{кр}$ (см. § 8.4). Уменьшение удлинения также приводит к росту $M_{кр}$. Это объясняется тем, что для крыла конечного размаха ($\lambda \neq \infty$) вследствие концевых перетеканий воздуха с нижней поверхности на верхнюю давление на верхней поверхности возрастает, а в соответствии с уравнением Бернулли местная скорость уменьшается. В результате $M_{кр}$ увеличивается. Чем меньше удлинение крыла, тем больше $M_{кр}$.

Поскольку наибольшей скорости соответствует минимум давления (минимум коэффициента давления) на поверхности, то для определения $M_{кр}$ достаточно знать значение коэффициента $\bar{p}_{min}$. Величину $M_{кр}$ для данного тела можно непосредственно найти по известному распределению давления на малых скоростях, т. е. по известному значению коэффициента $\bar{p}_{min}$ в условиях несжимаемого потока. Кривая зависимости $M_{кр}$ для профиля от коэффициента $\bar{p}_{min}$ в несжимаемом потоке приведена на рис. 8.1. Существует определенная связь между коэффициентами $\bar{p}_{min}$ в сжимаемом и несжимаемом потоках.

§ 8.2. ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОФИЛЯ И КРЫЛА ПРИ $M_\infty<M_{кр}$

Рассмотрим приближенный метод учета сжимаемости воздуха (метод Прандтля — Глауэрта) для чисел $M_\infty < M_{кр}$, основанный на линеаризации уравнения потенциала скорости (6.10).

В безвихревом слабовозмущенном потоке, каким является поток в окрестности тонкого крыла при малых углах атаки, потенциал скорости возмущения φ' удовлетворяет линеаризованному уравнению (6.20) для профиля и (6.21) для крыла конечного размаха. Путем аффинного преобразования координат эти уравнения можно привести к уравнению Лапласа. Рассмотрим прежде всего решение задачи обтекания тонкого профиля.

Вместо координат x, y плоскости сжимаемого потока введем новые координаты x_1, y_1 по формулам

$$x_1 = x \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}, \quad y_1 = y. \tag{8.1}$$

Так как $dx_1/dx = 1 \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}$, $dy_1/dy = 1$,

то

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}}, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y_1}; \\ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x_1^2} \frac{1}{1 - \mathbf{M}_\infty^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6.20), получаем

$$\partial^2 \varphi'/\partial x_1^2 + \partial^2 \varphi'/\partial y_1^2 = 0. \tag{8.3}$$

Уравнению Лапласа (8.3), как известно, удовлетворяет потенциал скорости в несжимаемом потоке. Следовательно, плоскость x_1, y_1 можно рассматривать как некоторую плоскость несжимаемого потока. Пусть решение уравнения (8.3) $\varphi'(x_1, y_1)$ известно. Нетрудно показать, что функция $\varphi'(x, y) = \gamma\varphi'(x_1, y_1)$, где γ — постоянная величина, является решением исходного уравнения (6.20). Тогда, удовлетворяя линеаризованному граничному условию (7.85), для исходного профиля получаем
$(\partial\varphi'/\partial y)_{y=0} = \gamma\,(\partial\varphi'/\partial y_1)_{y_1=0} = -v_\infty(\alpha - dy/dx)$; для преобразованного профиля $(\partial\varphi'/\partial y_1)_{y_1=0} = -v_{1\infty}(\alpha_1 - dy_1/dx_1)$.
Здесь $y = y(x)$ и $y_1 = y_1(x_1)$ — уравнения исходного и преобразованного профилей, рассматриваемых в сжимаемом и несжимаемом потоках.

Подставляя $(\partial\varphi'/\partial y_1)_{y_1=0}$ в выражение для производной $(\partial\varphi'/\partial y)_{y=0}$, имеем $\gamma(\alpha_1 - dy_1/dx_1) = (\alpha - dy/dx)$.

Рассмотрим обтекание одного и того же профиля с учетом и без учета сжимаемости при одинаковых углах атаки и скоростях невозмущенного потока, т. е. примем $dy_1/dx_1 = dy/dx$, $\alpha_1 = \alpha$, $v_{1\infty} = v_\infty$. Тогда $\gamma = 1$ и $\varphi'(x, y) = \varphi'(x_1, y_1)$, т. е. в этом случае при преобразовании координат потенциал скорости возмущения не изменяется. Дифференцируя это равенство и учитывая выражения (8.2) для производных $\partial\varphi'/\partial x$ и $\partial\varphi'/\partial y$, найдем связь между составляющими скорости в соответствующих точках сжимаемого ($v'_x = \partial\varphi'/\partial x$, $v'_y = \partial\varphi'/\partial y$) и несжимаемого ($v'_{x_1} = \partial\varphi'/\partial x_1$, $v'_{y_1} = \partial\varphi'/\partial y_1$) потоков:

$$v'_x = v'_{x1} \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}, \quad v'_y = v'_{y1}. \tag{8.4}$$

Установим связь между коэффициентами давления в соответствующих точках профилей в сжимаемом $\bar{p}$ и несжимаемом $\bar{p}_{\text{нс}}$ потоках. На основании линеаризованного уравнения Бернулли (6.18) $p - p_\infty = -\rho_\infty v_\infty v'_x$, $p_{\text{нс}} - p_\infty = -\rho_\infty v_\infty v'_{x_1}$. Отсюда, имея в виду, что $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty$, получим $\bar{p}/\bar{p}_{\text{нс}} = v'_x/v'_{x_1}$. Подставляя сюда выражение (8.4), имеем

$$\bar{p} = \bar{p}_{\text{нс}} \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}. \tag{8.5}$$

Поскольку значение коэффициента давления в сжимаемом потоке $\bar{p}$ во всех точках поверхности профиля увеличивается по сравнению с $\bar{p}_{\text{нс}}$ в одинаковое число раз, то между суммарными коэффициентами нормальной силы c_y (подъемной силы c_{ya}) и момента c_m в сжимаемом и несжимаемом потоках должны существовать аналогичные зависимости:

$$c_y = c_{y\,\text{нс}} \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}, \quad c_{ya} = c_{ya\text{нс}} \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}; \tag{8.6}$$

$$c_m = c_{m\,\text{нс}} \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}. \tag{8.7}$$

Ввиду того что коэффициенты $\bar{p}$, c_y, c_{ya}, c_m являются линейными функциями угла атаки, аналогичные связи имеются и для производных этих величин по углу атаки:

$$c_y^\alpha = c_{y\,\text{нс}}^\alpha \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}, \quad c_{ya}^\alpha = c_{ya\,\text{нс}}^\alpha \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2},$$

$$c_m^\alpha = c_{m\,\text{нс}}^\alpha \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}. \tag{8.8}$$

Из выражений (8.8) следует, что производные c_y^α и c_{ya}^α с увеличением числа $\mathbf{M}$ возрастают, а относительная координата фокуса $\bar{x}_F = -c_m^\alpha/c_{ya}^\alpha$ не зависит от числа $\mathbf{M}$ $(\bar{x}_F = \bar{x}_{F\text{нс}})$.

В формулах (8.6) — (8.8) коэффициенты $c_{y\text{нс}}$, $c_{m\text{нс}}$ и их производные определяются по формулам (7.51) и (7.52). Для крыла конечного размаха уравнение (6.21) преобразовывается в уравнение Лапласа с помощью аналогичных соотношений:

$$x_1 = x \Big/ \sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z. \tag{8.9}$$

При этом форма крыла в плане в пространстве (x_1, y_1, z_1) несжимаемой среды отличается от исходной формы крыла в сжимаемом газе. Действительно, в пространстве (x_1, y_1, z_1) все линейные размеры вдоль оси Ox_1 в соответствии с преобразованием (8.9) увеличиваются в $1\Big/\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}$ раз, а линейные размеры по осям Oy_1, Oz_1 остаются без изменения. Это приводит к увеличению хорд сечений крыла

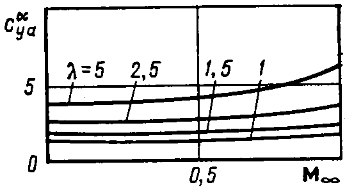


Рис. 8.3. Кривые зависимости производной c_{ya}^{α} крыльев ($1 \leqslant \lambda \leqslant 5$) от числа M_∞

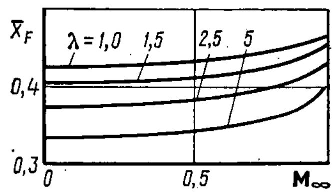


Рис. 8.4. Кривые зависимости относительной координаты фокуса для крыльев с различными удлинениями от числа M_∞

в $1/\sqrt{1 - M_\infty^2}$ раз, а размах крыла при этом не изменяется. В результате угол стреловидности увеличивается:

$$\operatorname{tg}\chi_{1\,\text{п.к}} = \frac{\operatorname{tg}\chi_{\text{п.к}}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}; \tag{8.10}$$

удлинение крыла уменьшается:

$$\lambda_1 = \lambda\sqrt{1 - M_\infty^2}; \tag{8.11}$$

сужение остается неизменным: $\eta_1 = \eta$. При этом относительные координаты $\bar{x} = x/b$, $\bar{z} = z/(l/2)$ не изменяются.

Таким образом, задача о расчете аэродинамических характеристик крыла конечного размаха в дозвуковом потоке также может быть сведена к аналогичной задаче для преобразованного крыла в несжимаемом потоке.

Для того чтобы определить характеристики крыла с заданными геометрическими параметрами λ, $\chi_{\text{п.к}}$, η при заданном значении числа $M_\infty < M_{\text{кр}}$, прежде всего необходимо определить параметры преобразованного крыла λ_1, $\chi_{1\text{п.к}}$, η_1 по (8.10) и (8.11). Затем рассчитать его аэродинамические характеристики (распределенные $c_{ya\text{сеч}}^{\alpha}$, $m_{z\text{сеч}}^{\alpha}$, $\bar{x}_{F\text{сеч}}$ и суммарные c_{ya}^{α}, m_z^{α}, $\bar{x}_F$) в несжимаемом потоке (см. § 7.12). Переход от этих характеристик к аналогичным искомым характеристикам производится по формулам (8.8).

Относительная координата фокуса крыла с учетом сжимаемости равна относительной координате фокуса преобразованного крыла в несжимаемом потоке.

Влияние сжимаемости на величину c_{ya}^{α} и относительной координаты фокуса $\bar{x}_F$ наглядно видно из рис. 8.3 и 8.4, на которых приведены результаты расчета для треугольных крыльев ($\lambda \operatorname{tg}\chi_{\text{п.к}} = 4$, $\eta = \infty$), имеющих различные удлинения $\lambda = 1 \div 5$. Здесь координата $\bar{x}_F$ отнесена к корневой хорде. Представим $\operatorname{tg}\chi_{1\text{п.к}}$ в следующем виде: $\operatorname{tg}\chi_{1\,\text{п.к}} = \lambda \operatorname{tg}\chi_{\text{п.к}} \big/ \lambda\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}$, т. е. вместо $\operatorname{tg}\chi_{1\text{п.к}}$ введем два параметра: $\lambda\operatorname{tg}\chi_{\text{п.к}}$ и $\lambda\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}$. Тогда, учитывая, что $c_{y\text{анс}}^{\alpha} = f(\lambda_1, \chi_{1\text{п.к}}, \eta_1)$, формулу (8.8) можно представить в виде следующей функциональной зависимости:

$$c_{ya}^{\alpha} = \left(1 \big/ \sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}\right) f\left(\lambda\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^{a}},\ \lambda \operatorname{tg}\chi_{\text{п.к}}, \eta\right) \tag{8.12}$$

или

$$c_{ya}^{\alpha} \big/ \lambda = F\left(\lambda\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2},\ \lambda \operatorname{tg}\chi_{\text{п.к}}, \eta\right), \tag{8.13}$$

т. е. для крыльев, имеющих различные удлинения и углы стреловидности передней кромки $\chi_{\text{п.к}}$, при различных значениях числа M_∞ отношения c_{ya}^{α}/λ имеют одинаковые значения, если параметры $\lambda\operatorname{tg}\chi_{\text{п.к}}$, $\lambda\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}$, η для этих крыльев одинаковы.

§ 8.3. ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ЗАКРИТИЧЕСКИМ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ. ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Рассмотрим обтекание профиля при $\mathrm{M}_{\text{кр}} < \mathrm{M}_\infty < 1$. В этом диапазоне чисел M_∞, как указывалось в § 8.1, возникает зона местных сверхзвуковых скоростей, которая замыкается местными скачками уплотнения. При этом наличие необратимых потерь в скачках уплотнения вызывает дополнительное сопротивление, которое называется *волновым сопротивлением*.

Объяснение физической природы волнового сопротивления приведем на примере обтекания симметричного профиля при $\alpha = 0$ закритическим потоком воздуха ($\mathrm{M}_{\text{кр}} < \mathrm{M}_\infty < 1$). На рис. 8.5 зона сверхзвуковых скоростей, скачок уплотнения и скорости в характерных точках указаны на верхней поверхности, а эпюра распределения давления показана по нижней поверхности профиля.

В критической точке скорость потока равна нулю, а давление — давлению изэнтропического торможения p_{01} [см. (4.21)].

При удалении от критической точки давление уменьшается и в точке A, в которой скорость равна критической скорости ($v = a_{\text{кр}}$), $p = p_{\text{кр}} = 0{,}528\ p_{01}$ (при $k = 1{,}4$).

Непосредственно перед скачком уплотнения (в точке B) скорость потока превышает скорость звука, а давление $p_1 < p_{\text{кр}}$. Позади скачка уплотнения скорость потока уменьшается, а давление возрастает: $p_2 > p_1$. Если бы в рассматриваемом диапазоне чисел $\mathrm{M}_{\text{кр}} < \mathrm{M}_\infty < 1$ было возможно изэнтропическое обтекание, т. е. торможение потока в кормовой части без скачка уплотнения, то давление в кормовой части профиля было бы больше, так как при этом $p_0 = p_{01}$. Следовательно, наличие местного скачка уплотнения вызывает понижение давления в кормовой части профиля по сравнению с изэнтропическим обтеканием, что и приводит к появлению дополнительного, так называемого волнового, сопротивления.

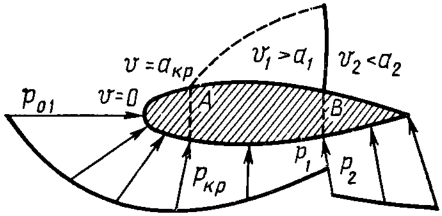


Рис. 8.5. Распределение давления по поверхности профиля при наличии местного скачка уплотнения

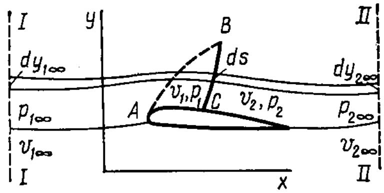


Рис. 8.6. Схема для определения коэффициента волнового сопротивления профиля при $M_{кр} < M_\infty < 1$

Очевидно, что волновое сопротивление профиля тем больше, чем больше потери полного давления в скачке уплотнения ($p_{02} < p_{01}$). Потери полного давления зависят от числа $\mathbf{M}_1$. Чем больше $\mathbf{M}_1$ перед замыкающим скачком уплотнения, тем больше потери [коэффициент σ меньше (см. § 5.4)]. Значение числа $\mathbf{M}_1$ зависит от разности ($\mathbf{M}_\infty$ — — $\mathbf{M}_{кр}$). Чем больше эта разность, тем больше $\mathbf{M}_1$. При $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{кр}$ $\mathbf{M}_1 = 1$. Из этого следует, что волновое сопротивление профиля возрастает с увеличением разности ($\mathbf{M}_\infty - \mathbf{M}_{кр}$).

Рассмотрим приближенный метод определения коэффициента волнового сопротивления при $\mathbf{M}_{кр} < \mathbf{M}_\infty < 1$.

Предположим, что на верхней поверхности крыла (рис. 8.6) образовалась местная сверхзвуковая зона *ABC*, заканчивающаяся замыкающим скачком уплотнения. Выделим в потоке элементарную струйку, проходящую через скачок уплотнения. Параметры газа перед скачком обозначим: скорость — v_1, давление — p_1, плотность — ρ_1; после скачка — соответственно v_2, p_2, ρ_2. Проведем на достаточно большом удалении от профиля две контрольные плоскости: *I—I* и *II—II*. Обозначим соответственно $\rho_{1\infty}$, $p_{1\infty}$, $v_{1\infty}$, $dy_{1\infty}$ плотность, давление, скорость и элемент длины вдоль плоскости *I—I*, а $\rho_{2\infty}$, $p_{2\infty}$, $v_{2\infty}$, $dy_{2\infty}$ — те же величины вдоль плоскости *II—II*. Из условия постоянства расхода для каждой струйки

$$\rho_{1\infty} v_{1\infty} dy_{1\infty} = \rho_{2\infty} v_{2\infty} dy_{2\infty}. \tag{8.14}$$

Применяя теорему о количестве движения к массе газа, заключенной между контрольными поверхностями, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{2\infty} v_{2\infty}^2 dy_{2\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{1\infty} v_{1\infty}^2 dy_{1\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} (p_{1\infty} - p_{2\infty})\, dy - X_{а.в}, \tag{8.15}$$

где $X_{а.в}$ — волновое сопротивление.

Учитывая соотношение (8.14), имеем

$$X_{а.в} = \int_{-\infty}^{\infty} (p_{1\infty} - p_{2\infty})\, dy - \rho_{1\infty} v_{1\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (v_{1\infty} - v_{2\infty})\, dy. \tag{8.16}$$

Во всех струйках, не пересекающих скачок уплотнения, $p_{1\infty} = p_{2\infty}$, $v_{1\infty} = v_{2\infty}$. Тогда в формуле (8.16) интегрирование от $-\infty$ до ∞ можно заменить интегрированием по длине скачка уплотнения.

Далее примем, что на контрольных плоскостях *I—I* и *II—II* скорости одинаковы. Тогда

$$X_{\text{а.в}} = p_{1\infty} \int_0^s \left(1 - p_{2\infty}/p_{1\infty}\right) dy. \tag{8.17}$$

Учитывая, что при одинаковых скоростях давление на контрольной плоскости *II—II* должно быть меньше, чем в плоскости *I—I*, так как между ними находится скачок уплотнения, находим

$$p_{2\infty}/p_{1\infty} = p_{02}/p_{01} = \sigma. \tag{8.18}$$

Здесь σ — коэффициент восстановления полного давления в скачке уплотнения (5.24).

Вводя σ в выражение (8.17), а также замечая, что $\rho_{1\infty} v_{1\infty} dy_{1\infty} = \rho_1 v_1 ds$ и $dy_{1\infty} = dy = \rho_1 v_1 \, ds/(\rho_{1\infty} v_{1\infty})$, получаем

$$X_{\text{а.в}} = p_{1\infty} \int_0^s \frac{\rho_1 v_1}{\rho_{1\infty} v_{1\infty}} (1 - \sigma) \, ds, \tag{8.19}$$

где интегрирование ведется по длине скачка уплотнения (вне скачка $\sigma = 1$). Так как на скачке уплотнения $\sigma < 1$, то $X_{\text{а.в}} > 0$ и с уменьшением σ величина $X_{\text{а.в}}$ возрастает.

Пользуясь формулой (5.24), можно показать, что при $\mathbf{M}_1 = 1$ $d\sigma/d\mathbf{M}_1 = d^2\sigma/d\mathbf{M}_1^2 = 0$. Тогда, разлагая выражение $(1 - \sigma)$ в ряд по степеням $(\mathbf{M}_1 - 1)$, получим

$$1 - \sigma = (1/6)\left[d^3\sigma/(d\mathbf{M}_1^3)\right]_{\mathbf{M}_1 = 1} (\mathbf{M}_1 - 1)^3 + \cdots .$$

Так как для тонких профилей при малых углах атаки разность $(\mathbf{M}_1 - 1)$ мала, то с точностью до $(\mathbf{M}_1 - 1)^3$ можно принять

$$1 - \sigma = (1/6)\left[d^3\sigma/(d\mathbf{M}_1^3)\right]_{\mathbf{M}=1} (\mathbf{M}_1 - 1)^3; \tag{8.20}$$

разность $(\mathbf{M}_1 - 1)$ в первом приближении можно принять пропорциональной разности $(\mathbf{M}_\infty - \mathbf{M}_{\text{кр}})$ (при $\mathbf{M}_\infty = \mathbf{M}_{\text{кр}}$ $\mathbf{M}_1 = 1$).

Подставляя выражение (8.20) с заменой $(\mathbf{M}_1 - 1)$ на $(\mathbf{M}_\infty - \mathbf{M}_{\text{кр}})$ в формулу (8.19) и переходя от $X_{\text{а.в}}$ к $c_{x\text{а.в}}$, получим

$$c_{x\,\text{а.в}} = A(\mathbf{M}_\infty - \mathbf{M}_{\text{кр}})^3, \tag{8.21}$$

где $c_{x\text{а.в}} = X_{\text{а.в}}/(q_\infty S)$ — коэффициент волнового сопротивления; A — постоянный коэффициент, зависящий от формы и распределения давления по поверхности профиля.

Формулой (8.21) можно пользоваться для чисел $\mathbf{M}_\infty$, не превышающих величину $\mathbf{M}_{\text{кр}} + 0{,}15$. Из этой формулы следует, что для уменьшения коэффициента волнового сопротивления профиля при задан-

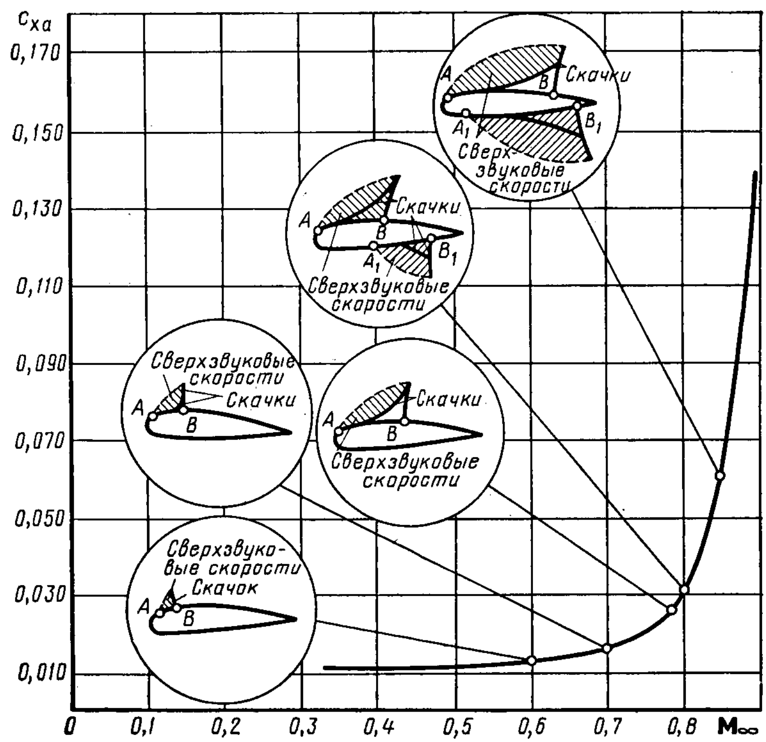


Рис. 8.7. Зависимость коэффициента сопротивления профиля от числа M_∞

ном значении числа M_∞ необходимо увеличить $M_{кр}$, что в основном достигается уменьшением относительной толщины профиля.

На рис. 8.7 приведена зависимость коэффициента сопротивления профиля c_{xa} от числа M_∞, причем возрастание коэффициента сопротивления сопоставлено с характером обтекания профиля при различных числах M_∞— развитием скачков уплотнения на профиле крыла. С ростом числа M_∞скачки уплотнения перемещаются в направлении к задней кромке и одновременно становятся протяженнее и сильнее, при этом коэффициент сопротивления профиля быстро возрастает.

Возникновение местных скачков уплотнения вызывает также значительное изменение коэффициентов подъемной силы и момента. Характер изменения c_{ya} и c_m при увеличении M_∞в диапазоне $M_{кр} <$ $< M_\infty < 1$ зависит от формы профиля и соотношения между местными скачками уплотнения на верхней и нижней поверхностях.

На рис. 8.8 для сравнения приведены типичные кривые распределения коэффициента давления по профилю $\overline{p} = \overline{f}(x)$ при некотором положительном угле атаки для различных чисел M_∞: $M_\infty < M_{кр}$ и $M_{кр} < M_\infty < 1$.

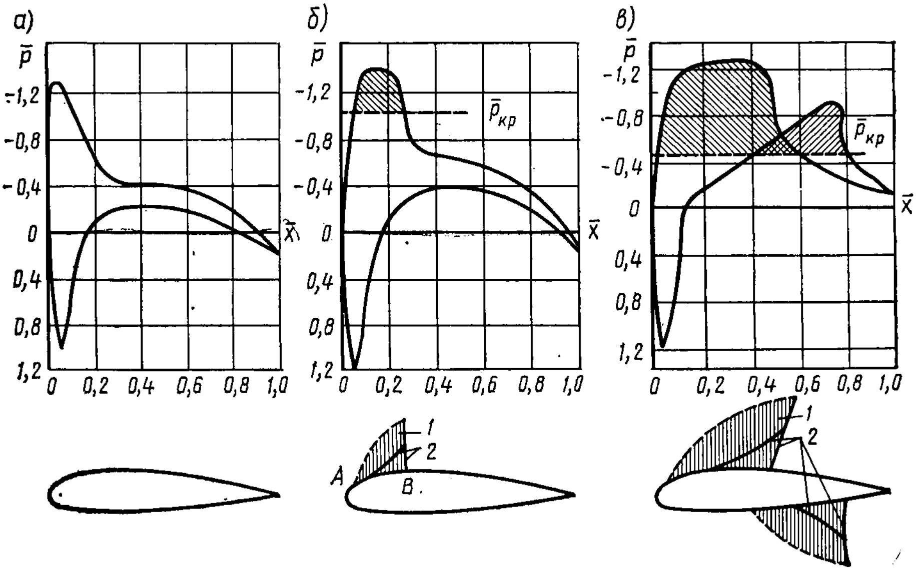


Рис. 8.8. Распределение коэффициента давления по поверхности профиля: *а* — при $M_\infty < M_{кр}$; *б* — при $M_{кр} < M_\infty < 1$ с местными скачками уплотнения на верхней поверхности; *в* — при $M_{кр} < M_\infty < 1$ с местными скачками уплотнения на верхней и нижней поверхностях; *1* — сверхзвуковые скорости; *2* — скачки уплотнения

Для $M_\infty < M_{кр}$ (рис. 8.8, *а*) скорость потока на поверхности всюду меньше скорости звука, а давление $p > p_{кр}$, $\bar{p} > \bar{p}_{кр}$. При этом давление изменяется по поверхности плавно.

Увеличение числа M_∞, $M_{кр} < M_\infty < 1$ (рис. 8.8, *б*) приводит к тому, что в точке А верхней поверхности $v = a_{кр}$, $\bar{p} = \bar{p}_{кр}$. За этой точкой до точки *B* скорость продолжает увеличиваться, образуется небольшая зона сверхзвуковых скоростей, а давление понижается и становится меньше критического $(\bar{p} < \bar{p}_{кр})$.

В скачке уплотнения (точка *B*) скорость резко уменьшается, а давление возрастает и становится больше критического $(\bar{p} > \bar{p}_{кр})$. При дальнейшем увеличении числа M_∞(рис. 8.8, *в*) местные зоны сверхзвуковых скоростей и скачки уплотнения возникают как на верхней, так и на нижней поверхностях профиля. Протяженность области сверхзвуковых скоростей на верхней поверхности существенно увеличивается.

Для наглядности на рис. 8.8 под каждой эпюрой распределения давления показано расположение свехзвуковых зон и скачков уплотнения; участки разрежения, соответствующие сверхзвуковым скоростям $(\bar{p} < \bar{p}_{кр})$, заштрихованы.

Следует иметь в виду, что величина $\bar{p}_{кр}$ зависит от числа M_∞:

$$\bar{p}_{рк} = (p_{кр} - p_\infty)/(\rho_\infty v_\infty^2/2) = -(1{,}43/M_\infty^2)(1 - 0{,}528 p_{01}/p_\infty).$$

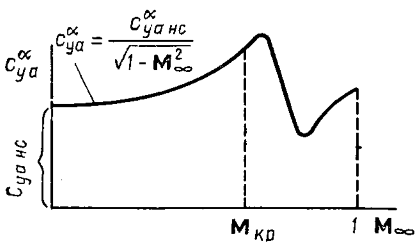


Рис. 8.9. Зависимость производной c_{ya}^{α} от числа M_∞

Здесь отношение давлений p_{01}/p_∞ зависит от числа M_∞ (4.21).

В соответствии с изменением распределения давления при увеличении числа M_∞ изменяется и коэффициент подъемной силы (рис. 8.9). При $M_\infty < M_{кр}$ коэффициент c_{ya}, согласно формуле (8.6), возрастает. При дальнейшем увеличении числа M_∞ в связи с возникновением на верхней поверхности профиля сверхзвуковой зоны с повышенным разрежением (рис. 8.8, *б*) c_{ya} увеличивается вплоть до появления скачков уплотнения на нижней поверхности профиля.

С появлением сверхзвуковой зоны и скачков уплотнения увеличивается разрежение и на нижней поверхности, что приводит к резкому уменьшению коэффициента c_{ya}. При дальнейшем увеличении числа M_∞коэффициент c_{ya} вновь возрастает вплоть до $M_\infty = 1$, так как при числах M_∞, близких к единице, скачки уплотнения на верхней поверхности смещаются к задней кромке и зона разрежения увеличивается (см. рис. 8.8, *в*).

При $M_{кр} < M_\infty < 1$ существенно изменяется и координата фокуса профиля: на докритических числах M положение фокуса профиля не зависит от числа M (см. § 8.2), а при числах M_∞, близких к единице, в соответствии с изменением распределения давления фокус профиля смещается назад.

§ 8.4. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРЕЛОВИДНОГО КРЫЛА

Применение стреловидных крыльев позволяет увеличить критическое число $M_{кр}$. Поэтому для стреловидных крыльев волновой кризис наступает при больших значениях числа M_∞.

Для того чтобы оценить влияние угла стреловидности, рассмотрим обтекание скользящего крыла — крыла бесконечного размаха с постоянной хордой, передняя кромка которого не перпендикулярна скорости набегающего потока (рис. 8.10). Угол χ называется *углом скольжения*.

Разложим вектор скорости набегающего потока на две составляющие: перпендикулярно передней кромке $v_n = v_\infty \cos\chi$ и вдоль передней кромки $v_t = v_\infty \sin\chi$. Тогда обтекание скользящего крыла (рис. 8.10, *а*) эквивалентно обтеканию прямого (рис. 8.10, *б*) потоком, перпендикулярным передней кромке, со скоростью $v_\infty \cos\chi$ и потоком вдоль размаха крыла со скоростью $v_\infty \sin\chi$.

В потоке невязкой среды составляющая скорости v_t на характер распределения давления не влияет. Поэтому обтекание крыла (рис. 8.10, *а*) эквивалентно обтеканию прямого крыла (рис. 8.10, *в*)

Это означает, что наличие угла скольжения равносильно уменьшению скорости набегающего потока, причем чем больше угол χ, тем меньше скорость $v_п$. При меньшей скорости набегающего потока уменьшаются и местные скорости на поверхности крыла, что приводит к уменьшению разрежения на поверхности; при этом число $\mathbf{M}_{кр}$ увеличивается. Вследствие этого у скользящего крыла волновой кризис наступает в том случае, если составляющая скорости $v_п = v_\infty \cos\chi$, а не полная скорость потока v_∞ превышает критическое значение. Тогда для определения критической скорости набегающего потока можно составить следующее равенство: $v_{кр\chi} \cos\chi = v_{кр\chi=0}$. Отсюда $\mathbf{M}_{кр\chi} = \mathbf{M}_{кр\chi=0}/\cos\chi$.

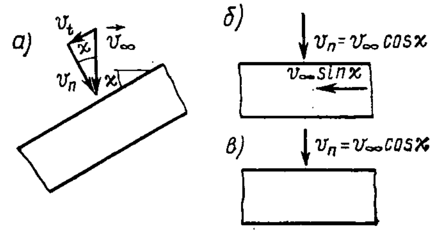


Рис. 8.10. Обтекание крыла бесконечного размаха со скольжением

Величина $\mathbf{M}_{кр}$ для стреловидного крыла меньше, чем для скользящего, так как в центральной части и в области концов крыла эффект скольжения нарушается. Тем не менее $\mathbf{M}_{кр}$ у стреловидного крыла значительно больше, чем у нестреловидного с таким же профилем.

Для перехода от $\mathbf{M}_{кр}$ профиля к $\mathbf{M}_{кр}$ стреловидного крыла необходимо ввести поправки на стреловидность и удлинение. Чем больше угол стреловидности и меньше удлинение, тем больше $\mathbf{M}_{кр}$ крыла.

Для определения числа $\mathbf{M}_{кр}$ стреловидных крыльев можно пользоваться эмпирической формулой $\mathbf{M}_{кр\chi} = \mathbf{M}_{кр\chi=0} 2/(1 + \cos\chi)$, полученной по результатам экспериментальных исследований. Из этой формулы следует, что при $\chi = 35°$ по сравнению с нестреловидным крылом $\mathbf{M}_{кр}$ увеличивается на 10%, при $\chi = 45°$ — на 17,5%, а при $\chi = 60°$ — на 33%.

У стреловидных крыльев значение коэффициента волнового сопротивления при $\mathbf{M}_\infty = 1$ с увеличением угла стреловидности уменьшается. Это наглядно показано на рис. 8.11, где приведены экспериментальные зависимости коэффициента c_{xa} от $\mathbf{M}_\infty$ для крыльев с различными углами стреловидности. Следовательно, в трансзвуковой области в диапазоне чисел $\mathbf{M}_{кр} < \mathbf{M}_\infty < 1$ стреловидные крылья имеют существенно меньшее сопротивление, чем нестреловидные.

При докритических скоростях ($\mathbf{M}_\infty < \mathbf{M}_{кр}$), как показано в § 8.2, отношение c_{ya}^α/λ зависит от параметров подобия $\lambda\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2}$, $\lambda \operatorname{tg}\chi_{п.к}$, η. Используя правила подобия для околозвукового диапазона скоростей, можно получить, что при $\mathbf{M}_{кр} < \mathbf{M}_\infty < 1$ отношение c_{ya}^α/λ зависит кроме указанных параметров еще от одного параметра $\lambda\sqrt[3]{\bar{c}}$, т. е. в этом диапазоне чисел $\mathbf{M}_\infty$ производная c_{ya}^α зависит не только от удлинения, угла стреловидности и сужения, но и от толщины сечений крыла.

На закритических скоростях существенно изменяются и момент-

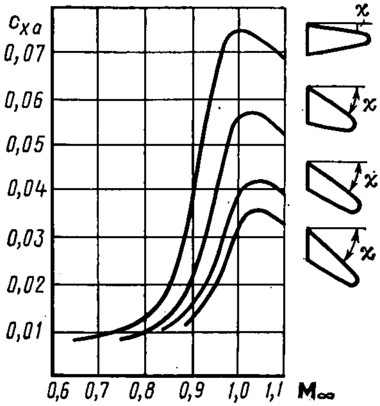


Рис. 8.11. Зависимость коэффициента сопротивления стреловидных крыльев c_{xa} от числа M_∞

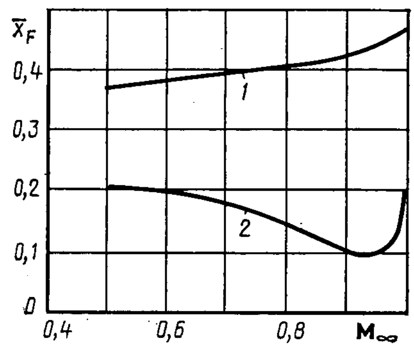


Рис. 8.12. Зависимость относительной координаты фокуса $\bar{x}_F$ треугольного *1* и прямоугольного *2* крыльев от числа $M_\infty \leqslant 1$, $\lambda=2$

ные характеристики крыльев. Экспериментальные исследования показывают, что характер смещения фокуса при увеличении числа M_∞ существенно зависит от формы крыла в плане.

На рис. 8.12 для сравнения приведены данные для прямоугольного и треугольного крыльев с одинаковым удлинением $\lambda = 2$. Здесь $\bar{x}_F$ — координата фокуса, отсчитываемая от начала средней аэродинамической хорды (САХ) в долях САХ.

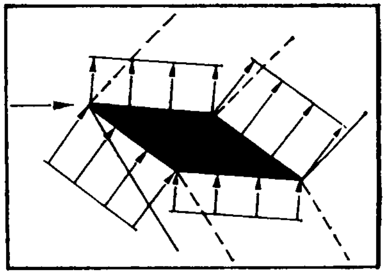
Относительную координату фокуса, так же как отношение c_{ya}^{α}/λ, можно представить в виде зависимости от параметров

$$\lambda \sqrt{1 - M_\infty^2},\ \lambda \operatorname{tg} \chi_{\text{п.к}},\ \eta \text{ и } \lambda \sqrt[3]{\bar{c}} \quad [19].$$

9

ГЛАВА

ПРОФИЛЬ И КРЫЛО КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ



§ 9.1. ПЛОСКАЯ ПЛАСТИНКА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Схема линеаризованного сверхзвукового течения разрежения и уплотнения, рассмотренная в § 6.4, позволяет довольно просто решить задачу обтекания плоской пластинки при малых углах атаки (рис. 9.1)

В сверхзвуковом потоке малые возмущения против направления скорости не распространяются. Поэтому на плоскую пластинку набегает невозмущенный поток. Поэтому обтекание верхней и нижней поверхностей при $M > 1$ можно рассматривать независимо друг от друга. Тогда обтекание верхней поверхности соответствует обтеканию угла, большего 180°, с углом поворота потока, равным $+\alpha$, а обтекание нижней поверхности — обтеканию угла, меньшего 180° (угол поворота потока равен $-\alpha$). При этом на передней кромке со стороны верхней поверхности образуется течение разрежения, а на нижней поверхности возникает скачок уплотнения.

Поскольку между передней и задней кромками как на нижней, так и на верхней поверхностях никаких источников возмущения нет, то скорости потока и давления на этих поверхностях постоянны и равны $v_{\text{в}}$, $p_{\text{в}}$ на верхней поверхности и $v_{\text{н}}$, $p_{\text{н}}$ на нижней поверхности.

На задней кромке при обтекании верхней поверхности поток поворачивается на угол $-\alpha$, при этом возникает волна уплотнения, на нижней поверхности угол поворота потока равен $+\alpha$, при этом возникает волна разрежения.

Для определения давления и коэффициентов давления на поверхности плоской пластинки можно воспользоваться формулами (6.25) и (6.26), подставляя в них $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_\infty$, $p_1 = p_\infty$, $q_1 = q_\infty$; для точек верхней поверхности $\Delta\theta = \alpha$, а для нижней $\Delta\theta = -\alpha$. Тогда

$$p_{\text{в}} = p_\infty - 2q_\infty \alpha \Big/ \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1};$$

$$p_{\text{н}} = p_\infty + 2q_\infty \alpha \Big/ \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}; \qquad (9.1)$$

$$\bar{p}_{\text{в}} = -2\alpha \Big/ \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}; \qquad (9.2)$$

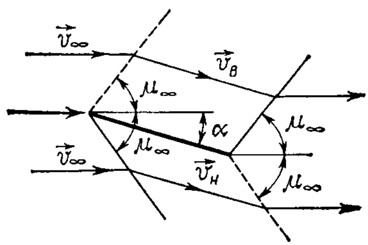


Рис. 9.1. Схема обтекания плоской пластинки сверхзвуковым потоком при малом угле атаки

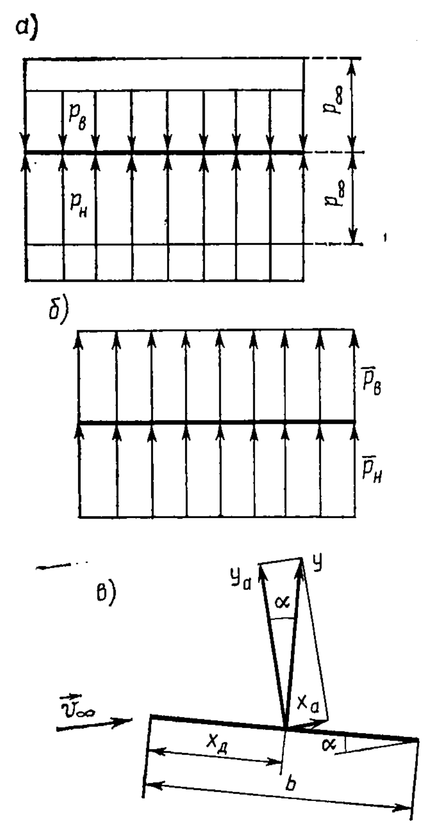


Рис. 9.2. Распределение давления (*а*), коэффициента давления (*б*) по пластинке; нормальная Y и подъемная $Y_а$ силы, волновое сопротивление $X_а$ (*в*)

$$\bar p_н = 2\alpha \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}\,. \qquad (9.2)$$

Отметим некоторые особенности обтекания пластинки сверхзвуковым потоком. В сверхзвуковом потоке в отличие от дозвукового давление по пластинке распределяется равномерно (рис. 9.2). Поэтому центр давления располагается посередине пластинки ($\bar x = 0{,}5$). В дозвуковом потоке, как известно, $\bar x_д = 0{,}25$. Кроме того, по формулам (9.2), $\bar p_н = |\bar p_в|$, т. е. по линейной теории в сверхзвуковом потоке подъемная сила одинаково создается как верхней, так и нижней поверхностями. В дозвуковом потоке примерно $^3/_4$ подъемной силы возникает под действием разрежения на верхней поверхности и только $^1/_4$ вызывается давлением на нижней поверхности.

Найдем нормальную силу, действующую на пластинку: $Y = (\bar p_н - \bar p_в) q_\infty b$. Проецируя эту силу на направление нормали к скорости невозмущенного потока и вдоль скорости $\vec v_\infty$, получаем подъемную силу $Y_а = Y\cos\alpha$ и волновое сопротивление $X_а = Y\sin\alpha$ (другие виды сопротивления отсутствуют).

При малых углах атаки, заменяя $\cos\alpha$ на 1, $\sin\alpha$ на α, получаем $Y_а = Y$, $X_а = Y\alpha$.

Отсюда

$$c_{yа} = c_y = \bar p_н - \bar p_в; \quad c_{xа} = c_y \alpha. \qquad (9.3)$$

Подставляем в формулы (9.3) выражения (9.2):

$$c_{yа} = c_y = 4\alpha \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}\,; \qquad (9.4)$$

$$c_{xа} = 4\alpha^2 \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}\,, \qquad (9.5)$$

где α — угол атаки, рад.

При малых углах атаки (на линейном участке зависимости $c_{yа}$ от α) коэффициент подъемной силы

$$c_{yа} = c_{yа}^{\alpha} \alpha. \qquad (9.6)$$

Из формулы (9.4)

$$c_{ya}^{\alpha} = 4 \Big/ \sqrt{\mathbf{M}_{\infty}^2 - 1}. \qquad (9.7)$$

Величина c_{ya}^{α} в сверхзвуковом потоке значительно меньше, чем в дозвуковом (8.8), причем чем больше $\mathbf{M}_{\infty}$, тем меньше c_{ya}^{α}.

Момент аэродинамической силы относительно передней кромки $M = -Yb/2$. Здесь положительным считается момент на кабрирование, т. е. момент, направленный в сторону увеличения угла атаки. Отсюда коэффициент момента

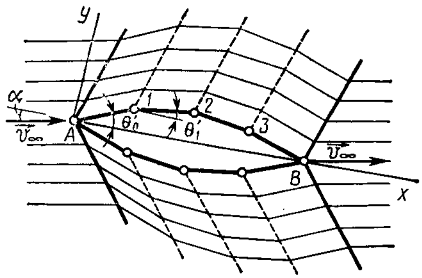


Рис. 9.3. Линеаризованное обтекание тонкого профиля сверхзвуковым потоком ($\alpha < \theta_0'$)

$$c_m = M \Big/ q_{\infty} b^2; \; c_m = -\frac{1}{2} c_y = -2\alpha \Big/ \sqrt{\mathbf{M}_{\infty}^2 - 1}. \qquad (9.8)$$

С увеличением числа $\mathbf{M}_{\infty}$ величина c_m уменьшается.

§ 9.2. ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Рассмотрим обтекание тонкого профиля с острыми кромками сверхзвуковым потоком. Эту задачу можно свести к последовательному обтеканию тупых углов, если плавный контур профиля заменить ломаной линией (рис. 9.3). В зависимости от толщины профиля и угла атаки могут быть различные случаи обтекания. При малых углах атаки $\alpha < \theta_0'$ на передней и задней кромках как со стороны нижней, так и со стороны верхней поверхностей возникают скачки уплотнения. Если угол атаки больше угла наклона касательной к поверхности в точке A, то на передней кромке со стороны нижней поверхности происходит течение уплотнения, а со стороны верхней поверхности — течение разрежения. Между передней и задней кромкой как на нижней, так и на верхней поверхностях при переходе от одного участка поверхности к другому возникает течение разрежения.

Предположим, что верхняя и нижняя поверхности заданы уравнениями $y_{в} = y_{в}(x)$, $y_{н} = y_{н}(x)$. Найдем давление на поверхности профиля. Для этого воспользуемся формулой (6.25).

На участке $A1$ угол поворота потока равен $(\alpha - \theta_0')$, где θ_0' — угол наклона элемента $A1$ к хорде, равный $(dy_{в}/dx)_{x=0}$. Если $\alpha > \theta_0'$, $(\alpha - \theta_0') > 0$, то при этом происходит течение разрежения; если $\alpha < \theta_0'$, $(\alpha - \theta_0') < 0$, возникает течение уплотнения. Давление на участке $A1$

$$p_1 = p_{\infty} - 2q_{\infty}(\alpha - \theta_0') \Big/ \sqrt{\mathbf{M}_{\infty}^2 - 1}. \qquad (9.9)$$

При переходе от элемента поверхности $A1$ к элементу 1, 2 поток поворачивается на угол $(\theta_0' - \theta_1')$. Здесь $\theta_1' = (dy_в/dx)_1$. При этом возникает течение разрежения, а

$$p_2 = p_1 - 2q_\infty\,(\theta_0' - \theta_1')\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,.$$

Подставляя сюда выражение (9.9), получаем

$$p_2 = p_\infty - 2q_\infty(\alpha - \theta_1')\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,. \tag{9.10}$$

Аналогично определяется давление на участках *2*, *3* и *3*, *B*.

В формулах (9.9) и (9.10) $(\alpha - \theta_0')$ и $(\alpha - \theta_1')$ представляют собой местные углы атаки, т. е. углы между элементами поверхности и вектором скорости невозмущенного потока. В любой точке верхней поверхности местный угол атаки представим в виде $(\alpha - dy_в/dx)$, а давление для точек верхней поверхности

$$p_в = p_\infty - [2q_\infty(\alpha - dy_в/dx)]\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,. \tag{9.11}$$

Коэффициент давления

$$\bar{p}_в = -[2(\alpha - dy_в/dx)]\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,. \tag{9.12}$$

Пользуясь формулами (6.25) и (6.26), можно определить давление, а также коэффициент давления в точках нижней поверхности:

$$p_н = p_\infty + [2q_\infty(\alpha - dy_н/dx)]\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,; \tag{9.13}$$

$$\bar{p}_н = [2(\alpha - dy_н/dx)]\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,. \tag{9.14}$$

Из формул (9.12) и (9.14) следует, что по линейной теории коэффициент давления в любой точке поверхности профиля при заданном значении M_∞ зависит только от местного угла атаки $(\alpha - dy_в/dx)$ или $(\alpha - dy_н/dx)$ и не зависит от наклона других элементов поверхности.

Кроме того, коэффициент давления можно представить в виде следующей суммы: $\bar{p} = \bar{p}^* + \bar{p}^{**}$, где $\bar{p}^* = \pm 2\alpha\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

Для точек верхней поверхности $\bar{p}^{**} = -(2dy_в/dx)\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$; для точек нижней поверхности $\bar{p}^{**} = -(2dy_н/dx)\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$. Для симметричных профилей ($y_в = -y_н$ и $dy_в/dx = -dy_н/dx$) коэффициент давления $p^{**} = (2dy_в/dx)\Big/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

В этих формулах p^* — коэффициент давления на поверхности профиля нулевой толщины (плоской пластинки) при заданном угле атаки, а $\bar{p}^{**}$ — коэффициент давления на поверхности заданного профиля при нулевом угле атаки.

Следовательно, в пределах применимости линейной теории влияние угла атаки и толщины профиля на значение коэффициента $\bar{p}$ можно исследовать независимо друг от друга: влияние угла атаки — на

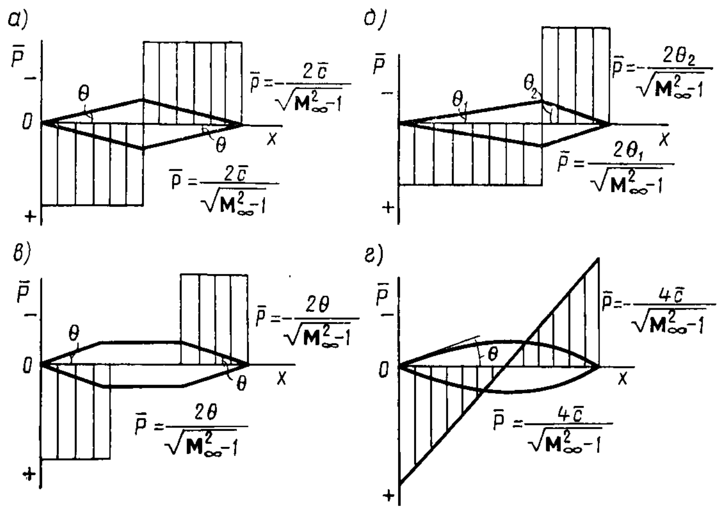


Рис. 9.4. Распределение коэффициента давления по поверхности профилей при $\alpha=0$:

а — ромбовидный профиль $\theta=\bar{c}$; *б* — четырехугольный профиль $\theta_1=\bar{c}/(2\bar{x}_c)$, $\theta_2=\bar{c}/2(1-\bar{x}_c)$; *в* — шестиугольный профиль $\theta=\bar{c}/2\bar{x}_c$; *г* — профиль, образованный дугами окружностей, $\theta_0=2\bar{c}$

примере обтекания плоской пластинки, влияние толщины и формы профиля — при $\alpha = 0$. Тогда суммарную эпюру распределения давления на поверхности профиля можно получить в результате наложения двух эпюр — эпюры распределения давления по поверхности плоской пластинки при $\alpha \neq 0$ (см. рис. 9.2) и эпюры давления по поверхности профиля при $\alpha = 0$.

Рассмотрим примеры распределения давления по поверхности симметричных профилей при $\alpha = 0$. Так как при этом условии давление в симметричных точках профиля одинаково, то при нулевом угле атаки кривые распределения давления по верхней и нижней поверхностям совпадают. Для построения эпюр распределения коэффициента давления отложим коэффициенты $\bar{p}$ по нормали к хорде, причем положительные значения — вниз от хорды, а отрицательные — вверх.

На рис. 9.4 для примера приведены распределения коэффициентов давления по поверхности ромбовидного (*а*), четырехугольного (*б*), шестиугольного (*в*) и чечевицеобразного (образованного двумя дугами окружностей) (*г*) профилей при $\alpha = 0$.

Найдем подъемную силу, сопротивление и момент относительно передней кромки профиля.

Подъемная сила, действующая на элементы нижней и верхней поверхностей (рис. 9.5), $dY_{\text{ан}} = p_{\text{н}} \cos\theta_{\text{н}}\, ds_{\text{н}} l$, $dY_{\text{ав}} = -p_{\text{в}} \cos\theta_{\text{в}}\, ds_{\text{в}}\, l$, где θ — местный угол атаки, равный $\alpha - dy/dx$; ds — длина элементарной дуги контура поверхности; l — длина участка крыла по раз-

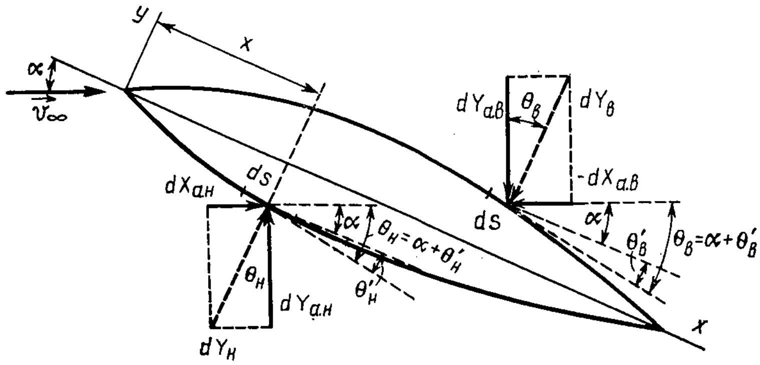


Рис. 9.5. Схема определения подъемной силы и сопротивления профиля

маху; индексы «н», «в» соответствуют величинам, относящимся к нижней и верхней поверхностям.

Для тонких профилей при малых углах атаки можно принять $ds_н = ds_в = dx$, $\cos\theta_н = 1$, $\cos\theta_в = 1$.

Тогда $dY_а = dY_{ан} + dY_{ав} = (p_н - p_в)ldx$, или $dY_а = (\bar{p}_н - \bar{p}_в)\,q_\infty l dx$.

Суммарная подъемная сила $Y_а = q_\infty l \int\limits_0^b (\bar{p}_н - \bar{p}_в)\,dx$.

Подставляя вместо $\bar{p}_н$ и $\bar{p}_в$ выражения (9.14) и (9.12) и учитывая, что $\int\limits_0^b \frac{dy_н}{dx}\,dx = \int\limits_0^b \frac{dy_в}{dx}\,dx = 0$, получаем

$$Y_а = \left(4\alpha \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}\right) q_\infty l b,$$

где b — хорда профиля.

Отсюда

$$c_{yа} = 4\alpha \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1} \qquad (9.15)$$

Из формулы (9.15) следует, что *в пределах применимости линейной теории коэффициент подъемной силы не зависит от формы и толщины профиля и совпадает при прочих равных условиях с коэффициентом подъемной силы плоской пластинки* (9.4).

Сопротивление, действующее на элементы нижней и верхней поверхностей $lds_н = ldx$, $lds_в = ldx$, равно $dX_{ан} = p_н \sin\theta_н l dx$, $dX_{ав} = -p_в \sin\theta_в l dx$, где при малых местных углах атаки $\theta_н$ и $\theta_в$ можно принять, что $\sin\theta_н = \theta_н = \alpha - dy_н/dx$, $\sin\theta_в = \theta_в = \alpha - dy_в/dx$. Тогда

$$dX_а = dX_{ан} + dX_{ав} = (p_н\theta_н - p_в\theta_в)\,ldx.$$

Подставляя вместо $p_{н}$ и $p_{в}$ выражения (9.13) и (9.11) и интегрируя, получаем

$$X_a = \left(4\alpha^2 \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1} + B \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}\right) q_\infty l b.$$

Отсюда

$$c_{xa} = 4\alpha^2 \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1} + B \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}. \tag{9.16}$$

Здесь

$$B = \frac{2}{b} \int_0^b \left[\left(\frac{dy_{н}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_{в}}{dx}\right)^2\right] dx. \tag{9.17}$$

Преобразуем выражение (9.17). Для этого ординаты профиля представим в виде $y_{н} = c\bar{y}_{н}(\bar{x})$, $y_{в} = c\bar{y}_{в}(\bar{x})$, где c — толщина профиля. Тогда

$$\frac{dy_{н}}{dx} = \bar{c}\,\frac{d\bar{y}_{н}}{d\bar{x}}, \quad \frac{dy_{в}}{dx} = \bar{c}\,\frac{d\bar{y}_{в}}{d\bar{x}}.$$

Здесь $\bar{c} = c/b$.

Подставляя эти выражения в формулу (9.17), находим

$$B = 2\bar{c}^2 \int_0^1 \left[\left(\frac{d\bar{y}_{н}}{d\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}_{в}}{d\bar{x}}\right)^2\right] d\bar{x}.$$

Введем следующее обозначение: $2\int_0^1 \left[\left(\frac{d\bar{y}_{н}}{d\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}_{в}}{d\bar{x}}\right)^2\right] d\bar{x} = k_1$, где k_1 — коэффициент, зависящий от формы профиля. Тогда $B = k_1\bar{c}^2$.

Подставляя выражение для B в формулу (9.16), получаем

$$c_{xa} = 4\alpha^2 \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1} + k_1\bar{c}^2 \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}. \tag{9.18}$$

Отсюда следует, что *коэффициент волнового сопротивления профиля можно представить в виде суммы двух коэффициентов сопротивления: минимального коэффициента волнового сопротивления* (*при* $\alpha = 0$)

$$c_{xaв} = k_1\bar{c}^2 \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \tag{9.19}$$

зависящего при заданном значении M_∞ *только от формы профиля и относительной толщины, и коэффициента волнового сопротивления профиля нулевой толщины* ($\bar{c} = 0$) *при заданном угле атаки*

$$c_{xai} = 4\alpha^2 \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \tag{9.20}$$

совпадающего с коэффициентом волнового сопротивления плоской пластинки (9.5). Это сопротивление принято называть *индуктивно-волновым*, поскольку оно возникает только при $\alpha \neq 0$ и $c_{ya} \neq 0$.

В формуле (9.19) для ромбовидного профиля $k_1 = 4$, для четырехугольного $k_1 = 1/[\bar{x}_c(1 - \bar{x}_c)]$, для шестиугольного $k_1 = 2/\bar{x}_c$, для профиля, образованного дугами окружности, $k_1 = 16/3$. Наименьшее волновое сопротивление при прочих равных условиях имеет ромбовидный профиль.

Составим выражение для момента сил давления относительно передней кромки профиля: $M = \int\limits_0^b (\bar{p}_н - \bar{p}_в)\, q_\infty l x dx$. Подставляя сюда выражения $\bar{p}_н$ и $\bar{p}_в$ по формулам (9.14) и (9.12), в результате интегрирования получаем

$$c_m = M/q_\infty l b^2 = -2\alpha \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1} + c_{m0},$$

где c_m — коэффициент момента относительно передней кромки профиля; c_{m0} — коэффициент момента при нулевом угле атаки:

$$c_{m0} = \frac{2\bar{c}}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int\limits_0^1 \left(\frac{d\bar{y}_н}{d\bar{x}} + \frac{d\bar{y}_в}{d\bar{x}}\right) \bar{x} d\bar{x}.$$

Для симметричного профиля $d\bar{y}_н/dx = -d\bar{y}_в/dx$. Поэтому

$c_{m0} = 0$, а $c_m = -2\alpha \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

Зная значения коэффициентов c_m и c_{ya}, можно определить положение *аэродинамического фокуса*, т. е. точки, относительно которой момент аэродинамических сил не зависит от угла атаки (точки приложения подъемной силы, зависящей от угла атаки). Для этого составим выражение для момента $M(x)$ относительно произвольной точки профиля: $M(x) = M + Y_a x$. Тогда $c_m(\bar{x}) = c_m + c_{ya}\bar{x}$. Подставляем сюда выражения для c_m и c_{ya}:

$$c_m(\bar{x}) = c_{m0} + \left(4\alpha \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}\right)(\bar{x} - 1/2). \tag{9.21}$$

Если рассматриваемая точка совпадает с фокусом ($x = x_F$), то коэффициент момента не зависит от α и равен $c_m = c_{m0}$. Тогда $\bar{x}_F = 1/2$.

Следовательно, фокус тонкого профиля в сверхзвуковом потоке располагается на середине хорды. Как известно, в дозвуковом потоке фокус тонкого профиля отстоит от передней кромки на расстоянии $^1/_4$ хорды.

Отметим пределы применимости метода малых возмущений (линейной теории). Этот метод дает достаточно хорошие результаты для тонких ($\bar{c} \leqslant 0{,}06$) профилей в диапазоне $1{,}2 < M_\infty < 5$.

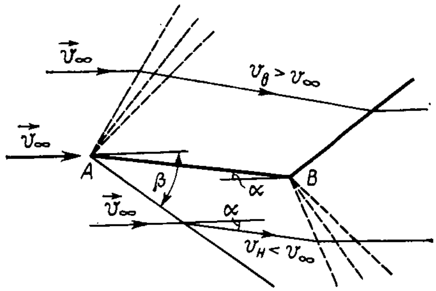


Рис. 9.6. Обтекание плоской пластинки сверхзвуковым потоком (к методу скачков-разрежений)

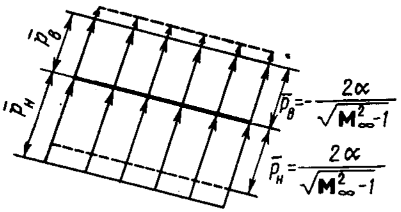


Рис. 9.7. Распределение коэффициента давления по пластинке:
——— метод скачков-разрежений;
— — — метод малых возмущений

В трансзвуковой области ($M_\infty - 1) \ll 1$ линейная теория неприменима, так как при сравнительно небольшой сверхзвуковой скорости набегающего потока при обтекании даже тонких тел возникают отсоединенные скачки уплотнения, за центральным участком которых поток становится дозвуковым. Для гиперзвуковых скоростей ($M_\infty \gg 1$) она также неприменима, так как при этом основные допущения метода могут не выполняться: в гиперзвуковом потоке малое относительное изменение скорости приводит к значительному изменению давления, плотности, температуры (см. гл. 11).

Как отмечено в гл. 7, метод малых возмущений применяется в дозвуковом докритическом потоке ($M_\infty < M_{кр}$). В околозвуковой области ($M_{кр} < M_\infty < 1$) этот метод неприменим, так как в указанном диапазоне чисел M_∞ при дозвуковой скорости набегающего потока в окрестности крыла появляются зоны местных сверхзвуковых скоростей, которые замыкаются прямыми скачками уплотнения.

§ 9.3. МЕТОД СКАЧКОВ-РАЗРЕЖЕНИЙ

В § 9.1 и 9.2 приведены простые формулы для определения распределенных и суммарных аэродинамических характеристик профилей, полученные на основе метода малых возмущений. При сверхзвуковом обтекании профилей распределение давления по их поверхности можно рассчитать, используя соотношения для косого скачка уплотнения и течения разрежения (Прандтля — Майера). Этот метод обычно называют *методом скачков-разрежений.*

Например, давление на поверхности плоской пластинки (рис. 9.6) в сверхзвуковом потоке можно определить по теории косых скачков уплотнения (для нижней поверхности) и на основе течения Прандтля—Майера (для верхней поверхности).

Из рис. 9.7, на котором приведено распределение коэффициента давления по пластинке, видно, что метод малых возмущений дает заниженное давление как на нижней, так и на верхней поверхностях. Отсюда следует, что ошибка в определении суммарных аэро-

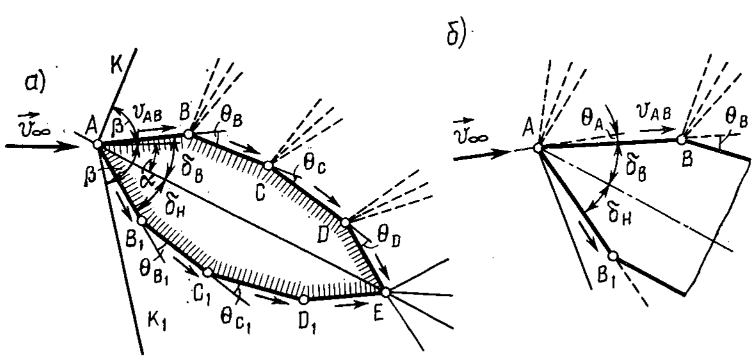


Рис. 9.8. Обтекание профилей, составленных из прямолинейных участков, сверхзвуковым потоком:
а — $\alpha<\delta_в$; *б* — $\alpha>\delta_в$

динамических характеристик, т. е. разности $(\bar{p}_н - \bar{p}_в)$, на основе метода малых возмущений, очевидно, меньше, чем при определении коэффициента давления.

Аналогично рассчитывается давление на отдельных участках профилей, составленных из прямолинейных отрезков (рис. 9.8). При обтекании нижней поверхности на передней кромке возникает косой скачок уплотнения, соответствующий углу поворота потока, равному $\alpha + \delta_н$. При обтекании верхней поверхности скачок уплотнения возникает, если $\alpha < \delta_в$. При этом угол поворота равен $(\delta_в - \alpha)$ (рис. 9.8, *а*). По величинам $\mathbf{M}_\infty$ и углам $(\alpha + \delta_н)$ и $(\delta_в - \alpha)$, пользуясь соотношениями для косого скачка уплотнения или соответствующей таблицей, можно определить угол наклона скачков уплотнения, отношение давлений p/p_∞, а затем и коэффициенты давления на участках AB_1 и AB. Кроме того, для расчета коэффициента давления на последующих участках поверхности необходимо определить число $\mathbf{M}$ и коэффициент восстановления полного давления σ за косыми скачками уплотнения AK и AK_1.

Между передней и задней кромками как на верхней, так и на нижней поверхностях происходит течение разрежения — последовательное обтекание ряда углов, превышающих 180°: ABC, BCD (на верхней поверхности) и AB_1C_1, $B_1C_1D_1$ (на нижней поверхности). При этом углы поворота потока соответственно равны θ_B, θ_C, ..., θ_{B_1}, θ_{C_1}, ...

Зная число $\mathbf{M}$ за косыми скачками уплотнения и задаваясь углами θ_B, θ_{B1} по таблице течения разрежения (Прандтля — Майера), можно определить отношение p/p_{02} для участков B_1C_1 и BC, где p_{02} — давление торможения за косыми скачками уплотнения AK и AK_1. Тогда $p/p_\infty = (p/p_{02})\sigma(p_{01}/p_\infty)$. Здесь p_{01} — давление изэнтропического торможения: $p_{01}/p_\infty = [1 + (k-1)\mathbf{M}_\infty^2/2]^{k/(k-1)}$.

Таким образом, последовательно можно найти давление по всей поверхности профиля. При больших углах атаки, когда $\alpha > \delta_в$, в области передней кромки на верхней поверхности происходит тече-

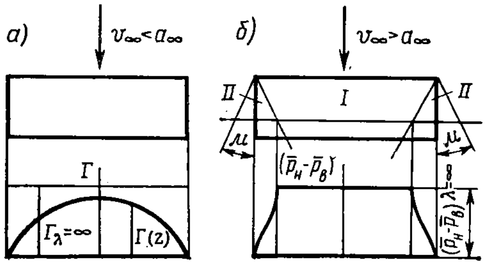


Рис. 9.9. Влияние концов крыла в дозвуковом (*а*) и в сверхзвуковом (*б*) потоках:
I — область, на которую концы крыла не влияют; *II* — область влияния концов крыла

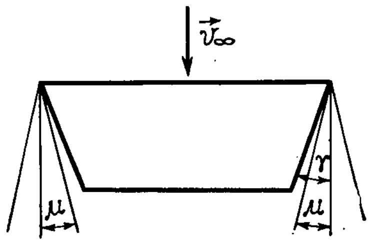


Рис. 9.10. Пример формы крыла в плане, позволяющей при $\gamma > \mu$ устранить влияние боковых кромок

ние разрежения (рис. 9.8, *б*). Поэтому при определении давления на участке *AB* нужно пользоваться таблицей течения разрежения (Прандтля — Майера). При этом $p/p_\infty = (p/p_{01})(p_{01}/p_\infty)$.

Следует отметить, что изложенная схема расчета применима лишь при таких углах атаки α, при которых углы поворота потока у передней кромки меньше предельного угла для данного числа M_∞. В противном случае вместо косого скачка образуется отсоединенный криволинейный скачок уплотнения (см. § 5.6).

§ 9.4. ОСОБЕННОСТИ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Обтекание крыла конечного размаха сверхзвуковым потоком существенно отличается от обтекания крыла дозвуковым потоком. Это объясняется различным характером распространения возмущений в сверхзвуковом и дозвуковом потоках.

Оценим влияние концов на примере прямоугольного крыла. Как известно, в дозвуковом потоке влияние концов проявляется по всей поверхности крыла. Вследствие перетекания воздуха через боковые кромки циркуляция скорости в дозвуковом потоке уменьшается во всех сечениях (рис. 9.9, *а*). В сверхзвуковом же потоке влияние концов крыла проявляется только на части поверхности, а именно в областях *II* (рис. 9.9, *б*), ограниченных конусами возмущения, проведенными через передние кромки концевых сечений. Распределение давления в области *I* совпадает с соответствующим распределением давления по поверхности крыла бесконечного размаха. Разность давлений $(\bar p_н - \bar p_в)$ и подъемная сила уменьшаются только в областях *II*. Отношение площади области *II* ко всей площади прямоугольного крыла равно $S_2/S = 1\Big/\left(\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1}\right)$. Поэтому уменьшение коэффициента подъемной силы зависит от величины произведения $\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1}$. Чем больше число M_∞ и удлинение крыла λ, тем меньше влияние концов на аэродинамические характеристики крыла. Более того, в сверхзвуковом потоке влияние концов иногда можно устранить, напри-

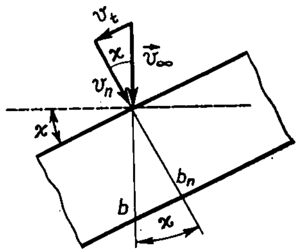


Рис. 9.11. Обтекание пластинки со скольжением

мер в случае крыла со скошенными боковыми кромками с углом $\gamma > \mu$ (рис. 9.10). Все сечения такого крыла работают как сечения крыла бесконечного размаха.

Значительно большее влияние на аэродинамические характеристики крыла оказывает направление передней кромки. Для того чтобы яснее представить характер обтекания крыла сверхзвуковым потоком, рассмотрим сначала обтекание бесконечно длинной пластинки с углом скольжения, равным χ (рис. 9.11). Найдем проекцию вектора скорости набегающего потока $\vec{v}_\infty$ на направление перпендикуляра к передней кромке (нормальную составляющую скорости) $v_n = v_\infty \cos\chi$ и параллельную передней кромке $v_t = v_\infty \sin\chi$. На распределение давления влияет только проекция скорости v_n, которая составляет с плоскостью крыла угол α_n, т. е. $\sin\alpha_n = \sin\alpha/\cos\chi$, где α — угол атаки, отсчитываемый от направления вектора скорости набегающего потока $\vec{v}_\infty$.

Так как при малых углах атаки $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\alpha_n \approx \alpha_n$, то $\alpha_n = \alpha/\cos\chi$.

Число $\mathbf{M}_n$ и скоростной напор q_n, соответствующие нормальной составляющей скорости, равны: $\mathbf{M}_n = \mathbf{M}_\infty \cos\chi$, $q_n = q_\infty \cos^2\chi$, где $q_\infty = \rho_\infty v_\infty^2/2$.

В зависимости от угла скольжения χ и числа $\mathbf{M}_\infty$ возможны следующие случаи обтекания крыла сверхзвуковым потоком.

