

*А. В. Иванов-Смоленский*

# ЭЛЕКТРО- МАГНИТНЫЕ СИЛЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

Допущено  
Государственным комитетом СССР  
по народному образованию  
в качестве учебного пособия  
для студентов вузов,  
обучающихся по специальности  
«Электромеханика»



Москва

«Высшая школа» 1989

ББК 31.261  
И 18  
УДК 621.313

**Рецензенты:**

кафедра Московского авиационного института им. Серго  
Орджоникидзе (зав. кафедрой — д-р техн. наук, проф.  
Д. А. Бут); д-р техн. наук А. И. Лищенко (Институт элек-  
тродинамики АН УССР)

**И18 Иванов-Смоленский А. В.**  
Электромагнитные силы и преобразование энер-  
гии в электрических машинах: Учеб. пособие для  
вузов по спец. «Электромеханика». — М.: Высш. шк.,  
1989. — 312 с.: ил.

ISBN 5-06-000103-2

В книге рассматриваются три способа расчета электромагнитных сил в магнитном поле: по изменению энергии при перемещении выделенного объема поля, по объемной плотности электромагнитных сил и натяжению. Анализируется электромеханическое преобразование энергии при перемещении выделенного объема в магнитном поле. Доказывается необходимость перехода к линейной модели при определении приращения энергии. Даются примеры расчета электромагнитных сил в электрических машинах.

И 2202070500(4309000000) — 515  
001(01) — 89 166—89

ББК 31.261  
6П2.1.081

ISBN 5-06-000103-2

© А. В. Иванов-Смоленский, 1989

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В имеющихся изданиях вопросам расчета электромагнитных сил в магнитном поле уделено недостаточное внимание. Вместе с тем электромагнитные силы играют решающую роль в процессах электромеханического преобразования энергии, которые осуществляются в электрических машинах и других нелинейных магнитных устройствах и системах. Без правильного представления о величине и месте приложения электромагнитных сил, действующих на элементы электрических машин и других нелинейных магнитных систем, невозможно выполнить их грамотное конструирование и проектирование.

Необходимость издания специального учебного пособия по вопросам расчета электромагнитных сил в электрических машинах давно назрела. Однако такую книгу было трудно написать по той причине, что в вопросах расчета электромагнитных сил в магнитном поле до последнего времени не существовало полной ясности.

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетних исследований, проведенных под руководством автора на кафедре электромеханики Московского энергетического института (МЭИ). Некоторые результаты этих исследований отражены в монографии «Электромагнитные поля и процессы в электрических машинах и их физическое моделирование» (изд-во «Энергия», 1969), в ряде журналов («Электричество», 1985, № 5, 7, 9; 1987, № 10 и др.), а также лекциях автора по электромагнитным расчетам электрических машин.

В книге рассматриваются три известных способа расчета электромагнитных сил в магнитном поле: по приращению магнитной энергии при малом перемещении выделенного объема системы; по объемной или поверхностной плотности электромагнитных сил и натяжениям. Вносится существенное уточнение в расчет электромагнитных сил, исходя из приращения энергии при малом перемещении: доказываемся, что приращение энергии должно определяться с помощью линейной модели нелинейной системы. Показано, что расчеты электромагнитных сил через объемную и поверхностную плотности электромагнитных сил, а также через натяжения должны производиться по формулам Максвелла, предложенным в 1861 г. в одной из его ранних работ «О физических силовых линиях» [16, с. 117—124].

В книге не ставится задача дать студенту полное руководство к алгоритмированию, программированию и проведению современных достаточно сложных расчетов электромагнитных сил в магнитном поле, осуществляемых, как правило, на ЭВМ. При изучении этой

книги студент должен не столько получить навыки в технике расчетов, сколько выработать понимание допущений и ограничений, связанных с физикой явлений и заложенных в основу расчетных методов, научиться практически подходить к инженерной оценке полученных результатов. При этом автор исходил из высказанного акад. А. Н. Крыловым соображения, что настоящий инженер должен не просто пользоваться результатами математических формул, «перемалывающих как мельница то, что в них засыпано», но и чувствовать и наглядно воспринимать их содержание и понимать, каким образом они выведены.

Для облегчения изучения материала параграфы и текст, которые при первом чтении книги могут быть опущены без нарушения целостности изложения, набраны мелким шрифтом.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по специальности «Электромеханика». Его материал отвечает содержанию дисциплин «Спецкурс электрических машин», «Инженерное проектирование и САПР электрических машин» и «Математическое моделирование в электромеханике». Оно будет полезно инженерно-техническим работникам, занимающимся проектированием и эксплуатацией электрических машин и других нелинейных магнитных систем и устройств.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить за ряд полезных замечаний рецензентов: проф., д-ра техн. наук А. И. Лищенко и сотрудников соответствующей кафедры Московского авиационного института им. Серго Орджоникидзе, а также выразить признательность инженерам К. Г. Ивановой-Смоленской, Ф. Н. Хакимовой и И. Ф. Милешиной за участие в подготовке примеров и расчетов и оформлении графического материала.

В создании настоящего учебного пособия автор пользовался поддержкой и непосредственной помощью своих учеников и сотрудников кафедры электромеханики МЭИ: канд. тех. наук Ю. В. Абрамкина, науч. сотрудника М. А. Аванесова, канд. техн. наук В. А. Кузнецова, зав. лабораторией канд. техн. наук Н. А. Серихина, научного сотрудника В. И. Цуканова и др. Они участвовали не только в выполнении примеров, экспериментов, расчетов, но и в развитии ряда научных положений.

Попытка изложения современного подхода к расчету электромагнитных сил в электрических машинах не может не иметь недостатков. Устранить их автор надеется в будущем при следующем издании книги. Поэтому особую ценность представляют пожелания и критические замечания читателей, которые просим сообщать по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

*Автор*

## ВВЕДЕНИЕ

Электрические машины предназначены для преобразования электрической энергии в механическую или механической энергии в электрическую.

Механическая мощность  $P_{\text{мех}}$ , развиваемая вращающейся электрической машиной, пропорциональна электромагнитному моменту  $M$ , действующему на ротор, и угловой скорости вращения ротора  $\Omega$ , т. е.  $P_{\text{мех}} = M\Omega$ . В линейной машине, подвижная часть которой перемещается поступательно, механическая мощность пропорциональна электромагнитной силе  $F$ , действующей на ее подвижную часть, и линейной скорости  $v$  перемещения этой части, т. е.  $P_{\text{мех}} = Fv$ .

Таким образом, основной задачей электромагнитного расчета любой электрической машины является определение электромагнитного момента  $M$  и электромагнитной силы  $F$ , которые приложены к их перемещающимся частям и играют решающую роль в самом процессе преобразования энергии. В стационарных процессах момент  $M$  и сила  $F$  уравниваются внешним моментом  $M_{\text{в}}$  и силой  $F_{\text{в}}$ , приложенными к перемещающейся части. В переходных процессах ускорение подвижной части определяется суммой электромагнитного и внешнего моментов (электромагнитной и внешней силы):

$$d\Omega/dt = (M + M_{\text{в}})/J_{\Omega}; \quad dv/dt = (F + F_{\text{в}})/m,$$

где  $J_{\Omega}$ ,  $m$  — момент инерции и масса подвижной части.

Кроме электромагнитного момента и электромагнитной силы, приложенных к перемещающейся части машины, при проектировании электрической машины приходится рассчитывать электромагнитные силы  $F$  и моменты  $M$ , действующие в магнитном поле на различные элементы ее активных частей (провода обмоток, элементы магнитопровода — зубцы или полюса сердечников). От этих сил и моментов зависят механические напряжения, возникающие в конструктивных и активных частях электрической машины. Силы  $F$  и моменты  $M$  должны учитываться при расчетах механической прочности и деформаций в машине (например, прогиба вала). Без учета сил и моментов невозможно правильно оценить такие важные явления в электрической машине, как изгибные колебания ротора, магнитные вибрации сердечников и обмоток и др.

Не менее важно знать электромагнитные силы, действующие на элементы активных и конструктивных частей трансформаторов и реакторов. Природа этих сил та же, что и в индуктивных электрических машинах.

Электромагнитные силы и моменты в нелинейных магнитных системах и электрических машинах (наиболее сложных представителей этих систем) могут быть строго и однозначно определены только на основании расчета электромагнитного поля.

В книге предполагается, что такое поле численно или аналитически рассчитано для данного мгновения  $t$ , когда перемещающаяся часть машины занимает определенное положение по отношению к ее неподвижной части. Причем известно пространственное распределение плотностей токов  $\vec{J}$  в объеме нелинейной системы (в том числе и вихревых токов), распределение индукций  $\vec{B}$  и напряженностей  $\vec{H}$  магнитного поля и, следовательно, магнитных проницаемостей  $\mu = B/H$ .

Для расчета электромагнитной силы (ЭМС)  $\vec{F}$ , действующей на выделенный объем  $V$  нелинейной магнитной системы, теория электромагнетизма предлагает следующие три способа.

**Способ 1.** *Определение ЭМС  $\vec{F}_q$  по изменению энергии  $\Delta W_q$  или коэнергии  $\Delta W'_q$  магнитного поля при бесконечно малом перемещении выделенного объема  $V$  на расстояние  $\Delta \vec{q} = \vec{n}_q \Delta q$  в направлении единичного вектора  $\vec{n}_q$  по координате  $q$ :*

$$\vec{F}_q = \vec{n}_q F_q = \vec{n}_q \lim_{\Delta q} \frac{\Delta W'_q}{\Delta q} = -\vec{n}_q \lim_{\Delta q} \frac{\Delta W_q}{\Delta q}. \quad (B.1)$$

Здесь  $\Delta W'_q$  — приращение магнитной коэнергии нелинейной магнитной системы при перемещении выделенного объема  $V$  на расстояние  $\Delta \vec{q}$  в условиях постоянства токов всех возбуждающих контуров ( $i_k = \text{const}$ ,  $k \in 1, 2, \dots, N$ );  $\Delta W_q$  — приращение магнитной энергии нелинейной магнитной системы при перемещении выделенного объема  $V$  на расстояние  $\Delta \vec{q}$  в условиях постоянства токов, сцепленных со всеми возбуждающими контурами ( $\Phi_k = \text{const}$ ,  $k \in 1, 2, \dots, N$ );  $N$  — общее количество возбуждающих контуров нелинейной системы, включая контуры вихревых токов.

Полная ЭМС  $\vec{F}$  определяется с помощью (B.1) как сумма составляющих этой силы  $\vec{F}_q$  по направлениям осей выбранной системы координат  $x, y, z$ :

$$\vec{F} = \Sigma \vec{F}_q = \Sigma \vec{n}_q F_q, \quad (B.2)$$

где  $q \in x, y, z$ .

**Способ 2.** *Определение ЭМС  $\vec{F}$  по натяжению  $\vec{T}_n$  в магнитном поле:*

$$\vec{F} = \int_S \vec{T}_n dS, \quad (B.3)$$

где  $S$  — поверхность, охватывающая объем  $V$  (включая все поверхности разрыва магнитной проницаемости  $S_p$ , имеющиеся в этом объеме, в том числе и его граничную поверхность).

**Способ 3.** *Определение ЭМС  $\bar{F}$  по объемной  $\bar{f}$  и поверхностной  $\bar{f}_s$  плотностям ЭМС в магнитном поле:*

$$\bar{F} = \int_V \bar{f} dV + \int_{S_p} \bar{f}_s dS, \quad (\text{B.4})$$

где  $S_p$  — поверхности разрыва магнитной проницаемости в объеме  $V$ .

В книге, исходя из закона сохранения энергии в применении к электромеханическому преобразованию при перемещении выделенного объема  $V$ , приводится обоснование каждого из трех способов расчета электромагнитных сил в магнитном поле. Доказывается, что приращения энергии  $\Delta W_q$  и коэнергии  $\Delta W_q'$  в способе 1 должны определяться для линейной модели магнитного поля нелинейной системы, в которой сохранено распределение плотностей токов  $\bar{J}$ , индукций  $\bar{B}$ , а переменные магнитные проницаемости  $\mu = f(B)$  заменены в каждом из элементов области поля на постоянные магнитные проницаемости  $\mu = B/H = \text{const}$ , соответствующие найденному распределению индукций. Натяжения  $\bar{T}_n$ , объемная  $\bar{f}$  и поверхностная  $\bar{f}_s$  плотности электромагнитных сил, используемые как основные величины в способах 2 и 3, должны рассчитываться по формулам Максвелла, предложенным в одной из его ранних работ «О физических силовых линиях» [16, с. 117—124]. Выявляется, что все другие известные формулы для  $\bar{T}_n$ ,  $\bar{f}$  и  $\bar{f}_s$  в общем случае ошибочны и могут давать правильные результаты только в таких частных случаях, когда они совпадают с формулами Максвелла.

Приводятся многочисленные примеры расчета ЭМС, действующих на различные элементы электрических машин; сопоставление расчетов с экспериментальными данными свидетельствует о том, что все три известных способа расчета электромагнитных сил в электрических машинах и в других нелинейных магнитных системах приводят к одинаковым результатам, совпадающим с опытом.

## Электромеханическое преобразование энергии в нелинейных магнитных системах

### 1.1. Математические модели магнитного поля нелинейной системы

**1.1.1. Постановка задачи.** Рассмотрим произвольную магнитную систему, состоящую из нескольких ферромагнитных тел (магнитно-нелинейных изотропных безгистерезисных сред), окруженных магнитно-линейной или нелинейной средой (рис. 1.1). На рисунке показаны ферромагнитные тела  $a$  и  $c$ , окруженные средой  $b$ .

Магнитная проницаемость в средах нелинейной системы является функцией координат  $x, y, z$  и индукции  $B$ :

$$\mu = \mu_0 \mu_r = f_\mu(B, x, y, z). \quad (1.1)$$

Границами между средами служат поверхности разрыва  $S_p$  магнитной проницаемости, на которых магнитная проницаемость претерпевает скачкообразные изменения. Поверхность  $S_p$  состоит из поверхности  $S_{ab}$ , отделяющей среду  $a$  от среды  $b$ , и поверхности  $S_{cb}$ , отделяющей среду  $c$  от среды  $b$ .

Магнитное поле в системе возбуждается токами  $i_k$  в контурах с индексами  $k \in 1, 2, \dots, N$ , размеры сечений которых малы по сравнению с размерами самих контуров (на рис. 1.1 показаны контуры с индексами  $k$  и  $m$ ).

При равномерном распределении токов по сечениям контуров токам  $i_k$  соответствует вполне определенное распределение объемных плотностей макротокков  $\bar{J} = f_J(x, y, z)$ .

В тех случаях, когда в образовании магнитного поля принимают участие токи в возбуждающих контурах большого сечения или вихревые токи в проводящих телах, нужно эти токи разбить на трубки с достаточно малыми сечениями, удовлетворяющими принятым допущениям.

Предположим, что поле системы в установившемся режиме или переходном процессе рассчитано, т. е. определено распределение индукции  $\bar{B} = \bar{B}(x, y, z, t)$  и плотностей вихревых токов проводимости  $\bar{J} = \bar{J}(x, y, z, t)$ , если последние имеются. Следовательно, для каждого мгновения  $t$  известно распределение плотностей токов  $\bar{J} = f_J(x, y, z)$ , возбуждающих магнитное поле в системе, и токов  $i_k$  — в возбуждающих контурах с индексами  $k \in 1, \dots, N$ .

**1.1.2. Макромодель магнитного поля нелинейной системы.** Математической моделью магнитного поля нелинейной системы, заданного известным распределением объемных плотностей макротоков  $\vec{J} = f_J(x, y, z)$ , является система уравнений (см. [1, 2, 3]), в которую входят:

первое уравнение Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}, \quad (1.2)$$

уравнение непрерывности магнитного поля

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

уравнение связи между векторами индукции и напряженности магнитного поля (в виде характеристики намагничивания среды)

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.4)$$

где  $\mu$  определяют по формуле (1.1).

Для тангенциальных  $\vec{H}_\tau$  и нормальных  $\vec{B}_n$  составляющих на границе между средами  $a$  и  $b$  уравнение граничных условий имеет такой вид:

$$H_{\tau a} = H_{\tau b}; \quad B_{na} = B_{nb}; \quad (1.5)$$

для граничных условий на границе области поля системы

$$B_n = H_n = 0, \quad (1.5a)$$

если за пределами области поля имеется среда  $\mu = 0$ ;

$$B_\tau = H_\tau = 0, \quad (1.5b)$$

если за пределами области поля имеется среда  $\mu = \infty$ .

Модель, описанная уравнениями (1.2) — (1.5), называется макромоделью магнитного поля, которая позволяет при заданном распределении объемной плотности макротоков  $\vec{J}$  однозначно определить магнитное поле в нелинейных системах. Она в полной мере воспроизводит распределение индукции, напряженности

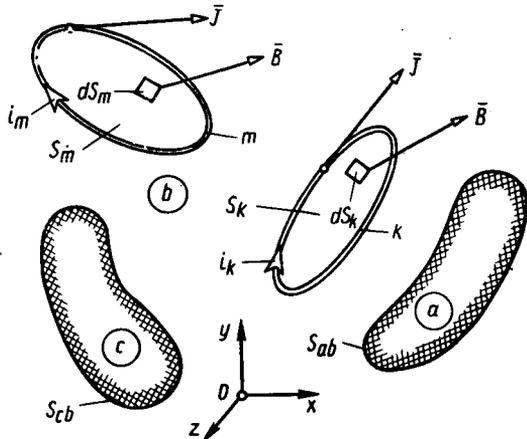


Рис. 1.1. Магнитное поле в произвольной нелинейной системе и в ее линейной модели

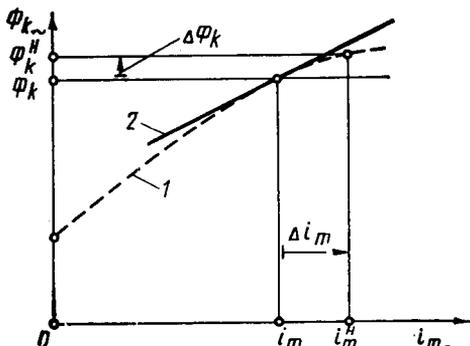


Рис. 1.2. Нелинейная 1 и линейная 2 зависимости потока  $\Phi_{k\sim}$  от тока  $i_{m\sim}$  при  $i_k = \text{const}$  ( $k \neq m$ )

и, следовательно, магнитной проницаемости во всей области поля:

$$\bar{B} = f_B(x, y, z);$$

$$\bar{H} = f_H(x, y, z);$$

$$\mu = B/H = \mu(x, y, z).$$

Через эти величины выражается магнитный поток  $\Phi_k$ , сцепленный с  $k$ -м контуром системы (рис. 1.1),

$$\Phi_k = \int_{S_k} \bar{B} d\bar{S}, \quad (1.6)$$

где  $S_k$  — поверхность, опирающаяся на контур  $k$ .

Изменение магнитного поля в нелинейной системе, заданного токами  $i_k \in i_1, \dots, i_N$ , при изменении тока одного из контуров, например тока  $i_m$  на  $\Delta i_m$ , может характеризоваться приращением  $\Delta\Phi_k$  потока  $\Phi_k$ , сцепленного с  $k$ -м контуром системы ( $k \in 1, \dots, N$ ). Для определения  $\Delta\Phi_k$  необходимо с помощью уравнений (1.1) — (1.5) повторить расчет поля при тех же токах  $i_k = \text{const}$  в контурах с индексами  $k \neq m$  и при токе  $i_m^H = i_m + \Delta i_m$  — в контуре с индексом  $m$ . Определив новое распределение индукции  $\bar{B}^H = f_B^H(x, y, z)$ , можно вычислить новое значение потока  $\Phi_k^H$ , сцепленного с  $k$ -м контуром системы;

$$\Phi_k^H = \int_{S_k} \bar{B}^H d\bar{S}, \quad (1.7)$$

а также приращение этого потока из-за появления приращения  $\Delta i_m$

$$\Delta\Phi_k = \Phi_k^H - \Phi_k. \quad (1.8)$$

Изменяя ток  $i_m^H = i_{m\sim}$  в широких пределах, получим характеристику намагничивания

$$\Phi_{k\sim} = f(i_{m\sim}), \quad (1.9)$$

представляющую собой нелинейную зависимость 1 потока  $\Phi_k^H = \Phi_{k\sim}$  от тока  $i_{m\sim}$  (рис. 1.2) при заданных токах в других контурах ( $i_r = \text{const}$ ,  $r \neq m$ ). Пользуясь этой зависимостью, можно найти дифференциальную взаимоиндуктивность между контурами  $k$  и  $m$  системы в заданном магнитном состоянии:

$$L_{km\text{д}} = \frac{\partial\Phi_k}{\partial i_m} = \lim_{\Delta i_m \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_k}{\Delta i_m}. \quad (1.10)$$

Используя понятие дифференциальной индуктивности по (1.10), нелинейную зависимость (1.9) в окрестности точки  $(\Phi_k, i_m)$  можно заменить линейной зависимостью

$$\Phi_{k\sim} = \Phi_k + d\Phi_{km} = \Phi_k + \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial i_m} \right) di_m, \quad (1.11)$$

где  $d\Phi_{km} = \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial i_m} \right) di_m$  — приращение потока контура  $k$ .

Линейная зависимость 2 (рис. 1.2) представляет собой касательную к кривой 1 в точке  $i_{m\sim} = i_m$ .

Полное приращение потока  $\Phi_k$  (с учетом влияния приращений токов во всех контурах системы) определяется путем суммирования приращений по (1.11):

$$d\Phi_k = \sum_{m=1}^N d\Phi_{km} = \sum_{m=1}^N \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial i_m} \right) di_m. \quad (1.12)$$

**1.1.3. Линейная макро модель магнитного поля нелинейной системы.** Магнитное поле в нелинейной системе, заданное известным распределением  $\bar{J}$ , которое однозначно определено по (1.1) — (1.5), можно воспроизвести с помощью так называемой *линейной макро модели магнитного поля нелинейной системы* [4]. В этой модели сохраняется заданная конфигурация контуров с токами  $i_k$  (см. рис. 1.1) и, следовательно, заданные плотности макротокков  $\bar{J}$ . Магнитные проницаемости во всех точках области поля линейной макро модели в процессе намагничивания считаются постоянными и равными тем магнитным проницаемостям, которые получились в этих точках при найденном по (1.1) — (1.5) распределении индукции:

$$\mu = \mu(x, y, z) = f_\mu(B, x, y, z), \quad (1.13)$$

где  $\mu = \mu(x, y, z) = \text{const}$  при  $x, y, z = \text{const}$ .

Линейная модель относительно  $\bar{J}$  описывается такими же уравнениями (1.2) — (1.5), как и моделируемая нелинейная система. И нет нужды доказывать, что в результате решения этих уравнений при  $\mu = \mu(x, y, z)$  получится такое же магнитное поле, как и в моделируемой нелинейной системе, т. е. поле с теми же распределениями индукции, напряженности и магнитной проницаемости:

$$\bar{B} = f_B(x, y, z); \quad \bar{H} = f_H(x, y, z); \quad \mu = \mu(x, y, z).$$

В качестве примера перехода от магнитного поля в оригинале к линейной модели этого поля на рис. 1.3, а показано магнитное поле в насыщенной электрической машине, положение ротора которой характеризуется углом  $\gamma = q$ , а на рис. 1.3, б — магнитное поле в ее линейной модели.

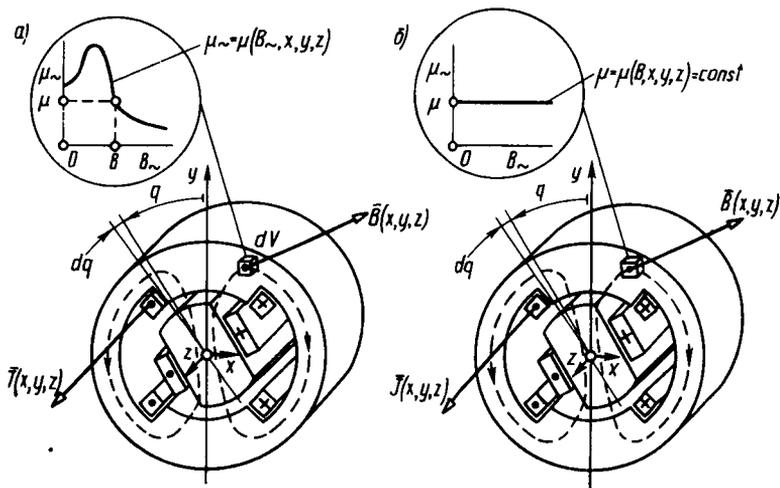


Рис. 1.3. Магнитное поле в электрической машине (а) и в ее линейной модели (б)

Магнитное поле в линейной модели нелинейной системы, как поле в магнитно-линейных средах, обладающих заданным распределением магнитной проницаемости  $\mu = \mu(x, y, z)$ , можно представить в виде суммы полей, возбужденных отдельно токами  $i_m$  в ее контурах ( $m \in 1, \dots, N$ ).

Соответственно поток  $\Phi_k$ , сцепленный с  $k$ -м контуром при заданных токах в контурах, можно представить как сумму частичных потоков  $\Phi_{km}$ , образованных отдельно токами  $i_m$  в каждом из возбуждающих контуров,

$$\Phi_k = \sum_{m=1}^N \Phi_{km} = \sum_{m=1}^N L_{km} i_m = L_k i_k, \quad (1.14)$$

где  $\Phi_{km} = L_{km} i_m$  — потокосцепление с  $k$ -м контуром от тока  $i_m$  в контуре  $m$  линейной модели;

$$L_{km} = \Phi_{km} / i_m = \frac{1}{i_m} \int_{S_k} \bar{B} d\bar{S}$$

— статическая взаимоиндуктивность контуров  $k$  и  $m$  в линейной модели (для магнитного состояния при заданных токах  $i_m$ ,  $m \in 1, \dots, N$ );

$$L_k = \frac{\Phi_k}{i_k} = \frac{1}{i_k} \sum_{m=1}^N L_{km} i_m$$

— эквивалентная статическая индуктивность  $k$ -го контура в линейной модели с учетом влияния токов всех контуров системы (для магнитного состояния при заданных токах  $i_m$ ,  $m \in 1, 2, \dots, N$ ).

## 1.2. Уравнения напряжений и электромеханического преобразования энергии в нелинейной магнитной системе

Рассмотрим преобразование энергии, которое происходит в нелинейной магнитной системе, описанной в 1.1. Математические модели магнитного поля такой системы пригодны для воспроизведения электромагнитных процессов, которые происходят в любых электромагнитных или электромеханических преобразователях энергии индуктивного типа (электрических машинах, трансформаторах, реакторах, электромагнитных аппаратах, магнитных подшипниках и т. п.). В общем случае такая нелинейная магнитная система состоит из нескольких ферромагнитных тел, окруженных магнитно-линейной или нелинейной средой (газом, немагнитной или магнитной жидкостью). Магнитное поле в этой системе возбуждается  $N$  контурами с индексами  $k \in 1, 2, \dots, N$ , закрепленными на неподвижной или подвижной части системы. Контур с током  $i_k = i_k(t)$  питается от сети с напряжением  $u_k = u_k(t)$ .

Рассмотрим электромагнитные процессы, которые будут происходить в нелинейной системе из-за изменения токов  $i_k = i_k(t)$  в возбуждающих контурах и пространственной координаты  $q = q(t)$ , характеризующей положение выделенного объема  $V$  по отношению к остальному объему системы. Координата  $q$  может определять либо линейное, либо угловое положение объема  $V$ , выделенного поверхностью  $S$ .

Если, например, координата  $q = x$  (рис. 1.4, а) определяет линейное положение объема  $V$  в направлении одной из осей выбранной системы координат, то изменение координаты  $q = x$  на

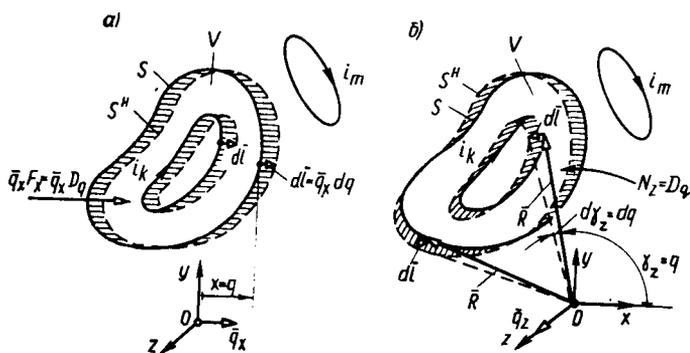


Рис. 1.4. Линейные смещения элементов объема  $V$  при его линейном (а) и угловом (б) перемещениях:

$\gamma_z$  — угол относительно оси  $z$ , отсчитываемый от оси  $x$

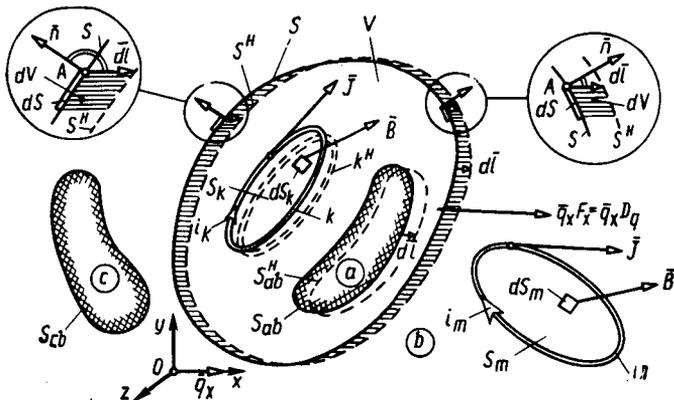


Рис. 1.5. Линейные смещения элементов выделенного объема  $V$  нелинейной системы при его перемещении на расстояние  $dq$

$dq = dx$  приводит к одинаковому линейному перемещению элементов объема  $V$  и поверхности  $S$  на расстояние

$$d\vec{l} = \vec{q}_x dq, \quad (1.15)$$

где  $\vec{q}_x$  — единичный вектор по направлению оси  $x$ .

Если например, координата ( $q = \gamma_z$ ) (рис. 1.4, б) определяет угловое положение объема относительно одной из осей выбранной системы координат, то изменение координаты  $q = \gamma_z$  на  $dq = d\gamma_z$  приводит к линейным перемещениям элементов объема  $V$  и поверхности  $S$  на расстояние

$$d\vec{l} = [\vec{q}_z \vec{R}] d\gamma_z, \quad (1.16)$$

где  $\vec{q}_z$  — единичный вектор по направлению оси  $z$ .

Дифференциальные уравнения напряжений и электромеханического преобразования энергии составляют для мгновения времени  $t$  в интервале его изменения на  $dt$ , в течение которого токи в контурах получают приращения  $di_k$ , а координата  $q$ , характеризующая положение выделенного объема  $V$ , изменяется на

$$dq = (dq/dt) dt,$$

где  $dq/dt$  — скорость изменения координаты  $q$ .

На рис. 1.5 объем  $V$ , охваченный поверхностью  $S$ , выделен в нелинейной системе (см. рис. 1.1). Объем  $V$  может включать любое количество ферромагнитных тел и контуров с токами (на рис. 1.5 он включает ферромагнитное тело  $a$  и контур  $k$  с током  $i_k$ ; поверхность  $S$ , выделяющая объем  $V$ , располагается полностью в среде  $b$ ). В наиболее общем случае объем  $V$  может включать часть контура  $k$  с током  $i_k$  и часть ферромагнитного тела  $a$  (при этом поверхность  $S$  будет пересекаться с контуром  $k$  и с поверхностью раз-

рыва магнитной проницаемости  $S_p = S_{ab}$ ). За время  $dt$  координата  $q$ , определяющая положение объема  $V$ , получает линейное или угловое приращение  $dq$ .

Если  $dq = dx$  — линейное приращение (см. рис. 1.4, *a* или 1.5), то элементы объема  $V$  и поверхности  $S$  получают линейные перемещения по (1.15). Если  $dq = d\gamma_z$  — угловое приращение (см. рис. 1.4, *б*), то элементы объема  $V$  и поверхности  $S$  получают линейные перемещения  $\bar{dl}$  по (1.16).

Таким образом, за время  $dt$  элементы объема  $V$  и поверхности  $S$  перемещаются на расстояния  $\bar{dl}$  по (1.15) или (1.16) и охватывающая объем  $V$  поверхность занимает новое положение  $S''$ . Контур  $k$  и тело  $a$ , охваченные поверхностью  $S_{ab}$  (или их части), занимают новые положения  $k''$  и  $S''_{ab}$ .

Заметим, что перемещение объема  $V$  в новое положение  $S''$  не связано с механическими деформациями среды, окружающей объем  $V$ , и появлением в ней механических напряжений.

Дело в том, что об изменении энергии магнитного поля при перемещении выделенного объема мы имеем возможность судить с помощью математической модели магнитной системы, описанной уравнениями Максвелла, в которой воспроизводится только пространственное распределение магнитного поля и магнитных характеристик сред (магнитной проницаемости).

Механические свойства сред (упругость, плотность) и механические явления в средах (поля механических напряжений и давлений) в такой модели никак не воспроизводятся. Поэтому в рамках этой модели перемещение некоторого объема  $V$  должно пониматься как его смещение на расстояние  $\Delta\bar{q}$  в некоторое новое положение за счет добавления или удаления среды с магнитной проницаемостью, равной магнитной проницаемости  $\mu = \mu(x, y, z)$  в соответствующей точке границы объема  $V$ . Поскольку приращение потока  $k$ -го контура  $d\Phi_{kq}$  за счет изменения координаты  $q$  на  $dq$  определяется в условиях постоянства токов во всех контурах ( $i_m = \text{const}$ ,  $m \in 1, 2, \dots, N$ ), для определения  $d\Phi_{kq}$  следует обратиться к линейной модели нелинейной системы (см. 1.1.3), в которой воспроизведено магнитное состояние при этих токах.

В линейной модели магнитного поля (см. 1.1.3) перемещение объема  $V$  (рис. 1.5) производится за счет уменьшения объема окружающей среды (на рис. 1.5 среды *b*) на величину элементарных объемов

$$dV = dSdl \cos(\bar{n}\bar{dl}), \quad (1.17)$$

соответствующих перемещению элемента поверхности  $S$ , элемента  $dS$  с внешней нормалью  $\bar{n}$ , на расстояние  $\bar{dl}$ . Причем при  $\cos(\bar{n}\bar{dl}) > 0$  (например, для элемента  $dS$  в точке *A* на рис. 1.5, выделенной справа)  $dV > 0$  и объем окружающей среды за счет перемещения эле-

мента поверхности  $dS$  уменьшается на  $|dV|$ . Наоборот, при  $\cos(\overline{ndl}) < 0$  (например, для элемента  $dS$  в точке  $A$  на рис. 1.5, выделенной слева)  $dV < 0$  и объем окружающей среды увеличивается на  $|dV|$  за счет добавления среды с магнитной проницаемостью  $\mu = \mu(x_A, y_A, z_A)$ , имеющейся в точке  $A(x_A, y_A, z_A)$  линейной модели нелинейной системы. Разумеется, в том случае, когда  $\cos(\overline{ndl}) > 0$ , из объема окружающей среды исключается элементарный объем этой среды  $dV$  с магнитной проницаемостью  $\mu = \mu(x_A, y_A, z_A)$ . Явления в цепи  $k$ -го контура системы в интервале времени  $t, t + dt$  описываются дифференциальным уравнением напряжений

$$u_k = -e_k + i_k R_k, \quad (1.18)$$

в котором индуцированная в контуре ЭДС  $e_k$  выражается через производную по времени  $t$  от потока  $\Phi_k$ , сцепленного с контуром  $k$ ,

$$e_k = -\frac{d\Phi_k}{dt}. \quad (1.19)$$

Поток по (1.6), сцепленный с  $k$ -м контуром,  $\Phi_k = \Phi_k(i_1, \dots, i_N; q)$ , является функцией токов всех обмоток  $i_1, \dots, i_N$  и координаты  $q$ , характеризующей положение выделенного объема  $V$ .

Приращение потока  $d\Phi_k$  связано как с приращениями токов в обмотках на  $di_m$ , так и с изменением на  $\Delta q$  координаты  $q$ , характеризующей положение выделенного объема  $V$ ,

$$d\Phi_k = \sum_{m=1}^N d\Phi_{km} + d\Phi_{kq}. \quad (1.20)$$

Здесь

$$d\Phi_{km} = \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial i_m} \right) di_m \quad (1.21)$$

— приращение потока  $k$ -го контура по (1.12), обусловленное изменением тока  $i_m$  при сохранении постоянными и заданными токов других контуров ( $i_r = \text{const}$ ,  $r \in 1, \dots, N$ ,  $r \neq m$ ) и при  $q = \text{const}$  ( $dq = 0$ ).

Как видно, приращение  $d\Phi_{km}$  выражается с помощью макро-модели магнитного поля нелинейной системы через дифференциальную взаимоиндуктивность  $L_{km} = \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial i_m} \right)$  по (1.10).

В отличие от  $d\Phi_{km}$  приращение  $d\Phi_{kq}$  в (1.20) должно определяться с помощью полной линейной модели нелинейной системы, для заданного тока  $i_m = \text{const}$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) магнитного состояния. Как уже говорилось, объем  $V$  должен перемещаться за счет добавления к объему окружающей среды (или исключения из него) элементарных объемов  $dV$  по (1.17) с магнитной проницаемостью  $\mu = \mu(x_A, y_A, z_A)$ , имеющейся в точке  $A$  на поверхности  $S$ .

При этом магнитные проницаемости во всех элементарных объемах нелинейной системы (как в пределах объема  $V$ , так и вне его) сохраняются такими же, как в исходном положении  $\mu = \mu(x, y, z)$ .

Для определения приращения потока  $d\Phi_{kq}$  за счет перемещения объема  $V$  в новое положение при токах  $i_m = \text{const}$  ( $m \in 1, \dots, N$ ) необходимо рассчитать магнитное поле при этих токах для линейной модели, в которой объем  $V$  перемещен в новое положение  $S^h$ , характеризующееся координатой  $q + \Delta q$ .

Поток  $\Phi_k^h$ , сцепленный с  $k$ -м контуром линейной модели при новом положении объема  $V$ , можно выразить либо через найденное новое распределение индукции  $B^h = j_B^h(x, y, z)$ :

$$\Phi_k^h = \int_{S_k^h} \bar{B}^h d\bar{S}, \quad (1.22)$$

либо через статические индуктивности контуров в линейной модели при новом положении объема  $V$ :

$$\Phi_k^h = \sum_{m=1}^N \Phi_{km}^h = \sum_{m=1}^N L_{km}^h i_m = L_k^h i_h, \quad (1.23)$$

где  $\Phi_{km}^h = L_{km}^h i_m$  — потокосцепление с  $k$ -м контуром при новом положении объема  $V$  от тока  $i_m$  в контуре  $m$ ;  $L_{km}^h = \frac{\Phi_{km}^h}{i_m} = \frac{1}{i_m} \times \int \bar{B}_m^h \bar{dS}$  — статическая взаимоиндуктивность между контурами  $k$  и  $m$  в линейной модели при новом положении объема  $V$  (для магнитного состояния при заданных токах  $i_m$ ,  $m \in 1, \dots, N$ );  $L_k^h = \frac{\Phi_k^h}{i_k} = \frac{1}{i_k} \sum_{m=1}^N L_{mk}^h i_m$  — эквивалентная статическая индуктивность  $k$ -го контура в линейной модели при новом положении объема  $V$  с учетом влияния токов всех контуров системы (для магнитного состояния при заданных токах  $i_m \in 1, 2, \dots, N$ ).

После определения потока  $\Phi_k^h$  по (1.22) или (1.23) для нового положения объема  $V$  нетрудно найти приращение потока  $\Phi_k$  по (1.14) за счет изменения координаты  $q$  на  $dq$  при  $i_m = \text{const}$  ( $m \in 1, \dots, N$ ):

$$d\Phi_{kq} = \Phi_k^h - \Phi_k = \sum_{m=1}^N i_m dL_{km} = i_h dL_k, \quad (1.24)$$

где  $dL_{km} = (L_{km}^h - L_{km})$  — приращение индуктивности  $L_{km}$ ;

$$dL_k = L_k^h - L_k = \frac{1}{i_h} \sum_{m=1}^N i_m dL_{km} \text{ — приращение } L_k.$$

Так как ЭДС по (1.19) выражается через приращение потока по (1.20), то она содержит те же составляющие, что и приращение потока. Эта ЭДС складывается из *трансформаторных* ЭДС\*  $e_{km}$ , связанных с изменениями токов, и ЭДС *перемещения*  $e_{kq}$ , связанных с изменением координаты  $q$ , характеризующей положение перемещаемого объема:

$$e_k = -\frac{d\Phi_k}{dt} = \sum_{m=1}^N e_{km} + e_{kq}, \quad (1.25)$$

где

$$e_{km} = -\frac{d\Phi_{km}}{dt} = -\left(\frac{\partial\Phi_{km}}{\partial i_m}\right) \frac{di_m}{dt} = -L_{km} \frac{di_m}{dt} \quad (1.26)$$

— трансформаторная ЭДС, которая индуцируется в  $k$ -м контуре вследствие изменения тока  $i_m$  со скоростью  $di_m/dt$  при  $q = \text{const}$ .

Трансформаторные ЭДС выражаются через дифференциальные индуктивности  $L_{km} = \frac{\partial\Phi_{km}}{\partial i_m}$ , которые в нелинейной системе существенно отличаются от соответствующих статических индуктивностей  $L_{km} = \Phi_{km}/i_m$ .

ЭДС перемещения

$$e_{kq} = -\frac{d\Phi_{kq}}{dt} = -\left(\frac{dq}{dt}\right) \sum_{m=1}^N i_m \frac{dL_{km}}{dq} = -\left(\frac{dq}{dt}\right) i_k \frac{dL_k}{dq} \quad (1.27)$$

индуцируется в  $k$ -м контуре вследствие изменения координаты  $q$ , характеризующей положение перемещаемого объема  $V$ , со скоростью  $dq/dt$ . ЭДС перемещения выражаются через производные по координате  $q$  от статических индуктивностей контуров в линейной модели  $L_{km}$  и  $L_k$  [см. (1.14)] для магнитного состояния при заданных токах  $i_m$ ,  $m \in 1, \dots, N$ .

Проанализируем процесс преобразования энергии в нелинейной системе по рис. 1.1, в интервале времени  $t, t + dt$ . В индуктивной системе можно не считать с емкостными связями и энергией, накопленной в электрическом поле. Поэтому энергия, поступающая, в течение времени  $dt$  из электрических сетей в контуры  $\sum_{k=1}^N u_k i_k dt$ , расходуется только на изменение энергии магнитного поля  $dW$ , электрические потери энергии в обмотках  $\sum_{k=1}^N R_k i_k^2 dt$  и механическую работу  $D_q dq$ , совершаемую обобщенной электромагнитной силой (ЭМС)  $D_q$  при изменении на  $dq$  координаты  $q$ , характеризующей положение объема  $V$ .

\* Название «трансформаторная ЭДС» связано с тем, что эта ЭДС, так же как в трансформаторе, индуцируется во взаимно неподвижных обмотках ( $q = \text{const}$ ) вследствие изменения тока.

Обобщенная электромагнитная сила (ЭМС)  $D_q$  понимается как электромагнитная сила или электромагнитный момент, действующие на выделенный объем  $V$  в направлении изменения координаты  $q$ .

Если изменяется координата  $q$ , определяющая линейное положение объема  $V$  в направлении одной из координатных осей, например оси  $x$ , то  $q = x$ , и обобщенная ЭМС  $D_q$  имеет смысл компоненты электромагнитной силы по оси  $x$ , действующей на объем  $V$ , т. е.  $D_q = F_q = F_x$ .