1. Нормальная к передней кромке составляющая скорости может быть меньше скорости звука. Тогда $v_\infty \cos\chi < a_\infty$ и $\mathbf{M}_\infty \cos\chi < 1$. Отсюда $\mathbf{M}_\infty < 1/\cos\chi$ или $\cos\chi < 1/\mathbf{M}_\infty$. Поэтому $\cos\chi < \sin\mu$, а $\chi > \pi/2 - \mu$. Это неравенство означает, что в этом случае на переднюю кромку набегает возмущенный поток, так как любая точка передней кромки находится внутри конуса возмущений от любой другой, расположенной правей этой точки (рис. 9.12, *а*). При этом через переднюю кромку происходит взаимодействие между нижней и верхней поверхностями крыла. Обтекание сечений скользящего крыла в области передней кромки аналогично дозвуковому обтеканию, несмотря на то что скорость набегающего потока v_∞ сверхзвуковая. В этом случае ($v_n < a_\infty$) переднюю кромку называют *дозвуковой*.

Введем параметр стреловидности $n = \operatorname{tg}\chi \Big/ \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}$. Для дозвуковой передней кромки $n > 1$.

2. При увеличении числа $\mathbf{M}_\infty$ линии возмущения приближаются к передней кромке. При $\mathbf{M}_\infty = 1/\cos\chi$ $\mathbf{M}_n = 1$, $\chi = \pi/2 - \mu$ и параметр стреловидности $n = 1$. Переднюю кромку в этом случае называют *звуковой*.

3. Нормальная составляющая скорости может стать больше скорости звука: $v \cos\chi > a_\infty$. Отсюда $\mathbf{M}_\infty > 1/\cos\chi$, $\chi < \pi/2 - \mu$, $n < 1$.

На переднюю кромку набегает невозмущенный сверхзвуковой

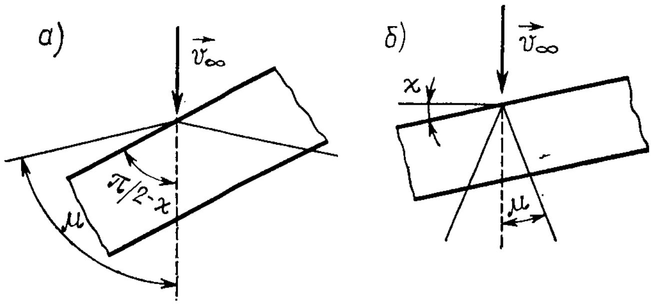


Рис. 9.12. Дозвуковая *(а)* и сверхзвуковая *(б)* передние кромки

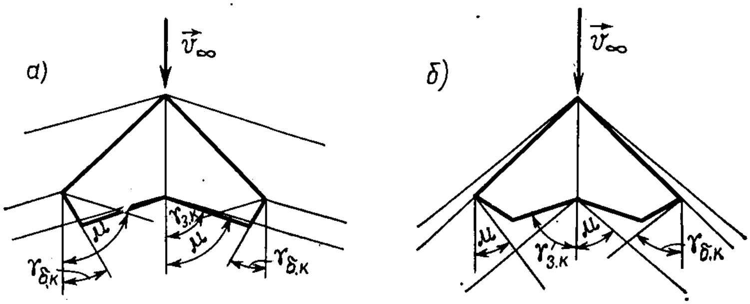


Рис. 9.13. Крылья с дозвуковыми *(а)* и сверхзвуковыми *(б)* задними и боковыми кромками

поток (рис. 9.12, *б*). В этом случае переднюю кромку называют *сверхзвуковой*.

Аналогично можно ввести понятие о дозвуковых, звуковых и сверхзвуковых задних и боковых кромках крыла конечного размаха (рис. 9.13). Очевидно, что форма задней (боковой) кромки не влияет на обтекание крыла, если она сверхзвуковая.

§ 9.5. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРЫЛА БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА СО СКОЛЬЖЕНИЕМ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПЕРЕДНИХ КРОМКАХ

Рассмотрим обтекание пластинки бесконечного размаха с углом скольжения, равным χ. Так как обтекание пластинки со скольжением подобно обтеканию плоской пластинки ($\chi = 0$) потоком со скоростью v_n, то при этом можно пользоваться формулами, полученными в § 9.1, с заменой в них $\mathbf{M}_\infty$ на $\mathbf{M}_n$ и α на α_n.

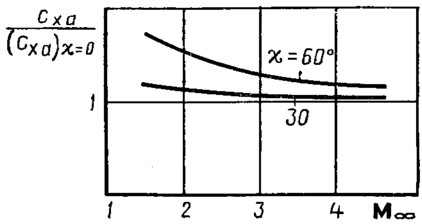


Рис. 9.14. Влияние угла скольжения на коэффициент волнового сопротивления пластинки при сверхзвуковой передней кромке

Обозначим $\bar{p}_1 = (p - p_\infty)/q_n$ коэффициент давления, отнесенный к скоростному напору q_n. Тогда $\bar{p}_1 = \pm 2\alpha_n \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}$, где знак «—» соответствует верхней поверхности, а «+» — нижней.

Коэффициент давления $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty = p_1 \cos^2 \chi$. Подставляя сюда выражение $\bar{p}_1$, в котором $\alpha_n = \alpha/\cos\chi$, а $M_n = M_\infty \cos\chi$, находим

$$\bar{p} = \pm 2\alpha \cos\chi \Big/ \sqrt{M_\infty^2 \cos^2\chi - 1}\,. \tag{9.22}$$

Получим выражения для коэффициентов подъемной силы c_{ya} и волнового сопротивления c_{xa}. При малых углах атаки $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$

$$c_{ya} = c_y = \bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}} = \left(4\cos\chi \Big/ \sqrt{M_\infty^2 \cos^2\chi - 1}\right)\alpha; \tag{9.23}$$

$$c_{xa} = c_{ya}\alpha. \tag{9.24}$$

Найдем отношение коэффициента волнового сопротивления пластинки со скольжением c_{xa} и без скольжения $(c_{xa})_{\chi=0}$:

$$c_{xa}/(c_{xa})_{\chi=0} = \left(\sqrt{M_\infty^2 - 1} \Big/ \sqrt{M_\infty^2 \cos^2\chi - 1}\right)\cos\chi. \tag{9.25}$$

Из формулы (9.25) видно, что $c_{xa}/(c_{xa})_{\chi=0} > 1$, т. е. крыло со скольжением при сверхзвуковой передней кромке имеет большее волновое сопротивление, чем крыло без скольжения. С увеличением числа M_∞ влияние угла скольжения уменьшается (рис. 9.14).

§ 9.6. ТЕОРИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим обтекание тонкого слабоизогнутого крыла конечного размаха произвольной формы в плане установившимся сверхзвуковым потоком невязкого газа. При этих условиях вносимые крылом возмущения малы. Поэтому можно воспользоваться результатами линейной теории.

Потенциал скорости $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, где φ' — потенциал скорости возмущений.

Функции φ и φ' удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка (6.21):

$$(M_\infty^2 - 1)\,\partial^2\varphi/\partial x^2 - \partial^2\varphi/\partial y^2 - \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0; \tag{9.26}$$

$$(M_\infty^2 - 1)\,\partial^2\varphi'/\partial x^2 - \partial^2\varphi'/\partial y^2 - \partial^2\varphi'/\partial z^2 = 0. \tag{9.27}$$

Рассмотрим граничные условия, которым должен удовлетворять потенциал скорости возмущений φ'.

Крыло вызывает возмущения внутри волновой поверхности Σ, представляющей собой огибающую конусов возмущений (конусов Маха) с вершинами в точках передней кромки крыла (рис. 9.15). Волновая поверхность разбивает всю область потока на две части. Внутри волновой поверхности $\varphi' \neq 0$, а вне ее $\varphi' = 0$, т. е. граничное условие на поверхности Σ имеет вид

$$|\varphi'(x, y, z)|_\Sigma = 0. \qquad (9.28)$$

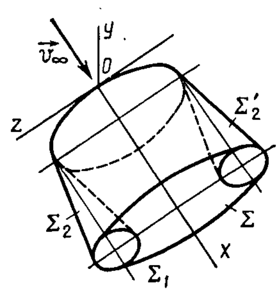


Рис. 9.15. Крыло конечного размаха в сверхзвуковом потоке

Согласно условию непротекания на поверхности крыла, составляющая скорости вдоль нормали к поверхности $v_n = 0$. Тогда, используя выражение (7.85), получаем

$$\partial\varphi'/\partial y = -v_\infty \alpha(x, z). \qquad (9.29)$$

Здесь $\alpha(x, z)$ — местный угол атаки в данной точке поверхности крыла.

В линейной теории условие (9.29) можно представить для проекции крыла на плоскость xOz, т. е. при $y = 0$.

При наличии подъемной силы ($c_{ya} \neq 0$) за крылом конечного размаха образуется вихревая пелена Σ_1. Для тонкого крыла при малых углах атаки можно принять, что свободные вихри пелены параллельны скорости невозмущенного потока, а ширина вихревой пелены равна размаху крыла. На вихревой пелене составляющая скорости v_z' претерпевает разрыв, а составляющая скорости $v_y' = \partial\varphi'/\partial y$ и давление непрерывны.

$$(\partial\varphi'/\partial y)_{y=-0} = (\partial\varphi'/\partial y)_{y=+0}; \qquad (9.30)$$

$$(p)_{y=-0} = (p)_{y=+0}. \qquad (9.31)$$

Здесь индексы $+0$ и -0 указывают на то, что соответствующие значения берутся при приближении точки к вихревой пелене сверху или снизу.

На основании линеаризованного уравнения Бернулли (6.18) непрерывность давления означает непрерывность производной $\partial\varphi'/\partial x$ на вихревой пелене:

$$(\partial\varphi'/\partial x)_{y=-0} = (\partial\varphi'/\partial x)_{y=+0}. \qquad (9.32)$$

Из условия (9.30) следует, что потенциал скорости возмущений является нечетной функцией относительно координаты y, т. е. $\varphi'(x, -y, z) = -\varphi'(x, +y, z)$. Тогда

$$(\partial\varphi'/\partial x)_{y=-0} = -(\partial\varphi'/\partial x)_{y=+0}. \qquad (9.33)$$

Следовательно, на вихревой пелене одновременно должны выполняться условия (9.32) и (9.33), а это может быть только в том случае, когда

$$(\partial\varphi'/\partial x)_{\Sigma_1} = 0. \tag{9.34}$$

Потенциал скорости возмущения является непрерывной функцией всюду вне крыла и области Σ_1. Поэтому φ' — непрерывная функция в областях Σ_2 и Σ_2', представляющих собой часть плоскости $y = 0$, отсекаемую волновой поверхностью и расположенную вне крыла и вихревой пелены. Учитывая, что φ' — нечетная функция, имеем

$$[\varphi'(x,\ 0,\ z)]_{\Sigma_2,\ \Sigma_2'} = 0. \tag{9.35}$$

Таким образом, задача о крыле конечного размаха в сверхзвуковом потоке сводится к отысканию потенциала скорости возмущений $\varphi'(x, y, z)$ внутри волновой поверхности Σ, удовлетворяющего уравнению (9.27) и граничным условиям (9.28), (9.29), (9.34) и (9.35).

Ввиду того что потенциал скорости возмущений удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, поток в окрестности тонкого крыла произвольной формы можно получить в результате наложения потока около крыла нулевой толщины при заданном угле атаки (φ_1') и потока около крыла с симметричным профилем при нулевом угле атаки (φ_2'). При этом уравнение поверхности крыла с симметричным профилем $y = \pm(y_\text{в} - y_\text{н})/2$, крыла нулевой толщины, т. е. срединной поверхности, $y = (y_\text{в} + y_\text{н})/2$. Здесь $y_\text{в}$, $y_\text{н}$ — координаты верхней и нижней поверхностей исходного крыла, знак «+» соответствует верхней, а «—» — нижней поверхности крыла с симметричным сечением.

Зная суммарный потенциал скорости возмущений $\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2'$, можно определить скорость в каждой точке потока, в том числе на поверхности крыла, а также найти давление и коэффициент давления

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2, \tag{9.36}$$

где $\bar{p}_1$ — коэффициент давления на крыле нулевой толщины при $\alpha \neq 0$; $\bar{p}_2$ — коэффициент давления на поверхности крыла с симметричным профилем при $\alpha = 0$.

Давление p_2 не создает подъемной силы. Поэтому для определения подъемной силы и момента тонкого крыла достаточно решить задачу обтекания крыла нулевой толщины при заданном угле атаки.

Коэффициент сопротивления равен сумме коэффициента сопротивления c_{x0} при $\alpha = 0$ и коэффициента сопротивления $c_{x\text{a}i}$, обусловленного подъемной силой:

$$c_{x\text{a}} = c_{x0} + c_{x\text{a}i}\,. \tag{9.37}$$

§ 9.7. *МЕТОД РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

В настоящее время имеются различные методы решения уравнения (9.27) при указанных граничных условиях. Наиболее эффективными из них являются методы распределенных источников и конических течений.

Метод распределенных источников позволяет решить задачу обтекания тонкого крыла произвольной формы в плане при малом угле атаки [16]. Рассмотрим сущность этого метода. Предположим, что заданы уравнения поверхности крыла $y = f(x, z)$, а также передней и задней кромок $x = \psi_1(z)$ и $x = \psi_2(z)$.

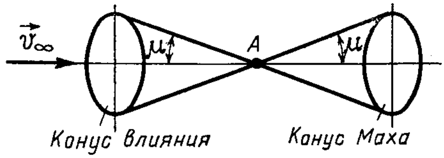


Рис. 9.16. Схема построения конуса влияния

Так как уравнение (9.27) является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то для его решения можно пользоваться методом наложения потенциальных потоков. Тогда искомую функцию φ' можно представить в виде суммы потенциалов скоростей простейших потоков, удовлетворяющих этому уравнению. В качестве такого простейшего потока рассмотрим точечный источник.

При $\mathbf{M}_\infty > 1$ потенциал скорости точечного источника определяется по формуле

$$\varphi^* = -\frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \left(\mathbf{M}_\infty^2 - 1\right)[y^2 + (z-\zeta)^2]}}, \tag{9.38}$$

где q — интенсивность источника; ξ, ζ — его координаты в плоскости xz; x, y, z — координаты произвольной точки пространства.

Путем непосредственной подстановки φ^* в уравнение (9.27) можно убедиться, что функция φ^* удовлетворяет уравнению (9.27). Поэтому воздействие крыла на поток можно заменить системой источников, непрерывно распределенных по поверхности крыла или на проекции поверхности на плоскость $y = 0$. Для того чтобы выполнить все граничные условия, необходимо распределить источники также и вне крыла — на вихревой пелене и в областях Σ_2, Σ_2'. Интенсивность распределенных источников определяется из граничных условий. При этом система источников в сверхзвуковом потоке создает такой же поток возмущения, как и крыло при заданном угле атаки.

При замене крыла системой источников потенциал скорости возмущений, вызываемых крылом в любой точке пространства (x, y, z), можно определить, складывая потенциалы скорости возмущения источников, влияние которых проявляется в данной точке:

$$\varphi'(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{q(\xi, \zeta)\,d\xi d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \left(\mathbf{M}_\infty^2 - 1\right)[y^2+(z-\zeta)^2]}}. \tag{9.39}$$

Для определения области интегрирования S из данной точки достаточно провести *конус влияния*, который в отличие от конуса Маха ориентирован навстречу набегающему потоку (рис. 9.16). Область интегрирования S зависит от числа $\mathbf{M}_\infty$ и координат рассматриваемой точки.

Следовательно, в отличие от обтекания крыла бесконечного размаха, когда скорость возмущения в какой-либо точке профиля зависит от угла наклона элемента профиля только в этой точке и не зависит от наклона соседних элементов (см. § 9.2), в случае обтекания крыла конечного размаха на величину потенциала скорости в данной точке влияют все источники, расположенные внутри конуса влияния.

§ 9.8. КРЫЛО СО СВЕРХЗВУКОВЫМИ КРОМКАМИ

Рассмотрим обтекание крыла сверхзвуковым потоком, при котором кромки крыла являются сверхзвуковыми. Тогда функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ должны удовлетворять условиям

$$d\psi_1/dz < \operatorname{ctg}\mu; \quad d\psi_2/dz < \operatorname{ctg}\mu. \tag{9.40}$$

Область, образующаяся в результате пересечения конуса влияния с плоскостью $y = 0$, состоит из точек поверхности крыла и точек невозмущенного потока. В этом случае область интегрирования не выходит за пределы крыла. При определении потенциала скорости в произвольных точках x, y, z над крылом (рис. 9.17, *а*) она ограничена передней кромкой и кривой $(x-\xi)^2 - (\mathrm{M}_\infty^2 - 1)[y^2 + (z-\zeta)^2] = 0$. При вычислении потенциала в точках поверхности крыла $(x, 0, z)$ область интегрирования заключена между передней кромкой и прямыми $x - \xi = \pm\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\,(z - \zeta)$ — образующими конуса влияния (рис. 9.17, *б*).

Следовательно, в случае крыла со сверхзвуковыми кромками для определения потенциала скорости возмущения в любой точке достаточно знать распределение источников только по поверхности крыла. Для нахождения интенсивности источников q воспользуемся граничным условием (9.29). В формуле (9.39) вместо области интегрирования S можно взять область $S + S^*$, так как за пределами волновой поверхности в области S^*, указанной на рис. 9.17, интенсивность источников $q = 0$. Подставляя пределы интегрирования для области $S + S^*$, получаем

$$\varphi'(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{x_1-y_1}\int\limits_{z_1-\sqrt{(x_1-\xi)^2+y_1^2}}^{z_1+\sqrt{(x_1-\xi)^2+y_1^2}} \frac{q(\xi, \zeta)\,d\xi d\zeta}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 - y_1^2 - (z-\zeta)^2}}.$$

Здесь $\quad x_1 = x\Big/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\,; \ y_1 = y; \ z_1 = z.$

Преобразуем внутренний интеграл, введя новую переменную интегрирования, по формуле

$$\frac{z_1 - \zeta}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 - y_1^2}} = \sin u; \quad du = -\frac{d\zeta}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 - y_1^2 - (z_1-\zeta)^2}}.$$

При этом

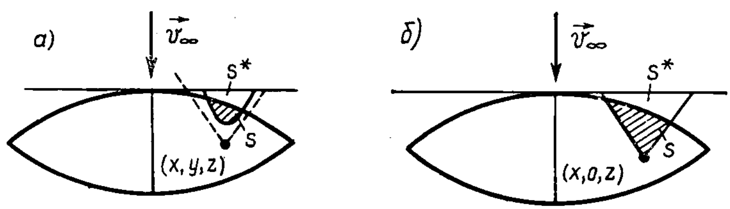


Рис. 9.17. Области интегрирования при определении потенциала скорости возмущения в окрестности крыла (*а*) и на плоскости $y=0$(*б*)

$$\int\limits_{z_1-\sqrt{(x_1-\xi)^2-y_1^2}}^{z_1+\sqrt{(x_1-\xi)^2-y_1^2}} \frac{q(\xi,\ \zeta)\,d\xi d\zeta}{\sqrt{(x_1-\xi)^2-y_1^2-(z_1-\zeta)^2}} =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} q\left[\xi,\ z_1-\sqrt{(x_1-\xi)^2-y_1^2}\ \sin u\right] du.$$

Тогда

$$\varphi' = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{x_1-y_1}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} q\left[\xi,\ z_1-\sqrt{(x_1-\xi)^2-y_1^2}\ \sin u\right] du d\xi.$$

Найдем производную от φ' по координате y_1. Для этого воспользуемся правилом дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y_1} = -\frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} q\,[(x_1-y_1),\ z_1]\,du\right\}\frac{\partial(x_1-y_1)}{\partial y_1} -$$

$$-\frac{y_1}{2\pi}\int\limits_0^{x_1-y_1}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\partial q}{\partial\zeta}\frac{\sin u}{\sqrt{(x_1-\xi)^2-y_1^2}}\,du d\xi.$$

Отсюда, предполагая, что $\partial q/\partial\zeta$ — ограниченная функция, при $y=0$ получаем $(\partial\varphi'/\partial y_1)_{y_1=0} = 0{,}5q\,(x_1,\ z_1)$

или

$$q\,(x_1,\ z_1) = 2\,(\partial\varphi'/\partial y)_{y=0}. \qquad (9.41)$$

Подставляя в формулу (9.41) выражение для определения $\partial\varphi'/\partial y$ (9.29), имеем

$$q = -2v_\infty\,\alpha\,(x_1,\ z_1). \qquad (9.42)$$

Следовательно, интенсивность источника в каждой точке поверхности крыла при заданной скорости набегающего потока определяется углом наклона касательной плоскости к поверхности крыла в этой точке относительно оси x.

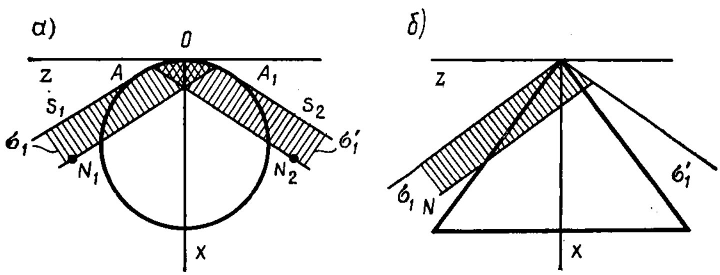


Рис. 9.18. Крылья с конечным участком сверхзвуковой передней кромки (*а*) и полностью дозвуковой передней кромкой (*б*)

Подставляя выражение (9.42) в формулу (9.39), получаем

$$\varphi'(x_1, y_1, z_1) = \frac{v_\infty}{\pi} \iint\limits_S \alpha(x_1, z_1) \frac{d\xi d\zeta}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 - y_1^2 - (z_1-\zeta)^2}}, \quad (9.43)$$

для точек поверхности крыла ($y = 0$)

$$\varphi' = \frac{v_\infty}{\pi} \iint\limits_S \alpha(x_1, z_1) \frac{d\xi d\zeta}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 - (z_1-\zeta)^2}}. \quad (9.44)$$

Формулами (9.43) и (9.44) можно пользоваться для таких точек, для которых область интегрирования не выходит за пределы крыла.

В общем случае для вычисления потенциала скорости по формуле (9.39) необходимо предварительно определить из граничных условий значения q за пределами крыла. Задача по определению величины q вне крыла сводится к решению интегральных уравнений [16]. Однако в одном частном случае этими формулами можно непосредственно пользоваться для крыла произвольной формы в плане (как при сверхзвуковых, так и дозвуковых кромках), а именно для крыла с симметричным профилем при нулевом угле атаки. В этом случае значение $\partial\varphi'/\partial y$ известно всюду: на поверхности крыла оно определяется по формуле (9.42), а вне крыла при $y = 0$ $\partial\varphi'/\partial y = 0$.

Заметим, что метод источников позволяет находить потенциал φ' в любой точке в окрестности или на поверхности крыла произвольной формы при условии, что крыло обладает конечным участком сверхзвуковой передней кромки (рис. 9.18, *а*). В этом случае интегральное уравнение (9.39) с подстановкой $\varphi' = 0$, приведенное отдельно для точек полосы σ_1 или σ_1', содержит только одно неизвестное — интенсивность источников в соответствующей полосе.

Если крыло в плане имеет впереди острие и обе передние кромки являются дозвуковыми, то область интегрирования в формуле для вычисления потенциала скорости для любой точки N содержит одновременно неизвестные интенсивности источников обеих полос. При этом условии получим одно уравнение с двумя неизвестными. Поэтому если крыло имеет дозвуковую переднюю кромку или дозвуковым оказывается выступающий вперед участок передней кромки, то метод источников не позволяет определить потенциал φ'. К таким крыльям относится и треугольное крыло с дозвуковыми передними кромками (рис. 9.18, *б*).

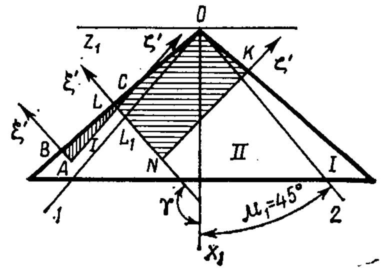


Рис. 9.19. Области интегрирования для точек, расположенных на участках *I*, *II* крыла

§ 9.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА СО СВЕРХЗВУКОВЫМИ ПЕРЕДНИМИ КРОМКАМИ

Рассмотрим треугольное крыло со сверхзвуковыми передними кромками (рис. 9.19). Уравнения передней и задней кромок крыла имеют вид $x_1 = \pm n z_1$, $x_1 = ln/2$, где $n = \operatorname{tg}\chi/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$ — параметр стреловидности ($n < 1$).

Предположим, что крыло имеет нулевую толщину и установлено под малым углом атаки. Тогда на поверхности крыла

$$(\partial\varphi'/\partial y)_{y=0} = -\alpha v_\infty. \tag{9.45}$$

Подставляя выражение (9.45) в формулу (9.44), получаем

$$\varphi' = \frac{v_\infty \alpha}{\pi} \iint\limits_S \frac{d\xi\, d\zeta}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - (z_1 - \zeta)^2}}. \tag{9.46}$$

В рассматриваемом примере поверхность крыла разбивается на две части (*I* и *II*) с различным характером обтекания.

Обтекание части крыла (области *I*), лежащей вне конуса возмущения с вершиной в точке *O*, совпадает с обтеканием крыла бесконечного размаха со скольжением (угол скольжения равен углу стреловидности). В области *II* поток конический с полюсом в точке *O*. Это область взаимного влияния полукрыльев. Зона влияния правого полукрыла на левое ограничена линией возмущения *1*, левого полукрыла на правое — линией возмущения *2*.

Поэтому на участках поверхности крыла *I* и *II* потенциал скорости возмущения выражается различными функциями. Аналитически это следует из того, что области интегрирования для них имеют различную форму — треугольную *ABCA* для области *I* и четырехугольную *NLOKN* для области *II*.

Для упрощения вычисления интегралов введем новую систему координат ξ' ζ', с началом в точке *N* и с осями, параллельными образующим конуса возмущения. В координатах x_1, y_1, z_1 угол $\mu_1 = 45°$.

Обозначим ξ' ζ', текущие координаты по области интегрирования в этих осях; выразим их через координаты x_1, y_1, z_1 и ξ, ζ посредством формул переноса и поворота осей координат:

$$\xi' = (\xi - x_1)\cos\gamma + (\zeta - z)\sin\gamma,\quad \zeta' = -(\xi - x_1)\sin\gamma + (\zeta - z)\cos\gamma.$$

Из рис. 9.19 видно, что $\gamma = 3/4\ \pi$. Тогда

$$\sqrt{2}\,\xi' = (x_1 - \xi) + (\zeta - z_1),\quad \sqrt{2}\,\zeta' = (x_1 - \xi) - (\zeta - z_1). \tag{9.47}$$

Введем следующие обозначения:

$$\sqrt{2}\,\xi' = \xi_1,\quad \sqrt{2}\,\zeta' = \zeta_1. \tag{9.48}$$

Из выражений (9.47) следует, что

$$\xi = x_1 - (\xi_1 + \zeta_1)/2;\quad \zeta = z_1 - (\zeta_1 - \xi_1)/2. \tag{9.49}$$

В новой системе координат формула (9.46) преобразуется к виду

$$\varphi' = \frac{\alpha v_\infty}{\pi} \iint\limits_S \frac{d\xi_1\, d\zeta_1}{\sqrt{\xi_1 \zeta_1}}. \tag{9.50}$$

Формула (9.50) справедлива для обеих областей; в них различны только области интегрирования.

Пределы интегрирования для области I:

$$0 \leqslant \xi_1 \leqslant \frac{2(x_1 - nz_1) - (n+1)\zeta_1}{1-n};\quad 0 \leqslant \zeta_1 \leqslant \frac{2(x_1 - nz_1)}{1+n}.$$

Для точек поверхности, заключенных внутри конуса возмущения с вершиной в точке O, область интегрирования разобьем на две:

1) $NKOL_1N$ — область, где пределы интегрирования

$$0 \leqslant \xi_1 \leqslant \frac{2(x_1 + nz_1) - (1-n)\zeta_1}{1+n};\quad 0 \leqslant \zeta_1 \leqslant (x_1 - nz_1);$$

2) L_1OLL_1 — область с пределами интегрирования

$$0 \leqslant \xi_1 \leqslant \frac{2(x_1 - nz_1) - (n+1)\zeta_1}{1-n};\quad (x_1 - z_1) \leqslant \zeta_1 \leqslant \frac{2(x_1 - nz_1)}{1+n}.$$

Следовательно, для точек области I

$$\varphi' = \frac{\alpha v_\infty}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2(x_1 - nz_1)}{1+n}} \int\limits_0^{\frac{2(x_1 - nz_1) - (n+1)\zeta_1}{1-n}} \frac{d\xi_1\, d\zeta_1}{\sqrt{\xi_1 \zeta_1}}.$$

После интегрирования

$$\varphi' = \alpha v_\infty (x_1 - nz_1)/\sqrt{1-n^2}. \tag{9.51}$$

Внутри конуса возмущения, проведенного из точки O,

$$\varphi' = \frac{\alpha v_\infty}{\pi} \left[\int\limits_0^{x_1 - nz_1} \int\limits_0^{\frac{2(x_1 + nz_1) - (1-n)\zeta_1}{1+n}} \frac{d\xi_1\, d\zeta_1}{\sqrt{\xi_1 \zeta_1}} + \right.$$

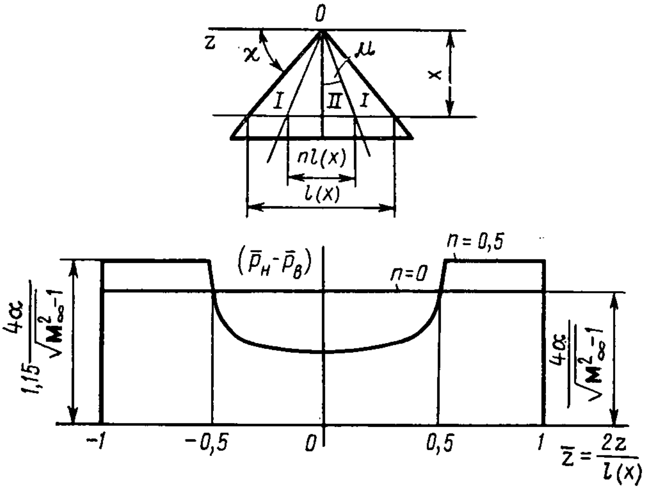


Рис. 9.20. Распределение ($\bar p_н - \bar p_в$) по размаху треугольного крыла при сверхзвуковых передних кромках

$$+\int\limits_0^{\frac{2(x_1-nz_1)}{1+n}}\int\limits_0^{\frac{2(x_1+nz_1)-(1+n)\zeta_1}{1-n}}\frac{d\xi_1\,d\zeta_1}{\sqrt{\xi_1\zeta_1}}\Bigg].$$

Отсюда

$$\varphi'=\frac{\alpha v_\infty}{\pi}\left\{\frac{2(x_1+nz_1)}{\sqrt{1-n^2}}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{z_1+nx_1}{x_1+nz_1}\right)}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{2(x_1-nz_1)}{\sqrt{1-n^2}}\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{z_1-nx_1}{x_1-nz_1}\right)}\right\}. \qquad (9.52)$$

Зная функцию φ', можно определить аэродинамические характеристики крыла.

Используя полученные выражения (9.51) и (9.52), находим коэффициент давления $\bar p=-(2/v_\infty)\partial\varphi'/\partial x$. В области I (рис. 9.19)

$$\bar p=\pm\left(2\alpha/\sqrt{M_\infty^2-1}\right)\left(1/\sqrt{1-n^2}\right).$$

Подставляя сюда значение параметра стреловидности n, получаем

$$\bar p=\pm 2\alpha\cos\chi/\sqrt{M_\infty^2\cos^2\chi-1}. \qquad (9.53)$$

Здесь знак «+» соответствует точкам нижней поверхности, а знак «—» ставится при определении коэффициента давления на верхней поверхности крыла.

Из формулы (9.53) следует, что в области I давление не зависит от положения рассматриваемой точки и равно давлению на поверхности плоской пластинки бесконечного размаха, обтекаемой со скольжением (9.22).

Для точек области II (рис. 9.19)

$$\bar{p} = \pm \frac{2\alpha\cos\chi}{\sqrt{M_\infty^2\cos^2\chi - 1}}\left[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{n\sqrt{1-(z_1/x_1)^2}}{\sqrt{1-n^2(z_1/x_1)^2}}\right]. \qquad (9.54)$$

После несложных преобразований это выражение примет вид

$$\bar{p} = \pm \frac{2\alpha\cos\chi}{\sqrt{M_\infty^2\cos^2\chi - 1}}\left[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{n^2-(z/x)^2\operatorname{tg}^2\chi}}{\sqrt{1-(z/x)^2\operatorname{tg}^2\chi}}\right], \qquad (9.55)$$

где $(z/x)\operatorname{tg}\chi = 2z/l(x) = \bar{z}$ (рис. 9.20). Тогда

$$\bar{p} = \pm \frac{2\alpha\cos\chi}{\sqrt{M_\infty^2\cos^2\chi - 1}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{n^2-\bar{z}^2}}{\sqrt{1-\bar{z}^2}}\right), \qquad (9.56)$$

$$\bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{n^2-\bar{z}^2}}{\sqrt{1-\bar{z}^2}}\right). \qquad (9.57)$$

В области II имеем $0 \leqslant |\bar{z}| \leqslant n$.

Из формулы (9.56) видно, что в области II коэффициент давления сохраняет постоянные значения только вдоль лучей, исходящих из вершины крыла (при $z/x = \text{const}$). При переходе от одного луча к другому коэффициент давления изменяется.

Характер распределения разности коэффициентов давлений ($\bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}}$) по размаху треугольного крыла со сверхзвуковыми передними кромками при $n = 0{,}5$ приведен на рис. 9.20. Из рисунка следует, что часть крыла, расположенная вне конуса возмущения с вершиной в точке O, при прочих равных условиях нагружена больше, чем крыло бесконечного размаха. В области II нагрузка на крыло меньше.

Выведем формулы для определения суммарных аэродинамических характеристик треугольного крыла.

Сила давления на крыло равна сумме сил Y_1 и Y_2, действующих по областям I и II: $Y = Y_1 + Y_2$. Представим Y, Y_1 и Y_2 в следующем виде: $Y = c_y q_\infty S_{\text{к}}$, $Y_1 = c_{y1} q_\infty S_1$, $Y_2 = c_{y2} q_\infty S_2$, где c_y — коэффициент нормальной силы крыла; c_{y1}, c_{y2} — коэффициенты нормальной силы для соответствующих областей, отнесенные к площадям S_1 и S_2; $S_{\text{к}}$ — площадь крыла в плане, $q_\infty = \rho_\infty v_\infty^2/2$, $S_{\text{к}} = (l^2/4)\operatorname{tg}\chi$, $S_1 = (1-n)(l^2/4)\operatorname{tg}\chi$, $S_2 = n(l^2/4)\operatorname{tg}\chi$. Тогда $c_y = c_{y_1} S_1/S_{\text{к}} + c_{y2} S_2/S_{\text{к}}$. Подставляя отношения площадей $S_1/S_{\text{к}}$ и $S_2/S_{\text{к}}$, получаем

$$c_y = c_{y1}(1-n) + c_{y2}\, n. \qquad (9.58)$$

В области I давление распределяется равномерно [см. (9.53)]. Поэтому

$$c_{y1} = \bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}} = 4\alpha\cos\chi/\sqrt{M_\infty^2\cos^2\chi - 1}. \qquad (9.59)$$

Найдем теперь c_{y2}. Так как коэффициент $\bar{p}$ в области II постоянен вдоль лучей, исходящих из вершины крыла, то за элементарную удобно принять площадку, ограниченную двумя лучами, составляющими друг с другом угол $d\psi$ (рис. 9.21):

$$dS_2 = 0{,}5\,(l/2)^2\,\mathrm{tg}^2\chi\,(d\psi/\cos^2\psi),$$

или $dS_2 = 0{,}5(l/2)^2\,\mathrm{tg}\,\chi d\bar{z}$.

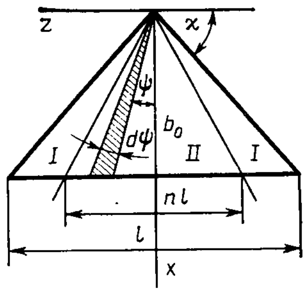


Рис. 9.21. Элементарная площадка для определения коэффициента нормальной силы треугольного крыла

Сила давления, действующая на эту площадку, $dY_2 = (\bar{p}_н - \bar{p}_в)q_\infty dS_2$. Подставляя сюда выражение (9.57), получаем

$$dY_2 = \frac{4\,\alpha\cos\chi}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2\cos^2\chi - 1}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{n^2-\bar{z}^2}}{\sqrt{1-\bar{z}^2}}\right)q_\infty\,\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\mathrm{tg}\,\chi d\bar{z}.$$

В области II имеем $-n \leqslant \bar{z} \leqslant n$. Поэтому суммарная сила

$$Y_2 = \frac{4\,\alpha\cos\chi}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2\cos^2\chi - 1}}\,2\int\limits_0^n\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{n^2-\bar{z}^2}}{\sqrt{1-\bar{z}^2}}\right)q_\infty\,\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\mathrm{tg}\chi d\bar{z}.$$

В результате интегрирования

$$c_{y2} = \frac{Y_2}{q_\infty S_2} = \frac{4\,\alpha\cos\chi}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2\cos^2\chi - 1}}\left[\,-(1-n) + \sqrt{1-n^2}\,\right]\left(\frac{l}{2}\right)^2\mathrm{tg}\chi. \quad (9.60)$$

Подставляя выражения (9.59) и (9.60) в формулу (9.58), получаем коэффициент нормальной силы крыла:

$$c_y = 4\alpha/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\,. \quad (9.61)$$

Зная c_y, можно определить коэффициент подъемной силы c_{ya} и коэффициент сопротивления крыла c_{xai}, обусловленного подъемной силой: $c_{ya} = c_y\cos\alpha$, $c_{xai} = c_y\sin\alpha$. Вследствие малости угла атаки α коэффициенты $c_{ya} = c_y$, $c_{xai} = c_y\alpha$. Поэтому

$$c_{ya} = 4\alpha/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\,, \quad (9.62)$$

$$c_{xai} = 4\alpha^2/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\,. \quad (9.63)$$

Из формул (9.62) и (9.63) следует, что коэффициенты c_{ya} и c_{xa} для крыла треугольной формы в плане со сверхзвуковыми передними кромками при толщине $\bar{c} = 0$ не зависят от угла стреловидности и равны соответствующим коэффициентам пластинки бесконечного размаха. Совпадение коэффициентов суммарных сил объясняется характером распределения нагрузки по поверхности крыла. Для треугольного крыла со сверхзвуковыми передними кромками увеличение нагрузки в области I (рис. 9.20) по сравнению с крылом бесконечного размаха компенсируется уменьшением этой силы в области II.

Центр давления (фокус) треугольного крыла совпадает с центром тяжести треугольника: $x_д = x_F = 2b_0/3$. Поэтому момент суммарной силы давления относительно оси z будет $M_z = -Y2b_0/3$, а коэффициент момента $m_z = M_z/(q_\infty S b_0) = -2c_y/3$. Подставив сюда c_y по формуле (9.61), получим

$$m_z = -(8/3)\alpha/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}. \qquad (9.64)$$

Из формул (9.61) — (9.64) следует, что при сверхзвуковой передней кромке ($M_\infty > 1/\cos\chi$, $n < 1$) суммарные аэродинамические характеристики треугольного крыла c_y, c_{ya}, c_{xai}, m_z не зависят от угла стреловидности.

§ 9.10. ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА С СИММЕТРИЧНЫМ ПРОФИЛЕМ ПРИ $\alpha=0$

При симметричном обтекании интенсивность источников за пределами крыла в плоскости xOz равна нулю, а на поверхности крыла она известна [см. (9.42)]. Поэтому при любом значении числа M_∞ потенциал скорости возмущения равен потенциалу системы источников, распределенных по поверхности крыла с известной интенсивностью, и определяется по формуле (9.44). Область интегрирования S ограничена кромками крыла и двумя образующими конуса влияния с вершиной в рассматриваемой точке. Зная величину φ', можно определить значение коэффициента давления в каждой точке поверхности крыла, а по известному распределению давления легко вычислить и волновое сопротивление.

На элемент поверхности крыла $dxdz$ действует сила давления $dY = \bar{p}q_\infty dxdz$. Ее проекция на направление скорости на егающего потока $dX_а = dY\beta(x, z)$, где β — угол между осью x и плоскостью, касательной к поверхности в точке (x, z). Отсюда суммарное волновое сопротивление

$$X_а = 2q_\infty \iint\limits_S \bar{p}\, \beta(x, z)\, dx\, dz,$$

а коэффициент волнового сопротивления

$$c_{xа.в} = \frac{2}{S_к} \iint\limits_S \bar{p}\, \beta(x, z)\, dx\, dz.$$

Рассмотрим треугольное крыло (рис. 9.22) с четырехугольным профилем. Положение максимальной толщины в каждом сечении будем определять с помощью безразмерной координаты x_c, представляющей собой относительное расстояние максимальной толщины от передней кромки в долях хорды сечения. Тогда для определения углов β_1, β_2 на передней и задней кромках сечения и угла наклона линии максимальных толщин χ_c получим следующие соотношения:

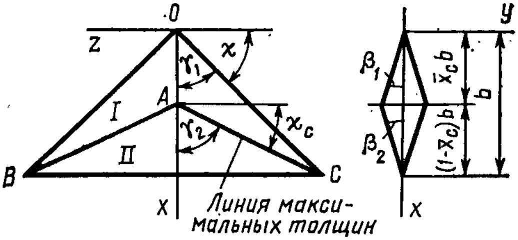


Рис. 9.22. Треугольное крыло конечной толщины при нулевом угле атаки

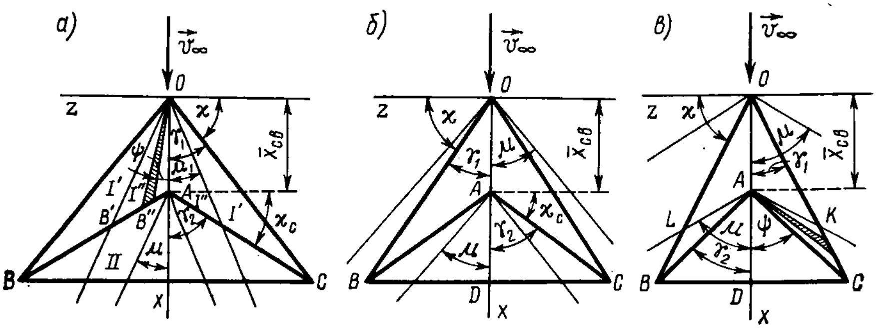


Рис. 9.23. Схемы для определения коэффициента волнового сопротивления треугольного крыла:

а — при сверхзвуковых линиях максимальных толщин и передней кромке; *б* — при сверхзвуковой линии максимальных толщин и дозвуковой передней кромке; *в* — при дозвуковых линиях максимальных толщин и передней кромке

$$\beta_1 = \frac{\bar{c}}{2\bar{x}_c}, \quad \beta_2 = -\frac{\bar{c}}{2(1-\bar{x}_c)}, \quad \mathrm{tg}\,\chi_c = (1-\bar{x}_c)\,\mathrm{tg}\,\chi. \tag{9.65}$$

Поверхность крыла можно разбить на две части, в каждой из которых интенсивность источников постоянна. В области *I* интенсивность $q_1 = 2v_\infty\beta_1$, $q_2 = 2v_\infty\beta_2$. Такое распределение можно получить наложением друг на друга двух систем источников — с интенсивностью $q_1 = 2v_\infty\beta_1$, распределенных по области *OBC*, и с интенсивностью $q = q_2 - q_1 = 2v_\infty(\beta_2 - \beta_1)$, помещенных в треугольнике *ABC*.

При анализе обтекания крыла необходимо различать три случая:

Обтекание крыла со сверхзвуковой передней кромкой, т. е. когда $\gamma_1 > \mu$. В этом случае и $\gamma_2 > \mu$ (рис. 9.23, *а*). При этом $n_2 < n_1 < 1$, где

$$n_1 = \mathrm{tg}\,\chi / \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad n_2 = \mathrm{tg}\,\chi_c / \sqrt{M_\infty^2 - 1}.$$

Источники, расположенные в треугольнике *ABC*, не влияют на точки области *OBACO*.

Обтекание крыла с дозвуковой передней кромкой и сверхзвуковой линией максимальм а л ь н ы х   т о л щ и н   (рис. 9.23, *б*). Здесь $\gamma_1 < \mu$, а $\gamma_2 > \mu$. Поэтому $n_1 > 1 > n_2$. Крыло располагается внутри конуса Маха с вершиной в точке O, источники треугольника ABC не влияют на точки области $OBACO$.

О б т е к а н и е,   п р и   к о т о р о м   п е р е д н я я   к р о м к а   и   л и н и я   м а к с и м а л ь н ы х   т о л щ и н   д о з в у к о в ы е   (рис. 9.23, *в*). Тогда часть области I (AKC и ALB) находится в области влияния источников, расположенных в треугольнике ABC. Здесь $\gamma_1 < \mu$, $\gamma_2 < \mu$, $n_2 > 1$, $n_1 > 1$ ($n_1 > n_2 > 1$).

В случае, когда передняя кромка и линия максимальных толщин сверхзвуковые, суммарное сопротивление крыла складывается из сопротивления X_{11}, действующего в области I (рис. 9.23, *а*) $(OBAC)$ от источников интенсивностью q_1, находящихся в той же области, сопротивления X_{21}, действующего в области II (ABC) от источников интенсивностью q_1, помещенных в области II, и сопротивления X_{22}, действующего в той же области II от источников интенсивностью $(q_2 - q_1)$, расположенных в треугольнике ABC.

Распределение давления в области I можно определить по формулам (9.53) для области I' и (9.56) для области I''. Тогда для точек нижней и верхней поверхностей крыла получим следующие формулы:

в области I'

$$\bar{p} = 2\beta_1 \cos\chi \Big/ \sqrt{M_\infty^2 \cos^2\chi - 1}; \tag{9.66}$$

в области I''

$$\bar{p} = 2\beta_1 \cos\chi \Big/ \sqrt{M_\infty^2 \cos^2\chi - 1}\left[1 - (2/\pi)\arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - \bar{z}^2} \Big/ \sqrt{1 - \bar{z}^2}\right)\right]. \tag{9.67}$$

Найдем силу dX_{11}, действующую на элемент поверхности крыла: $dX_{11} = \bar{p} q_\infty dS \beta_1$.

Так как в областях OBB' (S') и $OB'A$ (S'') (рис. 9.23, *а*) коэффициент давления определяется по разным формулам, то силу X_{11} удобнее представить в виде суммы интегралов по этим областям (S' и S''):

$$\frac{X_{11}}{q_\infty} = 2\frac{2\beta_1^2 \cos\chi}{\sqrt{M_\infty^2 \cos^2\chi - 1}}\left[\iint_{S'} dS + \iint_{S''}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{n_1^2 - \bar{z}^2}}{\sqrt{1 - \bar{z}^2}}\right) dS\right].$$

Если взять на линии AB точку B'' с координатами (x, z), то площадь треугольника OAB'' будет $S = S_к(1-r)^2\bar{z}/[2(1-r\bar{z})]$, а $dS = S_к(1-r)^2\, d\bar{z}/[2(1-r\bar{z})^2]$, где $S_к$ — полная площадь крыла; $\bar{z} = (z/x)\operatorname{tg}\chi$ — относительная координата точки B'', $r = 1 - \bar{x}_c$. Тогда

$$X_{11}\Big/(q_\infty S_к) = \left[8\beta_1^2 \Big/ \left(\pi\sqrt{M_\infty^2 - 1}\right)\right] G_1(n_1, r). \tag{9.68}$$

Здесь

$$G_1(n_1, r) = \frac{(1-r)^2}{\sqrt{1 - n_1^2}}\int_0^1\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{n_1^2 - \bar{z}^2}}{\sqrt{1 - \bar{z}^2}}\right)\frac{d\bar{z}}{(1 - r\bar{z})^2}. \tag{9.69}$$

Интегрируя (9.69), получаем

$$G_1(n_1, r) = \frac{1-r}{1+r}\left\{\frac{r}{\sqrt{1 - n_1^2}}\arccos n_1 + \right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-r^2n_1^2}}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin(rn_1)\right]\Bigg\}. \qquad (9.70)$$

Сопротивление X_{21}, действующее на часть поверхности ABC с углом наклона β_2 и вызываемое источниками той же интенсивности q_1, как и в рассмотренном выше случае, но помещенными в области II (рис. 9.23, *а*), можно представить в виде разности сопротивления по полному крылу ($r=0$) и сопротивления по области I $(OBAC)$:

$$X_{21}/(q_\infty S_к)=\left[8\beta_1\beta_2\Big/\left(\pi\sqrt{M_\infty^2-1}\right)\right]\left[G_1(n_1,\ 0)-G_1(n_1,\ r)\right]. \qquad (9.71)$$

Здесь $G(n_1, 0)$ — значение функции (9.70) при $r=0$; $G_1(n_1,\ 0)=\pi/2$.

Для определения сопротивления X_{22} воспользуемся формулой (9.68), заменив в ней n_1 на n_2, полную площадь крыла $S_к$ — на S_{ABC} и r — на $r=0$. Так как в этой области интенсивность источников пропорциональна $(\beta_2-\beta_1)$ и они действуют по поверхности крыла с наклоном β_2, то

$$X_{22}/(q_\infty S_к)=\left[8(\beta_2-\beta_1)\beta_2\Big/\left(\pi\sqrt{M_\infty^2-1}\right)\right](S_{ABC}/S_к)\,G_1(n_2,\ 0), \qquad (9.72)$$

где $S_{ABC}/S_к=r$, $G_1(n_2,\ 0)=\pi/2$.

Суммируя выражения (9.68), (9.71) и (9.72), после несложных преобразований, используя формулы (9.65), получаем следующую формулу для определения коэффициента волнового сопротивления при $\alpha=0$:

$$c_{xав}=\frac{2\bar{c}^2}{\pi\sqrt{M_\infty^2-1}}\left\{\frac{G_1(n_1,\ r)}{(1-r)^2}-\frac{1}{r(1-r)}\left[G_1(n_1,\ 0)-G_1(n_1,\ r)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2r(1-r)}\right\}. \qquad (9.73)$$

Введем отношение $c_{xа\,в}/\lambda\bar{c}^2$:

$$\frac{c_{xав}}{\lambda\bar{c}^2}=\frac{2}{\pi\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}}\left\{\frac{G_1(n_1,\ r)}{(1-r)^2}-\frac{1}{r(1-r)}\left[\frac{\pi}{2}-G_1(n_1,\ r)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2r(1-r)}\right\}. \qquad (9.74)$$

В формуле (9.74) параметр стреловидности

$$n_1=\operatorname{tg}\chi\Big/\sqrt{M_\infty^2-1} \quad \text{или} \quad n_1=\lambda\operatorname{tg}\chi\Big/\left(\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}\right).$$

Тогда из формулы (9.74) следует, что значение отношения $c_{xа\,в}/\lambda\bar{c}^2$ зависит от параметров $\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}$, $\lambda\operatorname{tg}\chi$ и относительной координаты максимальной толщины профиля $\bar{x}_c=(1-r)$. Для треугольного крыла $\lambda\operatorname{tg}\chi=4$. Поэтому

$$c_{xав}\Big/\lambda\bar{c}^2=F\left(\lambda\sqrt{M_\infty^2-1},\ \bar{x}_c\right).$$

Рассмотрим обтекание крыла с дозвуковой передней кромкой и сверхзвуковой линией максимальных толщин ($n_1>1>n_2$). В этом случае источники, расположенные в треугольнике ABC, не влияют на скорости возмущения в области $OBAC$ (рис. 9.23, *б*). Поэтому суммарное сопротивление можно представить в виде суммы трех сопротивлений: X_{11}, X_{21}, X_{22}, где X_{22} определяется так же, как в первом случае, а для определения сопротивлений X_{11}, X_{21} необходимо

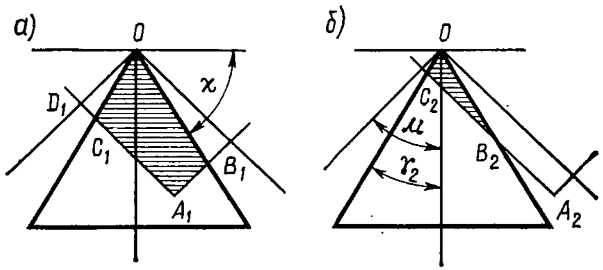


Рис. 9.24. Области интегрирования при $\alpha=0$:
а — в точках поверхности крыла; *б* — в области между дозвуковой кромкой и конусом Маха

знать распределение давления по крылу в случае дозвуковой передней кромки. Для этого необходимо найти потенциал скорости возмущения φ' по формуле (9.44). Область интегрирования для $\alpha=0$ показана на рис. 9.24, *а* (область $OB_1A_1C_1$). Затем определить составляющую скорости $v'_x=\partial\varphi'/\partial x$ и коэффициент давления $\bar{p}=-(2/v_\infty)(\partial\varphi'/\partial x)$:

$$\bar{p}=\frac{4\beta_1}{\pi\sqrt{M_\infty^2-1}}\,\frac{1}{\sqrt{n_1^2-1}}\operatorname{arch}\frac{\sqrt{n_1^2-\bar{z}^2}}{\sqrt{1-\bar{z}^2}}. \tag{9.75}$$

В результате для определения коэффициента волнового сопротивления треугольного крыла с дозвуковой передней кромкой и сверхзвуковой линией максимальных толщин получим следующую формулу:

$$\frac{c_{xав}}{\lambda\bar{c}^2}=\frac{2}{\pi\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}}\left\{\frac{1}{(1-r)^2}G_2(n_1,\ r)-\frac{1}{r(1-r)}[G_2(n_2,\ 0)-\right.$$

$$\left.-G_2(n_1,\ r)]+\frac{\pi}{2r(1-r)}\right\}, \tag{9.76}$$

где $G_2(n,\ r)$ — функция, вычисляемая по формуле

$$G_2(n,\ r)=\frac{1-r}{1+r}\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{r}{\sqrt{n^2-1}}\operatorname{arch}n+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{1-r^2n^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-r^2n^2}}{n(1-r)+\sqrt{n^2-1}}\right). \tag{9.77}$$

Если передняя кромка и линия максимальных толщин дозвуковые, то часть крыла (области AKC и ALB) находится в зоне влияния источников, расположенных в треугольнике ABC (см. рис. 9.23, *в*). Поэтому для определения полного коэффициента сопротивления крыла кроме сопротивлений X_{11}, X_{21}, X_{22} необходимо найти дополнительное сопротивление X_{12}. Эта сила действует на области AKC и ALB и обусловлена влиянием источников в треугольнике ABC с интенсивностью, пропорциональной $(\beta_2-\beta_1)$.

Для нахождения сопротивления X_{12} нужно знать распределение давления между конусом Маха и линией максимальных толщин. Для этого по формуле (9.44) нужно определить функцию φ' (область интегрирования OB_2C_2 для $\alpha=0$ показана на рис. 9.24, *б*), производную $\partial\varphi'/\partial x$ и затем $\bar{p}=-(2/v_\infty)(\partial\varphi'/\partial x)$:

$$\bar{p} = \frac{4(\beta_2 - \beta_1)}{\pi \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{arch} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{\bar{z}^2-1}}. \tag{9.78}$$

Здесь $\bar{z}>1$.

В этом случае формула коэффициента волнового сопротивления имеет вид:

$$\frac{c_{x\text{ав}}}{\lambda \bar{c}^2} = \frac{2}{\pi\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}} \left\{ \frac{G_3(n_1, r)}{(1-r)^2} - \frac{1}{r(1-r)} [G_2(n_1, 0) - G_3(n_1, r)] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r(1-r)} G_2(n_2, 0) - \frac{1}{r(1-r)} F(n_2, r) \right\}, \tag{9.79}$$

где

$$G_3(n_1, r) = \frac{1-r}{1+r} \left\{ \frac{\ln n_1}{\sqrt{n_1^2-1}} + \frac{r \operatorname{arch} n_1}{\sqrt{n_1^2-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{n_1^2 r^2 - 1}} \ln \left[1 + \frac{2\sqrt{n_1^2 r^2 - 1}}{n_1(1-r) + \sqrt{n_1^2-1} - \sqrt{n_1^2 r^2 - 1}} \right] \right\}, \tag{9.80}$$

$$F(n_2, r) = \frac{1-r}{1+r} \left[\frac{\ln (n_1 r)}{\sqrt{n_1^2 r^2 - 1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{n_1^2-1}} \ln \frac{r n_1^2 - 1 + \sqrt{(n_1^2-1)(r^2 n_1^2 - 1)}}{n_1(1-r)} \right]. \tag{9.81}$$

Подробный вывод формул (9.75) — (9.81) дан в учебнике [3].

Из формул (9.74), (9.76) и (9.79) следует, что для всех рассмотренных случаев отношение $c_{x\text{ав}}/\lambda\bar{c}^2$ для треугольного крыла ($\eta = \infty$, $\lambda \operatorname{tg}\chi = 4$) зависит от параметра $\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1}$ и относительной координаты максимальной толщины сечения крыла.

На рис. 9.25 приведена кривая для крыла с ромбовидным профилем ($\bar{x}_c = 0{,}5$). Здесь же для сравнения представлена экспериментальная кривая. Отсюда следует, что теоретические значения коэффициентов волнового сопротивления отличаются от опытных особенно там, где теоретическая кривая имеет резко выраженные пики, соответствующие звуковой линии максимальных толщин $\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2$ и звуковой передней кромке $\lambda\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 4$. Расхождение между теоретическими и экспериментальными значениями коэффициента $c_{x\text{ав}}$ объясняется тем, что в указанных случаях линейная теория неприменима. Кроме того, из-за влияния вязкости поток в кормовой части крыла (за точкой максимума толщины сечений) расширяется неполностью.

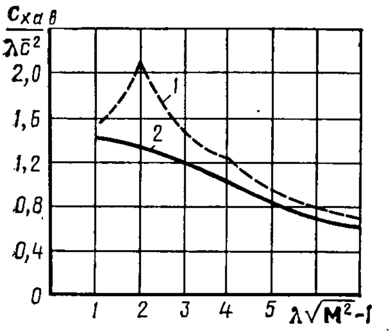


Рис. 9.25. Коэффициент волнового сопротивления $(c_{x\,ав}/\lambda c^{-2})$ треугольного крыла ($\eta=\infty$, $\lambda \operatorname{tg}\chi_{п.к}=4$) с ромбовидным профилем ($\bar{x}_c=0{,}5$):

1 — линейная теория; *2* — эксперимент

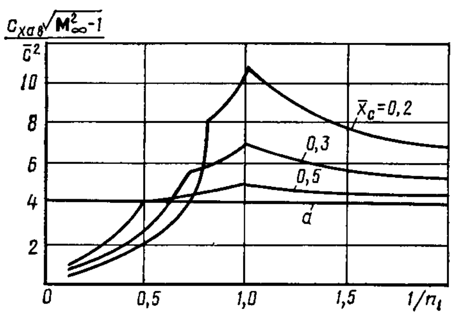


Рис. 9.26. Влияние параметра стреловидности n_1 и относительной координаты максимальной толщины сечения треугольного крыла на коэффициент волнового сопротивления $(c_{x\,ав}\sqrt{M_\infty^2-1})/\bar{c}^2$:

а — крыло бесконечного размаха с ромбовидным профилем

При больших значениях $\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}$, когда линия максимальных толщин и передняя кромка становятся существенно сверхзвуковыми (при $\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}\gg 4$), результаты лучше согласуются друг с другом. Но и при этих значениях $\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}$ линейная теория дает завышенное значение $c_{x\text{ав}}$.

Для оценки влияния положения максимальной толщины сечения на рис. 9.26 приведены кривые $c_{x\text{ав}}\sqrt{M_\infty^2-1}\,/\,\bar{c}^2=f(1/n_1, \bar{x}_c)$, построенные на основании формул (9.74), (9.76) и (9.79). Здесь же нанесена прямая $c_{x\text{ав}}\sqrt{M_\infty^2-1}\,/\,\bar{c}^2=4$, соответствующая крылу бесконечного размаха с ромбовидным профилем *а*.

Отсюда следует ряд важных выводов — при заданном значении $\bar{r}$ или $\bar{x}_c=1-\bar{r}$ максимальное значение $\bar{c}_{x\,\text{ав}}\sqrt{M_\infty^2-1}/\bar{c}^2$ получается при звуковой передней кромке ($n_1=1$); при смещении максимальной толщины сечения вперед коэффициент $c_{x\text{ав}}$ увеличивается; для существенно сверхзвуковой передней кромки ($n_1 << 1$; $1/n_1 >> 1$) значения коэффициентов $c_{x\text{ав}}$ профиля и крыла с ромбовидным профилем мало отличаются, а при дозвуковой линии максимальных толщин, т. е. при $n_2=\operatorname{tg}\chi_c/\sqrt{M_\infty^2-1}>1$ или $\left(\sqrt{M_\infty^2-1}-\operatorname{tg}\chi_c\right)<0$, коэффициент волнового сопротивления сравнительно мало зависит от положения максимальной толщины.

Для крыла произвольной формы в плане количество независимых переменных больше. Кроме параметров $\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}$ и $\bar{x}_c$ необходимо ввести параметры $\lambda\operatorname{tg}\chi_c$ и η, где χ_c — угол стреловидности по линии максимальных толщин, η — сужение крыла. Тогда в общем случае

$c_{x\,\text{ав}} / (\lambda \bar{c}^2) = f(\lambda \sqrt{M_\infty^2 - 1},$
$\lambda \operatorname{tg}\chi_c,\ \eta,\ \bar{x}_c).$

Для иллюстрации влияния параметра $\lambda \operatorname{tg}\chi_c$ на рис. 9.27 приведено семейство кривых $c_{x\text{ав}}/\lambda\bar{c}^2$ в зависимости от $\lambda \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ и $\lambda \operatorname{tg}\chi_c$ для крыльев с сужением $\eta = 5$ и $\bar{x}_c = 0{,}5$.

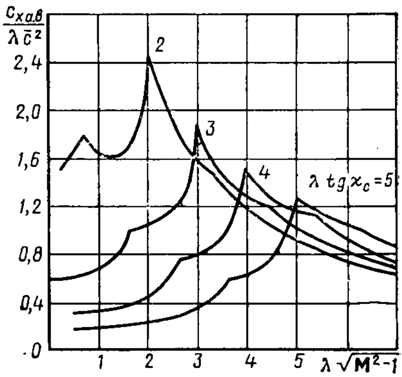


Рис. 9.27. Коэффициент волнового сопротивления крыла ($\eta=5$) с ромбовидным профилем ($\bar{x}_c=0{,}5$) при различных значениях параметра $\lambda \operatorname{tg}\chi_c$

Так же как для треугольного крыла, теоретические значения коэффициента $c_{x\text{ав}}$ отличаются от экспериментальных значений.

Отметим, что уменьшение относительной толщины $\bar{c}$, необходимое для снижения волнового сопротивления, по всем сечениям крыла приводит к уменьшению строительной высоты его сечений, а следовательно, и полезного объема крыла.

Исследования показывают, что при заданном объеме минимальным волновым сопротивлением обладает крыло с переменной относительной толщиной по размаху, уменьшающейся от корневого к концевым сечениям крыла.

§ 9.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА С ДОЗВУКОВЫМИ ПЕРЕДНИМИ КРОМКАМИ ПРИ $\alpha \neq 0$

Аэродинамические характеристики треугольного крыла нулевой толщины с дозвуковыми передними кромками можно определить, пользуясь методом конических течений.

Метод конических течений применяется для исследования конических потоков, когда параметры потока v, p, ρ, T сохраняют постоянные значения вдоль лучей, исходящих из некоторой точки, называемой *полюсом конического потока.* Таким является сверхзвуковой поток около произвольной бесконечной конической поверхности при условии, что при этом образуется присоединенный скачок уплотнения. К числу конических потоков относится и течение около пластинки треугольной формы в плане при дозвуковой передней кромке. Если передняя кромка сверхзвуковая, то поток является коническим внутри конуса возмущения, проведенного из вершины крыла (см. § 9.9).

Методом конических течений можно пользоваться для исследования обтекания края прямоугольной пластинки при $\alpha \neq 0$. При этом на поверхности пластинки прямоугольной формы в плане образуется область конического потока внутри конусов возмущения с вершинами в передних кромках концевых сечений.

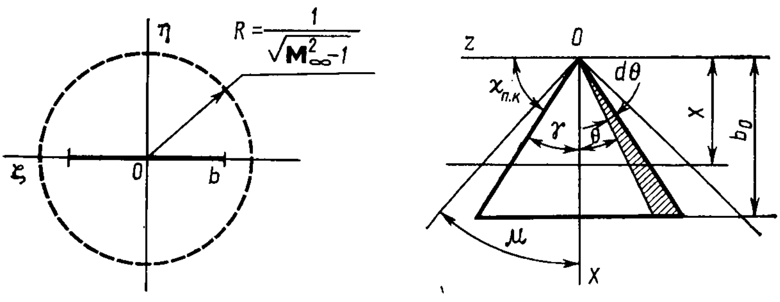


Рис. 9.28. Схема для определения аэродинамических характеристик треугольного крыла методом конических течений

Рассмотрим сущность метода конических течений*. Вследствие того что вдоль лучей, проведенных из полюса конического потока, параметры возмущенного движения остаются неизменными, коническое течение достаточно исследовать в одной из плоскостей, перпендикулярных скорости невозмущенного потока (рис. 9.28).

Если начало координат поместить в полюсе конического потока, то положение произвольного луча, проведенного из этой точки, определяется значением отношений координат y/x и z/x, поэтому в коническом потоке все параметры являются функциями только y/x и z/x.

Потенциал скорости возмущения φ' для тонких тел при малых углах атаки удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (9.27). Составляющие скорости возмущения $v_x' = \partial\varphi'/\partial x$, $v_y' = \partial\varphi'/\partial y$, $v_z' = \partial\varphi'/\partial z$ удовлетворяют тому же уравнению. Чтобы показать это, достаточно продифференцировать основное уравнение (9.27) соответственно по координатам x, y, z. После дифференцирования по x получим

$$(M_\infty^2 - 1)(\partial/\partial x)\,\partial^2\varphi'/\partial x^2 - (\partial/\partial x)\,\partial^2\varphi'/\partial y^2 - (\partial/\partial x)\,\partial^2\varphi'/\partial z^2 = 0.$$

Это уравнение можно представить в следующем виде:

$$(M_\infty^2 - 1)(\partial^2/\partial x^2)\,\partial\varphi'/\partial x - (\partial^2/\partial y^2)\,\partial\varphi'/\partial x - (\partial^2/\partial z^2)\,\partial\varphi'/\partial x = 0$$

или

$$(M_\infty^2 - 1)\,\partial^2 v_x'/\partial x^2 - \partial^2 v_x'/\partial y^2 - \partial^2 v_x'/\partial z^2 = 0. \qquad (9.82)$$

Аналогично получим уравнение для других составляющих скорости:

$$(M_\infty^2 - 1)\,\partial^2 v_y'/\partial x^2 - \partial^2 v_y'/\partial y^2 - \partial^2 v_y'/\partial z^2 = 0, \qquad (9.83)$$

$$(M_\infty^2 - 1)\,\partial^2 v_z'/\partial x^2 - \partial^2 v_z'/\partial y^2 - \partial^2 v_z'/\partial z^2 = 0. \qquad (9.84)$$

* Подробно метод конических течений описан в книге [14].

Обозначим $\eta = y/x$, $\zeta = z/x$. Тогда $v_x' = v_x'(\eta, \zeta)$, $v_y' = v_y'(\eta, \zeta)$, $v_z' = v_z'(\eta, \zeta)$. Переменные η и ζ удобно рассматривать как декартовы координаты в плоскости, перпендикулярной скорости невозмущенного потока (к оси x) и расположенной на расстоянии x от полюса конического потока. Следовательно, для решения задачи обтекания тела коническим потоком достаточно найти поле скоростей в какой-либо одной плоскости, перпендикулярной набегающему потоку. Конус возмущения с вершиной в начале координат пересекает эту плоскость по кругу с центром в точке $\eta = \zeta = 0$ и радиусом, равным $1/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$, а тело нулевой толщины пересекает плоскость по некоторой кривой. Например, пластинка при некотором угле атаки пересекает эту плоскость по прямой, параллельной оси $O\zeta$. При дозвуковой передней кромке изображение крыла на этой плоскости располагается целиком внутри круга радиусом $1/\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$, а при сверхзвуковой передней кромке — частично внутри этого круга, а частично вне его.

В уравнение (9.82) введем переменные η и ζ. Тогда

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x} = -\frac{\eta}{x}\frac{\partial v_x'}{\partial \eta} - \frac{\zeta}{x}\frac{\partial v_x'}{\partial \zeta};$$

$$\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x^2} = \frac{\eta^2}{x^2}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial \eta^2} + \frac{\zeta^2}{x^2}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial \zeta^2} + \frac{2\eta\zeta}{x^2}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\eta}{x^2}\frac{\partial v_x'}{\partial \eta} + \frac{\zeta}{x^2}\frac{\partial v_x'}{\partial \zeta};$$

$$\frac{\partial^2 v_x'}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 v_x'}{\partial z^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 v_x'}{\partial \zeta^2}.$$

В новых переменных уравнение (9.82) имеет вид

$$(1 - A^2\eta^2)\frac{\partial^2 v_x'}{\partial \eta^2} - 2A^2\zeta\eta\frac{\partial^2 v_x'}{\partial \eta \partial \zeta} + (1 - A^2\zeta^2)\frac{\partial^2 v_x'}{\partial \zeta^2} - 2A^2\eta\frac{\partial v_x'}{\partial \eta} - 2A^2\zeta\frac{\partial v_x'}{\partial \zeta} = 0, \tag{9.85}$$

где $A = \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$.

Нетрудно показать, что уравнение (9.85) внутри круга радиусом $1/A$, т. е. внутри конуса Маха, является уравнением эллиптического типа, а вне его — гиперболического.

Уравнение (9.85) внутри круга радиусом $1/A$ можно преобразовать в уравнение Лапласа.

Аналогичные уравнения можно получить для составляющих скорости v_y' и v_z'. Отсюда следует, что составляющие скорости v_x', v_y', v_z' можно рассматривать как действительные или мнимые части аналитических функций комплексного переменного. Тогда задача сводится к определению одной аналитической функции, действительная часть которой становится равной нулю на круге радиусом $R = 1/A$

(на поверхности конуса возмущения $v'_x = v'_y = v'_z = 0$), а мнимая часть функции (функция тока) равна нулю на отрезке действительной оси $-b \leqslant \zeta \leqslant b$. При малых углах атаки можно принять, что в плоскости $\zeta\eta$ крыло изображается отрезком оси $O\zeta$. В результате для определения коэффициента давления можно получить следующую формулу:

$$\bar{p} = \pm 2\alpha \operatorname{tg}\gamma / [E(k') \sqrt{1-(\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\gamma)^2}], \tag{9.86}$$

где $E(k')$ — полный эллиптический интеграл второго рода,

$k' = \sqrt{n^2 - 1}/n$;

α — угол атаки, рад; $\gamma = \pi/2 - \chi$ — полуугол при вершине крыла.

Из формулы (9.86) следует, что коэффициент давления при прочих равных условиях зависит только от угла θ. Кроме того, коэффициент давления на поверхности треугольного крыла с дозвуковой передней кромкой вблизи передней кромки ($\theta \to \gamma$) по абсолютной величине неограниченно возрастает. В центральном сечении крыла ($\theta = 0$) разность ($\bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}}$) имеет наименьшее значение.