Если изменяется координата  $q$ , определяющая угловое положение объема  $V$  относительно одной из координатных осей, например оси  $z$ , то  $q = \gamma_z$  и обобщенная ЭМС  $D_q$  имеет смысл электромагнитного момента  $N_q = N_z$  относительно оси  $z$ , действующего на объем  $V$ , т.е.  $D_q = N_q = N_z$  (см. рис. 1.4, б).

При составлении баланса энергии необходимо учесть все контуры системы: не только присоединенные в рабочих процессах к источникам электрической энергии, но и короткозамкнутые, в том числе контуры (трубки) вихревых токов, в которые электрическая энергия в рабочих процессах не поступает (так как  $u_k = 0$  и  $u_k i_k = 0$ ).

Распространяя суммирование на все контуры системы, на основании закона сохранения энергии можно записать

$$\sum_{k=1}^N u_k i_k dt = dW + \sum_{k=1}^N R_k i_k^2 dt + D_q dq$$

и, учитывая (1.18) и (1.19), получить уравнение электромеханического преобразования энергии в нелинейной магнитной системе

$$dW_\partial = \sum_{k=1}^N i_k d\Phi_k = dW + D_q dq. \quad (1.28)$$

Левая часть этого уравнения

$$dW_\partial = \sum_{k=1}^N i_k d\Phi_k = \sum_{k=1}^N i_k (-e_k) dt$$

представляет собой электрическую энергию, поступающую из сетей в контуры системы за время  $dt$  при напряжениях  $(-e_k)$ , уравновешивающих ЭДС  $e_k$ . Учитывая (1.20), (1.21), (1.24), можно выделить две специфические составляющие этой энергии:

$$\sum_{k=1}^N i_k d\Phi_k = \sum_{k=1}^N i_k \sum_{m=1}^N d\Phi_{km} + \sum_{k=1}^N i_k d\Phi_{kq}, \quad (1.29)$$

$$\text{где } \sum_{k=1}^N i_k \sum_{m=1}^N d\Phi_{km} = \sum_{k=1}^N i_k \sum_{m=1}^N (-e_{km}) dt$$

— электрическая энергия, поступающая из сетей в контуры за счет напряжений  $\sum_{m=1}^N (-e_{km})$ , уравнивающих трансформаторные

$$\text{ЭДС} \sum_{m=1}^N e_{km};$$

$$\sum_{k=1}^N i_k d\Phi_{kq} = \sum_{k=1}^N i_k (-e_{kq}) dt$$

— электрическая энергия, поступающая из сетей в обмотки за счет напряжений  $-e_{kq}$ , уравнивающих ЭДС перемещения  $e_{kq}$ .

Соответственно и приращение энергии магнитного поля в правой части уравнения (1.28)

$$dW = dW_{q=\text{const}} + dW_{i_m=\text{const}} \quad (1.30)$$

складывается из двух приращений магнитной энергии:

$dW_{q=\text{const}}$  — за счет изменения токов контуров  $i_m$  при  $q = \text{const}$  и  $dq = 0$ ;

$dW_{i_m=\text{const}}$  — за счет изменения координаты  $q$ , определяющей положение объема  $V$  при  $i_m = \text{const}$ .

### 1.3. Выражение энергии магнитного поля нелинейной системы через величины электрических цепей (токи и потокосцепления контуров)

Используем уравнение электромеханического преобразования энергии (1.28) для расчета энергии  $W$  магнитного поля, образованного заданной системой линейных контуров с токами  $i_k \in i_1, i_2, \dots, i_N$ . Представим ток каждой из возбуждающих обмоток, а также вихревые токи в проводящих средах в виде суммы трубок тока, размеры сечений которых достаточно малы по сравнению с размерами катушек и выбраны таким образом, что в любом сечении каждой трубки плотность тока  $\bar{J}$  можно считать постоянной. Рассматривая каждую из таких трубок тока как контур с током, удовлетворяющий допущениями, при которых выведено уравнение (1.28), и, понимая под  $N$  общее количество трубок тока, индексированных цифрами  $k = 1, 2, \dots, N$ , можно применить уравнение (1.28) к системе таких контуров.

Для определения энергии магнитного поля нелинейной системы (см. рис. 1.1) рассмотрим энергетический баланс при ее намагничивании путем монотонного увеличения текущих токов контуров  $i_{k\sim} \in i_{1\sim}, i_{2\sim}, \dots, i_{N\sim}$  от начальных нулевых значений ( $i_{1\sim} = 0, i_{2\sim} = 0, \dots, i_{N\sim} = 0$ ) до заданных значений ( $i_{1\sim} = i_1, i_{2\sim} = i_2, \dots, i_{N\sim} = i_N$ ). Энергия магнитного поля нелинейной системы не зависит от того, каким образом нарастают текущие токи  $i_{k\sim}$  от 0 до заданных значений  $i_k$ . Предположим, что токи  $i_{k\sim}, i_{m\sim}$  изменяют-

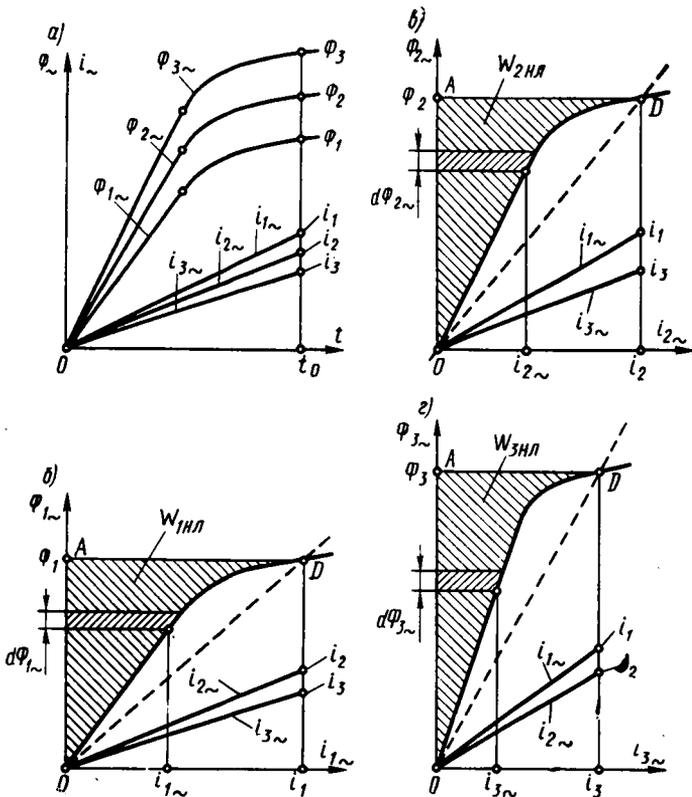


Рис. 1.6. Характеристики намагничивания контуров нелинейной системы при  $k \in 1, \dots, N (N=3)$

ся в процессе намагничивания линейно (рис. 1.6, а) и достигают заданных значений  $i_k, i_m$  в течение времени  $t_0$ :

$$i_{k\sim} = C_k t; \quad i_{m\sim} = C_m t, \quad (1.31)$$

где  $C_k = i_k/t_0$ ;  $C_m = i_m/t_0$ .

Из (1.31) следует, что текущие токи всех контуров изменяются пропорционально друг другу:

$$i_{1\sim}/i_1 = i_{2\sim}/i_2 = \dots = i_{k\sim}/i_k = t/t_0 = t_*, \quad (1.32)$$

где  $t_* = 0 \div 1$ .

Кроме того, при расчете текущего потокоцепления  $k$ -го контура  $\Phi_{k\sim}$  текущие токи прочих контуров с индексом  $m \in 1, 2, \dots, N$  ( $m \neq k$ ) могут быть представлены в функции от текущего тока  $k$ -го контура

$$i_{m\sim} = i_{k\sim} i_m/i_k. \quad (1.33)$$

Это означает, что при выполнении условия (1.32) характеристики намагничивания контура  $k$  (с учетом влияния токов других контуров) можно представить в виде однозначной зависимости текущего потокосцепления  $\Phi_{k\sim}$   $k$ -го контура от тока этого контура  $i_{k\sim}$

$$\Phi_{k\sim} = f_{\Phi k}(i_{1\sim}, \dots, i_{N\sim}) = \Phi_k(i_{k\sim}). \quad (1.34)$$

Более того, при выполнении условия (1.32) можно найти и обратную однозначную зависимость

$$i_{k\sim} = f_{i k}(\Phi_{1\sim}, \dots, \Phi_{N\sim}) = i_k(\Phi_{k\sim}). \quad (1.35)$$

Для трех контуров ( $N = 3$ ) зависимости типа (1.34) или (1.35) показаны на рис. 1.6, б — з.

При построении зависимостей потокосцеплений от токов по (1.34), показанных на рис. 1.6, а, численный расчет поля производится только для сочетаний токов  $i_{1\sim}, \dots, i_{N\sim}$ , удовлетворяющих условию (1.32). Причем такой расчет повторяется для ряда значений  $t_*$ , назначенных с тем или иным интервалом, например  $t_* = 0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,0$ .

Чтобы осуществить процесс увеличения токов контуров  $i_{1\sim}, \dots, i_{N\sim}$  по формуле (1.31) при намагничивании нелинейной системы, нужно отключить эти контуры от сетей, на которые они включены в рабочем режиме, и присоединить их к управляемым источникам энергии с напряжениями

$$u_{k\sim} = R_k i_{k\sim} - e_{k\sim}, \quad (1.36)$$

где  $e_{k\sim} = -d\Phi_{k\sim}/dt$  — текущее значение трансформаторной ЭДС в  $k$ -м контуре, обусловленной изменением токов в контурах по (1.31);  $d\Phi_{k\sim} = (\partial\Phi_{k\sim}/\partial i_{k\sim}) di_{k\sim}$  — приращение потокосцепления  $k$ -го контура в процессе намагничивания;  $\partial\Phi_{k\sim}/\partial i_{k\sim}$  — дифференциальная индуктивность  $k$ -го контура по его характеристике намагничивания (1.34) с учетом влияния токов других контуров.

Применяя закон сохранения энергии к процессу намагничивания и учитывая, что электрическая энергия, поступающая от управляемых источников  $\int_0^{t_0} u_{k\sim} i_{k\sim} dt$ , превращается в тепловую энергию  $\int_0^{t_0} R_k i_{k\sim}^2 dt$  и энергию магнитного поля  $W_{\text{нл}} = \int_0^{t_0} dW$ , получим выражение для энергии магнитного поля в нелинейной системе

$$W_{\text{нл}} = \int_0^{t_0} dW = \sum_{k=1}^N \int_0^{t_0} (u_{k\sim} - R_k i_{k\sim}) i_{k\sim} dt = \sum_{k=1}^N W_{k(\text{нл})}, \quad (1.37)$$

где  $W_{k(\text{нл})} = \int_0^{\Phi_k} i_k d\Phi_{k\sim}$  — магнитная энергия, приходящаяся на долю  $k$ -го контура нелинейной системы.

Уравнение (1.37) можно было бы получить, исходя из общего дифференциального уравнения электромеханического преобразования (1.28) с учетом (1.30), записав (1.28) для текущих величин в процессе намагничивания и положив в нем  $dq = 0$  и  $dW_{i_m = \text{const}} = 0$ . В (1.37) энергия магнитного поля нелинейной системы выражается в результате интегрирования через текущие значения токов ( $i_{k\sim} = 0 \div i_k$ ) и потокосцеплений обмоток ( $\Phi_{k\sim} = 0 \div \Phi_k$ ), т. е. через величины электрических цепей машины. В наиболее общем случае, когда в области поля имеются магнитно-нелинейные среды, для определения текущих значений потокосцеплений обмоток нужно задаться по (1.31) текущими значениями токов в контурах  $i_{1\sim}, i_{2\sim}, \dots, i_{N\sim}$ , произвести численный расчет магнитного поля (см. п. 1.1.2) с учетом заданных зависимостей магнитных проницаемостей сред  $\mu = f_{\mu}(B, x, y, z)$  и найти текущие потокосцепления  $\Phi_{1\sim}, \Phi_{2\sim}, \dots, \Phi_{N\sim}$  с помощью (1.6). Заметим, что поток  $\Phi_k$  в (1.37) считается всегда положительным, а ток  $i_k$  — положительным, если образуемый им частичный поток направлен в ту же сторону, что и результирующий поток  $\Phi_k$ , сцепленный с контуром  $k$ .

Применение формулы (1.37) к расчету энергии магнитного поля при  $N = 3$  иллюстрируется рис. 1.6. На рис. 1.6, б — г показаны зависимости  $i_{k\sim} = i_{k\sim}(\Phi_{k\sim})$  для  $k = 1, 2$  и 3, построенные на основании расчета магнитного поля при выполнении условия (1.32), а также зависимости токов других контуров от токов рассматриваемых контуров. Из (1.37) следует, что энергия магнитного поля  $W_{\text{нл}}$  представляет собой сумму площадей  $W_{1\text{нл}}, W_{2\text{нл}}, W_{3\text{нл}}$ , заключенных между осью ординат и кривыми  $i_{k\sim} = i_{k\sim}(\Phi_{k\sim})$ , построенными соответственно по (1.37) при  $k = 1, 2$  и 3.

#### **1.4. Выражение энергии магнитного поля нелинейной системы через величины поля (напряженность, индукцию и объемную плотность энергии)**

Поскольку токи  $i_{k\sim}$  и потокосцепления контуров  $\Phi_{k\sim}$  [см. (1.37)] можно рассчитать путем интегрирования величин магнитного поля ( $H$  или  $B$ ) по соответствующим линиям или поверхностям, то энергию магнитного поля можно выразить непосредственно через  $H$  и  $B$ . Для этого нужно представить поле плотностей токов  $\vec{J}$  в виде системы трубок тока, а поле магнитных индукций  $\vec{B}$  в виде системы трубок потока. Такое разбиение на трубки тока и потока показано для простейшего двухмерного поля на рис. 1.7.

Введем обозначения для трубок тока:  $N$  — общее количество трубок тока;  $k$  — индекс каждой из трубок тока, принимающий значения  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $i_k$  — ток  $k$ -й трубки;  $\Phi_k$  — поток, сцепленный с  $k$ -й трубкой тока.

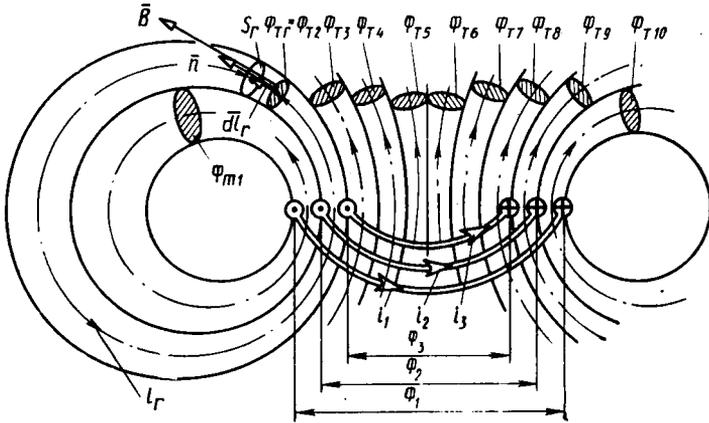


Рис. 1.7. Представление магнитного поля в виде системы трубок магнитного потока, охватывающих систему трубок тока

Обозначим  $M$  — общее количество трубок потока;  $r$  — индекс каждой из трубок потока, принимающий значения  $r \in 1, 2, \dots, M$ ;  $\Phi_{Tr}$  — поток  $r$ -й трубки;  $S_{Tr}$  — сечение. Представим в (1.37) поток  $\Phi_k$  и текущий поток  $\Phi_{k\sim}$  в виде суммы потоков (или текущих потоков) в трубках, сцепленных с  $k$ -й трубкой тока,

$$\Phi_k = \sum_{r \in r_k} \Phi_{Tr}; \quad \Phi_{k\sim} = \sum_{r \in r_k} \Phi_{Tr\sim}; \quad d\Phi_{k\sim} = \sum_{r \in r_k} d\Phi_{Tr\sim},$$

где  $r_k$  — множество индексов трубок потока, сцепленных с  $k$ -й трубкой тока.

Тогда (1.37) можно записать в виде

$$W_{\text{нл}} = \sum_{k=1}^N \int_0^{\Phi_k} i_{k\sim} \sum_{r \in r_k} d\Phi_{Tr\sim} = \sum_{k=1}^N \sum_{r \in r_k} \int_0^{\Phi_{Tr}} i_{k\sim} d\Phi_{Tr\sim}.$$

Например, для двухмерного поля (рис. 1.7)

$$\begin{aligned} W_{\text{нл}} = & \int_0^{\Phi_{T1}} i_{1\sim} d\Phi_{T1\sim} + \dots + \int_0^{\Phi_{T10}} i_{1\sim} d\Phi_{T10\sim} + \int_0^{\Phi_{T2}} i_{2\sim} d\Phi_{T2\sim} + \dots \\ & \dots + \int_0^{\Phi_{T9}} i_{2\sim} d\Phi_{T2\sim} + \int_0^{\Phi_{T3}} i_{3\sim} d\Phi_{T3\sim} + \dots + \int_0^{\Phi_{T8}} i_{3\sim} d\Phi_{T8\sim}; \\ & \Phi_1 = \sum_{r \in r_1} \Phi_{Tr}; \quad \Phi_2 = \sum_{r \in r_2} \Phi_{Tr}; \quad \Phi_3 = \sum_{r \in r_3} \Phi_{Tr}, \end{aligned}$$

где  $r_1 \in 1, \dots, 10$ ;  $r_2 \in 2, \dots, 9$ ;  $r_3 \in 3, \dots, 8$ .

Анализируя сумму интегралов, записанную в общем виде, или сумму интегралов для двумерного поля на рассматриваемом рисунке, видим, что интегралы, в которых независимой переменной является поток  $r$ -й трубки  $\Phi_{Tr\sim}$ , содержат в качестве подинтегральных функций токи контуров (трубок тока), охваченных  $r$ -й трубкой потока. Эти токи имеют индексы  $k \in k_r$ , где  $k_r$  — множество индексов, включающие индексы трубок тока, охваченных  $r$ -й трубкой потока.

Поток  $\Phi_{T_1}$  (рис. 1.7) охватывает только трубку с током  $i_1$  и, следовательно,  $k_1 \in 1$ ; поток  $\Phi_{T_2}$  охватывает трубки с токами  $i_1, i_2$  и, следовательно,  $k_2 \in 1, 2$ ; поток  $\Phi_{T_3}$  охватывает трубки с токами  $i_1, i_2, i_3$  и, следовательно,  $k_3 \in 1, 2, 3$  и т. д.

Магнитная энергия, сосредоточенная в  $r$ -й трубке потока, равна сумме интегралов, в которых независимой переменной является поток этой трубки  $\Phi_{Tr}$ ,

$$W_{Tr} = \sum_{k \in k_r} \int_0^{\Phi_{Tr}} i_{k\sim} d\Phi_{Tr\sim} = \int_0^{\Phi_{Tr}} i_{Tr\sim} d\Phi_{Tr\sim}.$$

Причем ток  $i_{Tr} = \sum_{k \in k_r} i_{k\sim}$  имеет смысл алгебраической суммы токов контуров (трубок тока), охваченных трубкой потока с индексом  $r$ . Например, для трубки с индексом  $r = 2$  имеем  $k_r \in 1, 2$ . Тогда

$$W_{T_2} = \int_0^{\Phi_{T_2}} i_{1\sim} d\Phi_{T_2\sim} + \int_0^{\Phi_{T_2}} i_{2\sim} d\Phi_{T_2\sim} = \int_0^{\Phi_{T_2}} i_{T_2\sim} d\Phi_{T_2\sim},$$

где  $i_{T_2\sim} = i_{1\sim} + i_{2\sim}$  — алгебраическая сумма токов, охваченных трубкой с индексом  $r=2$ .

Полную энергию магнитного поля в рассматриваемой области можно представить в виде суммы энергий, сосредоточенных во всех трубках потока, имеющих индексы  $r = 1, 2, \dots, M$ ,

$$W_{\text{нп}} = \sum_{r=1}^M W_{Tr} = \sum_{r=1}^M \int_0^{\Phi_{Tr}} i_{Tr\sim} d\Phi_{Tr\sim}. \quad (1.38)$$

Заметим, что полученное выражение приемлемо как для двумерного, так и для трехмерного магнитного поля. Причем при расчете полного тока  $i_{Tr}$ , охваченного  $r$ -й трубкой потока, следует (при определении алгебраической суммы токов контуров) считать положительными токи тех трубок тока  $i_{k\sim}$ , которые создают в  $r$ -й трубке потоки, совпадающие по направлению с результирующим потоком. В этом случае энергия трубки всегда будет положительной величиной.

Если выбрать количество трубок потока  $M$  настолько большим и сечение каждой из трубок  $S$  настолько малым, что в пределах любого нормального сечения трубки индукцию и напряженность магнитного поля можно будет считать постоянными ( $\vec{B} = \text{const}$  и  $\vec{H} = \text{const}$ ), то энергию магнитного поля, сосредоточенную в объеме трубки, можно выразить через величины  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . Определим энергию поля для  $r$ -й трубки, например для трубки, имеющей индекс  $r = 2$  (рис. 1.7).