Найдем суммарные аэродинамические коэффициенты. Нормальная сила, действующая на элементарную площадку, показанную на рис. 9.28, $dY = (\bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}}) q_\infty (b_0^2/2) d\theta/\cos^2\theta$. Подставляя сюда выражение (9.86) и интегрируя при $-\gamma \leqslant \theta \leqslant \gamma$, получаем суммарную нормальную силу: $Y = (2\pi\alpha \operatorname{tg}^2\gamma / E(k') q_\infty b_0^2$. Отсюда коэффициент нормальной силы

$$c_y = 2\pi\alpha/[\operatorname{tg}\chi E(k')], \quad c_y^\alpha = 2\pi/[\operatorname{tg}\chi E(k')]. \tag{9.87}$$

Из формулы (9.87) следует, что при уменьшении угла γ (увеличении угла стреловидности $\chi_{\text{п,к}}$) коэффициент подъемной силы ($c_{ya} = c_y$) треугольного крыла с дозвуковой передней кромкой уменьшается.

На рис. 9.29 приведены кривые изменения производной коэффициента c_{ya} по углу атаки α в зависимости от числа M_∞ для дозвуковой передней кромки при различных углах стреловидности (9.87) и для сверхзвуковой передней кромки (9.62). Здесь α — угол атаки, рад. Учитывая, что для треугольного крыла $\lambda \operatorname{tg}\chi_{\text{п.к}} = 4$, по формуле (9.87) получаем

$$c_{ya}^\alpha = \pi\lambda/[2E(k')], \tag{9.88}$$

где $k' = \sqrt{n^2 - 1}/n$, $n = \operatorname{tg}\chi \Big/ \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$ или $n = 4 \Big/ \left(\lambda \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right)$.

Тогда $c_{ya}^\alpha/\lambda = (\pi/2)/[E(k')]$, т. е. $c_{ya}^\alpha \big/ \lambda = f\left(\lambda \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right)$.

Аналогично, используя формулу (9.62) для треугольного крыла со сверхзвуковой передней кромкой, имеем

$$c_{ya}^\alpha \big/ \lambda = 4 \Big/ \left(\lambda \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right), \text{ т. е. } c_{ya}^\alpha \big/ \lambda = F\left(\lambda \sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right).$$

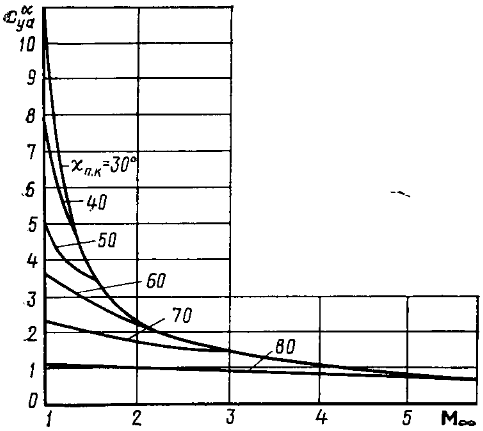


Рис. 9.29. Зависимость производной c^{α}_{ya} для треугольных крыльев от M_∞ при дозвуковой и сверхзвуковой передних кромках

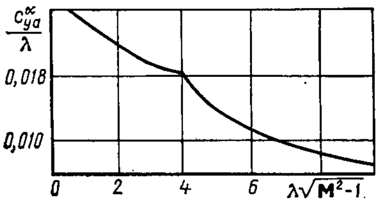


Рис. 9.30. Зависимость отношения c^{α}_{ya}/λ для треугольного крыла при дозвуковой ($\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}<4$) и сверхзвуковой ($\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}>4$) передних кромках от параметра $\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}$

Следовательно, семейство кривых, приведенных на рис. 9.29, в параметрах подобия можно представить в виде одной кривой зависимости c^{α}_{ya}/λ от $\lambda\sqrt{M^2_\infty-1}$ (рис. 9.30), участок которой при $\lambda\sqrt{M^2_\infty-1}<4\,(n>1)$ соответствует крылу с дозвуковой передней кромкой, а при $\lambda\sqrt{M^2_\infty-1}>4\,(n<1)$ — крылу со сверхзвуковой передней кромкой.

Поскольку вдоль любого луча, проведенного из вершины крыла, давление постоянно, то центр давления (фокус) треугольной пластины и при дозвуковой передней кромке совпадает с центром тяжести треугольника: $x_д = x_F = 2b_0/3$. Тогда коэффициент момента тангажа относительно оси z, проходящей через вершину крыла, $m_z = M_z/(q_\infty S_к b_0) = -2c_y/3$.

Для треугольного крыла малого удлинения ($\chi\to\pi/2$) параметр стреловидности $n\to\infty$, а $k'\to 1$. При этом значение эллиптического интеграла близко к единице: $E(k')\approx 1$. Тогда формулу (9.87) для такого крыла можно представить в виде $c^{\alpha}_{ya}=2\pi\operatorname{ctg}\chi$ или, выражая $\operatorname{ctg}\chi$ через удлинение треугольного крыла $\operatorname{ctg}\chi=\lambda/4$, получаем $c^{\alpha}_{y}=\pi\lambda/2$.

Найдем значение коэффициента волнового сопротивления. При сверхзвуковой передней кромке коэффициент сопротивления крыла, обусловленный подъемной силой, равен проекции нормальной силы на направление скорости невозмущенного потока $c_{xai}=c_y\alpha$.

Если передняя кромка дозвуковая, то, так же как и в дозвуковом потоке (см. § 7.12), происходит перетекание воздуха через кромку с нижней поверхности на верхнюю. Это вызывает разрежение в области передней кромки. Обусловленная разрежением сила, называемая подсасывающей, приводит к уменьшению сопротивления крыла: $c_{xa} = c_y\alpha - c_F$, где c_F — коэффициент подсасывающей силы. Его можно представить в виде $c_F = \bar{c}_F c_{ya}^2$, где $\bar{c}_F$ — коэффициент пропорциональности, зависящей от числа M_∞ и угла стреловидности. Чем больше M_∞ и меньше угол $\chi_{п.к}$, т. е. чем менее дозвуковая передняя кромка, тем меньше коэффициент $\bar{c}_F$.

При $M_\infty = 1/\cos\chi_{п.к}$, т. е. при звуковой передней кромке, $M_\infty > 1/\cos\chi_{п.к}$, т. е. при сверхзвуковой передней кромке коэффициент подсасывающей силы равен нулю. Опыт показывает, что действительная подсасывающая сила меньше расчетной, особенно при больших углах атаки. Это объясняется тем, что при таких углах в окрестности передней кромки происходит местный отрыв потока, после чего дальнейший рост разрежения в этой области прекращается.

§ 9.12. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРЕЛОВИДНЫХ КРЫЛЬЕВ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Результаты расчета коэффициента давления на поверхности треугольного крыла можно использовать для определения аэродинамических характеристик крыльев со сверхзвуковыми задними и боковыми кромками, приведенных на рис. 9.31, *а*, *б*, *в*, *г*. В этом случае форма задних и боковых кромок на характер обтекания крыльев не влияет. Поэтому коэффициенты давления на поверхности указанных крыльев и треугольного крыла при прочих равных условиях одинаковы. Зная распределение давления, можно определить коэффициенты подъемной силы и момента тангажа, а также относительную координату центра давления (фокуса): $\bar{x}_F = -m_z^\alpha/c_y^\alpha$. При этом аэродинамические характеристики зависят от формы крыла в плане. Например, при заданном угле стреловидности $\chi_{п.к}$ коэффициент подъемной силы по сравнению с коэффициентом треугольного крыла увеличивается в случае (рис. 9.31, *а*) и уменьшается в случае (рис. 9.31, *б*), так как средняя часть треугольного крыла создает меньшую долю подъемной силы. При этом смещается и фокус крыла (в соответствии со смещением центра тяжести фигуры).

Если четырехугольные крылья (рис. 9.31, *а*, *б*) мало отличаются от треугольных, то для определения коэффициентов c_{ya} и m_z можно пользоваться формулами $c_{ya} \approx c_{ya\Delta}/(1-\varepsilon)$, $m_z \approx m_{z\Delta}/(1-\varepsilon)$, где $\varepsilon = \operatorname{tg}\chi_{з.к}/\operatorname{tg}\chi_{п.к}$ — отношение тангенсов углов стреловидности задней и передней кромок крыльев, причем $\varepsilon < 0$ для крыла, изображенного на рис. 9.31, *а*, и $\varepsilon < 0$ для крыла, показанного на рис. 9.31, *б*. Очевидно, что в рассматриваемых случаях $|\varepsilon| \ll 1$. На примере треугольного крыла показано, что отношения c_y^α/λ и m_z^α/λ при дозвуковой и сверхзвуковой передних кромках зависят от параметров по-

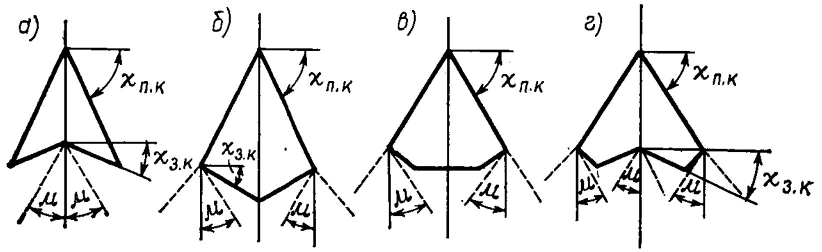


Рис. 9.31. Крылья со сверхзвуковыми задними и боковыми кромками

добия $\lambda\sqrt{M_\infty^2-1}$ и $\lambda \operatorname{tg}\chi_{п.к}$. Геометрическая форма крыла с прямолинейными передними кромками в основном определяется тремя параметрами — удлинением λ, сужением η, углом стреловидности, измеряемым по какой-либо линии (например, по передней кромке — $\chi_{п.к}$, по линии середин хорд — $\chi_{0,5}$, по задней кромке — $\chi_{з.к}$). Принимая в качестве определяющего угол $\chi_{0,5}$ для крыла произвольной формы в плане, получаем:

$$c_y^\alpha \big| \lambda = f\left(\lambda\sqrt{M_\infty^2-1},\ \lambda \operatorname{tg}\chi_{0,5},\ \eta\right);$$

$$m_z^\alpha \big| \lambda = F\left(\lambda\sqrt{M_\infty^2-1},\ \lambda \operatorname{tg}\chi_{0,5},\ \eta\right).$$

Сужение крыла влияет на коэффициенты сравнительно мало. При околозвуковых скоростях отношение c_y^α/λ зависит также от параметра $\lambda\sqrt[3]{\bar{c}}$. Графики зависимости отношения c_y^α/λ от указанных параметров, построенные по результатам теоретических методов расчета, а также обобщением экспериментальных данных, позволяют определить производную c_y^α трапециевидных крыльев в широком диапазоне геометрических параметров λ, $\chi_{0,5}$, η, $\bar{c}$ [19].

Для определения положения фокуса крыльев различной формы в плане, как указывалось в гл. 7, удобно ввести безразмерную координату $\bar{x}_F$, представляющую собой координату фокуса, отсчитываемую от носка САХ и выраженную в долях САХ.

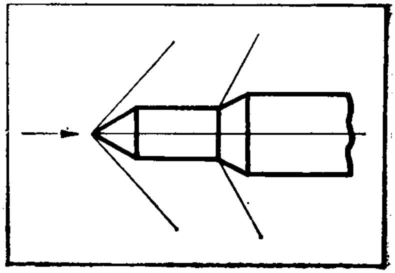
Для треугольного крыла $b_А = 2b_0/3$; $x_А = b_0/3$. При $M_\infty > 1$ $x_F = 2b_0/3$. Здесь $x_А$ и x_F — координаты, отсчитываемые от вершины крыла. Тогда относительная координата фокуса, отсчитываемая от носка САХ, равна $\bar{x}_F = (1/b_А)(x_F - x_А) = 0{,}5$. В случае крыла произвольной формы в плане $\bar{x}_F = f\left(\lambda\sqrt{M_\infty^2-1},\ \lambda \operatorname{tg}\chi_{0,5},\ \eta\right)$. Введение САХ позволяет получить сравнимые значения относительных координат фокуса для крыльев произвольной формы в плане. Для расчета координаты фокуса крыла произвольной формы при заданном значении числа M_∞ можно пользоваться графиками, построенными по результатам линейной теории и скорректированными с помощью экспериментальных данных [19].

Отметим, что уменьшение относительной толщины сечений крыла, необходимое для снижения волнового сопротивления, приводит к уменьшению строительной высоты сечений, а следовательно, и к снижению жесткости его конструкции. Это, в свою очередь, приводит к тому, что в полете под действием аэродинамической нагрузки происходят упругие деформации элементов конструкции. В результате изменяются как распределенные, так и суммарные аэродинамические характеристики упругого крыла по сравнению с характеристиками, полученными без учета упругих деформаций конструкции.

Влияние упругих деформаций зависит от различных факторов. Основными из них являются геометрия крыла, его жесткостные характеристики, распределение массы, угол атаки, число $\mathbf{M}_\infty$ и скоростной напор. Наиболее существенно влияние упругости конструкции при больших скоростных напорах.

Характер влияния упругости конструкции на аэродинамические характеристики крыла (а следовательно, и летательного аппарата) ввиду многообразия факторов не может быть универсальным. Здесь отметим лишь то, что влияние упругости конструкции в отдельных случаях может быть существенным и должно учитываться для конкретного летательного аппарата на возможно ранней стадии его проектирования.

10
ГЛАВА



ОСНОВЫ АЭРОДИНАМИКИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

§ 10.1. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГОВЫХ КОНУСОВ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Рассмотрим обтекание конуса с углом полураствора $\theta_к$ сверхзвуковым потоком при $\alpha = 0$ (рис. 10.1). Решение этой задачи используется для определения коэффициента волнового сопротивления конических носовых частей корпусов летательных аппаратов. Кроме того, эти результаты принимают за исходные данные для численного расчета обтекания конусов при $\alpha \neq 0$, а также за начальную точку при расчете обтекания тела с криволинейной образующей. Результаты симметричного обтекания конусов применяют также для приближенного расчета распределения давления по более сложным телам.

При симметричном обтекании конуса ($\alpha = 0$) с углом полураствора $\theta_к$, удовлетворяющим условию $\theta_к < \theta_{max}$ ($\mathbf{M}_\infty$), на нем возникает присоединенный скачок уплотнения с вершиной в точке O. Тогда задача расчета обтекания конуса сверхзвуковым потоком сводится к нахождению угла полураствора конического скачка уплотнения β и поля скоростей между скачком уплотнения и конусом. В этом случае поток обладает осевой симметрией (является осесимметричным). Поэтому для изучения обтекания конуса при $\alpha = 0$ достаточно рассмотреть течение газа в одной из меридиональных плоскостей. Кроме того, во всех плоскостях, перпендикулярных оси x, течения между конусом и скачком уплотнения геометрически подобны. Граничные условия (при $\theta = \theta_к$ и $\theta = \beta$) для этих сечений потока одинаковы. Отсюда следует, что для сходственных точек этих течений параметры потока одинаковы, т. е. вдоль любой прямой, проведенной из точки $O(\theta = \mathrm{const}, \theta_к \leqslant \theta \leqslant \beta)$, являющейся геометрическим местом сходственных точек, скорость потока как по величине, так и по направлению, а также параметры состояния газа p, ρ, T одинаковы.

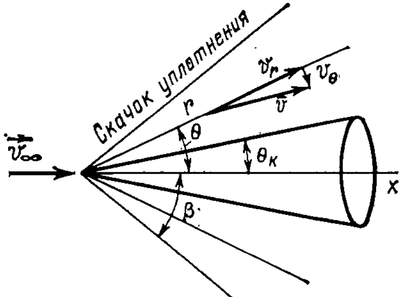


Рис. 10.1. Осесимметричное обтекание конуса

Введем полярные координаты r, θ с полюсом в точке O. Тогда составляющие скорости потока v_r и v_θ будут зависеть только от угла θ, т. е.

$v_r = v_r(\theta)$, $v_\theta = v_\theta(\theta)$. Кроме того, в этом случае ввиду прямолинейности образующих скачка уплотнения течение за ним останется потенциальным. Поэтому $v_r = \partial\varphi/\partial r$, $v_\theta = (1/r)(\partial\varphi/\partial\theta)$, где $\varphi(r, \theta)$ — потенциал скорости потока между скачком уплотнения и обтекаемой поверхностью. Для осесимметричного потока его можно представить в следующем виде: $\varphi(r, \theta) = rF(\theta)$. Отсюда $v_r = \partial\varphi/\partial r = F(\theta)$, $v_\theta = (1/r)(\partial\varphi/\partial\theta) = F'(\theta)$. Следовательно,

$$v_\theta = dv_r/d\theta. \tag{10.1}$$

Вторым уравнением, содержащим искомые величины v_r, v_θ, является уравнение неразрывности $\operatorname{div}(\rho v) = 0$.

Используя формулу для вычисления дивергенции в сферических координатах (см. § 3.1) в случае осесимметричного потока, получаем

$$\operatorname{div}(\rho\bar{v}) = d(\rho v_\theta)/d\theta + 2\rho v_r + \rho v_\theta \operatorname{ctg}\theta = 0$$

или

$$dv_\theta/d\theta + 2v_r + v_\theta \operatorname{ctg}\theta + (v_\theta/\rho)d\rho/d\theta = 0. \tag{10.2}$$

Течение около конуса в потоке за скачком является изэнтропическим, так как при переходе через скачок уплотнения по всем линиям тока энтропия возрастает одинаково. Тогда плотность в зависимости от скорости можно определить по формуле для изэнтропического течения: $\rho = \rho_{02}(1 - v^2/v_{\max}^2)^{1/(k-1)}$. Пользуясь формулами $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$; $a^2 = [(k-1)(v_{\max}^2 - v^2)]/2$, получим выражение: $(1/\rho)d\rho/d\theta = -(v_r/a^2)dv_r/d\theta - (v_\theta/a^2)dv_\theta/d\theta$. Подставляя это выражение в (10.2), получаем уравнение неразрывности для случая осесимметричного конического потока:

$$(1 - v_\theta^2/a^2)\, dv_\theta/d\theta + (2 - v_\theta^2/a^2)\, v_r + v_\theta \operatorname{ctg}\theta = 0. \tag{10.3}$$

В уравнении (10.3) неизвестными являются только составляющие скорости v_r и v_θ. Поэтому для определения поля скоростей между скачком уплотнения и поверхностью конуса имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными

$$\frac{dv_\theta}{d\theta} = -\frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta + (2 - v_\theta^2/a^2)\, v_r}{1 - v_\theta^2/a^2}; \quad \frac{dv_r}{d\theta} = v_\theta. \tag{10.4}$$

Для решения задачи необходимо задать граничные условия.

На поверхности конуса $(\theta = \theta_к)$ нормальная составляющая скорости из условия непротекания равна нулю:

$$v_\theta(\theta_к) = 0. \tag{10.5}$$

На поверхности скачка уплотнения $(\theta = \beta)$ составляющие скорости v_r, v_θ должны удовлетворять основным соотношениям для косых скачков уплотнения (см. § 5.5): касательная составляющая скорости при переходе через скачок уплотнения не изменяется:

$$v_r(\beta) = v_\infty \cos\beta, \tag{10.6}$$

а нормальная составляющая скорости удовлетворяет уравнению

$$-v_\theta(\beta)\, v_\infty \sin\beta = a_{кр}^2 - [(k-1)/(k+1)]\, v_\infty^2 \cos^2\beta. \tag{10.7}$$

В выражениях (10.6) и (10.7) $v_\infty \cos\beta$ и $-v_\infty \sin\beta$ — касательная и нормальная к скачку уплотнения составляющие скорости невозмущенного потока, причем за положительное направление v_θ принято направление в сторону увеличения угла. Заметим, что угол β неизвестен и должен быть найден в процессе решения задачи.

Вместо двух условий (10.6) и (10.7) можно представить одно условие

$$-v_\theta(\beta)\, v_r(\beta) \operatorname{tg}\beta = a_{кр}^2 - [(k-1)/(k+1)]\, v_r^2(\beta). \tag{10.8}$$

Систему дифференциальных уравнений (10.4) при выполнении граничных условий (10.5) и (10.8) можно решить методом численного интегрирования. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (10.4) можно начать с поверхности конуса, задаваясь значением скорости потока на поверхности $v_к$, или с поверхности скачка уплотнения, задаваясь углом β и v_∞. В первом случае в результате решения системы уравнений должны быть найдены соответствующие заданной скорости $v_к$ число M_∞ невозмущенного потока, угол наклона скачка уплотнения β и поле скоростей между конусом и скачком уплотнения, а во втором случае — угол полураствора конуса $\theta_к$ и поле скоростей.

Введем безразмерные составляющие скорости потока и скорость звука, отнесенные к максимальной скорости: $\tilde{v}_r = v_r/v_{max}$; $\tilde{v}_\theta = v_\theta/v_{max}$; $\tilde{a} = a/v_{max}$.

Кроме того, систему дифференциальных уравнений (10.4) представим в виде уравнений в конечных разностях:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{v}_\theta(\theta_{n+1}) &= \tilde{v}_\theta(\theta_n) - \left[\frac{\tilde{v}_\theta \operatorname{ctg}\theta + \left(2 - \tilde{v}_\theta^2/\tilde{a}^2\right)\tilde{v}_r}{1 - \tilde{v}_\theta^2/\tilde{a}^2}\right]_{\theta=\theta_n} \Delta\theta; \\ \tilde{v}_r(\theta_{n+1}) &= \tilde{v}_r(\theta_n) + \tilde{v}_\theta(\theta_n)\,\Delta\theta, \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

где $\Delta\theta$ — приращение угла θ; θ_n — угол полураствора промежуточного конуса $\theta_к \leqslant \theta_n \leqslant \beta$.

Если расчет начинается с поверхности скачка уплотнения, то $\theta_n = \beta - n\Delta\theta$, если с поверхности конуса, то $\theta_n = \theta_к + n\Delta\theta$. При $n = 0$ угол $\theta = \beta$ или $\theta = \theta_к$. Рассмотрим метод численного интегрирования, задаваясь углом полураствора конуса $\theta_к$ и относительной скоростью $\tilde{v}_к$ на его поверхности. Задаваясь приращением угла $\Delta\theta$, т. е. переходя от поверхности конуса к промежуточному конусу с углом полураствора $\theta_1 = \theta_к + \Delta\theta$, из первого уравнения (10.9) получим $\tilde{v}_\theta(\theta_1) = -2\tilde{v}_к\Delta\theta$, так как $\tilde{v}_\theta(\theta_к) = 0$, а $\tilde{v}_r(\theta_к) = \tilde{v}_к$.

Подставляя полученное значение $\tilde{v}_\theta(\theta_1)$ во второе уравнение (10.9), находим значение составляющей скорости v_r на промежуточном конусе с углом θ_1: $\tilde{v}_r(\theta_1) = \tilde{v}_к + \tilde{v}_\theta(\theta_1)\Delta\theta$. Зная $\tilde{v}_r(\theta_1)$ и $\tilde{v}_\theta(\theta_1)$, из второго уравнения (10.9) определяем $\tilde{v}_r$, а из первого — $\tilde{v}_\theta$ для промежуточного конуса с углом полураствора $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$ и т. д. Таким образом, зная $\tilde{v}_r$ и $\tilde{v}_\theta$, для промежуточного конуса с углом θ_n можно определить составляющие скорости для конуса с углом полураствора $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta\theta$.

В результате численного интегрирования последовательно можно найти составляющие скорости потока на поверхности ряда промежуточных конусов. Интегрирование должно продолжаться до тех пор, пока не будет выполняться условие на поверхности скачка уплотнения (10.8), которое для составляющих скорости, отнесенных к v_{max}, имеет вид

$$-\tilde{v}_\theta(\beta)\,\tilde{v}_r(\beta)\operatorname{tg}\beta = [(k-1)/(k+1)]\,[1-\tilde{v}_r^2(\beta)].$$

Угол промежуточного конуса θ_i, для которого выполняется это условие, равен углу наклона скачка уплотнения β, а соответствующие составляющие скорости — составляющим скорости за скачком уплотнения. Зная угол β и составляющую скорости за скачком уплотнения $\tilde{v}_r(\beta)$, из условия (10.6) можно определить $\tilde{v}_\infty = \tilde{v}_r(\beta)/\cos\beta$. Число M_∞, соответствующее заданной скорости на поверхности конуса $\tilde{v}_к$, можно найти, пользуясь формулой $\mathrm{M}_\infty = \tilde{v}_\infty/\tilde{a}_\infty$, где $\tilde{a}_\infty = \sqrt{(k-1)(1-\tilde{v}_\infty^2)/2}$.

Зная число M_∞ и угол β, можно вычислить отношение давления p_c, плотности ρ_c и температуры T_c за скачком уплотнения к давлению p_∞, плотности ρ_∞ и температуре невозмущенного потока T_∞:

$$\left.\begin{aligned} &p_c/p_\infty = [2k/(k+1)]\mathrm{M}_\infty^2\sin^2\beta - (k-1)/(k+1);\\ &\rho_c/\rho_\infty = [(k+1)/(k-1)]\,\mathrm{M}_\infty^2\sin^2\beta/[\,\mathrm{M}_\infty^2\sin^2\beta + 2/(k-1)];\\ &T_c/T_\infty = (p_c/p_\infty)\,\rho_\infty/\rho_c. \end{aligned}\right\} \qquad (10.10)$$

Отношения давления, плотности, температуры в любой точке между скачком уплотнения и поверхностью конуса к давлению, плотности и температуре непосредственно за ударной волной можно вычислить, используя формулы изэнтропических течений:

$$\frac{p}{p_c} = \left(\frac{1-\tilde{v}^2}{1-\tilde{v}_c^2}\right)^{k/(k-1)}; \quad \frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{1-\tilde{v}^2}{1-\tilde{v}_c^2}\right)^{1/(k-1)};$$

$$\frac{T}{T_c} = \frac{p}{p_c}\,\frac{\rho_c}{\rho}. \qquad (10.11)$$

Для определения давления $p_к$, плотности $\rho_к$ и температуры $T_к$

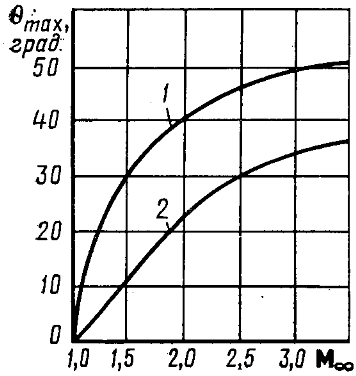


Рис. 10.2. Изменение максимального угла полураствора конуса и клина, до которого возникает присоединенный скачок уплотнения, в зависимости от числа M_∞:
1 — конус; 2 — клин

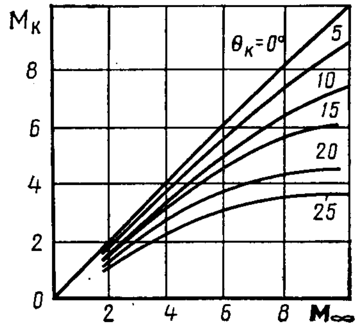


Рис. 10.3. Число $M_к$ на поверхности конуса в зависимости от числа M_∞ и угла полураствора конуса

на поверхности конуса в формулах (10.11) достаточно положить $\tilde{v} = \tilde{v}_к$.

Коэффициент давления на поверхности конуса

$$\bar{p}_к = \frac{2}{k}\frac{1}{M_\infty^2}\left(\frac{p_к}{p_\infty} - 1\right),$$

где

$$\frac{p_к}{p_\infty} = \frac{p_к}{p_c}\frac{p_c}{p_\infty}.$$

Легко показать, что коэффициент волнового сопротивления конуса $c_{xaв}$, отнесенный к площади наибольшего сечения, равен коэффициенту давления $\bar{p}_к$.

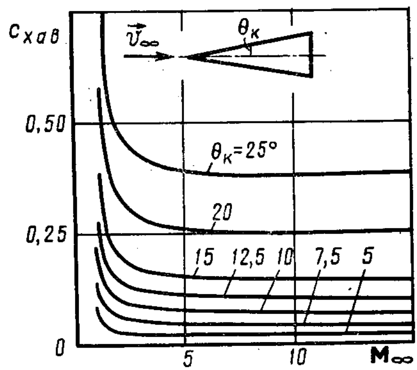


Рис. 10.4. Коэффициент волнового сопротивления конуса в зависимости от M_∞ и угла полураствора $\theta_к$

Результаты численного решения задачи обтекания конуса представлены в таблицах [4], позволяющих определить для заданного угла полураствора $\theta_к$ при различных значениях относительной скорости на поверхности конуса $\tilde{v}_к$ угол полураствора конического скачка уплотнения β, число M_∞, параметры потока непосредственно за скачком уплотнения (p_c/p_∞, ρ_c/ρ_∞, T_c/T_∞), поле скоростей в возмущенном потоке $\tilde{v}_r$, $\tilde{v}_\theta$, изменение давления, плотности и температуры между скачком уплотнения и поверхностью конуса ($p_к/p_c$, $\rho_к/\rho_c$, $T_к/T_c$), а также коэффициент давления $\bar{p}_к$. Из этих таблиц, в частности, следует, что скорость потока на поверхности конуса меньше скорости за скачком уплотнения v_c, а угол поворота потока при переходе через конический скачок уплотнения θ_c меньше угла $\theta_к$. Угол наклона вектора скорости между скачком уплотнения и поверхностью увеличивается от θ_c до $\theta_к$. Поэтому линии тока в возмущенной области в отличие от линий тока при обтекании клина являются криволинейными. Скорость потока вдоль этих линий тока уменьшается, а давление возрастает. Следовательно, при обтекании конуса происходит ударное сжатие при переходе через скачок уплотнения и изэнтропическое повышение давления между скачком и поверхностью. Вследствие этого волновые потери, а также и волновое сопротивление конуса при прочих равных условиях (M_∞, $\theta_к$) меньше, чем для клина.

Угол полураствора конического скачка уплотнения $\beta(\theta_к, M_\infty)$ при одинаковых значениях $\theta_к$ и M_∞ меньше угла наклона плоского косого скачка уплотнения, а максимальный угол поворота θ_{max}, до которого скачок остается присоединенным, при этом больше, чем для плоского скачка уплотнения (рис. 10.2). Число $M_к$ на поверхности конуса зависит от числа M_∞ и угла полураствора конуса (рис. 10.3).

Кривые зависимости коэффициента волнового сопротивления от тех же параметров (M_∞ и $\theta_к$) представлены на рис. 10.4.

§ 10.2. ОБТЕКАНИЕ КОНУСА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ПРИ $\alpha \neq 0$

Наличие угла атаки приводит к существенному изменению характера обтекания конуса. При $\alpha \neq 0$ параметры потока сохраняют постоянные значения только вдоль отдельных образующих и изменяются при переходе от одной образующей к другой. Для определения положения образующих введем угол меридиональной плоскости ψ ($0 \leqslant \psi \leqslant \pi$). На рис. 10.5 угол $\psi = 0$ соответствует наветренной, а $\psi = \pi$ — подветренной сторонам поверхности.

Математически задача обтекания конуса при $\alpha \neq 0$ сводится к решению системы нелинейных уравнений в частных производных, состоящей из уравнений движения невязкого газа (3.17), неразрывности (3.4) и энергии (3.52), при выполнении соответствующих граничных условий на поверхности конуса и в невозмущенном потоке.

Имеются аналитические методы решения этой задачи, основанные на использовании некоторых упрощающих предположений, позволяющих получить решение в явном виде. Например, при малых углах атаки параметры потока мало отличаются от соответствующих значений для осесимметричного обтекания конуса. Поэтому влияние угла атаки можно учесть дополнительными членами первого, а при увеличении α — и второго порядка.

В настоящее время широко используются численные методы решения задачи на ЭВМ. Применительно к задачам аэродинамики наиболее развиты конечно-разностные методы. Рассмотрим некоторые результаты численного расчета неосесимметричного обтекания ко-

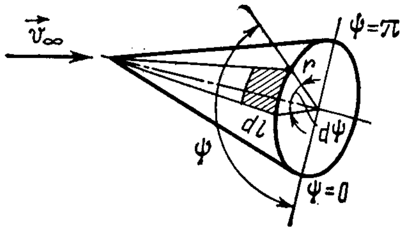


Рис. 10.5. Конус при $\alpha \neq 0$

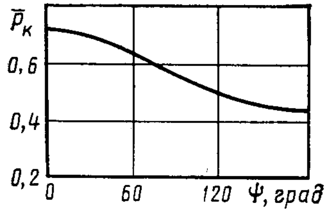


Рис. 10.6. Зависимость коэффициента давления от угла ψ, $\theta_к = 30°$; $\alpha = 5°$, $M_\infty = 3$

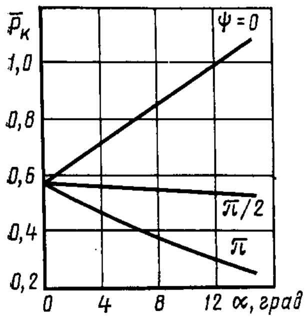


Рис. 10.7. Зависимости коэффициента давления $\bar{p}_к$ от угла атаки при различных значениях угла **ψ=0, π/2, π**

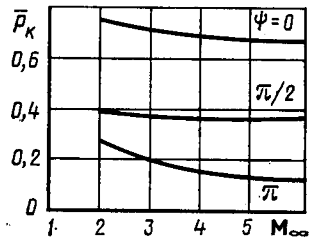


Рис. 10.8. Зависимости коэффициента давления $\bar{p}_к$ при различных значениях угла ψ=0, π/2, π от числа M_∞, $\theta_к = 25°$, $\alpha = 10°$

нуса при $\alpha < \theta_к$. При $\alpha \neq 0$ коэффициент давления зависит от положения точки на поверхности (от угла ψ). Очевидно, что на наветренной стороне конуса ($\psi = 0$) давление должно быть больше, чем на подветренной ($\psi = \pi$). На рис. 10.6 показан характер изменения коэффициента $\bar{p}$ в зависимости от угла ψ при заданных значениях угла полураствора конуса $\theta_к = 30°$, угла атаки $\alpha = 5°$ и числа $M_\infty = 3$. При увеличении угла конуса $\theta_к$ коэффициент давления возрастает по всей поверхности.

Для малых углов атаки ($\alpha < 5°$) приближенно можно принять, что коэффициент давления зависит от угла α линейно. При больших углах атаки α эта зависимость становится нелинейной, причем влияние угла атаки на величину $\bar{p}_к$ существенно зависит от угла ψ (рис. 10.7).

При увеличении числа M_∞ коэффициент давления изменяется монотонно, причем характер его изменения меняется при переходе от одной меридиональной плоскости к другой (рис. 10.8).

Зная распределение давления по поверхности, можно определить суммарные аэродинамические характеристики. Выведем формулы для определения нормальной, продольной силы и момента относительно вершины конуса. Выделим элементарную площадку $rd\psi dl$ (см. рис. 10.5). Нормальная сила, действующая на эту площадку, $dY = -\bar{p}q_\infty r\,d\psi\,d\,l\cos\psi\,\cos\theta$. Учитывая, что $dl\cos\theta = dx$, и интегрируя по координате $x(0 \leqslant x \leqslant L)$ и по углу ψ $(0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi)$, получаем выражения для нормальной силы:

$$Y = -2q_\infty \int_0^L r dx \int_0^\pi \bar{p}\cos\psi d\psi$$

и коэффициента нормальной силы, отнесенного к площади миделева сечения:

$$c_y = -\frac{4\lambda}{\pi}\int_0^1 \bar{r} d\bar{x}\int_0^\pi \bar{p}\cos\psi d\psi, \tag{10.12}$$

где $\bar{r} = 2r/d$, $\bar{x} = x/L$, $\lambda = L/d$. Здесь d — диаметр миделя, а L — длина тела вращения (конуса).

Аналогично можно получить формулу для коэффициента продольной силы. Элементарная продольная сила $dX = \bar{p}q_\infty rd\psi dl\sin\theta$. Тогда

$$X = 2q_\infty\int_0^L r\,\mathrm{tg}\,\theta dx\int_0^\pi \bar{p}d\psi; \qquad c_x = \frac{4\lambda}{\pi}\int_0^1 \bar{r}\,\mathrm{tg}\,\theta d\bar{x}\int_0^\pi \bar{p}d\psi. \tag{10.13}$$

Формулы (10.12) и (10.13) применимы для любого тела вращения. В случае конуса, учитывая, что $\bar{r} = \bar{x}$, $\theta = \theta_к$, $\lambda = 1/(2\mathrm{tg}\theta_к)$, получаем:

$$c_y = -\frac{2\,\mathrm{ctg}\,\theta_к}{\pi}\int_0^\pi \bar{p}_к\cos\psi d\psi; \quad c_x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \bar{p}_к d\psi. \tag{10.14}$$

Здесь коэффициент давления $\bar{p}_к$, как указывалось выше, является функцией углов ψ, $\theta_к$, α и числа M_∞ .

Коэффициент момента относительно вершины конуса, отнесенный к длине L, $m_z = -2c_y/3$. Коэффициенты подъемной силы c_{ya} и сопротивления c_{xa} можно определить по формулам перехода от связанной к скоростной системе координат:

$$c_{ya} = c_y\cos\alpha - c_x\sin\alpha; \quad c_{xa} = c_x\cos\alpha + c_y\sin\alpha.$$

Из формул (10.14) следует, что коэффициенты нормальной и продольной сил зависят от углов атаки α, полураствора конуса $\theta_к$ и числа M_∞. Таблицы значений коэффициентов c_y, c_x, c_{ya}, c_{xa}, m_z для конусов приведены в работе [4]. Анализ этих результатов показывает, что при увеличении угла $\theta_к$ коэффициент нормальной силы уменьшается (рис. 10.9), при этом коэффициент продольной силы возрастает (рис. 10.10).

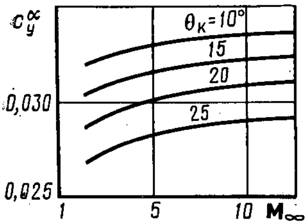


Рис. 10.9. Зависимости производной c_y^α от числа M_∞ и угла полураствора конуса

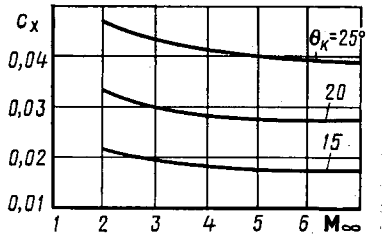


Рис. 10.10. Зависимости коэффициента продольной силы от числа M_∞ и угла полураствора конуса, $\alpha = 10°$

С увеличением числа M_∞ коэффициент нормальной силы увеличивается, а коэффициент продольной силы уменьшается. На рис. 10.9 приведены кривые для производной коэффициента нормальной силы при $\alpha = 0$, позволяющие оценить влияние числа M_∞ и угла конуса на коэффициент нормальной силы при малых углах атаки.

Изменение коэффициента продольной силы $\Delta c_x = c_x - c_{x0}$ в зависимости от угла атаки для конуса с углами полураствора $\theta_к = 20°$ при $M = 3$ показано на рис. 10.11. Там же для сравнения приведены значения отношения $\Delta c_x / c_{x0}$. Здесь c_{x0} — коэффициент продольной силы при $\alpha = 0$.

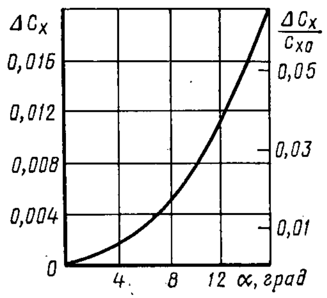


Рис. 10.11. Изменение коэффициента продольной силы по углу атаки: $\theta_к = 20°$; $M_\infty = 3$

§ 10.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ И МОМЕНТА ТАНГАЖА ТОНКИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим обтекание тонкого удлиненного тела вращения при малом угле атаки. В этом случае возмущенный поток в окрестности тела слабо отличается от невозмущенного. По методу малых возмущений потенциал скорости потока (рис. 10.12, *а*) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению и может быть представлен в виде суммы трех составляющих: потенциала невозмущенного потока φ_∞, потенциала скорости возмущения $\varphi_0'(x, r)$ при продольном (осесимметричном) обтекании тела потоком со скоростью $v_\infty \cos\alpha \approx v_\infty$ (рис. 10.12, *б*) и потенциала $\varphi_1'(x, r, \psi)$, возникающего при поперечном обтекании тела потоком $v_\infty \sin\alpha \approx v_\infty \alpha$ (рис. 10.12, *в*).

На поверхности тела функции $\varphi_0'(x, r)$ и $\varphi_1'(x, r, \psi)$ удовлетворяют соотношениям $\partial\varphi_0'/\partial r = v_\infty dr/dx$; $\partial\varphi_1'/\partial r = -\alpha v_\infty \cos\psi$, полученным из условия равенства нулю нормальной к поверхности составляющей скорости потока.

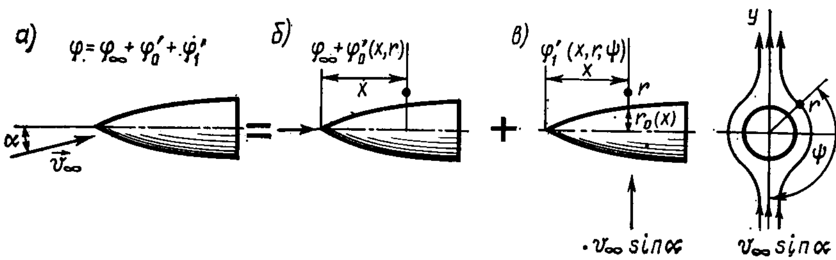


Рис. 10.12. Тонкое тело вращения при малом угле атаки

Линейная теория тел вращения подробно изложена в ряде книг (например, [3] и [18]). Ограничимся здесь рассмотрением теории тонкого тела, разработанной применительно к телам, поперечные размеры которых малы по сравнению с продольными размерами.

Согласно линейной теории, потенциал обтекания тонкого тела описывается уравнением

$$(\mathbf{M}_\infty^2 - 1)\,\partial^2\varphi/\partial x^2 - \partial^2\varphi/\partial y^2 - \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0.$$

В безразмерных координатах $\bar{x} = x/L$, $\bar{y} = y/d$, $\bar{z} = z/d$, где L — длина, а d — диаметр миделева сечения тела, уравнение примет вид

$$(d^2/L^2)(\mathbf{M}_\infty^2 - 1)\,\partial^2\varphi/\partial\bar{x}^2 - \partial^2\varphi/\partial\bar{y}^2 - \partial^2\varphi/\partial\bar{z}^2 = 0.$$

Если тело достаточно тонкое ($d^2/L^2 \ll 1$), то первый член уравнения становится пренебрежимо малым. Тогда

$$\partial^2\varphi/\partial\bar{y}^2 + \partial^2\varphi/\partial\bar{z}^2 = 0. \qquad (10.15)$$

Отсюда следует, что поток в плоскости поперечного сечения тонкого тела можно считать двумерным, совпадающим с поперечным обтеканием цилиндра радиусом, равным местному радиусу тела вращения $r_0(x)$, несжимаемой жидкостью (рис. 10.12). Кроме того, потенциал обтекания тонкого тела не зависит от числа $\mathbf{M}_\infty$.

Так как граничное условие уравнения (10.15) изменяется от сечения к сечению, т. е. в зависимости от координаты x, то решение уравнения (10.15) также зависит от x.

Составим выражение комплексного потенциала потока в плоскости поперечного сечения тела:

$$W(\zeta) = v_\infty \sin\alpha\,[\zeta + r_0^2(x)/\zeta], \text{ где } \zeta = y + iz.$$

Потенциал скорости равен действительной части функции

$$\varphi = -v_\infty \sin\alpha\, r\cos\psi\,[1 + r_0^2(x)/r^2].$$

Здесь $-r\cos\psi = y$, $\quad r = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Отсюда, исключая потенциал невозмущенного потока $\varphi_\infty = -v_\infty \sin\alpha\, r\cos\psi$, получаем потенциал скорости возмущения:

$$\varphi' = -v_\infty \sin\alpha \left[r_0^2(x)/r \right] \cos\psi. \qquad (10.16)$$

Составляющая скорости возмущения вдоль скорости набегающего потока $v_x' = (\partial\varphi'/\partial x)\partial x/\partial x_a$. Здесь $\partial x/\partial x_a = \cos\alpha$; $\partial\varphi'/\partial x = -v_\infty \sin\alpha\cos\psi S'(x)/\pi r$, где $S(x)$ — площадь поперечного сечения тела, а $S'(x) = dS/dx$. Тогда $v_x' = -v_\infty \sin 2\alpha\cos\psi S'(x)/2\pi r$.

По известной составляющей скорости v_x' с учетом малых членов только первого порядка можно определить коэффициент давления на поверхности тела ($r = r_0$):

$$\bar{p} = -2v_x'/v_\infty = \sin 2\alpha \cos\psi S'(x)/\pi r_0. \qquad (10.17)$$

Найдем нормальную силу, действующую на элементарную площадку $r_0 d\psi\, dx/\cos\theta$:

$$\bar{p} q_\infty r_0 \cos\psi dx d\psi \text{ или } q_\infty \sin 2\alpha \frac{S'(x)}{\pi} \cos^2\psi d\psi dx.$$

В результате интегрирования этого выражения по углу ψ ($0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$) получаем нормальную силу, действующую на элемент тела вращения длиной dx:

$$dY = q_\infty \sin 2\alpha S'(x)\, dx. \qquad (10.18)$$

При малых углах атаки с заменой $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$ элементарную нормальную силу можно определить по формуле

$$dY = 2\alpha q_\infty S'(x)\, dx. \qquad (10.19)$$

Из формулы (10.19) следует, что нормальная сила появляется только на участках с переменной площадью поперечного сечения. Знак силы зависит от знака производной $S'(x)$. Носовая часть корпуса, где $S'(x) > 0$, создает положительную, нормальную силу, а сужиевающаяся кормовая часть $[S'(x) < 0]$ — отрицательную силу. Согласно формуле (10.19), на цилиндрическом участке тела $[S'(x) = 0]$ нормальная сила равна нулю.

Формула (10.19) позволяет определять распределение нормальной силы вдоль оси тела. На рис. 10.13 показано распределение нормальной силы вдоль оси комбинации конуса с цилиндром (рис. 10.13, *а*) и по оси тела, образованного вращением дуги параболы (рис. 10.13, *б*). Так как для конуса функция $S'(x)$ линейно зависит от координаты x, то нормальная сила по длине конуса изменяется также линейно. На цилиндрическом участке согласно теории тонкого тела она равна нулю (рис. 10.13, *а*). Во втором примере (рис. 10.13, *б*) знак нормальной силы в соответствии со знаком производной меняется, причем площади эпюры положительного и отрицательного распределения нормальной силы одинаковы, т. е. при этом суммарная нормальная сила равна нулю.

Используя формулу (10.19), найдем суммарную нормальную силу:

$$Y = q_\infty 2\alpha \int_0^L S'(x)\, dx = 2\alpha q_\infty S_{\text{дон}},$$

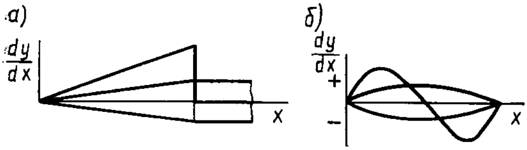


Рис. 10.13. Распределение нормальной силы по оси тела вращения:

а — конус-цилиндр; *б* — параболическое тело

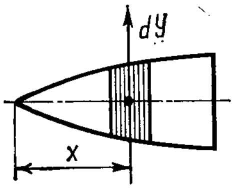


Рис. 10.14. Схема для определения момента тангажа M_z

где $S_{\text{дон}}$ — площадь донного среза тела вращения.

Коэффициент нормальной силы, отнесенной к площади миделева сечения $S_{\text{ф}}$,

$$c_y = 2\alpha S_{\text{дон}}/S_{\text{ф}}, \tag{10.20}$$

$$c_y^{\alpha^\circ} = 0{,}035 S_{\text{дон}}/S_{\text{ф}}. \tag{10.21}$$

Для носовой части корпуса $S_{\text{дон}} = S_{\text{ф}}$ независимо от формы $c_y = 2\alpha = 0{,}035\alpha^\circ$, а производная $c_y^\alpha = \partial c_y/\partial\alpha_{\text{рад}} = 2$, или $c_y^\alpha = 0{,}035$.

По теории тонкого тела легко получить также формулу для определения коэффициента момента m_z для носовой части тела.

Момент элементарной нормальной силы относительно вершины тела (рис. 10.14) $dM_z = -dYx = -2q_\infty \alpha S'(x) x dx$. Используя это выражение, получаем формулу для суммарного момента

$$M_z = -2\alpha q_\infty \int\limits_0^L S'(x)\, x dx$$

и коэффициента момента

$$m_z = \frac{M_z}{q_\infty S_{\text{ф}} L} = -\frac{2\alpha}{S_{\text{ф}} L} \int\limits_0^L S'(x)\, x dx.$$

Интегрируя, находим

$$m_z = -2\alpha\,(1 - W/S_{\text{ф}} L), \tag{10.22}$$

где L — длина, а W — объем носовой части.

Координата аэродинамического фокуса, отсчитываемая от вершины тела, определяется из уравнения $M_z = -Yx_F$ или $m_z = -c_y x_F/L$. Подставляя сюда выражения (10.20) и (10.22), получаем

$$x_F = L - W/S_{\text{ф}}. \tag{10.23}$$

Отсюда для конической носовой части имеем $x_F = 2L/3$.

§ 10.4. НОРМАЛЬНАЯ СИЛА КОРПУСА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Корпус летательного аппарата в большинстве случаев представляет собой тело вращения или тело, близкое к нему по форме. В общем случае его можно разбить на переднюю (носовую), среднюю (в большинстве случаев цилиндрическую) и заднюю (кормовую) части. Наиболее распространенными формами носовых частей являются коническая, оживальная (с криволинейной образующей в виде дуги окружности) и параболическая. Носовые части корпусов летательных аппаратов, предназначенных для полета с большими сверхзвуковыми скоростями, обычно выполняют в виде затупленных тел.

Геометрическими параметрами, определяющими форму носовой части, являются: удлинение $\lambda_{\text{нос}} = L_{\text{нос}}/d$ в случае конической формы; удлинение $\lambda_{\text{нос}}$ и уравнение образующей в безразмерных координатах $\bar{r}(x) = 2r(x)/d$, $\bar{x} = x/L_{\text{нос}}$ в случае носовых частей с криволинейными образующими; удлинение $\lambda_{\text{нос}}$, уравнение образующей и относительный радиус затупления $\bar{r}_{\text{с}} = 2r_{\text{с}}/d$ для затупленной носовой части. Здесь $L_{\text{нос}}$ — длина носовой части, d — диаметр миделя, $r_{\text{с}}$ — радиус сферического затупления.

Цилиндрическая часть тела вращения определяется удлинением $\lambda_{\text{ц}} = L_{\text{ц}}/d$.

Геометрическими параметрами кормовой части являются форма образующей, удлинение $\lambda_{\text{корм}} = L_{\text{корм}}/d$ и сужение $\eta_{\text{корм}} = d_{\text{дон}}/d$, где $d_{\text{дон}}$ — диаметр донного среза.

Рассмотрим прежде всего обтекание тела вращения при малых углах атаки.

При таких углах атаки зависимость коэффициента нормальной силы c_y от угла атаки является линейной. В этом случае коэффициент c_y тела вращения можно представить в виде $c_y = c_y^\alpha \alpha$. По теории тонкого тела производная c_y^α (10.21) не зависит от числа $\mathbf{M}_\infty$. Однако, как показано в § 10.2, производная c_y^α для конуса не является постоянной величиной и изменяется в зависимости от угла $\theta_{\text{к}}$ (удлинения) и числа $\mathbf{M}_\infty$ (см. рис. 10.9).

Исследования тел вращения показывают, что при сверхзвуковых скоростях добавление цилиндрического участка к носовой части тела (в отличие от результатов теории тонкого тела) приводит к увеличению производной c_y^α, так как при этом возникает нормальная сила и на цилиндре. Эта сила в основном проявляется на участках цилиндра, расположенных непосредственно за носовой частью. Значение этой силы и протяженность участка, на котором она действует, зависят от формы и удлинения носовой части, числа $\mathbf{M}_\infty$ и удлинения цилиндрического участка корпуса [28].

Результаты эксперимента можно представить в обобщенном виде — в виде семейства кривых зависимости производной коэффициента нормальной силы c_y^α носовой части с цилиндром от параметров $\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}\,/\lambda_{\text{нос}}$, $\lambda_{\text{ц}}/\lambda_{\text{нос}}$. При дозвуковых скоростях значение

$c^{\alpha}_{y\,\text{нос+цил}}$ удовлетворительно согласуется с данными теории тонкого тела, а при сверхзвуковых скоростях — с увеличением отношения $\lambda_{\text{ц}}/\lambda_{\text{нос}}$ возрастает.

Появление нормальной силы на цилиндрическом участке при сверхзвуковых скоростях приводит также к смещению назад фокуса тела вращения, представляющего собой комбинацию носовой части с цилиндром. Смещение фокуса Δx_F увеличивается при увеличении параметра $\sqrt{M^2_\infty - 1}/\lambda_{\text{нос}}$, а также с увеличением отношения удлинений цилиндрической и носовой частей.

Используя выражение (10.23) с учетом этого смещения, координату фокуса можно представить в следующем виде:

$$x_F = L_{\text{нос}} - W_{\text{нос}}/S_{\text{ф}} + \Delta x_F,$$

где

$$\Delta x_F/L_{\text{нос}} = f\left(\sqrt{M^2_\infty - 1}\,/\,\lambda_{\text{нос}},\ \lambda_{\text{ц}}/\lambda_{\text{нос}}\right).$$

Зависимость производной c^{α}_y от параметров $\sqrt{M^2_\infty - 1}/\lambda_{\text{нос}}$ и $\lambda_{\text{ц}}/\lambda_{\text{нос}}$ можно получить и теоретически*.

Рассмотрим тонкое заостренное тело вращения, наклон контура которого к оси x в любом меридиональном сечении больше нуля или равен нулю. Линеаризованное уравнение потенциала скорости для $M_\infty > 1$ можно представить в виде $\partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = \gamma^2\partial^2\varphi/\partial x^2$, где $\gamma = (d/L)\sqrt{M^2_\infty - 1}$. Очевидно, параметр γ представляет собой отношение максимального диаметра тела вращения к радиусу конуса Маха, исходящего из носка тела, в плоскости этого сечения.

Заметим, что теория тонкого тела является предельным случаем, когда $\gamma \to 0$, т. е. когда тело бесконечно тонкое ($d/L \to 0$) или число M стремится к единице.

Для того чтобы найти функцию φ при малых, но не равных нулю значениях γ, представим ее в виде ряда по γ с сохранением малых первого порядка: $\varphi^* = \varphi_0 + \lambda\varphi_1$. Подставляя это выражение в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях γ, получаем $\Delta\varphi_0 = 0$ и $\Delta\varphi_1 = 0$, т. е. функции φ_0 и φ_1 являются решениями уравнения Лапласа. При этом будем считать, что функция φ^* удовлетворяет заданным граничным условиям: на головной поверхности конуса Маха $\varphi^* = 0$, а на поверхности тела вращения $\partial\varphi^*/\partial n = -v_\infty\cos(\vec{n}, \vec{v}_\infty)$ — в соответствии с условием непротекания.

Получим решение этой задачи для конуса с цилиндром при $\alpha \neq 0$. Для этого рассмотрим отдельно обтекание конуса под углом атаки и цилиндра с протоком при том же угле атаки (рис. 10.15).

Составим уравнение Лапласа в плоскости yz в полярных координатах r, ψ:

---

* Здесь рассмотрен метод, разработанный *Ю. А. Рыжовым.*

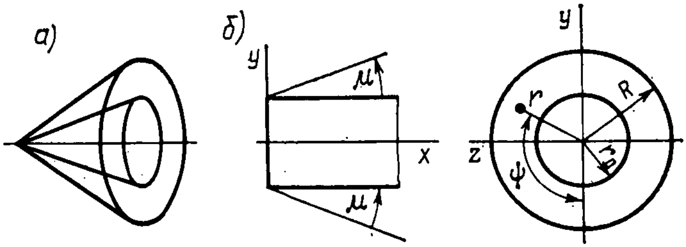


Рис. 10.15. Обтекание конуса (*а*) и цилиндра с протоком (*б*) при $M_\infty > 1$

$$(\partial/\partial r)(r\partial\varphi^*/\partial r) + (1/r)(\partial^2\varphi^*/\partial\psi^2) = 0. \tag{10.24}$$

При этом граничные условия имеют вид

$$(\varphi^*)_{r=R} = 0; \quad (\partial\varphi^*/\partial n)_{r=d/2} = v_\infty \alpha \cos\psi. \tag{10.25}$$

Граничное условие на поверхности конуса Маха для цилиндра с протоком следовало бы записывать с учетом влияния расположенного впереди конуса. Однако ограничимся рассмотрением решения, удовлетворяющего условиям (10.25). Таким решением уравнения (10.24) является функция

$$\varphi^* = -v_\infty\alpha\left[r_0^2/(r_0^2 + R^2)\right](R^2/r - r)\cos\psi, \tag{10.26}$$

где R, r_0 — радиус конуса возмущений и радиус тела вращения при заданном значении координаты x.

Для конуса отношение $R/r_0 = \operatorname{tg}\mu/\operatorname{tg}\theta_к$, а для внешней задачи обтекания цилиндра радиусом r_0 с протоком радиус $R = r_0 + x\operatorname{tg}\mu$.

Используя выражение (10.26), найдем коэффициент давления, обусловленный углом атаки:

$$\bar{p} = -(2/v_\infty)(\partial\varphi^*/\partial x)_{r=r_0}.$$

Легко показать, что для конуса

$$\bar{p} = [4\alpha\operatorname{tg}\theta_к/(1 + \operatorname{tg}^2\theta_к/\operatorname{tg}^2\mu)]\cos\psi, \tag{10.27}$$

а для цилиндра

$$\bar{p} = 8\ \{r_0^3(r_0 + x\operatorname{tg}\mu)\operatorname{tg}\mu/[r_0^2 + (r_0 + x\operatorname{tg}\mu)^2]^2\}\cos\psi. \tag{10.28}$$

По известным значениям $\bar{p}$ находим нормальную силу dY/dx, действующую на единицу длины конуса и цилиндра:

$$dY/dx = 2\alpha q_\infty S'(x)/(1 + \operatorname{tg}^2\theta_к/\operatorname{tg}^2\mu); \tag{10.29}$$

$$dY/dx = 8\alpha q_\infty \pi r_0^4(r_0 + x\operatorname{tg}\mu)\operatorname{tg}\mu/[r_0^2 + (r_0 + x\operatorname{tg}\mu)^2]^2, \tag{10.30}$$

При $\operatorname{tg}\theta_к/\operatorname{tg}\mu \to 0$ формула (10.29) совпадает с формулой (10.19) теории тонкого тела.

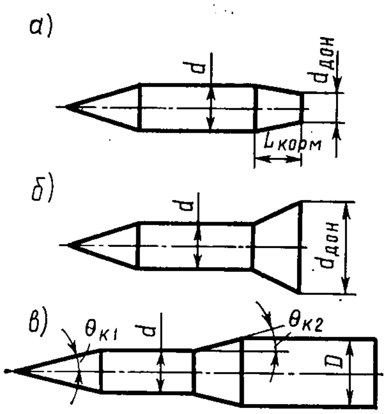


Рис. 10.16. Тела вращения с суживающейся (*а*) и расширяющейся (*б*) кормовыми частями и тело вращения, составленное из конических и цилиндрических участков (*в*)

Для коэффициента нормально силы сечений цилиндра

$$c_y(\bar{x}) = Y(\bar{x})/(q_\infty \pi r_0^2)$$

$$dc_y^\alpha(\bar{x})/d\bar{x} = 8(1+\bar{x}\,\mathrm{tg}\,\mu)\,\mathrm{tg}\,\mu/[1+ (1+\bar{x}\,\mathrm{tg}\,\mu)^2]^2. \qquad (10.31$$

При $\bar{x}=0$ производная $dc_y^\alpha \big/ d\bar{x} = 2\big/\sqrt{M_\infty^2-1}$. С увеличением координаты $\bar{x}$ значение производной $dc_y^\alpha/d\bar{x}$ уменьшается.

Интегрируя выражения (10.29) и (10.30) по x от $x=0$ до $x=L$ и переходя к безразмерным величинам, получаем формулы для производных от суммарных коэффициентов нормальной силы конуса и цилиндра.

Для конуса

$$c_y^\alpha = 2/(1+\mathrm{tg}^2\theta_к/\mathrm{tg}^2\mu) \qquad (10.32)$$

или, учитывая, что $\mathrm{tg}^2\mu/\mathrm{tg}^2\theta_к = 2\lambda_{кон}\big/\sqrt{M_\infty^2-1}$, имеем

$$c_y^\alpha = 8\Big/\left[4+\left(\sqrt{M_\infty^2-1}\,\big/\,\lambda_{кон}\right)^2\right]. \qquad (10.33)$$

Для цилиндра

$$c_y^\alpha = 2\left\{1-2\Big/\left[1+\left(1+2\lambda_ц\big/\sqrt{M_\infty^2-1}\right)^2\right]\right\}. \qquad (10.34)$$

Здесь $\lambda_ц$ — удлинение цилиндра.

Складывая выражения (10.33) и (10.34), получаем производную от суммарного коэффициента нормальной силы конуса с цилиндром. Очевидно, ее можно представить в виде функции двух параметров: $\sqrt{M_\infty^2-1}\big/\lambda_{нос}$ и $\lambda_ц/\lambda_{нос}$. При увеличении отношения удлинений $\lambda_ц/\lambda_{нос}$ производная c_y^α возрастает.

Определим нормальную силу суживающейся кормовой части (рис. 10.16, *а*) по теории тонкого тела:

$$Y_{корм} = 2\alpha q_\infty \int_0^{L_{корм}} S'(x)\,dx = -2\alpha q_\infty (S_ф - S_{дон}), \qquad (10.35)$$

а коэффициент нормальной силы

$$c_{y\,корм} = -2\alpha\left(1-\eta_{корм}^2\right), \qquad (10.36)$$

где $\eta_{корм} = d_{дон}/d$ — сужение кормовой части.

Из формулы (10.36)

$$c_{y\,корм}^\alpha = -0{,}035\left(1-\eta_{корм}^2\right). \qquad (10.37)$$

В реальном потоке в кормовой части отрицательная нормальная ила $Y_{\text{корм}}$ значительно меньше, чем по теории тонкого тела. Это бычно учитывается путем введения в формулу (10.37) эмпирического оэффициента $\xi < 1$:

$$c_{y\,\text{корм}}^{\alpha} = -0{,}035\xi\left(1 - \eta_{\text{корм}}^{2}\right). \tag{10.38}$$

Значение коэффициента ξ зависит от чисел **Re**, $\mathbf{M}_\infty$ и формы кормовой части. Ориентировочно можно принять $\xi = 0{,}15 \div 0{,}20$ [19].

Расширяющаяся кормовая часть (конический стабилизатор) рис. 10.16, *б*) создает положительную нормальную силу. Используя формулу (10.35), получаем

$$c_{y\,\text{корм}}^{\alpha} = 0{,}035\left(\bar{S}_{\text{дон}} - 1\right),$$

где $c_{y\text{корм}}$ — коэффициент, отнесенный к площади поперечного сечения цилиндра, $S_{\text{ф}} = \pi d^2/4$, а $\bar{S}_{\text{дон}} = (d_{\text{дон}}/d)^2$.

В реальном потоке коэффициент нормальной силы конического стабилизатора меньше указанного. Это объясняется прежде всего влиянием торможения потока, вызываемого потерями полного давления в носовом скачке уплотнения, а также явлениями отрыва пограничного слоя в области соединения цилиндрической части с коническим стабилизатором (см. гл. 12).

Используя значения $c_{y\,\text{нос+цил}}^{\alpha}$ и $c_{y\,\text{корм}}^{\alpha}$, можно определить производную $c_{y\text{ф}}^{\alpha}$ для тела вращения, состоящего из носовой, цилиндрической и кормовой частей:

$$c_{y\,\text{ф}}^{\alpha} = c_{y\,\text{нос+цил}}^{\alpha} + c_{y\,\text{корм}}^{\alpha}. \tag{10.39}$$

Производная коэффициента нормальной силы тела вращения, составленного из последовательно соединенных конических и цилиндрических участков (рис. 10.16, *в*), имеет следующий вид:

$$c_{y\,\text{ф}}^{\alpha} = c_{y\,\text{нос+цил}}^{\alpha} d^2/D^2 + c_{y\,\text{перех+цил}}^{\alpha}\left(1 - d^2/D^2\right), \tag{10.40}$$

где $c_{y\,\text{перех+цил}}^{\alpha}$ — производная коэффициента нормальной силы переходника с углом полураствора $\theta_{\text{к2}}$ с учетом влияния второго цилиндра.

Значение этого коэффициента при заданных геометрических параметрах корпуса ($\lambda_{\text{нос}}$, $\lambda_{\text{ц}}$, $\theta_{\text{к2}}$, $\lambda_{2\text{ц}}$) обычно определяют экспериментально. Результаты систематических экспериментальных исследований таких корпусов даны в работе [28].

Приведенные выше формулы составлены для малых углов атаки $\alpha < 5°$, при которых происходит безотрывное обтекание тел вращения.

Экспериментальные исследования тел вращения большого удлинения показывают, что с увеличением угла атаки характер обтекания тел существенно изменяется. Это связано с влиянием пограничного слоя. Непрерывно утолщающийся по длине тела пограничный слой при больших углах атаки отрывается с подветренной стороны поверхности и сносится по потоку, сворачиваясь в интенсивные вихревые жгуты, расположенные с обеих сторон тела (рис. 10.17). Положение

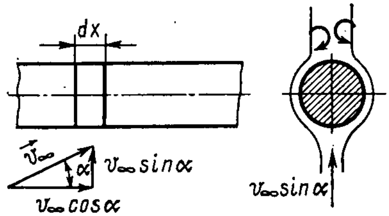


Рис. 10.17. Поперечное обтекание тела потоком вязкого газа

линии отрыва в значительной степени зависит от угла атаки, формы тела, чисел **Re** и $\mathbf{M}_\infty$. Ввиду того что на подветренной стороне поверхности в зоне отрыва давление уменьшается по сравнению с безотрывным обтеканием здесь возникает дополнительная нормальная сила. Коэффициент этой силы Δc_y при прочих равных условиях зависит от состояния пограничного слоя. В случае турбулентного слоя он меньше, чем для ламинарного пограничного слоя.

Дополнительную нормальную силу приближенно можно рассматривать как силу сопротивления цилиндра, обтекаемого вязким поперечным потоком со скоростью $v_\infty \sin\alpha$. Тогда для элемента поверхности длиной dx нормальную силу, вызываемую отрывом потока, можно представить в следующем виде:

$$dY = c\rho\,[(v_\infty \sin\alpha)^2/2]\,2r dx, \tag{10.41}$$

где c — средний по длине тела коэффициент сопротивления цилиндра, отнесенный к площади $d \cdot 1$. Коэффициент c зависит прежде всего от режима течения в пограничном слое. В случае ламинарного пограничного слоя можно принять $c \cong 1{,}2$, а турбулентного слоя $c \cong 0{,}3 \div 0{,}4$. Тогда коэффициент дополнительной нормальной силы

$$\Delta c_y = (4/\pi)\, c\lambda_{\text{ц}} \sin^2\alpha. \tag{10.42}$$

Аналогично можно определять значение дополнительной нормальной силы для тела с переменным по длине диаметром сечений. Для этого в выражении (10.41) нужно принять $r = r(x)$. Таким образом, при больших углах атаки зависимость коэффициента нормальной силы от угла атаки становится нелинейной, причем чем больше удлинение тела, тем сильнее проявляется нелинейность.

С увеличением угла атаки центр давления тела вращения большого удлинения смещается назад, так как возникающая при этом на цилиндрическом участке нормальная сила растет быстрее, чем $Y_{\text{нос}}$ (пропорционально произведению $\lambda_{\text{ц}}\sin^2\alpha$). На больших углах центр давления тела вращения располагается вблизи центра тяжести площади меридионального сечения.

Исследования тел вращения показывают, что при больших углах атаки одновременно с вязкой составляющей нормальной силы в отсутствие скольжения возникают поперечная сила Z и связанный с ней момент рыскания M_y. Появление силы Z и момента M_y объясняется тем, что симметричная вихревая система на подветренной стороне тела неустойчива. Поэтому небольшие возмущения, в частности небольшие отклонения формы тела от осевой симметрии при его изготовлении, могут нарушить симметричность расположения вихрей.

Значения коэффициентов поперечной силы c_z и момента рыскания m_y зависят от угла атаки, формы тела, чисел **Re** и $\mathbf{M}_\infty$. Следует отметить, что при углах $\alpha > 60°$, когда начинает преобладать поперечное обтекание тела вращения, наблюдается постепенное уменьшение коэффициентов c_z и m_y. Так как возникновение поперечной силы Z и момента рыскания M_y связано со сложным характером обтекания и образующейся при этом сложной вихревой системой, то коэффициенты c_z и m_y для тела вращения заданной формы в основном определяются экспериментально.

§ 10.5. СОПРОТИВЛЕНИЕ КОРПУСА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Сопротивление корпуса можно представить в виде суммы сопротивления при нулевой подъемной силе ($\alpha = 0$) и индуктивного сопротивления, возникающего при $\alpha \neq 0$.

Введя коэффициент сопротивления c_{xa}, отнесенный к площади миделева сечения, имеем

$$c_{xa} = c_{x0} + c_{xai}, \qquad (10.43)$$

где c_{x0} — коэффициент сопротивления при $\alpha = 0$; c_{xai} — коэффициент индуктивного сопротивления.

Сопротивление при $\alpha = 0$ равно сумме сопротивления трения и сопротивления давления. В свою очередь, сопротивление давления при $\alpha = 0$ удобно разделить на составляющие по отдельным участкам тела, на которых оно возникает: на сопротивление давления носовой и кормовой частей и на донное сопротивление. Тогда коэффициент c_{xa} можно представить в виде суммы:

$$c_{x0} = c_{x\,\text{тр}} + c_{x\,\text{нос}} + c_{x\,\text{корм}} + c_{x\,\text{дон}}. \qquad (10.44)$$

Для ступенчатого корпуса (см. рис. 10.16) кроме указанных сопротивлений необходимо учесть сопротивление переходника, соединяющего цилиндрические участки с диаметрами d и D. Тогда

$$c_{x0} = c_{x\,\text{тр}} + c_{x\,\text{нос}} d^2/D^2 + c_{x\,\text{перех}} + c_{x\,\text{корм}} + c_{x\,\text{дон}}.$$

Методы расчета коэффициента сопротивления трения подробно рассмотрены в разделе пограничного слоя (гл. 12).

Коэффициенты $c_{x\,\text{нос}}$ и $c_{x\,\text{корм}}$. Коэффициенты сопротивления носовой и кормовой частей легко определяются, если известно распределение давления по поверхности тела. Для этого достаточно воспользоваться формулой (10.13). При $\alpha = 0$

$$c_{x\,\text{нос}} = 4\lambda_{\text{нос}} \int_0^1 \bar{p}\,\bar{r}\,\mathrm{tg}\,\theta\, d\bar{x}. \qquad (10.45)$$

Учитывая, что $\lambda_{\text{нос}}\,\mathrm{tg}\theta d\bar{x} = d\bar{r}$, формулу (10.45) можно представить в виде

$$c_{x\,\text{нос}} = 2 \int_0^1 \bar{p}\,\bar{r}\, d\bar{r}. \qquad (10.46)$$

Аналогично по известному распределению давления определяется коэффициент сопротивления кормовой части:

$$c_{x\,\text{корм}} = 2 \int\limits_{\bar{r}_{\text{дон}}}^{1} \bar{p}\bar{r}d\bar{r}. \qquad (10.47)$$

Распределение давления по носовой части тела с достаточной степенью точности можно определить, используя теорию обтекания тел потенциальным потоком невязкого газа. В § 10.1 в такой постановке приведено решение задачи осесимметричного обтекания конуса сверхзвуковым потоком. При этом давление по поверхности постоянно и $c_{xa} = \bar{p}_{\text{к}}$. В общем случае носовой части произвольной формы давление вдоль образующей изменяется. Для расчета распределения давления по поверхности тела с острым и с затупленным носком в настоящее время широко используются численные методы с применением ЭВМ [4, 22].

Параметрические расчеты позволяют получить определенные закономерности в зависимости от формы и удлинения носовой части, а также числа M_∞. При дозвуковых скоростях сопротивление носовой части тела вращения невелико. Оно сильно увеличивается при трансзвуковых скоростях в диапазоне $M_{\text{кр}} < M_\infty < 1{,}2 \div 1{,}4$. Это объясняется тем, что при $M_{\text{кр}} < M_\infty < 1$ появляются местные зоны сверхзвуковых скоростей, замыкающиеся прямыми скачками уплотнения, а при $1 < M_\infty < 1{,}2 \div 1{,}4$ даже на заостренном теле возникают отсоединенные скачки уплотнения. Увеличение удлинения, очевидно, приводит к уменьшению сопротивления давления носовой части. Однако при этом растет сопротивление трения (см. § 13.13).

Графические зависимости для определения коэффициента $c_{x\text{нос}}$ для различных форм носовых частей (конуса, тела с параболической образующей, затупленных тел, носовых частей с воздухозаборником) приведены в работах [19, 28]. В работе [19] в области $M_\infty > 1{,}2 \div 1{,}4$ использованы результаты теоретических расчетов, а при дозвуковых и околозвуковых скоростях—результаты экспериментальных исследований распределения давления по поверхности тела.

В работе [28] приведены результаты экспериментальных исследований различных тел вращения при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях.

При $M_\infty > 1$ коэффициент сопротивления конической носовой части $\lambda_{\text{нос}} = 1/(2\operatorname{tg}\theta_{\text{к}})$ можно определить, пользуясь данными, приведенными в § 10.1 (см. рис. 10.4).

Коэффициент сопротивления конического переходника можно определить по формуле

$$c_{x\,\text{перех}} \approx K c'_{x\,\text{кон}\,2}(1 - d^2/D^2),$$

где $c_{x\text{кон}2}$ — коэффициент сопротивления конуса с углом полураствора $\theta_{\text{перех}}$, а K — коэффициент, учитывающий влияние носовой части корпуса [28].

Коэффициент сопротивления давления кормовой части зависит

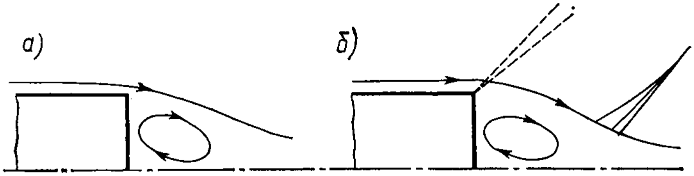


Рис. 10.18. Схема обтекания донного среза дозвуковым (*а*) и сверхзвуковым (*б*) потоками

от числа M_∞, формы образующей, удлинения $\lambda_{корм} = L_{корм}/d$ и сужения $\eta_{корм} = d_{дон}/d$. Увеличение удлинения кормовой части приводит, очевидно, к уменьшению коэффициента $c_{x корм}$. Аналогичное изменение коэффициента $c_{x корм}$ вызывает увеличение сужения при заданном диаметре корпуса, т. е. увеличение диаметра донного среза. Конкретные данные для определения $c_{x корм}$ приведены в работе [19].

Коэффициент $c_{x дон}$. Сопротивление, обусловленное разрежением на донном срезе тела вращения, принято называть *донным сопротивлением*. Возникновение разрежения связано с отрывом потока в кормовой части тела (рис. 10.18). При этом за кормовым срезом наблюдается сложное течение как при дозвуковых (рис. 10.18, *а*), так и сверхзвуковых (рис. 10.18, *б*) скоростях потока. При $M_\infty > 1$ у кромки тела реализуется течение типа Прандтля — Майера с последующим торможением потока в системе скачков уплотнения. Разрежение зависит от многих факторов. Важнейшими из них являются состояние пограничного слоя перед донным срезом, геометрические параметры тела вращения, форма кормовой части, значения чисел Re и M_∞, угол атаки и температура поверхности тела. Характер течения еще более усложняется, если часть донного среза занята выходным сечением сопла работающего двигателя.

Ввиду многообразия факторов, влияние которых теоретически трудно учесть, в практических расчетах донного давления (коэффициента донного давления $\bar{p}_{дон} < 0$) приходится пользоваться результатами эксперимента. Экспериментальные исследования донного давления показывают, что влияние числа Re наиболее сильно проявляется в случае ламинарного пограничного слоя, а для турбулентного пограничного слоя влияние числа Re на коэффициент донного давления мало. Учитывая, что в реальных условиях пограничный слой на большей части поверхности тела вращения является турбулентным, можно принять, что коэффициент донного давления для длинных тел вращения не зависит от числа Re.

Пограничный слой, стекающий с поверхности тела, охватывает застойную зону за донным срезом, отделяя ее от внешнего потока. В результате этого эжектирующее действие внешнего потока ослабляется, поэтому чем толще пограничный слой у донного среза (чем больше длина тела), тем меньше донное разрежение.

Нагрев или охлаждение пограничного слоя путем теплопередачи от тела вращения также может оказать определенное влияние на

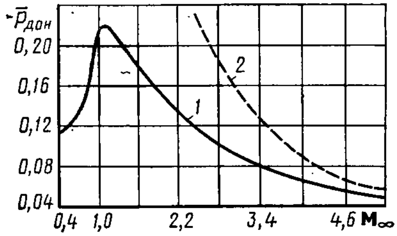


Рис. 10.19. Зависимость коэффициента донного давления ($-\bar{p}_{дон}$) от числа M_∞:

1 — по экспериментальным данным; 2 — для полного вакуума $(-\bar{p}_{дон}) = 1{,}43/M^2_\infty$

донное давление. При повышении температуры тела толщина пограничного слоя возрастает (см. гл. 12), что приводит к увеличению донного давления.

Исследования показывают, что у тел вращения большого удлинения при малых углах атаки (примерно до 5°) коэффициент донного давления практически не зависит от угла атаки. Наибольшее влияние на донное давление оказывает число M_∞, а также форма кормовой части тела вращения. При увеличении числа M_∞ как в дозвуковом, так и сверхзвуковом потоке давление в донной части уменьшается (разрежение возрастает).

Для оценки донного давления результаты удобно представить в виде зависимости коэффициента донного давления $\bar{p}_{дон} = (p_{дон} - p_{дон})/q_\infty$ от числа M_∞.

Абсолютное значение коэффициента давления имеет максимум в области околозвуковых скоростей, а при сверхзвуковых скоростях с увеличением числа M_∞ значение коэффициента $\bar{p}_{дон}$ непрерывно убывает. На рис. 10.19 приведена зависимость $\bar{p}_{дон}$ от M_∞ для тела вращения без кормовой части, полученная по данным экспериментальных исследований в случае турбулентного пограничного слоя [19]. Для сравнения там же нанесены значения коэффициента давления, соответствующие абсолютному вакууму: $\bar{p}_{дон} = -1{,}43/M^2_\infty$.

На основании результатов эксперимента установлено, что при наличии сужения кормовой части ($\eta_{корм} < 1$) донное давление возрастает. Кроме того, $\bar{p}_{дон}$ зависит и от формы образующей кормовой части. В условиях конкретного летательного аппарата донное давление при наличии реактивных струй зависит также от газодинамических параметров струи, количества и взаимного расположения струй в донной части корпуса [28]. Следует отметить, что при этом распределение давления по радиусу донного среза может быть существенно неравномерным. Особенно сложным распределение давления оказывается в случае нескольких реактивных струй.

Для приближенного определения коэффициента донного сопротивления, отнесенного к площади миделева сечения тела вращения $S_ф$ можно пользоваться формулой

$$c_{x\,дон} = (-\bar{p}_{дон})\, S_{дон}/S_ф, \tag{10.48}$$

где $\bar{p}_{дон}$ — среднее значение коэффициента давления по донному срезу; $S_{дон}$ — площадь донного среза тела вращения.

При наличии реактивных струй за площадь $S_{дон}$ принимается площадь донного среза без учета суммарной площади среза сопл.

Коэффициент индуктивного сопротивления $c_{xa\,i}$. Представим коэффициент суммарного сопротивления корпуса в виде $c_{xa} = c_x \cos\alpha + c_y \sin\alpha$. При малых углах атаки $c_{xa} = c_x + c_y\ \alpha/57,3$. Подставляя это выражение в формулу (10.43), получаем

$$c_{xai} = c_y \alpha/57,3 + \Delta c_x, \tag{10.49}$$

где $c_y\ \alpha/57,3$ — коэффициент индуктивного сопротивления, возникающего за счет проекции нормальной силы корпуса; α — в град; $\Delta c_x = (c_x - c_{x0})$ — изменение продольной силы при $\alpha \neq 0$.

При сверхзвуковых скоростях $\Delta c_x > 0$ (см., например, рис. 10.11), а в дозвуковом потоке $\Delta c_x < 0$, так как продольная сила при $M_\infty < 1$ уменьшается за счет появления подсасывающей силы. Экспериментальные исследования показывают, что величина Δc_x пропорциональна α^2:

$$\Delta c_x = 2\zeta\,(\alpha/57,3)^2, \tag{10.50}$$

где ζ — коэффициент, зависящий от формы и удлинения носовой части корпуса, а также от числа M_∞ [19]. При $M_\infty < 1$ $\zeta < 0$, а при $M_\infty > 1$ $\zeta > 0$.

Подставляя выражение (10.50) в формулу (10.49) и учитывая при этом линейную зависимость коэффициента нормальной силы от угла атаки ($c_y = c_y^\alpha\ \alpha$), получаем

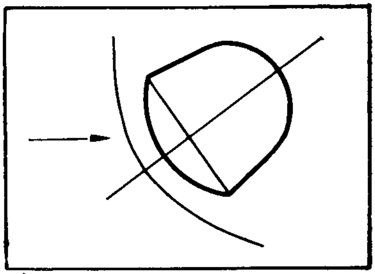
$$c_{xai} = \left(57,3c_y^\alpha + 2\,\zeta\right)(\alpha^\circ/57,3)^2. \tag{10.51}$$

В заключение отметим, что вклад различных видов сопротивления в суммарное сопротивление корпуса, очевидно, зависит от его формы и числа M_∞. При заданном диаметре корпуса и высоты полета (отношения D/ν) коэффициент сопротивления трения возрастает с увеличением удлинения корпуса (см. гл. 12). Волновое сопротивление, наоборот, уменьшается при увеличении удлинения. Поэтому для длинных корпусов (с большим удлинением) сопротивление трения составляет значительную долю суммарного сопротивления, а у коротких корпусов основными сопротивлениями являются волновое и донное сопротивления.

Для определения наивыгоднейшего удлинения корпуса, обладающего при заданных условиях минимальным сопротивлением, нужно провести анализ значений различных видов сопротивления. Например, для корпуса, составленного из конической и цилиндрической частей (с одинаковыми удлинениями) при $M_\infty = 2$, оптимальное удлинение носовой части $\lambda_{\text{нос}} = 6,5$; полное удлинение корпуса $\lambda = 13$.

Очевидно, что оптимальное удлинение будет изменяться в зависимости от формы тела и числа M_∞. При сверхзвуковых скоростях обычно $\lambda > 10$.

11
ГЛАВА



ОСНОВЫ АЭРОДИНАМИКИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ

§ 11.1. ОСОБЕННОСТИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

При обтекании тел гиперзвуковым потоком возникает ряд качественно новых явлений, влиянием которых при умеренных сверхзвуковых скоростях можно пренебречь. Рассмотрим некоторые особенности гиперзвуковых течений. При обтекании тонких тел гиперзвуковым потоком возмущения скорости, малые по сравнению со скоростью невозмущенного потока, могут стать соизмеримыми с местной скоростью звука. При этом малое изменение скорости приводит к значительному изменению энтальпии, а следовательно, всех параметров состояния газа (давления, плотности, температуры).

Для определения изменения давления в зависимости от скорости воспользуемся уравнением Бернулли в дифференциальной форме: $vdv + dp/\rho = 0$. Отсюда $dp/p = -(\rho/p)\, v^2 dv/v$, или

$$dp/p = -k\mathrm{M}^2 dv/v. \qquad (11.1)$$

Для изэнтропического течения газа $d\rho/\rho = (1/k) dp/p$. Тогда по формуле (11.1)

$$d\rho/\rho = -\mathrm{M}^2 dv/v. \qquad (11.2)$$

Из уравнения состояния газа $p = R\rho T$ следует, что $dT/T = dp/p - d\rho/\rho$. Подставляя сюда dp/p и $d\rho/\rho$ по формулам (11.1) и (11.2), находим

$$dT/T = -(k-1)\,\mathrm{M}^2 dv/v. \qquad (11.3)$$

Изменение скорости звука можно определить, пользуясь формулой $da/a = 0{,}5 dT/T$. Поэтому

$$da/a = -[(k-1)/2]\,\mathrm{M}^2 dv/v. \qquad (11.4)$$

Из формул (11.1)—(11.4) следует, что в отличие от умеренных сверхзвуковых скоростей, когда малое возмущение скорости приводит к малому изменению всех параметров состояния газа, в гиперзвуковом потоке небольшое относительное приращение скорости вызывает значительные изменения давления, плотности, температуры и скорости звука.

В этих условиях многие выводы линейной теории, столь эффективной при изучении обтекания тонких тел потоком с умеренной сверхзвуковой скоростью, становятся неприменимыми. При теоретическом изучении обтекания тел гиперзвуковым потоком необходимо исследовать нелинейные уравнения. Нелинейность является существенным свойством гиперзвуковых течений.

При дозвуковых и умеренных сверхзвуковых скоростях и больших числах **Re** при определении параметров потока на границе пограничного слоя около тонкого тела при малых углах атаки влиянием пограничного слоя можно пренебречь, так как толщина пограничного слоя при этом мала (см. гл. 12).

При обтекании тел гиперзвуковым потоком происходит взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем. Это объясняется тем, что с увеличением числа **M** область возмущенного движения сужается; скачок уплотнения приближается к поверхности.

Кроме того, сильное повышение температуры газа вследствие торможения потока приводит к увеличению кинематической вязкости и снижению местного значения числа **Re**. В результате этого толщина пограничного слоя возрастает. Наличие толстого пограничного слоя эквивалентно изменению контура и увеличению толщины тела. Это вызывает возрастание угла наклона скачка уплотнения у передней кромки, искривление поверхности скачка уплотнения, изменение характера распределения давления по поверхности тела, что оказывает влияние на развитие пограничного слоя.

Повышение температуры за скачками уплотнения и в пограничном слое может привести к изменению термодинамических свойств и химического состава воздуха вследствие диссоциации и ионизации газа.

Скорость реакции диссоциации зависит от числа столкновений наиболее быстрых молекул в единицу времени. Поэтому из-за уменьшения числа быстрых молекул за счет их распада скорость диссоциации с течением времени уменьшается. Одновременно с диссоциацией в воздухе происходит обратная реакция — *рекомбинация*, т. е. образование молекул кислорода и азота. Скорость рекомбинации увеличивается по мере увеличения числа свободных атомов. Поэтому через некоторое время после повышения температуры скорости обеих реакций (диссоциации и рекомбинации) уравниваются. Начиная с этого момента число молекул, распадающихся за единицу времени, становится равным числу молекул, образующихся вновь. Тогда устанавливается равновесная диссоциация. Время, необходимое для установления равновесной диссоциации, называется *временем релаксации*.

При обтекании тел гиперзвуковым потоком время пребывания частиц (молекул и атомов) вблизи поверхности мало. Может оказаться, что это время меньше времени релаксации. В этом случае состояние газа называется неравновесным. *Неравновесность* процессов, происходящих в газе при высокой температуре, значительно осложняет решение задач обтекания тел, так как при этом уравнения газодинамики решаются совместно с уравнениями, описывающими физико-химические процессы в газе. Отступление от термодинамического равновесия может заметно влиять и на структуру скачков уплотнения, а также на распределение параметров состояния газа [33]. Для расчета параметров и функций равновесного состояния газа, вязкости и теплопроводности с учетом реальных свойств при высокой температуре можно пользоваться таблицами термодинамических функций [30] или диаграммами состояния газа [12].

Для характеристики влияния реальных свойств газа в качестве примера найдем параметры потока за прямым скачком уплотнения при гиперзвуковых скоростях.

§ 11.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА ЗА СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ С УЧЕТОМ РЕАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ГАЗА

Рассмотрим прямой скачок уплотнения в гиперзвуковом потоке. Для прямого скачка уплотнения выполняются известные уравнения (см. гл. 5):

уравнение неразрывности

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \tag{11.5}$$

уравнение энергии

$$v_1^2/2 + i_1 = v_2^2/2 + i_2 = i_0, \tag{11.6}$$

уравнение изменения количества движения

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_1 (v_1 - v_2). \tag{11.7}$$

При этом до скачка уплотнения справедливы основные соотношения для идеального газа с постоянной теплоемкостью: $p_1 = R\rho_1 T_1$; $i_1 = [k/(k-1)]RT_1$; $a_1 = \sqrt{kRT_1}$; $s_1 = c_v \ln p_1/\rho_1^k$, а за скачком уплотнения энтальпия $i_2(T_2, p_2)$, давление $p_2(T_2, \rho_2)$, скорость звука $a_2(T_2, p_2)$, энтропия $s_2(T_2, p_2)$ определяются по таблицам газодинамических функций с учетом реальных свойств при высоких температурах газа [12].

Оценим влияние реальных свойств газа качественно. Обозначим $\overset{*}{T_2}$, $\overset{*}{\rho_2}$, $\overset{*}{v_2}$ параметры потока за скачком уплотнения, вычисленные без учета реальных свойств газа. Очевидно, вследствие затраты энергии на диссоциацию температура газа снижается: $T_2 < \overset{*}{T_2}$, $T_{02} < T_{01}$. Тогда $\rho_2 > \overset{*}{\rho_2}$, $\rho_2/\rho_1 > \overset{*}{\rho_2}/\rho_1$, где $1 < \overset{*}{\rho_2}/\rho_1 \leqslant 6$, т. е. отношение плотностей ρ_2/ρ_1 при этом может быть больше шести.

Используя уравнение неразрывности (11.5), получаем $v_2/v_1 = 1/(\rho_2/\rho_1)$ и $\overset{*}{v_2}/v_1 = 1/(\overset{*}{\rho_2}/\rho_1)$. Отсюда $v_2/v_1 < \overset{*}{v_2}/v_1$, т. е. скорость потока за прямым скачком уплотнения с учетом реальных свойств газа меньше, чем в идеальном газе.

Имея в виду проведенную оценку, для определения параметров потока за прямым скачком уплотнения можно воспользоваться методом последовательного приближения, задавая приближенное значение искомой скорости $v_2' < v_2^*$. Затем из уравнений (11.6) и (11.7) можно найти $i_2' = i_0 - (v_2')^2/2$ и отношение давлений $p_2'/p_1 = 1 + k\mathrm{M}_1^2$ (1 —

$-v_2^1/v_1$). Используя таблицы газодинамических функций, по данным i_2', p_2' можно определить плотность ρ_2', а из уравнения (11.5) — новое значение скорости потока $v_2''/v_1 = 1/(\rho_2'/\rho_1)$. В результате последовательного приближения определим v_2, p_2, i_2, по таблицам газодинамических функций ρ_2, T_2, a_2, s_2, T_{02}, p_{02}, ρ_{02}, далее $\mathbf{M}_2 = v_2/a_2$. В табл. 11.1 приведены результаты расчета параметров потока за прямым скачком уплотнения с учетом реальных свойств воздуха и при $k = 1{,}4$: для $\mathbf{M}_1 = 20$, $T_1 = 222$ К, $p_1 = 981$ Па (Н ≈ 30 км).

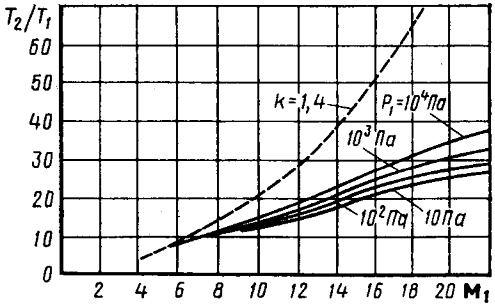


Рис. 11.1. Зависимости изменения температуры T_2/T_1 в прямом скачке уплотнения от числа $\mathbf{M}_1$ и давления p_1 с учетом и без учета ($k=1{,}4$) реальных свойств воздуха; $T_1=222$ К

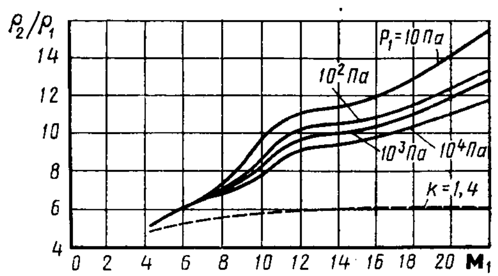


Рис. 11.2. Зависимости изменения плотности ρ_2/ρ_1 в прямом скачке уплотнения от числа $\mathbf{M}_1$ и давления p_1 с учетом и без учета ($k=1{,}4$) реальных свойств воздуха, $T_1=222$ К

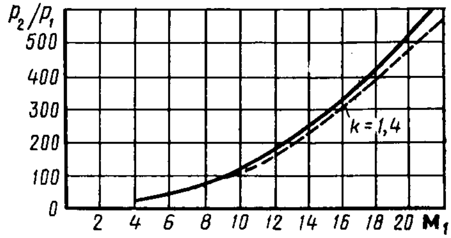


Рис. 11.3. Изменение давления в прямом скачке уплотнения с учетом и без учета ($k=1{,}4$) реальных свойств воздуха в зависимости от числа $\mathbf{M}_1$, $T_1=222$ К

Из табл. 11.1 видно, что температура за скачком уплотнения с учетом реальных свойств воздуха намного меньше, чем при $k = 1{,}4$. В данном примере температура T_2 за скачком уплотнения и температура торможения T_{02} почти в три раза меньше, чем при $k = 1{,}4$. С учетом реальных свойств сильно изменяется и плотность воздуха. При этом отношение плотностей ρ_2/ρ_1 для реального газа может быть существенно больше, чем для идеального. Учет реальных свойств воздуха сравнительно мало влияет на давление за скачком уплотнения.

Необходимо отметить, что в отличие от идеального газа с постоянной теплоемкостью, когда отношения ρ_2/ρ_1, T_2/T_1 зависят только от числа $\mathbf{M}_1$, в действительности с учетом реальных свойств воздуха при высоких температурах за скачком уплотнения эти отношения являются функциями трех параметров — числа $\mathbf{M}_1$, температуры T_1 и дав-

Таблица 11.1

Условия	Параметры				
	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	T_{02}, K	M_2
С учетом реальных свойств воздуха . . .	500	11,8	30,4	6820	0,29
При $k = 1,4$ . . .	467	5,93	78,7	$T_{02} = T_{01} = 18\,000$	0,38

ления p_1. Это объясняется тем, что при изменении величин T_1 и p_1 изменяются величины T_2 и p_2, а это приводит к изменению степени диссоциации. При повышении температуры и уменьшении давления степень диссоциации увеличивается.

На рис. 11.1—11.3 приведены кривые зависимости отношений T_2/T_1, ρ_2/ρ_1, p_2/p_1 от числа M_1 при различных значениях давления и $T_1 = 222$ К. На этих же графиках для сравнения нанесены соответствующие кривые для воздуха при постоянном отношении теплоемкостей ($k = 1,4$).

Аналогично можно определить влияние реальных свойств газа на параметры потока за косыми и коническими скачками уплотнения. При этом углы скачков уплотнения $\beta = \beta(\theta_к, M_1, T_1, p_1)$ по сравнению с идеальным газом становятся меньше. В связи с этим число M_2 за косыми и коническими скачками уплотнения в отличие от прямых скачков оказывается больше, а давление — меньше, чем в идеальном газе. Влияние реальных свойств на давление также мало. Отклонение температуры и плотности аналогично тому, как для прямого скачка уплотнения.

§ 11.3. ГИПЕРЗВУКОВАЯ ТЕОРИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Основные зависимости теории малых возмущений в гиперзвуковом потоке можно определить из соотношений для сверхзвуковых течений в предположении, что число M велико ($M \gg 1$), а угол отклонения потока мал. Полученные при этих условиях простые соотношения используются для приближенного определения аэродинамических характеристик тонких тел. Кроме того, эти результаты позволяют установить ряд законов, характерных для обтекания тел гиперзвуковым потоком, — законов гиперзвукового подобия и плоских сечений.

Течение разрежения. Рассмотрим обтекание внешнего тупого угла гиперзвуковым потоком (см. рис. 4.11). Для определения числа M_2 после поворота потока на некоторый угол θ_0 воспользуемся формулой (4.47), которая при $M \gg 1$ может быть существенно упрощена. Действительно, при $M \gg 1$ $\sqrt{M^2 - 1} \cong M$. Функции, входящие в правую часть формулы, в результате разложения их в ряды и пренебрежения малыми более высокого порядка, приближенно можно представить в таком виде:

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\mathbf{M}^2-1}\approx\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\mathbf{M}=\frac{\pi}{2}-$$

$$-\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\frac{1}{\mathbf{M}};$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1}\approx\operatorname{arctg}\mathbf{M}=\pi/2-1/\mathbf{M}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.47), получаем

$$\theta_0=[2/(k-1)]/\mathbf{M}_1-[2/(k-1)]/\mathbf{M}_2,$$

или

$$\mathbf{M}_1/\mathbf{M}_2=1-(k-1)\,\mathbf{M}_1\theta_0/2. \qquad (11.8)$$

Из формулы (11.8) следует, что отношение $\mathbf{M}_1/\mathbf{M}_2$ в гиперзвуковом потоке при заданном значении $k=c_p/c_v$ зависит только от произведения $\mathbf{M}_1\theta_0$, называемого *параметром гиперзвукового подобия*. Обозначим его $K_\alpha=\mathbf{M}_1\theta_0$, где индекс α указывает на то, что в качестве характерного угла θ_0 рассматривается угол поворота потока.

Зная число $\mathbf{M}_2$ и пользуясь известными соотношениями для изэнтропических течений (4.21)—(4.23), можно определить все остальные параметры (давление, плотность и температуру). При гиперзвуковых скоростях, когда $[(k-1)/2]\mathbf{M}^2\gg 1$, эти формулы можно представить в следующем виде:

$$\frac{p_0}{p}=\left(\frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}^2\right)^{k/(k-1)};\quad \frac{\rho_0}{\rho}=\left(\frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}^2\right)^{1/(k-1)};$$

$$\frac{T_0}{T}=\frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}^2,$$

тогда

$$\frac{p_0}{p_1}=\left(\frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_1^2\right)^{k/(k-1)};\quad \frac{p_0}{p_2}=\left(\frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_2^2\right)^{k/(k-1)}.$$

Отсюда

$$p_2/p_1=(\mathbf{M}_1/\mathbf{M}_2)^{2k/(k-1)}. \qquad (11.9)$$

Аналогично можно получить формулы для определения отношений ρ_2/ρ_1 и T_2/T_1:

$$\rho_2/\rho_1=(\mathbf{M}_1/\mathbf{M}_2)^{2/(k-1)}; \qquad (11.10)$$

$$T_2/T_1=(\mathbf{M}_1/\mathbf{M}_2)^2. \qquad (11.11)$$

Подставляя выражение (11.8) с заменой $\mathbf{M}_1\theta_0$ на K_α в формулы (11.9)—(11.11), получаем:

$$\frac{p_2}{p_1}=\left(1-\frac{k-1}{2}K_\alpha\right)^{\frac{2k}{k-1}};\quad \frac{\rho_2}{\rho_1}=\left(1-\frac{k-1}{2}K_\alpha\right)^{\frac{2}{k-1}}; \qquad (11.12)$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(1-\frac{k-1}{2}K_\alpha\right)^2. \qquad (11.12')$$

Найдем коэффициент давления:

$$\bar{p}=\frac{p_2-p_1}{q_1}=-\frac{2}{k}\frac{1}{M_1^2}\left(1-\frac{p_2}{p_1}\right).$$

Здесь отношение давлений p_2/p_1 определяется по формуле (11.12). Тогда

$$\frac{\bar{p}}{\theta_0^2}=-\frac{2}{k}\frac{1}{K_\alpha^2}\left[1-\left(1-\frac{k-1}{2}K_\alpha\right)^{2k/(k-1)}\right]. \qquad (11.13)$$

Отсюда при $M_1\to\infty$ имеем $\bar{p}\to 0$.

Из формул (11.8), (11.12) и (11.13) следует, что безразмерные отношения M_1/M_2, p_2/p_1, ρ_2/ρ_1, T_2/T_1, $\bar{p}/\theta_0^2$, при гиперзвуковых скоростях для данного значения k зависят только от параметра гиперзвукового подобия. Поэтому для двух течений разрежения с различными значениями числа M_1 невозмущенного потока и угла θ_0, удовлетворяющими условию $K_\alpha=M_1\theta_0=\text{idem}$, отношения чисел M_1/M_2, давлений p_2/p_1, плотностей ρ_2/ρ_1, температур T_2/T_1 и $\bar{p}/\theta_0^2$ одинаковы. Полученный вывод является частной формулировкой общего правила гиперзвукового подобия.

Найдем составляющие скорости возмущения. Используя выражения $v=Ma$, получаем

$$dv/v=dM/M+da/a.$$

Подставляя сюда формулу (11.4), имеем

$$(dv/v)\left[1+(k-1)M^2/2\right]=dM/M. \qquad (11.14)$$

При $M\gg 1$ уравнение (11.14) можно представить в виде

$$dv/v=[2/(k-1)]\,dM/M^3. \qquad (11.15)$$

Отсюда в результате интегрирования получаем

$$v/v_1=e^{\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{M_1^2}-\frac{1}{M_2^2}\right)}.$$

Тогда

$$\frac{v_2}{v_1}=e^{\frac{1}{k-1}\frac{1}{M_1^2}\left(1-\frac{M_1^2}{M_2^2}\right)}. \qquad (11.16)$$

Подставляя в формулу (11.16) выражение M_1/M_2 (11.8) имеем

$$\frac{v_2}{v_1}=e^{\theta_0^2\left(\frac{1}{K_\alpha^2}-\frac{k-1}{4}\right)}.$$

Разлагая в ряд правую часть полученного выражения при $M_1 \gg 1$ и малых углах θ_0 и ограничиваясь приближенно первыми двумя членами ряда, находим

$$v_2/v_1 = 1 + \theta_0^2[1/K_\alpha - (k-1)/4]. \tag{11.17}$$

Из формулы (11.17) следует, что при $M_1 \gg 1$ и малых θ_0 можно принять $v_2/v_1 \approx 1$.

Найдем составляющие скорости возмущения вдоль скорости невозмущенного потока и перпендикулярно ей:

$$v_x' = v_2 \cos\theta_0 - v_1; \quad v_y = -v_2 \sin\theta_0. \tag{11.18}$$

При малых углах $\theta_0(\cos\theta_0 \approx 1,\ \sin\theta_0 \approx \theta_0)$, используя выражение (11.17) и удерживая малые члены до второго порядка, получаем:

$$v_x'/v_1 = [1/K_\alpha - (k-1)/4]\ \theta_0^2; \quad v_y'/v_1 = -\theta_0. \tag{11.19}$$

Из формулы (11.19) следует, что при $M_1 \gg 1$ в отличие от умеренных сверхзвуковых скоростей $v_x' \ll v_y'$.

Течение уплотнения. Рассмотрим обтекание вогнутого тупого угла (см. рис. 5.13) с малым углом θ_0 гиперзвуковым потоком. При этом основные соотношения косого скачка уплотнения, приведенные в гл. 5, можно упростить. Действительно, при $M_1 \gg 1$ разность углов $(\beta - \alpha)$ мала. В случае малого угла θ_0 мал и угол наклона скачка уплотнения β. Поэтому, полагая в формуле (5.37) $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\beta \approx 1$, $\mathrm{tg}(\beta - \theta_0) \approx (\beta - \theta_0)$, находим $\beta - \theta_0 = [2 + (k-1)M_1^2\beta^2]/[(k+1)M_1^2\beta]$. Отсюда в результате несложных преобразований получаем $(M_1\beta)^2 - [(k+1)/2](M_1\beta)(M_1\theta_0) - 1 = 0$ или

$$K_c^2 - [(k+1)/2]\, K_\alpha K_c - 1 = 0, \tag{11.20}$$

где $K_\alpha = M_1\theta_0$ — параметр гиперзвукового подобия; $K_c = M_1\beta$ — параметр, определяемый по углу наклона скачка уплотнения.

Решая уравнение (11.20) и учитывая, что $K_c > 0$, находим

$$K_c = (k+1)\,K_\alpha/4 + \sqrt{[(k+1)\,K_\alpha/4]^2 + 1}\,.$$

Отсюда

$$\frac{K_c}{K_\alpha} = \frac{\beta}{\theta_0} = \frac{k+1}{4}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{k+1}\right)^2 \frac{1}{K_\alpha^2}}\right]. \tag{11.21}$$

При $M_1 \to \infty$ угол $\beta = \dfrac{k+1}{2}\,\theta_0$.

Так как при больших скоростях $1 < k < 1{,}4$, то угол наклона скачка уплотнения отличается от угла θ_0 менее чем на 20%.

Для определения давления и коэффициента давления за скачком уплотнения, используя (5.30), получаем

$$\frac{p_2}{\theta_0^2} = \frac{2k}{k+1}\,K_c^2 - \frac{k-1}{k+1}; \quad \frac{\bar{p}}{\theta_0^2} = \frac{4}{k+1}\,\frac{K_c^2 - 1}{K_\alpha^2}. \tag{11.22}$$

Из уравнения (11.20) следует, что $K_c^2 - 1 = (k+1)K_\alpha K_c/2$. Поэтому

$$\bar{p}/\theta_0^2 = 2K_c/K_\alpha. \tag{11.23}$$

Подставляя в выражение (11.23) отношение K_c/K_α по формуле (11.21), имеем

$$\frac{\bar{p}}{\theta_0^2} = \frac{k+1}{2}\left\{1 + \sqrt{1 + \left[\frac{4}{(k+1)K_\alpha}\right]^2}\right\}. \tag{11.24}$$

При $\mathbf{M}_1 \to \infty$

$$\bar{p} = (k+1)\,\theta_0^2. \tag{11.25}$$

Для $k = 1{,}4$ $\bar{p} = 2{,}4\,\theta_0^2$. Следовательно, в гиперзвуковом потоке коэффициент давления за скачком уплотнения пропорционален квадрату угла θ_0.

Из формул (11.21) и (11.24) следует, что отношения β/θ_0 и $\bar{p}/\theta_0^2$ при заданном значении k зависят только от параметра гиперзвукового подобия, т. е. при различных значениях θ_0 и $\mathbf{M}_1$ отношения β/θ_0 и $\bar{p}/\theta_0^2$ не изменяются, если при этом $K_\alpha = \mathbf{M}_1\theta_0 = \mathrm{idem}$. Полученный результат является следствием правила гиперзвукового подобия.

Выведем формулы для определения составляющих скорости потока v_{2x} и v_{2y} за косым скачком уплотнения. Для этого в формулы (5.39) подставим выражения для v_t и v_{2n} (5.28), (5.29). Тогда в результате несложных преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} v_{2x}/v_1 &= 1 - [2/(k+1)]\left(\sin^2\beta - 1/\mathbf{M}_1^2\right);\\ v_{2y}/v_1 &= [2/(k+1)]\,\mathrm{ctg}\,\beta\left(\sin^2\beta - 1/\mathbf{M}_1^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.26}$$

При малых углах θ_0 $\sin\beta \approx \beta$; $\mathrm{ctg}\beta \approx 1/\beta$, тогда

$$\frac{v_{2x}}{v_1} = 1 - \frac{2}{k+1}\,\frac{K_c^2 - 1}{K_\alpha^2}\,\theta_0^2; \quad \frac{v_{2y}}{v_1} = \frac{2}{k+1}\,\frac{K_c^2 - 1}{K_\alpha^2}\,\beta. \tag{11.27}$$

Подставляя выражение $K_c^2 - 1$ (из (11.20) в (11.27), имеем:

$$v_{2x}/v_1 = 1 - K_c\theta_0^2/K_\alpha; \quad v_{2y}/v_1 = \theta_0. \tag{11.28}$$

Используя выражения (11.28), получаем формулы для определения составляющих скорости возмущения v_x', v_y':

$$v_x'/v_1 = -K_c\theta_0^2/K_\alpha, \quad v_y'/v_1 = \theta_0, \tag{11.29}$$

где отношение K_c/K_α определяется по формуле (11.21). Отсюда следует, что при $\mathbf{M}_1 \gg 1$ составляющая скорости v_x' много меньше v_y', т. е. $v_x' \ll v_y'$.

Пластинка в гиперзвуковом потоке. Для определения коэффициентов давления на верхней $\bar{p}_в$ и нижней $\bar{p}_н$ поверхностях пластинки при малых углах атаки можно воспользоваться формулами (11.13) и (11.24), подставляя в них $\theta_0 = \alpha$, $K_\alpha = M_\infty \alpha$. При $M_\infty \to \infty$ давление $\overline{p}_в = 0$, $\overline{p}_н = (k+1)\alpha^2$. Коэффициенты нормальной силы c_y, подъемной силы c_{ya}, сопротивления c_{xa}, момента m_z относительно передней кромки равны: $c_y = \overline{p}_н - \overline{p}_в$; $c_{xa} = c_y \sin\alpha$, $m_z = -0{,}5c_y$. При малых углах атаки $c_{ya} = c_y$; $c_{xa} = c_y\alpha$. Подставляя в эти выражения формулы (11.13) и (11.24), получаем:

$$c_{ya}/\alpha^2 = c_y/\alpha^2 = f(K_\alpha); \quad c_{xa}/\alpha^3 = f(K_\alpha);$$
$$m_z/\alpha^2 = -0{,}5 f(K_\alpha) \qquad (11.30)$$

и

$$c_{ya} M_\infty^2 = f(K_\alpha) K_\alpha^2; \quad c_{xa} M_\infty^2 = f(K_\alpha) K_\alpha^3;$$
$$m_z M_\infty^2 = -0{,}5 f(K_\alpha) K_\alpha^2, \qquad (11.31)$$

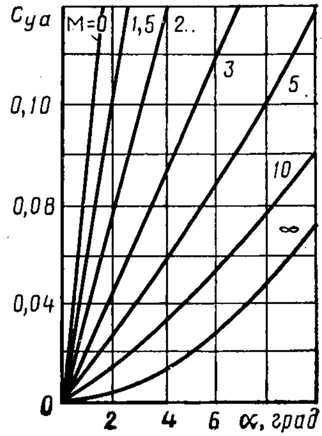


Рис. 11.4. Зависимости коэффициента подъемной силы пластинки от угла атаки при различных значениях числа $M_\infty = 0 \div \infty$

где

$$f(K_\alpha) = \frac{k+1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{k+1}\right)^2 \frac{1}{K_\alpha^2}}\right] +$$
$$+ \frac{2}{k}\frac{1}{K_\alpha^2}\left[1 - \left(1 - \frac{k-1}{2}K_\alpha\right)^{\frac{2k}{k+1}}\right]. \qquad (11.32)$$

Из формул (11.30) и (11.31) следует, что в принятом приближении отношения c_{ya}/α^2, c_{xa}/α^3, m_z/α^2, а также произведения $c_{ya}M_\infty^2$, $c_{xa}M_\infty^3$, $m_z M_\infty^2$ зависят только от параметра гиперзвукового подобия $K_\alpha = M_{\infty\alpha}$, т. е. при различных значениях α и M_∞ эти величины одинаковы при условии K_α = idem. Этот результат является следствием общего закона гиперзвукового подобия.

Кривые зависимости коэффициента подъемной силы c_{ya}, рассчитанного по формуле (11.30), от угла атаки при различных значениях M_∞ показаны на рис. 11.4. Здесь же для сравнения приведены зависимости $c_{ya}(\alpha)$ при умеренных сверхзвуковых скоростях $c_{ya} = 4\alpha \Big/ \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ и при $M = 0 (c_{ya} = 2\pi\alpha)$. Отсюда видно, что в отличие от дозвуковых и сверхзвуковых скоростей в гиперзвуковом потоке зависимость коэффициента c_{ya} от α уже при малых углах атаки нелинейна.

Известно, что в дозвуковом потоке около $^3/_4$ всей подъемной силы создается верхней поверхностью и примерно $^1/_4$ приходится на долю нижней. При умеренных сверхзвуковых скоростях подъемные силы верхней и нижней поверхностей примерно одинаковы. В гиперзву-

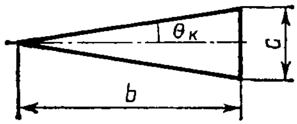


Рис. 11.5. Клиновидный профиль

ковом потоке подъемная сила в основном создается нижней поверхностью. Доля подъемной силы, вызываемой верхней поверхностью, тем меньше, чем больше параметр K_α.

Отметим еще одну особенность обтекания пластинки гиперзвуковым потоком. Из формул (11.19) и (11.29) следует, что при малых углах атаки составляющие скорости возмущения вдоль направления невозмущенного потока как со стороны верхней, так и со стороны нижней поверхности малы по сравнению с поперечными составляющими скорости. Поэтому с точностью до малых величин второго порядка можно принять, что пластинка, движущаяся в неподвижной среде с гиперзвуковой скоростью, при малом угле атаки вызывает смещение частиц лишь в плоскости, перпендикулярной направлению движения. Это свойство справедливо для любого тонкого тела, движущегося с гиперзвуковой скоростью при малом угле атаки, и представляет собой *закон плоских сечений*.

Применение законов гиперзвукового подобия при определении аэродинамических характеристик профилей. Пользуясь основными соотношениями (11.13) и (11.24), можно определить также аэродинамические характеристики тонких профилей с острыми передними кромками. Рассмотрим обтекание тонкого клиновидного профиля (рис. 11.5) с углом полураствора $\theta_к$. Учитывая, что для тонкого профиля $\mathrm{tg}\theta_к \approx \theta_к$, получим $\theta_к = \bar{c}/2$. Обтекание нижней и верхней поверхностей клиновидного профиля можно рассматривать как соответствующее обтекание тупых углов или пластин с углами атаки, равными местным углам атаки на рассматриваемом участке поверхности.

Коэффициент давления за скачком уплотнения на нижней поверхности можно определить по формуле (11.24), заменяя в ней угол поворота потока местным углом атаки: $\theta_0 = \alpha + \bar{c}/2 = \alpha(1 + 0{,}5\bar{c}/\alpha)$, а параметр подобия $K_\alpha = \mathrm{M}_\infty(\alpha + \bar{c}/2) = \mathrm{M}_\infty\alpha(1 + 0{,}5\bar{c}/\alpha)$.

Характер обтекания верхней поверхности зависит от отношения $\bar{c}/\alpha$. Возможны два случая обтекания:

а) угол атаки меньше угла полураствора клина: $\alpha < \bar{c}/2$. В этом случае на передней кромке со стороны верхней поверхности образуется скачок уплотнения. Поэтому коэффициент давления определяется по формуле (11.24) путем подстановки в нее местного угла атаки $\theta_0 = \bar{c}/2 - \alpha$ и параметра подобия $K_\alpha = \mathrm{M}_\infty(\bar{c}/2 - \alpha)$;

б) угол атаки больше угла клина: $\alpha > \bar{c}/2$. В этом случае на верхней поверхности реализуется течение разрежения. Коэффициент давления можно вычислить по формуле (11.13) путем подстановки в нее вместо θ_0 местного угла атаки $\theta_0 = \alpha - \bar{c}/2$ и параметра подобия $K_\alpha = \mathrm{M}_\infty(\alpha - \bar{c}/2)$.

Зная коэффициенты давления на поверхности, можно определить коэффициенты суммарных аэродинамических характеристик — коэффициенты подъемной силы, волнового сопротивления и момента относительно передней кромки.

Найдем сначала коэффициенты нормальной c_y и продольной c_x сил. Для тонких профилей, принимая $\sin\theta_к \approx \theta_к$, $\cos\theta_к \approx 1$, получим: $c_y = \bar{p}_н - \bar{p}_в$, $c_x = (\bar{p}_н + \bar{p}_в)\bar{c}/2$. Учитывая, что при малых углах атаки $c_{ya} = c_y$, $c_{xa} = c_x + c_y\,\alpha$, найдем:

$$c_{ya} = \bar{p}_н - \bar{p}_в; \tag{11.33}$$

$$c_{xa} = (\bar{p}_н + \bar{p}_в)\,\bar{c}/2 + (\bar{p}_н - \bar{p}_в)\,\alpha. \tag{11.34}$$

Поскольку давление по поверхности клиновидного профиля распределяется равномерно, то координата центра давления (фокуса) $x_F = b/2$. Тогда коэффициент момента относительно передней кромки

$$m_z = -0{,}5\,(\bar{p}_н - \bar{p}_в). \tag{11.35}$$

Из формул (11.33)—(11.35) после подстановки в них соответствующих выражений коэффициентов $\bar{p}_н$ и $\bar{p}_в$ следует, что коэффициенты c_{ya}, c_{xa}, m_z зависят от трех независимых переменных — угла атаки, угла полураствора клина и числа **M**. Вместо трех указанных независимых переменных можно ввести два независимых параметра, а именно $\mathbf{M}_\infty\alpha$ и $\bar{c}/\alpha$ или $\mathbf{M}_\infty\bar{c}$ и $\alpha/\bar{c}$. При этом формулы для определения коэффициентов давления можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{p}/\alpha^2 = f_1(\mathbf{M}_\infty\alpha,\ \bar{c}/\alpha);\ \bar{p}/\bar{c}^2 = f_2(\mathbf{M}_\infty\bar{c},\ \alpha/\bar{c}) \\ \text{или} \\ \bar{p}\mathbf{M}_\infty^2 = f_3(\mathbf{M}_\infty\alpha,\ \bar{c}/\alpha);\ \bar{p}\mathbf{M}_\infty^2 = f_4(\mathbf{M}_\infty\bar{c},\ \alpha/\bar{c}). \end{array}\right\} \tag{11.36}$$

Аналогично можно представить и коэффициенты суммарных аэродинамических характеристик. Тогда отношения c_{ya}/α^2, c_{xa}/α^2, m_z/α^2, $c_{ya}/\bar{c}^2$, $c_{xa}/\bar{c}^3$, $m_z/\bar{c}^2$ или произведения $\mathbf{M}_\infty^2 c_{ya}$, $\mathbf{M}_\infty^3 c_{xa}$, $\mathbf{M}_\infty^2 m_z$ оказываются зависящими только от двух параметров: $\mathbf{M}_\infty\bar{c}$ и $\bar{c}/\alpha$ или от $\mathbf{M}_\infty\bar{c}$ и $\alpha/\bar{c}$. Следовательно, параметрами подобия в этом случае могут быть $\mathbf{M}_\infty\alpha$ и $\bar{c}/\alpha$ или $\mathbf{M}_\infty\bar{c}$ и $\alpha/\bar{c}$. Тогда для профилей с различными относительными толщинами при различных углах атаки и числах $\mathbf{M}_\infty$ произведения $\mathbf{M}_\infty^2 c_{ya}$, $\mathbf{M}_\infty^3 c_{xa}$, $\mathbf{M}_\infty^2 m_z$ или отношения $c_{ya}/\bar{c}^2$, $c_{xa}/\bar{c}^3$, $m_z/\bar{c}^2$, c_{ya}/α^2, c_{xa}/α^3, m_z/α^2 имеют одинаковые значения при условии, что параметры гиперзвукового подобия $\mathbf{M}_\infty\alpha$ и $\bar{c}/\alpha$ или $\mathbf{M}_\infty\bar{c}$ и $\alpha/\bar{c}$ одинаковы. Заметим, что при этом геометрическое подобие профилей не требуется. Профили должны быть аффинно-подобными.

Аналогично формулируется закон гиперзвукового подобия для профилей произвольной формы.

На рис. 11.6 приведены кривые зависимости отношения $c_{ya}/\bar{c}^2$ от $\alpha/\bar{c}$ при различных значениях параметра $\mathbf{M}_\infty\bar{c}$ для клиновидного и ромбовидного профилей. Отсюда видно, что при заданной относительной толщине и одинаковых значениях параметров подобия ($\mathbf{M}_\infty\bar{c}$, $\alpha/\bar{c}$) большей подъемной силой обладает клиновидный профиль — профиль с плоской нижней поверхностью. Аэродинамическое каче-

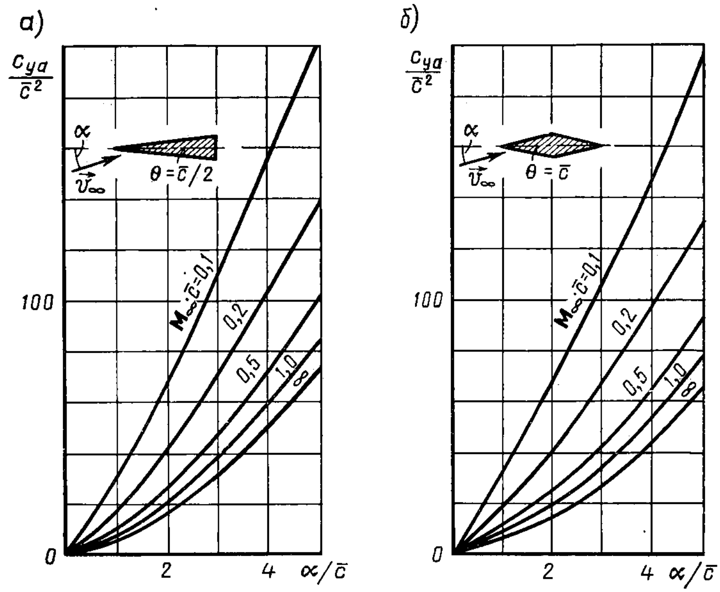


Рис. 11.6. Коэффициенты подъемной силы клиновидного (*а*) и ромбовидного (*б*) профилей

ство $K = c_{ya}/c_{xa}$ у клиновидного профиля также больше. Для сравнения аэродинамическое качество профилей можно оценить по отношению коэффициента подъемной силы к коэффициенту волнового сопротивления (рис. 11.7), так как коэффициенты сопротивления трения тонких профилей примерно одинаковы, а коэффициент донного сопротивления (в случае клиновидного профиля) при гиперзвуковых скоростях мал: $c_{x\text{дон}} = -\bar p_{\text{дон}}\bar c$, где $\bar p_{\text{дон}}$ — коэффициент донного давления. При полном вакууме в донной части ($p_{\text{дон}} = 0$): $\bar p_{\text{дон}} = -(2/k)/M_\infty^2$. Тогда $c_{x\text{дон}}/\bar c^3 = (2/k)/(M_\infty \bar c)^2$. При $M_\infty \bar c \to \infty$ $c_{x\text{дон}} \to 0$.

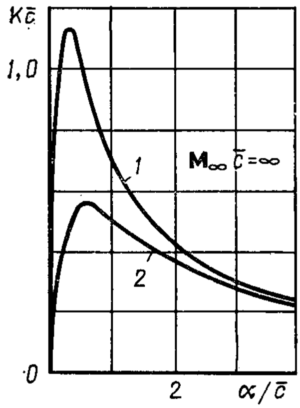


Рис. 11.7. Аэродинамическое качество клиновидного *1* и ромбовидного *2* профилей

Вывод о преимуществах клиновидного профиля перед ромбовидным при гиперзвуковых скоростях является более общим. При таких скоростях аэродинамическое качество профиля с плоской нижней поверхностью выше, чем у двояковыпуклых профилей с той же относительной толщиной, так как решающее значение в создании аэродинамических сил имеет нижняя поверхность.

Аналогичный вывод можно сделать о пространственных телах. Например, аэродинамическое качество полуконуса оказывается выше, чем конуса с той же площадью наибольшего поперечного сечения.

Ввиду того что коэффициенты подъемной силы и волнового сопротивления профилей при $M_\infty \bar{c} > 0{,}5$ слабо зависят от параметра $M_\infty \bar{c}$ (см. рис. 11.6), формулы для расчета c_{ya} и c_{xa} удобно представить в виде $c_{ya} = c_{ya\infty} + \Delta c_{ya}$; $c_{xa} = c_{xa\infty} + \Delta c_{xa}$, где $c_{ya\infty}$, $c_{xa\infty}$ — значения коэффициентов c_{ya} и c_{xa} при $M_\infty \bar{c} \to \infty$, а Δc_{ya}, Δc_{xa} — поправки, учитывающие влияние числа $M_\infty (M_\infty \bar{c})$. Здесь $c_{ya\infty}/\bar{c}^2$, $c_{xa\infty}/\bar{c}^3$ зависят от формы профиля и параметра $\alpha/\bar{c}$. Для клиновидного профиля при $\alpha > \theta_к (\alpha/\bar{c} > 0{,}5)$

$$c_{ya\infty}/\bar{c}^2 = (k+1)\left(\alpha/\bar{c} + 1/2\right)^2; \quad c_{xa\infty}/\bar{c}^3 = (k+1)\left(\alpha/\bar{c} + 1/2\right)^3;$$

$$\frac{\Delta c_{ya}}{\bar{c}^2} = \frac{k+1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{64}{(k+1)^2}\,\frac{1}{(M_\infty \bar{c})^2}} - 1\right]\frac{\alpha}{\bar{c}};$$

$$\frac{\Delta c_{xa}}{\bar{c}^3} = \frac{k+1}{8}\left[\sqrt{1 + \frac{64}{(k+1)^2}\,\frac{1}{(M_\infty \bar{c})^2}} - 1\right]\left(4\frac{\alpha^2}{\bar{c}^2} + 1\right).$$

Отметим некоторые особенности обтекания крыльев конечного размаха гиперзвуковым потоком.

Как известно, основная трудность при определении аэродинамических характеристик крыла конечного размаха — это необходимость учитывать влияние боковых кромок и взаимное влияние консолей стреловидных крыльев. Боковые кромки влияют только в областях, ограниченных конусами Маха, исходящими из передних кромок концевых сечений (в областях *I* на рис. 11.8). Зона взаимодействия консолей ограничена линиями возмущения, проведенными из передней кромки корневого сечения (область *II*).

Поскольку в гиперзвуковом потоке происходит сужение зон возмущенного движения, то площади областей *I* и *II* незначительны по сравнению с площадью крыла. Поэтому при гиперзвуковых скоростях приближенно можно принять, что аэродинамические характеристики крыла с постоянной относительной толщиной по размаху совпадают с характеристиками профиля.

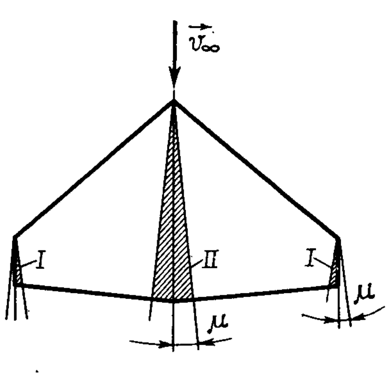


Рис. 11.8. Крыло конечного размаха в гиперзвуковом потоке

Определение коэффициента давления на поверхности конуса при гиперзвуковых скоростях. Рассмотрим осесимметричное обтекание конуса. Пользуясь гиперзвуковой теорией малых возмущений, получим приближенно аналитическое решение задачи.

При гиперзвуковых скоростях скачок уплотнения вплотную приближается к поверхности. Между скачком уплотнения и поверхностью конуса образуется тонкий слой уплотненного газа. При этом разность углов $(\beta - \theta_к)$. мала. Тогда в интересующей нас области между скачком и поверхностью конуса разность между углами полураствора промежуточного и обтекаемого конусов $(\theta - \theta_к)$ тоже мала. Поэтому искомую радиальную составляющую скорости в любой точке приближенно можно представить в виде главных членов разложения v_r в ряд по степени $(\theta - \theta_к)$:

$$v_r = a + b(\theta - \theta_к) + c(\theta - \theta_к)^2. \qquad (11.37)$$

Коэффициенты этого полинома определим из граничных условий. Из условия на поверхности конуса (10.5) и уравнения (10.3), учитывая, что $v_\theta = dv_r/d\theta$, имеем $a = v_к$, $b = 0$, $c = -v_к$. Подставляя найденные значения коэффициентов в выражение (11.37), получаем:

$$v_r/v_k = 1 - (\theta - \theta_к)^2, \qquad (11.38)$$

$$v_\theta/v_к = -2(\theta - \theta_к)^2. \qquad (11.39)$$

Для определения связи между углами β и $\theta_к$ подставим выражение (11.39) в граничное условие на скачке уплотнения: $-v_\theta(\beta) = (\rho_1/\rho_2)v_\infty \sin\beta$. Принимая $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\beta \approx 1$ и сохраняя малые члены до второго порядка, имеем

$$\beta - \theta_к = 0{,}5(\rho_1/\rho_2)\beta. \qquad (11.40)$$

Подставляя сюда отношение плотностей по формуле (5.31), имеем

$$K_c - K_\alpha = 0{,}5\,\frac{k-1}{k+1}\left(K_c + \frac{2}{k-1}\,\frac{1}{K_c}\right),$$

где $K_\alpha = \mathbf{M}_\infty \theta_к$, $K_c = \mathbf{M}_\infty \beta$.

Отсюда

$$\frac{K_c}{K_\alpha} = \frac{\beta}{\theta_к} = \frac{k+1}{k+3}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2(k+3)}{(k+1)^2}\,\frac{1}{K_\alpha^2}}\right]. \qquad (11.41)$$

При $\mathbf{M}_\infty \to \infty$ отношение $\beta/\theta_к = 2(k+1)/(k+3)$.

Получим приближенную формулу для определения коэффициента давления на поверхности конуса: $\bar{p} = (2/k)/\mathbf{M}_\infty^2(p_к/p_\infty - 1)$. Представим отношение $p_к/p_\infty$ в следующем виде:

$$p_к/p_\infty = (p_c/p_\infty)\,p_к/p_c. \qquad (11.42)$$

Здесь p_c — давление за скачком уплотнения. Отношение p_c/p_∞ можно определить по формуле (11.22).

Для нахождения второго множителя $p_к/p_c$ в выражении (11.42) воспользуемся соотношениями для изэнтропического течения в потоке за скачком уплотнения:

$$p_к/p_c = (T_к/T_c)^{k/(k-1)}, \text{ или } p_к/p_c = (a_к/a_c)^{2k/(k-1)}. \qquad (11.43)$$

Скорости звука $a_к$ и a_c определяем по формуле (4.9):

$$a_к^2 = [(k-1)/2](v_{max}^2 - v_к^2), \quad a_c^2 = [(k-1)/2](v_{max}^2 - v_c^2).$$

Отсюда

$$a_{\text{к}}^2 - a_{\text{с}}^2 = \frac{k-1}{2}\left(v_{\text{с}}^2 - v_{\text{к}}^2\right) \text{ и } \frac{a_{\text{к}}^2}{a_{\text{с}}^2} = 1 + \frac{k-1}{2}\,\frac{v_{\text{к}}^2}{a_{\text{с}}^2}\left(\frac{v_{\text{с}}^2}{v_{\text{к}}^2} - 1\right).$$

Подставляя сюда приближенные выражения (11.38) и (11.39) с заменой $v_{\text{с}}^2$ на $v_{r\text{с}}^2 + v_{\theta\text{с}}^2$, получаем $a_{\text{к}}^2/a_{\text{с}}^2 = 1 + (k-1)(v_{\text{к}}^2/a_{\text{с}}^2)(\beta - \theta_{\text{к}})^2$, или

$$a_{\text{к}}^2/a_{\text{с}}^2 = 1 + (k-1)\left(v_{\text{к}}^2/v_{\infty}^2\right)\left(a_{\infty}^2/a_{\text{с}}^2\right)(K_{\text{с}} - K_{\alpha})^2. \tag{11.44}$$

Здесь $v_{\text{к}}/v_{\infty} \approx 1$.

Тогда в результате использования выражений (11.43) и (11.44)

$$p_{\text{к}}/p_{\text{с}} = \left[1 + (k-1)\left(a_{\infty}^2/a_{\text{с}}^2\right)(K_{\text{с}} - K_{\alpha})^2\right]^{k/(k-1)}.$$

Отсюда, разлагая правую часть полученного выражения в ряд по формуле бинома Ньютона и ограниваясь первыми двумя членами ряда, имеем

$$p_{\text{к}}/p_{\infty} = 1 + k\left(a_{\infty}^2/a_{\text{с}}^2\right)(K_{\text{с}} - K_{\alpha})^2. \tag{11.45}$$

В выражении (11.45) отношение квадратов скорости звука можно представить в следующем виде:

$$a_{\infty}^2/a_{\text{с}}^2 = (p_{\infty}/p_{\text{с}})\,\rho_{\text{с}}/\rho_{\infty}, \tag{11.46}$$

где $p_{\text{с}}/p_{\infty}$ и $\rho_{\text{с}}\rho_{\infty}$ определяются по формулам (5.30) и (5.31) с заменой в них произведения $\mathbf{M}_{\infty}\sin\beta$ на $K_{\text{с}} = \mathbf{M}_{\infty}\beta$.

Подставляя выражение (11.46) в формулу (11.45), в результате несложных преобразований находим отношение давлений $p_{\text{к}}/p_{\infty}$, а затем и коэффициент давления на конусе:

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_{\infty}} = 1 + \frac{2k}{k+1}\left(K_{\text{с}}^2 - 1\right) + (K_{\text{с}} - K_{\alpha})^2\,\frac{k(k+1)}{k-1+2/K_{\text{с}}^2},$$

$$\mathbf{M}_{\infty}^2\bar{p}_{\text{к}} = \frac{4}{k+1}\left(K_{\text{с}}^2 - 1\right) + 2(K_{\text{с}} - K_{\alpha})^2\,\frac{k+1}{k-1+2/K_{\text{с}}^2} \tag{11.47}$$

или

$$\frac{\bar{p}_{\text{к}}}{\theta_{\text{к}}^2} = \frac{4}{k+1}\,\frac{K_{\text{с}}^2 - 1}{K_{\alpha}^2} + 2\,\frac{(K_{\text{с}} - K_{\alpha})^2}{K_{\alpha}^2}\,\frac{k+1}{k-1+2/K_{\text{с}}^2}. \tag{11.48}$$

Здесь параметр $K_{\text{с}} = \mathbf{M}_{\infty}\beta$, зависимый от $K_{\alpha} = \mathbf{M}_{\infty}\theta_{\text{к}}$, для конуса можно найти по формуле (11.41).

Из формул (11.47) и (11.48) следует, что $\mathbf{M}_{\infty}^2\bar{p}_{\text{к}}$ и $\bar{p}_{\text{к}}/\theta_{\text{к}}^2$ зависят только от параметра $K_{\alpha} = \mathbf{M}_{\infty}\theta_{\text{к}}$.

Найдем предельное значение коэффициента давления на поверхности конуса при $\mathbf{M}_{\infty} \to \infty$, т. е. $\bar{p}_{\text{к}}/\theta_{\text{к}}^2 = 2[(k+1)(k+7)]/(k+3)^2$. Для $k = 1{,}4$ коэффициент $\bar{p}_{\text{к}} = 2{,}083\,\theta_{\text{к}}^2$.

Значения угла β и коэффициента давления, вычисленные по приближенным формулам (11.41) и (11.48), при $K_\alpha > 1$ удовлетворительно согласуются с данными строгого решения задачи (см. § 10.1). Результаты, полученные для конуса, в частности формулы (11.41) и (11.48), можно использовать при расчете распределения давления на тонких телах вращения методом касательных конусов. В этом случае параметр K_α определяется по местному углу атаки: $K_\alpha = \mathbf{M}_\infty dy/dx$, где $y = y(x)$ — уравнение образующей тела вращения.

Отметим, что законы подобия имеют важное практическое значение, так как они позволяют переносить результаты расчета и экспериментальных исследований аэродинамических характеристик тонкого тела при заданном значении числа $\mathbf{M}_\infty$ на бесконечную совокупность аффинно-преобразованных тел при соответствующих значениях числа $\mathbf{M}_\infty$. В частности, основываясь на этом законе, можно определить аэродинамические характеристики заданного тела при больших $\mathbf{M}_\infty$ по данным испытаний модели аффинно-преобразованного тела при меньших значениях числа $\mathbf{M}_\infty (\mathbf{M}_\infty >> 1)$.

§ 11.4. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ НЬЮТОНА

Согласно теории Ньютона, газообразная среда состоит из одинаковых и не взаимодействующих между собой частиц, расположенных на равных расстояниях друг от друга; скорость движения частицы до столкновения с поверхностью равна скорости невозмущенного потока; при столкновении частицы с элементом поверхности нормальная составляющая ее скорости становится равной нулю, а касательная составляющая при этом остается неизменной. Давление в данной точке при этом зависит только от ориентации соответствующего элемента поверхности по отношению к вектору скорости невозмущенного потока, а форма остальной части тела не влияет на давление в заданной точке.

Теория Ньютона не дает возможности определить давление на участках поверхности, находящихся в «аэродинамической тени» тела (рис. 11.9). На этих участках поверхности коэффициент давления нужно принимать равным нулю.

При $\mathbf{M} >> 1$ характер обтекания тел близок к приближенной схеме, принятой Ньютоном. Действительно, при этом скачок уплотнения вплотную приближается к поверхности, т. е. $v = v_\infty$ почти до столкновения частиц с телом; нормальная составляющая скорости v_n за скачком уплотнения мала; касательная составляющая скорости v_t в скачке уплотнения не изменяется; в областях разрежения (в аэродинамической тени) $\bar{p} \to 0$.

Выведем формулу для определения коэффициента давления. Рассмотрим элемент поверхности dS с местным углом атаки θ (рис. 11.10). Тогда масса частиц газа, сталкивающихся в единицу времени с элементом поверхности, равна $\rho_\infty v_\infty dS \sin\theta$. До столкновения с поверхностью проекция количества движения этой массы на направление нормали к элементу поверхности выражается в виде $\rho_\infty v_\infty^2 \sin^2\theta dS$.

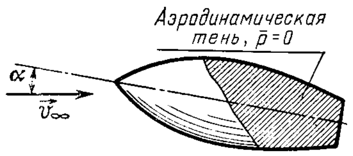


Рис. 11.9. Приближенная схема обтекания тела гиперзвуковым потоком

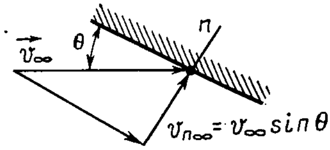


Рис. 11.10. Схема для вывода формулы Ньютона

После соударения с поверхностью нормальная составляющая количества движения равняется нулю. На основании теоремы импульсов изменение количества движения, происходящее в результате столкновения частиц газа с поверхностью, равно импульсу действующих сил: $\rho_\infty v_\infty^2 \sin^2\theta = p - p_\infty$. Отсюда

$$\bar{p} = 2\sin^2\theta. \tag{11.49}$$

По формуле (11.49) коэффициент давления зависит только от местного угла атаки. Для того чтобы учесть влияние формы тела и числа **M** при расчете распределения давления на поверхность тела вращения и профиля произвольной формы, рассмотрим уточненную (модифицированную) формулу Ньютона, полученную из условия, что значение коэффициента давления в фиксированной точке тела по приближенной формуле должно совпадать с точным значением $\bar{p}$ в этой точке. Тогда

$$\bar{p} = \bar{p}^* \sin^2\theta/\sin^2\theta^*. \tag{11.50}$$

Для затупленных тел, принимая в качестве такой фиксированной точки критическую точку на поверхности ($\sin\theta^* = 1$),

$$\bar{p} = \bar{p}_{02}\sin^2\theta, \tag{11.51}$$

где $\bar{p}_{02} = 2/(k\mathbf{M}_\infty^2)(p_{02}/p_\infty - 1)$ — коэффициент давления торможения за прямым скачком уплотнения.

Отношение давлений p_{02}/p_∞ определяется по формуле (5.22). При $\mathbf{M}_\infty \to \infty$ коэффициент $\bar{p}_{02} = 2^{-2/(k-1)}\ (k+1)^{(k+1)/(k-1)}/k^{k/(k-1)}$; для $k = 1{,}4$ имеем $\bar{p}_{02} = 1{,}84$.

Для остроносых тел вращения или профилей с острой передней кромкой $\bar{p}^*$ — коэффициент давления на поверхности конуса (для тел вращения), клина (для профилей) с такими же углами полураствора, как на носке тела или на передней кромке.

В формуле (11.50) в общем случае тела произвольной формы

$$\sin\theta = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma\cos\psi, \tag{11.52}$$

где α, γ, ψ — углы, показанные на рис. 11.11. Очевидно, что при $\psi = 0$ угол $\theta = \gamma + \alpha$, а для $\psi = \pi$ угол $\theta = \gamma - \alpha$.

Найдем границу области, расположенной в аэродинамической тени. В этой области $\bar{p} = 0$. Тогда

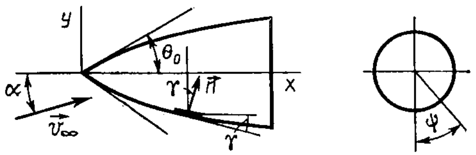


Рис. 11.11. Схема к определению местного угла атаки элемента поверхности

$$\cos\psi_т = -\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \qquad (11.53)$$

Здесь $\psi_т$ — значение угла ψ на этой границе.

Если $\alpha < \gamma$, то область аэродинамической тени отсутствует; если $\alpha > \gamma$, то часть поверхности, удовлетворяющая условию $\psi > \psi_т$, находится в затененной области.

Формула Ньютона дает удовлетворительные результаты для затупленных тел вращения. Зная распределение давления по поверхности, можно определить и суммарные аэродинамические характеристики.

§ 11.5. МЕТОД МЕСТНЫХ КОНУСОВ (КЛИНЬЕВ)

Теоретические и экспериментальные исследования при гиперзвуковых скоростях показывают, что давление на поверхности заостренных профилей и тел вращения зависит в основном от местного угла атаки. Об этом свидетельствует и удовлетворительное совпадение результатов расчета коэффициента давления по формуле Ньютона с опытными данными. Такая особенность обтекания тел позволяет для приближенного расчета распределения давления и аэродинамических характеристик заостренных тел использовать метод касательных или местных конусов (для тел вращения) и метод местных клиньев (для профилей).