Рассмотрим сечение трубки на расстоянии  $l$  вдоль оси трубки от начала отсчета  $O_r$ . Ориентируем это сечение таким образом, чтобы нормаль  $\vec{n}$  к сечению была касательная к оси трубки. Площадь такого сечения, являющуюся функцией  $l$ , обозначим  $S_r = S_r(l)$ . При таком ориентировании сечения вектор малого перемещения вдоль оси трубки совпадает по направлению с нормалью  $\vec{n}$ , т. е.  $d\vec{l} = \vec{n}dl$ , а элемент объема трубки  $dV = \vec{S}_r d\vec{l} = S_r dl$ , где  $\vec{S}_r = \vec{n}S_r$  — вектор площади сечения трубки. В уравнении (1.38) выразим поток трубки  $\Phi_{Tr\sim}$  и приращение потока трубки  $d\Phi_{Tr\sim}$  соответственно через индукцию  $\vec{B}_{\sim}$  и приращение индукции  $d\vec{B}_{\sim}$  в рассматриваемом сечении

$$\Phi_{Tr\sim} = B_{\sim n} S_r = \vec{B}_{\sim} \vec{n} S_r = \vec{B}_{\sim} \vec{S}_r; \quad d\Phi_{Tr\sim} = \vec{S}_r \cdot d\vec{B}_{\sim}.$$

Ток  $i_{Tr\sim}$  представим в соответствии с законом полного тока в виде циркуляции напряженности  $\vec{H}_{\sim}$  вдоль оси трубки:

$$i_{Tr\sim} = \oint_{l_r} \vec{H}_{\sim} \cdot d\vec{l},$$

где  $l_r$  — длина оси трубки.

Тогда магнитная энергия  $W_{Tr}$ , сосредоточенная в  $r$ -й трубке

$$W_{Tr} = \int_0^{\Phi_{Tr}} i_{Tr\sim} d\Phi_{Tr\sim} = \int_0^{\Phi_{Tr}} d\Phi_{Tr\sim} \int_{l_r} \vec{H}_{\sim} \cdot d\vec{l}.$$

Имея в виду, что поток  $\Phi_{Tr\sim}$  и приращение потока  $d\Phi_{Tr\sim}$  одинаковы для всех сечений трубки и, следовательно, не зависят от расстояния  $l$ , можно ввести  $d\Phi_{Tr\sim}$  под знак линейного интеграла:

$$W_{Tr} = \int_0^{\Phi_{Tr}} \int_{l_r} (d\Phi_{Tr\sim}) \vec{H}_{\sim} \cdot d\vec{l}.$$

Представляя приращение потока через приращение индукции и меняя порядок операций интегрирования, выразим магнитную энергию, сосредоточенную в трубке потока, через величины поля

$$\begin{aligned} W_{Tr} &= \int_0^{\bar{B}} \int_{l_r} (\bar{H}_{\sim} d\bar{l}) (\bar{S}_r d\bar{B}_r) = \int_{l_r} \bar{S}_r d\bar{l} \int_0^{\bar{B}} \bar{H}_{\sim} d\bar{B}_{\sim} = \\ &= \int_{V_r} dV \int_0^{\bar{B}} \bar{H}_{\sim} d\bar{B}_{\sim} = \int_{V_r} \omega_{\text{нл}} dV, \end{aligned}$$

где  $V_r = \int_{l_r} \bar{S}_r d\bar{l} = \int_{l_r} S_r dl$  — объем  $r$ -й трубки.

Энергию магнитного поля в объеме  $V = \sum_{r=1}^M V_r$ , занимаемом всеми его трубками, найдем как сумму энергий всех трубок поля:

$$W_{\text{нл}} = \sum_{r=1}^M W_{Tr} = \sum_{r=1}^M \int_{V_r} \omega_{\text{нл}} dV = \int_V \omega_{\text{нл}} dV, \quad (1.39)$$

где

$$\omega_{\text{нл}} = \int_0^{\bar{B}} \bar{H}_{\sim} d\bar{B}_{\sim} \quad (1.40)$$

— объемная плотность энергии магнитного поля;  $\bar{B} = \bar{B}(x, y, z)$  — индукция в точке  $x, y, z$  (в пределах элемента  $dV$ );  $\bar{B}_{\sim} = 0 \div \bar{B}$  — текущая индукция в той же точке, соответствующая текущим токам в контурах  $i_{h\sim} = i_* i_h$  или текущим плотностям токов в области поля  $\bar{J}_{\sim} = i_* \bar{J}$ ;  $\bar{H}_{\sim} = 0 \div \bar{H}$  — текущая напряженность в той же точке, являющаяся функцией текущей индукции.

Применительно к изотропным безгистерезисным средам, в силу коллинеарности векторов  $\bar{H}_{\sim}$  и  $\bar{B}_{\sim}$  формулу (1.39) можно упростить:

$$W_{\text{нл}} = \int_V dV \int_0^{\bar{B}} H_{\sim} d\bar{B}_{\sim} = \int_V \omega_{\text{нл}} dV, \quad (1.41)$$

где

$$\omega_{\text{нл}} = \int_0^{\bar{B}} H_{\sim} d\bar{B}_{\sim} \quad (1.42)$$

— объемная плотность энергии магнитного поля, приходящаяся на единицу его объема.

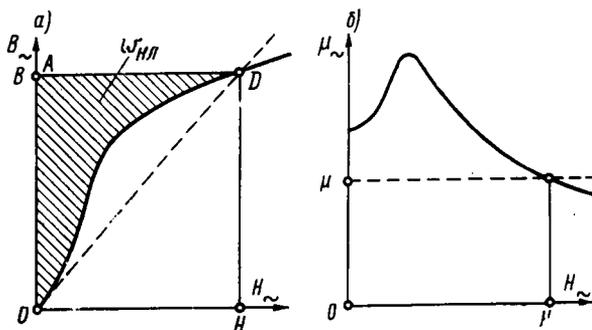


Рис. 1.8. Определение объемной плотности энергии магнитного поля

Заметим, что для определения энергии  $W_{нл}$  по (1.41) не требуется многократное повторение расчета магнитного поля в рассматриваемой области для ряда текущих значений  $\vec{J}_{\sim} = t_* \vec{J}$ , как это было необходимо при определении  $W_{нл}$  по (1.37). Достаточно рассчитать магнитное поле один раз, определив модули индукции  $B = B(x, y, z)$  по заданному распределению вектора  $\vec{J} = \vec{J}(x, y, z)$ . Затем, варьируя  $B_{\sim}$  в пределах от 0 до  $B$ , можно для каждой рассматриваемой точки  $(x, y, z)$  найти по (1.42) удельную энергию магнитного поля  $w_{нл}$  (рис. 1.8, а, б) и, проинтегрировав  $w_{нл}$  по объему области поля по (1.41), определить энергию магнитного поля в этой области.

### 1.5. Микро модель магнитного поля нелинейной системы.

#### Выражение магнитной энергии через величины ее элементарных ветвей

Магнитное поле в нелинейных средах, заданное известным распределением  $\vec{J}$  и однозначно определенное в п. 1.1.2, можно полностью воспроизвести с помощью *полной микро модели магнитного поля* [4]. В отличие от полной макро модели (рис. 1.9, а), поле в которой воспроизводится сохраненным в ней распределением заданных плотностей «макротоков»  $\vec{J}$ , в микро модели плотности макротоков  $\vec{J}$  в явном виде не присутствуют. А для воспроизведения магнитного поля в микро модели (рис. 1.9, б) используются поверхностные микротоки с плотностью  $\vec{j} = [\vec{H}\vec{n}]$ , возбуждающие необходимую напряженность  $\vec{H} = \vec{j}_H(x, y, z)$ , в каждой из элементарных ветвей магнитного поля. Под элементарной  $s$ -й ветвью магнитного поля будем понимать элемент трубки магнитного поля с достаточно малыми высотой  $h_c$  и поперечным сечением  $S_c$ , внутри которого маг-

нитную проницаемость  $\mu = \mu(x_c, y_c, z_c)$ , индукцию  $B = f_B(x_c, y_c, z_c)$  и напряженность  $\vec{H} = f_H(x_c, y_c, z_c)$  можно считать постоянными по величине и направлению и равными значениям этих величин на оси трубки.

Область поля (рис. 1.9, а, б) разбивается на отдельные элементарные ветви множеством взаимно ортогональных эквипотенциальных

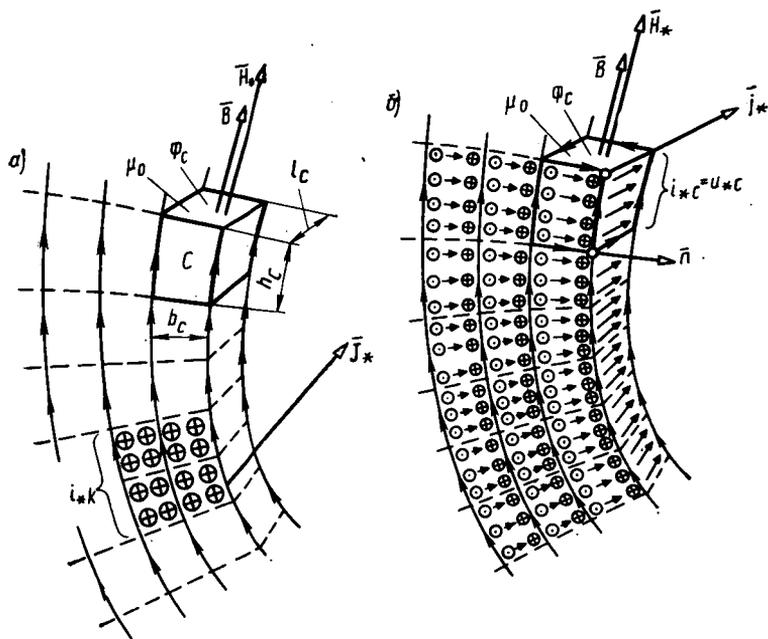


Рис. 1.9. Полные макро- (а) и микро- (б) модели магнитного поля

ных  $S_0$  и магнитных  $S_m$  поверхностей. Следы эквипотенциальных поверхностей  $S_0$  изображены на рисунке пунктирными линиями; следы магнитных поверхностей, совпадающие с линиями поля — сплошными линиями. Каждая из элементарных ветвей, в частности ветвь с индексом  $c$ , выделенная на рис. 1.9, а утолщенными линиями, представляет собой прямоугольный параллелепипед с высотой  $h_c$  вдоль линий поля и площадью основания  $S_c$ , боковые грани которого являются магнитными поверхностями  $S_m$ , а торцевые  $S_c$  — эквипотенциальными поверхностями  $S_0$ . При общем количестве элементарных ветвей в области поля  $P$  индекс ветви  $c$  может принимать значения:  $c \in 1, 2, \dots, P$ . Рассмотрим более детально возбуждение поля в  $c$ -й элементарной ветви микромоделю (рис. 1.9, б). Как и другие ветви, эта ветвь возбуждается поверхностными токами с плотностью

$$\vec{j} = [\vec{H} \vec{n}], \quad (1.43)$$

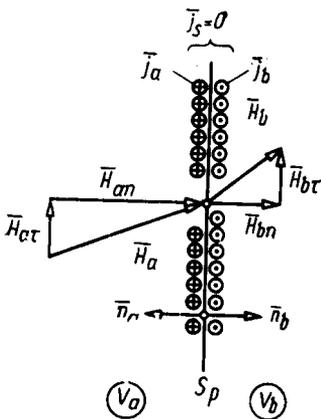


Рис. 1.10. Граничные условия на поверхности разрыва магнитной проницаемости в полной микромоделе магнитного поля:

$\bar{n}_a, \bar{n}_b$  — внешние нормали по отношению к средам соответственно  $b$  и  $a$

микромоделе сохраняются напряженность поля  $H = i_{эс}/h_c = u_{эс}/h_c$ , индукция  $B = \mu H$ , магнитный поток  $\Phi_{эс} = BS_c$  и направление векторов  $H$  и  $B$ . Совпадение магнитных полей, образованных макротоками с объемной плотностью  $\bar{J} = \text{rot } \bar{H}$  и микротоками с поверхностной плотностью  $\bar{j} = |\bar{H}\bar{n}|$ , объясняется тем (см. приложение П1), что макротоки представляют собой, в сущности, сумму микротоков. А объемную плотность макротоков  $\bar{J}$  можно определить как усредненные в пределах элементарных сечений поверхностные плотности микротоков  $\bar{j}$  соседних элементарных ветвей.

Распространяя на полную микромодель граничные условия (1.5), справедливые для поверхности разрыва магнитной проницаемости в макромоделе, нетрудно убедиться в том, что сумма поверхностных микротоков на поверхности  $S_p$  в микромоделе всегда равна нулю. Для этого рассмотрим элемент поверхности  $S_p$  между средами  $a$  и  $b$ , внешняя нормаль к которому по отношению к среде  $a$  обозначена  $\bar{n}_b$  и соответственно внешняя нормаль по отношению к среде  $b$  обозначена  $\bar{n}_a$  (рис. (1.10)). По (1.43), поверхностные плотности микротоков  $\bar{j}_a$  и  $\bar{j}_b$ , воспроизводящие тангенциальные составляющие напряженности поля  $\bar{H}_{ат}$  и  $\bar{H}_{bt}$  соответственно в средах  $a$  и  $b$ :

протекающими по боковым граням ветви. Направления этих токов на боковых гранях показаны на рис. 1.9. На боковой грани  $c$ -й ветви с внешней нормалью  $\bar{n}$  плотность этих токов показана в виде вектора  $\bar{j}$ ; полный ток на этой грани равен магнитному напряжению элементарной ветви

$$i_{эс} = jh_c = Hh_c = u_{эс}. \quad (1.44)$$

Откуда следует, что модули  $\bar{j}$  и  $\bar{H}$  одинаковы ( $j = H$ ). Плотности токов  $\bar{j}$  на других боковых гранях  $c$ -й ветви со своими нормальми  $\bar{n}$  определяются по (1.43). Модули плотностей токов на всех гранях будут одинаковыми ( $j = H$ ). Соответственно будут одинаковыми и полные токи на боковых гранях ветви ( $i_{эс} = Hh_c$ ). Таким образом образуется ток  $i_{эс} = Hh_c$ , охватывающий  $c$ -ю ветвь и возбуждающий в ней такое же магнитное поле, как в макромоделе, показанной на рис. 1.9, а. Причем в  $c$ -й ветви

$$\begin{aligned}\bar{j}_a &= [\bar{H}_a \bar{n}_b] = [(\bar{H}_{a\tau} + \bar{H}_{an}) \bar{n}_b] = [\bar{H}_{a\tau} \bar{n}_b]; \\ \bar{j}_b &= [\bar{H}_b \bar{n}_a] = [(\bar{H}_{b\tau} + \bar{H}_{bn}) \bar{n}_a] = [\bar{H}_{b\tau} \bar{n}_a] = -[\bar{H}_{b\tau} \bar{n}_b].\end{aligned}$$

Складывая плотности микротоков на поверхности  $S_p$  и учитывая, что в соответствии с (1.5)  $\bar{H}_{a\tau} = \bar{H}_{b\tau}$ , убедимся в отсутствии поверхностного тока на этой поверхности в полной микромодели:

$$\bar{j}_a + \bar{j}_b = [(\bar{H}_{a\tau} - \bar{H}_{b\tau}) \bar{n}_b] = 0.$$

Для определения магнитной энергии в объеме  $c$ -й элементарной ветви микромодели рассмотрим процесс намагничивания ветви распределенным по ее поверхности текущим током  $i_{\vartheta c\sim} = H_{\sim} h_c$ , нарастающим от 0 до  $i_{\vartheta c} = u_{\vartheta c} = H h_c$ . В процессе намагничивания текущий магнитный поток ветви  $\Phi_{\vartheta c\sim} = B_{\sim} S_c$  увеличивается от 0 до  $\Phi_{\vartheta c} = BS_c$  в соответствии с характеристикой намагничивания ветви  $\Phi_{\vartheta c} = f(i_{\vartheta c\sim})$ , показанной на рис. 1.11, а. Поскольку  $\Phi_{\vartheta c\sim}$  пропорционален индукции  $B_{\sim}$ , а  $i_{\vartheta c\sim}$  — напряженности  $H_{\sim}$ , характеристика намагничивания элементарной ветви  $\Phi_{\vartheta c\sim} = f(i_{\vartheta c\sim})$  всегда подобна характеристике намагничивания среды в объеме ветви  $B_{\sim} = f(H_{\sim})$  по рис. 1.8. Магнитная энергия  $c$ -й элементарной ветви микромодели, возбуждаемой одним контуром с током  $i_{\vartheta c\sim}$ , с учетом нелинейности ее характеристики намагничивания [см. (1.37)]:

$$W_{\vartheta c}(\text{пл}) = \int_0^{\Phi_{\vartheta c}} i_{\vartheta c\sim} d\Phi_{\vartheta c\sim}. \quad (1.45)$$

Эта энергия соответствует заштрихованной площади криволинейного треугольника  $OAD$  (рис. 1.11, а).

Так как характеристики намагничивания элементарной ветви  $\Phi_{\vartheta c\sim} = f(i_{\vartheta c\sim})$  и среды в ее объеме  $B = f(H_{\sim})$  подобны, то маг-

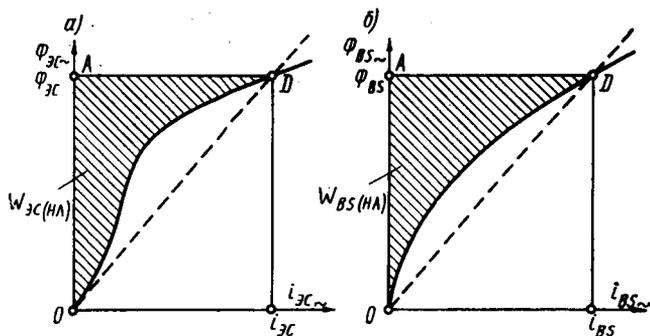


Рис. 1.11. Характеристики намагничивания ветви (б) и элементарной ветви (а) микромодели

нитную энергию ветви можно выразить и через объемную плотность магнитной энергии  $w_{нл}$  по (1.42), найденную с учетом нелинейности характеристики намагничивания среды:

$$W_{эс(нл)} = \int_0^{\Phi_{эс}} i_{эс} d\Phi_{эс} = V_c \int_0^B H_{\sim} dB_{\sim} = V_c w_{нл}, \quad (1.46)$$

где  $V_c = S_{\sim} h_c$  — объем ветви.

Магнитную энергию нелинейной системы можно выразить как сумму магнитных энергий элементарных ветвей ее микромоделей:

$$W_{нл} = \sum_{c=1}^P W_{эс(нл)} = \sum_{c=1}^P \int_0^{\Phi_{эс}} i_{эс} d\Phi_{эс}. \quad (1.47)$$

### 1.6. Магнитная цепь, эквивалентирующая поле нелинейной системы

Любое магнитное поле (двухмерное или трехмерное), заданное определенным распределением плотностей токов  $\vec{J}$  или токов  $i_h$  в возбуждающих контурах, можно воспроизвести *эквивалентной магнитной цепью*. Отдельной ветви этой цепи с индексом  $s$  соответствует подобласть магнитного поля, ограниченная с торцевых сторон эквипотенциальными поверхностями  $S_{эс}$ , нормальными к линиям поля, и с боковых сторон — магнитными поверхностями  $S_{мс}$ , совпадающими с линиями поля. На рис. 1.12 эквипотенциальные поверхности  $S_{эс}$  показаны двойными пунктирными линиями, магнитные поверхности и  $S_{мс}$  — двойными сплошными линиями.

Ветвь с индексом  $s$  можно представить образованной из нескольких последовательно-параллельно включенных элементарных ветвей с индексами  $c \in 1, 2, 3, \dots, 12$  микромоделей магнитного поля (рис. 1.12). Причем параллельно включенные элементарные ветви обладают одинаковыми суммарными потоками, равными потоку ветви,

$$\Phi_{нс} = \sum_{c \in c_{\Phi_s}} \Phi_{эс}, \quad (1.48)$$

где  $c_{\Phi_s} \in 1 \div 4$  или  $5 \div 8$ , или  $9 \div 12$ . Соответственно последовательно включенные элементарные ветви обладают одинаковы-

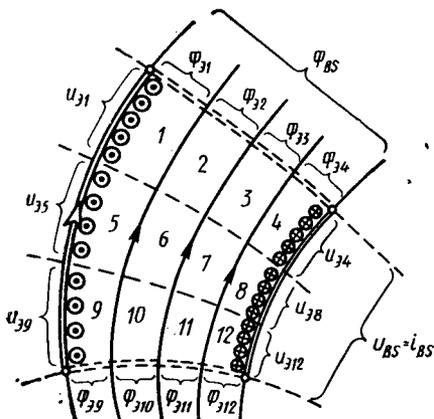


Рис. 1.12. Выделение из области поля ветви с потоком  $\Phi_{нс}$  и магнитным напряжением  $u_{нс}$

ми суммарными магнитными напряжениями или токами, равными разности магнитных потенциалов эквипотенциальных поверхностей, между которыми заключена эквивалентируемая подобласть поля,

$$u_{вс} = i_{вс} = \sum_{c=c_{us}} u_{эс} = \sum_{c=c_{us}} i_{эс}, \quad (1.49)$$

где  $c_{us} \in 1, 5, 9$  или  $2, 6, 10$ , или  $3, 7, 11$ , или  $4, 8, 12$ .

Магнитное напряжение ветви  $u_{вс}$  уравнивается равным ему током ветви  $i_{вс}$ , распределенным с поверхностной плотностью  $\bar{j} = [Hn]$  по боковой магнитной поверхности ветви.

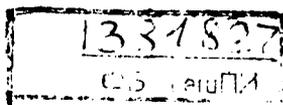
Магнитное сопротивление и магнитную проводимость ветви можно выразить через  $\Phi_{вс}$  и  $i_{вс}$ :

$$R_{вс} = 1/\Lambda_{вс} = i_{вс}/\Phi_{вс}. \quad (1.50)$$

Подход к составлению схемы эквивалентной магнитной цепи поясним на примере двухмерного магнитного поля в локальном объеме электрической машины (рис. 1.13). Это поле возбуждено периодической системой токов  $i$  чередующегося направления в пазах верхнего сердечника. На рис. 1.13 представлен полупериод этого поля. Линии поля (сплошные линии) разбивают область поля на ряд трубок потока  $T1, T2, \dots, T12$ . Средние линии трубок поля в области паза, занятой током  $i$ , показаны пунктирными линиями. Эквипотенциальные линии  $\mathcal{E}1, \mathcal{E}2, \dots, \mathcal{E}16$  — штрихпунктирными линиями.