В методе местных конусов и местных клиньев приближенно предполагается, что давление в некоторой точке поверхности тела равно давлению на поверхности конуса (для тел вращения) и клина (для профилей) с углами полураствора, равными местному углу атаки для рассматриваемого элемента поверхности. При определении давления на местном клине и местном конусе число **M** набегающего потока принимается равным $\mathbf{M}_\infty$, а угол атаки клина и конуса — равным нулю.

На рис. 11.12 показано построение местного конуса (клина) при $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$. Давление на поверхности местного клина и местного конуса можно найти по точным соотношениям теории косого скачка уплотнения (для клина) и по результатам численного решения системы дифференциальных уравнений (для конуса) или при малых углах атаки по приближенным формулам (11.24) и (11.48), подставляя в них вместо угла θ_0 местный угол атаки элемента поверхности.

Определяя давление на поверхности тел методом местных конусов (клиньев), фактически предполагаем, что условия обтекания элемента поверхности совпадают с условиями обтекания местного клина и местного конуса, касающихся тела в данной точке, невозмущенным потоком, т. е. принимаем, что каждому элементу поверхности соответствует местный скачок уплотнения. Между тем в действительности скачок уплотнения возникает на передней кромке (на носке тела вращения). Поэтому он является общим для всех элементов поверхности. В этом основное несоответствие между допущениями, по-

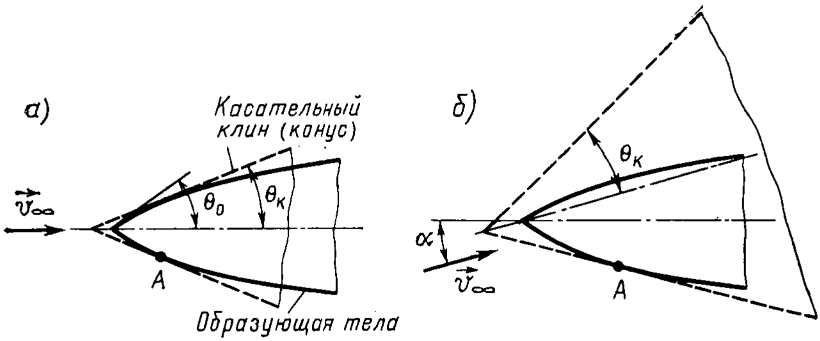


Рис. 11.12. Построение касательного конуса (клина) при $\alpha=0$ (a) и $\alpha\neq0$ ($б$)

ложенными в основу рассматриваемого метода, и действительным характером обтекания тел.

Следует отметить, что методом местных конусов (клиньев) можно пользоваться для определения коэффициента давления только в таких точках поверхности, для которых местный угол атаки больше нуля.

§ 11.6. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

При обтекании затупленного тела сверхзвуковым потоком перед ним образуется криволинейный скачок уплотнения (рис. 11.13). При этом непосредственно перед телом поток за скачком становится дозвуковым. В критической точке поверхности скорость потока равна нулю, давление — давлению торможения за прямым скачком уплотнения. По мере удаления от критической точки скорость возрастает, а давление убывает. В некоторой точке поверхности скорость становится равной скорости звука: $v = a_{кр}$, а давление — критическому давлению: $p = p_{кр}$. За этой точкой скорость сверхзвуковая. В потоке за скачком можно провести линию, в случае пространственного тела — поверхность, в каждой точке которой $v = a_{кр}$. Эта линия (поверхность) разграничивает область дозвуковых скоростей от области сверхзвукового потока.

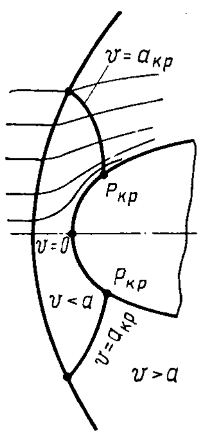


Рис. 11.13. Обтекание затупленного тела при $M_\infty>1$

При решении задачи обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком необходимо определить форму и положение отошедшего скачка уплотнения и поле скоростей между скачком и поверхностью тела. Трудности такой математической задачи объясняются в основном тем, что течение около затупленного тела является нелинейным

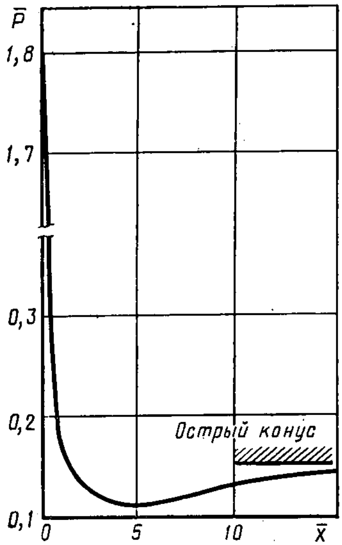


Рис. 11.14. Изменение коэффициента давления вдоль поверхности затупленного по сфере конуса, $M_\infty=6$, $\theta_к=15°$

смешанным течением с дозвуковыми и сверхзвуковыми областями со свободной границей (отошедшим скачком уплотнения), которая заранее не известна.

В гиперзвуковом потоке необходимо учитывать также реальные свойства газа за скачком уплотнения — изменение удельных теплоемкостей, диссоциацию молекул газа, обусловленные его высокой температурой. К настоящему времени разработаны численные методы решения задачи обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел для газа с постоянными теплоемкостями, а также течений с равновесной и неравновесной диссоциацией [6, 22].

Результаты численного решения обтекания затупленных тел позволяют получить полное представление о поле течения — о значении и направлении вектора скорости потока, о давлении, плотности и температуре газа в возмущенной области между скачком уплотнения и поверхностью тела.

Рассмотрим закономерности изменения давления по поверхности затупленных по сфере конусов при $\alpha = 0$ и дадим качественный анализ влияния затупления на коэффициент сопротивления.

На сферическом затуплении коэффициент давления монотонно убывает от $\bar{p}_{02}$ (в точке полного торможения) до значения в точке сопряжения образующих сферы и конуса. Например, при $M_\infty = 6$ коэффициент давления изменяется от $\bar{p}_{02} = 1{,}820$ до $\bar{p} = 0{,}174$.

Характер изменения коэффициента давления на конической поверхности (вдоль образующей конуса) зависит от числа M_∞. Для $M_\infty > 3$ коэффициент давления при удалении от точки сопряжения сначала уменьшается, а затем начинает возрастать. Минимальное значение коэффициента давления при этом оказывается меньше, чем значение $\bar{p}_к$ для соответствующего острого конуса. При существенном удалении от носка ($\bar{x} \to \infty$) коэффициент $\bar{p}$ асимптотически стремится к значению $\bar{p}_к$. Положение минимума $\bar{p}$ зависит от M_∞ и угла полураствора конуса $\theta_к$. На рис. 11.14 показано подобное изменение коэффициента давления вдоль поверхности затупленного по сфере конуса (в зависимости от $\bar{x} = x/r_c$) при $M_\infty = 6$ и $\theta_к = 15°$.

Ввиду того что на значительной части поверхности затупленного конуса давление оказывается ниже, чем для острого конуса, то суммарный коэффициент сопротивления затупленного конуса при прочих равных условиях зависит от его длины $\bar{x}$. С увеличением $\bar{x}$ влияние сферического затупления уменьшается. В результате коэффициент сопротивления c_{xa} затупленного конуса большого удлинения сравнительно мало отличается от соответствующего коэффициента c_{xa} острого конуса. Коэффициент сопротивления короткого затупленного конуса в основном определяется сопротивлением сферы и может намного превышать его асимптотическое значение. Например, при $\mathbf{M}_\infty = 6$ и $\bar{x} = 20$ коэффициент $c_{xa} = 0{,}156$, а при $\bar{x} = 2$ коэффициент $c_{xa} = 0{,}578$. Для тех же $\mathbf{M}_\infty$ и $\theta_к$ асимптотическое значение $c_{xa} = 0{,}152$.

§ 11.7. ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ

Численные расчеты аэродинамических характеристик выполняются для определенного варианта с фиксированными значениями параметров. Для анализа влияния отдельных параметров требуются трудоемкие расчеты. В инженерной практике не всегда это возможно. Поэтому для определения аэродинамических характеристик приходится пользоваться и приближенными аналитическими методами.

Аэродинамические характеристики тел при гиперзвуковых скоростях можно определить на основе приближенной теории Ньютона, которая позволяет получить правильные зависимости основных аэродинамических коэффициентов от геометрических параметров тел и угла атаки.

Получим основные соотношения для нахождения коэффициентов нормальной и продольной силы, а также момента тангажа. Приведем сначала выражения для аэродинамических сил, действующих в произвольном сечении тела вращения. В сечениях без области затенения, т. е. при $\alpha < \gamma$ (см. рис. 11.11),

$$\frac{dY}{dx} = 2q_\infty r \int_0^\pi \bar{p} \cos\psi d\psi; \tag{11.54}$$

$$\frac{dX}{dx} = 2q_\infty r \operatorname{tg}\gamma \int_0^\pi \bar{p} d\psi, \tag{11.55}$$

где радиус сечения r и угол γ — функции координаты x.

Подставляя выражения (11.49) и (11.52) в формулы (11.54) и (11.55), в результате интегрирования получаем:

$$dY/dx = \pi q_\infty r \sin 2\gamma \sin 2\alpha; \tag{11.56}$$

$$dX/dx = \pi q_\infty r \operatorname{tg}\gamma\,[2\sin^2\gamma + \sin^2\alpha\,(1 - 3\sin^2\gamma)]. \tag{11.57}$$

Для сечений с затенением в формулах (11.54) и (11.55) необходимо изменить пределы интегрирования. Для таких сечений $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_т$, где $\psi_т$ из (11.53) определяет границу области аэродинамической тени, в которой $\bar{p} = 0$. Тогда

$$dY/dx = q_\infty r \sin 2\gamma \sin 2\alpha\, [\psi_т + (1/3) \sin \psi_т (\operatorname{tg} \gamma/\operatorname{tg} \alpha + $$
$$+ 2 \operatorname{tg} \alpha/\operatorname{tg} \gamma)]; \qquad (11.58)$$
$$dX/dx = q_\infty r \operatorname{tg} \gamma\, [\psi_т 2 \sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha (1 - 3 \sin^2 \gamma) +$$
$$+ (3/4) \sin 2\gamma \sin 2\alpha \sin \psi_т]. \qquad (11.59)$$

Используя формулы (11.56) и (11.58), можно найти распределение нормальной силы по оси тела вращения. Интегрируя выражения (11.56)—(11.59) по x ($0 \leqslant x \leqslant L$), получаем формулы для суммарных сил и их коэффициентов: $c_y = Y/(q_\infty \pi R^2)$; $c_x = X/(q_\infty \pi R^2)$. Здесь L — длина тела, R — радиус миделева сечения.

Аналогично вычисляется момент тангажа относительно оси, проходящей через носок тела вращения:

$$dM_z/dx = -2q_\infty \int_0^{\psi_т} \bar{p}\, r \cos \psi\, (x + r \operatorname{tg} \gamma)\, d\psi; \qquad (11.60)$$

$$M_z = -2q_\infty \int_0^L \int_0^{\psi_т} \bar{p} r \cos \psi\, (x + r \operatorname{tg} \gamma)\, d\psi dx; \qquad (11.61)$$

коэффициент момента $m_z = M_z/(q_\infty \pi R^2 L)$.

Координата центра давления относительно носка в долях длины корпуса определяется по формуле $\bar{x}_д = -m_z/c_y$.

Применим полученные формулы для определения аэродинамических характеристик затупленных тел — затупленного по сфере конуса, цилиндра с полусферической носовой частью и сегментально-конического тела, состоящего из лобового сегмента и обратного усеченного конуса. Получим прежде всего формулы для определения аэродинамических характеристик простейших тел — конуса, сферического сегмента, цилиндра, которые являются составными элементами рассматриваемых тел вращения.

Конус. В этом случае, подставляя в выражения (11.56) — (11.59) $\gamma = \theta_к$, $r = x \operatorname{tg} \theta_к$ ($\theta_к$ — угол полураствора конуса) и интегрируя по x, получаем:

при $0 \leqslant \alpha \leqslant \theta_к$

$$c_y = \cos^2 \theta_к \sin 2\alpha; \qquad (11.62)$$
$$c_x = 2 \sin^2 \theta_к + (1 - 3 \sin^2 \theta_к) \sin^2 \alpha; \qquad (11.63)$$

при $\theta_к < \alpha < \pi - \theta_к$

$$c_y = 0{,}5 \cos^2 \theta_к \sin 2\alpha \left[1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_к}{\operatorname{tg} \alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3} \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_к}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_к}{\operatorname{tg} \alpha} + 2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \theta_к}\right)\right]; \qquad (11.64)$$

$$c_x = 0{,}5 \left\{\left[1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_к}{\operatorname{tg} \alpha}\right)\right] [2 \sin^2 \theta_к + (1 - 3 \sin^2 \theta_к) \sin^2 \alpha] + \right.$$

$$+\frac{3}{2\pi}\sqrt{1-\frac{\operatorname{tg}^2\theta_к}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\sin 2\theta_к \sin 2\alpha\Bigg\}. \quad (11.65)$$

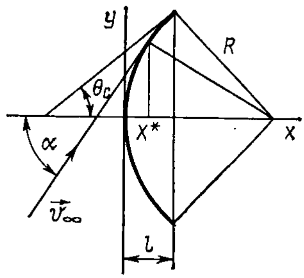


Рис. 11.15. Сферический сегмент при $\alpha \neq 0$

При $\alpha = 0$ коэффициенты $c_y = 0$, $c_x = 2\sin^2\theta_к$. Используя выражение (11.61), получаем $m_z = -2\sin 2\alpha/3$. Тогда

$$\bar{x}_д = 2/(3\cos^2\theta_к). \quad (11.66)$$

Для усеченного конуса с радиусами R_1 и R имеем: $c_y = c_{y\,кон}(1-\bar{R}_1^2)$, $c_x = c_{x\,кон}\times$ $\times(1-\bar{R}_1^2)$. Получим формулу для координаты центра давления, отсчитываемой от переднего торца усеченного конуса в долях его длины:

$$\bar{x}_д = \frac{2}{3}\frac{1}{\cos^2\theta_к}\frac{1+\bar{R}_1+\bar{R}_1^2}{1-\bar{R}_1^2} - \frac{\bar{R}_1}{1-\bar{R}_1}, \quad (11.67)$$

где $\bar{R}_1 = R_1/R$.

Сферический сегмент. При углах атаки $\alpha < \theta_c$ (рис. 11.15) область аэродинамической тени отсутствует. Тогда для определения аэродинамических сил во всех сечениях сегмента можно пользоваться формулами (11.56) и (11.57). При больших углах атаки ($\alpha > \theta_c$) появляется область аэродинамической тени. При $0 \leqslant x \leqslant x^*$, где $x^* = R(1-$ $-\sin\alpha)$, аэродинамические силы в сечениях вычисляются по формулам (11.56) и (11.57), а при $x^* < x < R(1-\sin\theta_c)$ — по формулам (11.58) и (11.59) с учетом области затенения. Для сферического сегмента в эти формулы необходимо подставить $\sin\gamma = (R-x)/R$, $\sin 2\gamma = 2\left[(R-x)\sqrt{2Rx-x^2}\right]/R^2$.

В результате интегрирования полученных выражений по x в пределах от $x = 0$ до $x = R(1-\sin\theta_c)$ найдем коэффициенты нормальной и продольной силы:

при $\alpha < \theta_c$

$$c_y = 0{,}5\cos^4\theta_c \sin 2\alpha; \quad (11.68)$$

$$c_x = 2\cos^2\theta_c\,[1 - 0{,}5\cos^2\theta_c - (1-0{,}75\cos^2\theta_c)\sin^2\alpha; \quad (11.69)$$

при $\alpha > \theta_c$

$$c_y = \frac{1}{4}\cos^4\theta_c \sin 2\alpha\left[1+\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{\operatorname{tg}\theta_c}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\sin\alpha \arccos\left(\frac{\sin\theta_c}{\sin\alpha}\right) + \frac{1}{3\pi}\sin\alpha\sin\theta_c\left[\sin^2\theta_c\left(3-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right) - 5\right]\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\theta_c}; \quad (11.70)$$

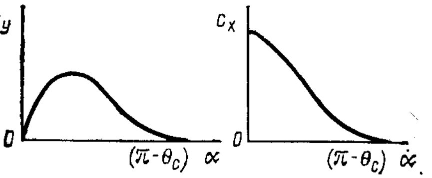


Рис. 11.16. Зависимость коэффициентов c_y и c_x сферического сегмента от угла атаки

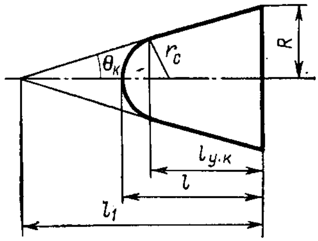


Рис. 11.17. Затупленный конус

$$c_x = \left[1 + \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\operatorname{tg}\theta_c}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right] [1 - 0{,}5\cos^2\theta_c -$$

$$- (1 - 0{,}75\cos^2\theta_c)\sin^2\alpha]\cos^2\theta_c + \frac{\cos\alpha}{\pi} \arccos\left(\frac{\sin\theta_c}{\sin\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{\cos\alpha\sin\theta_c}{2\pi}(1 - 3\sin^2\theta_c)\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta_c}. \qquad (11.71)$$

В формулах (11.68) — (11.71) коэффициенты отнесены к площади πr_c^2, где r_c — радиус сферического сегмента.

Для полусферы коэффициенты c_y и c_x определяются по формулам (11.70) и (11.71) при $\theta_c = 0$:

$$c_y = \cos^2(\alpha/2)\sin\alpha, \quad c_x = \cos^4(\alpha/2). \qquad (11\ 72)$$

При $\alpha = 0$ $c_y = 0$, $c_x = 1$. Если пользоваться уточненной формулой (11.51), то значения коэффициентов c_y и c_x, вычисленные по формулам (11.68)—(11.72), необходимо умножить на $\bar{p}_{02}/2$. Тогда, в частности, для полусферы $\theta_c = 0$ получим $c_x = 0{,}5\bar{p}_{02}$.

На рис. 11.16, приведены кривые зависимости коэффициентов c_y и c_x для наружной поверхности сферического сегмента от угла атаки. При увеличении угла сегмента θ_c коэффициент нормальной силы уменьшается, а коэффициент продольной силы возрастает.

Ввиду того что полная аэродинамическая сила, действующая на сферический сегмент, проходит через центр сферы, то коэффициент момента относительно оси, проходящей через центр сферы, равен нулю.

Цилиндр круглого сечения. Рассмотрим бесконечный цилиндр при $\alpha \neq 0$. Очевидно, что подветренная сторона цилиндра при этом оказывается в аэродинамической тени ($\psi_т = \pi/2$). Тогда, подставляя в формулу (11.58) $\gamma = 0$, $\psi_т = \pi/2$ для цилиндра круглого сечения, получаем: $dY/dx = (8/3)q_\infty R\sin^2\alpha$, $Y = (8/3)q_\infty RL\sin^2\alpha$. Отсюда

$$c_y = [16/(3\pi)]\,\lambda_ц \sin^2\alpha, \qquad (11.73)$$

где $\lambda_ц = L/2R$ — удлинение цилиндра.

Коэффициент продольной силы для цилиндра $c_x = 0$.

Конус со сферическим затуплением (рис. 11.17). По теории Ньютона коэффициент давления зависит только от местного угла атаки. Поэтому влияние затупления на распределение давления по коническому участку поверхности при этом не учитывается. Тогда для определения коэффициентов c_y и c_x затупленный конус необходимо разбить на два элемента: сегмент с углом $\theta_c = \theta_к$ и усеченный конус с радиусами сечений $r_c \cos\theta_к$ и R; затем найти коэффициенты c_y и c_x для этих элементов и привести их к единой площади — площади миделева сечения.

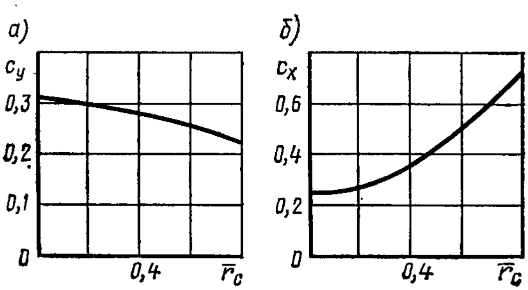


Рис. 11.18. Зависимости коэффициентов нормальной (*а*) и продольной (*б*) сил затупленного конуса от относительного радиуса затупления, $\theta_к=20°$; $\alpha=10°$

Тогда коэффициенты затупленного конуса:

$$\left.\begin{aligned} c_y &= c_{yc}\bar{r}_c^2 + c_{y\,кон}\left(1 - \bar{r}_c^2\cos^2\theta_к\right), \\ c_x &= c_{xc}\bar{r}_c^2 + c_{x\,кон}\left(1 - \bar{r}_c^2\cos^2\theta_к\right), \end{aligned}\right\} \tag{11.74}$$

где c_{yc}, c_{xc} — коэффициенты сферического сегмента ($\theta_c = \theta_к$), отнесенные к площади πr_c^2; $c_{yкон}$, $c_{xкон}$ — коэффициенты остроносого конуса; $\bar{r}_c = r_c/R$ — относительный радиус затупления. Здесь r_c — радиус сферического сегмента; R — радиус наибольшего сечения конуса.

При $\alpha < \theta_к$, подставляя в формулы (11.74) выражения (11.62), (11.63), (11.68) и (11.69), получаем

$$\left.\begin{aligned} c_y &= \cos^2\theta_к \sin 2\alpha\left(1 - 0{,}5\bar{r}_c^2\cos^2\theta_c\right), \\ c_x &= 2\sin^2\theta_к + \left(1 - 3\sin^2\theta_к\right)\sin^2\alpha + 0{,}5\bar{r}_c^2\cos^4\theta_к\left(2 - 3\sin^2\alpha\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.75}$$

На рис. 11.18 приведены кривые зависимости коэффициентов c_y и c_x от относительного радиуса затупления $\bar{r}_c$, полученные по формулам (11.75) для $\theta_к = 20°$ и $\alpha = 10°$.

Выражение для коэффициента момента m_z относительно носка затупленного конуса имеет вид:

$$m_z = -c_{yc}\bar{r}_c^3\,\frac{\operatorname{tg}\theta_к}{\bar{l}} - c_{y\,кон}\,\frac{1 - \bar{r}_c^2\cos^2\theta_к}{\bar{l}} \times$$

$$\times\left[\bar{x}_{д\,у.к}\,\frac{l_{у.к}}{l} + \left(1 - \frac{l_{у.к}}{l}\right)\right], \tag{11.76}$$

где $m_z = M_z/(q_\infty \pi R^2 l_1)$, $\bar{l} = l/l_1$, $\bar{x}_{д\,у.к}$ — относительная координата

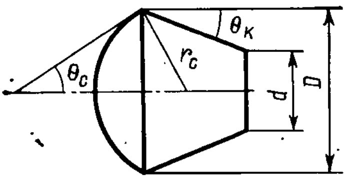


Рис. 11.19. Сегментально-коническое тело

центра давления усеченного конуса (11.67); $c_{yс}$, $c_{yкон}$ — коэффициенты нормальной силы сферического сегмента (11.68), (11.70) и конуса (11.62), (11.64); $r_с$, R, l_1, l — величины, указанные на рис. 11.17, $l_{у.к}/l = (1 - \bar{r}_с \cos\theta_к)$.

Цилиндр с полусферической носовой частью. Разбивая цилиндр с полусферической носовой частью на два элемента — полусферу и цилиндр, получаем:

$$c_y = c_{yс} + c_{yц}; \quad c_x = c_{xс};$$

$$m_z = -c_{yс} r_с / l - c_{yц} (l + r_с)/(2l), \text{ или}$$

$$m_z = -[1/(2\lambda)] c_{yс} - [(2\lambda + 1)/(4\lambda)] c_{yц},$$

где $c_{yс}$, $c_{yц}$ — коэффициенты нормальной силы полусферы (11.72) и цилиндра (11.73); $c_{xс}$ — коэффициент продольной силы полусферы (11.72); $\lambda = l/(2r_с)$ — удлинение тела.

Тело вращения произвольной формы. В этом случае тело также можно разбить на ряд простейших элементов. Тогда для определения его аэродинамических характеристик с учетом возможного затенения одного элемента другим достаточно рассчитать коэффициенты нормальной и продольной сил составных частей и привести их к единой площади, характерной для данного летательного аппарата. Например, в случае сегментально-конического тела (рис. 11.19) такими составными элементами являются лобовой сферический сегмент и кормовой усеченный конус, а его характерная площадь равна $\pi D^2/4$.

При угле атаки, меньшем угла полураствора усеченного конуса, аэродинамические характеристики сегментально-конического тела согласно теории Ньютона равны соответствующим коэффициентам лобового сферического сегмента. При $\alpha > \theta_к$ аэродинамические силы и момент создаются двумя элементами — лобовым сегментом и кормовым усеченным конусом. Аэродинамические характеристики лобового сегмента определяются по формулам (11.68)—(11.71), а для нахождения коэффициентов c_y и c_x обратного конуса можно пользоваться формулами (11.62)—(11.65) для прямого конуса, подставляя в них вместо заданного угла атаки α угол $(\alpha - \pi)$. Кроме того, с учетом направления продольной оси x необходимо поменять знак коэффициента c_x.

Очевидно, что для сегментально-конических тел коэффициент продольной силы c_x, создаваемой в основном лобовым сегментом, намного больше коэффициента нормальной силы c_y. Поэтому такие тела обладают малым аэродинамическим качеством $K = c_{ya}/c_{xa}$, где $c_{ya} = c_y \cos\alpha - c_x \sin\alpha$; $c_{xa} = c_x \cos\alpha + c_y \sin\alpha$.

Доля сопротивления трения в общем сопротивлении для таких тел невелика, и в принятом приближении ее можно не учитывать. Из формулы для определения коэффициента подъемной силы следует, что в некотором диапазоне положительных углов атаки $c_{ya} < 0$, т. е.

аэродинамическое качество сегментально-конических тел оказывается отрицательным.

Используя формулы для определения коэффициентов нормальной силы лобового сегмента и усеченного конуса, координаты центра давления кормового конуса, можно вычислить коэффициент момента относительно оси z.

Аналогично можно рассчитать аэродинамические характеристики тел вращения более сложной формы. На рис. 11.20 приведены результаты расчета коэффициента c_y, c_x, m_z (относительно оси, проходящей через точку O) для короткого сильно затупленного тела, составленного из участков сфер, прямого усеченного ($\theta_к = 10°$) и обратного ($\theta_к = 70°$) конусов, полученные на основе модифицированной теории Ньютона при $\mathbf{M}_\infty = 5{,}5$.

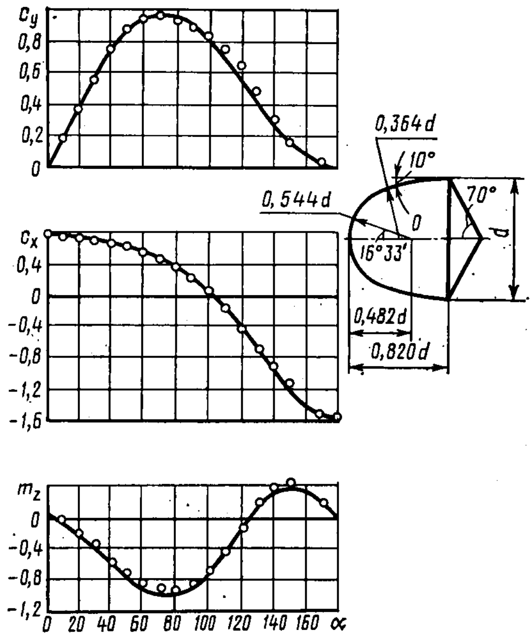


Рис. 11.20. Сравнение результатов эксперимента и расчета аэродинамических характеристик короткого сильно затупленного тела вращения:
О — эксперимент, $\mathbf{M}_\infty = 5{,}5$, $\mathrm{Re} = 6 \cdot 10^6$; ——— — по данным расчета

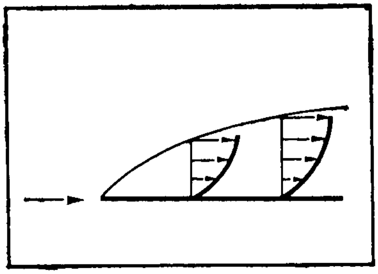
Сравнение расчетных и экспериментальных данных* указывает на то, что в рассматриваемом случае теория Ньютона дает удовлетворительные результаты при всех значениях угла атаки от 0 до 180°. Основной причиной расхождения расчетных и экспериментальных данных является то, что теория Ньютона не учитывает влияния разрежения в области аэродинамической тени. Приближенно это можно оценить, принимая в этой области при гиперзвуковых скоростях $p = 0$. Тогда на этих участках поверхности, в том числе на донном срезе, коэффициент давления можно определить по формуле $\bar{p} = -1{,}43/\mathbf{M}_\infty^2$.

---

* См.: *Иоргансен Л.* Аэродинамика аппаратов, предназначенных для входа в атмосферу Земли и предполагаемую атмосферу Марса. — Реферат № 172, БНИ ЦАГИ, 1966.

12
ГЛАВА

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ НАГРЕВ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ



§ 12.1. ПОНЯТИЕ О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Решение задачи об обтекании какого-либо тела, сводящееся к интегрированию сложных дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях, представляет трудности не только для случая вязкого газа, но и для несжимаемой вязкой жидкости. Рассмотрим сначала возможные упрощения уравнений Навье — Стокса. Существует ряд методов упрощения. Один из них заключается в том, что инерционные члены в уравнениях полностью отбрасываются, а слагаемые, определяемые вязкостью, сохраняются без изменения. Таким методом Стоксом решена задача об обтекании потоком вязкой жидкости шара радиусом r_c. Полученная формула для силы сопротивления (формула Стокса) имеет вид $X = 6\pi\mu v_\infty r_c$, т. е. сила сопротивления оказывается пропорциональной первой степени скорости.

Однако формула Стокса применима лишь при очень малых значениях чисел Re, так как полностью пренебрегать инерционными силами по сравнению с силами вязкости можно только в том случае, если число Re достаточно мало.

Несколько иной способ упрощения задачи, уточняющий метод Стокса, разработал Озеен. Он заключается в том, что в уравнениях движения оставляются только важнейшие члены, учитывающие вязкость; нелинейная система дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости сводится к линейным уравнениям с частными производными первого и второго порядков. Метод Озеена приводит к весьма сложным выкладкам и практически применим также только при малых числах Re.

Известен также метод упрощения уравнений Навье — Стокса, принадлежащий О. Рейнольдсу и состоящий в том, что в уравнениях движения вязкой среды инерционные члены отбрасываются полностью, а из вязких членов сохраняются главнейшие. Этот метод довольно широко используется при решении задач гидродинамической теории смазки и применим также при небольших значениях чисел Re.

Таким образом, практическое применение результатов, полученных на основе указанных выше методов, крайне ограничено. Другой метод упрощения уравнений Навье — Стокса, принципиально отличный от этих методов, применим, наоборот, к изучению обтекания тел

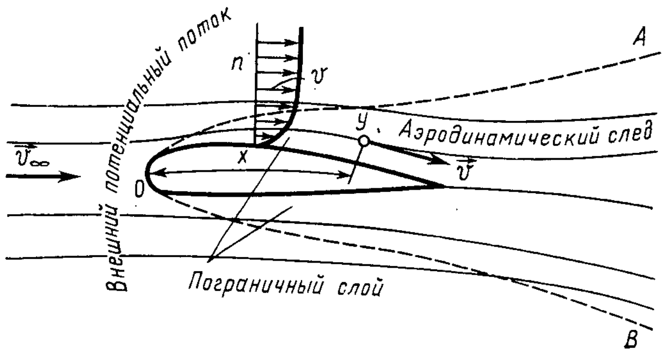


Рис. 12.1. Пограничный слой

при больших числах Re, вследствие чего он имеет важное значение для авиационной и ракетной техники.

Этот метод основан на понятии о пограничном слое. Как показано ниже, он позволяет построить приближенную теорию обтекания тела и, в частности, определить силу сопротивления тела в потоке вязкой среды.

Рассмотрим физическую сущность обтекания. Допустим, что неподвижное тело обтекается потоком вязкого газа (рис. 12.1). Непосредственные наблюдения показывают, что в тонком слое вблизи поверхности тела скорость потока резко нарастает — от значения $v = 0$ (на поверхности тела) до величины порядка скорости набегающего потока. Тонкий слой газа, прилегающий к поверхности обтекаемого тела и представляющий собой область больших значений градиентов скорости по нормали к телу, называют *пограничным слоем.*

Частицы газа в пограничном слое, пройдя вдоль поверхности обтекаемого тела, уносятся потоком. Скорости этих частиц, как правило, меньше скорости в окружающей среде. Заторможенные частицы образуют за телом область, называемую *аэродинамическим следом.*

Формула Ньютона для силы внутреннего трения $\tau = \mu \partial v/\partial n$ показывает, что внутри пограничного слоя и следа, где градиенты скорости значительны, силой внутреннего трения пренебрегать нельзя и среду в пограничном слое следует считать вязкой даже при малом значении коэффициента μ. Вне пограничного слоя и следа за телом, где градиенты скорости малы, силой внутреннего трения можно пренебречь, т. е. считать среду невязкой.

Таким образом, движение среды вне пограничного слоя и следа можно изучать с помощью уравнений Эйлера. Внутри пограничного слоя среду следует рассматривать как вязкую и изучать ее движение с помощью уравнений движения вязкой среды.

Введем понятие о толщине пограничного слоя. На поверхности скорость потока $v = 0$, а при удалении от поверхности эта скорость асимптотически приближается к скорости в невязком потоке, причем уже на достаточно малом расстоянии от поверхности она незначитель-

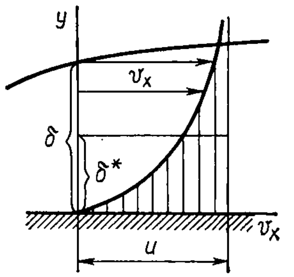


Рис. 12.2. Толщина вытеснения

но отличается от нее. Толщина пограничного слоя — величина условная. Обычно за толщину пограничного слоя δ в данной точке поверхности принимают расстояние от тела до такой точки, в которой действительная скорость потока отличается от скорости в невязком потоке на 1%. Толщина пограничного слоя зависит от положения точки на поверхности. На передней кромке толщина $\delta = 0$ и увеличивается при удалении от нее.

Введем теперь понятие о толщине вытеснения. Для этого найдем разность между секундным расходом через сечение пограничного слоя толщиной δ для потока невязкого и вязкого газа.

В невязком потоке скорость при $y = 0$ не равна нулю и на небольшом расстоянии от тела по нормали к поверхности практически не изменяется. Поэтому в невязком потоке расход в слое толщиной δ составляет $\rho u \delta = \int\limits_0^\delta \rho u dy$.

В вязкой среде $\int\limits_0^\delta \rho v_x dy$. Тогда разность расходов

$$\rho u \int\limits_0^\delta (1 - v_x/u)\, dy. \tag{12.1}$$

Учитывая, что за пределами пограничного слоя отношение скоростей v_x/u изменяется мало $(0{,}99 < v_x/u < 1)$, в выражении (12.1) интеграл от 0 до δ можно заменить интегралом от 0 до ∞. Интеграл $\int\limits_0^\delta (u - v_x)\, dy$ можно представить в виде некоторой площади (заштрихованная часть на рис. 12.1). Эту площадь можно приравнять площади равновеликого прямоугольника $\delta^* u$. Тогда

$$\delta^* = \int\limits_0^\infty (1 - v_x/u)\, dy. \tag{12.2}$$

Величина δ^* представляет собой условную толщину некоторого слоя, сквозь сечение которого в единицу времени и при постоянной во всех точках сечения скорости u протекает количество жидкости, равное указанному выше уменьшению расхода. Эта величина получила название *толщины вытеснения*. Для сжимаемой среды

$$\delta^* = \int\limits_0^\infty [1 - (\rho/\bar{\rho})\, v_x/u]\, dy, \tag{12.3}$$

где $\bar{\rho}$ — плотность в потоке невязкого газа.

Следовательно, толщина вытеснения характеризует уменьшение секундного расхода газа через сечение пограничного слоя вследствие торможения потока в пограничном слое.

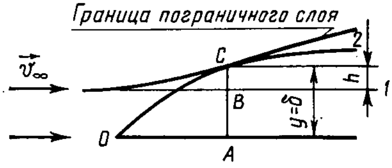


Рис. 12.3. Схема искривления линий тока внешнего потока вследствие влияния пограничного слоя

Покажем, что толщина вытеснения, кроме того, характеризует искривление линий тока вне пограничного слоя. Линии тока *1* при обтекании плоской пластинки потоком невязкого газа параллельны поверхности (рис. 12.3). Рассмотрим линию тока *2* в потоке вязкого газа, совпадающую перед плоской пластинкой с линией тока *1*. Тогда через сечение AB с равномерным распределением скорости и через сечение AC с неравномерным распределением скорости $v_x(y)$ будет протекать одинаковое количество газа:

$$\int_0^y \rho v_x dy = (y - h)\, \bar{\rho} u,$$

где y — координата точки C на линии тока *2* в потоке вязкого газа; h — смещение линии тока *2* по отношению к линии *1* при $x = OA$. Отсюда

$$h = \int_0^y \left[1 - (\rho/\bar{\rho})\, v_x/u\right] dy. \tag{12.4}$$

Из формулы (12.4) следует, что смещение линии тока зависит от координаты y. При увеличении координаты y расстояние между линиями тока *1* и *2* увеличивается. Если $y = \delta$, т. е. в точке C линия тока *2* пересекает границу пограничного слоя, то

$$h = \delta^* = \int_0^\delta \left[1 - (\rho/\bar{\rho})\, v_x/u\right] dy. \tag{12.5}$$

При дальнейшем увеличении координаты y величина h практически не изменяется и характеризует искривление линий тока во внешнем потоке. Искривление линий тока вследствие влияния пограничного слоя можно приближенно оценить, рассматривая обтекание фиктивного тела с толщиной, увеличенной на $2\delta^*$, потоком невязкого газа. Тогда, например, вместо пластинки нужно рассмотреть фиктивный профиль с уравнением поверхности $y = \pm\, \delta^*(x)$.

Для решения задачи с учетом влияния пограничного слоя на внешний поток необходимо сначала определить скорость и давление на границе пограничного слоя, рассматривая обтекание заданного тела потоком невязкого газа. По найденному распределению давления и скорости вдоль поверхности тела, принимая эти параметры за параметры потока на внешней границе пограничного слоя, можно рассчитать пограничный слой, найти толщину вытеснения. Затем нужно найти скорость и давление на поверхности фиктивного тела.

Введем понятие о *толщине потери импульса* δ^{**}. Вследствие торможения потока в пограничном слое уменьшается количество движения (импульс), проносимого через сечение пограничного слоя $\delta 1$, по сравнению с потоком невязкого газа: $\int\limits_0^\delta \rho v_x (u - v_x)\, dy$.

Толщина потери импульса представляет собой условную толщину некоторого слоя, сквозь сечение которого в единицу времени с постоянной скоростью u переносится количество движения $\bar{\rho} u^2 \delta^{**}$, равное указанному уменьшению импульса:

$$\bar{\rho} u^2 \delta^{**} = \int\limits_0^\delta \rho v_x (u - v_x)\, dy.$$

Отсюда

$$\delta^{**} = \int\limits_0^\delta \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{v_x}{u} \left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy. \qquad (12.6)$$

В случае несжимаемой среды ($\bar{\rho} = \rho = \mathrm{const}$)

$$\delta^{**} = \int\limits_0^\delta \frac{v_x}{u} \left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy. \qquad (12.7)$$

Рассмотрим некоторые особенности пограничного слоя в сжимаемом газе. При малой скорости кинетический нагрев газа вследствие торможения потока практически отсутствует. Например, при $\mathrm{M} = 0{,}5$ температура торможения $T_0 = 1{,}05 T_\infty$, т. е. отличается от температуры невозмущенного потока всего на 5%. Поэтому, если нет отвода и подвода теплоты через поверхность тела, температуру газа по толщине пограничного слоя при малых скоростях можно принять постоянной и равной температуре набегающего потока.

Поскольку по толщине пограничного слоя давление также не изменяется (см. § 12.2), то сохраняет постоянное значение и плотность газа. Вследствие этого при расчете пограничного слоя при малых скоростях потока можно принять, что температура, давление и плотность газа в сечении пограничного слоя постоянны. Неизвестными являются только составляющие скорости потока.

При больших скоростях вследствие торможения потока в пограничном слое значительно повышается температура. Для теплоизолированной стенки, когда теплота не отводится от поверхности тела и не излучается ею в окружающее пространство, температура газа у стенки ($y = 0$) меньше температуры торможения T_0. Она равна температуре восстановления T_r:

$$T_r = T_\infty \{1 + r[(k-1)/2]\, \mathrm{M}_\infty^2\}, \qquad (12.8)$$

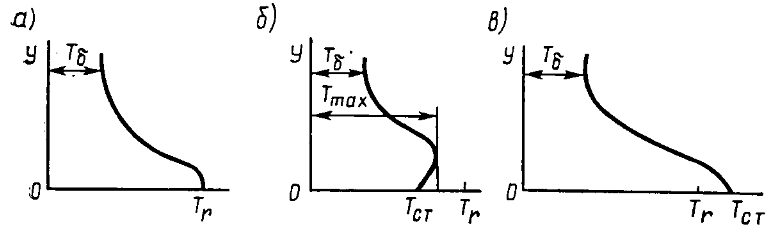


Рис. 12.4. Изменение температуры газа по сечению пограничного слоя

где $r = (T_r - T_\delta)/(T_0 - T_\delta)$ — *коэффициент восстановления*, представляющий собой отношение прироста температуры при адиабатическом торможении в пограничном слое ($T_r - T_\delta$) и во внешнем потоке ($T_0 - T_\delta$), здесь T_δ — температура на внешней границе пограничного слоя.

Величина r зависит от *числа Прандтля* $\mathrm{Pr} = \mu c_p/\lambda$. Для воздуха в среднем можно принять $\mathrm{Pr} = 0{,}72$.

Коэффициент восстановления температуры в ламинарном пограничном слое приближенно можно определить по формуле $r \approx \sqrt{\mathrm{Pr}}$, а в турбулентном пограничном слое — по $r \approx \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}$. Для воздуха в ламинарном и турбулентном пограничных слоях $r = 0{,}85$ и $r = 0{,}90$.

Подставляя значение коэффициента восстановления температуры в формулу (12.8), при $k = 1{,}4$ для ламинарного и турбулентного пограничных слоев получаем:

$$T_r = T_\infty(1 + 0{,}17\mathrm{M}_\infty^2); \tag{12.9}$$

$$T_r = T_\infty(1 + 0{,}18\mathrm{M}_\infty^2). \tag{12.10}$$

На рис. 12.4, *а* показан примерный характер распределения температуры по сечению пограничного слоя в случае теплоизолированной стенки. Распределение температуры в пограничном слое существенно изменяется при наличии подвода или отвода теплоты. При охлаждении стенки максимальная температура в пограничном слое меньше температуры восстановления. Поскольку у стенки температура снижается вследствие отвода теплоты внутрь тела, то в этом случае температура газа имеет максимальное значение внутри пограничного слоя (рис. 12.4, *б*).

При нагревании стенки до температуры, превышающей температуру восстановления ($T_{ст} > T_r$), появляется тепловой поток от стенки к пограничному слою. Это вызывает увеличение температуры внутри пограничного слоя (рис. 12.4, *в*).

Учитывая, что повышение температуры более или менее значительно только в тонком слое вблизи тела, можно ввести также понятие о тепловом (температурном) пограничном слое, в котором температура газа изменяется от ее значения на стенке ($y = 0$) до температуры внешнего потока. В общем случае толщина температурного пограничного слоя, т. е. слоя, где происходит основное изменение температуры, не совпадает с толщиной динамического пограничного слоя, определяемого как область изменения скорости.

Поскольку при больших скоростях температура в пограничном слое изменяется существенно, то оказывается переменной и плотность газа. Вследствие того что давление по сечению пограничного слоя примерно постоянно, плотность в пограничном слое изменяется обратно пропорционально температуре: $\rho = (1/R)p/T$.

При этих условиях по сечению пограничного слоя оказываются переменными вязкость $\mu(T)$ и теплопроводность $\lambda(T)$. С увеличением температуры μ и λ возрастают. Зависимости вязкости и теплопроводности от температуры для воздуха можно выразить приближенными формулами $\mu = \mu_1(T/T_1)^n$, $\lambda = \lambda_1(T/T_1)^\varkappa$, где μ_1, λ_1 — значения динамической вязкости и теплопроводности при температуре $T_1 = 273$ K, а показатели степени $n \approx 0{,}76$, $\varkappa \approx 0{,}85$.

Более точные значения μ и λ в широком диапазоне температур и давлений приведены, например, в [12].

Таким образом, в общем случае расчета пограничного слоя неизвестными являются составляющие скорости потока и температура в сечении пограничного слоя. Остальные параметры — плотность, вязкость и теплопроводность — можно выразить через температуру.

§ 12.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Выведем сначала дифференциальные уравнения для плоского пограничного слоя в установившемся потоке несжимаемой среды (рис. 12.5).

Для изучения установившегося движения в пограничном слое используем дифференциальные уравнения (3.23), которые в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right);$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right).$$

Пренебрегая массовыми силами X и Y и присоединяя к уравнениям движения уравнение неразрывности, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right);$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \qquad (12.11)$$

Величина входящей в эти уравнения координаты y в пограничном слое ограничена неравенством $0 \leqslant y \leqslant \delta(x)$. Это означает, что в уравнениях координату y можно считать малой величиной порядка δ. Заметим, что малость δ следует понимать в том смысле, что мало отношение δ/l, где l — характерный размер обтекаемого тела (например, его длина). Имея это в виду, оценим порядок членов, входящих в уравнения (12.11).

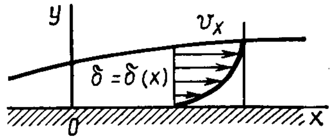


Рис. 12.5. Схема к выводу дифференциальных уравнений пограничного слоя

Так как на стенке обтекаемого тела $v_x = 0$, а на внешней границе слоя v_x имеет порядок v, где v — характерная скорость рассматриваемого течения (например, скорость на бесконечности перед телом), то отсюда следует, что при изменении координаты y от 0 до δ приращение Δv_x имеет порядок v, а приращение Δy — порядок δ. Поэтому $\partial v_x/\partial y \sim v/\delta$. Аналогично можно показать, что внутри пограничного слоя $\partial^2 v_x/\partial y^2 \sim v/\delta^2$. Чтобы оценить порядок $\partial v_x/\partial x$, заметим, что при перемещении вдоль обтекаемого контура на отрезок порядка характерной длины l скорость v_x может измениться на величину порядка v (например, от 0 до v), т. е. и в этом случае $\Delta v_x \sim v$. Так как при этом $\Delta x \sim l$, то $\partial v_x/\partial x \sim v/l$.

Нетрудно убедиться, что $\partial^2 v_x/\partial x^2 \sim v/l^2$. Используя затем уравнение неразрывности $\partial v_x/\partial x = -\partial v_y/\partial y$, делаем вывод, что $\partial v_y/\partial y$ имеет тот же порядок, что и $\partial v_x/\partial x$, т. е. $\partial v_y/\partial y \sim v/l$.

Поскольку $v_y = \int\limits_0^y (\partial v_y/\partial y)\, dy$, то $v_y \sim v\delta/l$.

Имея в виду, что на поверхности обтекаемого тела $v_y = 0$, и используя полученную оценку порядка величины v_y в точках внутри слоя, найдем порядок величины производных $\partial v_y/\partial x$, $\partial^2 v_y/\partial x^2$, $\partial^2 v_y/\partial y^2$: $\partial v_y/\partial x \sim v\delta/l^2$, $\partial^2 v_y/\partial x^2 \sim v\delta/l^2$, $\partial^2 v_y/\partial y^2 \sim v/l\delta$.

Определив порядок скоростей и их производных, входящих в уравнения (12.11), представим первое из этих уравнений, подставив под каждым членом порядок его величин:

$$\underset{\frac{v^2}{l}}{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} + \underset{\frac{v^2}{l}}{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\underset{\frac{v}{l^2}}{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \underset{\frac{v}{\delta^2}}{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}\right).$$

В этом уравнении можно отбросить член $\partial^2 v_x/\partial x^2$, как малый по сравнению с членом $\partial^2 v_x/\partial y^2$. Тогда первое уравнение системы (12.11) примет вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Внутри пограничного слоя инерционные и вязкие силы имеют одинаковый порядок. Тогда отношение $(v^2/l)/(\nu v/\delta^2) = (\delta/l)^2 \mathbf{Re}$ должно иметь порядок, равный единице, т. е. $(\delta/l)^2\mathrm{Re} \approx 1$. Отсюда следует, что отношение $\delta/l \sim 1/\sqrt{\mathrm{Re}}$.

Рассмотрим теперь второе уравнение (12.11):

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right).$$

$$\frac{v^2\delta}{l^2} \qquad \frac{v^2\delta}{l^2} \qquad\qquad \frac{v\delta}{l^2} \qquad \frac{v}{l\delta}$$

Пренебрегая членом $\partial^2 v_y/\partial x^2$, так как он мал по сравнению с $\partial^2 v_y/\partial y^2$, представим это уравнение в виде

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}. \tag{12.12}$$

Инерционные и вязкие члены второго уравнения системы (12.11) имеют порядок $v^2\delta/l^2$ или $v^2/\left(l\sqrt{\mathrm{Re}}\right)$.

Тот же порядок, что и сохраняемые во втором уравнении члены, имеет и величина $(1/\rho)\partial p/\partial y$, т. е. производной $\partial p/\partial y$ можно пренебречь по сравнению с производной $\partial p/\partial x$, имеющей порядок v^2/l. Тогда второе уравнение системы (12.11) можно опустить, заменив его уравнением

$$\partial p/\partial y = 0, \tag{12.13}$$

которое означает, что *давление внутри пограничного слоя не изменяется вдоль нормали к контуру тела и равно давлению на внешней границе слоя.*

Из уравнения (12.13) следует также , что распределение давления вдоль поверхности совпадает с распределением давления по границе пограничного слоя. Этот результат подтверждается экспериментом. Давление на границе пограничного слоя можно найти, решая задачу обтекания тела потенциальным потоком.

Для плоского установившегося движения, заменяя частную производную $\partial p/\partial x$ на полную dp/dx, так как в этом случае давление p является функцией только координаты x, и используя уравнение неразрывности, получаем следующую систему дифференциальных уравнений пограничного слоя в несжимаемой среде (уравнение Прандтля):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{12.14}$$

Система уравнений (12.14) интегрируется при следующих граничных условиях:

$$v_x = v_y = 0 \text{ при } y = 0; \quad v_x = u(x) \text{ при } y = \infty.$$

Здесь $u(x)$ — скорость на верхней границе пограничного слоя.

Поскольку уравнения (12.14) для составляющей скорости v_y являются уравнениями первого порядка, о для определения v_y достаточно задать одно условие (на поверхности тела).

Дифференциальные уравнения (12.14) для несжимаемого пограничного слоя получены в предположении, что граница твердого тела плоская. Эти уравнения с достаточной точностью справедливы и для криволинейной стенки. В этом случае следует отсчитывать абсциссу x по дуге контура тела, а ординату y — по нормали к поверхности тела.

§ 12.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ

Выведем уравнения пограничного слоя сжимаемого газа для установившегося плоскопараллельного течения. При этом влиянием массовых сил пренебрежем.

В этом случае уравнения (3.14) и (3.15) примут вид

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}; \tag{12.15}$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}, \tag{12.16}$$

где по формулам (3.21)

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx}&=-p-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x};\\
\tau_{yx}&=\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right);\\
p_{yy}&=-p-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{12.17}$$

Так же как для пограничного слоя в несжимаемой среде, произведя аналогичную оценку величин отдельных членов, легко убедиться, что в правой части уравнения (12.15) можно пренебречь производными $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$ по сравнению с производной $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$. Тогда

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \tag{12.18}$$

Аналогичная оценка членов уравнения (12.16) позволяет заменить его уравнением $\partial p/\partial y=0$. Этот результат также означает, что изменением давления поперек пограничного слоя можно пренебречь и, следовательно, принять, что давление в пограничном слое зависит только от координаты x. Тогда в случае установившегося движения частную производную $\partial p/\partial x$ можно заменить полной производной dp/dx:

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \qquad (12.19)$$

В уравнении (12.19) неизвестными являются составляющие скорости v_x, v_y, плотность ρ и в неявной форме температура, так как динамическая вязкость зависит от температуры.

В качестве второго уравнения используем уравнение неразрывности (3.5), которое для установившегося плоскопараллельного движения имеет вид

$$\partial (\rho v_x)/\partial x + \partial (\rho v_y/\partial y) = 0, \qquad (12.20)$$

а в качестве третьего — уравнение энергии (3.26).

Преобразуем уравнение (3.26) применительно к пограничному слою. Для установившегося плоскопараллельного потока оно имеет вид

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = v_x \frac{dp}{dx} + 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right] -$$

$$- \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Из членов, содержащих вязкость, в этом уравнении должен быть сохранен только член $\mu\ (\partial v_x/\partial y)^2$. Определим порядок членов, содержащих производные от температуры по x и y.

Из уравнения Бернулли (3.52), полученного для потока вне пограничного слоя, следует, что производная $\partial T/\partial x \sim v^2/(c_p l)$, а $c_p \rho v_x \partial T/\partial x \sim \rho v^3/l$. Производная $\partial T/\partial y$ имеет порядок $(T_r - T_\infty)/\delta$. Тогда, используя формулу (12.8) и учитывая, что $v_y \sim v\delta/l$, получаем $\rho c_p v_y dT/dy \sim \rho v^3/l$, т. е. оба члена левой части уравнения энергии имеют порядок $\rho v^3/l$.

Определим порядок членов, содержащих теплопроводность. Учитывая, что для газов число $\mathrm{Pr} = \mu c_p/\lambda$ порядка единицы, имеем $\lambda \sim c_p \mu$. Тогда член $(\partial/\partial y)(\lambda \partial T/\partial y)$ имеет порядок $\mu v^2/\delta^2$, а $(\partial/\partial x)(\lambda \partial T/\partial x)$ — порядок $\mu v^2/l^2$. Отсюда $(\partial/\partial x)(\lambda \partial T/\partial x) \ll (\partial/\partial y)(\lambda \partial T/\partial y)$. Поэтому в уравнении энергии для пограничного слоя членом $(\partial/\partial x)(\lambda \partial T/\partial x)$ можно пренебречь. Порядок члена $(\partial/\partial y)(\lambda \partial T/\partial y)$ совпадает с порядком остальных членов уравнения, так как $\delta^2/l^2 \sim 1/\mathrm{Re}$, т. е. $\delta^2/l^2 \sim \mu/(\rho v l)$. В результате получим следующее уравнение:

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = v_x \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \qquad (12.21)$$

Таким образом, для исследования установившегося движения сжимаемого газа в пограничном слое имеем систему уравнений (12.19)—(12.21). Основными неизвестными в этих уравнениях являются v_x, v_y, T.

При исследовании пограничного слоя вследствие выполнения условия $\partial p/\partial y = 0$ давление можно считать известной величиной. Плотность по толщине пограничного слоя изменяется обратно пропорционально температуре: $\rho = p/(RT)$. Динамическую вязкость и теплопроводность следует считать известными функциями температуры.

Дифференциальные уравнения пограничного слоя в таком виде пригодны лишь для изучения ламинарного пограничного слоя. Как отмечено в § 1.5, структура турбулентного течения чрезвычайно сложна. В этом случае параметры потока в фиксированной точке пространства по времени изменяются хаотически. Поэтому при изучении турбулентного течения приходится ограничиваться рассмотрением осредненного по времени характера течения, т. е. вместо мгновенных значений параметров потока ввести некоторые осредненные их величины. Дифференциальные уравнения для осредненных величин в случае турбулентного течения вязкой жидкости приведены в учебнике [2].

Решение дифференциальных уравнений пограничного слоя как для сжимаемого, так и для несжимаемого потоков является достаточно сложным даже для простейших тел. В связи с этим используются и приближенные методы решения задач пограничного слоя, основанные на рассмотрении интегрального соотношения, являющегося математическим выражением теоремы об изменении количества движения.

§ 12.4. *ИНТЕГРАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ*

Рассмотрим случай установившегося плоского пограничного слоя. Выделим в этом слое бесконечно малый объем $ABDC$ (рис. 12.6), ограниченный элементом BD твердой границы, которую примем за ось x, элементом AC верхней границы пограничного слоя и плоскостями AB и CD, отстоящими друг от друга на расстоянии dx. Протяженность объема в направлении оси z примем равной единице. Применим к объему $ABDC$ теорему об изменении количества движения. Вычислим изменение количества движения в направлении оси x за промежуток времени dt. Очевидно, через участок AB втекает масса газа $dt\int\limits_0^\delta \rho v_x dy$, а через участок CD —$dt\int\limits_0^\delta \rho v_x dy + dt\left(\frac{d}{dx}\int\limits_0^\delta \rho v_x dy\right)dx$.

Разность между ними составляет $dt\left(\frac{d}{dx}\int\limits_0^\delta \rho v_x dy\right)dx$.

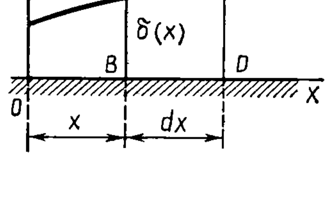


Рис. 12.6. Схема к выводу интегрального соотношения пограничного слоя

На основании условия неразрывности для установившегося течения через верхнюю границу AC втекает такая же масса газа. Она вносит следующее количество движения: $udtdx \dfrac{d}{dx} \int\limits_0^\delta \rho v_x dy$.

Здесь u — скорость потока на внешней границе пограничного слоя.

Подсчитаем количества движения газа, вносимого и уносимого через участки AB и CD. Через участок AB вносится количество движения $dt \int\limits_0^\delta \rho v_x^2 dy$. Количество движения, уносимого газом через участок CD, будет $dt \int\limits_0^\delta \rho v_x^2 dy + dt \left(\dfrac{d}{dx} \int\limits_0^\delta \rho v_x^2 dy \right) dx$. Тогда разность количеств движения составляет $dt \left(\dfrac{d}{dx} \int\limits_0^\delta \rho v_x^2 dy \right) dx$.

Найдем полное изменение количества движения газа в объеме за время dt:

$$\left[\frac{d}{dx} \int\limits_0^\delta \rho v_x^2 dy - u \frac{d}{dx} \int\limits_0^\delta \rho v_x dy \right] dxdt. \tag{а}$$

Вычислим импульсы внешних сил за тот же промежуток времени dt в направлении оси x. Очевидно, на элемент $ABCD$ в этом направлении действуют силы давления, приложенные к левой, верхней и правой граням элемента, и сила трения, приложенная к нижней его грани BD. Проекции на ось x сил давления, действующих на грани AB, AC и DC, соответственно равны $p\delta$, $pd\delta$, $-\{p\delta + [d(p\delta)/dx]dx\}$.

Сумма проекций сил давления

$$p\delta + pd\delta - \{p\delta + [d(p\delta)/dx]\, dx\} = -\delta\, (dp/dx)\, dx,$$

а импульс сил за время dt составит

$$-\delta (dp/dx)\, dtdx. \tag{б}$$

Импульс силы трения, действующей на элементе поверхности BD,

$$-\tau_0 dxdt. \tag{в}$$

Приравнивая выражение (а) для изменения количества движения сумме величин (б) и (в) для импульсов действующих сил, получаем искомое интегральное соотношение пограничного слоя для случая плоского установившегося движения газа (интегральное соотношение Кармана):

$$\frac{d}{dx} \int\limits_0^\delta \rho v_x^2 dy - u \frac{d}{dx} \int\limits_0^\delta \rho v_x dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_0. \tag{12.22}$$

Следует отметить, что интегральное соотношение (12.22) пригодно для изучения не только ламинарного, но и турбулентного движения внутри пограничного слоя. Входящие в интегральное соотношение пограничного слоя величины u, p можно рассматривать как известные, тогда для несжимаемой среды неизвестными будут только v_x, δ и τ_0, а с учетом сжимаемости —v_x, δ, τ_0, ρ.

При использовании интегрального соотношения (12.22) нужны два дополнительных уравнения: закон распределения скорости по нормали к поверхности в пограничном слое, который в этом случае можно задать приближенно соответствующей аппроксимирующей функцией, а в качестве второго уравнения для определенного режима течения вязкой среды в пограничном слое — закон напряжения трения. Например, для ламинарного пограничного слоя можно использовать формулу Ньютона $\tau_0 = \mu(\partial v_x/\partial y)_{y=0}$.

В результате подстановки выражений для v_x и τ_0 в интегральное соотношение получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения толщины пограничного слоя.

§ 12.5. РАСЧЕТ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ В НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Решение задачи об обтекании плоской пластинки в теории сопротивления трения имеет большое значение. Пластинка (рис. 12.7), поставленная вдоль потока, является простейшим удобообтекаемым телом, сопротивление которого зависит только от касательных напряжений. Найденные для пластинки зависимости коэффициента сопротивления трения можно использовать при приближенных расчетах сопротивления трения удобообтекаемых тел, например тонких профилей, крыльев и корпусов.

Задача расчета пограничного слоя в несжимаемом потоке сводится к определению закона изменения толщины пограничного слоя, т. е. к функции $\delta = \delta(x)$, и силы сопротивления трения $X_{\text{тр}}$ при условии, что известны скорость набегающего потока v_∞ и кинематическая вязкость среды ν.

Для решения задачи воспользуемся интегральным соотношением пограничного слоя (12.22). Так как в рассматриваемом случае $u = v_\infty$ и $dp/dx = 0$, т. е. пластинка представляет собой тело с нулевым градиентом давления вдоль по хорде, то интегральное соотношение (12.22) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy - v_\infty\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy = -\tau_0. \tag{12.23}$$

Уравнением (12.23) можно пользоваться для расчета как ламинарного, так и турбулентного пограничного слоев на плоской пластинке.

Расчет ламинарного пограничного слоя. Зададим v_x/v_∞ в виде полинома третьей степени относительно безразмерной координаты y/δ, т. е. $v_x/v_\infty = a_0 + a_1 y/\delta + a_2(y/\delta)^2 + a_3(y/\delta)^3$, где a_0, a_1, a_2, a_3 — коэффициенты полинома, определяемые из граничных условий.

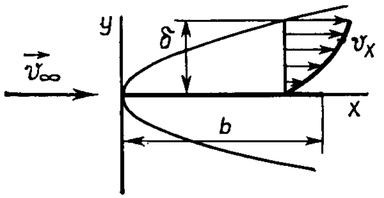


Рис. 12.7. Пограничный слой на плоской пластинке

На нижней границе пограничного слоя ($y = 0$) скорость $(v_x)_{y=0} = 0$; при $y = \delta$ скорость v_x примем $(v_x)_{y=\delta} = v_\infty$, а $\tau = 0$. Тогда, согласно формуле Ньютона, $(\partial v_x/\partial y)_{y=\delta} = 0$.

Для определения четвертого граничного условия рассмотрим дифференциальные уравнения пограничного слоя. Из первого уравнения системы (12.14) следует, что $(\partial^2 v_x/\partial y^2)_{y=0} = 0$.

Указанные граничные условия позволяют определить значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3: $a_0 = 0$, $a_1 = 3/2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1/2$. Следовательно, закон распределения скорости принимает вид

$$v_x/v_\infty = 0{,}5\,(3y/\delta - y^3/\delta^3). \tag{12.24}$$

Используя закон Ньютона для внутреннего трения при ламинарном течении $\tau_0 = \mu(\partial v_x/\partial y)_{y=0}$ и учитывая выражение (12.24), получаем

$$\tau_0 = (3/2)\,\mu v_\infty/\delta. \tag{12.25}$$

После подстановки в интегральное соотношение (12.23) выражений для скорости v_x (12.24) и касательного напряжения τ_0 (12.25) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее одну неизвестную величину δ.

Используя выражение (12.24), вычислим интегралы:

$$\int_0^\delta \rho v_x dy = \frac{5}{8}\,\rho v_\infty \delta; \qquad \int_0^\delta \rho v_x^2\, dy = \frac{17}{35}\,\rho v_\infty^2 \delta.$$

Подставляя эти значения в соотношение (12.23), получаем дифференциальное уравнение $(13/140)\rho v_\infty \delta d\delta = \mu dx$, интегрируя которое находим $(13/280)\rho v_\infty \delta^2 = \mu x + C$. Так как при $x = 0$ толщина пограничного слоя равна нулю, то $C = 0$. Следовательно,

$$\delta = 4{,}64\sqrt{\nu x/v_\infty}. \tag{12.26}$$

Если протяженность пластинки по оси x конечна и равна b, то можно ввести отношение толщины пограничного слоя к хорде $\bar{\delta} = \delta/b$:

$$\bar{\delta} = 4{,}64\sqrt{\bar{x}}/\sqrt{\mathrm{Re}}, \tag{12.27}$$

где $\mathrm{Re} = v_\infty b/\nu$.

Из формулы (12.27) следует, что толщина ламинарного пограничного слоя вдоль пластинки нарастает по параболическому закону. Для заданного профиля скоростей (12.24) толщина вытеснения δ^* (12.2) и толщина потерь импульса δ^{**} (12.7) определяются из соотношений $\delta^* = 3\delta/8$, $\delta^{**} = 39\delta/280$. Найдем изменение τ_0 вдоль пластинки. Введем местный коэффициент трения по формуле $c_f = \tau_0/(\rho v_\infty^2/2)$.

Подставляя сюда выражение τ_0 (12.25) и используя формулу (12.26), получаем

$$c_f = 0{,}65\left(\sqrt{\nu}/\sqrt{v_\infty}\right)/\sqrt{x} = 0{,}65/\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \tag{12.28}$$

где $\mathrm{Re}_x = v_\infty x/\nu$.

Рис. 12.8. Изменение местного коэффициента трения вдоль пластинки

Из формулы следует, что местный коэффициент трения уменьшается при удалении от передней кромки (рис. 12.8). Формула (12.28) дает хорошее совпадение с опытными данными, за исключением областей вблизи передней и задней кромок.

Найдем силу трения. Обозначим C_f коэффициент суммарного сопротивления трения, отнесенный к площади всей смоченной поверхности пластинки, т. е. $2lb$. Здесь l — длина пластинки вдоль ее размаха. Тогда

$$X_{\text{тр}} = C_f \frac{\rho v_\infty^2}{2} 2lb = \int_0^b \tau_0 2l dx.$$

Отсюда

$$C_f = \frac{1}{b}\int_0^b c_f dx. \tag{12.29}$$

Подставляя в формулу (12.29) выражение c_f (12.28), получим

$$C_f = 1{,}3\Big/\sqrt{\mathrm{Re}}. \tag{12.30}$$

Таким образом, коэффициент сопротивления трения плоской пластинки при ламинарном пограничном слое зависит от числа Re и изменяется обратно пропорционально $\sqrt{\mathrm{Re}}$.

Расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластинке. Законы турбулентного течения наиболее полно изучены для движения жидкости в круглых трубах. Используем результаты этих экспериментальных исследований для расчета пограничного слоя. Введем основное допущение: примем, что в пограничном слое на пластинке распределение скорости по сечению такое, как и в круглой трубе.

Необходимо иметь в виду, что полного совпадения этих законов быть не может, так как распределение скорости в трубе устанавливается под воздействием градиента давления $dp/dx \neq 0$, а при обтекании пластинки $dp/dx = 0$. Однако небольшая разница в распределении скорости по нормали к поверхности при расчете пограничного слоя с помощью интегрального соотношения не имеет особого значения.

Вводя гипотезу о тождественности безразмерных законов распределений скорости по толщине пограничного слоя плоской пластинки и по радиусу круглой цилиндрической трубы, можно принять, что изменение скорости внутри пограничного слоя пластинки при турбулентном течении определяется зависимостью

$$v_x/v_\infty = (y/\delta)^{1/7}, \tag{12.31}$$

называемой *законом одной седьмой*. Это первое дополнительное уравнение к интегральному соотношению.

Вторым дополнительным уравнением является зависимость между значением касательного напряжения τ_0, толщиной пограничного слоя δ и скоростью v_∞ набегающего потока. Эту зависимость примем такой же, как при турбулентном течении жидкости в трубе:

$$\tau_0 = 0{,}0225\rho v_\infty^2 \left[\nu/(v_\infty\delta)\right]^{1/4}, \tag{12.32}$$

установленной экспериментально.

Вычислим входящие в соотношение (12.23) интегралы:

$$\int_0^\delta \rho v_x dy = \frac{7}{8}\rho v_\infty \delta, \quad \int_0^\delta \rho v_x^2 dy = \frac{7}{9}\rho v_\infty^2 \delta.$$

Подставляя найденные значения интегралов и выражение (12.32) в соотношение (12.23), имеем

$$(7/72)\, d\delta/dx = 0{,}0225\left[\nu/(v_\infty\delta)\right]^{1/4}.$$

Интегрируя и определяя постоянную интегрирования из условия $x = 0$, $\delta = 0$, после простых преобразований имеем:

$$\delta = 0{,}37\,(\nu/v_\infty)^{1/5} x^{4/5}; \tag{12.33}$$

$$\bar\delta = 0{,}37\bar x^{4/5}\Big/\sqrt[5]{\mathrm{Re}}, \tag{12.34}$$

где $\bar\delta = \delta/b$, $\bar x = x/b$, $\mathrm{Re} = v_\infty b/\nu$.

Из полученных выражений следует, что толщина турбулентного пограничного слоя нарастает более интенсивно (пропорционально $x^{4/5}$), чем ламинарного (для которого $\delta \sim x^{1/2}$), и обратно пропорциональна $\sqrt[5]{\mathrm{Re}}\cdot$ Поэтому при прочих равных условиях $\delta_т \gg \delta_л$. Это объясняется тем, что вследствие поперечного перемешивания частиц в турбулентном потоке тормозящее влияние стенки распространяется на большее от нее расстояние.

Толщина вытеснения (12.2) для турбулентного пограничного слоя с распределением скорости по нормали к поверхности по закону одной седьмой $\delta^* = \delta/8$, а толщина потери импульса $\delta^{**} = 7\delta/72$.

Определим силу трения $X_{тр}$. Используя выражение (12.32), получаем формулу для определения напряжения трения:

$$\tau_0 = 0{,}0289\rho v_\infty^2 (\nu/v_\infty)^{1/5}\Big/\sqrt[5]{x}$$

и местного коэффициента трения:

$$c_f = 0{,}0578 \big/ \sqrt[5]{\mathrm{Re}_x}. \qquad (12.35)$$

Тогда суммарный коэффициент сопротивления трения (12.29)

$$C_f = 0{,}072 \big/ \sqrt[5]{\mathrm{Re}}. \qquad (12.36)$$

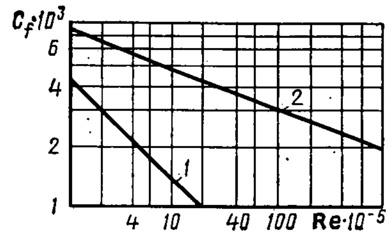


Рис. 12.9. Зависимость коэффициента сопротивления трения пластинки от числа Re:

1 — ламинарный пограничный слой; *2* — турбулентный пограничный слой

Зависимость коэффициентов сопротивления трения от числа Re удобно изображать в логарифмических координатах, за которые принимают $\lg\mathrm{Re}$ и $\lg C_f$ (рис. 12.9). При этом зависимость C_f для ламинарного пограничного слоя изображается прямой *1*, т. е. $\lg C_f = \lg 1{,}3 - 0{,}5\lg\mathrm{Re}$ с угловым коэффициентом — 0,5, а зависимость C_f для турбулентного пограничного слоя — прямой *2*, т. е. $\lg C_f = \lg 0{,}072 - (1/5)\lg\mathrm{Re}$ с угловым коэффициентом — 1/5.