Для составления схемы эквивалентной магнитной цепи нужно разбить область поля на отдельные подобласти, состоящие из нескольких участков трубок потока, заключенных между двумя эквипотенциальными поверхностями. Каждой такой подобласти соответствует определенная ветвь эквивалентной магнитной цепи, показанной на рис. 1.14. Например, подобласти, состоящей из участков трубок  $T1 - T6$  между эквипотенциалами  $\mathcal{E}1$  и  $\mathcal{E}16$ , соответствует ветвь  $B1$ . Эта ветвь имеет магнитное сопротивление  $R_{в1} = i_{в1}/\Phi_{в1}$ , где  $\Phi_{в1} = \Phi_{T1} + \Phi_{T2} + \Phi_{T3} + \dots + \Phi_{T6}$ ,  $i_{в1} = u_{в1} = \Phi_{\mathcal{E}1} - \Phi_{\mathcal{E}16}$ ;  $\Phi_{\mathcal{E}1}, \Phi_{\mathcal{E}16}$  — магнитные потенциалы узлов на линиях  $\mathcal{E}1$  и  $\mathcal{E}16$ , соответствующих узлам цепи с теми же индексами.

Обычно объединяют в отдельную ветвь участки трубок потока, полностью или почти полностью размещающиеся в одной и той же среде. Например, ветви  $B7$  и  $B15$  лежат в ферромагнитной среде, ветви  $B4, B9$  почти целиком лежат в ферромагнитной среде, ветви  $B1, B19$  — в немагнитной среде. В контуры эквивалентной магнитной цепи введены МДС, равные токам, охваченным средними линиями потоков ветвей контура. Например, в контур, образованный ветвью  $B22$  (трубкой  $T12$ ) введена МДС  $i_1$ , равная току, охваченному средней линией потока ветви; в контур, образованный вет-



вям  $B_{22}$ ,  $B_{21}$  и  $B_7$ , — МДС  $i_2$ , равная току, охваченному средними линиями потоков этих ветвей; в контур, образованный ветвями  $B_{21}$ ,  $B_8$ ,  $B_{20}$ ,  $B_6$ , — МДС  $i_3$ , равная току, охваченному средними линиями потоков этих контуров, и т. д. Полная МДС в контурах, охватывающих весь ток паза  $i$ , равна сумме частных МДС  $i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6$ .

Составленная схема магнитной цепи эквивалентна рассматриваемому магнитному полю в отношении потоков  $\Phi_{B_s}$ , сопротивлений и напряжений или МДС  $u_{B_s} = i_{B_s}$  ветвей. Иными словами, в результате расчета этой цепи при МДС в контурах, определенных указан-

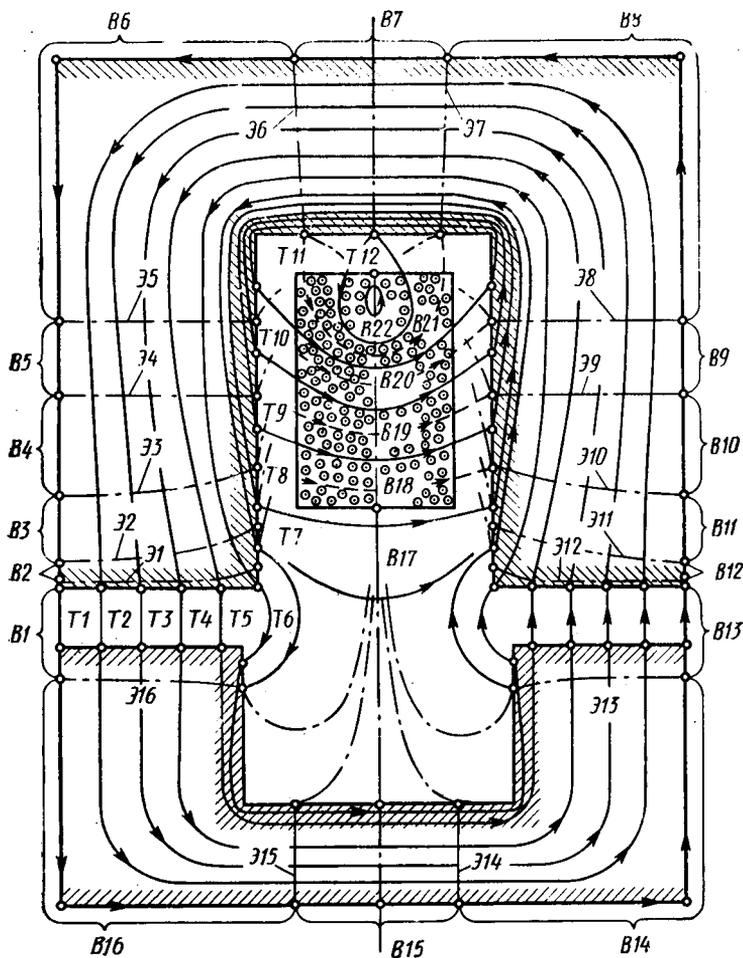


Рис. 1.13. Разбиение области магнитного поля на ряд подобластей, соответствующих отдельным ветвям  $B_1$ — $B_{22}$  эквивалентной магнитной цепи

ным образом, потоки  $\Phi_{вс}$  и магнитные напряжения или МДС  $u_{вс} = i_{вс}$  ветвей не будут отличаться от тех же величин для подобластей поля, ограниченных соответствующими магнитными и эквипотенциальными поверхностями.

Эквивалентные магнитные цепи для любых двухмерных или трехмерных магнитных полей в нелинейных системах (независимо от их сложности) составляют таким же образом.

Чем выше требования к точности расчета с помощью схемы магнитной цепи, тем полнее она должна воспроизводить интегральные величины магнитного поля, или, иными словами, тем достовернее должны быть определены магнитные сопротивления ветвей магнитной цепи, соответствующие определенным элементам магнитного поля, и МДС (токи), охваченные контурами магнитной цепи.

Схема эквивалентной магнитной цепи содержит  $Q$  ветвей, каждая из которых соответствует определенной подобласти поля машины. Поэтому энергию магнитного поля машины можно выразить в виде суммы энергий всех ветвей эквивалентной магнитной цепи

$$W_{нл} = \sum_{s=1}^Q W_{вс(нл)}. \quad (1.51)$$

В свою очередь, энергия любой ветви, например ветви с индексом  $s$ , соответствующей подобласти поля (см. рис. 1.12), равна сумме энергий по (1.45) в объемах элементарных ветвей, образующих данную подобласть,

$$W_{вс(нл)} = \sum_{c \in c_s} \int_0^{\Phi_{эс}} i_{эс} d\Phi_{эс},$$

где  $c_s$  — значения индексов элементарных ветвей, которые входят в ветвь с индексом  $s$  (для ветви по рис. 1.12 индексы  $c_s \in 1, 2, \dots, 12$ ).

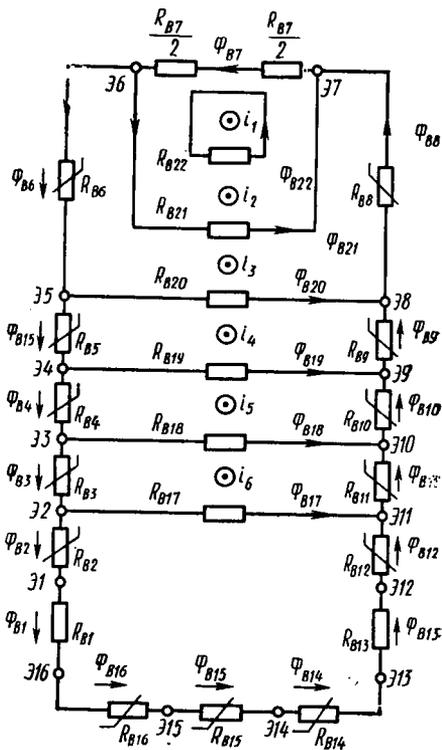


Рис. 1.14. Схема магнитной цепи, эквивалентной магнитному полю на рис. 1.13

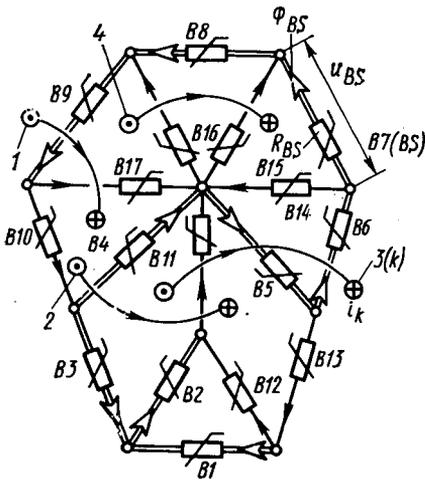


Рис. 1.15. Граф магнитной цепи, возбуждаемой токами  $i_k$  в электрических контурах 1—4

характеристики намагничивания  $\Phi_{BS} = f(i_{BS})$  соответствует заштрихованной площади криволинейного треугольника  $OAD$  (рис. 1.11, б).

Покажем, каким образом используется схема эквивалентной магнитной цепи нелинейной системы для определения потоков  $\Phi_{BS}$ , и магнитных напряжений  $u_{BS}$  и магнитных энергий  $W_{BS(нл)}$  в ее ветвях. Предположим, что нам известны:

а) схема эквивалентной магнитной цепи, включающая  $Q$  ветвей с индексами  $BS$  (например, схема, показанная на рис. 1.15, включает  $Q = 17$  ветвей с индексами  $BS$ , где  $S \in 1, \dots, 17$ );

б) размещение  $N$  возбуждающих контуров с индексами  $k \in 1, \dots, N$ , а также величина и направление потоков  $\Phi_k$ , сцепленных с возбуждающими контурами;

в) характеристики намагничивания,  $i_{BS} = u_{BS} = R_{BS} \Phi_{BS}$  и зависимости магнитных сопротивлений  $R_{BS} = i_{BS} / \Phi_{BS} = R_{BS}(\Phi_{BS})$  всех ветвей цепи.

Задавшись положительными направлениями потоков  $\Phi_{BS}$  в ветвях, представим эту цепь в виде ориентированного связанного графа, обладающего определенным количеством узлов  $Y$  и ветвей  $Q$ . Для анализа графа магнитной цепи (см. приложение П2), можно использовать топологические методы, развитые применительно к электрическим цепям (см. [8]). Выделим основные элементы графа: дерево, ветви связи, главные контуры и главные сечения. Граф содержит всегда  $D = Y - 1$  ветвей дерева и главных сечений и  $K = Q - D$  ветвей связи и главных контуров. В нашем примере граф магнитной цепи (рис. 1.15) содержит  $Y = 10$  узлов и  $Q = 17$  ветвей. Его дерево выделено двойными линиями и включает  $D =$

Согласно (1.48) и (1.49), из (1.51) можно исключить величины элементарных ветвей и выразить магнитную энергию ветви через  $\Phi_{BS}$  и  $i_{BS}$ :  $\Phi_{BS}$

$$W_{BS(нл)} = \int_0^{\Phi_{BS}} i_{BS} d\Phi_{BS}. \quad (1.52)$$

К уравнению (1.52) можно прийти, рассматривая процесс намагничивания данной ветви текущим током  $i_{BS}$ , нарастающим от 0 до  $i_{BS}$ . Для этого нужно обратиться к общей формуле (1.37) для энергии магнитного поля в нелинейной системе, возбуждаемой в данном случае только одним контуром с током  $i_{BS}$ . Магнитная энергия ветви с учетом нелинейности ее характе-

$\Rightarrow Y - 1 = 10 - 1 = 9$  ветвей с индексами  $B1, \dots, B9$ . Ветви связи имеют индексы  $B10, \dots, B17$ , и их общее количество  $K = Q - D = 17 - 9 = 8$ . Поскольку главное сечение пересекает только одну ветвь дерева, его удобно индексировать индексом этой ветви дерева. Соответственно главный контур, включающий только одну ветвь связи, следует индексировать индексом этой ветви связи. В данном примере граф содержит  $D = 9$  главных сечений с индексами  $B1, \dots, B9$  и  $K = 8$  главных контуров с индексами  $B10, \dots, B17$ . Систему независимых первых уравнений Кирхгофа для магнитной цепи можно записать, исходя из равенства нулю потоков через поверхность главных сечений.

В качестве примера запишем первое уравнение Кирхгофа для главного сечения с индексом  $B1$ , содержащего ветви  $B1, B12, B13$ . Примем за положительное направление потока равного сечения направление потока ветви дерева, принадлежащей данному сечению. Тогда первое уравнение Кирхгофа для главного сечения с индексом  $B1$

$$\Phi_{B1} - \Phi_{B12} - \Phi_{B13} = 0.$$

Аналогично запишем первые уравнения Кирхгофа для других главных сечений. Общее количество этих уравнений [см. (П.1)] равно числу ветвей дерева  $D$ .

Приступая к составлению вторых уравнений Кирхгофа для магнитной цепи, нужно иметь в виду, что здесь отсутствует полная аналогия с электрической цепью. В электрической цепи ЭДС, под действием которых возникают токи, вводятся прямо в ветви цепи. Напряжения ветвей находят с учетом этих ЭДС и затем подставляют в виде алгебраических сумм в уравнения контуров. В магнитной цепи МДС задаются в виде алгебраической суммы токов электрических контуров, сцепленных с контурами магнитной цепи. Эти МДС не могут быть в общем случае (для разветвленной магнитной цепи) введены непосредственно в ветви цепи. И вторые уравнения Кирхгофа для магнитной цепи приходится записывать на основании закона полного тока в виде условий: МДС, охваченная контуром магнитной цепи, равна алгебраической сумме напряжений ветвей контура.

В качестве примера запишем второе уравнение Кирхгофа для главного контура магнитной цепи с индексом  $B10$ . Этот контур включает ветви  $B10, B4, B5, B6, B7, B8, B9$ . С ним сцеплены электрические контура 1 и 2 с токами  $i_1$  и  $i_2$  (полный ток контура 4 равен нулю). Примем за положительное направление обхода главного контура направление потока в ветви связи, которую он включает, и за положительное направление МДС контура — направление, соответствующее направлению потока в ветви связи. Тогда второе уравнение Кирхгофа для контура с индексом  $B10$

$$i_2 - i_1 = u_{B10} + u_{B4} + u_{B5} + u_{B6} + u_{B7} + u_{B8} + u_{B9}.$$

Аналогично записываются уравнения для других главных контуров. Общее количество независимых вторых уравнений для цепи [см. (П.2)] равно количеству главных контуров  $K$ . К этим уравнениям Кирхгофа нужно добавить уравнения связи между магнитными напряжениями  $u_{вс}$  и потоками ветвей  $\Phi_{вс}$  в виде заданных характеристик намагничивания ветвей

$$i_{вс} = u_{вс} = R_{вс} \Phi_{вс},$$

где  $R_{вс} = R_{вс}(\Phi_{вс})$ .

Общее количество таких уравнений равно числу ветвей цепи  $Q$ . Таким образом, для определения  $2Q$  независимых потоков  $\Phi_{вс}$  и магнитных напряжений  $u_{вс}$  всех ветвей при заданных токах в электрических контурах  $i_k$  мы имеем  $D$  первых уравнений Кирхгофа [см. (П. 1)],  $K = Q - D$  вторых уравнений Кирхгофа [см. (П.2)] и  $Q$  уравнений намагничивания ветвей [см. (П.3)], т. е.  $D + K + Q = D + Q - D + Q = 2Q$  уравнений, что достаточно для определения всех неизвестных с помощью одного из численных методов решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

Если необходимо определить не только потоки ветвей, но и потоки, сцепленные с электрическими контурами, к составленным выше уравнениям следует добавить уравнения, связывающие потоки электрических контуров с потоками ветвей.

В качестве примера запишем такое уравнение для электрического контура с индексом 4, охватывающего ветви  $B16$  и  $B15$ . Примем за положительное направление потока электрического контура направление, соответствующее его току. Тогда для потока электрического контура с индексом 4 получим уравнение:

$$\Phi_4 = \Phi_{в15} + \Phi_{в16}.$$

Аналогично запишем уравнения для потоков других электрических контуров. Общее количество этих уравнений [см. (П. 4)] равно количеству электрических контуров  $N$ .

Если заданными являются токи электрических контуров, а потоки ветвей  $\Phi_{вс}$  найдены с помощью [см. (П. 1) -- (П.4)], то потоки электрических контуров легко рассчитать по формуле (П.4).

Если требуется рассчитать магнитную цепь при заданных потоках, сцепленных с электрическими контурами, а определить необходимо  $2Q$  токов и потоков ветвей, а также  $N$  токов электрических контуров, то для определения всех  $(2Q + N)$  неизвестных необходимо решить совместно  $D$  первых уравнений Кирхгофа [см. (П.1)],  $K = Q - D$  вторых уравнений Кирхгофа [см. (П.2)],  $Q$  уравнений намагничивания ветвей [см. (П.3)] и  $N$  уравнений потоков электрических контуров [см. (П.4)], т. е.  $D + Q - D + Q + N = 2Q + N$  уравнений.

После определения потоков  $\Phi_{вс}$  и магнитных напряжений  $u_{вс}$  ветвей цепи, соответствующих заданным токам  $i_k$  в электрических контурах, появляется возможность заменить реальную систему

возбуждающих контуров с токами  $i_k$  на эквивалентную систему возбуждающих контуров с токами  $i_{BS} = u_{BS}$ , каждый из которых охватывает одну из ветвей магнитной цепи.

Ясно, что такая замена не изменит магнитные потоки  $\Phi_{BS}$  и магнитные напряжения  $u_{BS}$  ветвей, поскольку потоки  $\Phi_{BS}$  всегда будут удовлетворять системе первых уравнений Кирхгофа для магнитной цепи, а магнитные напряжения  $u_{BS}$  — системе вторых уравнений Кирхгофа для контуров магнитной цепи.

В качестве примера на рис. 1.16 показан граф магнитной цепи по рис. 1.15, после замены в ней реальных возбуждающих контуров на эквивалентную систему контуров, охватывающих отдельные ветви магнитной цепи.

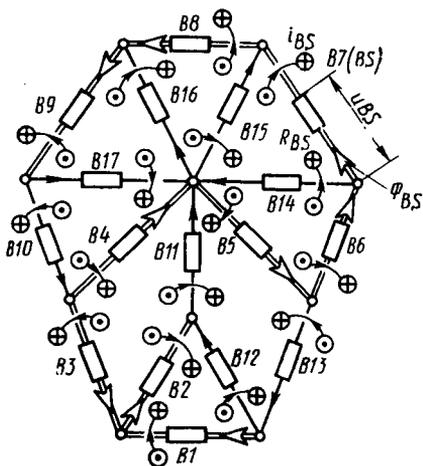


Рис. 1.16. Граф магнитной цепи (рис. 1.15) после замены в ней реальных возбуждающих контуров на эквивалентную систему контуров, охватывающих отдельные ветви магнитной цепи

Совершенно очевидно, что при замене реальных возбуждающих контуров на эквивалентные сохранятся не только потоки  $\Phi_{BS}$  и магнитные напряжения  $u_{BS}$  ветвей, но и магнитная энергия  $W_{BS}$  ветвей, а также полная магнитная энергия всей магнитной цепи.

Полную магнитную энергию нелинейной магнитной цепи можно выразить по (1.37) как в виде суммы энергий, приходящихся на долю реальных возбуждающих электрических контуров,

$$W_{\text{нл}} = \sum_{k=1}^N \int_0^{\Phi_k} i_{k\sim} d\Phi_{k\sim},$$

так и в виде суммы энергий, приходящихся на долю эквивалентных возбуждающих электрических контуров с токами  $i_{BS}$ , каждый из которых охватывает одну из ветвей магнитной цепи и сцеплен с потоком  $\Phi_{BS}$ ,

$$W_{\text{нл}} = \sum_{s=1}^Q \int_0^{\Phi_{BS}} i_{BS\sim} d\Phi_{BS\sim}. \quad (1.53)$$

Формула (1.53) совпадает с формулой (1.52), полученной на основании анализа магнитного поля, эквивалентированного магнитной цепью.

## 1.7. Энергия магнитного поля в линейной модели нелинейной системы

1.7.1. Выражение магнитной энергии в линейной модели через величины поля. В отличие от нелинейной системы в ее линейной модели магнитная проницаемость  $\mu = \mu(x, y, z)$  не зависит от индукции  $B_{\sim}$  в данной точке области поля. Поэтому зависимость  $B_{\sim}$  от  $H_{\sim}$  получается линейной:  $B_{\sim} = \mu H_{\sim}$ . Такая зависимость показана пунктирной линией на рис. 1.8, а для линейной среды, обладающей постоянной магнитной проницаемостью  $\mu = \text{const}$ , равной при  $B_{\sim}$  в магнитной проницаемости нелинейной среды (характеристики нелинейной среды показаны сплошными линиями).

Поскольку в линейной среде  $dB_{\sim} = \mu dH_{\sim}$  ( $\mu = \text{const}$ ), формула для расчета объемной плотности магнитной энергии существенно упрощается:

$$\omega = \int_0^{B_{\sim}} H_{\sim} dB_{\sim} = \mu H_{\sim}^2 / 2 = HB / 2. \quad (1.54)$$

Объемная плотность магнитной энергии  $\omega$  в линейной модели, соответствующая на рис. 1.8, а площади треугольника  $OAD$ , превышает объемную плотность магнитной энергии  $\omega_{\text{нл}}$ , найденную с учетом нелинейности характеристик намагничивания среды (заштрихованная площадь). Так как  $\omega > \omega_{\text{нл}}$ , то энергия магнитного поля в линейной модели

$$W = \int_V \omega dV = \frac{1}{2} \int_V HB dV > W_{\text{нл}} \quad (1.55)$$

всегда больше, чем в нелинейной системе [см. (1.41)].

1.7.2. Выражение магнитной энергии в линейной модели через величины электрических цепей (токи и потокосцепления). В линейной модели упрощается вычисление магнитной энергии по формуле (1.37), в которой она выражена через величины электрических цепей (контуров)  $\Phi_k$  и  $i_k$ . В силу линейности сред линейная модель обладает постоянными статическими взаимными индуктивностями контуров  $L_{km} = \text{const}$  и, следовательно, [см. (1.14)] постоянными статическими эквивалентными индуктивностями контуров:

$$L_k = \frac{\Phi_k}{i_k} = \frac{1}{i_k} \sum_{m=1}^N L_{km} i_m = \text{const}. \quad (1.56)$$

Текущие потоки контуров  $\Phi_{k\sim}$ , нарастающие в процессе намагничивания от 0 до  $\Phi_k$ , выражаются через взаимные индуктивности  $L_{km}$  и текущие токи  $i_{m\sim}$ :

$$\Phi_{k\sim} = \sum_{m=1}^N L_{km} i_{m\sim}. \quad (1.57)$$

Поскольку текущие токи  $i_{m\sim}$  должны быть подчинены в процессе намагничивания условию (1.33), т. е.  $i_{m\sim} = i_{k\sim} i_m / i_k$ , то из (1.57) следует, что

$$\Phi_{k\sim} = i_{k\sim} \left( \frac{1}{i_h} \sum_{m=1}^N L_{km} i_m \right) = i_{k\sim} L_k, \quad (1.58)$$

где  $L_k$  — статическая эквивалентная индуктивность контура  $k$  [см. (1.56)].

Согласно (1.58), характеристика намагничивания  $k$ -го контура линейной модели  $\Phi_{k\sim} = L_k i_{k\sim}$  линейна и проходит через точку  $\Phi_k, i_k$  (точку  $D$ ). Для контуров линейной модели с индексами  $k \in 1, 2, 3$  их линейные характеристики намагничивания показаны пунктиром на рис. 1.6, б — г. Поскольку  $d\Phi_{k\sim} = L_k di_{k\sim}$ , то исходя из (1.37), найдем следующую формулу для магнитной энергии, приходящейся на долю  $k$ -го контура в линейной модели нелинейной системы,

$$W_k = \int_0^{\Phi_k} i_{k\sim} d\Phi_{k\sim} = \int_0^{i_k} L_k i_{k\sim} di_{k\sim} = L_k i_k^2 / 2 = \Phi_k i_k / 2. \quad (1.59)$$

На рис. 1.6, б — г магнитная энергия  $W_k$  ( $k \in 1, 2, 3$ ), приходящаяся на долю  $k$ -го контура в линейной модели нелинейной системы, соответствует площади треугольника  $OAD$ . Эта энергия превосходит магнитную энергию  $W_{k(н.л.)}$ , приходящуюся на долю  $k$ -го контура нелинейной системы (заштрихованная площадь на этих рисунках).

Полная энергия магнитного поля линейной модели нелинейной системы определяется в виде суммы энергий возбуждающих ее контуров:

$$W = \sum_{k=1}^N W_k = \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_k i_k}{2} > W_{н.л.} \quad (1.60)$$

Энергию магнитного поля в линейной модели, исходя из (1.57) и учитывая (1.14), можно выразить и через токи в контурах  $i_k$  ( $i_m$ ) и взаимоиндуктивности  $L_{km}$ :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \sum_{m=1}^N i_m L_{km}. \quad (1.61)$$

**1.7.3. Выражение магнитной энергии линейной микро модели через величины ее элементарных ветвей.** В линейной модели нелинейной системы упрощается вычисление магнитной энергии по (1.47) и (1.45) через величины элементарных ветвей микро модели. Поскольку в линейной модели в силу постоянства  $\mu$  характеристика

намагничивания элементарной ветви линейна (пунктирная линия на рис. 1.11, а), то

$$i_{\text{эс}} = R_{\text{эс}} \Phi_{\text{эс}}, \quad (1.62)$$

где  $R_{\text{эс}} = i_{\text{эс}}/\Phi_{\text{эс}} = h_c/(\mu S_c) = \text{const}$  — магнитное сопротивление элементарной ветви.

Исходя из (1.45), можно получить формулу для вычисления энергии элементарной ветви в линейной модели

$$W_{\text{эс}} = \int_0^{\Phi_{\text{эс}}} R_{\text{эс}} \Phi_{\text{эс}} d\Phi_{\text{эс}} = R_{\text{эс}} \Phi_{\text{эс}}^2/2 = \Phi_{\text{эс}} i_{\text{эс}}/2. \quad (1.63)$$

Магнитная энергия  $c$ -й элементарной ветви линейной модели нелинейной системы  $W_{\text{эс}}$ , соответствующая площади треугольника  $OAD$  на рис. 1.11, а, превосходит магнитную энергию  $W_{\text{эс(нл)}}$ , найденную с учетом нелинейности (заштрихованная площадь на этом рисунке).

Полная магнитная энергия линейной модели представляет собой сумму энергий всех элементарных ветвей

$$W = \sum_{c=1}^P W_{\text{эс}} = \sum_{c=1}^P \Phi_{\text{эс}} i_{\text{эс}}/2 > W_{\text{нл}}. \quad (1.64)$$

**1.7.4. Выражение магнитной энергии линейной модели через величины ветвей эквивалентной магнитной цепи.** В линейной модели нелинейной системы упрощается вычисление магнитной энергии через величины ветвей эквивалентной магнитной цепи. В линейной модели нелинейной системы в силу постоянства магнитной проницаемости в процессе намагничивания ( $\mu = \mu(x, y, z) = \text{const}$  при  $x, y, z = \text{const}$ ) характеристики намагничивания ветвей эквивалентной магнитной цепи линейны (пунктирные линии на рис. 1.11, б):

$$i_{\text{БС}} = R_{\text{БС}} \Phi_{\text{БС}}, \quad (1.65)$$

где  $R_{\text{БС}} = i_{\text{БС}}/\Phi_{\text{БС}} = \text{const}$  — магнитное сопротивление ветви.

Исходя из (1.52) и учитывая (1.65), можно получить следующую формулу для магнитной энергии ветви магнитной цепи в линейной модели:

$$W_{\text{БС}} = \int_0^{\Phi_{\text{БС}}} R_{\text{БС}} \Phi_{\text{БС}} d\Phi_{\text{БС}} = R_{\text{БС}} \Phi_{\text{БС}}^2/2 = \Phi_{\text{БС}} i_{\text{БС}}/2. \quad (1.66)$$

Магнитная энергия  $s$ -й ветви магнитной цепи  $W_{\text{БС}}$  в линейной модели нелинейной системы соответствует площади треугольника  $OAD$  на рис. 1.11, б и превышает магнитную энергию ветви  $W_{\text{БС(нл)}}$  по (1.52), найденную с учетом нелинейности (заштрихованная площадь на этом рисунке).

Полная магнитная энергия линейной модели нелинейной системы представляет собой сумму энергий всех ветвей магнитной цепи:

$$W = \sum_{s=1}^Q W_{B_s} = \sum_{s=1}^Q \Phi_{B_s} i_{B_s} / 2 > W_{\text{пл.}} \quad (1.67)$$

#### КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. Математической моделью магнитного поля в нелинейных средах с заданными зависимостями для магнитных проницаемостей является система уравнений, включающая первое уравнение Максвелла, уравнение непрерывности, уравнения связи между векторами индукции и напряженности поля, а также уравнения граничных условий на поверхностях разрыва магнитной проницаемости.

2. Поскольку модель математическая по п. 1 при заданном распределении объемных плотностей макротоков  $\vec{J}$  полностью воспроизводит все величины, характеризующие магнитное поле в нелинейных средах (индукцию, напряженность, намагниченность, магнитную проницаемость, объемные плотности магнитной энергии и электромагнитных сил), она называется *макромоделью магнитного поля*.

3. Магнитное поле нелинейной системы, однозначно определенное при заданном распределении объемных плотностей макротоков с помощью макромодели магнитного поля, может быть воспроизведено в *линейной макромодели магнитного поля нелинейной системы*. В линейной модели сохраняется конфигурация сред и контуров с токами и, следовательно, заданные плотности макротоков  $\vec{J}$ . Магнитные проницаемости во всех точках области поля линейной модели считаются постоянными и равными тем магнитным проницаемостям, которые соответствуют действительному магнитному состоянию нелинейной системы.

4. Процессы, происходящие в нелинейной системе за время  $dt$ , в течение которого выделенный объем  $V$  перемещается на  $dq$ , а токи возбуждающих контуров изменяются на  $di_k$ , характеризуются приращениями магнитных потоков  $d\Phi_k$ , сцепленных с отдельными контурами, и приращением энергии магнитного поля системы  $dW$ .

5. Приращения магнитных потоков  $d\Phi_k$  выражаются в виде суммы приращений  $d\Phi_{km} = (\partial\Phi_k/\partial i_m) di_m$ , связанных с изменением тока одного из контуров на  $di_m$ , и приращений  $d\Phi_{kq}$ , связанных с перемещением на  $dq$ .

6. Приращение потока  $d\Phi_{km}$ , связанное с изменением тока одного из контуров на  $di_m$ , и соответствующая ему трансформаторная ЭДС  $e_{km}$  выражаются с помощью макромодели магнитного поля нелинейной системы через *дифференциальную индуктивность*  $L_{kmd} = \partial\Phi_k/\partial i_m$ .

7. Приращение потока  $d\Phi_{kq}$ , связанное с перемещением выделенного объема на  $dq$ , и соответствующая ему ЭДС перемещения  $e_{kq}$  выражаются с помощью полной линейной макромодели магнитного поля нелинейной системы через *приращение эквивалентной статической индуктивности*  $dL_k$ .

8. Приращение магнитной энергии  $dW$  складывается из двух приращений: приращения энергии  $dW_{q=\text{const}}$ , которое происходит за счет приращений токов и должно определяться с помощью *полной макромодели* с учетом нелинейности характеристик намагничивания контуров; и приращения энергии  $dW_{i_m=\text{const}}$ , которое происходит за счет перемещения на  $dq$  и должно определяться с помощью *полной линейной макромодели*.

**Определение электромагнитных сил по изменению магнитной энергии или коэнергии при малом перемещении в условиях постоянства токов или потоков возбуждающих контуров**

**2.1. Электромеханическое преобразование энергии при перемещении выделенного объема нелинейной системы в условиях постоянства потоков или токов возбуждающих контуров**

Электромагнитная сила (ЭМС) и момент, действующие на выделенную часть нелинейной системы в объеме  $V$  (см. рис. 1.4, 1.5), определяются пространственными распределениями в этом объеме плотностей токов  $\vec{J} = j_J(x, y, z)$ , магнитных индукций  $\vec{B} = j_B \times \times(x, y, z)$  и проницаемостей  $\mu = j_\mu(B, x, y, z) = \mu(x, y, z)$ . Электромагнитные силы можно рассчитать несколькими методами. Фундаментальным методом, исходя из которого могут быть обоснованы другие известные методы, является энергетический метод [1, 2].

Идея метода состоит в применении закона сохранения энергии к электромеханическому преобразованию, которое происходит при бесконечно малом изменении координаты  $q$ , характеризующей положение выделенной части системы в объеме  $V$  по отношению к остальной ее части. Перемещению подвергается выделенная часть системы  $V$ , для которой нужно найти действующие на нее электромагнитную силу или момент, объединяемые в дальнейшем общим понятием — обобщенной *электромагнитной силы* (ЭМС)  $D_q$ .

Перемещение должно осуществляться по направлению действия определяемой обобщенной ЭМС. Если определяется компонента ЭМС, действующей на объем  $V$  в направлении оси  $x$ , т. е.  $D_q = F_x = F_x$ , то перемещение  $\Delta q = \Delta x$  по направлению этой оси (см. рис. 1.4, а) должно быть линейным. Если определяется электромагнитный момент  $M_q = M_z$  относительно оси  $z$ , действующий на объем  $V$ , т. е.  $D_q = M_q = M_z$ , то перемещение  $\Delta q = \Delta \gamma_z$  относительно этой оси (см. рис. 1.4, б) должно быть угловым.

Во время перемещения или токи возбуждающих контуров  $i_k$ , или сцепленные с возбуждающими контурами потоки  $\Phi_k$  остаются постоянными. Если поддерживаются неизменными токи контуров ( $i_k = \text{const}$ ,  $\Delta i_k = 0$ ), то перемещение приводит к приращениям

потоков  $\Delta\Phi_k = \Phi_k^h - \Phi_k$ , где  $\Phi_k^h$  — поток контура после перемещения на  $\Delta q$ . Если поддерживаются неизменными сцепленные с контурами потоки ( $\Phi_k = \text{const}$ ,  $\Delta\Phi_k = 0$ ), то перемещение приводит к приращениям токов  $\Delta i_k = i_k^h - i_k$ , где  $i_k^h$  — ток контура после перемещения на  $\Delta q$ . При перемещении объема  $V$  в новое положение поддерживаются постоянными либо токи контуров ( $i_k = \text{const}$ ), либо потоки, сцепленные с контурами ( $\Phi_k = \text{const}$ ). Поэтому в процессе перемещения остаются неизменными магнитные проницаемости  $\mu = \mu(x, y, z)$  во всех элементах внутри и вне объема  $V$ . Перемещение элементов поверхности  $S$ , выделяющей объем  $V$ , в новое положение на поверхности  $S^h$  производится (см. рис. 1.5) за счет добавления или удаления среды с магнитной проницаемостью  $\mu$ , которая имела в этих элементах в исходном положении. А это означает, что перемещение объема  $V$  в новое положение на  $\Delta q$  должно производиться в линейной модели рассматриваемой нелинейной системы, обладающей  $\mu = \mu(x, y, z) = \text{const}$  при  $x, y, z = \text{const}$ .

Таким образом, для определения приращений  $\Delta\Phi_k$  (при  $i_k = \text{const}$ ) или  $\Delta i_k$  (при  $\Phi_k = \text{const}$ ) и соответствующих им приращений энергии нужно предварительно заменить нелинейную систему ее линейной моделью (см. § 1.1) и на основании расчетов магнитного поля линейной модели нелинейной системы до и после перемещения найти приращения  $\Delta\Phi_k$  или  $\Delta i_k$  в виде разности соответствующих величин.

Для осуществления перемещения в этих условиях возбуждающие контуры системы должны быть отключены от электрических сетей, от которых они получали питание в рабочих режимах, и присоединены к управляемым источникам электрической энергии, которые будут поддерживать такое напряжение, чтобы во время перемещения или токи контуров или потокосцепления контуров оставались постоянными ( $i_k = \text{const}$  или  $\Phi_k = \text{const}$ ). Причем управляемые источники электрической энергии должны быть введены не только в контуры, которые в рабочих режимах получали питание от внешних электрических сетей, но и в контуры, которые были замкнуты накоротко в рабочих режимах.

ЭМС  $D_q$ , действующая на выделенный объем  $V$  нелинейной системы, определяется из уравнения электромеханического преобразования энергии [см. (1.28)] для *линейной модели этой системы*. Из этого уравнения можно найти работу ЭМС  $D_q$  при перемещении на  $\Delta q$ :

$$D_q \Delta q = \Delta W_э - \Delta W, \quad (2.1)$$

где  $\Delta W_э = \sum_{k=1}^N i_k \Delta\Phi_k$  — электрическая энергия\*, поступившая

\* Электрическая энергия в (2.1) понимается как полная электрическая энергия от управляющих источников, уменьшенная на величину энергии, превратившейся в тепловую энергию в активных сопротивлениях возбуждающих контуров  $r_k$ .

в контуры линейной модели нелинейной системы от управляемых источников энергии, поддерживающих в них постоянство  $i_k$  или  $\Phi_k$  при перемещении на  $\Delta q$ ;  $\Delta W$  — приращение энергии магнитного поля линейной модели нелинейной системы при перемещении в этих условиях.

## 2.2. Определение электромагнитных сил по изменению магнитной энергии при перемещении в условиях постоянства потоков, сцепленных с возбуждающими контурами

Как показано в § 2.1, ЭМС можно найти, применяя закон сохранения энергии к электромеханическому преобразованию, которое происходит в условиях сохранения потокоцеплений возбуждающих контуров при малом перемещении ( $\Phi_k = \text{const}$ ).

Перед осуществлением перемещения выделенного объема  $V$  в условиях  $\Phi_k = \text{const}$  нелинейную систему нужно заменить ее линейной моделью (см. § 1.1), а во все контуры системы ввести управляемые источники электрической энергии. С помощью этих источников токи во всех контурах  $i_k$  должны изменяться при малом перемещении  $\Delta q$  таким образом, чтобы потокоцепления контуров  $\Phi_k$  оставались постоянными ( $\Phi_k = \text{const}$ ,  $\Delta\Phi_k = 0$ ). Процесс электромеханического преобразования энергии, который при этом происходит, описывается общим уравнением (2.1). Так как ЭДС перемещения во всех контурах отсутствуют ( $e_{kq} = -\Delta\Phi_k/\Delta t = 0$ ), обмен энергией между управляемыми источниками электрической энергии и системой не происходит, и электрическая энергия поступающая от этих источников в контуры, равна нулю:  $\Delta W_3 = -\sum_{k=1}^N i_k \Delta\Phi_k = 0$ . Тогда уравнение (2.1) приобретает вид

$$D\Delta q = -\Delta W. \quad (2.2)$$

Следовательно, при перемещении  $\Delta q$  в условиях  $\Phi_k = \text{const}$  работа  $D\Delta q$ , совершаемая ЭМС, производится за счет уменьшения энергии магнитного поля  $\Delta W$ , связанного с приращениями токов  $\Delta i_k$ . При положительном приращении магнитной энергии работа электромагнитных сил отрицательна. Это означает, что перемещение, которое приводит к увеличению магнитной энергии, осуществляется за счет внешней положительной силы ( $-D$ ), уравновешивающей отрицательную электромагнитную силу  $D$  и совершающей положительную работу ( $-D$ )  $\Delta q$ .

Из (2.2) получим ЭМС ( $\Phi_k = \text{const}$ ,  $k \in [1, N]$ )

$$D_q = -\lim_{(\Delta q \rightarrow 0)} \frac{\Delta W}{\Delta q} = -\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right). \quad (2.3)$$

На основании (2.3) приходим к выводу, что обобщенная ЭМС  $D_q$ , действующая на выделенный объем в направлении изменения координаты  $q$ , равна по абсолютной величине частной производной по этой координате от магнитной энергии, найденной при условии  $\Phi_k = \text{const}$ , выполняемом для всех контуров системы ( $k \in 1, \dots, N$ ).

Для определения ЭМС по (2.3) нужно найти приращение магнитной энергии  $\Delta W$  в линейной модели нелинейной системы при перемещении на  $\Delta q$  выделенного объема  $V$ . Магнитную энергию линейной модели системы в исходном состоянии (до перемещения), имея в виду, что ее характеристики намагничивания линейны  $\Phi_{k\sim} = L_k i_{k\sim}$  [см. (1.58)], можно выразить по (1.59), (1.60):

$$W = \sum_{k=1}^N W_k, \quad (2.4)$$

где  $W_k = \int_0^{\Phi_k} i_{k\sim} d\Phi_{k\sim} = \Phi_k i_k / 2$  — магнитная энергия, приходящаяся на долю  $k$ -го контура линейной модели в исходном положении.

На рис. 2.1 магнитная энергия  $W_k$  соответствует площади треугольника  $041$ , заключенной между характеристикой  $a$  намагничивания  $k$ -го контура в исходном положении, осью ординат и линией  $\Phi_{k\sim} = \Phi_k = \text{const}$ . Затем выделенный объем системы перемещается при  $\Phi_k = \text{const}$  на расстояние  $\Delta q$  в новое положение. Управляемые источники энергии, питающие контуры, увеличивают токи контуров до значений  $i_k^H = i_k + \Delta i_k$ , при которых обеспечивается неизменность потоков  $\Phi_k$ . При этом за счет работы внешней силы —  $D_q$ , уравнивающей электромагнитную силу  $D_q$ , магнитная энергия линейной модели  $W$  увеличивается на величину приращения  $\Delta W = -D_q \Delta q$  и становится равной магнитной энергии в новом положении:

$$W + \Delta W = W^H. \quad (2.5)$$

После перемещения объема  $V$  в новое положение линейная модель по-прежнему обладает линейными характеристиками  $b$  намагничивания возбуждающих контуров  $\Phi_{k\sim}^H = L_k^H i_{k\sim}^H$  (см. рис. 2.1),

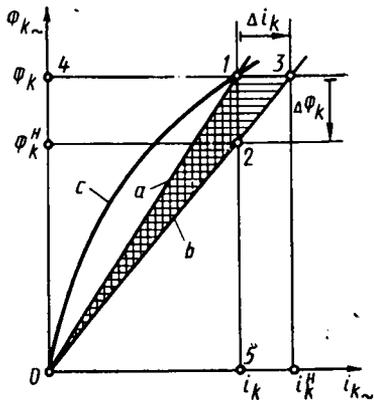


Рис. 2.1. Приращения магнитной энергии  $\Delta W_k$  (горизонтальная штриховка) и магнитной коэнергии  $\Delta W_k^H$  (вертикальная штриховка)  $k$ -го контура линейной модели нелинейной системы:  $a$  — характеристика намагничивания контура в линейной модели до перемещения ( $\Phi_{k\sim} = L_k i_{k\sim}$ ) и  $b$  — после перемещения ( $\Phi_{k\sim}^H = L_k^H i_{k\sim}^H$ );  $c$  — характеристика намагничивания контура в нелинейной системе до перемещения

где  $L_k^H = \text{const}$  — эквивалентные индуктивности контуров при новом положении объема  $V$ . Поэтому магнитная энергия линейной модели в новом положении однозначно определяется токами  $i_k^H \triangleq i_k + \Delta i_k$  и потоками  $\Phi_k$  ее контуров и не зависит от того, каким путем достигнуто магнитное состояние при токах  $i_k^H$  и потоках  $\Phi_k$ : 1 — путем намагничивания модели в исходном положении до токов  $i_k$  и потоков  $\Phi_k$  и последующего перемещения объема  $V$  на  $\Delta q$  при сохранении  $\Phi_k$  за счет увеличения токов до  $i_k^H$ ; 2 — путем перемещения объема  $V$  на  $\Delta q$  в размагниченном состоянии и последующего намагничивания модели до токов  $i_k^H$  и потоков  $\Phi_k$ .