Как видим, в обоих случаях с увеличением числа Re коэффициент сопротивления трения убывает, но при турбулентном слое значительно медленнее, чем при ламинарном.

Как показывают опыты, более точно коэффициент сопротивления трения пластинки в случае турбулентного пограничного слоя выражается формулой

$$C_f = 0{,}074 \big/ \sqrt[5]{\mathrm{Re}}. \qquad (12.37)$$

Формула (12.37), полученная из (12.36) только заменой в ней числового множителя 0,072 на 0,074, дает хорошее совпадение с результатами измерений, что свидетельствует в пользу принятого допущения о совпадении законов турбулентного течения в трубах и в пограничном слое пластинки.

Расчет смешанного пограничного слоя на плоской пластинке. Формула (12.37) справедлива, как уже известно, при условии, что пограничный слой на пластинке полностью турбулентен. Однако в действительности пограничный слой вблизи передней кромки остается ламинарным и становится турбулентным только на некотором расстоянии от передней кромки. Такой слой принято называть *смешанным*. Очевидно, что наличие ламинарного слоя уменьшает сопротивление трения. Для определения сопротивления трения в случае смешанного пограничного слоя предположим, что:

1) переход от ламинарного пограничного слоя к турбулентному происходит мгновенно в точке A, называемой *точкой перехода* (рис. 12.10); x_t — координата точки перехода;

2) изменение толщины турбулентного слоя и распределение скоростей и касательных напряжений в нем аналогичны тем, которые были бы, если бы турбулентный слой начинался не от точки A, а от передней кромки O.

Исходя из этих предположений, расчет силы сопротивления трения можно произвести следующим образом. Обозначим $X''_{тр}$ силу трения

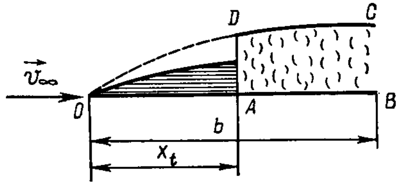


Рис. 12.10 .Схема для расчета смешанного пограничного слоя на плоской пластинке

всей пластинки в предположении, что пограничный слой на всем ее протяжении турбулентный. Тогда, чтобы получить силу трения $X_{тр}$ для смешанного слоя, нужно из $X''_{тр}$ вычесть силу турбулентного трения переднего участка OA, т. е. $X''_{тр OA}$, и прибавить к полученной разности силу трения этого же участка OA, считая его ламинарным, т. е. $X'_{тр OA}$:

$$X_{тр} = X''_{тр} - X''_{тр\,OA} + X'_{тр\,OA}.$$

Сила сопротивления трения переднего участка пластинки при ламинарном пограничном слое $C'_{fл}\,(\rho v_\infty^2/2)2x_t l$, а при турбулентном $C'_{fт}\,(\rho v_\infty^2/2)2x_t l$.

Представим разность сопротивлений $\Delta X_{тр}$ в следующем виде:

$$\Delta X_{тр} = X''_{тр\,OA} - X'_{тр\,OA} = (\rho v_\infty^2/2)(C'_{fт} - C'_{fл})\,2x_t l.$$

Тогда изменение коэффициента сопротивления трения пластинки в зависимости от протяженности ламинарного участка выразится в виде $\Delta C_f = (C'_{fт} - C'_{fл})\bar{x}_t$, где $C'_{fт}$, $C'_{fл}$ — коэффициенты сопротивления трения при полностью турбулентном и ламинарном пограничных слоях, определяемые по числу $\mathrm{Re}_{кр} = v_\infty x_t/\nu$, а $\bar{x}_t = x_t/b$ — относительная координата точки перехода.

Суммарный коэффициент сопротивления трения

$$C_f = C_{fт} - \Delta C_f. \qquad (12.38)$$

Из изложенного следует, что *сопротивление трения пластинки тем меньше, чем больше длина ламинарного участка пограничного слоя*. Следовательно, в случае смешанного пограничного слоя $C_f(\mathrm{Re}, \bar{x}_t)$. На рис. 12.11 приведены кривые зависимости коэффициента $2C_f$ от числа Re и относительной координаты $\bar{x}_t$. Положение точки перехода обычно характеризуется числом $\mathrm{Re}_{кр} = v_\infty x_t/\nu$, называемым *критическим числом Рейнольдса*. Значение $\mathrm{Re}_{кр}$ зависит от ряда факторов, основными из которых являются число Re, степень шероховатости поверхности, продольный градиент давления (т. е. форма тела), число M, температура стенки. Кроме того, $\mathrm{Re}_{кр}$ зависит от степени турбулентности набегающего потока.

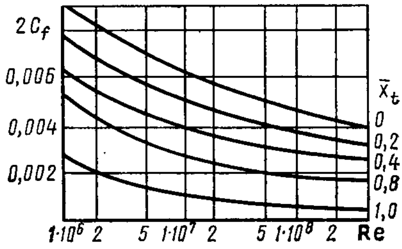


Рис. 12.11. Зависимости коэффициента сопротивления трения $2C_f$ от числа Re и относительной координаты точки перехода при M=0

При определении величины $\mathrm{Re}_{кр}$ в основном используют экспериментальные данные. Очевидно, что при увеличении Re, степени шероховатости поверхности, степени турбулентности набегающего потока точка перехода смещается вперед. При увеличении числа **M** число $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ уменьшается, а охлаждение поверхности способствует стабилизации ламинарного пограничного слоя, т. е. приводит к росту $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$.

При обтекании криволинейной поверхности наличие градиента давления ($dp/dx \neq 0$) приводит к смещению точки перехода по сравнению с пластинкой, а именно: отрицательный градиент давления способствует стабилизации ламинарного пограничного слоя, т. е. смещению точки перехода назад, а положительный градиент давления приводит к смещению точки перехода вперед. На этом основано проектирование ламинаризированных крыловых профилей, которые, обладая увеличенной зоной ламинарного пограничного слоя, дают выигрыш в сопротивлении трения.

§ 12.6 ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ

Для изучения пограничного слоя на плоской пластинке можно пользоваться системой дифференциальных уравнений или интегральным соотношением. В случае плоской пластинки ($dp/dx = 0$) уравнения (12.19)—(12.21) и (12.23) имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}=0;\\ &\rho c_p\left(v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\} \tag{12.39}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x(v_\infty - v_x)\,dy=\tau_0. \tag{12.40}$$

С помощью преобразования координат $\xi=x, \eta=\int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_\infty}\,dy$, введенного А. А. Дородницыным*, уравнения для сжимаемого газа можно представить в виде, сходном с уравнениями для несжимаемого потока.

Интегральное соотношение в переменных ξ и η имеет вид

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^{\eta_\delta}\rho_\infty v_x(v_\infty - v_x)\,d\eta=\tau_0, \tag{12.40'}$$

где η_δ — значение переменной η, соответствующее внешней границе пограничного слоя.

---

* См.: *Дородницын А. А.* Пограничный слой в сжимаемом газе. — Прикладная механика и математика, 1942, № 1.

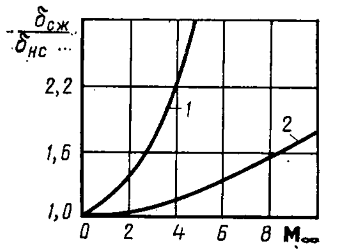


Рис. 12.12. Зависимость толщины пограничного слоя от числа M_∞ в случае ламинарного *1* и турбулентного *2* пограничных слоев

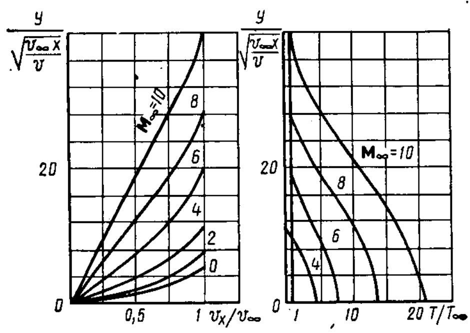


Рис. 12.13. Распределение скорости и температуры по сечению ламинарного пограничного слоя на плоской пластинке при различных значениях числа M_∞, $Pr=1$

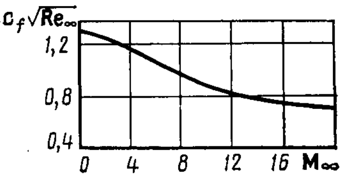


Рис. 12.14. Зависимость произведения $c_f\sqrt{Re_\infty}$ для ламинарного пограничного слоя от числа M_∞

Уравнение (12.40′) по форме совпадает с интегральным соотношением пограничного слоя в несжимаемом потоке (12.23). Поэтому его можно решить методом, рассмотренным в § 12.5.

Дифференциальные уравнения (12.39) в общем случае интегрируются численно. При этом результаты зависят от числа M_∞, числа Pr, закона $\mu(T)$, устанавливающего связь между вязкостью и температурой, и граничных условий для распределения температуры (с подводом теплоты или без нее).

Для характеристики влияния сжимаемости (числа M_∞) приведем основные результаты расчета ламинарного пограничного слоя для теплоизолированной стенки ($T_{ст} = T_r$), $Pr = 1$ и степенного закона вязкости с показателями степени $n = 0{,}76$.

Из расчетов для сжимаемого газа следует, что при увеличении числа M_∞ толщина слоя возрастает (рис. 12.12). Это объясняется повышением температуры газа в пограничном слое, в результате которого увеличивается динамическая вязкость, а плотность уменьшается, т. е. кинематическая вязкость возрастает.

При больших скоростях изменяется и закон распределения скорости по сечению пограничного слоя. На рис. 12.13 приведены профили скорости и температуры для ламинарного пограничного слоя на теплоизолированной пластинке при различных значениях числа M_∞.

На рис. 12.13 по осям координат отложены безразмерные величины: отношение v_x/v_∞ составляющей скорости в пограничном слое к скорости невозмущенного потока, отношение температур T/T_∞. За безразмерную координату вдоль нормали к поверхности принято отношение координаты к линейной величине, пропорциональной толщине ламинарного пограничного слоя в несжимаемом потоке: $y/\sqrt{(\nu_\infty x)/v_\infty}$.

Деформация профиля скоростей при больших значениях M_∞ приводит к уменьшению поперечного градиента скорости $(\partial v_x/\partial y)_{y=0}$. Это вызывает уменьшение напряжения трения. Зависимость произведения $C_f\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}$ от числа M_∞ для плоской пластинки показана на рис. 12.14. При $\mathrm{M}_\infty = 0$ $C_f\sqrt{\mathrm{Re}_\infty} = 1{,}33$. При увеличении M_∞ произведение $C_f\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}$ уменьшается. (Здесь $\mathrm{Re}_\infty = v_\infty b/\nu_\infty$.)

§ 12.7. РАСЧЕТ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МЕТОДОМ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

При больших числах M_∞ температура газа в пограничном слое значительно возрастает, причем распределение температуры по сечению пограничного слоя имеет сложный характер. Повышение температуры в пограничном слое приводит к изменению плотности, вязкости и теплопроводности. В результате этого изменяются распределение скорости по сечению пограничного слоя, его толщина, коэффициенты сопротивления трения и теплоотдачи.

Ввиду того что расчет пограничного слоя при больших скоростях связан со значительными трудностями, при решении практических задач приходится пользоваться приближенными методами. Одним из таких методов является метод определяющей температуры. В этом методе предполагается, что для расчета толщины пограничного слоя и коэффициента сопротивления трения при больших скоростях можно пользоваться формулами, полученными для несжимаемой среды, подставляя в них значения плотности и динамической вязкости, соответствующие некоторой постоянной по сечению пограничного слоя температуре T^*, называемой *определяющей температурой*.

В случае ламинарного пограничного слоя для определяющей температуры можно пользоваться формулой

$$T^* = 0{,}5\,(T_{\text{ст}} + T_\delta) + 0{,}22\,(T_r - T_\delta), \tag{12.41}$$

полученной на основе решения системы уравнений сжимаемого ламинарного пограничного слоя.

В этой формуле первый член представляет собой среднеарифметическую величину между температурой поверхности и температурой газа на границе пограничного слоя, а второй член учитывает повышение температуры газа вследствие кинетического нагрева в среднем по сечению пограничного слоя. Формулу (12.41) можно применить с известным приближением и для турбулентного пограничного слоя.

Используя понятие определяющей температуры, рассмотрим расчет ламинарного и турбулентного пограничного слоев на плоской пластинке при больших скоростях. Для плоской пластинки $T_\delta = T_\infty$, а $T^* = 0{,}5(T_{\text{ст}} + T_\infty) + 0{,}22(T_r - T_\infty)$.

Для нахождения толщины δ воспользуемся формулами (12.26) и (12.33) для ламинарного и турбулентного слоев и заменим в них кинематическую вязкость $\nu = \nu_\infty$ коэффициентом ν^*, соответствующим определяющей температуре. Тогда

$$\delta_л = 4{,}64\ \sqrt{\nu^* x/v_\infty}\,;\ \delta_т = 0{,}37(\nu^*/v_\infty)^{1/5}x^{4/5}.$$

Найдем отношение толщины пограничного слоя в сжимаемом и несжимаемом потоках:

$$\delta_л/\delta_{л\cdot нс} = (\nu^*/\nu_\infty)^{1/2}\,; \tag{12.42}$$

$$\delta_т/\delta_{т\cdot нс} = (\nu^*/\nu_\infty)^{1/5}. \tag{12.43}$$

Здесь $\nu^*/\nu_\infty = (\mu^*/\mu_\infty)\rho_\infty/\rho^*$, где

$$\mu^*/\mu_\infty = (T^*/T_\infty)^n\,;\ \rho^*/\rho_\infty = T_\infty/T^*. \tag{12.44}$$

Подставляя выражение ν^*/ν_∞ в формулы (12.42) и (12.43), получаем

$$\delta_л/\delta_{л\cdot нс} = (T^*/T_\infty)^{(n+1)/2}\,; \quad \delta_т/\delta_{т\cdot нс} = (T^*/T_\infty)^{(n+1)/5}, \tag{12.45}$$

Отсюда следует, что с ростом числа M_∞ (при увеличении T^*) толщина турбулентного пограничного слоя увеличивается значительно медленнее, чем ламинарного (кривая *2* на рис. 12.12).

Найдем напряжение трения $\tau_0 = c_f\rho_\infty v_\infty^2/2$, где местный коэффициент трения c_f для ламинарного и турбулентного слоев в несжимаемом потоке определяется по формулам (12.28) и (12.35) соответственно.

При больших скоростях по методу определяющей температуры найдем:

$$\tau_{0л} = \frac{0{,}65}{\sqrt{\mathrm{Re}_x^*}}\ \frac{\rho^* v_\infty^2}{2}\,;\ \tau_{0т} = \frac{0{,}0578}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x^*}}\ \frac{\rho^* v_\infty^2}{2},$$

где $\mathrm{Re}_x^* = v_\infty x/\nu^*$.

Для местных коэффициентов трения, отнесенных к скоростному напору $\rho_\infty v_\infty^2/2$,

$$c_{fл} = \frac{0{,}65}{\sqrt{\mathrm{Re}_x^*}}\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty}\,;\ c_{fт} = \frac{0{,}0578}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x^*}}\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty}.$$

Отношения коэффициентов c_f для сжимаемого и несжимаемого потоков равны:

$$\frac{c_{fл}}{c_{fл\cdot нс}} = \left(\frac{\mu^*}{\mu_\infty}\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty}\right)^{1/2}\,; \quad \frac{c_{fт}}{c_{f\,т\cdot нс}} = \left(\frac{\mu^*}{\mu_\infty}\right)^{1/5}\left(\frac{\rho^*}{\rho_\infty}\right)^{4/5}$$

Подставляя сюда выражения (12.44), получаем

$$\left.\begin{aligned} c_{fл}/c_{f\,л\cdot нс} &= (T_\infty/T^*)^{(1-n)/2}\,; \\ c_{fт}/c_{f\,т\cdot нс} &= (T_\infty/T^*)^{(4-n)/5}. \end{aligned}\right\} \tag{12.46}$$

Здесь $T^*/T_\infty = 0{,}5(T_{ст}/T_\infty + 1) + 0{,}22(T_r/T_\infty - 1)$.

Представим отношение $T_{ст}/T_\infty = (T_{ст}/T_r)T_r/T_\infty$, где $T_r/T_\infty = 1 + [(k-1)/2]r\mathrm{M}_\infty^2$.
Видно, что отношение температур T^*/T_∞ зависит от M_∞ и $T_{ст}/T_r$ (температурного фактора).

Так как при постоянной по хорде температуре стенки отношение T^*/T_∞ не зависит от координаты x, то полученные для местных коэффициентов трения результаты в этом случае справедливы и для суммарных коэффициентов сопротивления трения.

Тогда, подставляя в формулу (12.46) выражения (12.30) и (12.36) соответственно, получаем:

$$C_{f\text{л}}\sqrt{\mathrm{Re}_\infty} = 1{,}3\,(T_\infty/T^*)^{(1-n)/2}; \tag{12.47}$$

$$C_{f\text{т}}\sqrt[5]{\mathrm{Re}_\infty} = 0{,}072\,(T_\infty/T^*)^{(4-n)/5}, \tag{12.48}$$

где $\mathrm{Re}_\infty = v_\infty b/\nu_\infty$.

Используя формулы (12.47) и (12.48), легко проследить характер зависимости коэффициентов сопротивления трения от M_∞ и $T_{ст}/T_r$, а именно при увеличении M_∞ (повышении T^*) коэффициент C_f уменьшается. С учетом теплообмена с окружающей средой, приводящей к уменьшению температурного фактора, коэффициент трения пластинки увеличивается.

Метод определяющей температуры позволяет произвести расчет пограничного слоя и в диссоциирующем газе. В этом случае определяющая температура находится с помощью таблиц термодинамических функций по значению определяющей энтальпии: $i^* = 0{,}5(i_{ст} + i_\delta) + 0{,}22(i_r - i_\delta)$, где $i_{ст}$ — энтальпия газа у стенки; i_δ — энтальпия газа на внешней границе пограничного слоя; i_r — энтальпия восстановления.

Диссоциация газа приводит при прочих равных условиях к снижению температуры в пограничном слое. Поэтому рассчитанный с учетом диссоциации коэффициент сопротивления трения оказывается больше, чем полученный без такого учета.

Таким образом, в общем случае коэффициент сопротивления трения пластинки зависит от числа Re_∞, относительной координаты точки перехода $\bar{x}_t$, числа M_∞, температурного фактора $T_{ст}/T_r$ и при гиперзвуковых скоростях — от реальных свойств газа.

Полученные результаты для коэффициента сопротивления трения плоской пластинки на практике используются при расчете сопротивления трения тонких крыльев и тел вращения. В таких случаях приближенно применяется метод, основанный на замене рассматриваемого тела эквивалентной пластинкой. Коэффициенты сопротивления трения крыла c_{xp} и удлиненного корпуса (фюзеляжа) $c_{x\,\text{тр.ф}}$ приближенно выражают через коэффициент сопротивления трения плоской пластинки C_f с учетом соответствующей площади смоченной поверхности и характерной площади, к которой приводятся эти коэффициенты: $c_{x\,\text{тр.ф}} = C_f F_\text{ф}/S_\text{ф}$, $c_{xp} = 2C_f\eta_c$, где $F_\text{ф}$ — площадь смоченной поверхности корпуса (фюзеляжа); $S_\text{ф}$ — площадь миделева сечения корпуса (фюзеляжа); $c_{x\text{тр.ф}}$ — коэффициент сопротивления трения корпуса (фюзеляжа); c_{xp} — коэффициент профильного сопротивления; η_c — поправочный множитель, учитывающий влияние толщины профиля, $\eta_c(\bar{c}, \bar{x}_t)$; при увеличении $\bar{c}$ множитель η_c возрастает. Например, для $\bar{x}_t = 0$ при $\bar{c} = 0{,}04$ множитель $\eta_c = 1{,}10$, а при $\bar{c} = 0{,}06$ он равен $\eta_c = 1{,}16$.

Профильное сопротивление крыла представляется суммой сопротивления трения и сопротивления давления. При безотрывном обтекании тонких профилей основное значение в общем сопротивлении имеет сопротивление трения.

§ 12.8. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА КОНУСЕ В ПРОДОЛЬНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

При обтекании тел вращения сверхзвуковым потоком параметры газа на отдельных участках поверхности могут существенно отличаться от параметров невозмущенного потока. Однако и в этом случае можно использовать данные для плоской пластинки. Покажем это на примере конической носовой чаети.

Предположим, что при продольном обтекании конуса сверхзвуковым потоком возникает присоединенный скачок уплотнения. В этом случае все параметры газа, в частности давление, на поверхности конуса, так же как при продольном обтекании пластинки, постоянны; продольный градиент давления вдоль образующей равен нулю.

Сопоставляя решения уравнений ламинарного пограничного слоя на пластинке и конусе при одинаковых значениях параметров потока на границе пограничного слоя, можно показать, что толщины δ, δ^*, δ^{**} на конусе при тех же значениях координаты x, отсчитываемой по пластинке и вдоль образующей конуса ($x = l$), в $\sqrt{3}$ раз меньше, а напряжение трения — соответственно в $\sqrt{3}$ раз больше, чем на пластинке [20].

Тогда для местных коэффициентов трения, отнесенных к скоростному напору, найденному по параметрам на поверхности конуса $q_к = \rho_к v_к^2/2$, можно составить следующее соотношение:

$$c_{f\,\text{кон}} = \sqrt{3}\; c_{f\,\text{пл}}.$$

Получим теперь связь между суммарными коэффициентами сопротивления трения $C_{f\,\text{кон}}$ и $C_{f\,\text{пл}}$, отнесенными соответственно к площадям смоченной поверхноети конуса $F = \pi RL$ и пластинки единичного размаха $F = 2L \cdot 1$. Здесь L — длина образующей конуса.

Коэффициенты $C_{f\,\text{кон}}$ и $C_{f\,\text{пл}}$ определяются из следующих выражений:

$$C_{f\,\text{кон}} \pi RL = \int_0^L \sqrt{3}\, c_{f\,\text{пл}}\, 2\pi r\, dl; \qquad (12.49)$$

$$C_{f\,\text{пл}} 2L = \int_0^L c_{f\,\text{пл}}\, 2dx, \qquad (12.50)$$

где $r = Rl/L$ — радиус произвольного сечения конуса; l — координата точки вдоль образующей конуса.

Подставляя в формулы (12.49) и (12.50) выражения $c_{f\,\text{пл}}$ при ламинарном течении в виде $c_{f\,\text{пл}}\sqrt{l} = C$ и $c_{f\,\text{пл}}\sqrt{x} = C$ (здесь постоянная $C = 0{,}65\sqrt{\nu}/\sqrt{v}$), получаем

$$C_{f\,\text{кон}} = (4\sqrt{3}/3)\,C/L; \quad C_{f\,\text{пл}} = 2C/\sqrt{L}.$$

Отсюда при ламинарном течении

$$C_{f\,\text{кон}} = (2\sqrt{3}/3)C_{f\,\text{пл}},$$

т. е. суммарный коэффициент трения на конусе при прочих равных условиях на $\sim 15\%$ больше, чем на пластинке с той же площадью и длиной, равной длине образующей конуса.

В случае турбулентного пограничного слоя напряжения трения на конусе и пластинке при прочих равных условиях отличаются меньше: $c_{f\,\text{кон}} = 1{,}17c_{f\,\text{пл}}$(см., например, [18]).

Используя выражения (12.49) и (12.50), а также зависимости $c_{f\,\text{пл}}\sqrt[5]{l} = C$ и $c_{f\,\text{пл}}\sqrt[5]{x} = C$, для турбулентного пограничного слоя имеем $C_{f\,\text{кон}} = 1{,}04C_{f\,\text{пл}}$.

Коэффициент сопротивления трения $C_{f\,\text{кон}\infty}$, приведенный к скоростному напору невозмущенного потока, $C_{f\,\text{кон}\infty} = AC_{f\,\text{пл}}(\mathbf{M}_\text{к}, \mathbf{Re}_\text{к})\times \times\rho_\text{к}v_\text{к}^2/(\rho_\infty v_\infty^2)$. Здесь $C_{f\,\text{пл}}(\mathbf{M}_\text{к}, \mathbf{Re}_\text{к})$ — коэффициент сопротивления трения пластинки, рассчитанный по параметрам потока на конусе; $A = 1{,}15$ и $1{,}04$ — коэффициент для ламинарного и турбулентного пограничного слоев соответственно. Тогда

$$\frac{C_{f\,\text{кон}\,\infty}}{C_{f\,\text{пл}\,\infty}} = A\,\frac{C_{f\,\text{пл}}(\mathbf{M}_\text{к}, \mathbf{Re}_\text{к})}{C_{f\,\text{пл}}(\mathbf{M}_\infty, \mathbf{Re}_\infty)}\,\frac{\rho_\text{к}v_\text{к}^2}{\rho_\infty v_\infty^2} = K_\text{кон},$$

где $K_\text{кон}$ — поправочный множитель, учитывающий отличие параметров потока на поверхности конуса от параметров невозмущенного потока.

При больших скоростях сопротивление трения конуса значительно превышает сопротивление пластинки. Это объясняется прежде всего увеличением скоростного напора за коническим скачком уплотнения ($\rho_\text{к}v_\text{к}^2 > \rho_\infty v_\infty^2$). Кроме того, $\mathbf{M}_\text{к} < \mathbf{M}_\infty$. Это также приводит к увеличению коэффициента трения. Множитель $K_\text{кон}$ является функцией угла $\theta_\text{к}$ (удлинения $\lambda_\text{к} = 1/(2\operatorname{tg}\theta_\text{к})$ и числа $\mathbf{M}_\infty$. При увеличении числа $\mathbf{M}_\infty$ и $\theta_\text{к}$ (уменьшении $\lambda_\text{к}$) коэффициент $K_\text{кон}$ возрастает. При $\mathbf{M}_\infty < 2 \div 3$ для конусов с $\lambda_\text{к} > 2$ можно принять $K_\text{кон} \approx 1$.

Для определения коэффициента $c_{x\,\text{тр.кон}}$, отнесенного к площади миделева сечения S, можно воспользоваться следующим выражением: $c_{x\,\text{тр.кон}} = K_\text{кон}C_f F/S$, где C_f — суммарный коэффициент сопротивления трения пластинки; $F/S = 1/\sin\theta_\text{к}$ — площадь боковой поверхности конуса.

Таким образом, введение коэффициента $K_\text{кон}$, учитывающего от-

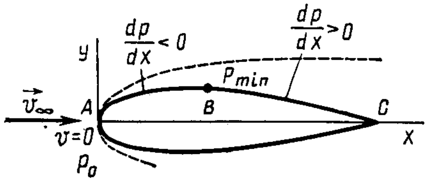


Рис. 12.15. Продольный градиент давления на профиле

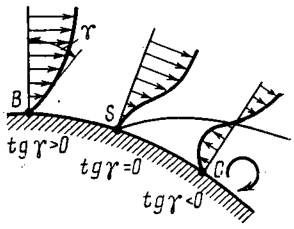


Рис. 12.16. Распределение скорости по нормали к поверхности в различных сечениях пограничного слоя

личие параметров потока на конусе от параметров невозмущенного потока, позволяет рассчитать значение коэффициента сопротивления трения конуса по данным для плоской пластинки.

§ 12.9. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ. ОТРЫВ ПОТОКА

Рассмотрим обтекание криволинейной поверхности, например профиля крыла, дозвуковым потоком (рис. 12.15). При этом на внешней границе пограничного слоя скорость u — величина переменная, зависящая от координаты x. Давление в пограничном слое криволинейной поверхности также функция x. Так как на поверхности профиля скорость сначала возрастает от точки A до точки B, а затем убывает, то давление сначала уменьшается, а затем возрастает. Следовательно, частицы газа в пограничном слое около криволинейной поверхности движутся при наличии градиента давления dp/dx, как отрицательного, так и положительного по знаку. Этот факт существенно отличает пограничный слой около криволинейной поверхности от пограничного слоя вдоль плоской пластинки, где $dp/dx \rightleftharpoons 0$.

Частицы невязкого (идеального) газа преодолевают при своем движении только силы давления — на участке AB под действием отрицательного градиента давления ($dp/dx < 0$) частицы ускоряются, а в кормовой части BC под действием положительного градиента давления $dp/dx > 0$ скорость уменьшается.

В пограничном слое давление мало отличается от давления во внешнем потоке. Однако в непосредственной близости от поверхности тела из-за влияния вязкости скорость, а следовательно, и кинетическая энергия частиц малы (рис. 12.16, сечение B).

В кормовой части тела кинетической энергии частиц вблизи поверхности может оказаться недостаточно для преодоления положительного градиента давления. В этих условиях торможение приводит к остановке частиц, а затем под действием положительного градиента давления в пограничном слое возникает движение частиц, направленное в сторону, обратную основному потоку (рис. 12.16, сечение C).

Столкновение основного потока с противотоком приводит к оттеснению линий тока от поверхности и к отрыву пограничного слоя. При этом масса газа, движущегося в пограничном слое против направления основного потока, образует вихрь. Поэтому отрыв потока сопровождается всегда вихрями, которые периодически сходят с поверхности тела. Причиной отрыва потока являются вязкость и положительный градиент давления.

Точка S, в которой $(\partial v_x/\partial y)_{y=0} = 0$, называется *точкой отрыва потока*. Положение точки отрыва зависит прежде всего от значения положительного градиента давления. Для тел, имеющих малую кривизну поверхности и обтекаемых под малым углом атаки, градиент давления dp/dx мал; практически можно считать, что отрыв потока отсутствует. При увеличении угла атаки градиент dp/dx на верхней поверхности возрастает, что вызывает отрыв потока. Чем больше угол атаки, тем ближе точка отрыва к передней кромке.

Отрыв потока и образование вихрей приводят к существенному изменению распределения давления в кормовой части тела по сравнению с безотрывным обтеканием. При этом распределение давления, рассчитанное для невязкого газа, не совпадает с действительным распределением давления. В кормовой части при обтекании тела с отрывом потока давление оказывается ниже, чем расчетное. Понижение давления в кормовой части приводит к появлению дополнительного сопротивления давления. Это сопротивление называют *вихревым сопротивлением*. Для тонких профилей, крыльев и удлиненных тел вращения при малых углах атаки коэффициент этого сопротивления $c_{x\,\text{а.вихр}}$ мал, а с увеличением угла атаки он возрастает.

Отрыв пограничного слоя зависит также от режима течения газа. В случае турбулентного пограничного слоя отрыв потока затягивается, так как скорость частиц газа вблизи стенки в турбулентном пограничном слое оказывается больше, чем в ламинарном слое. Это наглядно видно из рис. 12.17, на котором приведено сравнение распределения скорости по сечениям ламинарного и турбулентного слоев. Поэтому турбулентный пограничный слой может более успешно противостоять большим градиентам давления. В результате точка отрыва смещается вниз по потоку, вихревая зона за телом сужается. Это приводит к уменьшению вихревого сопротивления. Несмотря на некоторое увеличение сопротивления трения, полное сопротивление при этом часто оказывается меньше, чем в случае ламинарного пограничного слоя. Особенно наглядно это проявляется при обтекании таких тел, как цилиндр, сфера, у которых основным является сопротивление давления. Коэффициент сопротивления таких тел существенно зависит от числа Re. При малых числах Re коэффициент $c_{x\text{а}}$ значительно выше, чем при больших числах Re. Резкое уменьшение коэффициента $c_{x\text{а}}$ происходит одновременно с переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Это объясняется тем, что при больших числах Re вследствие перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный точка отрыва смещается назад, вихревая зона сужается, что приводит к резкому уменьшению коэффициента вихревого сопротивления.

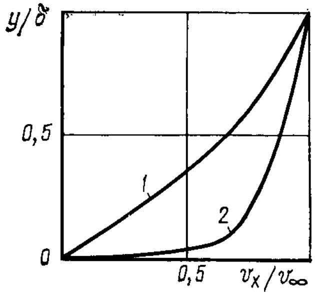


Рис. 12.17. Распределение скорости по сечению ламинарного *1* и турбулентного *2* пограничных слоев

Рис. 12.18. Зависимость коэффициента сопротивления сферы c_{xa} от числа **Re**

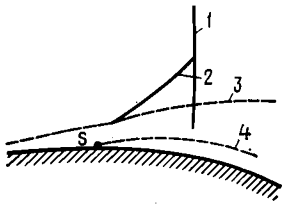


Рис. 12.19. Взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем при $\mathbf{M}_{кр} < \mathbf{M}_\infty < 1$:

1 — основной скачок уплотнения; *2* — дополнительный скачок уплотнения; *3* — граница пограничного слоя; *4* — граница зоны отрыва; *S* — точка отрыва потока

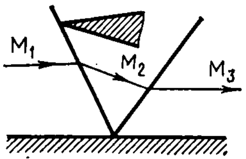


Рис. 12.20. Отражение падающего скачка уплотнения в невязком газе

На рис. 12.18 приведена зависимость коэффициента c_{xa} от числа **Re** для сферы. Явление резкого уменьшения коэффициента сопротивления неудобообтекаемых тел называется *кризисом сопротивления*.

При больших скоростях наблюдается утолщение, а иногда и отрыв пограничного слоя вследствие взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем. Скачок уплотнения при наличии пограничного слоя начинается не у поверхности, а на некотором расстоянии от нее — на границе сверхзвукового участка пограничного слоя. При этом повышенное давление из области за скачком уплотнения по дозвуковому участку пограничного слоя вблизи поверхности распространяется вперед, в область перед скачком уплотнения. Это вызывает утолщение пограничного слоя, а при достаточном положительном перепаде давления может привести и к отрыву потока перед скачком уплотнения. В результате изменяются также форма и интенсивность скачка уплотнения.

Типичным примером такого обтекания является обтекание тел околозвуковым потоком ($\mathbf{M}_{кр} < \mathbf{M}_\infty < 1$). В этом случае повышенное давление за скачком уплотнения, замыкающим местную сверхзвуковую зону, распространяясь вперед через дозвуковую часть пограничного слоя, может вызвать отрыв потока и в соответствии с этим искривление линий тока во внешнм потоке перед скачком уплотнения. В результате перед основным скачком уплотнения, близким к прямому, может возникнуть дополнительный косой скачок, образуя в совокупности λ-образный скачок уплотнения (рис. 12.19).

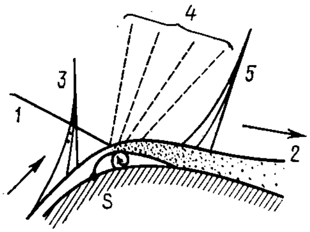


Рис. 12.21. Взаимодействие падающего скачка уплотнения с пограничным слоем:

1 — падающий скачок уплотнения; *2* — граница пограничного слоя; *3* — отраженный скачок уплотнения; *4* — область течения разрежения; *5* — скачки уплотнения; *S* — точка отрыва пограничного слоя

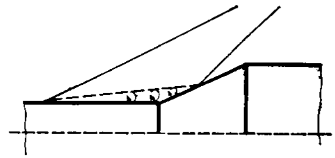


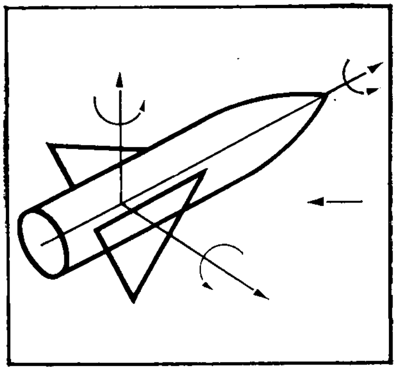
Рис. 12.22. Отрыв пограничного слоя на ступенчатом корпусе при $M_\infty > 1$

Отрыв потока возникает также при наличии падающего скачка уплотнения. Плоский скачок, падающий на твердую поверхность, в невязком газе отражается от нее также в виде плоского скачка уплотнения ($M_1 > M_2 > M_3$) (рис. 12.20). Наличие пограничного слоя существенно осложняет характер обтекания, так как при этом падающий скачок уплотнения при достаточном градиенте давления может вызвать отрыв пограничного слоя. Схематично характер обтекания поверхности с учетом взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем представлен на рис. 12.21.

Отрыв потока вследствие подобного взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем может произойти и при обтекании ступенчатого тела вблизи точки излома образующей (рис. 12.22).

Экспериментальные исследования показывают, что отрыв потока существенно зависит от интенсивности скачка уплотнения и состояния пограничного слоя. Взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем наиболее интенсивно проявляется в случае ламинарного пограничного слоя, который по сравнению с турбулентным слоем слабо сопротивляется тормозящему влиянию положительного градиента давления.

13
ГЛАВА



АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ И СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ПОЛЕТА

§ 13.1 АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МЕЖДУ КРЫЛОМ И КОРПУСОМ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

Выше рассмотрены аэродинамические характеристики изолированных тел — профиля, крыла конечного размаха, тела вращения. Аэродинамические характеристики летательного аппарата в целом нельзя получить простым сложением соответствующих характеристик его частей. Это объясняется тем, что вследствие *интерференции*, т. е. взаимного влияния частей летательного аппарата, их аэродинамические характеристики изменяются.

Интерференция между частями летательного аппарата зависит прежде всего от его аэродинамической компоновки — аэродинамической схемы летательного аппарата, формы и размеров его частей — корпуса (фюзеляжа), крыльев, оперения.

В зависимости от взаимного расположения несущих поверхностей по длине корпуса различают обычную (нормальную) схему с горизонтальным и вертикальным оперением, расположенным позади крыла, схему «утка» (с оперением, расположенным впереди крыла) и схему «бесхвостка».

Типичными примерами аэродинамической интерференции являются взаимодействие крыла и корпуса (оперения и корпуса), крыла и горизонтального оперения, передних и задних несущих поверхностей, консолей Х-образного крыла.

Рассмотрим физический характер взаимного влияния крыла и корпуса.

В линейной постановке задачу об обтекании такой комбинации можно разделить на две более простые задачи:

а) углы атаки крыла и корпуса одинаковы и равны α. Обозначим этот случай $\alpha\alpha$;

б) угол атаки корпуса (фюзеляжа) $\alpha_{\text{ф}} = 0$, а угол атаки крыла $\alpha_{\text{кр}} = \delta$. Этот случай обозначим $\delta 0$.

Предположим, что корпус летательного аппарата представляет собой цилиндрическое тело с большим удлинением с заостренной носовой частью. Примем, что консоли на нем расположены по схеме среднеплана (рис. 13.1 *а*, *б*), а углы атаки крыла и корпуса равны меж-

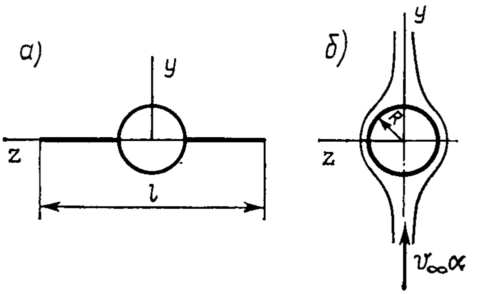


Рис. 13.1. Схема взаимного влияния крыла и корпуса

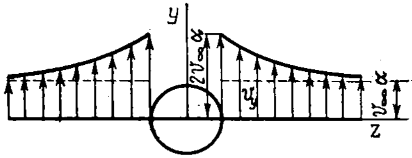


Рис. 13.2. Изменение вертикальной составляющей скорости, вызываемой влиянием корпуса, вдоль размаха крыла

ду собой (случай $\alpha\alpha$). Определим влияние корпуса на обтекание консолей.

Поле скоростей в окрестности такого цилиндра при малом угле атаки можно получить в результате наложения полей скоростей, возникающих при его продольном обтекании со скоростью $v_\infty \cos\alpha \approx \approx v_\infty$ и поперечном обтекании со скоростью $v_\infty \sin\alpha = v_\infty\alpha$.

Учитывая, что при малых углах атаки поперечный поток является дозвуковым, для приближенного определения поля скоростей от поперечного потока воспользуемся теорией потенциального обтекания бесконечного цилиндра несжимаемым потоком.

Комплексный потенциал потока в окрестности цилиндра радиусом R определяется по формуле (7.25): $w(\zeta) = v_\infty\alpha(\zeta + R^2/\zeta)$, где $\zeta = y + iz$ — комплексная координата точки в плоскости yz. Тогда $dw/d\zeta = v_y - iv_z = v_\infty\alpha(1 - R^2/\zeta^2)$. Отсюда следует, что на оси $z(\zeta = iz)$, вдоль которой расположено крыло, $v_z = 0$, а

$$v_y = v_\infty\alpha\,(1 + R^2/z^2). \tag{13.1}$$

Используя формулу (13.1), получаем, что вследствие влияния корпуса появляется дополнительная составляющая скорости $v'_y = = v_y - v_\infty\alpha = v_\infty\alpha R^2/z^2$ или

$$v'_y = v_\infty\alpha\bar{D}^2/\bar{z}^2, \tag{13.2}$$

где $\bar{z} = 2z/l$, $\bar{D} = D/l$, $D = 2R$.

Эта составляющая скорости у борта корпуса ($\bar{z} = \bar{D}$) равна $v_\infty\alpha$ и уменьшается при удалении от него (рис. 13.2). При этом суммарный вектор скорости отклоняется вверх, т. е. возникает отрицательный скос потока:

$$\varepsilon_ф = -v'_y/v_\infty = -\alpha\bar{D}^2/\bar{z}^2. \tag{13.3}$$

Скос потока, вызываемый корпусом, приводит к увеличению местных углов атаки сечений консолей крыла:

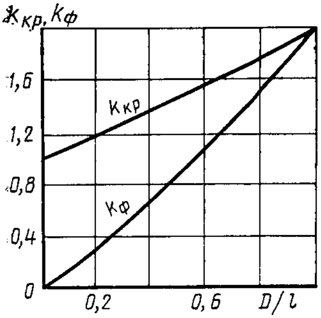


Рис. 13.3. Зависимости коэффициентов интерференции для комбинации «корпус-крыло» от относительного диаметра корпуса

$$\alpha^* = \alpha - \varepsilon_ф = \alpha\left(1 + \bar{D}^2/\bar{z}^2\right). \qquad (13.4)$$

Вследствие этого нормальная сила консолей крыла в присутствии корпуса больше нормальной силы аналогичных изолированных крыльев, размеры которых совпадают с размерами консолей. Увеличение нормальной силы благодаря интерференции наблюдается как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях. Представим нормальную силу консолей в виде $Y_к = Y_{из.кр} + Y_{кр.ф}$, где $Y_{из.кр}$ — нормальная сила изолированного крыла; $Y_{кр.ф}$ — дополнительная нормальная сила, вызываемая влиянием корпуса (фюзеляжа).

Под изолированным крылом следует понимать крыло, составленное из двух консолей, соединенных вместе. Полную нормальную силу, действующую на консоли, удобно выразить в долях нормальной силы соответствующего изолированного крыла. Для этого введем безразмерный коэффициент интерференции $k_{кр} = Y_к/Y_{из.кр}$, характеризующий изменение нормальной силы консолей вследствие влияния корпуса.

В соответствии с формулой (13.4) коэффициент $k_{кр}$ прежде всего зависит от отношения диаметра корпуса к размаху крыла. Если $D = 0$, то $k_{кр} = 1$. При $\bar{D} \to 1$ несущие консоли становятся малыми. Однако при этом угол атаки α^* возрастает. Ввиду того что вдоль бортовой хорды ($\bar{z} = \bar{D}$) местный угол атаки возрастает вдвое ($\alpha^* = 2\alpha$), при $\bar{D} \to 1$ нормальная сила консолей вдвое превышает нормальную силу изолированных крыльев, т. е. $k_{кр} = 2$.

Консоли, в свою очередь, оказывают влияние на обтекание корпуса, так как повышенное давление на нижней поверхности и разрежение на верхней поверхности крыла распространяются на корпус. В результате за счет влияния консолей на корпусе индуцируется дополнительная нормальная сила. Обозначим ее $Y_{ф.кр}$. Тогда суммарная нормальная сила корпуса $Y_ф = Y_{из.ф} + Y_{ф.кр}$. Для характеристики величины нормальной силы, индуцируемой крылом на корпусе, введем коэффициент интерференции $k_ф = Y_{ф.кр}/Y_{из.кр}$, также зависящий от параметра $\bar{D}$. При $D = 0$ (корпус отсутствует) $k_ф = 0$. При $\bar{D} \to 1$ коэффициент $k_ф \to 2$. Отсюда следует, что параметр D/l существенно влияет на коэффициенты интерференции $k_{кр}$, $k_ф$ и является основным критерием при оценке влияния интерференции между крылом и корпусом. Зависимости коэффициентов $k_{кр}$ и $k_ф$ от отношения D/l приведены на рис. 13.3.

Таким образом, интерференция крыла и корпуса приводит к увеличению нормальной силы как крыла, так и корпуса. При этом полная нормальная сила комбинации крыла и корпуса

$$Y_{к.ф} = Y_{из.кр} + Y_{кр.ф} + Y_{из.ф} + Y_{ф.кр}. \qquad (13.5)$$

Для расчетов суммарной нормальной силы комбинации «корпус-крыло» удобно ввести безразмерный коэффициент интерференции $K_{\alpha\alpha}$ [19]:

$$K_{\alpha\alpha} = Y_{\text{кр}}/Y_{\text{из. кр}}, \tag{13.6}$$

где индекс $\alpha\alpha$ указывает на то, что углы атаки крыла и корпуса одинаковы (угол установки крыла на корпусе равен нулю), а $Y_{\text{кр}} = Y_{\text{из.кр}} + Y_{\text{кр.ф}} + Y_{\text{ф.кр}}$.

Коэффициент $K_{\alpha\alpha}$ характеризует суммарное изменение нормальной силы вследствие интерференции крыла и корпуса. Очевидно, $K_{\alpha\alpha} = k_{\text{кр}} + k_{\text{ф}}$. При $\bar{D} = 0$ коэффициент $K_{\alpha\alpha} = 1$ с увеличением параметра $\bar{D}$ коэффициент интерференции возрастает.

§ 13.2. КОЭФФИЦИЕНТ НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ И КООРДИНАТА ФОКУСА КОМБИНАЦИИ «КОРПУС-КРЫЛО»

Используя коэффициент интерференции $K_{\alpha\alpha}$, формулу (13.5) представим в виде

$$Y_{\text{к.ф}} = Y_{\text{из.ф}} + K_{\alpha\alpha} Y_{\text{из. кр}}. \tag{13.7}$$

Выразим нормальные силы $Y_{\text{к.ф}}$, $Y_{\text{из.ф}}$, $Y_{\text{из.кр}}$ через соответствующие коэффициенты $c_{y\text{к.ф}}$, $c_{y\text{ф}}$, $c_{y\text{из.кр}}$:

$$Y_{\text{к.ф}} = c_{y\,\text{к.ф}}\, \rho_\infty v_\infty^2 S/2, \quad Y_{\text{из.ф}} = c_{y\text{ф}} \rho_\infty v_\infty^2 S_{\text{ф}}/2,$$

$$Y_{\text{из.кр}} = c_{y\,\text{из. кр}}\, \rho_\infty v_\infty^2 S_{\text{к}}/2,$$

где $S_{\text{ф}}$, $S_{\text{к}}$ — площадь миделя корпуса и консолей крыла соответственно; S — полная площадь крыла, включающая в себя часть крыла, которая занята корпусом (площадь крыла с подфюзеляжной частью).

Подставляя эти выражения в формулу (13.7), получаем

$$c_{y\,\text{к.ф}} = c_{y\text{ф}} S_{\text{ф}}/S + K_{\alpha\alpha}\, c_{y\,\text{из. кр}}\, S_{\text{к}}/S.$$

При малых углах атаки (на линейном участке зависимости c_y от α) имеем: $c_{y\text{к.ф}} = c_{y\text{к.ф}}^{\alpha}\, \alpha$;

$$c_{y\,\text{к.ф}}^{\alpha} = c_{y\text{ф}}^{\alpha}\, \bar{S}_{\text{ф}} + K_{\alpha\alpha}\, c_{y\,\text{из. кр}}^{\alpha} \bar{S}_{\text{к}}, \tag{13.8}$$

где $\bar{S}_{\text{ф}} = S_{\text{ф}}/S$, $\bar{S}_{\text{к}} = S_{\text{к}}/S$.

В реальной компоновке летательного аппарата при определении коэффициентов интерференции кроме параметра $\bar{D}$ необходимо учитывать влияние ряда других факторов. Для последовательного учета влияния этих факторов введем поправочные множители $\varkappa$, представляющие собой отношение коэффициентов интерференции $k_{\text{ф}}$, $k_{\text{кр}}$, $K_{\alpha\alpha}$, полученных с учетом того или иного фактора, к соответствующим теоретическим коэффициентам интерференции.

Прежде всего необходимо учесть влияние сужения консолей. Из физических соображений ясно, что при увеличении сужения консолей коэффициенты интерференции должны возрастать. Действительно, если сужение увеличивается, то бо́льшая часть площади консолей располагается ближе к корпусу, т. е. в зоне повышенных углов атаки (см. рис. 13.2), что приводит к относительному увеличению нормальной силы консолей, а следовательно, и индуцированной нормальной силы корпуса (множителя $\varkappa_\eta$).

На коэффициенты интерференции влияет также пограничный слой, возникающий при обтекании корпуса. Наличие пограничного слоя приближенно можно учесть заменой действительного корпуса фиктивным корпусом с диаметром $D' = D + 2\delta^*$. Здесь δ^* — толщина вытеснения. При этом, с одной стороны, увеличивается диаметр корпуса, а с другой — уменьшается площадь консолей, находящаяся во внешнем потоке. Первое вызывает увеличение нормальной силы, а второе — снижает ее. Суммарное изменение нормальной силы, вызываемое влиянием пограничного слоя, можно учесть путем введения поправочного множителя $\varkappa_{\text{п.с}} = (K'_{\alpha\alpha}/K_{\alpha\alpha})S'_{\text{к}}/S_{\text{к}}$, где штрихом обозначены величины, соответствующие фиктивному диаметру корпуса D'.

Исследования показывают, что $\varkappa_{\text{п.с}} < 1$, т. е. уменьшение несущей площади консолей влияет на нормальную силу сильнее, чем увеличение диаметра корпуса. На величину $\varkappa_{\text{п.с}}$ влияет ряд параметров: относительная длина передней части корпуса $\overline{L}_1 = L_1/D$ (здесь L_1 — длина от носка корпуса до середины бортовой хорды консолей), сужение консолей , отношение D/l, а также число M. Оценим качественно влияние этих параметров. Очевидно, что при увеличении $\overline{L}_1$ и числа M_∞ толщина вытеснения δ^* возрастает. При этом доля несущей площади консолей уменьшается. Аналогичное влияние оказывает увеличение параметра $\overline{D}$, а также сужения консолей. Таким образом, при увеличении параметров $\overline{L}_1$, $\overline{D}_1$, $\eta_{\text{к}}$, M_∞ величина $\varkappa_{\text{п.с}}$ уменьшается.

При определении коэффициентов интерференции необходимо учитывать также влияние числа M_∞. Экспериментальные исследования показывают, что при дозвуковых и околозвуковых скоростях ($\mathrm{M}_\infty < 1{,}5$) поправочный множитель $\varkappa_{\text{м}}$ можно принять равным единице, а при сверхзвуковых скоростях ($\mathrm{M}_\infty > 1{,}5$) $\varkappa_{\text{м}} < 1$. При этом с увеличением числа M_∞ множитель $\varkappa_{\text{м}}$ уменьшается.

Теоретические зависимости для коэффициентов интерференции получены в предположении, что крыло установлено на тонком цилиндрическом корпусе бесконечной длины. В реальных условиях при определении коэффициентов интерференции необходимо учитывать влияние длины как передней, так и хвостовой частей корпуса.

Экспериментальные исследования показывают, что при уменьшении относительной длины $\overline{L}_1$ коэффициенты интерференции снижаются, т. е. поправочный множитель, учитывающий длину передней части корпуса, $\varkappa_{\text{нос}} < 1$. Чем меньше $\overline{L}_1$, тем меньше $\varkappa_{\text{нос}}$. При $\overline{L}_1 > 8 \div 10$ можно принять $\varkappa_{\text{нос}} \approx 1$.

Рассмотрим влияние хвостовой части корпуса. В теории тонкого тела предполагается, что зона влияния консолей расположена непосредственно между консолями и ограничена сечениями AA и BB (рис. 13.4). Это предположение приближенно можно принять только при дозвуковых и околозвуковых скоростях. В сверхзвуковом потоке волны давления с нижней поверхности и разрежения с верхней поверхности крыла распространяются вокруг корпуса по винтовым линиям, которые пересекают образующие цилиндра под углом возмущения $\mu = \arcsin (1/\mathbf{M}_\infty)$. Каждая консоль при этом влияет в области, ограниченной винтовыми линиями, исходящими из начала и конца бортовой хорды (рис. 13.4, *а*). На рис. 13.4, *б*, *в* упрощенно эта область показана как часть плоской поверхности, ограниченная линиями возмущения.

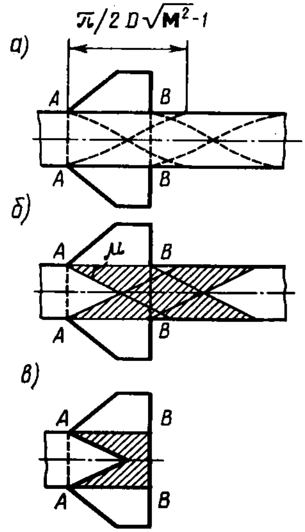


Рис. 13.4. Области влияния консолей на корпус

Если длина хвостовой части корпуса (от конца бортовой хорды до донного среза корпуса) достаточно большая $\left(L_{хв} > (\pi D/2) \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}\right)$, то индуцируемая крылом на корпусе нормальная сила реализуется полностью. Для короткой хвостовой части $\left(L_{хв} < (\pi D/2) \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}\right)$ или в случае $L_{хв} = 0$ (рис. 13.4, *в*) коэффициенты интерференции $k_ф$ и $K_{\alpha\alpha}$ уменьшаются. При этом коэффициенты интерференции зависят не только от длины хвостовой части ($\bar{L}_{хв}$), но и от числа $\mathbf{M}_\infty$, сужения консолей и параметра $\bar{D}$. Ввиду того что при увеличении числа $\mathbf{M}_\infty$, сужения консолей и диаметра корпуса (параметра $\bar{D}$) протяженность зоны влияния консолей на корпус возрастает, для данной длины хвостовой части корпуса это приводит к уменьшению коэффициентов интерференции.

Следует иметь в виду, что влияние консолей распространяется по потоку на всю длину корпуса. При этом распределение индуцированной силы по длине имеет периодический характер: непосредственно за консолями на первом «полушаге» винтовой линии эта сила положительна, а на следующем полушаге, т. е. за отраженными от корпуса волнами, она отрицательна. Однако, ввиду того что по мере удаления от крыла индуцированная сила быстро убывает, особенно из-за влияния пограничного слоя, обычно ограничиваются рассмотрением индуцированной силы на первом полушаге.

Таким образом, с учетом влияния указанных факторов коэффициенты интерференции можно представить в следующем виде:

$$k_{кр} = k_{кр.теор} \varkappa_\eta \varkappa_{п.с} \varkappa_{м} \varkappa_{нос}; \tag{13.9}$$

$$k_ф = k_{ф.теор} \varkappa_\eta \varkappa_{п.с} \varkappa_{м} \varkappa_{нос} F; \tag{13.10}$$

$$K_{\alpha\alpha} = (k_{\text{кр.теор}} + k_{\text{ф.теор}} F)\, \varkappa_\eta\, \varkappa_{\text{п.с}} \varkappa_{\text{м}} \varkappa_{\text{нос}}. \tag{13.11}$$

Здесь множитель F учитывает влияние длины хвостовой части корпуса.

В формулах (13.10) и (13.11) при $M_\infty < 1$ для любой длины хвостовой части корпуса, а также при $M_\infty > 1$ для корпуса с достаточной длинной хвостовой частью$\left(\bar{L}_{\text{хв}} > (\pi/2)\sqrt{M_\infty^2 - 1}\right)$множитель F следует принимать равным единице.

Расчетные формулы и вспомогательные графики для определения параметров $\varkappa_\eta$, $\varkappa_{\text{п.с}}$, $\varkappa_{\text{м}}$, $\varkappa_{\text{нос}}$, F приведены в [18, 19].

Появляющиеся вследствие интерференции крыла и корпуса дополнительные нормальные силы приводят также к смещению аэродинамического фокуса. Смещение фокуса можно определить следующим образом. Коэффициент нормальной силы крыла, обусловленной углом атаки $K_{\alpha\alpha} c^\alpha_{y\,\text{из.кр}}\, \alpha$, представим в виде суммы:

$$K_{\alpha\alpha} c^\alpha_{y\,\text{из. кр}}\, \alpha = c^\alpha_{y\,\text{из.кр}} \alpha + (k_{\text{кр}} - 1)\, c^\alpha_{y\,\text{из.кр}}\, \alpha + (K_{\alpha\alpha} - k_{\text{кр}})\, c^\alpha_{y\,\text{из.кр}}\, \alpha,$$

где второй и третий члены являются соответственно коэффициентами дополнительной нормальной силы консолей $Y_{\text{кр.ф}}$, вызванной влиянием корпуса, и нормальной силы $Y_{\text{ф.кр}}$, индуцированной консолями на корпусе.

Координату фокуса крыла с учетом интерференции между ним и корпусом можно определить, приравнивая момент равнодействующей нормальной силы сумме моментов ее составляющих:

$$x_F = (1/K_{\alpha\alpha}) \left[x_{F\,\text{из. кр}} + (k_{\text{кр}} - 1) x_{F\Delta} + (K_{\alpha\alpha} - k_{\text{кр}}) x_{F\text{ф}i} \right], \tag{13.12}$$

где $x_{F\,\text{из.кр}}$ — координата фокуса изолированного крыла (см. гл. 7—9); $x_{F\Delta}$, $x_{F\text{ф}i}$ — координаты точек приложения дополнительных нормальных сил $Y_{\text{кр.ф}}$, $Y_{\text{ф.кр}}$, возникающих вследствие интерференции.

Точка приложения силы $Y_{\text{кр.ф}}$ по сравнению с изолированным крылом расположена ближе к корпусу, что непосредственно следует из рис. 13.2. Расстояние по размаху между этой точкой и фокусом изолированного крыла, очевидно, зависит от параметра $\bar{D}$. При $\bar{D} = 0$ оно равно нулю, при увеличении $\bar{D}$ — возрастает. Однако при больших значениях $\bar{D}$ ($\bar{D} > 0{,}2 \div 0{,}3$) дальнейшее увеличение параметра $\bar{D}$ приводит к уменьшению этого расстояния, так как при больших значениях $\bar{D}$ распределение дополнительной нагрузки по размаху становится более равномерным. Смещение точки приложения силы $Y_{\text{кр.ф}}$ по хорде зависит также от формы крыла в плане. Исследования показывают, что максимальное расстояние между указанными точками в долях полуразмаха консолей составляет $\sim 3\%$ [19].

Координата точки приложения нормальной силы $Y_{\text{ф.кр}}$, индуцированной консолями на корпусе $x_{F\text{ф}i}$, зависит прежде всего от длины хвостовой части (длины участка корпуса за крылом) и числа M_∞. При увеличении $L_{\text{хв}}$ и M_∞ фокус смещается назад, так как при этом протяженность зоны влияния консолей увеличивается.

§ 13.3. КОЭФФИЦИЕНТ ТОРМОЖЕНИЯ ПОТОКА

Формула (13.8) для комбинации «корпус-крыло» выведена в предположении, что скоростной напор перед крылом равен скоростному напору невозмущенного потока ($q = q_\infty$). В действительности при обтекании носовой части корпуса происходит торможение потока. Для того чтобы учесть влияние торможения на аэродинамические характеристики комбинации «корпус-крыло», введем коэффициент торможения $k_т = q/q_\infty$, где q — среднее значение скоростного напора перед крылом. Учитывая, что $q = \rho v^2/2 = (k/2)p\mathbf{M}^2$ и $q_\infty = (k/2)p_\infty \mathbf{M}_\infty^2$[см. формулу (3.69)], получим $k_т = p\mathbf{M}^2/(p_\infty \mathbf{M}_\infty^2)$.

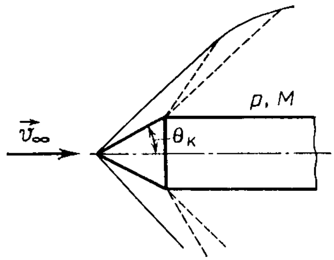


Рис. 13.5. Схема для определения коэффициента торможения носовой частью корпуса

При дозвуковых скоростях и малых углах атаки коэффициент торможения близок к единице. Однако в сверхзвуковом потоке коэффициент $k_т$ может существенно уменьшаться ($k_т < 1$). Это объясняется потерями полного давления в скачках уплотнения.

Получим формулы для определения коэффициента торможения для корпуса с конической носовой частью (рис. 13.5) при $\mathbf{M}_\infty > 1$. Предположим, что при этом возникает присоединенный скачок уплотнения. Давление за скачком уплотнения возрастает, а при переходе от конического к цилиндрическому участку корпуса происходит течение разрежения. При этом давление уменьшается и на достаточно большом расстоянии от начала цилиндрической части тела (более двух диаметров) приближенно можно принять, что $p = p_\infty$. Тогда коэффициент $k_т$ можно представить в виде

$$k_т = \mathbf{M}^2/\mathbf{M}_\infty^2. \tag{13.13}$$

Воспользуемся формулой для изэнтропических течений применительно к потокам до скачка уплотнения и за ним: $p_{01}/p_\infty = (1 + 0{,}2\mathbf{M}_\infty^2)^{3,5}$, $p_{02}/p = (1 + 0{,}2\mathbf{M}^2)^{3,5}$. Здесь p_{02} — давление торможения за скачком уплотнения, а p_{01} — давление изэнтропического торможения; $\mathbf{M}$ и p — значения числа $\mathbf{M}$ и давления на цилиндрическом участке корпуса.

Далее, полагая $p = p_\infty$ и введя коэффициент восстановления полного давления $\sigma = p_{02}/p_{01}$, имеем $\sigma = [(1 + 0{,}2\mathbf{M}^2)/(1 + 0{,}2\mathbf{M}_\infty^2)]^{3,5}$. Отсюда

$$\mathbf{M}^2 = 5\left[(1 + 0{,}2\mathbf{M}_\infty^2)\,\sigma^{0,286} - 1\right]. \tag{13.13'}$$

В формуле (13.13′) коэффициент σ зависит от произведения $\mathbf{M}_\infty \sin\beta$. Угол полураствора конического скачка уплотнения β, в свою очередь, зависит от $\mathbf{M}_\infty$ и угла полураствора конуса (удлинения носовой части) (см. § 10.1). Используя формулы (13.13) и (13.13′), получаем, что коэффициент торможения потока $k_т$ также является функцией числа M_∞ и $\lambda_{нос}$.

Определим качественно влияние этих параметров. Очевидно, что при увеличении $\lambda_{нос}$ (уменьшении угла $\theta_к$) интенсивность скачка уплотнения уменьшается, а коэффициент σ возрастает. При этом коэффициент $k_т$ также возрастает. При увеличении числа M_∞ интенсивность скачка возрастает, коэффициент σ уменьшается. При этом уменьшается также коэффициент торможения.

Если форма носовой части корпуса отличается от конической, то коэффициент торможения приближенно определяют по той же формуле (13.13), а число M — по формуле (13.13′), заменяя в ней носовую часть эквивалентным конусом, удлинение которого определяется из условия, что у заданной формы носовой части и конуса при данном числе M коэффициенты волнового сопротивления $c_{x\,нос}$ одинаковы.

§ 13.4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МЕЖДУ КРЫЛОМ И ОПЕРЕНИЕМ. СКОС ПОТОКА В ОБЛАСТИ ОПЕРЕНИЯ

При определении аэродинамических характеристик комбинации «корпус-крыло-оперение» необходимо учитывать не только интерференцию между корпусом и крылом, корпусом и оперением, но и влияние крыла на оперение. Наличие крыла вызывает скос потока в области консолей оперения. Это приводит к уменьшению угла атаки, а следовательно, и подъемной силы оперения.

Угол скоса потока ε за крылом определяется по вертикальной составляющей скорости, индуцируемой вихревой системой крыла: $\varepsilon = v_y/v_\infty$. Ввиду того что вихревая пелена неустойчива и на некотором расстоянии от задней кромки крыла сворачивается в два вихревых жгута, для приближенной оценки скоса потока в области оперения используется упрощенная модель вихревой системы в виде П-образного вихря с постоянной интенсивностью, равной циркуляции скорости в корневом сечении (рис. 13.6). Для определения положения свободных вихрей (расстояния между ними $l_в$) используем формулу Жуковского, согласно которой подъемную силу крыла можно представить в следующем виде:

$$Y_а = \rho_\infty v_\infty \int_{l/2}^{l/2} \Gamma(z)\,dz = \rho_\infty v_\infty l \int_0^1 \Gamma(\bar{z})\,d\bar{z}. \tag{13.14}$$

Кроме того, при замене вихревой системы одним П-образным вихрем имеем

$$Y_а = \rho_\infty v_\infty \Gamma_0 l_в. \tag{13.15}$$

Приравнивая правые части (13.14) и (13.15), получаем

$$\bar{l}_в = \frac{l_в}{l} = \int_0^1 \frac{\Gamma(\bar{z})}{\Gamma_0}\,d\bar{z}. \tag{13.16}$$

Из формулы (13.16) следует, что относительная координата вихря $\bar{z}_в$ зависит от закона изменения циркуляции по размаху крыла $\Gamma(\bar{z})$, что, в свою очередь, зависит от формы крыла в плане (удлинения, угла стреловидности, сужения) и числа **M**. Например, для эллиптического закона распределения циркуляции $\Gamma(z)/\Gamma_0 = \sqrt{1-\bar{z}^2}$ по формуле (13.16) $\bar{z}_в = \pi/4 = 0{,}785$.

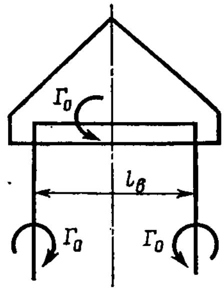


Рис. 13.6. Упрощенная вихревая модель крыла

Аналогично можно ввести упрощенную вихревую модель комбинации «корпус-крыло». В этом случае необходимо рассмотреть две пары П-образных вихрей с постоянной интенсивностью, равной циркуляции скорости в бортовом сечении крыла (рис. 13.7). Каждая консоль заменяется присоединенным и одним свободным вихрем, сбегающим с задней кромки. Наличие корпуса круглого сечения учитывается путем введения сопряженных вихрей, проходящих внутри корпуса. Для того чтобы удовлетворить граничные условия на корпусе (равенство нулю нормальной составляющей скорости), сопряженный свободный вихрь располагается на расстоянии R^2/z от оси корпуса. При этом нормальная составляющая скорости, индуцируемой на корпусе под действием внешних и сопряженных вихрей, равна нулю.

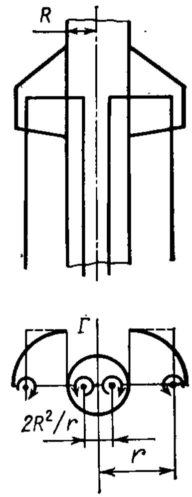


Рис. 13.7. Упрощенная вихревая модель комбинации «корпус-крыло»

Введение упрощенной вихревой системы позволяет свести задачу определения скоса потока за крылом к расчету скорости, индуцированной П-образными вихрями. Рассмотрим скос потока от одного П-образного вихря в точке A, расположенной на оси x (рис. 13.8), в несжимаемом потоке.

Используя формулу Био — Савара (2.35), скорости скоса потока от присоединенного v_{y1} и свободного вихрей v_{y2} можно представить в следующем виде:

$$v_{y1} = [\Gamma_0/(\pi l_в)] \Big/ \left(\bar{x}\sqrt{1+\bar{x}^2}\right); \qquad (13.17)$$

$$v_{y2} = [\Gamma_0/(\pi l_в)] \left[1 + \bar{x} \Big/ \left(\sqrt{1+\bar{x}^2}\right)\right], \qquad (13.18)$$

где $\bar{x} = 2x/l_в$.

Суммарная скорость скоса потока $v_y = v_{y1} + v_{y2}$, а угол скоса потока $\varepsilon = v_y/v_\infty$. Тогда, подставляя сюда выражения (13.17) и (13.18), получаем

$$\varepsilon = [\Gamma_0/(\pi l_в v_\infty)] \left[1 + \sqrt{1 + 1/\bar{x}^2}\right]; \qquad (13.19)$$

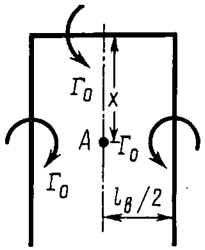


Рис. 13.8. Схема для определения скоса потока, вызываемого П-образным вихрем в несжимаемом потоке

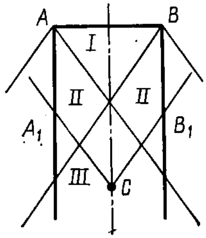


Рис. 13.9. Области влияния П-образного вихря в сверхзвуковом потоке

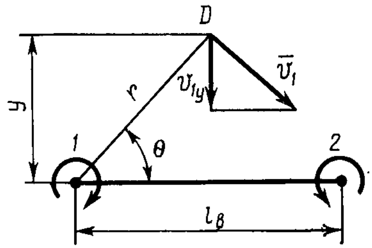


Рис. 13.10. Схема для определения угла скоса потока в точках, расположенных выше плоскости крыла

при $x \to \infty$

$$\varepsilon = 2\Gamma_0/(\pi l_в v_\infty). \tag{13.20}$$

Из формулы (13.19) следует, что скос потока слабо зависит от x и при достаточном удалении от крыла угол ε мало отличается от угла скоса потока на бесконечности. Это объясняется тем, что влияние присоединенных вихрей при удалении от крыла становится пренебрежимо малым, а свободные вихри при достаточном удалении от крыла приближенно можно считать двумерными. Например, для $2x/l_в \gg 2$ угол ε отличается от значения при $x \to \infty$ менее чем на 6%. При эллиптическом законе распределения циркуляции, когда $l_в = 0{,}785$, это наблюдается при $x > 1{,}57\ l/2$. Здесь l — размах крыла.

В сверхзвуковом потоке величина угла скоса потока зависит от того, в какой области расположена рассматриваемая точка (рис. 13.9). Зона влияния левого свободного вихря ограничена конусом Маха, проведенным из точки A, а правого вихря — конусом Маха с вершиной в точке B. Тогда можно выделить три области влияния П-образного вихря. В области I влияния свободных вихрей не наблюдается. В областях II влияет только один из свободных вихрей, а в области III скос потока определяется влиянием присоединенного и обоих свободных вихрей.

Рассмотрим скос потока в точке C, расположенной на оси в области III. На эту точку влияют присоединенный вихрь и отрезки AA_1, BB_1 свободных вихрей $\left(x_1 = 0,\ x_2 = x - (l_в/2)\sqrt{M_\infty^2 - 1}\right)$, попадающие внутрь конуса влияния с вершиной в точке C. Используя формулу для П-образного вихря в сверхзвуковом потоке [29], получаем

$$\varepsilon = [2\Gamma_0/(\pi l_в v_\infty)]\sqrt{1 - (M_\infty^2 - 1)/\bar{x}^2}. \tag{13.21}$$

Здесь $\bar{x} = 2x/l_в$. При $x \to \infty$

$$\varepsilon = 2\Gamma_0/(\pi l_в v_\infty). \tag{13.22}$$

Отсюда следует, что угол скоса потока при $M_\infty > 1$ для $x \to \infty$ совпадает с углом ε в несжимаемом потоке (13.20). Таким образом, на большом расстоянии вниз по потоку сверхзвуковой П-образный вихрь образует поле вертикальных скосов, подобное полю, создаваемому бесконечными вихрями в несжимаемом потоке.

Расчеты по формуле (13.21) показывают, что при $\bar{x}/\sqrt{M_\infty^2 - 1} > 2{,}5$ угол ε отличается от предельного значения (13.22) не более чем на 8%.

Угол скоса потока ε зависит также от координат y, z в поперечном сечении.

Для того чтобы определить влияние координаты y, рассмотрим скос потока в точке D, расположенной выше плоскости крыла (рис. 13.10). По формуле Био—Савара (2.37) скорость, индуцированная в этой точке одним бесконечным вихрем, $v_1 = \Gamma_0/2\pi r$, где $r = \sqrt{y^2 + (l_в/2)^2}$. Тогда скорость скоса потока, вызываемая двумя вихрями, $v_y = (2\Gamma_0/2\pi r)\cos\theta = (\Gamma_0/\pi r^2)l_в/2$, или $v_y = (2\Gamma_0/\pi l_в)/(1 + \bar{y}^2)$. Здесь $\bar{y} = 2y/l_в$. Используя эту формулу, получаем угол скоса потока

$$\varepsilon = v_y/v_\infty = 2\Gamma_0/(\pi v_\infty l_в)/(1 + \bar{y}^2). \tag{13.23}$$

Отсюда следует, что при удалении от плоскости крыла угол скоса потока уменьшается.

При практических расчетах аэродинамических характеристик оперения обычно используется средний по размаху угол скоса потока $\varepsilon_{ср}$ — постоянный по размаху угол, вызывающий такое же уменьшение нормальной силы, которое получается с учетом изменения угла скоса потока по размаху оперения.

§ 13.5. КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ МЕЖДУ КРЫЛОМ И ОПЕРЕНИЕМ. СРЕДНИЙ УГОЛ СКОСА И КОЭФФИЦИЕНТ ТОРМОЖЕНИЯ ПОТОКА

Интерференция между вихрями, сходящими с крыла, и оперением (задней несущей поверхностью) зависит от интенсивности и положения вихрей относительно оперения. Для фиксированного положения вихрей местная скорость скоса потока, а следовательно, и средний угол скоса потока на задней несущей поверхности пропорциональны интенсивности вихря (Γ_0). Тогда нормальная сила $\Delta Y_{оп.кр}$, обусловленная интерференцией между крылом и оперением, пропорциональна произведению интенсивности вихрей и наклона кривой зависимости нормальной силы изолированного оперения от угла атаки $Y_{оп}/\alpha$. Введем безразмерную интенсивность вихрей: $\Gamma_0/(\pi v_\infty l_{к.оп})$. Здесь за характерную длину принята длина консолей оперения $l_{к.оп} = l_{оп} - D$. Тогда нормальная сила

$$\Delta Y_{оп.кр} = i_{оп}[\Gamma_0/(\pi v_\infty l_{к.оп})]\, Y_{оп}/\alpha, \tag{13.24}$$

где $i_{оп}$ — коэффициент интерференции между вихрями, сходящими

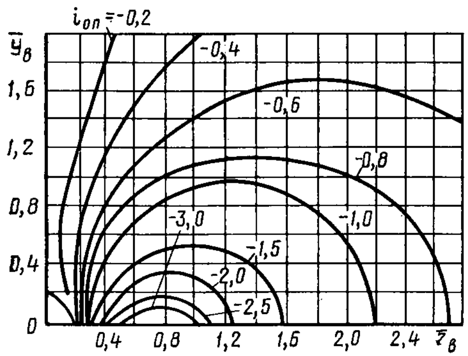


Рис. 13.11. Коэффициент интерференции между крылом и оперением в зависимости от относительных координат вихря $\bar{y}_в$ и $\bar{z}_в$, $\bar{D}_{оп}=0{,}2$; $\eta_{к.оп}=\infty$

с крыла, и оперением; α — угол атаки, рад.

Заметим, что знаки коэффициента $i_{оп}$ и нормальной силы $\Delta Y_{оп.кр}$ совпадают. При положительных углах атаки крыла скос потока вызывает уменьшение нормальной силы оперения, т. е. $\Delta Y_{оп.кр} < 0$. При этом коэффициент интерференции также отрицателен ($i_{оп} < 0$).

Из формулы (13.24) следует, что коэффициент интерференции $i_{оп}$ можно рассматривать как отношение двух безразмерных величин, одна из которых представляет собой отношение нормальных сил $\Delta Y_{оп.кр}/Y_{оп}$, а вторая — безразмерную интенсивность вихрей, сходящих с крыла (с передней несущей поверхности):

$$i_{оп} = (\Delta Y_{оп.кр}/Y_{оп})/\{\Gamma_0/[\pi v_\infty \alpha (l_{оп} - D)]\}. \qquad (13.25)$$

Использование в формуле (13.25) отношения нормальных сил позволяет применить для определения коэффициента интерференции упрощенные методы, такие, как теория тонкого тела и др.

Простой метод вычисления коэффициента итерференции основан на использовании теории полос, согласно которой сечение задней несущей поверхности обтекается как сечение крыла бесконечного размаха под местным углом атаки (α — ε).

Коэффициент $i_{оп}$ зависит от относительных координат вихря $\bar{y}_в$, $\bar{z}_в$ в долях полуразмаха оперения, отношения диаметра корпуса к размаху $\bar{D}_{оп} = D/l_{оп}$, а также сужения консолей оперения. Для различных значений параметра $\bar{D}_{оп}$ и величин обратного сужения консолей оперения $1/\eta_{к.оп}$ построена серия диаграмм $i_{оп}$ [19, 25].

На рис. 13.11 приведена типичная диаграмма для $\bar{D}_{оп} = 0{,}2$; $1/\eta_{к.оп} = 0$. Используя известные значения коэффициента интерференции, можно вычислить нормальную силу оперения, вызываемую вихрями крыла. Для этого рассмотрим упрощенную вихревую модель комбинации «крыло-корпус» с одним внешним вихрем на каждой консоли (см. рис. 13.7). Интенсивность вихря найдем, приравнивая нормальную силу консолей крыла с учетом влияния корпуса $Y_{кон} = k_{кр} Y_{из.кр} = k_{кр} c_{y\,из.кр}^{\alpha} \alpha q_\infty S_к$ нормальной силе тех же консолей, но вычисленной по теории несущей линии: $Y_{кон} = \rho_\infty v_\infty \Gamma_0 2 z_в$. Здесь $z_в$ — координата вихря, отсчитываемая от борта корпуса. В результате

$$\Gamma_0 = k_{кр} c_{y\,из.кр}^{\alpha} v_\infty S_к \alpha/(4 z_в). \qquad (13.26)$$

Подставим выражение (13.26) в формулу (13.24). Кроме того, в этой формуле $Y_{\text{оп}} = c^{\alpha}_{y\text{из.оп}} \alpha q_{\infty} S_{\text{к.оп}}$. Тогда

$$\Delta Y_{\text{оп.кр}} = i_{\text{оп}} k_{\text{кр}} c^{\alpha}_{y\text{ из. кр}} c^{\alpha}_{y\text{ из.оп}} q_{\infty} S_{\text{к}} S_{\text{к.оп}} \alpha / (4\pi z_{\text{в}} l_{\text{к. оп}}). \tag{13.27}$$

Используя формулу (13.27), найдем коэффициент нормальной силы $\Delta c_{y\text{оп.кр}} = \Delta Y_{\text{оп.кр}} / (q_{\infty} S_{\text{оп}})$:

$$\Delta c_{y\text{ оп. кр}} = i_{\text{оп}} k_{\text{кр}} c^{\alpha}_{y\text{ из. кр}} c^{\alpha}_{y\text{ из.оп}} S_{\text{к}} \bar{S}_{\text{к.оп}} \alpha / (4\pi z_{\text{в}} l_{\text{к. оп}}). \tag{13.28}$$

Здесь $\bar{S}_{\text{к.оп}} = S_{\text{к.оп}} / S_{\text{оп}}$.

В инженерной практике для определения коэффициента нормальной силы оперения, расположенного позади крыла, удобно пользоваться значением среднего угла скоса потока, вызываемого вихрями крыла. При этом формулы коэффициентов нормальной силы крыла и оперения имеют одинаковую структуру.

Представим $c_{y\text{оп}}$ в виде $c_{y\text{оп}} = (K_{\alpha\alpha} c^{\alpha}_{y\text{из.кр}})_{\text{II}} \; (\alpha - \varepsilon_{\text{ср}}) \bar{S}_{\text{к.оп}}$. При малых углах атаки $\varepsilon_{\text{ср}} = \varepsilon^{\alpha}_{\text{ср}} \alpha$. Тогда $c_{y\text{оп}} = (K_{\alpha\alpha} c^{\alpha}_{y\text{из.кр}})_{\text{II}} \; (1 - \varepsilon^{\alpha}_{\text{ср}}) \bar{S}_{\text{к.оп}} \alpha$. Отсюда

$$\Delta c_{y\text{ оп. кр}} = -(K_{\alpha\alpha} c^{\alpha}_{y\text{ из.кр}})_{\text{II}} \, \varepsilon^{\alpha}_{\text{ср}} \, \alpha \bar{S}_{\text{к.оп}}. \tag{13.29}$$

Подставляя выражение (13.29) в формулу (13.28) для производной $\varepsilon^{\alpha}_{\text{ср}}$, получаем

$$\varepsilon^{\alpha}_{\text{ср}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{i_{\text{о}}}{\bar{z}_{\text{в}}} \frac{l_{\text{кI}}}{l_{\text{к II}}} \left(\frac{c^{\alpha}_{y\text{ из.кр}}}{\lambda_{\text{к}}} \right)_{\text{I}} \frac{k_{\text{кр I}}}{K_{\alpha\alpha\text{ II}}}. \tag{13.30}$$

Здесь $\bar{z}_{\text{в}} = 2 z_{\text{в}} / l_{\text{кI}}$ — относительная координата вихря, а индексы I и II — величины, относящиеся к крылу и оперению соответственно.

Коэффициент $i_{\text{оп}}$ в формуле (13.30) вычисляется при условии, что влияние вихря распространяется на всю площадь консолей оперения. Это справедливо при дозвуковых и околозвуковых скоростях. Однако при $M_{\infty} > 1$ с увеличением числа M зона влияния вихря, ограниченная конусом Маха с вершиной в точке схода вихря с крыла, сужается. Тогда при достаточно больших значениях числа M влияние вихря может распространиться не на всю поверхность оперения, а только на ее часть (рис. 13.12). При этом средний угол скоса потока уменьшается. Снижение угла $\varepsilon_{\text{ср}}$ (производной $\varepsilon^{\alpha}_{\text{ср}}$) при $M_{\infty} > 1$ по сравнению со значениями, полученными по формуле (13.30), приближенно можно учесть поправочным множителем $\varkappa_{\varepsilon}$, представляющим собой отношение площади консоли, расположенной внутри конуса Маха, ко всей площади консоли оперения. Если оперение полностью выходит из зоны влияния вихря ($\varkappa_{\varepsilon} = 0$), угол скоса потока $\varepsilon = 0$.

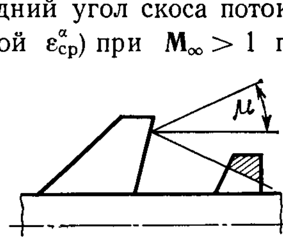


Рис. 13.12. Схема для определения множителя $\varkappa_{\varepsilon}$

Из формулы (13.30) следует, что на угол скоса потока за крылом существенно влияет форма крыла в плане, а также число M. Влияние формы крыла в плане на величину $\varepsilon_{ср}^{\alpha}$ прежде всего определяется удлинением консолей крыла. При уменьшении $\lambda_к$ угол скоса потока увеличивается.

Чем больше относительная координата свободных вихрей $\bar{z}_в$, т. е. чем ближе к концам консолей расположены свободные вихри, тем меньше скос потока. Выше, в § 13.4 показано, что координата $\bar{z}_в$, в свою очередь, зависит от закона распределения циркуляций по размаху, т. е. от формы крыла в плане. От координат вихря $\bar{y}_в$, $\bar{z}_в$ (см. рис. 13.11) зависит также коэффициент интерференции $i_{оп}$.

Из формулы (13.30) следует также, что угол скоса потока при заданном угле атаки крыла ε^{α} зависит от производной $c_{y\,из.кр}^{\alpha}$. Величина $c_{y\,из.кр}^{\alpha}$ определяется формой крыла в плане и является функцией числа M. При дозвуковых скоростях ($M_{\infty} < M_{кр}$) с увеличением числа M_{∞} производная $c_{y\,из.кр}^{\alpha}$ возрастает. При этом увеличивается и скос потока. При сверхзвуковых скоростях с ростом числа M_{∞} производная $c_{y\,из.кр}^{\alpha}$, а следовательно, и угол скоса потока $\varepsilon_{ср}^{\alpha}$ уменьшаются.

При определении аэродинамических характеристик оперения кроме скоса потока необходимо учитывать также торможение потока как носовой частью корпуса, так и крыльями, расположенными перед оперением.

Коэффициент торможения

$$k_т = q/q_{\infty} = k_т' k_т'', \tag{13.31}$$

где $k_т'$ — коэффициент торможения потока, вызываемого носовой частью корпуса (13.13), а $k_т''$ — коэффициент торможения, связанного с обтеканием крыльев.

Коэффициент $k_т''$ зависит от числа M. При дозвуковых скоростях и малых углах атаки коэффициент $k_т''$ близок к единице ($k_т'' \approx 0{,}98 \div 0{,}95$). В сверхзвуковом потоке с увеличением числа M коэффициент $k_т''$ уменьшается (торможение усиливается). Причиной торможения потока в сверхзвуковом потоке являются потери полного давления в скачках уплотнения, возникающих при обтекании крыла. Степень торможения потока зависит также от расстояния между крылом и оперением и отношения площадей $S_{оп}/S_{кр}$. При увеличении расстояния между несущими поверхностями и отношения площадей $S_{оп}/S_{кр}$ коэффициент торможения $k_т''$ возрастает (торможение уменьшается).

Следует отметить, что характер распределений угла скоса потока, а также коэффициента торможения $k_т''$ за крылом зависит от многих факторов, прежде всего от компоновки летательного аппарата, числа M_{∞} и угла атаки. Поэтому на практике для определения этих величин с учетом особенностей компоновки аппарата в большинстве случаев пользуются данными экспериментальных исследований.

§ 13.6. НОРМАЛЬНАЯ СИЛА Х-ОБРАЗНЫХ КРЫЛЬЕВ

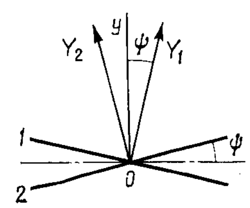


Рис. 13.13. Схема для определения нормальной силы х-образных крыльев

При определении коэффициента нормальной силы х-образных крыльев (рис. 13.13) прежде всего необходимо учитывать, что угол атаки каждого крыла х-образной схемы меньше угла атаки горизонтального крыла α. Легко показать, что $\alpha_x = \alpha\cos\psi$. Кроме того, нужно рассмотреть изменения истинного угла атаки вследствие взаимного влияния крыльев друг на друга.

Очевидно, что нормальная сила $+$ -образных крыльев равна нормальной силе одного горизонтального крыла $(Y_{\text{из.кр}})_+ = Y_{\text{из.кр}}$; или, учитывая, что в качестве характерной площади принимается площадь двух консолей, то $(c^{\alpha}_{y\text{из.кр}})_+ = c^{\alpha}_{y\text{из.кр}}$.

Рассмотрим х-образные крылья. Если предположить, что взаимное влияние между крыльями *1* и *2* отсутствует, то нормальные силы крыльев *1* и *2* при малых углах α в соответствии с изменением угла атаки по сравнению с горизонтальным крылом равны: $Y_1 = Y_2 = Y_{\text{из.кр}}\cos\psi$. Проецируя силы Y_1 и Y_2 на ось y, получаем $Y_x = 2Y_{\text{из.кр}}\cos^2\psi$. Отсюда

$$Y_x / Y_{\text{из.кр}} = 2\cos^2\psi. \qquad (13.32)$$

Если $\psi = 45°$, т. е. плоскости крыльев взаимно перпендикулярны, то скос потока, вызываемый каждым из крыльев, направлен параллельно плоскости другого крыла. При этом истинные углы атаки крыльев не изменяются. Поэтому нормальную силу х-образного крыла можно находить по формуле (13.32). Подставляя в нее $\psi = 45°$, получаем $Y_x = Y_{\text{из.кр}}$, т. е. х-образные крылья с взаимно перпендикулярными плоскостями, так же как $+$-образные крылья, создают такую же нормальную силу, как аналогичные горизонтальные крылья:

$$(Y_{\text{из.кр}})_x = Y_{\text{из.кр}} \text{ и } (c^{\alpha}_{y\,\text{из.кр}})_x = c^{\alpha}_{y\,\text{из.кр}}.$$

Найдем производную c^{δ}_y. Предположим, что крылья *1* и *2* при $\alpha = 0$ отклонены на малый угол δ. Тогда при прочих равных условиях $Y_1 = Y_2 = Y_{\text{из.кр}}$. Проецируя силы Y_1 и Y_2 на направление оси y, получаем $Y_x = 2Y_{\text{из.кр}}\cos\psi$. При $\psi = 45°$ $Y_x = Y_{\text{из.кр}}\sqrt{2}$. Отсюда $(c^{\delta}_{y\,\text{из.кр}})_x = \sqrt{2}\, c^{\delta}_{y\,\text{из.кр}}$, т. е. производная c^{δ}_y у х-образного крыла в $\sqrt{2}$ раз больше, чем у аналогичного горизонтального крыла. В случае $+$-образной схемы $(c^{\delta}_{y\text{из.кр}})_+ = c^{\delta}_{y\text{из.кр}}$.

Отметим, что при малых углах α в случае летательного аппарата с одинаковой поперечной ориентировкой консолей крыла и оперения (схемы «$++$» или «хх») угол скоса потока, вызываемый крылом в области оперения, а следовательно, и нормальная сила задней несущей поверхности будут такими же, как в аналогичной схеме с горизонтальным расположением крыла и оперения.

§ 13.7. ПРОИЗВОДНАЯ КОЭФФИЦИЕНТА НОРМАЛЬНОЙ И ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПО УГЛУ АТАКИ

Для определения коэффициента нормальной силы летательного аппарата (ЛА) необходимо найти значения коэффициентов c_y изолированных частей (корпуса, крыла, оперения) и привести их к характерной площади ЛА. Для крылатого ЛА за характерную площадь S обычно принимают площадь крыла в плане с подфюзеляжной частью, а для бескрылых ЛА — площадь миделя корпуса. Затем необходимо учесть интерференцию между корпусом и крылом, корпусом и оперением. Например, для схемы $\alpha\alpha$ ввести коэффициент интерференции $K_{\alpha\alpha}$ и коэффициент торможения потока корпусом $k_т'$. В случае крылатого ЛА необходимо учесть также интерференцию между передними и задними несущими поверхностями — скос и торможение потока, вызываемые в области оперения впереди расположенным крылом (ε^α, $k_т''$).

Составим общее выражение для определения производной коэффициента нормальной силы применительно к крылатому ЛА для случая схемы $\alpha\alpha$. При этом предположим, что рули находятся в нейтральном положении ($\delta = 0$).

В соответствии с принятыми выше обозначениями

$$c_{y\,ЛА}^{\alpha} = c_{yф}^{\alpha}\bar{S}_ф + \left(k_т' K_{\alpha\alpha} c_{y\,из.кр}^{\alpha} \bar{S}_к\right)_{кр} + \\ + \left[\, k_т' k_т'' K_{\alpha\alpha} c_{y\,из.кр}^{\alpha} \bar{S}_к (1 - \varepsilon^\alpha) \,\right]_{оп}, \tag{13.33}$$

где $\bar{S}_ф = S_ф/S$, $\bar{S}_к = S_к/S$, а индексы «кр» и «оп» означают, что величины $K_{\alpha\alpha}$, $\bar{S}_к$, $c_{y\,из.кр}^{\alpha}$ берутся для крыла и оперения соответственно.

Найдем производную коэффициента подъемной силы ЛА $c_{ya\,ЛА}^{\alpha}$. Для этого достаточно воспользоваться формулой перехода от связанной к скоростной системе осей координат $c_{ya} = c_y \cos\alpha - c_x \sin\alpha$. При малых углах атаки, принимая $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha°/57{,}3$, $c_x \approx$ $\approx c_{x0}$,

$$c_{ya\,ЛА}^{\alpha} = c_{y\,ЛА}^{\alpha} - c_{x0}/57{,}3, \tag{13.34}$$

где c_{x0} — коэффициент сопротивления ЛА при $\alpha = 0$; c_{ya}^{α}, c_y^{α} — производные по углу атаки, град.

Из формул (13.33) и (13.34) следует, что производные $c_{y\,ЛА}^{\alpha}$ и $c_{ya\,ЛА}^{\alpha}$ зависят от величин c_y^{α} корпуса, крыла и оперения, а также от отношения площадей: $\bar{S}_ф$, $(\bar{S}_к)_{кр}$, $(\bar{S}_к)_{оп}$.

Для большинства крылатых летательных аппаратов (с небольшим значением $\bar{S}_ф$) доля корпуса и оперения в подъемной силе аппарата существенно меньше, чем доля крыла. Подъемная сила таких аппаратов определяется в основном крылом и зависит от формы крыла в плане и площади консолей $\bar{S}_к$. В связи с этим характер зависимости производной c_y^α от числа M_∞ для аппарата в целом также мало отличается от характера зависимости $c_y^\alpha(M_\infty)$ для крыла.

Для бескрылых летательных аппаратов ($\overline{S}_ф = 1$) значение производной c_y^α и характер ее зависимости от числа M определяются в основном характеристиками корпуса.

§ 13.8. ВЛИЯНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ РУЛЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА НОРМАЛЬНУЮ СИЛУ ОПЕРЕНИЯ. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ РУЛЕЙ

Выражение (13.33) составлено для определения производной коэффициента нормальной силы летательного аппарата при нейтральном положении рулей ($\delta = 0$). Рассмотрим более общий случай, когда $\delta \neq 0$.

Относительная эффективность рулей. При малых углах атаки и отклонении рулей коэффициент нормальной силы изолированного оперения можно представить в виде

$$c_y = c_y^\alpha \alpha + c_y^\delta \delta, \text{ или } c_y = c_y^\alpha (\alpha + n\delta), \tag{13.35}$$

где $n = c_y^\delta / c_y^\alpha$ — относительная эффективность рулей, которую можно принимать как отношение нормальной силы, вызываемой отклонением рулей на один градус, к нормальной силе, вызываемой изменением угла установки оперения относительно корпуса на ту же величину.

Из формулы (13.35) следует, что отклонение рулей на угол δ эквивалентно изменению угла установки консолей относительно корпуса на угол $\Delta\varphi = n\delta$. Относительная эффективность зависит от типа рулей, отношения площади руля к площади всей несущей поверхности оперения, а также от числа M.

На современных летательных аппаратах наиболее часто применяются рули типа поворотных консолей крыла или оперения (рис. 13.14). Эти рули оказываются достаточно эффективными в широком диапазоне чисел M, так как поворот руля на угол δ приводит при угле стреловидности оси вращения $\chi_р = 0$ к такому же изменению угла атаки консолей $\Delta\varphi = \delta$, а в общем случае, когда $\chi_р \neq 0$, угол атаки консолей изменяется на величину $\Delta\varphi = \delta\cos\chi_р$. Здесь $\chi_р$ — угол стреловидности оси вращения рулей. Некоторое снижение относительной эффективности рулей происходит за счет влияния щелей между консолями и поверхностью корпуса, так как перетекание воздуха через щели вызывает уменьшение нормальной силы консолей. Влияние щелей на относительную эффективность рулей, очевидно, наблюдается больше при $M_\infty < 1$, в меньшей степени при $M_\infty > 1$. Это влияние учитывается коэффициентом $k_щ < 1$. Тогда в рассматриваемом случае $n = c_y^\delta / c_y^\alpha = k_щ \cos\chi_р$.

На летательных аппаратах, предназначенных для полета с дозвуковыми скоростями, наиболее часто применяются рули, расположенные вдоль задней кромки стабилизатора (рис. 13.15). При малых ско-

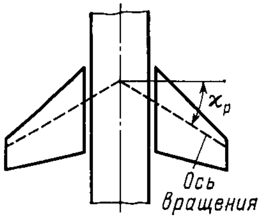


Рис. 13.14. Рули типа поворотного оперения

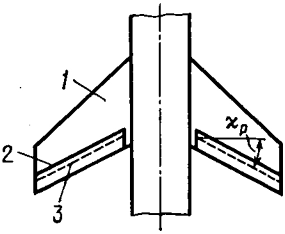


Рис. 13.15. Рули, расположенные вдоль задней кромки стабилизатора:
1 — стабилизатор; 2 — руль; 3 — ось вращения руля

ростях ($\mathbf{M}_\infty < \mathbf{M}_{кр}$) отклонение такого руля вызывает изменение распределения давления не только на руле, но и на расположенной впереди поверхности стабилизатора. Поэтому отклонение руля вызывает увеличение нормальной силы по всей поверхности оперения, что обеспечивает достаточно высокую эффективность рулей. При околозвуковых скоростях ($\mathbf{M}_{кр} < \mathbf{M}_\infty < 1$), когда на поверхности стабилизатора перед рулем возникают местные скачки уплотнения, при отклонении рулей распределение давления на части поверхности стабилизатора, расположенной перед местными скачками уплотнения, не изменяется. Поэтому нормальная сила оперения при отклонении рулей увеличивается сравнительно мало. При больших числах $\mathbf{M}_\infty$, когда передняя кромка руля становится сверхзвуковой, возмущение, вызываемое отклонением рулей, вперед не распространяется. При этом дополнительная нормальная сила возникает только на рулях. В результате их относительная эффективность резко уменьшается. Этим объясняется широкое применение на современных летательных аппаратах полностью поворотных консолей оперения, достаточно эффективных при всех числах $\mathbf{M}$.

Производная c_y^δ. Рассмотрим комбинацию «корпус-поворотное крыло». Предположим, что угол атаки корпуса $\alpha = 0$, а консоли крыла отклонены на угол δ, т. е. угол установки консолей относительно оси корпуса $\varphi = n\delta$. При этом $Y_ф = 0$, нормальная сила консолей близка нормальной силе изолированных крыльев $Y_{кр.ф} \approx 0$, а $Y_{ф.кр} \neq 0$. Тогда, введя по аналогии с коэффициентом $K_{\alpha\alpha}$ коэффициент интерференции крыла и корпуса $K_{\delta0} = (Y_{из.кр} + Y_{ф.кр})/Y_{из.кр}$, обусловленный отклонением рулей на угол δ при $\alpha = 0$, нормальную силу комбинации «корпус-поворотное крыло» можно представить в следующем виде:

$$(Y_{к.ф})_{\delta0} = Y_{из.кр} K_{\delta0} = c^\alpha_{y\,из.кр} K_{\delta0} n\delta k_т q_\infty S_к.$$

Отсюда, представляя $(Y_{к.ф})_{\delta0} = (c_{yк.ф})_{\delta0} q_\infty S$, получаем

$$(c_{y\,к.ф})_{\delta0} = c^\alpha_{y\,из.\,кр} K_{\delta0}\, n\delta k_т \bar{S}_к.$$

В общем случае при $\alpha \neq 0$ и $\delta \neq 0$

$$c_{y\,к.ф} = c^\alpha_{y\,ф}\, \alpha\, \bar{S}_ф + k_т K_{\alpha\alpha}\, c^\alpha_{y\,из.\,кр}\, \alpha \bar{S}_к + k_т K_{\delta0}\, c^\alpha_{y\,из.кр}\, n\delta \bar{S}_к.$$

Найдем производную коэффициента нормальной силы по углу отклонения рулей:

$$c^{\delta}_{y\,\text{к.ф}} = k_{\text{т}} K_{\delta 0}\, c^{\alpha}_{y\,\text{из.кр}}\, n\bar{S}_{\text{к}}. \tag{13.36}$$

Здесь коэффициент интерференции $K_{\delta 0}$ в основном зависит от отношения D/l и от сужения консолей [19].

§ 13.9. *КОЭФФИЦИЕНТ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА*

Сопротивление летательного аппарата определяется в виде суммы сопротивлений его частей — крыла, корпуса, оперения — с учетом интерференции между ними.

При дозвуковых и умеренных сверхзвуковых скоростях ($\mathbf{M}_\infty \leqslant 4$) коэффициент сопротивления летательного аппарата можно представить в виде суммы коэффициента сопротивления c_{x0} при $c_{y\text{a}} = 0$ и коэффициента индуктивного сопротивления $c_{x\text{a}i}$, возникающего при $c_{y\text{a}} \neq 0$:

$$c_{x\text{a}} = c_{x0} + c_{x\text{a}i}. \tag{13.37}$$

Коэффициент сопротивления при отсутствии подъемной силы. В общем случае сопротивление летательного аппарата при нулевой подъемной силе отличается от суммы соответствующих сопротивлений его частей на величину, обусловленную интерференцией частей аппарата.

При определении коэффициента c_{x0} коэффициенты изолированных частей аппарата необходимо привести к единой характерной площади S и учесть интерференцию частей аппарата, проявляющуюся прежде всего в торможении потока в области крыла и оперения. Кроме того, в местах сочленения крыла и корпуса происходит утолщение пограничного слоя. При этом на тех участках поверхности, где имеется положительный градиент давления, создаются условия, благоприятствующие отрыву потока. Это приводит к увеличению сопротивления летательного аппарата.

Для предотвращения преждевременного отрыва потока в местах сочленения крыла и корпуса обычно устанавливают профилированные поверхности («зализы»).

Экспериментальные исследования показывают, что сопротивление летательного аппарата в области околозвуковых скоростей можно уменьшить, применяя при компоновке комбинации «корпус-крыло» правило площадей (рис. 13.16). Согласно этому правилу, волновое сопротивление комбинации «корпус-крыло» равно сопротивлению эквивалентного тела вращения, у которого распределение площадей поперечного сечения по оси корпуса совпадает с распределением площадей поперечных сечений комбинации «корпус-крыло» (рис. 13.16,*б*). В соответствии с правилом площадей корпус летательного аппа-

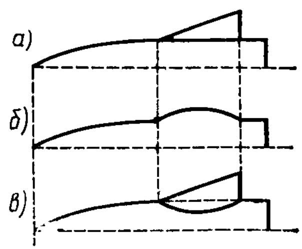


Рис. 13.16. Применение правила площадей:

а — исходная комбинация «корпус-крыло»; *б* — эквивалентное тело с наплывом; *в* — корпус с поджатием в зоне расположения крыла рата в зоне расположения крыла должен иметь поджатие (рис. 13.16, *в*).

Комбинация «корпус-крыло», спроектированная по правилу площадей, по сравнению с исходной комбинацией в трансзвуковом диапазоне скоростей ($0{,}9 < \mathrm{M}_\infty < 1{,}4$) имеет меньшее волновое сопротивление.

Таким образом, интерференция может привести как к увеличению, так и к уменьшению сопротивления, т. е. при удачной компоновке вместо вредной можно получить положительную интерференцию.

Приведем еще один пример положительной интерференции. Рассмотрим взаимодействие крыла с телом вращения, размещенным под ним, например с гондолой двигателя. В сверхзвуковом потоке от носка тела отходит скачок уплотнения. Если при заданном числе **M** и соответствующем взаимном расположении крыла и тела скачок уплотнения попадает на нижнюю поверхность крыла за линией его максимальной толщины, то на этом участке нижней поверхности давление повышается, что приводит к уменьшению волнового сопротивления крыла. Этот пример показывает, что влияние интерференции на коэффициент c_{x0} зависит от компоновки летательного аппарата и должно рассматриваться применительно к конкретной компоновке.

В том случае, когда на летательном аппарате используются простые геометрические формы корпусов, а крылья устанавливаются на цилиндрических участках поверхности по схеме среднеплана, интерференция сравнительно мала и в основном сводится к торможению потока в области крыла и оперения.

Суммарный коэффициент сопротивления летательного аппарата при нулевой подъемной силе можно представить в следующем виде:

$$c_{x0} = \mathrm{A}\,(c_{x0\text{ф}}\overline{S}_\text{ф} + k_\text{т}' c_{x0\,\text{кр}} \sum \overline{S}_\text{к} + k_\text{т}' k_\text{т}'' c_{x0\,\text{оп}} \sum \overline{S}_\text{к.оп}, \tag{13.38}$$

где $c_{x0\text{ф}}$, $c_{x0\text{кр}}$, $c_{x0\text{оп}}$ — коэффициенты изолированных частей летательного аппарата [корпуса (фюзеляжа), крыла, оперения]; $\overline{S}_\text{ф}$, $\Sigma\overline{S}_\text{к}$, $\Sigma\overline{S}_\text{к.оп}$ — отношения площади миделя корпуса (фюзеляжа), суммарной площади всех консолей крыльев и оперения к характерной площади; $k_\text{т}'$, $k_\text{т}''$ — соответственно коэффициенты торможения потока корпусом и крылом; А — поправочный множитель на неучтенные сопротивления, который обычно принимают $\mathrm{A} = 1{,}05 \div 1{,}10$.

Определение входящих в формулу (13.38) коэффициентов $c_{x0\text{кр}}$, $c_{x0\text{оп}}$ и $c_{x0\text{ф}}$ рассмотрено в гл. 9, 10, 12.

Из формулы (13.38) следует, что коэффициент c_{x0} летательного аппарата существенно зависит от отношения площадей $\overline{S}_\text{ф}$ и $\overline{S}_\text{к}$. Для крылатого летательного аппарата с увеличением площади крыла отношение $\overline{S}_\text{ф}$ уменьшается. Доля коэффициента сопротивления корпуса при этом также становится меньше.

Коэффициент индуктивного сопротивления. Индуктивное сопротивление летательного аппарата можно представить в виде суммы индуктивных сопротивлений его частей. Тогда коэффициент индуктивного сопротивления будет равен сумме коэффициентов индуктивного сопротивления изолированного корпуса, приведенного к характерной площади летательного аппарата $c_{xai}\bar{S}_ф$, коэффициента индуктивного сопротивления крыла (передней несущей поверхности), полученного с учетом интерференции между крылом и корпусом и приведенного к характерной площади летательного аппарата $k'_т c_{xai\,кр}\bar{S}_к$, оперения (задней несущей поверхности), вычисленного с учетом интерференции между оперением и корпусом, а также между крылом и оперением $k'_т k''_т c_{xai\,оп}\bar{S}_{к.оп}$:

$$c_{xai} = c_{xaiф}\bar{S}_ф + k'_т c_{xai\,кр}\bar{S}_к + k'_т k''_т c_{xai\,оп}\bar{S}_{к.оп}. \tag{13.39}$$

При сверхзвуковых передних кромках ($M_\infty > 1/\cos\chi$) индуктивное сопротивление крыла (оперения) равно проекции нормальной силы на направление скорости невозмущенного потока: $X_{ai} = Y\sin\alpha$, или при малых углах атаки $X_{ai} = Y\alpha°/57{,}3$. Тогда $c_{xai} = c_y\alpha°/57{,}3$.

При дозвуковых скоростях и дозвуковых передних кромках ($M_\infty < 1/\cos\chi$) необходимо учитывать также подсасывающую силу. В этом случае $c_{xai} = c_y\alpha°/57{,}3 - c_F$, где c_F — коэффициент подсасывающей силы (см. гл. 9).

Как показывают экспериментальные исследования, теоретическое значение подсасывающей силы на практике реализуется неполностью. Это особенно заметно при сравнительно больших углах атаки, при которых в окрестности передней кромки происходит местный отрыв потока. В результате этого дальнейший рост разрежения в области передней кромки прекращается. Уменьшение коэффициента подсасывающей силы по сравнению с теоретическим значением можно учесть коэффициентом реализации подсасывающей силы ξ. Тогда

$$c_F = \xi\bar{c}_F c_y^2. \tag{13.40}$$

Коэффициент ξ кроме угла атаки существенно зависит от угла стреловидности и числа M_∞. Кривые для определения величин $\bar{c}_F$ и ξ приведены в [18, 19]. На крыле с заостренной передней кромкой подсасывающая сила практически не реализуется ($\xi = 0$, $\bar{c}_F = 0$).

Отметим, что в выражении (13.40) коэффициент c_y должен быть вычислен с учетом влияния корпуса, т. е. $c_y = k_{кр}c^\alpha_{y\,из.кр}\,\alpha$.

В соответствии с вышеизложенным формулу (13.39) применительно к случаю $\alpha\alpha$, т. е. когда рули не отклонены ($\delta = 0$), можно представить в следующем виде:

а) при $M_\infty < 1/\cos\chi$

$$c_{xai} = c_{xaiф}\bar{S}_ф + (k'_т K_{\alpha\alpha} c^\alpha_{y\,из.\,кр}\bar{S}_к)_{кр}\,\alpha^2/57{,}3 + \\ + (k'_т k''_т K_{\alpha\alpha} c^\alpha_{y\,из.\,кр}\bar{S}_к)_{оп}(1-\varepsilon^\alpha)\,\alpha^2/57{,}3; \tag{13.41}$$

б) при $M_\infty < 1/\cos\chi$

$$c_{xai} = c_{xaiф}\bar{S}_ф + [K_{\alpha\alpha} c^\alpha_{y\,из.\,кр} - 57{,}3\xi\bar{c}_F(c^\alpha_{y\,из.кр}k_{кр})^2]_{кр}\,k'_т\bar{S}_к\alpha^2/57{,}3 + \\ + \{K_{\alpha\alpha} c^\alpha_{y\,из.кр}(1-\varepsilon^\alpha) - 57{,}3\xi\bar{c}_F[k_{кр}\,c^\alpha_{y\,из.кр}\times \\ \times(1-\varepsilon^\alpha)]^2\}_{оп}\,k'_т k''_т\bar{S}_{к.оп}\alpha^2/57{,}3. \tag{13.42}$$

Здесь $c_{xai\text{ф}}$ — коэффициент индуктивного сопротивления корпуса (10.51). Последний член в формулах (13.41) и (13.42) относится к оперению, расположенному за крылом.

У сверхзвуковых летательных аппаратов обычно крылья и оперения имеют острые передние кромки. Поэтому подсасывающая сила на них практически отсутствует ($\xi = 0$, $c_F = 0$). Подсасывающая сила корпуса (фюзеляжа) составляет незначительную долю по сравнению с полным сопротивлением аппарата. Поэтому при приближенных расчетах ею можно пренебречь и определять коэффициент $c_{xai\text{ф}}$ по формуле (10.51) при $\zeta = 0$:

$$c_{xai\text{ф}} = c^{\alpha}_{y\text{ф}}\,\alpha^2/57{,}3. \tag{13.43}$$

Подставляя в формулы (13.41) и (13.42) выражение (13.43) и принимая в формуле (13.42) $\xi = 0$, а также учитывая выражение (13.33), для аппарата в целом получаем

$$c_{xi} = c^{\alpha}_{y}\alpha^2/57{,}3, \text{ или } c_{xi} = c_y\alpha/57{,}3. \tag{13.44}$$

Таким образом, приближенно при указанных выше условиях индуктивное сопротивление летательного аппарата можно рассматривать как проекцию нормальной силы на направление $\vec{v}_\infty$.

Этой упрощенной формулой приближенно можно пользоваться и при отклоненных рулях ($\delta \neq 0$) для таких летательных аппаратов, у которых подъемная сила при отклонении рулей изменяется мало, т. е. когда индуктивным сопротивлением, вызываемым отклонением рулей, можно пренебречь.

Из выражений (13.41) и (13.42) следует, что коэффициент c_{xai} пропорционален α^2. Заменим в этих выражениях угол атаки на коэффициент подъемной силы c_{ya}: $\alpha = c_{ya}/c^{\alpha}_{ya}$. Тогда при малых углах атаки коэффициент индуктивного сопротивления можно представить в виде

$$c_{xai} = Bc^2_{ya}, \tag{13.45}$$

где множитель B не зависит от c_{ya} и характеризует степень изменения сопротивления аппарата по углам атаки. Из структуры формул (13.41) и (13.42) ясно, что множитель B существенно зависит от числа $\mathbf{M}$ и геометрических параметров летательного аппарата. Без учета подсасывающей силы $B = 1/57{,}3c^{\alpha}_{ya}$ или $B = 1/c^{\alpha}_{ya}$ (здесь α — в рад). Отсюда, в частности, следует, что при уменьшении удлинения и увеличении угла стреловидности в соответствии с изменением c^{α}_{ya} множитель B возрастает как при дозвуковых, так и сверхзвуковых скоростях; для крылатых летательных аппаратов увеличение числа $\mathbf{M}$ при сверхзвуковых скоростях приводит к существенному увеличению коэффициента B.

Используя выражения (13.37) и (13.45), представим уравнение поляры летательного аппарата, т. е. зависимости коэффициента сопротивления c_{xa} от коэффициента подъемной силы c_{ya} при заданном значении числа $\mathbf{M}$, в виде

$$c_{xa} = c_{x0} + Bc_{ya}^2. \tag{13.46}$$

При различных значениях числа M_∞ получим семейство поляр летательного аппарата:

$$c_{xa} = f(c_{ya},\ M_\infty).$$

Важнейшими характеристиками летательного аппарата являются аэродинамическое качество $K = c_{ya}/c_{xa}$ и максимальное значение аэродинамического качества при фиксированном значении числа M_∞. Повышение максимального аэродинамического качества составляет одну из основных задач аэродинамической компоновки многих летательных аппаратов.

Поскольку с изменением угла атаки изменяются коэффициенты c_{ya} и c_{xa}, то от угла атаки зависит и аэродинамическое качество. При некотором угле атаки, называемом *наивыгоднейшим углом* $\alpha_{\text{наив}}$, аэродинамическое качество имеет максимальное значение. Ввиду того что $K = c_{ya}/(c_{x0} + Bc_{ya}^2)$, из условия, что при $K = K_{\max}$, т. е. $dK/dc_{ya} = 0$, находим $Bc_{ya\,\text{наив}}^2 = c_{x0}$. Здесь $c_{ya\text{наив}}$ — значение c_{ya} при $K = K_{\max}$. Отсюда видно, что при $K = K_{\max}$ коэффициент индуктивного сопротивления равен коэффициенту сопротивления при $c_{ya} = 0$, а $c_{ya\,\text{наив}} = \sqrt{c_{x0}/B}$.

Подставляя значение $c_{y\,a\,\text{наив}}$ в выражение для качества, получаем

$$K_{\max} = 1/(2\sqrt{Bc_{x0}}). \tag{13.47}$$

Отсюда следует, что величина $K_{\max}$ определяется значениями коэффициентов c_{x0} и B, т. е. зависит от числа M_∞ и формы аппарата и его частей. Максимальное аэродинамическое качество тем больше, чем меньше коэффициенты c_{x0} и B.

§ 13.10. МОМЕНТ ТАНГАЖА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Коэффициент момента тангажа. Момент тангажа M_z — момент аэродинамических сил относительно поперечной оси Oz летательного аппарата, проходящей через его центр масс. Коэффициент момента тангажа $m_z = M_z/(q_\infty SL)$, где L — характерный линейный размер аппарата. Для крылатых летательных аппаратов в качестве L обычно используют среднюю аэродинамическую хорду крыла (см. § 7.8).

Коэффициент момента m_z зависит от компоновки и формы частей летательного аппарата, от числа M_∞, угла атаки α и углов отклонения органов управления δ. Кроме того, на коэффициент m_z влияет угловая скорость летательного аппарата ω_z, а в случае неустановившегося движения могут оказать существенное влияние скорости изменения углов атаки $\dot{\alpha}$ и отклонения рулей $\dot{\delta}$ во времени. В общем случае эти зависимости имеют сложный нелинейный характер. Однако при малых значениях параметров $(\alpha,\ \delta,\ \omega_z,\ \dot{\alpha},\ \dot{\delta})$ коэффициент m_z можно представить в виде линейной функции:

$$m_z = m_{z0} + m_z^{\alpha}\alpha + m_z^{\delta}\delta + m_z^{\bar{\omega}_z}\bar{\omega}_z + m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\bar{\dot{\alpha}} + m_z^{\bar{\dot{\delta}}}\bar{\dot{\delta}}, \qquad (13.48)$$

где m_{z0} — коэффициент момента при $\alpha = \delta = \omega_z = \dot{\alpha} = \dot{\delta} = 0$; $\bar{\omega}_z$, $\bar{\dot{\alpha}}$, $\bar{\dot{\delta}}$ — безразмерные величины, получающиеся из соответствующих размерных величин умножением на отношение характерного линейного размера L к скорости v_∞ (3.72).

Производные m_z^{α}, m_z^{δ} обычно называют *статическими*, а $m_z^{\bar{\omega}_z}$, $m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}$, $m_z^{\bar{\dot{\delta}}}$ — вращательными производными коэффициента момента m_z.

Величины m_{z0}, m_z^{α}, m_z^{δ}, $m_z^{\bar{\omega}_z}$, $m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}$, $m_z^{\bar{\dot{\delta}}}$ зависят от формы и компоновочной схемы летательного аппарата и от числа **M**. Типичный характер зависимости коэффициента m_z от углов α и δ приведен на рис. 13.17. На этом графике точки на оси α, в которых $m_z = 0$, соответствуют состоянию статического равновесия, т. е. балансировки летательного аппарата. Каждому углу отклонения рулей δ соответствует свой балансировочный угол атаки $\alpha_{\text{бал}}$.

Понятия о фокусе и степени продольной статической устойчивости летательного аппарата. Рассмотрим установившееся движение летательного аппарата при малых углах атаки α и отклонении органов управления δ.

В этом случае для определения моментных характеристик аппарата удобно ввести понятие об аэродинамическом фокусе. При этом обычно рассматриваются отдельно фокус по углу атаки $x_{F\alpha}$ и фокус по отклонению органов управления $x_{F\delta}$.

Фокусом по углу атаки называется точка на продольной оси летательного аппарата, обладающая тем свойством, что при закрепленных органах управления момент относительно оси Oz, проходящей через эту точку, не зависит от угла атаки.

Аналогично можно ввести понятие о фокусе по отклонению органов управления. Момент относительно оси Oz, проходящей через эту точку, не зависит от угла отклонения органов управления.

Понятиям о фокусах можно дать и другую трактовку. Для этого представим нормальную силу аппарата при малых углах атаки и углах отклонения органов управления в виде суммы трех составляющих:

$$Y = Y_0 + Y^{\alpha}\alpha + Y^{\delta}\delta. \qquad (13.49)$$

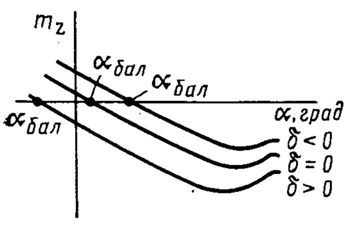


Рис. 13.17. Зависимость коэффициента момента тангажа от углов α и δ

Тогда из определения фокусов следует, что фокус по углу атаки можно трактовать как точку приложения составляющей нормальной силы, пропорциональной углу атаки, т. е. силы $Y^{\alpha}\alpha$, а фокус по отклонению органов управления — как точку приложения составляющей нормальной силы, зависящей от угла δ, т. е. силы $Y^{\delta}\,\delta$.

Отсюда также следует, что в общем случае ни один из фокусов не совпадает с центром давления — точкой приложения всей нормальной силы. В частном случае для симметричного относительно плоскости xOz аппарата ($Y_0 = 0$) при $\delta = 0$ нормальная сила $Y = Y^{\alpha}_{\alpha}$, центр давления совпадает с фокусом по углу атаки, а при $\alpha = 0$, $Y = Y^{\delta}\delta$ центр давления совпадает с фокусом по отклонению органов управления.

Следует отметить, что понятия о фокусах применимы только в тех диапазонах углов α и δ, в которых зависмости коэффициентов c_y и m_z от α и δ линейны. При больших углах α и δ эти понятия не действительны.

Используя понятия фокусов, легко составить выражения момента и коэффициента момента тангажа относительно оси, проходящей через центр масс:

$$M_z = M_{z0} + Y^{\alpha}\alpha(x_{\text{т}} - x_{F\alpha}) + Y^{\delta}\delta(x_{\text{т}} - x_{F\delta})$$

и

$$m_z = m_{z0} + c_y^{\alpha}\alpha(\bar{x}_{\text{т}} - \bar{x}_{F\alpha}) + c_y^{\delta}\delta(\bar{x}_{\text{т}} - \bar{x}_{F\delta}), \tag{13.50}$$

где $x_{\text{т}}$ — координата центра масс летательного аппарата; $\bar{x}_{\text{т}}$, $\bar{x}_{F\alpha}$, $\bar{x}_{F\delta}$ — относительные координаты в долях характерного линейного размера ($\bar{x} = x/L$).

Отсюда легко найти производные m_z^{α} и m_z^{δ}:

$$m_z^{\alpha} = c_y^{\alpha}(\bar{x}_{\text{т}} - \bar{x}_{F\alpha}); \tag{13.51}$$

$$m_z^{\delta} = c_y^{\delta}(\bar{x}_{\text{т}} - \bar{x}_{F\delta}). \tag{13.52}$$

Знак производной m_z^{α} при $\alpha = \alpha_{\text{бал}}$ определяет характер равновесия летательного аппарата. Если при $\alpha = \alpha_{\text{бал}}$ производная $m_z^{\alpha} < 0$, то при увеличении или уменьшении угла атаки на малую величину $\Delta\alpha(\alpha \lessgtr \alpha_{\text{бал}})$ вознкает стабилизирующий момент $\Delta m_z = m_z^{\alpha}\Delta\alpha$, стремящийся возвратить аппарат в положение равновесия. В этом случае *летательный аппарат называется статически устойчивым*.

Если $m_z^{\alpha} > 0$, то *летательный аппарат статически неустойчив*, так как при изменении угла атаки в любую сторону от положения равновесия возникает момент, направленный в ту же сторону, т. е. уводящий аппарат от положения равновесия. В случае $m_z^{\alpha} = 0$ при малом отклонении угла атаки от балансировочного не возникает момента $\Delta m_z = 0$ и *летательный аппарат называется нейтральным*.

Производная m_z^{α} характеризует степень продольной статической устойчивости. Ввиду того что при малых α функции $m_z(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$ линейны, то, очевидно, существует линейная зависимость и между коэффициентами m_z и c_y. Тогда для оценки степени продольной статической устойчивости летательного аппарата можно пользоваться также производной $m_z^{c_y}$. Из выражения (13.51) следует, что

$$m_z^{c_y} = \bar{x}_{\text{т}} - \bar{x}_{F\alpha}. \tag{13.53}$$

Величину $m_z^{c_y}$ принято называть *запасом продольной статической устойчивости* летательного аппарата. Он зависит от взаимного расположения его центра масс и фокуса.

Из формул (13.51) и (13.53) ясно, что для устойчивого летательного аппарата ($m_z^\alpha < 0$, $m_z^{c_y} < 0$) фокус должен быть расположен позади его центра масс.

Желаемой степени статической устойчивости можно добиться путем изменения положения фокуса и центра масс, т. е. соответствующей аэродинамической и внутренней компоновкой летательного аппарата.

Определение положения фокуса летательного аппарата. Координату фокуса летательного аппарата по углу атаки, измеренную от носка корпуса, можно определить из условия равенства момента нормальной силы аппарата сумме моментов нормальных сил частей летательного аппарата с учетом интерференции между ними. При этом полагаем, что органы управления не отклонены ($\delta = 0$). Например, для крылатого летательного аппарата обычной схемы из уравнения моментов получим:

$$x_{F\alpha} = (1/c_y^\alpha)\left[c_{y\text{ф}}^\alpha \bar{S}_\text{ф} x_{F\text{ф}} + (k_\text{т}' c_y^\alpha \bar{S}_\text{к} x_{F\alpha})_\text{кр} + (k_\text{т}' k_\text{т}'' c_y^\alpha \bar{S}_\text{к} x_{F\alpha})_\text{оп}\right], \quad (13.54)$$

где $c_{y\text{ф}}^\alpha$, $x_{F\text{ф}}$ — производная коэффициента нормальной силы и координата фокуса корпуса (см. § 10.4); $c_{y\text{кр}}^\alpha$, $x_{F\alpha\text{кр}}$ — производная коэффициента нормальной силы и координата фокуса крыла, определяемые с учетом интерференции между крылом и корпусом (см. § 13.2); c_y^α — производная коэффициента нормальной силы аппарата (13.33); $c_{y\text{оп}}^\alpha$, $x_{F\alpha\text{оп}}$ — производная коэффициента нормальной силы и координата фокуса оперения, найденные с учетом интерференции между консолями оперения и корпусом, а также с учетом влияния крыльев на оперение (см. § 13.5).

Из формулы (13.54) следует, что координата фокуса летательного аппарата, так же, как его отдельных частей — крыла, корпуса, оперения, — существенно зависит от числа M_∞. При переходе от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям фокус летательного аппарата обычно смещается назад. Это особенно относится к крылатым летательным аппаратам. В результате степень продольной статической устойчивости увеличивается, что неблагоприятно влияет на характеристики управляемости аппарата.

Положение фокуса зависит также от формы частей аппарата — крыльев, корпуса, оперения, от отношения площадей: $\bar{S}_\text{ф}$, $\bar{S}_\text{к.кр}$, $\bar{S}_\text{к.оп}$.

Допустим теперь, что оперение (задняя несущая поверхность) отклоняется на некоторый угол δ. При этом на оперении возникает дополнительная нормальная сила, определяемая согласно выражению (13.36) по формуле $\Delta Y = k_\text{т} c_{y\text{из.кр}}^\alpha K_{\delta 0} n \delta S_\text{к} q_\infty$. Эта сила приложена в фокусе по углу δ.

Координата этой точки $x_{F\delta}$ определяется аналогично координате $x_{F\alpha}$ (фокуса по углу α) по формуле (13.12) с заменой в ней коэффициента интерференции $K_{\alpha\alpha}$ на $K_{\delta 0}$ при $k_{\text{кр}} \approx 1$. Это объясняется тем, что в случае δ0, т. е. когда угол атаки корпуса равняется нулю, дополнительная нормальная сила $Y_{\text{кр.ф}}$, возникающая за счет влияния корпуса, также равна нулю.

Дополнительный момент ΔM_z, вызываемый нормальной силой ΔY, относительно центра масс летательного аппарата $\Delta M_z = \Delta Y(x_{\text{т}} - x_{F\delta})$. Переходя к аэродинамическим коэффициентам, получаем

$$\left.\begin{aligned} \Delta m_z &= k_{\text{т}} c^{\alpha}_{y\,\text{из.кр}} K_{\delta 0} n\delta \bar{S}_{\text{к}} (\bar{x}_{\text{т}} - \bar{x}_{F\delta}); \\ m^{\delta}_z &= k_{\text{т}} K_{\delta 0}\, c^{\alpha}_{y\,\text{из.кр}}\, n\bar{S}_{\text{к}} (\bar{x}_{\text{т}} - \bar{x}_{F\delta}). \end{aligned}\right\} \tag{13.55}$$

Из формулы (13.55) следует, что для оперения, расположенного позади крыла ($x_{F\delta} > x_{\text{т}}$), при отклонении рулей вниз ($\delta > 0$) $\Delta m_z < 0$, а при $\delta < 0$ величина $\Delta m_z > 0$, т. е. в обоих случаях $m^{\delta}_z < 0$. В первом случае балансировочный угол атаки уменьшается, а во втором — увеличивается (рис. 13.17).

§ 13.11 ПОДЪЕМНАЯ СИЛА ПРИ БАЛАНСИРОВКЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Рассмотрим прямолинейное установившееся движение летательного аппарата. Принимая в формуле (13.48) $\omega_z = \dot{\alpha} = \dot{\delta} = 0$, получаем $m_z = m_{z0} + m^{\alpha}_z \alpha + m^{\delta}_z \delta$. Из условия балансировки $m_z = 0$ найдем угол отклонения рулей, необходимый для балансировки аппарата на заданном угле атаки: $\delta_{\text{бал}} = -(1/m^{\delta}_z)(m_{z0} + m^{\alpha}_z \alpha)$.

В случае летательного аппарата, симметричного относительно плоскости xOz, имеем $m_{z0} = 0$ и

$$(\delta/\alpha)_{\text{бал}} = -m^{\alpha}_z / m^{\delta}_z. \tag{13.56}$$

Для сбалансированного летательного аппарата

$$c_{y\,\text{бал}} = c^{\alpha}_y \alpha + c^{\delta}_y \delta = \left[c^{\alpha}_y + c^{\delta}_y (\delta/\alpha)_{\text{бал}} \right] \alpha. \tag{13.57}$$

Из формулы (13.56) следует, что для летательного аппарата нормальной схемы (с оперением, расположенным за крылом) $(\delta/\alpha)_{\text{бал}} < 0$ и поэтому при балансировке происходят потери нормальной силы (13.57). Тогда для получения необходимой для полета подъемной силы требуется увеличить угол атаки, что приводит к увеличению индуктивного сопротивления. В результате аэродинамическое качество летательного аппарата уменьшается.

Из формул (13.56) и (13.57) также следует, что потери подъемной силы при балансировке аппарата зависят от запаса его статической устойчивости, так как $m^{\alpha}_z = m^{c_y}_z c^{\alpha}_y$. При фиксированном центре масс (координаты $\bar{x}_{\text{т}}$) производная $m^{c_y}_z$ зависит от положения аэродинамического фокуса. В случае крылатого летательного аппарата нормальной схемы фокус при переходе от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям полета обычно смещается назад. При этом запас статической устойчивости аппарата возрастает. Этим объясняется увеличение потерь на балансировку при переходе аппарата через скорость звука.

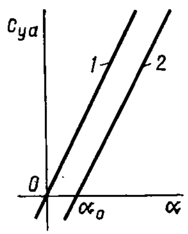


Рис. 13.18. Зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки для плоского крыла *1* и крыла с отрицательной геометрической круткой *2*

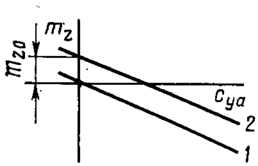


Рис. 13.19. Зависимости коэффициента момента от коэффициента подъемной силы для плоского крыла *1* и крыла с отрицательной геометрической круткой *2*

Смещение фокуса аппарата при таком переходе вызывается прежде всего смещением фокуса крыльев, которое, как отмечалось в гл. 9, существенно зависит от формы крыла в плане. Поэтому путем выбора соответствующей формы крыла в плане можно достичь снижения смещения фокуса по числам **M**. Этому условию удовлетворяют крылья сложной формы в плане (см. рис. 7.15), представляющие собой как бы комбинацию двух крыльев — исходного крыла сравнительно большого удлинения и крыла малого удлинения (наплыва) с большой стреловидностью, так как при малых скоростях благодаря невысоким несущим свойствам наплыва смещение фокуса вперед, вызываемое наплывом, значительно меньше, чем при $\mathbf{M} > 1$. При больших скоростях ($\mathbf{M} > 1$) фокус крыла располагается вблизи центра тяжести фигуры, образованной формой крыла в плане (см. гл. 9).

При заданной форме крыла в плане уменьшению потерь на балансировку способствует также искривление срединной поверхности крыла, оптимизация которой позволяет уменьшить при заданном значении коэффициента c_{ya} значение коэффициента индуктивного сопротивления по сравнению с плоским крылом.

Эффективным средством уменьшения потерь на балансировку и увеличения аэродинамического качества является, в частности, геометрическая крутка сечений относительно корневого сечения крыла на отрицательные углы, а также аэродинамическая крутка сечений, осуществляемая соответствующим набором профилей по размаху крыла с различными значениями угла нулевой подъемной силы α_0.

В случае отрицательной крутки крыла в отличие от плоского, подъемная сила становится равной нулю ($c_{ya} = 0$) при некотором положительном угле атаки (рис. 13.18). При этом в сечениях, близких к корневому, возникает положительная, а в концевых сечениях — отрицательная нормальная сила. В результате у закрученного стреловидного крыла при $c_{ya} = 0$ появляется момент на кабрирование, $m_{z0} > 0$ (рис. 13.19). Соответствующим подбором деформации крыла можно получить такое значение коэффициента $m_{z0} > 0$, при котором для заданного значения c_{ya} коэффициент момента m_z равен нулю ($m_{z\text{ЛА}} = 0$), т. е. летательный аппарат с закрученным крылом может быть сбалансирован без отклонения органов управления. В результате деформация крыла может привести к уменьшению потерь на балансировку и к увеличению аэродинамического качества аппарата.

§ 13.12. ДЕМПФИРУЮЩИЙ МОМЕНТ ТАНГАЖА. ПРОИЗВОДНАЯ $m_z^{\bar{\omega}_z}$

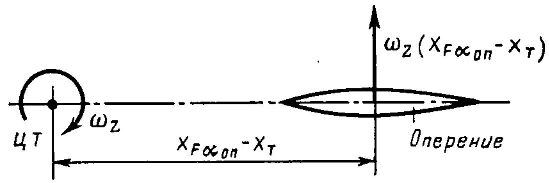


Рис. 13.20. Схема для определения демпфирующего момента оперения

Предположим, что аппарат, летящий со скоростью v, одновременно вращается относительно поперечной оси Oz с угловой скоростью ω_z. В этом случае в результате сложения поступательного и вращательного движений летательного аппарата изменяются местные углы атаки элементов поверхности по сравнению с поступательным движением без вращения. Тогда возникают аэродинамические силы, которые создают дополнительный момент тангажа, зависящий от угловой скорости.

Рассмотрим дополнительный момент от вращения летательного аппарата, вызываемый горизонтальным оперением. Наличие вращательного движения равносильно появлению дополнительной скорости потока на оперении, равной по величине и обратной по направлению окружной скорости (рис. 13.20). Ввиду того что хорда горизонтального оперения обычно значительно меньше расстояния между центром масс и фокусом оперения ($x_{F\alpha оп} - x_т$), приближенно примем, что вдоль хорды эта скорость постоянна и равна $\omega_z(x_{F\alpha оп} - x_т)$. Тогда угол атаки горизонтального оперения вследствие вращательного движения изменится на величину $\Delta\alpha \approx 57{,}3\omega_z \left(x_{F\alpha\,оп} - x_т\right)/\left(\sqrt{k_т}\ v_\infty\right)$, или

$$\Delta\alpha \approx 57{,}3\bar{\omega}_z \left(x_{F\alpha\,оп} - x_т\right)/\left(\sqrt{k_т}\ L\right), \tag{13.58}$$

где $\bar{\omega}_z = \omega_z L/v_\infty$.

В результате изменения угла атаки на оперении появляется дополнительная нормальная сила

$$\Delta Y_{оп} = \left(k_т K_{\alpha\alpha}\, c^{\alpha}_{y\,из.кр} S_к\right)_{оп} q_\infty \Delta\alpha, \tag{13.59}$$

которая при положительной угловой скорости ω_z (см. рис. 3.4) направлена вверх. Эта сила создает дополнительный момент тангажа $\Delta M_z = -\Delta Y_{оп}(x_{F\alpha о\,і} - x_т)$. Переходя от момента к коэффициенту момента $\Delta m_z = \Delta M_z/(q_\infty SL)$ с учетом выражений (13.58) и (13.59), найдем производную

$$m_z^{\bar{\omega}_z} = -57{,}3\left(K_{\alpha\alpha} \sqrt{k_т}\ c^{\alpha}_{y\,из.кр} \bar{S}_к\right)_{оп} \left(x_{F\,\alpha\,оп} - x_т\right)^2 / L^2. \tag{13.60}$$

Из выражения (13.60) видно, что $m_z^{\bar{\omega}_z} < 0$, т. е. момент тангажа горизонтального оперения, обусловленный вращением аппарата относительно оси Oz, направлен в сторону, обратную вращению. Этот момент препятствует вращению летательного аппарата и называется *демпфирующим моментом тангажа*. Производная $\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z}$ горизонтального оперения зависит от относительной площади консолей $\bar{S}_к$, квадрата отношения $(x_{F\alpha} - x_т)/L$ и числа M_∞. Чем больше $\bar{S}_к$ и $(x_{F\alpha} - x_т)/L$, тем выше демпфирующие свойства летательного аппарата.

Демпфирующий момент при вращении аппарата вокруг поперечной оси кроме оперения создают крыло и корпус. Демпфирующий момент оперения обычно составляет значительную долю суммарного демпфирующего момента летательного аппарата.

Следует отметить, что производная $m_z^{\bar{\omega}_z}$ не всегда меньше нуля. На некоторых режимах, например при закритических углах атаки, момент ΔM_z, возникающий при $\omega_z \neq 0$, способствует вращению летательного аппарата $(m_z^{\bar{\omega}_z} > 0)$, так как при этом увеличение угла атаки приводит к уменьшению нормальной силы.

§ 13.13. МОМЕНТ ТАНГАЖА ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА. ЗАПАЗДЫВАНИЕ СКОСА ПОТОКА

При рассмотрении аэродинамических сил и момента тангажа предполагалось, что движение летательного аппарата является установившимся, т. е. все параметры (скорость полета, угол атаки, углы отклонения органов управления) не зависят от времени.

В случае неустановившегося движения летательного аппарата кинематические параметры являются функциями времени. При этом характер обтекания частей летательного аппарата может заметно отличаться от обтекания тех же элементов установившимся потоком. В результате аэродинамические силы и моменты при неустановившемся и установившемся движениях могут различаться. При неустановившемся движении коэффициенты аэродинамических сил и моментов зависят не только от значений кинематических параметров в данный момент времени, но и от производных этих величин по времени.

Решение задачи определения аэродинамических характеристик аппарата в случае неустановившегося движения в строгой постановке чрезвычайно сложно. Эту задачу можно упростить с учетом следующего обстоятельства. Обычно при полете летательного аппарата кинематические параметры движения изменяются по времени медленно, вследствие чего нестационарность обтекания влияет на коэффициенты сил и моментов сравнительно мало. Поэтому для такого случая в первом приближении можно принять, что основное влияние на характер обтекания в каждый момент времени оказывают кинематические параметры именно в этот момент времени. Это предположение тем ближе к действительности, чем меньше число Струхаля $\mathbf{Sh}$. В этом случае при исследовании нестационарного движения летательного аппарата обычно пользуются гипотезой стационарности, согласно которой принимается, что силы и моменты, действующие на летательный аппарат в неустановившемся полете, полностью определяются кинематическими параметрами движения в данный момент времени.

Гипотеза стационарности не всегда применима. Ею нельзя пользоваться при определении момента тангажа горизонтального оперения, расположенного за крылом, когда при неустановившемся движении летательного аппарата необходимо учитывать запаздывание скоса потока. Это объясняется тем, что при неустановившемся движении обтекание горизонтального оперения определяется не только параметрами движения в данный момент времени, как это следует из гипотезы стационарности, но и значениями параметров в предшествующие моменты времени. Для подтверждения этого рассмотрим более подробно условия обтекания горизонтального оперения при неустановившемся движении.

Предположим, что аппарат движется с постоянной скоростью v, а угол атаки с течением времени изменяется, при этом изменяется и скос потока в области оперения. Однако вследствие того что оперение расположено на некотором расстоянии L_1 за крылом, поток, скошенный крылом, достигает оперения только через некоторый промежуток времени: $\Delta t = L_1/\sqrt{k_т}\, v$. В соответствии с этим угол скоса потока в данный момент времени t при неустановившемся движении определяется как угол скоса потока при установившемся движении, но при другом угле атаки α, соответствующем моменту времени $t_1 = t - \Delta t$.

Представим α_1 в виде $\alpha_1 = \alpha(t) + \Delta\alpha$, где $\Delta\alpha = -\dot{\alpha}(t)\Delta t$, причем при $\dot{\alpha}(t) > 0$ угол $\alpha_1 < \alpha(t)$, а при $\dot{\alpha}(t) < 0$ угол $\alpha_1 > \alpha(t)$.

Изменение угла атаки приводит к изменению угла скоса потока на $\Delta\varepsilon = \varepsilon^{\alpha}\dot{\alpha}$. При $\dot{\alpha}(t) > 0$ угол скоса потока по сравнению с установившимся движением при заданном угле атаки уменьшается. При $\dot{\alpha}(t) < 0$ скос потока увеличивается: $\Delta\varepsilon > 0$.

Следовательно, при неустановившемся движении аппарата происходит запаздывание скоса потока. Это приводит к возникновению дополнительной нормальной силы

$$\Delta Y_{оп} = -\left(k_т K_{\alpha\alpha}\, c^{\alpha}_{y\,из.кр} S_к\right)_{оп} q_\infty\, \varepsilon^{\alpha}\, \dot{\alpha}(t)\, \Delta t \qquad (13.61)$$

и момента относительно центра масс

$$\Delta M_z = \Delta Y_{оп}\left(x_{F\alpha\,оп} - x_т\right). \qquad (13.62)$$

Из выражений (13.61), (13.62) следует, что при $\dot{\alpha}(t) > 0$ момент $\Delta M_z < 0$, а при $\dot{\alpha}(t) < 0$ момент $\Delta M_z > 0$, т. е. возникающий вследствие запаздывания скоса потока момент тангажа всегда препятствует изменению угла атаки (действует как демпфирующий момент тангажа).

Введя коэффициент момента $\Delta m_z = \Delta M_z/(q_\infty S L)$, найдем производную:

$$\overline{m_z^{\dot{\alpha}}} = -\left(\sqrt{k_т}\, K_{\alpha\alpha}\, c^{\alpha}_{y\,из.\,кр} \overline{S}_к\right)_{оп} \varepsilon^{\alpha}\, \frac{x_{F\alpha\,оп} - x_т}{L}\, \frac{L_1}{L}. \qquad (13.63)$$

Здесь $\bar{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha} L/v$ [см. (3.72)]. Производная $\bar{m}_z^{\dot{\alpha}}$ всегда отрицательна.

Из выражения (13.63) следует, что величина производной $\bar{m}_z^{\dot{\alpha}}$ зависит от числа M_∞. В соответствии с изменением c_y^α, ε^α, $x_{F\alpha}$ в зависимости от числа M при увеличении M в диапазоне $M_\infty < M_{кр}$ производная $\bar{m}_z^{\dot{\alpha}}$ возрастает, а при сверхзвуковых скоростях — монотонно убывает, т. е. демпфирующие свойства летательного аппарата ухудшаются.

Таким образом, коэффициент момента тангажа при неустановившемся движении летательного аппарата можно представить в виде суммы двух коэффициентов — коэффициента момента, вычисленного на основе гипотезы стационарности при значениях кинематических параметров для данного момента времени, и коэффициента дополнительного момента, вызываемого запаздыванием скоса потока.