Это позволяет определить магнитную энергию  $W^H$  линейной модели в новом положении (после перемещения на  $\Delta q$ ) при намагничивании модели 2-м путем (намагничиванием после перемещения). Согласно (1.59) и (1.60), получим

$$W^H = \sum_{k=1}^N W_k^H, \quad (2.6)$$

где  $W_k^H = \int_0^{\Phi_k} i_k^H d\Phi_{k\sim} = \Phi_k i_k^H / 2$  — магнитная энергия, приходящаяся на долю  $k$ -го контура линейной модели при новом положении объема  $V$ .

Как видно из рис. 2.1, магнитная энергия  $W_k^H$  соответствует площади треугольника  $O43$ , заключенного между характеристикой  $b$  намагничивания  $k$ -го контура при новом положении выделенного объема  $V$ , осью ординат и линией  $\Phi_{k\sim} = \Phi_k = \text{const}$ .

Исходя из (2.5), приращение магнитной энергии представляет собой разность магнитных энергий при новом и исходном положениях

$$\Delta W_{(\Phi_k = \text{const})} = W^H - W = \sum_{k=1}^N (W_k^H - W_k) = \sum_{k=1}^N \Delta W_k, \quad (2.7)$$

где  $\Delta W_k = \frac{i_k^H \Phi_k}{2} - \frac{i_k \Phi_k}{2} = \frac{\Phi_k \Delta i_k}{2}$  — приращение магнитной энергии  $k$ -го контура при перемещении в условиях  $\Phi_k = \text{const}$ ;  $\Delta i_k = (i_k^H - i_k)$  — приращение тока  $k$ -го контура при перемещении в условиях  $\Phi_k = \text{const}$ .

На рис. 2.1 приращению  $\Delta W_k$  соответствует площадь треугольника  $O13$ , заключенного между линейными характеристиками намагничивания контура  $k$  до и после перемещения выделенной части системы и линией  $\Phi_k = \text{const}$ .

### 2.3. Определение электромагнитных сил по изменению магнитной коэнергии при перемещении в условиях постоянства токов возбуждающих контуров

Как показано в 2.1, ЭМС, действующую на выделенный объем  $V$  нелинейной системы, можно найти и другим способом, применяя закон сохранения энергии к электромеханическому преобразованию, которое происходит в условиях сохранения токов возбуждающих контуров при малом перемещении объема  $V$  ( $i_k = \text{const}$ ).

Перед осуществлением перемещения объема  $V$  в условиях  $i_k = \text{const}$  нелинейную систему необходимо заменить ее линейной моделью по [см. § 1.1], а все возбуждающие контуры отключить от электрических сетей, от которых они получали питание в рабочих режимах, и присоединить к управляемым источникам электрической энергии, в которых будет поддерживаться такое напряжение, чтобы во время перемещения токи контуров оставались постоянными ( $i_k = \text{const}$ ). При перемещении в условиях  $i_k = \text{const}$  ( $\Delta i_k = 0$ ),  $\Delta \Phi_k \neq 0$  за счет напряжений  $-e_{kq}$ , уравнивающих ЭДС перемещения  $e_{kq} = -\Delta \Phi_k / \Delta t$  и поддерживающих токи  $i_k$  постоянными, в контуры от управляемых источников поступает электрическая энергия

$$\Delta W_{\text{э}} = \sum_{k=1}^N W_{\text{э}k} = \sum_{k=1}^N i_k \Delta \Phi_k = \sum_{k=1}^N i_k (-e_{kq}) dt \neq 0.$$

Поэтому работа ЭМС  $D_q \Delta q$  [см. 2.1)] совершается за счет поступающей в контуры электрической энергии от управляемых источников  $\Delta W_{\text{э}}$ , уменьшенной на величину приращения энергии магнитного поля линейной модели нелинейной системы  $\Delta W$ . Разность этих приращений ( $\Delta W_{\text{э}} - \Delta W$ ) равна приращению  $\Delta W'$  некоторой энергии  $W'$ , называемой обычно магнитной коэнергией системы \*

$$D_q \Delta q = \Delta W_{\text{э}} - \Delta W = \Delta W'. \quad (2.8)$$

Из (2.4) и (2.7) следует, что приращение коэнергии линейной модели нелинейной системы  $\Delta W'$  складывается из приращений коэнергии  $\Delta W'_k$ , приходящихся на долю отдельных возбуждающих контуров в линейной модели,

$$\Delta W' = \Delta \left( \sum_{k=1}^N W_{\text{э}k} \right) - \Delta \left( \sum_{k=1}^N W_k \right) = \sum_{k=1}^N \Delta W'_k, \quad (2.9)$$

где  $\Delta W'_k = \Delta W_{\text{э}k} - \Delta W_k = i_k \Delta \Phi_k - \Delta W_k$ .

Вводя ток  $i_k = \text{const}$  под знак приращения  $\Delta W'_k$ , получим

$$\Delta W'_k = \Delta (i_k \Phi_k) - \Delta W_k = \Delta (i_k \Phi_k - W_k),$$

\* В [9] применительно к магнитно-линейной системе вводится понятие «потенциальной функции токов в магнитном поле  $U$ », отличающейся от «магнитной энергии  $W'$ » только знаком.

откуда следует, что магнитная коэнергия контура  $k$

$$W_k' = i_k \Phi_k - W_k + C,$$

где  $C$  — постоянная, которая обращается в нуль, если принять, что при  $i_k = 0$  и  $\Phi_k = 0$  магнитная коэнергия  $W_k' = 0$ .

Выражая  $W_k$  по (2.4) и применяя интегрирование по частям, найдем окончательное выражение для магнитной коэнергии контура  $k$  в линейной модели нелинейной системы, обладающей линейными характеристиками намагничивания контуров ( $\Phi_{k\sim} = L_k i_{k\sim}$ ;  $L_k = \text{const}$ ),

$$W_k' = i_k \Phi_k - \int_0^{\Phi_k} i_{k\sim} d\Phi_{k\sim} = \int_0^{i_k} \Phi_{k\sim} di_{k\sim} = L_k i_k^2 / 2 = \Phi_k i_k / 2. \quad (2.10)$$

Из рис. 2.1 видно, что магнитная коэнергия  $k$ -го контура линейной модели системы в исходном состоянии по (2.10) соответствует площади треугольника  $O15$ , заключенного между характеристикой  $a$  намагничивания контура в этом состоянии, осью абсцисс и линией  $i_k = \text{const}$ . Сумма магнитной энергии  $W_k$  по (2.4) и магнитной коэнергии  $W_k'$  по (2.10) для  $k$ -го контура соответствует площади прямоугольника  $O415$ , равной  $\Phi_k i_k$ . Причем в линейной модели нелинейной системы магнитная энергия контура  $W_k$  не отличается от его коэнергии  $W_k'$ ,

$$W_k = W_k' = \Phi_k i_k / 2. \quad (2.11)$$

Полная магнитная коэнергия линейной модели системы складывается из коэнергий  $W_k'$  по (2.10), приходящихся на долю отдельных возбуждающих контуров,

$$W' = \sum_{k=1}^N W_k'. \quad (2.12)$$

Коэнергия линейной модели системы  $W'$  представляет собой работу ЭМС  $\int_{q=-\infty}^q D_q \Delta q$  при перемещении заранее возбужденных контуров с токами  $i_k = \text{const}$  из бесконечности, где  $q = \infty$  и магнитная проницаемость  $\mu = 0$ , в заданное положение относительно магнитно-нелинейных сред системы, обладающих магнитной проницаемостью  $\mu = \mu(B, x, y, z)$ . В процессе перемещения  $k$ -го контура вместе с другими контурами его текущий поток возрастет от  $\Phi_{k\sim} = 0$  (в бесконечности при  $q = \infty$  и  $\mu = 0$ ) до  $\Phi_{k\sim} = \Phi_k$  (в заданном положении, определяемом координатой  $q$ ). При этом в контуры от управляемых источников поступает электрическая энергия  $W_0 = \sum_{k=1}^N i_k \Phi_k$ . Часть этой энергии  $W = \sum_{k=1}^N i_k \Phi_k / 2$  превращается в энергию магнитного поля. Оставшаяся часть, называемая коэнер-

гией, равна по [см. (2.10) и (2.8)] работе ЭМС при перемещении в указанных условиях:

$$W' = W'_a - W = \sum_{k=1}^N i_k \Phi_k / 2 = \int_{q=-\infty}^q D_q \Delta q.$$

Искомую ЭМС можно выразить через приращение коэнергии линейной модели системы  $\Delta W'$  при перемещении объема  $V$  в новое положение в условиях  $i_k = \text{const}$ ,  $k \in [1, N]$ :

$$D_q = \lim_{(\Delta q \rightarrow 0)} (\Delta W' / \Delta q) = (\partial W' / \partial q). \quad (2.13)$$

Для определения ЭМС по (2.13) нужно найти приращение магнитной коэнергии  $\Delta W'$  в линейной модели системы при перемещении на  $\Delta q$  выделенного объема  $V$ . Магнитную коэнергию линейной модели системы в исходном состоянии (до перемещения)  $W'$  можно выразить по (2.10), (2.12). Она соответствует площади треугольника  $O15$  на рис. 2.1. После перемещения объема  $V$  в новое положение линейная модель системы по-прежнему обладает линейными характеристиками  $b$  намагничивания возбуждающих контуров. Поэтому магнитную энергию линейной модели системы после перемещения выделенного объема также можно выразить по (2.10), (2.12), если учесть, что токи возбуждающих контуров сохраняются ( $i_k^H = i_k = \text{const}$ ), а потоки, сцепленные с контурами, приобретут новые значения  $\Phi_k^H = \Phi_k + \Delta \Phi_k$ :

$$(W')^H = \sum_{k=1}^N (W'_k)^H, \quad (2.14)$$

где  $(W'_k)^H = \int_0^{i_k} \Phi_{k\sim}^H di_{k\sim} = \Phi_k^H i_k / 2$  — магнитная коэнергия, приходящаяся на долю  $k$ -го контура линейной модели при новом положении объема  $V$ . На рис. 2.1 магнитная коэнергия  $(W'_k)^H$  соответствует площади треугольника  $O25$ , заключенного между характеристикой  $b$  намагничивания  $k$ -го контура при новом положении выделенного объема, осью абсцисс и линией  $i_k = \text{const}$ . Приращение магнитной коэнергии линейной модели системы при перемещении объема  $V$  на  $\Delta q$  в условиях  $i_k = \text{const}$  представляет собой разность магнитных коэнергий в новом положении по (2.14) и в их исходном положении по (2.10) и (2.12):

$$\Delta W'_{(i_k = \text{const})} = (W')^H - W' = \sum_{k=1}^N [(W'_k)^H - W'_k] = \sum_{k=1}^N \Delta W'_k, \quad (2.15)$$

где  $\Delta W'_k = \Phi_k^H i_k / 2 - \Phi_k i_k / 2 = i_k \Delta \Phi_k / 2$  — приращение магнитной коэнергии  $k$ -го контура при перемещении в условиях  $i_k = \text{const}$ .

На рис. 2.1 приращение  $\Delta W'_k$  соответствует площади треугольника  $012$ , заключенного между линейными характеристиками намагничивания контура  $k$  до и после перемещения и линией  $i_k = \text{const}$ .

Нетрудно убедиться в том, что результаты расчета ЭМС по изменению магнитной энергии системы (2.3) и по изменению магнитной коэнергии системы (2.13) при  $\Delta q \rightarrow 0$  получаются одинаковыми. Действительно, из рис. 2.1 видно, что абсолютные значения приращений энергии и коэнергии  $k$ -го контура системы отличаются на величину площади треугольной фигуры  $123$ , т. е.

$$|\Delta W_k| = |\Delta W'_k| + |\Delta i_k \Delta \Phi_k / 2|. \quad (2.16)$$

При  $\Delta q \rightarrow 0$ , когда  $\Delta i_k \rightarrow 0$  и  $\Delta \Phi_k \rightarrow 0$ , площадь фигуры  $123$ , имеющая второй порядок малости, становится пренебрежимо малой величиной по сравнению с площадями  $|\Delta W_k|$  или  $|\Delta W'_k|$ , имеющими первый порядок малости  $|\Phi_k \Delta i_k|$ , поэтому

$$|\Delta W_k| = |\Delta W'_k|.$$

Вместе с тем при  $W_k^H > W_k$  всегда  $(W_k^H)^H < W'_k$  и приращения  $\Delta W_k$  и  $\Delta W'_k$  отличаются знаком, т.е. при  $\Delta q \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \Delta W_k &= -\Delta W'_k. \\ (\Phi_k = \text{const}) \quad (i_k = \text{const}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Поэтому и полные приращения энергии и коэнергии системы по (2.6) и (2.15) находятся в том же соотношении

$$\Delta W = \sum_{k=1}^N \Delta W_k \Big|_{(\Phi_k = \text{const})} = - \sum_{k=1}^N \Delta W'_k \Big|_{(i_k = \text{const})} = -\Delta W', \quad (2.18)$$

а из (2.17) вытекает, что ЭМС, определенные по (2.3) и (2.13), при  $\Delta q \rightarrow 0$  всегда одинаковы.

#### **2.4. Практическое применение энергетического метода определения электромагнитных сил по изменениям энергии или коэнергии возбуждающих контуров при перемещении**

В принципе энергетический метод определения ЭМС по изменениям энергии или коэнергии с помощью формул (2.3) или (2.13) пригоден для расчета ЭМС в любых нелинейных магнитных системах. Однако практическая реализация метода для проведения конкретных расчетов довольно ограничена.

**2.4.1. Применение метода для аналитических расчетов ЭМС.** Использование метода наиболее целесообразно в тех случаях, когда производные  $\partial W / \partial q$  или  $\partial W' / \partial q$  в (2.3) или (2.13) могут быть вычислены аналитически. Это удается сделать применительно к таким достаточно простым нелинейным системам, магнитная энергия линейных моделей которых может быть найдена аналитически и пред-

ставлена в виде функции от координаты  $q$ , определяющей линейное или угловое положение выделенного объема при перемещении:  $W = f_w(q)$  или  $W' = f'_w(q)$ .

Чтобы выразить  $W$  или  $W'$  (по (2.4) или (2.12)), нужно найти для всех контуров линейной модели потока или тока в функции координаты  $q$ :

$$\begin{aligned} i_h &= f_{ih}(q) \text{ при} \\ \Phi_h &= \text{const или} \\ \Phi_h &= f_{\Phi i}(q) \text{ при} \\ i_h &= \text{const.} \end{aligned}$$

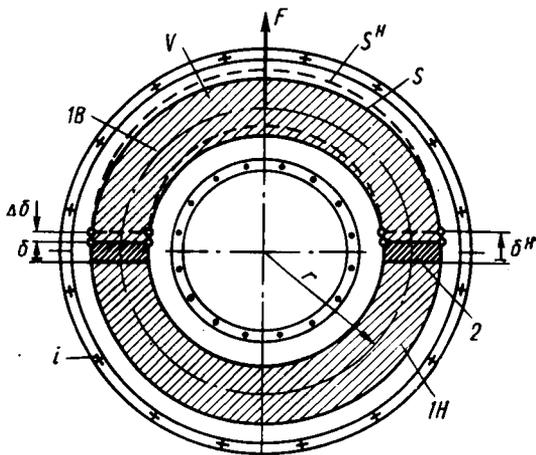


Рис. 2.2. Кольцевой магнитный сердечник с тороидальной возбуждающей обмоткой

Для этого необходимо предварительно либо аналитически рассчитать магнитное поле в линейной модели при заданных токах  $i_h$ , либо рассчитать аналитически эквивалентную магнитную цепь линейной модели (см. П2). Однако это может быть сделано аналитически только применительно к простейшим магнитным системам, обладающих несложной геометрической конфигурацией и небольшим количеством возбуждающих контуров.

Так как приращения энергии  $\Delta W$  и коэнергии  $\Delta W'$ , найденные при одинаковых  $\Delta q \rightarrow 0$ , отличаются только знаком [см. (2.17)] и ЭМС, рассчитанные аналитически в виде  $-(\partial W/\partial q)$  при  $\Phi_h = \text{const}$  [см. (2.3)] и  $\partial W'/\partial q$  при  $i_h = \text{const}$  [см. (2.13)], всегда одинаковы по величине.

Применение метода для аналитического расчета ЭМС продемонстрируем на примере.

**Пример 2.1.** Ферромагнитные полукольца 1В и 1Н (рис. 2.2), с магнитной проницаемостью  $\mu_{r1}$ , имеющие средний радиус  $r = 0,15$  м и поперечное сечение  $S = 4 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, отделены друг от друга зазорами  $\delta = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м. Зазоры между полукольцами заполнены магнитно-нелинейной средой 2 с магнитной проницаемостью  $\mu_{r2}$  (например, магнитной жидкостью). Система полуколец охвачена тороидальной обмоткой с током.

Под действием МДС обмотки  $i$  в ферромагнитных полукольцах и в зазорах образуется магнитное поле со средней индукцией  $B = B_1 = B_2$  и магнитным потоком  $\Phi$ . Считаются заданными МДС обмотки  $i = 9067,7$  А и нелинейные характеристики намагничивания материала полуколец  $B = f_1(H_1)$  и среды в зазорах  $B = f_2(H_2)$ , представленные в табл. 2.1 и на рис. 2.3.

Рассчитать аналитически по формуле (2.3) или (2.13) ЭМС, действующую на верхнее полукольцо 1В (см. рис. 2.2).

Принимаются следующие допущения: не учитывается влияние кривизны кольца на длину линий поля в нем; считается одинаковой индукция во всех

$B$ , Тл	$H_1$ , $10^4$ А/м	$H_2$ , $10^5$ А/м	$B$ , Тл	$H_1$ , $10^4$ А/м	$H_2$ , $10^5$ А/м
0	0	0	2,20	0,448	0,962
0,40	0,042	0,086	2,40	0,615	1,356
0,80	0,089	0,182	2,55	0,832	1,909
1,20	0,145	0,299	2,60	0,939	2,201
1,60	0,222	0,460	2,65	1,077	2,593
2,00	0,346	0,730	2,70	1,260	3,150

элементах сечения кольца; предполагается, что кольцо окружено немагнитной средой с магнитной проницаемостью  $\mu_0$ ; так как  $\mu_{r1} \gg 1$ , учитываются только магнитная энергия и ее изменения в самих полукольцах и в зазорах между ними \*

▲ Аппроксимируем характеристики намагничивания материала полуколец и среды в зазорах в ожидаемом диапазоне индукции  $B_\alpha < B < B_\beta$  между точками  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 2.3, а, б) следующими функциями:

$$B_\sim = (\text{arc tg } (m_{H1} H_{1\sim})) / m_{B1} \quad \text{или} \quad H_{1\sim} = (\text{tg } (m_{B1} B_\sim)) / m_{H1}$$

— для материала полуколец;

$B_\sim = (\text{arc tg } (m_{H2} H_{2\sim})) / m_{B2}$  или  $H_{2\sim} = (\text{tg } (m_{B2} B_\sim)) / m_{H2}$  — для среды, заполняющей зазоры.

Масштабные коэффициенты  $m_{B1} = 0,5235$  Тл $^{-1}$ ,  $m_{H1} = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м·А $^{-1}$ ,  $m_{B2} = 0,535$  Тл $^{-1}$ ;  $m_{H2} = 0,25 \cdot 10^{-4}$  м·А $^{-1}$  в этих аппроксимирующих функциях найдены в приложении ПЗ.

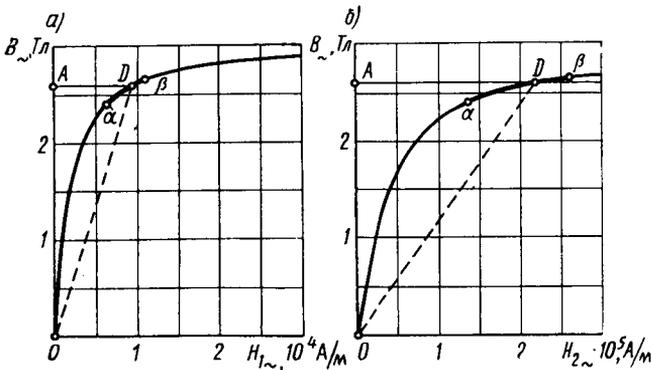


Рис. 2.3. Характеристики намагничивания материала полуколец (а) и нелинейной среды, заполняющей зазоры между ними (б)

\* В примере 5.9 будет приведено более точное решение задачи, из которого следует, что влияние принятых здесь допущений действительно достаточно мало.

Для определения магнитного потока  $\Phi$  в полукольцах и зазорах нужно решить нелинейное уравнение, записанное на основании закона полного тока при принятых допущениях,  $i = H_1 l_1 + H_2 l_2$  или

$$i = l_1 (\text{tg } (a_1 \Phi)) / m_{H1} + l_2 (\text{tg } (a_2 \Phi)) / m_{H2}.$$

В этом уравнении  $H_1 l_1$  и  $H_2 l_2$  — магнитные напряжения соответственно в полукольцах  $B1$ ,  $H1$  и зазорах  $I$ ; (см. рис. 2.2);  $H_1$  и  $H_2$  — магнитные напряженности в этих элементах системы;  $l_1 = 2\pi r - 2\delta = 0,9415$  м — средняя длина линии поля в полукольцах;  $l_2 = 2\delta = 0,001$  м — длина линии поля в зазорах;  $a_1 = m_{B1}/S = 1308,7$  Тл<sup>-1</sup> м<sup>-2</sup>;  $a_2 = m_{B2}/S = 1337,5$  Тл<sup>-1</sup> м<sup>-2</sup> — коэффициенты.