§ 13.14. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ БОКОВОМ ДВИЖЕНИИ

Ограничимся рассмотрением физической природы возникновения поперечной (боковой) силы, моментов крена и рыскания при скольжении аппарата, отклонении рулей направления, а также вращении аппарата вокруг осей Ox и Oy.

Для определения производных от аэродинамических коэффициентов в боковом движении обычно пользуются данными экспериментальных исследований.

Поперечная сила и момент рыскания при скольжении летательного аппарата. Выше рассмотрено движение летательного аппарата без скольжения ($\beta = 0$) и при отсутствии вращения вокруг осей Ox и Oy ($\omega_x = \omega_y = 0$). При наличии скольжения ($\beta \neq 0$) возникает поперечная сила Z, представляющая собой проекцию полной аэродинамической силы, действующей на летательный аппарат, на направление перпендикуляра к его плоскости симметрии. При этом боковая сила, являющаяся проекцией полной аэродинамической силы на направление оси $Oz_а$ скоростной системы координат, также $Z_а \neq 0$. Коэффициенты поперечной и боковой сил $c_z = Z/(q_\infty S)$, $c_{zа} = Z_а/(q_\infty S)$.

Физическая природа возникновения поперечной и нормальной сил аналогична. Отличие состоит в том, что нормальная сила в основном создается горизонтальными проекциями поверхностей частей летательного аппарата при $\alpha \neq 0$, а поперечная сила вызывается их вертикальными проекциями при $\beta \neq 0$.

Очевидно, что для тела вращения, крыла +-образной схемы $c_z^\beta = -c_y^\alpha$. Здесь учтено, что согласно правилу знаков (см. рис. 3.4) положительному значению β соответствует отрицательное значение коэффициента c_z.

В общем случае несимметричного летательного аппарата производную c_z^β можно приближенно определить так же, как производную

c_y^α для аппарата, условно повернутого относительно оси Ox на 90° в сторону правого крыла: $c_z^\beta = -[c_y^\alpha]_{90°}$.

Момент рыскания M_y — момент относительно оси Oy — создается в основном поперечными силами, действующими на части летательного аппарата. Поэтому, так же как между поперечной и нормальной силами, имеется аналогия между моментами рыскания M_y и тангажа M_z. Тогда аналогично момент рыскания можно определить как момент тангажа аппарата, повернутого на 90° вокруг оси Ox: $M_y = [M_z]_{90°}$.

Введя коэффициент момента рыскания $m_y = M_y/(q_\infty S l)$ (см. § 3.4), получаем связь между производными m_y^β и m_z^α, т. е. $m_y^\beta = (L/l)\,[m_z^\alpha]_{90°}$. Отсюда следует, что производная m_y^β, так же как m_z^α, зависит от геометрических параметров летательного аппарата и от числа $\mathbf{M}_\infty$. Производная m_y^β существенно зависит от относительной площади вертикального оперения $S_{\text{в.о}}/S$ и отношения расстояния от центра масс аппарата до фокуса к размаху крыльев l, так как момент M_y, создаваемый вертикальным оперением, обычно составляет основную долю суммарного момента M_y аппарата. С увеличением этих параметров производная m_y^β возрастает. Наибольшее значение производная m_y^β имеет в трансзвуковой области. При увеличении числа $\mathbf{M}_\infty (\mathbf{M}_\infty > 1)$ обычно величина m_y^β уменьшается.

По аналогии с продольной статической устойчивостью, характеризуемой производной m_z^α, в этом случае вводится понятие о путевой статической устойчивости, оцениваемой производной m_y^β. Если производная $m_y^\beta < 0$, то летательный аппарат обладает статической устойчивостью пути, т. е. момент M_y, возникший в результате скольжения, направлен в сторону уменьшения угла β (устранения скольжения).

Если $m_y^\beta > 0$, то аппарат неустойчив, т. е. угол скольжения возрастает.

Аналогично приближенно можно определить статическую производную коэффициента момента m_y по углу отклонения рулей направления δ: $m_y^{\delta_\text{н}} = (L/l)\left[m_z^{\delta_\text{в}}\right]_{90°}$, так как момент M_y, возникающий при отклонении руля направления, аналогичен моменту тангажа M_z при отклонении руля высоты.

Момент крена при скольжении летательного аппарата. Момент крена M_x — момент относительно продольной оси летательного аппарата — возникает при несимметричном обтекании аппарата, т. е. при полете со скольжением, отклонении органов управления боковым движением (элеронов, рулей направления), а также при вращении аппарата вокруг осей Ox, Oy, Oz. Коэффициент момента крена $m_x = M_x/(q_\infty S l)$ (см. § 3.4).

Мерой поперечной статической устойчивости является производная m_x^β. При $m_x^\beta < 0$ аппарат обладает поперечной статической устойчивостью, а при $m_x^\beta > 0$ он статически неустойчив.

Поясним это на следующем примере. Пусть аппарат, находящийся в установившемся полете, внезапно накренится в сторону правого

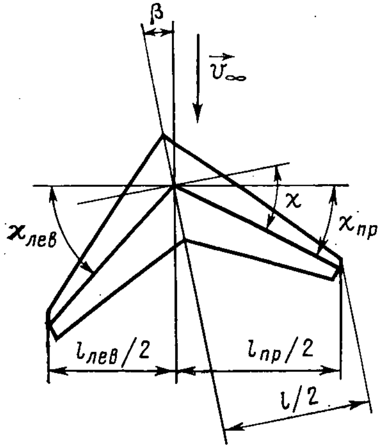


Рис. 13.21. Схема для учета изменения параметров правого и левого крыльев при $\beta \neq 0$

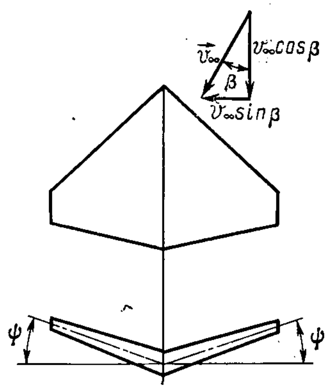


Рис. 13.22. Крыло с поперечной V-образностью при $\beta \neq 0$

крыла на некоторый угол γ. Тогда проекция нормальной силы на горизонтальную плоскость вызовет скольжение аппарата также на правое крыло ($\beta > 0$). Скольжение вызывает момент M_x относительно продольной оси. Если при этом момент M_x отрицательный ($m_x^\beta < 0$), то, согласно принятому правилу знаков, под действием этого момента аппарат накренится на левое крыло, т. е. в сторону, противоположную первоначальному крену.

Момент крена создается в основном крыльями и вертикальным оперением. Момент крена, создаваемый крылом при $\beta \neq 0$, главным образом зависит от угла стреловидности и угла поперечной V-образности.

Рассмотрим влияние угла стреловидности. При $\beta \neq 0$ создаются различные условия обтекания правой и левой половины крыла. Например, скольжение на правое крыло (рис. 13.21) равносильно уменьшению угла стреловидности ($\chi_{пр} = \chi - \beta$) и увеличению удлинения правого крыла.

При этом на левом крыле угол стреловидности возрастает ($\chi_{лев} = \chi + \beta$), а удлинение уменьшается. В результате нормальная сила правого крыла возрастает, а левого крыла уменьшается, вследствие чего возникает момент, накренивающий летательный аппарат на левое крыло ($m_x^\beta < 0$). Коэффициент момента крена, пропорциональный углам β и α (при малых β, α), существенно зависит от угла стреловидности. При увеличении стреловидности производная m_x^β возрастает.

Рассмотрим теперь крыло, имеющее поперечную V-образность, т. е. крыло, у которого правая и левая консоли не лежат в одной плоскости и составляют с плоскостью Oxz угол $\psi \neq 0$ (рис. 13.22). Предположим, что угол атаки $\alpha = 0$. Покажем, что вследствие скольжения на правой и левой консолях появляются дополнительные углы атаки разного знака. Разложим вектор скорости $\vec{v}_\infty$ на правом крыле на составляющие $v_\infty \cos\beta$ и $v_\infty \sin\beta$. Ввиду V-образности крыла составляющая $v_\infty \sin\beta$ не лежит в плоскости хорд. Поэтому ее проекция на направление нормали к плоскости крыла не равна нулю: $v_n = v_\infty \sin\beta \sin\psi$. Эта составляющая скорости вызывает увеличение угла атаки правого крыла $\sin\alpha_{пр} = \sin\beta \sin\psi$. При малых углах β и ψ $\alpha_{пр} = \beta\psi$. Здесь $\alpha_{пр}$ — угол атаки правого крыла, рад.

Аналогично, на левом крыле $\alpha_{лев} = -\beta\psi$. Различие в углах атаки приводит к возникновению дополнительного момента крена в сторону левого крыла, т. е. при положительном угле β момент крена, вызываемый положительным углом V-образности, имеет отрицательный знак ($m_x^\beta < 0$). Величина производной зависит от угла ψ, формы крыла в плане и числа **М**. Очевидно, что чем больше угол ψ и производная $c^\alpha_{y\,кр}$, тем больше m_x^β.

Следовательно, производную m_x^β крыла можно представить в виде суммы производной m_x^β, связанной с влиянием угла поперечной V-образности и угла стреловидности. Первый член зависит от формы крыла — углов χ, ψ, удлинения и сужения. Второй член также зависит от геометрических параметров крыла и от угла атаки (от коэффициента c_y). Степень поперечной статической устойчивости стреловидного крыла для разных режимов полета может оказаться различной. При увеличении угла атаки (коэффициента c_y) поперечная устойчивость возрастает. Уменьшение степени поперечной устойчивости стреловидного крыла можно получить путем придания ему отрицательной поперечной V-образности.

На момент крена влияет также интерференция между крылом и корпусом. При полете со скольжением корпус изменяет характер распределения давления по прилегающим к нему частям крыла. В областях сочленения крыла и корпуса с одной стороны возникает повышенное давление $\Delta p > 0$ (на крыле, на которое происходит скольжение), а с другой стороны корпуса разрежение $\Delta p < 0$ (рис. 13.23). Возникающий при этом момент в случае высокоплана (рис. 13.23, *а*) стремится накренить аппарат влево, а в случае низкоплана (рис. 13.23, *б*) — вправо. Следовательно, при схеме высокоплана интерференция между крылом и корпусом увеличивает поперечную устойчивость, а для низкоплана уменьшает ее. В случае среднеплана изменение степени поперечной статической устойчивости вследствие интерференции мало.

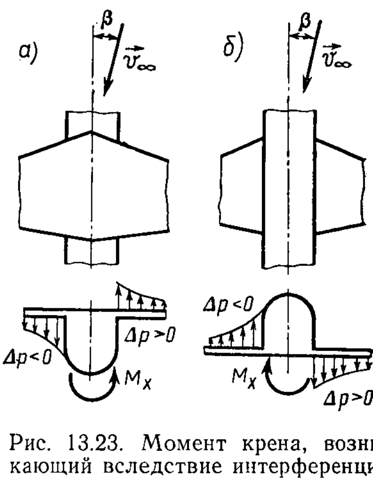


Рис. 13.23. Момент крена, возникающий вследствие интерференции между крылом и корпусом

При полете со скольжением момент крена вызывает также вертикальное оперение, если оно расположено несимметрично относительно плоскости Oxz.

При $\beta \neq 0$, очевидно, возникает момент крена и на горизонтальном оперении. При этом кроме собственного момента M_x возникает момент крена, вызываемый неодинаковым влиянием вихревой пелены, сбегающей с передней несущей поверхности, на правую и левую консоли горизонтального оперения. Например, при $\beta > 0$ скос потока на правой консоли больше, чем на левой, а подъемная сила соответственно на правой консоли меньше, чем на левой. Поэтому появляется момент, накренивающий летательный аппарат на правое крыло. Этот момент крена может быть существенным для летательного аппарата так называемой схемы «утка», т. е. для летательного аппарата с расположенным впереди горизонтальным оперением. В этом случае знак индуцированного момента крена вследствие интерференции оперения и крыльев обычно совпадает со знаком собственного момента крена крыльев. Поэтому суммарный момент крена при $\alpha > 0$, $\delta_в > 0$ и $\beta > 0$ может быть значительным.

При скольжении и одновременном отклонении элеронов $\delta_э$ и руля направления $\delta_н$ коэффициент момента крена при малых углах β, $\delta_э$, $\delta_н$ будет $m_x = m_x^{\beta}\beta + m_x^{\delta_э}\delta_э + m_x^{\delta_н}\delta_н$.

Учитывая, что элероны обычно располагаются у концов крыла, при определении производной $m_x^{\delta_э}$ влияние корпуса можно не учитывать и пользоваться данными для изолированного крыла. Величина производной $m_x^{\delta_э}$ зависит от формы крыла в плане, относительной хорды и размаха элерона ($\bar{b}_э = b_э/b$, $\bar{l}_э = 2l_э/l$; здесь $l_э$ — размах одного элерона), а также от числа **M**.

Производная $m_x^{\delta_н}$ определяется аналогично производной коэффициента момента тангажа по углу отклонения руля высоты m_z^{δ}. При переходе от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям производные $m_x^{\delta_э}$ и $m_x^{\delta_н}$ снижаются, так как при дозвуковых скоростях отклонение элерона и руля направления вызывает перераспределение давления по всей несущей поверхности, а при сверхзвуковых скоростях — только на самих отклоняемых поверхностях.

Величины потребных углов отклонения элеронов и рулей направления для балансировки летательного аппарата в прямолинейном полете со скольжением и с креном определяются из условия равенства нулю коэффициентов m_x и m_y:

$$m_x^{\beta}\beta + m_x^{\delta_э}\delta_э + m_x^{\delta_н}\delta_н = 0; \quad m_y^{\beta}\beta + m_y^{\delta_н}\delta_н = 0. \tag{13.64}$$

Отсюда

$$\delta_н = -\frac{m_y^{\beta}}{m_y^{\delta_н}}\beta; \quad \delta_э = -\frac{m_x^{\beta}}{m_x^{\delta_э}}\left[1 - \frac{m_x^{\delta_н}}{m_x^{\beta}}\,\frac{m_y^{\beta}}{m_y^{\delta_н}}\right]\beta. \tag{13.65}$$

Вращательные производные $\overline{m}_x^{\overline{\omega}_x}$, $\overline{m}_x^{\overline{\omega}_y}$, $\overline{m}_y^{\overline{\omega}_y}$, $\overline{m}_y^{\overline{\omega}_x}$. При вращении летательного аппарата вокруг осей Ox и Oy с угловыми скоростями ω_x и ω_y возникают моменты M_x и M_y, физическая природа которых аналогична природе продольного демпфирующего момента. Предположим, что аппарат движется со скоростью v и одновременно вращается вокруг оси Ox с угловой скоростью ω_x. Вращение аппарата эквивалентно появлению в каждом сечении крыла дополнительной вертикальной скорости потока $v_y = \omega_x z$ (рис. 13.24). При направлении вращения, указанном на рис. 13.22, это приводит к увеличению угла атаки правого и к уменьшению угла атаки левого крыла на угол $\Delta\alpha = v_y/v$. Здесь $\Delta\alpha$ — угол, рад.

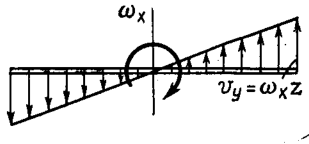


Рис. 13.24. Схема для объяснения изменения углов атаки правого и левого крыльев при вращении аппарата вокруг оси Ox

В соответствии с этим изменяются и нормальные силы на правой и левой консолях. В результате создается момент крена, препятствующий вращению летательного аппарата, т. е. момент крена, возникающий при вращении аппарата вокруг оси Ox, является демпфирующим моментом ($\overline{m}_x^{\overline{\omega}_x} < 0$). Здесь $\overline{\omega}_x = \omega_x l/(2v)$. Величина производной $\overline{m}_x^{\overline{\omega}_x}$ крыла, очевидно, зависит от распределения производной c_y^α по размаху, т. е. от формы крыла, и числа M_∞. Характер изменения $\overline{m}_x^{\overline{\omega}_x}$ по числу M аналогичен характеру зависимости c_y^α от M_∞.

Следует иметь в виду, что при закритических углах атаки, когда $c_y^\alpha < 0$, производная $\overline{m}_x^{\overline{\omega}_x}$ имеет положительный знак, т. е. при этом появляется момент самовращения крыла, который ускоряет вращение крыла до тех пор, пока не достигнут режим установившегося вращения крыла вокруг оси Ox (авторотация). Вращательная производная $\overline{m}_x^{\overline{\omega}_x}$ летательного аппарата в основном определяется величиной $\overline{m}_x^{\overline{\omega}_x}$ крыла, так как демпфирующие моменты, создаваемые корпусом и оперением, обычно малы. Коэффициент демпфирующего момента оперения пропорционален отношению $(S_{\text{оп}}/S)/(l_{\text{оп}}^2/l^2)$, которое обычно много меньше единицы.

Для аппарата самолетной схемы с развитым вертикальным оперением необходимо учитывать и демпфирующий момент крена вертикального оперения. Производная $\overline{m}_{x\text{в.о}}^{\overline{\omega}_x}$ определяется аналогично производной $\overline{m}_x^{\overline{\omega}_x}$ крыла. При вращении аппарата с угловой скоростью ω_x на вертикальном оперении возникают дополнительные скорости $\omega_x y$, перпендикулярные плоскости оперения. В соответствии с этим появляются углы скольжения $\Delta\beta = \omega_x y/v$, возникают поперечная сила Z и момент крена M_x.

Ввиду малости высоты оперения по сравнению с размахом крыла при расчете производной $m_{x\text{в.о}}^{\bar{\omega}_x}$ обычно не учитывают изменения угла $\Delta\beta$ по оперению, а считают его постоянным и равным углу $\Delta\beta$ в центре тяжести площади оперения ($y = y_{\text{в.о}}$). Тогда вращательную производную $m_{x\text{в.о}}^{\bar{\omega}_x}$ можно выразить через статическую производную $m_{x\text{в.о}}^{\beta}$.

Действительно, в этом случае $m_{x\text{в.о}} = m_{x\text{в.о}}^{\beta}\Delta\beta$, где $\Delta\beta \approx \omega_x y_{\text{в.о}}/v$. Тогда, введя безразмерную угловую скорость $\bar{\omega}_x = \omega_x l/(2v)$, получим

$$m_{x\,\text{в.о}}^{\bar{\omega}_x} = 2y_{\text{в.о}} m_{x\,\text{в.о}}^{\beta} \Big/ l. \tag{13.66}$$

При вращении летательного аппарата вокруг оси Ox с угловой скоростью ω_x вследствие приращения углов атаки изменяются и продольные силы X на правом и левом крыльях. В результате возникает момент рыскания крыла M_y.

В случае несимметричного вертикального оперения относительно плоскости Oxz поперечная сила, возникающая на оперении при вращении летательного аппарата с угловой скоростью ω_x, может создавать также момент рыскания, т. е. вращательная производная $m_y^{\bar{\omega}_x} \neq 0$.

Предположим теперь, что летательный аппарат движется со скоростью v и вращается вокруг оси Oy с угловой скоростью ω_y. В этом случае в каждом сечении крыла появляются дополнительные скорости $\Delta v = \omega_y z$, при положительном направлении вращения увеличивающие скорость потока на правом и уменьшающие ее на левом крыле. В соответствии с этим изменяются нормальные и продольные силы, действующие на правое и левое крылья. В результате возникают дополнительный момент крена $M_x(\omega_y)$, накренивающий летательный аппарат влево ($m_x^{\bar{\omega}_y} < 0$), и момент рыскания $M_y(\omega_y)$, препятствующий вращению аппарата вокруг оси Oy ($m_y^{\bar{\omega}_y} < 0$). Здесь $\bar{\omega}_y$ — безразмерная угловая скорость: $\bar{\omega}_y = \omega_y l/(2v)$.

Вращательная производная $m_x^{\bar{\omega}_y}$ в основном создается крылом, в случае несимметрично расположенного вертикального оперения также оперением, а вращательная производная $m_y^{\bar{\omega}_y}$ главным образом возникает за счет вертикального оперения и корпуса и в меньшей степени крыла. Ввиду того что момент рыскания при вращении аппарата вокруг оси Oy аналогичен моменту тангажа, возникающего при вращении аппарата вокруг оси z, то, используя равенство производных $M_y^{\omega_y} = \left[M_z^{\omega_z}\right]_{90^\circ}$ и переходя к безразмерным коэффициентам m_y и m_z и угловым скоростям $\bar{\omega}_y = \omega_y l/(2v)$ и $\bar{\omega}_z = \omega_z L/v$, получаем

$$m_y^{\bar{\omega}_y} = 2\left(\frac{L}{l}\right)^2 \left[m_z^{\bar{\omega}_z}\right]_{90^\circ}. \tag{13.67}$$

Как указывалось выше, вращательные производные $\bar{m}_x^{\omega_x}$, $\bar{m}_y^{\omega_x}$, $\bar{m}_x^{\omega_y}$, $\bar{m}_y^{\omega_y}$ определяются преимущественно экспериментально. При отсутствии таких данных для оценки их величин обычно пользуются приближенными аналитическими соотношениями (см., например, [19, 27]).

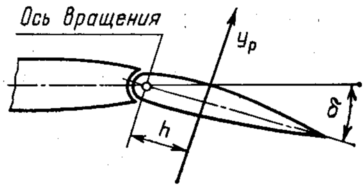


Рис. 13.25. Схема возникновения шарнирного момента руля

§ 13.15. ШАРНИРНЫЕ МОМЕНТЫ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ

Шарнирным моментом $M_ш$ принято называть момент аэродинамических сил, действующих на органы управления (рули, элероны) относительно их осей вращения.

Из рис. 13.25 следует, что

$$M_ш = -Y_р h, \tag{13.68}$$

где $Y_р$ — нормальная сила, возникающая на руле; h — расстояние между центром давления руля и осью его вращения.

Момент $M_ш$ можно выразить через коэффициент шарнирного момента $m_ш$:

$$M_ш = m_ш q S_р b_{А.р}, \tag{13.69}$$

где $S_р$, $b_{А.р}$ — площадь и средняя аэродинамическая хорда руля; q — скоростной напор.

Тогда, приравнивая выражения (13.68) и (13.69), получаем

$$m_ш = -c_{y р} h / b_{А.р}. \tag{13.70}$$

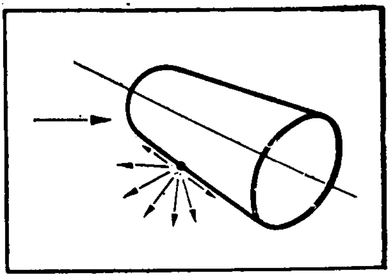
Отсюда следует, что коэффициент момента $m_ш$ прежде всего зависит от типа рулей, их формы, числа M_∞, углов атаки α и отклонения рулей δ. Эти параметры определяют значение коэффициента $c_{y\,р}$ и положение центра давления руля. Коэффициент $m_ш$ существенно зависит также от положения оси вращения.

Из выражения (13.69) видно, что при заданном значении коэффициента $m_ш$ с увеличением размеров рулей $S_р$, $b_{А.р}$ и скоростного напора шарнирные моменты, а вместе с ними и усилия, необходимые для отклонения рулей, интенсивно возрастают. Для снижения шарнирных моментов необходимо уменьшить коэффициент $m_ш$. Это достигается путем применения аэродинамической компенсации рулей, т. е. такой компоновки рулей, при которой действующие на руль аэродинамические силы давали бы относительно их осей вращения сравнительно небольшие моменты.

Имеются различные виды аэродинамической компенсации рулей [27]. Наибольшее распространение получила осевая компенсация рулей, при которой уменьшение шарнирного момента достигается путем смещения оси вращения руля назад от его передней кромки. При этом часть руля, которая находится перед осью вращения, создает шарнирный момент, способствующий отклонению руля, т. е. является компенсатором. Очевидно, при увеличении степени осевой компенсации, определяемой как отношение площади компенсатора к общей площади руля, коэффициент шарнирного момента уменьшается. Однако при этом ухудшается обтекание несущей поверхности с таким рулем, что может привести к снижению его эффективности.

На величину шарнирных моментов кроме указанных выше влияют такие факторы, как форма носовой части руля, наличие щелей между рулем и стабилизатором и др., которые трудно учесть при теоретических расчетах. Поэтому экспериментальные исследования характеристик шарнирного момента имеют важное значение.

14
ГЛАВА



ОСНОВЫ АЭРОДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННОЙ СРЕДЫ

§ 14.1. РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА. ЧИСЛО КНУДСЕНА. КОЭФФИЦИЕНТ АККОМОДАЦИИ

В связи с освоением космического пространства, полетов летательных аппаратов на больших высотах и полетов к другим планетам возникают задачи, связанные с аэродинамикой разреженных газов. В условиях разреженной среды, как указывалось в гл. 1, гипотеза сплошности среды неприменима. Здесь необходимо учитывать молекулярную структуру газа.

Задачей аэродинамики разреженных газов является изучение законов движения газов и их взаимодействия с движущимися телами, когда длина свободного пробега молекул газа становится соизмеримой с характерными размерами тела. В этом случае методы расчета течений газа, теплоотдачи и аэродинамических характеристик тел, основанные на уравнениях обычной газодинамики, становятся непригодными.

Теоретической основой аэродинамики разреженных газов является *кинетическая теория газов*. Рассмотрим основные сведения, необходимые для понимания физических явлений перехода от представления о газе как о сплошной среде в обычной газодинамике к молекулярно-кинетическому подходу, свойственному в аэродинамике разреженных газов. Рассмотрим также аэродинамические характеристики простых тел в условиях разреженной среды.

Молекулярную структуру газа можно охарактеризовать длиной свободного пробега молекул между их последовательными соударениями. Поскольку мгновенные скорости хаотического движения отдельных молекул, а также их пробеги от соударения до соударения могут изменяться в широких пределах, то длина свободного пробега различных молекул в рассматриваемом объеме также различна. Поэтому обычно вводят среднюю длину свободного пробега молекул. Эта длина зависит от числа молекул в единице объема (от плотности среды), средней скорости хаотического движения (температуры газа) и от размеров самих молекул. Для определения средней длины свободного пробега молекул удобно пользоваться следующей формулой:

$$l = 1{,}255\sqrt{k}\,\nu/a, \tag{14.1}$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость; a — скорость звука, $k = c_p/c_v$.

Пользуясь формулой (14.1), можно оценить изменение средней длины свободного пробега молекул в зависимости от высоты полета. Легко показать, что величина l составляет миллионные доли сантиметра вблизи Земли и достигает нескольких метров на высотах порядка 150 км; на высотах порядка 200 км она равна сотням метров, а на высоте 300 км от поверхности Земли — порядка километра.

При изучении обтекания тел потоком разреженного газа важным параметром является отношение средней длины свободного пробега молекул l к характерному линейному размеру L, называемое *числом Кнудсена*: $\mathrm{Kn} = l/L$. Подставляя сюда l из (14.1), получаем

$$\mathrm{Kn} = 1{,}255\sqrt{k}\,\mathrm{M}/\mathrm{Re}. \tag{14.2}$$

При исследовании пограничного слоя в разреженной среде, принимая в качестве характерного размера его толщину δ и учитывая, что в случае ламинарного пограничного слоя $\delta/L \sim 1/\sqrt{\mathrm{Re}}$ (см. гл. 12), получим $\mathrm{Kn} \sim \mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}}$.

В зависимости от значения числа Кнудсена принято рассматривать следующие режимы течения газа. Если $\mathrm{Kn} < 0{,}01$, то можно пренебречь дискретностью среды, считать ее сплошной и применить гипотезу сплошности. Следовательно, значение $\mathrm{Kn} < 0{,}01$ соответствует *области обычной газодинамики*, а $\mathrm{Kn} > 0{,}01$ относится к области течения разреженного газа.

При чрезвычайно большой разреженности среды, если $\mathrm{Kn} > 10$, т. е. если длина свободного пробега молекул значительно больше характерного линейного размера тела или рассматриваемой области течения, изменение скорости и направление движения молекул вследствие соударения их друг с другом малы по сравнению с изменениями от соударения с поверхностью тела и ими можно пренебречь. Такой режим течения называется *свободномолекулярным*.

При умеренном разрежении, если $0{,}01 < \mathrm{Kn} < 1$, возникает так называемое *течение со скольжением*, которое существенно отличается от сплошного и свободномолекулярного потоков. В сплошной среде, как известно, выполняется граничное условие прилипания среды к поверхности тела. Поэтому в пограничном слое скорость потока изменяется от нуля на поверхности ($y = 0$) до некоторой скорости на внешней границе пограничного слоя.

В свободномолекулярном потоке понятие о пограничном слое неприменимо, так как отраженные от поверхности тела молекулы сталкиваются с молекулами набегающего потока лишь на достаточно большом расстоянии от тела.

В течениях со скольжением скорость потока у стенки не равна нулю, а газ как бы скользит по поверхности тела с конечной скоростью. В пограничном слое таких течений скорость потока изменяется от скорости скольжения при $y = 0$ до скорости на внешней границе пограничного слоя. При этом температура газа у стенки также не равна температуре поверхности тела.

В переходной области от течения со скольжением до свободномолекулярного потока происходят чрезвычайно сложные явления. Здесь

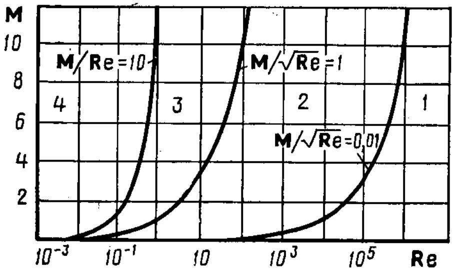


Рис. 14.1. Границы различных режимов течения газа:

1 — течение сплошной среды; *2* — течение со скольжением; *3* — переходный режим; *4* — свободномолекулярное течение

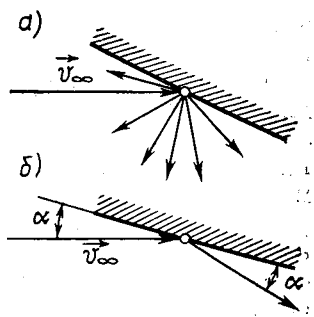


Рис. 14.2. Схемы отражения молекул от поверхности тела:

а — диффузное; *б* — зеркальное отражение молекул

одинаково важно как взаимодействие молекул друг с другом, так и соударение молекул с поверхностью тела, поэтому необходимо учитывать также взаимодействие отраженных молекул с молекулами набегающего потока.

На рис. 14.1 нанесены границы различных режимов течения газа в зависимости от чисел M_∞ и Re. Видно, что при заданном значении числа M_∞ изменение числа Re может привести к изменению режима течения газа. Например, с увеличением высоты полета число Re уменьшается и тогда можно получить различные режимы — от режима сплошной среды до режима свободномолекулярного потока. В частности, для аппарата с характерной длиной $L = 2$ м при $M_\infty = 10$ разреженность среды (см. область *2* на рис. 14.1) начинает проявляться на высотах более 40 км. На высотах более 120 км при $M_\infty = 28$ режим течения можно считать свободномолекулярным (область *4*).

Рассмотрим схему взаимодействия молекул со стенкой и введем понятия о коэффициентах отражения и аккомодации. Двумя предельными схемами отражения молекул поверхностью являются диффузное (рис. 14.2, *а*) и зеркальное (рис. 14.2, *б*) отражения. Можно считать, что при *диффузном отражении* молекулы газа при столкновении с телом адсорбируются (поглощаются) поверхностью тела на время, в течение которого происходит уравнивание температур газа и стенки, т. е. устанавливается термодинамическое равновесие между молекулами газа и поверхности, а затем испускаются (эмиттируются) по всем возможным направлениям с кинетической энергией, примерно соответствующей температуре стенки.

При *зеркальном отражении* тангенциальная составляющая скорости остается неизменной, а нормальная составляющая изменяет направление на обратное при неизменной величине.

Как показывают исследования, в реальных потоках разреженного газа не реализуется ни один из этих предельных случаев и отражение имеет промежуточный (комбинированный) характер. В практике расчетов широко используется модель отражения, являющаяся комбинацией этих двух идеализированных схем.

Обозначим f коэффициент, представляющий собой отношение числа диффузно отраженных молекул к общему количеству отраженных молекул. Тогда $(1-f)$ будет долей зеркально отраженных молекул. Коэффициент f зависит от разновидности газа, скорости его молекул, материала и температуры стенки, состояния ее поверхности. При умеренных скоростях и температурах доля зеркального отражения на реальных (технических) поверхностях мала и молекулы отражаются преимущественно диффузно. Поэтому величину f часто принимают близкой к единице.

Для интегральной характеристики энергообмена между молекулами и стенкой в потоках разреженного газа широко используется *понятие о коэффициенте аккомодации энергии*, учитывающем отличие температуры отраженных молекул от температуры стенки. Этот коэффициент можно выразить как отношение

$$a_э = (E_i - E_r)/(E_i - E_{ст}), \tag{14.3}$$

где E_i, E_r — потоки энергии, переносимые молекулами, падающими на единичный элемент поверхности тела в единицу времени и отраженными от этого элемента; $E_{ст}$ — поток энергии, который переносился бы отраженными молекулами при условии установления термодинамического равновесия, т. е. в случае, если температура газа была бы равна температуре стенки.

Если $E_r = E_{ст}$ (при равенстве температур отраженного потока и стенки), то $a_э = 1$. В действительности коэффициент аккомодации $a_э < 1$ и зависит от физических свойств и скорости газа, материала и состояния поверхности, температур газа и стенки, а также ряда других факторов, включая угол падения молекул на поверхность. Очевидно, что при зеркальном отражении, когда $E_i = E_r$, коэффициент аккомодации $a_э = 0$.

Введем также понятие о коэффициентах аккомодации нормальной и тангенциальной составляющих импульса a_n и a_τ:

$$a_n = (P_{ni} - P_{nr})/(P_{ni} - P_{n\,ст}), \quad a_\tau = (P_{\tau i} - P_{\tau r})/P_{\tau i},$$

где P_{ni}, $P_{\tau i}$, P_{nr}, $P_{\tau r}$ — нормальные (n) и тангенциальные (τ) импульсы, приносимые падающими (i) молекулами и уносимые отраженными (r) молекулами; $P_{nст}$ — нормальный импульс, уносимый отраженными молекулами при условии, что температура газа равна температуре стенки. Очевидно, суммарный тангенциальный импульс диффузно отраженных молекул равен нулю.

§ 14.2. ТЕЧЕНИЕ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ

В аэродинамической практике течение со скольжением ($0{,}01 < \mathrm{Kn} < 1$) реализуется, как правило, при низких числах Re, когда неприменима теория пограничного слоя и в то же время числа Re еще слишком велики для использования приближения Стокса, основанного на частичном или полном пренебрежении инерционными силами.

Теория свободномолекулярных течений также не может быть использована из-за малости числа **Kn**. Задачи о течении со скольжением относятся к одним из наиболее трудных.

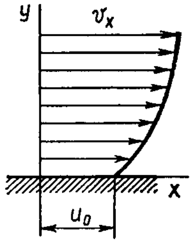


Рис. 14.3. Распределение скорости по нормали к поверхности в случае течения со скольжением

Приближенным подходом к решению таких задач является подход, базирующийся на обычных представлениях о течении сплошной вязкой среды, но с коррекцией граничных условий на поверхности, т. е. с учетом скольжения газа, а также скачка температуры у поверхности тела (рис. 14.3).

Для того чтобы оценить значение скорости скольжения, рассмотрим пристеночный слой толщиной l, равной средней длине свободного пробега молекул. В данный момент в этом слое находятся как молекулы, еще не испытавшие соударения с телом, так и отраженные от него. Продольная скорость первых в среднем равна $u_0 + l(dv_x/dy)_{y=0}$, где u_0 — скорость скольжения; y — координата точки, отсчитываемая по нормали к поверхности; $l(\partial v_x/\partial y)_{y=0}$ — изменение скорости в слое толщиной l.

Продольная скорость движения зеркально отраженных молекул равна их скорости до столкновения с поверхностью, а при диффузном отражении в среднем она равна нулю.

Учитывая при этом, что количество молекул, еще не испытавших столкновения с поверхностью, составляет половину всех молекул в слое, а количество зеркально и диффузно отраженных молекул составляет $(1-f)/2$ и $f/2$ от всех молекул соответственно, найдем среднюю скорость продольного движения молекул в слое:

$$u_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\,[u_0 + l\,(\partial v_x/\partial y)_{y=0}] + \frac{1-f}{2}\,[u_0 + l\,(\partial v_x/\partial y)_{y=0}] + \frac{f}{2}\,0.$$

Принимая $u_{\text{ср}} \approx u_0$, получаем

$$u_0 = [(2-f)/f]\,l\,(\partial v_x/\partial y)_{y=0}. \tag{14.4}$$

В случае изменения температуры вдоль стенки скорость скольжения газа определяется по формуле

$$u_0 = \frac{2-f}{f}\,l\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} + \frac{3}{4}\,\frac{\mu}{\rho T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{y=0}, \tag{14.5}$$

в которой второй член учитывает дополнительную скорость скольжения, вызываемую продольным градиентом температуры.

Температурный скачок у стенки [15]

$$\Delta T = (T)_{y=0} - T_{\text{ст}} = \frac{75\pi}{128}\,\frac{2-0{,}827a_э}{a_э}\,l\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{14.6}$$

При малой длине свободного пробега молекул ($l \ll L$) величинами u_0 (14.4) и ΔT (14.6) можно пренебречь, заменяя тем самым граничные условия скольжения обычными условиями прилипания газа к поверхности и полной тепловой аккомодации.

§ 14.3. СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ. ОБТЕКАНИЕ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ УСТАНОВИВШИМСЯ ПОТОКОМ

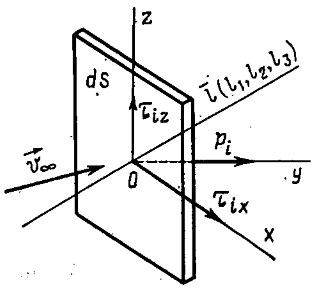


Рис. 14.4. Схема для определения сил, действующих на элементарную площадку

В свободномолекулярном потоке ($l/L \gg 1$) основную роль играет взаимодействие молекул с телом, а соударениями между молекулами, отраженными от поверхности, и молекулами набегающего потока можно пренебречь. Поэтому при рассмотрении свободномолекулярного течения можно предположить, что тело не влияет на набегающий поток. Тогда можно принять, что скорости молекул в набегающем и отраженном потоках определяются по классическому закону Максвелла, а аэродинамические силы, действующие на данный элемент поверхности выпуклого тела, можно вычислить независимо от других участков этой поверхности.

Рассмотрим элемент поверхности тела dS. Примем систему координат, в которой направление оси y совпадает с направлением нормали к поверхности (рис. 14.4). Обозначим e_1, e_2, e_3 направляющие косинусы вектора скорости набегающего потока (вектора скорости упорядоченного движения молекул). Суммарную силу воздействия потока на элемент разложим по двум направлениям: на направление нормали к поверхности и по касательной к ней. Обозначим p нормальные напряжения, а τ — касательные; при этом напряжение, создаваемое падающими молекулами, обозначим индексом i, а отраженными — r.

Найдем прежде всего число молекул, соударяющихся с элементом dS в единицу времени. При максвелловском распределении молекул газа по скоростям доля dn общего числа молекул в единице объема n_i, обладающая составляющими скорости теплового движения в интервале от v_x' до $v_x' + dv_x'$, от v_y' до $v_y' + dv_y'$ и от v_z' до $v_z' + dv_z'$, определяется по формуле

$$dn = n_i \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \left(\frac{1}{v_\text{в}}\right)^3 e^{-\left(1/v_\text{в}^2\right)\left(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2\right)} dv_x' dv_y' dv_z', \tag{14.7}$$

где $v_\text{в}$ — наиболее вероятная скорость хаотического движения молекул:

$$v_\text{в} = \sqrt{2RT}. \tag{14.8}$$

Выражение (14.7) можно представить в следующем виде:

$$dn = n_i / \left(\sqrt{\pi^3}\; v_\text{в}^3\right) e^{-\left(v'/v_\text{в}\right)^2} dv_x' dv_y' dv_z', \tag{14.9}$$

где $v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2$.

Из выражения (14.9) следует, что величина dn зависит от отношения скоростей $v'/v_в$ и интервала изменения скорости. При $v_\infty \neq 0$ на тепловое движение молекул накладывается упорядоченное движение со скоростью $v_\infty(v_\infty e_1, v_\infty e_2, v_\infty e_3)$. Обозначим v_x, v_y, v_z компоненты суммарной скорости движения молекул. При этом $v_x' = v_x - v_\infty e_1$, $v_y' = v_y - v_\infty e_2$, $v_z' = v_z - v_\infty e_3$. Тогда из формулы (14.9) следует, что число молекул в единичном объеме, имеющих составляющие скорости в пределах от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$,

$$dn = n_i/(\sqrt{\pi^3}\, v_в^3)\, e^{-(1/v_в^2)\left[(v_x - v_\infty e_1)^2 + (v_y - v_\infty e_2)^2 + (v_z - v_\infty e_3)^2\right]} \times$$
$$\times\, dv_x dv_y dv_z.$$

Молекулы, которые ударяются в единицу времени об элемент dS, находятся в объеме dSv_y. Тогда число молекул в объеме dSv_y равно $dnv_y dS$.

Для нахождения суммарного числа молекул N_1, соударяющихся с единичным элементом поверхности тела в единицу времени, полученное выражение надо проинтегрировать по всевозможным значениям v_x, v_y, v_z. Для определения числа молекул, соударяющихся с элементом поверхности, обращенным навстречу потоку, необходимо интегрировать в следующих пределах: $-\infty \leqslant v_x \leqslant \infty$; $0 \leqslant v_y \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant v_z \leqslant \infty$. Молекулы, имеющие отрицательную составляющую скорости вдоль нормали к поверхности ($v_y < 0$), не сталкиваются с поверхностью. Тогда

$$N_1 = n_i \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{v_в^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_y e^{-\left[(v_x - v_\infty e_1)^2 + (v_y - v_\infty e_2)^2 + (v_z - v_\infty e_3)^2\right]/v_в^2} \times$$
$$\times\, dv_x dv_y dv_z.$$

В результате интегрирования получаем

$$N_1 = n_i\left[v_в/(2\sqrt{\pi})\right]\{e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\,\beta[1 + \operatorname{erf}(\beta)]\}, \tag{14.10}$$

где $\beta = v_\infty e_2/v_в$, а $\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\beta e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятности, или

$$N_1 = n_i\left[v_в/(2\sqrt{\pi})\right]\chi_1(\beta), \tag{14.11}$$

где

$$\chi_1(\beta) = e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\,\beta[1 + \operatorname{erf}(\beta)]. \tag{14.12}$$

Аналогично можно определить число молекул N_2, падающих за единицу времени на заднюю сторону единичного элемента поверхности, т. е. находящуюся в теневой части тела. Для этого достаточно в выражении (14.12) заменить β на $-\beta$, так как при этом проекция вектора скорости на внутреннюю нормаль равна $-v_\infty e_2$. Тогда

$$N_2 = n_i \left[v_\text{в}/(2\sqrt{\pi})\right] \chi_2(\beta), \tag{14.13}$$

где

$$\chi_2(\beta) = e^{-\beta^2} - \sqrt{\pi}\,\beta\,[1 - \operatorname{erf}(\beta)]. \tag{14.14}$$

Воспользуемся теоремой изменения количества движения в проекции на некоторое произвольное направление $\bar{l}$ с направляющими косинусами l_1, l_2, l_3. Проекция скорости движения молекулы на направление $\bar{l}$ равна $v_l = v_x l_1 + v_y l_2 + v_z l_3$. Тогда проекция количества движения молекул, имеющих составляющие скорости в пределах от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$ и ударяющихся об единичный элемент поверхности в единицу времени, имеет вид $dW = mdn(v_x l_1 + v_y l_2 + v_z l_3)$, где m — масса молекулы.

Проекция суммарного количества движения молекул газа для единичного элемента, обращенного навстречу потоку:

$$W_1 = n_i \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \frac{m}{v_\text{в}^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_y e^{-\left[(v_x - v_\infty e_1)^2 + (v_y - v_\infty e_2)^2 + (v_z - v_\infty e_3)^2\right]/v_\text{в}^2} \times$$

$$\times (v_x l_1 + v_y l_2 + v_z l_3)\, dv_x dv_y dv_z.$$

В результате интегрирования имеем

$$W_1 = \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2} \frac{e_2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\beta} \left\{(e_1 l_1 + e_2 l_2 + e_3 l_3)\, e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\left[\left(\frac{1}{2\beta} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \beta\right] e_2 l_2 + \beta(e_1 l_1 + e_3 l_3)\right)[1 + \operatorname{erf}(\beta)]\right\}. \tag{14.15}$$

Аналогично получим проекцию количества движения молекул газа для элемента, расположенного в тени:

$$W_2 = \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2} \frac{e_2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\beta} \left\{(e_1 l_1 + e_2 l_2 + e_3 l_3)\, e^{-\beta^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\pi}\left[\left(\frac{1}{2\beta} + \beta\right) e_2 l_2 + \beta(e_1 l_1 + e_3 l_3)\right][1 - \operatorname{erf}(\beta)]\right\}. \tag{14.16}$$

Здесь плотность $\rho_\infty = n_i m$.

Приравнивая выражения секундных количеств движения (14.15) и (14.16) импульсу сил в единицу времени, получаем прекции сил воздействия падающих молекул на направление $\overline{l}$:

$$\frac{R_{il}}{\rho_\infty v_\infty^2/2} = \frac{e_2}{\sqrt{\pi}}\, \beta \left\{ (e_1 l_1 + e_2 l_2 + e_3 l_3)\, e^{-\beta^2} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\pi} \left[\left(\frac{1}{2\beta} + \beta \right) e_2 l_2 + \beta (e_1 l_1 + e_3 l_3) \right] [1 \pm \operatorname{erf}(\beta)] \right\}, \tag{14.17}$$

где знак «+» соответствует переднему элементу поверхности, а знак «—» — элементу, расположенному в тени.

Найдем значение нормальных напряжений, для чего воспользуемся формулой (14.17). Подставляя в нее значения $l_1 = l_3 = 0$, а $l_2 = 1$ при определении напряжения p_{i1} на передней стороне элемента и $l_2 = -1$ — при определении p_{i2} на теневой стороне, получаем:

$$p_{i1}/(\rho_\infty v_\infty^2/2) = [e_2^2/(\sqrt{\pi}\, \beta)]\, \varkappa_1(\beta); \tag{14.18}$$

$$p_{i2}/(\rho_\infty v_\infty^2/2) = [e_2^2/(\sqrt{\pi}\, \beta)]\, \varkappa_2(\beta), \tag{14.19}$$

где

$$\varkappa_1(\beta) = e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\, [1/(2\beta) + \beta]\, [1 + \operatorname{erf}(\beta)]; \tag{14.20}$$

$$\varkappa_2(\beta) = -e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\, [1/(2\beta) + \beta]\, [1 - \operatorname{erf}(\beta)]. \tag{14.21}$$

Для определения проекций касательных напряжений τ_{ix} и τ_{iz} в формулу (14.17) необходимо подставить следующие значения направляющих косинусов: $l_2 = l_3 = 0$, $l_1 = 1$ для τ_{ix}; $l_1 = l_2 = 0$, $l_3 = 1$ для τ_{iz}. Тогда

$$(\tau_{ix})_1 = e_1 e_3 \lambda_1(\beta); \tag{14.22}$$

$$(\tau_{ix})_2/(\rho_\infty v_\infty^2/2) = e_1 e_2 \lambda_2(\beta); \tag{14.23}$$

$$(\tau_{iz})_1/(\rho_\infty v_\infty^2/2) = e_2 e_3 \lambda_1(\beta); \tag{14.24}$$

$$(\tau_{iz})_2/(\rho_\infty v_\infty^2/2) = e_2 e_3 \lambda_2(\beta), \tag{14.25}$$

где $\lambda_1(\beta) = \sqrt{\pi}\, \beta \chi_1(\beta)$; $\lambda_2(\beta) = \sqrt{\pi}\, \beta \chi_2(\beta)$.

Для нахождения полной силы воздействия потока на элемент поверхности необходимо знать еще силу, возникающую под действием отраженных от поверхности молекул. Нормальные и касательные напряжения, вызываемые отраженным потоком, зависят от характера отражения молекул.

При зеркальном отражении $p_r = p_i$. Тогда суммарное нормальное напряжение, действующее на элемент поверхности, $p = 2p_i$. Суммарное касательное напряжение $\tau = 0$, так как касательное напряжение τ_r, вызываемое отраженными молекулами, отличается от τ_i только знаком: $\tau_r = -\tau_i$.

При диффузном отражении касательное напряжение от отраженных молекул равно нулю, так как при этом все направления отражения являются одинаково вероятными.

Выведем формулу для определения напряжения p_r, действующего на элемент поверхности диффузно отраженными молекулами. Выше предполагалось, что в отраженном потоке скорости распределяются также по закону Максвелла, т. е. распределены также равновесно, но только уже для состояния газа, характеризуемого температурой T_r.

Обозначим n_r число молекул отраженного потока, заключенных в единице объема, а dn_r — количество молекул в единичном объеме, имеющих скорости в пределах от v до $v + dv$ и отражающихся в результате соударения с единичной поверхностью по направлениям, составляющим углы с нормалью к поверхности в пределах от θ до $\theta + d\theta$. Это означает, что рассматриваются такие молекулы, которые после отражения от поверхности располагаются между двумя конусами с углами полураствора, равными θ и $\theta + d\theta$.

Из кинетической теории газов известно, что

$$dn_r = \left(2\pi n_r \big/ \sqrt{\pi^3}\right)\left(v^3/\, v_r^3\right) e^{-v^2/\, v_r^2} \sin\theta \cos\theta d\theta dv, \tag{14.26}$$

где v_r — наиболее вероятная скорость теплового движения молекул в отраженном потоке.

Напряжение dp_r можно выразить через проекцию секундного количества движения этой группы отраженных молекул на направление нормали, т. е. $dp_r = m dn_r v \cos\theta$. Для определения p_r, действующего на элемент поверхности, полученное выражение необходимо проинтегрировать по различным значениям v и θ в пределах от $v = 0$ до $v = \infty$ и от $\theta = 0$ до $\theta = \pi/2$. В результате

$$p_r = n_r m v_r^2/4. \tag{14.27}$$

Выразим n_r через число молекул n_i в единичном объеме набегающего потока и параметр $\beta = v_\infty e_2/v_в$. Для этого достаточно приравнять число отраженных от единичной поверхности тела молекул N_r соответствующему числу молекул N_1 (14.11) или (14.13), соударяющихся с поверхностью (из условия непроницаемости поверхности тела). Для определения N_r проинтегрируем выражение (14.26) в пределах от $v = 0$ до $v = \infty$ и от $\theta = 0$ до $\theta = \pi/2$. Тогда

$$N_r = [n_r/(2\sqrt{\pi})]\, v_r. \tag{14.28}$$

Приравнивая выражения (14.27) и (14.11) или (14.13), имеем:

$$(n_r)_1 = n_i \chi_1(\beta)\, v_в / v_r; \tag{14.29}$$

$$(n_r)_2 = n_i \chi_2(\beta)\, v_в / v_r, \tag{14.30}$$

где $(n_r)_1$ и $(n_r)_2$ — соответственно количество молекул в единицу объема, отраженных от передней и теневой сторон элемента.

Подставляя выражения (14.29) и (14.30) в формулу (14.27) и учитывая, что $\rho_\infty = n_i m$, получаем:

$$(p_r)_1 / (\rho_\infty v_\infty^2 / 2) = 0{,}5\,(v_в / v_\infty)\,(v_r / v_\infty)\,\chi_1(\beta); \tag{14.31}$$

$$(p_r)_2 / (\rho_\infty v_\infty^2 / 2) = 0{,}5\,(v_в / v_\infty)\,(v_r / v_\infty)\,\chi_2(\beta). \tag{14.32}$$

С учетом воздействия падающих и отраженных молекул полное давление на элемент поверхности можно представить в следующем виде:

$$\frac{p}{\rho_\infty v_\infty^2/2} = \frac{p_i}{\rho_\infty v_\infty^2/2} + (1-f)\frac{p_i}{\rho_\infty v_\infty^2/2} + f\,\frac{p_r}{\rho_\infty v_\infty^2/2}, \tag{14.33}$$

где первый член в правой части представляет собой отношение давления, вызываемого налетающими молекулами, к скоростному напору, второй и третий члены соответствуют зеркально и диффузно отраженным молекулам.

Касательное напряжение

$$\tau / (\rho_\infty v_\infty^2 / 2) = f \tau_i / (\rho_\infty v_\infty^2 / 2). \tag{14.34}$$

В выражениях (14.33) и (14.34) напряжения p_i и τ_i в зависимости от ориентировки элемента поверхности по отношению к скорости набегающего потока определяются по формулам (14.18), (14.22) и (14.24) для элементов, обращенных навстречу потоку, и по формулам (14.19), (14.23) и (14.25) — для элементов поверхности, расположенных в тени.

§ 14.4. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ В СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМ ПОТОКЕ

При свободномолекулярном обтекании выпуклого тела отраженные от его поверхности молекулы газа не могут попасть снова на тело. Это позволяет рассматривать взаимодействие каждого элемента поверхности тела с потоком независимо от других его элементов. В этом случае по формулам, приведенным в § 14.3, можно рассчитать локальные значения нормальных и касательных напряжений. Интегрируя эти выражения по всей поверхности тела, можно определить и суммарные аэродинамические характеристики — подъемную силу и сопротивление для выпуклого тела любой формы.

Для примера рассмотрим пластинку при угле атаки $\alpha \neq 0$. В этом случае $e_1 = \cos\alpha$, $e_2 = \sin\alpha$, $e_3 = 0$, а $\beta = v_\infty \sin\alpha / v_в$.

Примем, что отражение молекул с поверхности пластинки полностью диффузное ($f = 1$, $a_э = 1$) и $T_{ст} = \mathrm{const}$. Найдем давление на нижней поверхности $p_н$. Для этого в формулу (14.33) вместо p_i и p_r подставим выражения (14.18) и (14.31). Тогда

$$p_н/(\rho_\infty v_\infty^2/2) = (\sin^2\alpha/\sqrt{\pi})\,\varkappa_1(\beta)/\beta + 0{,}5\,(v_в/v_\infty)(v_r/v_\infty)\,\chi_1(\beta).$$

Отсюда, заменяя функции $\varkappa_1(\beta)$ и $\chi_1(\beta)$ выражениями (14.20) и (14.12), получаем

$$\frac{p_н}{\rho_\infty v_\infty^2/2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\beta}\left\{e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\beta} + \beta\right)[1 + \mathrm{erf}(\beta)]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{v_в}{v_\infty}\,\frac{v_r}{v_\infty}\,\{e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\,\beta\,[1 + \mathrm{erf}(\beta)]\}. \qquad (14.35)$$

Аналогично можно определить давление на верхней поверхности. Для этого в формулу (14.33) вместо p_i и p_r нужно подставить соответственно выражения (14.19) и (14.32):

$$\frac{p_в}{\rho_\infty v_\infty^2/2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\beta}\left\{-e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\beta} + \beta\right)[1 - \mathrm{erf}(\beta)]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{v_в}{v_\infty}\,\frac{v_r}{v_\infty}\,\{e^{-\beta^2} - \sqrt{\pi}\,\beta\,[1 - \mathrm{erf}(\beta)]\}. \qquad (14.36)$$

Используя выражения (14.35) и (14.36), найдем коэффициент нормальной силы:

$$c_y = \frac{p_н - p_в}{\rho_\infty v_\infty^2/2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2}{\beta}\left[e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\beta} + \beta\right)\mathrm{erf}(\beta)\right] +$$

$$+ \sqrt{\pi}\,\frac{v_в}{v_\infty}\,\frac{v_r}{v_\infty}\,\beta. \qquad (14.37)$$

Определим касательные напряжения, действующие со стороны нижней и верхней поверхностей $\tau_н$, $\tau_в$. Из формул (14.24) и (14.25) следует, что $\tau_{iz} = 0$. Это объясняется тем, что составляющая скорости набегающего потока вдоль оси z равна нулю, а хаотическое движение молекул не вызывает касательную силу. Поэтому $\tau_i = \tau_{ix}$.

Подставляя в формулу (14.34) выражения (14.22) и (14.23) при $e_1 = \cos\alpha$, $e_2 = \sin\alpha$, $f = 1$, получаем:

$$\frac{\tau_н}{\rho_\infty v_\infty^2/2} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\pi}\,\beta}\,\{e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\,\beta\,[1 + \mathrm{erf}(\beta)]\};$$

$$\frac{\tau_{\text{в}}}{\rho_\infty v_\infty^2/2} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\pi}\,\beta}\left\{e^{-\beta^2} - \sqrt{\pi}\,\beta[1-\mathrm{erf}(\beta)]\right\}.$$

Тогда суммарное касательное напряжение вдоль пластинки

$$\frac{\tau}{\rho_\infty v_\infty^2/2} = \frac{\tau_{\text{н}}+\tau_{\text{в}}}{\rho_\infty v_\infty^2/2} = 2\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\pi}\,\beta}\left[e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\,\beta\,\mathrm{erf}(\beta)\right]. \qquad (14.38)$$

Здесь $\tau/(\rho_\infty v_\infty^2/2) = c_x$ — коэффициент продольной силы.

Приведем формулы для определения коэффициентов подъемной силы $c_{ya} = c_y\cos\alpha - c_x\sin\alpha$ и сопротивления $c_{xa} = c_x\cos\alpha + c_y\sin\alpha$.

Подставляя вместо c_y и c_x их выражения (14.37) и (14.38), получаем:

$$c_{ya} = \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{\beta^2}\,\mathrm{erf}(\beta) + \sqrt{\pi}\,\frac{v_r}{v_\infty}\sin\alpha\cos\alpha; \qquad (14.39)$$

$$c_{xa} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sin\alpha}{\beta}\,e^{-\beta^2} + \sqrt{\pi}\,\frac{v_r}{v_\infty}\sin^2\alpha + 2\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{2\beta^2}\right)\sin\alpha\,\mathrm{erf}(\beta). \qquad (14.40)$$

Подставляя в формулы (14.39) и (14.40) выражение $\beta = s\sin\alpha$, где $s = v_\infty/v_{\text{в}}$, получаем:

$$c_{ya} = \frac{\cos\alpha}{s^2}\,\mathrm{erf}(s\sin\alpha) + \frac{\sqrt{\pi}}{s}\,\frac{v_r}{v_{\text{в}}}\sin\alpha\cos\alpha; \qquad (14.41)$$

$$c_{xa} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{s}\exp(-s^2\sin^2\alpha) + \frac{\sqrt{\pi}}{s}\,\frac{v_r}{v_{\text{в}}}\sin^2\alpha +$$

$$+ 2\sin\alpha\left(1+\frac{1}{2s^2}\right)\mathrm{erf}(s\sin\alpha). \qquad (14.42)$$

Здесь $v_r/v_{\text{в}} = \sqrt{T_r/T_\infty}$ (если принять коэффициент аккомодации $a_э = 1$, то

$$v_r/v_\infty = \sqrt{T_{\text{ст}}/T_\infty}\,,\ \text{а}\ s = v_\infty/v_{\text{в}} = \sqrt{k/2}\,\sqrt{\mathbf{M}_\infty}\,).$$

Из формул (14.41) и (14.42) следует, что коэффициенты c_{ya} и c_{xa} пластинки зависят от большого числа параметров — угла атаки, отношения скоростей $s = v_\infty/v_{\text{в}}$, отношения температур T_r/T_∞. Кроме того, эти коэффициенты зависят от характера отражения молекул от поверхности. В формулах (14.41) и (14.42) принято $f = 1$.

Расчеты по этим формулам показывают, что в свободномолекулярном потоке $c_{ya} \ll c_{xa}$ и $c_{ya}/c_{xa} << 1$. В пределе при $s \to \infty$ коэффициент подъемной силы $c_{ya} = 0$, а коэффициент сопротивления $c_{xa} = 2\sin\alpha$.

Используя полученные формулы для нормальных и касательных напряжений, нетрудно рассчитать также коэффициенты сопротивления прямого кругового конуса при $\alpha = 0$, цилиндра, обтекаемого потоком, перпендикулярным его оси, и шара.

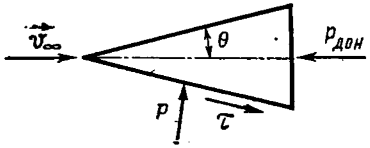


Рис. 14.5. Схема для определения сопротивления конуса

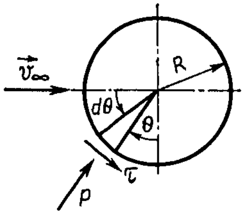


Рис. 14.6. Схема для определения сопротивления цилиндра

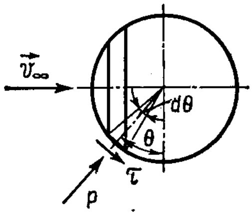


Рис. 14.7. Схема для определения сопротивления шара

Для конуса (рис. 14.5) $X_а = (p\sin\theta_к + \tau\cos\theta_к)F - p_{дон}\pi R^2$, где напряжения p, τ, $p_{дон}$ (давление в донной части) определяются по формулам (14.33) и (14.34); $\theta_к$ — угол полураствора; F — площадь боковой поверхности конуса.

Отсюда, полагая $f = 1$, $T_{ст} = \mathrm{const}$, $T_r = T_{ст}$, найдем коэффициент сопротивления, приведенный к площади πR^2:

$$c_{xа} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, s \sin\theta_к} + \frac{1}{2s^2}\sqrt{\frac{T_{ст}}{T_\infty}}\right)\exp(-s^2\sin^2\theta_к) +$$

$$+\left(1 + \frac{1}{2s^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2s}\sin\theta_к\sqrt{\frac{T_{ст}}{T_\infty}}\right)[1 + \mathrm{erf}(s\sin\theta_к)] - c_{x\,дон}, \qquad (14.43)$$

где $c_{xдон}$ — коэффициент донного сопротивления:

$$c_{x\,дон} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{s}\exp(-s^2) - \left(1 + \frac{1}{2s^2}\right)[1 - \mathrm{erf}(s)] +$$

$$+\frac{1}{2s^2}\{\sqrt{\pi}\, s[1 - \mathrm{erf}(s)] - \exp(-s^2)\}\sqrt{T_{ст}/T_\infty}.$$

При $s\sin\theta_к \gg 1$ формулу (14.43) можно упростить:

$$c_{xа} = 2 + (\sqrt{\pi}/s)\sin\theta_к\sqrt{T_{ст}/T_\infty} + 1/s^2. \qquad (14.44)$$

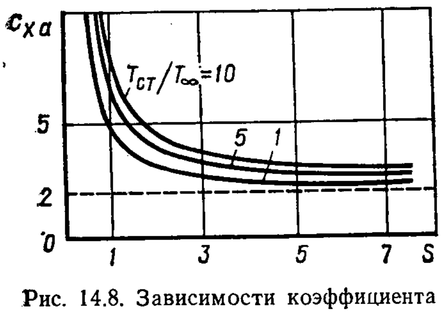


Рис. 14.8. Зависимости коэффициента сопротивления шара от параметра s при различных значениях отношения температур $T_{ст}/T_\infty$

Для расчета сопротивления кругового цилиндра, обтекаемого поперечным потоком, найдем сначала силу, действующую на элемент поверхности $dS = LRd\theta$ (рис. 14.6): $dX_а = (p\sin\theta + \tau\cos\theta)LRd\theta$, где L — длина цилиндра; R — радиус основания; p и τ — величины, определяемые по формулам (14.33) и (14.34).

Выполняя интегрирование по поверхности, находим суммарную силу сопротивления, а затем и коэффициент сопротивления цилиндра, приведенный к площади $2RL$:

$$c_{xa} = \frac{\sqrt{\pi}}{s}\left[s^2 + \frac{3}{2}\right] J_0\left(\frac{s^2}{2}\right) + \left(s^2 + \frac{1}{2}\right) J_1\left(\frac{s^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) + \\ + \frac{\sqrt{\pi^3}}{4s}\sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T_r}}, \qquad (14.45)$$

где $J_0\left(\frac{s^2}{2}\right)$, $J_1\left(\frac{s^2}{2}\right)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядка.

При $s \gg 1$ формулу (14.45) можно представить в упрощенном виде:

$$c_{xa} = 2 + \left(\frac{\sqrt{\pi^3}}{4s}\right)\sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T_\infty}} + 3/(2s^2). \qquad (14.46)$$

Для расчета коэффициента сопротивления шара выделим элементарную площадку в виде элементарного кольца (рис. 14.7) $dS = 2\pi R^2 \cos\theta d\theta$. Сила сопротивления, действующая на эту площадку, $dX_a = (p\sin\theta + \tau\cos\theta) 2\pi R^2 \cos\theta d\theta$. В результате интегрирования по поверхности находим суммарную силу и коэффициент сопротивления, приведенный к площади πR^2:

$$c_{xa} = \frac{2s^2+1}{\sqrt{\pi}\, s^3}\exp(-s^2) + \frac{4s^4 + 4s^2 - 1}{2s^4}\operatorname{erf}(s) + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{\pi}}{s}\sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T_\infty}}. \qquad (14.47)$$

При $s \gg 1$

$$c_{xa} = 2 + (2/3)\left(\sqrt{\pi}/s\right)\sqrt{T_{\text{ст}}/T_\infty} + 1/s^2. \qquad (14.48)$$

Рассмотрим предельные значения коэффициентов сопротивления при $s \to \infty$. Из формул (14.43), (14.45) и (14.47) следует, что независимо от формы тела (в рассматриваемых примерах для конуса, цилиндра и шара) при $s \to \infty$ коэффициент $c_{xa} = 2$. Это видно, в частности, из рис. 14.8, на котором представлены графики для коэффициента сопротивления шара в зависимости от параметра s и отношения температур $T_{\text{ст}}/T_\infty$.

Асимптотическое значение $c_{xa} = 2$ можно получить также по ударной теории Ньютона, построенной на приближенной модели потока, согласно которой при соударении с телом скорость частиц газа становится равной нулю. Действительно, секундная масса газа, соударяющегося с поверхностью тела в единицу времени, равна $\rho_\infty v_\infty S_{\text{м}}$, где $S_{\text{м}}$ — площадь проекции поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению вектора скорости $\vec{v}_\infty$.

Полагая, что после соударения частицы полностью теряют скорость, по теореме импульсов находим $X_a = \rho_\infty v_\infty^2 S_{\text{м}}$. Отсюда, принимая в качестве характерной площадь $S_м$, имеем $c_{xa} = 2$. Для пластинки при $\alpha \neq 0$ площадь $S_м = S\sin\alpha$ и $c_{xa} = 2S_м/S = 2\sin\alpha$. Это значение c_{xa} совпадает с предельным значением при $s \to \infty$ [см. формулу (14.42)].

Из рис. 14.8 видно, что при $s > 5$ значения коэффициента c_{xa}, соответствующие $T_{ст} = T_\infty$, близки к двум, т. е. к значениям, найденным по ударной теории Ньютона.

Следует иметь в виду, что здесь рассмотрены далеко не все задачи аэродинамики разреженных газов. В настоящее время этот раздел аэродинамики представляет собой самостоятельную область науки, практическое значение которой продолжает возрастать в связи с развитием космических исследований. В учебнике рассмотрены лишь основные понятия и прикладные вопросы, относящиеся к определению аэродинамических характеристик тел, причем простых форм и в основном в свободномолекулярном потоке. Вопросы аэродинамики разреженных газов подробно изложены, например, в книгах [5, 13, 15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газодинамика. — М.: Наука, 1976.

2. *Аржаников Н. С., Мальцев В. Н.* Аэродинамика. — М.: Оборонгиз, 1956.

3. *Аржаников Н. С., Садекова Г. С.* Аэродинамика больших скоростей. — М.: Высшая школа, 1965.

4. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом/*Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. Н.* — М.: Наука, 1964.

5. *Барянцев Р. Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. — М.: Наука, 1975.

6. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа/Под ред. *О. М. Белоцерковского.* — М.: Изд-во Вычислительного центра АН СССР, 1967.

7. *Белоцерковский С. М.* Теория несущей поверхности в дозвуковом потоке газа. — М.: Наука, 1965.

8. *Белоцерковский С. М., Ништ М. И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. — М.: Наука, 1978.

9. *Бураго С. Г.* Аэродинамические характеристики летательных аппаратов и их частей. — М.: МАИ, 1979.

10. *Бурдаков В. П., Зигель Ф. Ю.* Физические основы космонавтики (физика космоса). — М.: Атомиздат, 1975.

11. Основы аэродинамики гиперзвуковых скоростей и разреженных газов/*Вотяков В. Д., Кибардин Ю. А., Кузнецов С. И., Шумляцкий Б. Я.* — М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1959.

12. Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока/*Кибардин Ю. А., Кузнецов С. И., Любимов А. Н., Шумяцкий Б. Я.* — М.: Госэнергоиздат, 1961.

13. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967.

14. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. II. — М.: Физматгиз, 1963.

15. *Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А.* Прикладная динамика разреженного газа. — М.: Машиностроение, 1977.

16. *Красильщикова Е. А.* Тонкое крыло в сжимаемом потоке. — М.: Наука, 1978.

17. *Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов Л. Н., Захарченко В. Ф.* Аэродинамика ракет/Под ред. *Н. Ф. Краснова.* — М.: Высшая школа, 1968.

18. *Краснов Н. Ф.* Аэродинамика, ч. 1, 2. — М.: Высшая школа, 1976.

19. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.* Динамика полета. — М.: Машиностроение, 1973.

20. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973.

21. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1975.

22. *Любимов А. Н., Русанов В. В.* Течение газа около тупых тел, ч. I, II. — М.: Наука, 1970.

23. *Мартынов А. К.* Прикладная аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1972.

24. *Мхитарян А. М.* Аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1976.

25. *Нилсен Дж.* Аэродинамика управляемых снарядов. — М.: Оборонгиз, 1962.

26. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике/Под ред. проф. *В. К. Кошкина.* — М.: Машиностроение, 1975.

27. *Остославский И. В.* Аэродинамика самолета. — М.: Оборонгиз, 1957.

28. *Петров К. П.* Аэродинамика ракет. — М.: Машиностроение, 1977.

29. *Ферри А.* Аэродинамика сверхзвуковых течений. Изд-во технико-теоретической литературы, 1952.

30. Физическая газодинамика/Под ред. *А. С. Предводителева.* — М.: Изд-во АН СССР, 1959.

31. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. — М.: Изд-во ИЛ, 1962.

32. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

33. Численные исследования современных задач газовой динамики/Под ред. *О. М. Белоцерковского.* — М.: Наука, 1974.

34. *Эшли X., Ландал М.* Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1969.

35. *Эшли X.* Инженерные исследования летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1980.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Николай Сергеевич Аржаников
Галина Садековна Садекова

АЭРОДИНАМИКА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Зав. редакцией *Н. И. Хрусталева*
Научный редактор *Ю. А. Рыжов*
Редактор издательства *З. Г. Овсянникова*
Художник *В. В. Гарбузов*
Художественный редактор *В. И. Мешалкин*
Технический редактор *Н. А. Битюкова*
Корректор *Г. И. Кострикова*

ИБ № 3979

Изд. № СТД—375. Сдано в набор 29.09.82. Подп. в печать 06.04.83. Т-07747. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 22,5 усл. печ. л. 22,75 усл. кр.-отт. Уч.-изд. л. 21,96. Тираж 5000 экз. Зак. № 1514. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.