В результате решения этого уравнения (см. приложение П4) найден магнитный поток  $\Phi = 1,04 \cdot 10^{-3}$  Вб.

При этом потоке магнитное состояние системы в исходном положении (до перемещения) характеризуется следующими величинами: индукцией в полукольцах и зазорах  $B = \Phi/S = 2,6$  Тл; напряженностями магнитного поля в полукольцах  $H_1 = (\text{tg } (m_{B1} B)) / m_{H1} = 9397$  А/м и в зазорах  $H_2 = (\text{tg } (m_{B2} B)) / m_{H2} = 220070$  А/м; магнитными проницаемостями: в полукольцах  $\mu_1 = B/H_1 = 2,766 \cdot 10^{-4}$  Гн/м; и в зазорах  $\mu_2 = B/H_2 = 1,1814 \cdot 10^{-5}$  Гн/м; относительными магнитными проницаемостями; в полукольцах  $\mu_{1r} = B/(\mu_0 H_1) = 220$  и в зазорах  $\mu_{2r} = B/(\mu_0 H_2) = 9,4$ ; магнитными напряжениями полуколец  $u_1 = H_1 l_1 = 8847$  А и зазоров  $u_2 = H_2 l_2 = 220$  А; МДС возбуждающей обмотки  $i = u_1 + u_2 = 9067,7$  А, совпадающей с заданной. Определим силу  $F$ , действующую на магнитно-нелинейное тело  $1B$ . При расчете этой силы (см. 2.1.1) нелинейная магнитная система должна быть заменена ее линейной моделью.

В этой линейной модели все элементы полуколец  $1B$  и  $1H$  (см. рис. 2.2) обладают постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_1$ , соответствующей точке  $A$  на нелинейной характеристике намагничивания материала кольца (рис. 2.3, а). Соответственно все элементы среды 2, заполняющей зазоры между кольцами, обладают постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_2$ , соответствующей точке  $A$  на нелинейной характеристике намагничивания среды 2 (рис. 2.3, б). Характеристики намагничивания линейных моделей сред  $1B$ ,  $1H$  и 2 (см. 2.2) изображены на рис. 2.3 пунктирными линиями. Чтобы определить аналитически силу  $F$ , действующую на верхнее полукольцо  $1B$ , представим энергию магнитного поля линейной модели системы  $W$  в функции координаты  $q$ , определяющей линейное положение полукольца  $1B$  при его перемещении в направлении силы  $F$ . Примем координату  $q$  равной величине зазора  $\delta$  между неподвижным полукольцом  $1H$  и перемещаемым  $1B$ .

Перемещение будет осуществляться в условиях  $\Phi_{\text{н}} = \Phi = \text{const}$ , поэтому представим магнитную энергию системы в функции потока  $\Phi$  и координаты  $q = \delta$ :

$$W = f(\Phi, \delta) = \Phi i / 2 = \Phi^2 R / 2,$$

где  $R = l_1 / (\mu_1 S) + 2\delta / (\mu_2 S)$  — магнитное сопротивление последовательно включенных полуколец  $1B$  и  $1H$  и зазоров между ними.

Силу  $F$ , действующую на верхнее полукольцо  $1B$ , рассчитаем по формуле (2.3) в условиях  $\Phi = \text{const}$ :

$$F_{(\Phi=\text{const})} = - \frac{\partial W}{\partial \delta} = - \frac{\Phi^2 \partial R}{2 \partial \delta} = - 2 S \omega_2 = - 228,9 \text{ Н},$$

где  $\omega_2 = B H_2 / 2 = 2,8609 \cdot 10^5$  Дж/м<sup>3</sup> — плотность магнитной энергии в зазоре. Знак «—» означает, что сила направлена в противоположную сторону по отношению к перемещению  $q = \delta$ . Под действием силы  $F$  верхнее полукольцо  $1B$  притягивается к нижнему.

Точно такой же результат для силы  $F$  получим по формуле (2.13), выражая ее через производную коэнергии  $W'$  по координате  $q = \delta$  при перемещении в условиях  $i = \text{const}$ :

$$F = \frac{\partial W'}{\partial \delta} = \frac{\partial W'}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \delta} = -2S\omega_2 = -228,9 \text{ Н},$$

где  $W' = 0,5\Phi i = 0,5i^2/R$ .

**2.4.2. Применение метода для численных расчетов ЭМС.** В тех случаях, когда производные  $\partial W/\partial q$  или  $\partial W'/\partial q$  в (2.3) или (2.13) не удастся вычислить аналитически, их определяют численным путем с тем или иным приближением, выражая в виде отношения конечных приращений  $\Delta W$  или  $\Delta W'$  к конечному перемещению выделенного объема на  $\Delta q$ . При вычислении искомой компоненты силы по приближенным формулам, вытекающим из (2.3) или (2.13),

$$\left( \frac{D_q^W}{\Phi_h = \text{const}} \right) = -\Delta W/\Delta q \approx D_q \quad \text{или} \quad \left( \frac{D_q^{W'}}{i_h = \text{const}} \right) = \Delta W'/\Delta q \approx D_q \quad (2.19)$$

(где  $D_q$  — истинное значение искомой компоненты силы) появляются погрешности двух разновидностей.

*Появление погрешности первого вида* связано с тем, что при конечных перемещениях  $\Delta q \neq 0$  приращения энергии  $\Delta W_h$  и коэнергии  $\Delta W'_k$ , приходящиеся на долю отдельных контуров, не удовлетворяют тождеству (2.17) и в соответствии с (2.16) отличаются на величину площади треугольника  $123$ , равную  $\Delta i_h \Delta \Phi_h/2$  (см. рис. 2.1).

Относительное различие между  $|\Delta W_h| = |\Phi_h \Delta i_h/2|$  и  $|\Delta W'_k| = |i_h \Delta \Phi_h/2|$  зависит от относительного значения приращения потока в этом контуре при выбранной величине перемещения

$$\varepsilon_{1h} = \frac{|\Delta W'_k| - |\Delta W_h|}{\Delta W_h} = \frac{\Delta \Phi_h}{\Phi_h}. \quad (2.20)$$

Поскольку в соответствии с принятым в § 1.3 правилом знаков поток  $\Phi_h$  всегда положителен ( $\Phi_h > 0$ ), из (2.20) следует, что знак  $\varepsilon_{1h}$  совпадает со знаком  $\Delta \Phi_h$ . При  $\Delta \Phi_h > 0$  (рис. 2.4, а) приращение коэнергии  $|\Delta W'_k|$  превышает по абсолютной величине приращение энергии  $|\Delta W_h|$ ; при  $\Delta \Phi_h < 0$  (рис. 2.4, б), наоборот,  $|\Delta W'_k| < |\Delta W_h|$ .

Относительное различие между приращениями  $|\Delta W|$  и  $|\Delta W'|$ , определяемыми по (2.4) и (2.15) в виде сумм приращений  $|\Delta W_h|$  или  $|\Delta W'_k|$ , а также относительное различие между приближенными значениями сил  $D_q^W$  и  $(D_q^W)'$  по (2.19) можно оценить по среднему значению  $|\varepsilon_{1h}| = |\Delta \Phi_h/\Phi_h|$  для отдельных контуров

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{|\Delta W| - |\Delta W'|}{\Delta W} \right| = \left| \frac{D_q^W - (D_q^W)'}{D_q^W} \right| = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\Delta \Phi_k}{\Phi_k} \right|. \quad (2.21)$$

Поскольку истинное значение искомой силы  $D_q$  заключено в промежутке между силами  $D_q^W$  и  $(D_q^W)'$ , погрешность первого вида в вычислении этих сил также можно определить по (2.21):

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{D_q^W - D_q}{D_q} \right| \text{ или } \left| \frac{(D_q^W)' - D_q}{D_q} \right| = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\Delta\Phi_k}{\Phi_k} \right|. \quad (2.22)$$

Из (2.22) видно, что погрешности первого вида прямо пропорциональны приращениям потоков контуров  $\Delta\Phi_k$ . Поэтому для уменьшения этой погрешности нужно стремиться к уменьшению приращений  $\Delta\Phi_k$  и перемещений  $\Delta q$ .

Появление погрешностей первого вида при численном определении приближенных значений производных в (2.3) и (2.13) продемонстрируем на следующем примере.

**Пример 2.2.** Рассматривается та же нелинейная магнитная система (см. рис. 2.2), что и в примере 2.1. Заданными считаются те же величины. Но сила, действующая на верхнее полукольцо  $1B$ , определяется численным путем через приближенные значения производных в (2.3) и (2.13).

Чтобы выразить силу через приращение магнитной энергии, переместим верхнее полукольцо  $1B$  на расстояние  $\Delta q = \Delta\delta = 0,25 \cdot 10^{-2}$  м за счет увеличения зазора  $\delta$  между полукольцами. Сохраним поток  $\Phi = 1,04 \cdot 10^{-3}$  Вб постоянным ( $\Phi_k = \text{const}$ ). Рассчитаем новые значения зазора, длины линии поля в зазорах, магнитного сопротивления эквивалентной магнитной цепи, тока возбуждающего контура:  $I_2^H = 2\delta^H = 0,6 \cdot 10^{-2}$  м;  $R^H = l_1^H / (\mu_0 \mu_{1r} S) + I_2^H / (\mu_0 \mu_{2r} S) = 9,775 \cdot 10^6$  Гн $^{-1}$ ;  $i^H = R^H \Phi = 10\,166$  А.

Взяв значение тока до перемещения (см. пример 2.1), найдем приращение тока контура  $\Delta i = i^H - i = 10\,168 - 9067,7 = 1100,3$  А приращение магнитной энергии в линейной модели системы  $\Delta W = \Phi \Delta i / 2 = 0,5722$  Дж, а также приближенное значение силы, выраженное через приращение магнитной энергии

$$F^W = D_q^W = -\Delta W / \Delta q = -228,9 \text{ Н.}$$

Как видно из сопоставления с истинным значением силы, найденным в примере 2.1, в данном случае приближенное и истинное значения совпадают.

Существенно иной получится ЭМС, если ее выразить через приращение коэнергии при том же перемещении  $\Delta q = \Delta\delta = 0,25 \cdot 10^{-2}$  м. Сохраним ток возбуждающего контура  $i = 9067,7$  А постоянным ( $i_k = \text{const}$ ). Рассчитаем

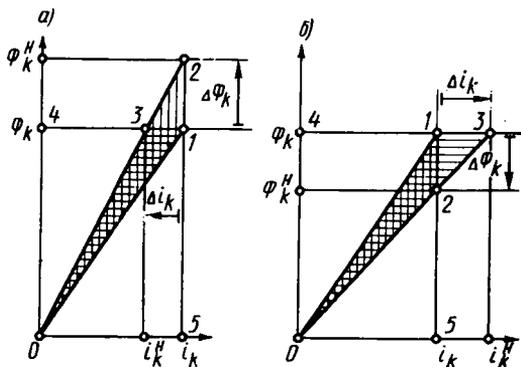


Рис. 2.4. Приращения энергии  $\Delta W_k$  (горизонтальная штриховка) и коэнергии  $\Delta W_k$  (вертикальная штриховка)  $k$ -го контура: а) — при  $\Delta\Phi_k > 0$ ; б) — при  $\Delta\Phi_k < 0$

новые значения потока  $\Phi^H = i/R^H = 0,9276 \cdot 10^{-3}$  Вб; приращение потока  $\Delta\Phi = \Phi^H - \Phi = -1,124 \cdot 10^{-4}$  Вб; приращение магнитной коэнергии в линейной модели системы  $\Delta W' = i\Delta\Phi/2 = -5,097 \cdot 10^{-1}$  Дж, а также приближенное значение силы, выраженное через приращение магнитной коэнергии,  $(F^W)' = (D_q^W)' = \Delta W'/\Delta q = -203,9$  Н.

Погрешность в вычислении этой силы по сравнению с истинным значением (см. пример 2.1) составляет

$$\varepsilon_1 = \frac{|(F^W)'| - |F|}{|F|} = -0,107.$$

Так как в данном случае имеется всего один возбуждающий контур, а  $F = F^W$ , то погрешность первого вида получается точно такой, какой она должна быть по (2.20) при выбранных перемещении  $\Delta q$  и относительном приращении потока, соответствующем этому перемещению ( $\Delta\Phi_k/\Phi_k = \Delta\Phi/\Phi = -0,107$ ).

Появление погрешностей второго вида связано с тем, что приращения энергии  $\Delta W$  и коэнергии  $\Delta W'$  в (2.19) выражаются через приращения потоков  $\Delta\Phi_k = \Phi_k^H - \Phi_k$  или токов  $\Delta i_k = i_k^H - i_k$  [см. (2.4), (2.15)], которые при численных расчетах находятся в виде малой разности приближенных значений больших величин ( $\Phi_k^H$  и  $\Phi_k$  или  $i_k^H$  и  $i_k$ ). Потоки и токи контуров в исходном положении ( $\Phi_k$ ,  $i_k$ ) и те же величины после перемещения на  $\Delta q$  ( $\Phi_k^H$  при  $i_k = \text{const}$  и  $i_k^H$  при  $\Phi_k = \text{const}$ ) определяются с той или иной точностью в результате численных расчетов магнитного поля при заданных токах  $i_k$  (или расчетов эквивалентной магнитной цепи при заданных токах  $i_k$  или заданных потоках  $\Phi_k$ ).

Предположим, что относительная погрешность в результате расчета этих величин составляет  $\pm\varepsilon_0$ . Тогда абсолютные погрешности потоков  $\Phi_k$  и  $\Phi_k^H$  будут равны  $\varepsilon_0\Phi_k \approx \varepsilon_0\Phi_k^H$ . При вычислении  $\Delta\Phi_k$  погрешности в расчетах  $\Phi_k$  и  $\Phi_k^H$  в наиболее неблагоприятном случае могут суммироваться и абсолютная погрешность в расчете  $\Delta\Phi_k$  может достигать  $2\varepsilon_0\Phi_k$ . Следовательно, относительная погрешность второго вида в определении приращений  $\Delta\Phi_k$  или  $\Delta W'_k = i_k\Delta\Phi_k/2$  для  $k$ -го контура составит

$$\varepsilon_{2k} = 2\varepsilon_0 \Phi_k / |\Delta\Phi_k| = 2\varepsilon_0 / |\varepsilon_{1k}|, \quad (2.23)$$

где  $\varepsilon_0$  — относительная погрешность в численном расчете токов и потоков  $|\varepsilon_{1k}| = |\Delta\Phi_k/\Phi_k|$  — относительное приращение потока в  $k$ -м контуре, равное относительному различию между  $\Delta W_k$  и  $\Delta W'_k$  в этом контуре [см. (2.20)].

Погрешность второго вида в определении приращения коэнергии  $\Delta W'$ , определяемого по (2.15), можно выразить, исходя из (2.23), через среднее значение  $|\varepsilon_{1k}| = |\Delta\Phi_k/\Phi_k|$  для контуров системы по (2.21):

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0/\varepsilon_1, \quad (2.24)$$

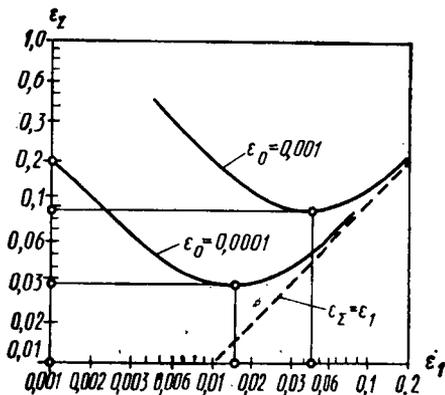


Рис. 2.5. Зависимость результирующей погрешности при расчете ЭМС  $\epsilon_{\Sigma}$  от среднего значения относительных приращений потоков в контурах системы  $\epsilon_1$

где  $\epsilon_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\Delta\Phi_k}{\Phi_k} \right|$  — среднее значение относительных приращений потоков в контурах системы.

Из (2.24) видно, что погрешность второго вида  $\epsilon_2$  при определенном значении  $\epsilon_0$  обратно пропорциональна  $\epsilon_1$ . С уменьшением приращений  $\Delta\Phi_k$  или перемещения  $\Delta q$  погрешность второго вида возрастает. Поэтому для уменьшения этой погрешности нужно стремиться к *увеличению перемещения  $\Delta q$* . Суммируя погрешности первого вида по (2.22) и второго вида по (2.23), найдем *результующую погрешность* по (2.19):

$$\epsilon_{\Sigma} = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_1 + 2\epsilon_0/\epsilon_1. \quad (2.25)$$

Как видно из рис. 2.5, зависимость  $\epsilon_{\Sigma} = f(\epsilon_1)$  при  $\epsilon_0 = \text{const}$  имеет явно выраженный минимум  $\epsilon_{\Sigma \text{ min}}$ , который получается при  $\epsilon_1 = \epsilon_{1 \text{ min}}$ . Из уравнения  $d\epsilon_{\Sigma}/d\epsilon_1 = 0$  найдем среднее относительное значение приращений потоков

$$\epsilon_{1 \text{ min}} = \sqrt{2\epsilon_0}, \quad (2.26)$$

при котором обеспечивается минимум результирующей погрешности при вычислении ЭМС по (2.19):

$$\epsilon_{\Sigma \text{ min}} = \epsilon_{1 \text{ min}} + 2\epsilon_0/\epsilon_{1 \text{ min}} = 2\epsilon_{1 \text{ min}} = 2\sqrt{2\epsilon_0}. \quad (2.27)$$

Например, для зависимости  $\epsilon_{\Sigma} = f(\epsilon_1)$  при  $\epsilon_0 = 0,0001$  (рис. 2.5) можно получить минимальную результирующую погрешность  $\epsilon_{\Sigma \text{ min}} = 0,0282$ .

Из анализа зависимости  $\epsilon_{\Sigma \text{ min}} = f(\epsilon_0)$  (рис. 2.6) видно, что приземляемая результирующая погрешность  $\epsilon_{\Sigma} = \epsilon_{\Sigma \text{ min}} \leq 0,05$  бес-

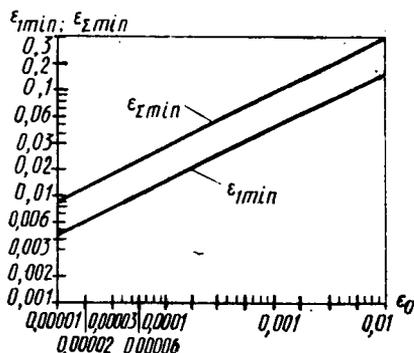


Рис. 2.6. Зависимость минимальной результирующей погрешности при расчете ЭМС  $\epsilon_{\Sigma \text{ min}}$  и среднего значения относительных потоков контуров  $\epsilon_{1 \text{ min}}$  от погрешности при численном расчете потоков  $\epsilon_0$

печивается только при весьма высокой точности численного расчета потоков  $\Phi_k$  и  $\Phi_k^h$  с погрешностью  $\epsilon_0 \leq 0,00025$ . Такую маленькую погрешность для потоков нельзя получить известными численными методами расчета поля (МКР и МКЭ), которые могли бы быть использованы при перемещении в условиях  $i_k = \text{const}$ . Определить токи или потоки со столь высокой точностью удастся только при использовании численных методов расчета цепей. Для этого необходимо рассчитать поле нелинейной системы в исходном положении (до перемещения), перейти к линейной модели системы, составить ее эквивалентную магнитную цепь, записать систему линейных уравнений для этой цепи (см. § 1.5 и П2) и решить эти уравнения относительно токов или потоков дважды: для магнитных сопротивлений ветвей в исходном положении, определяя  $\Phi_k$  при  $i_k = \text{const}$  или  $i_k$  при  $\Phi_k = \text{const}$ , и для магнитных сопротивлений ветвей после перемещения, определяя  $\Phi_k^h$  при  $i_k = \text{const}$  и  $i_k^h$  при  $\Phi_k = \text{const}$ .

**2.4.3. Применение метода для численного расчета полной силы и полного момента, действующих на выделенный объем нелинейной магнитной системы.** Чтобы определить энергетическим методом полную силу  $\bar{F} = \bar{n}_x F_x + \bar{n}_y F_y + \bar{n}_z F_z$  и полный момент  $\bar{N} = \bar{n}_x N_x + \bar{n}_y N_y + \bar{n}_z N_z$ , действующие на выделенный объем системы, необходимо найти каждую из компонент  $\bar{F}$  и  $\bar{N}$ . Для определения компоненты полной силы  $\bar{F}_q = \bar{n}_q F_q$  ( $q \in x, y, z$ ) необходимо произвести линейное перемещение выделенного объема на расстояние  $\Delta \bar{l} = \bar{n}_q \Delta q$  в направлении единичного вектора  $\bar{n}_q$  по координате  $q$ , найти соответствующие приращения энергии  $\Delta W_q$  по (2.6) или коэнергии  $\Delta W'_q$  по (2.15) и воспользоваться формулами (2.3) или (2.13):

$$\bar{F}_q = \bar{n}_q F_q = \bar{n}_q D_q = \bar{n}_q \lim_{(\Delta q \rightarrow 0)} \frac{\Delta W'_q}{\Delta q} = -\bar{n}_q \lim_{\Delta q} \frac{\Delta W_q}{\Delta q}. \quad (2.28)$$

Определив таким образом все три компоненты силы  $\bar{F}$ , найдем полную силу в виде суммы этих компонент:

$$\bar{F} = \sum_q \bar{F}_q = \sum_q \bar{n}_q F_q, \quad (2.29)$$

где  $q \in x, y, z$ .

Для определения компоненты полного момента относительно начала системы координат  $\bar{N}_q = \bar{n}_q N_q$  ( $q \in x, y, z$ ) необходимо повернуть выделенный объем на угол  $\Delta q = \Delta \gamma_q$  относительно оси с единичным вектором  $\bar{n}_q$ , найти соответствующие приращения энергии  $\Delta W_q$  по (2.6) или коэнергии  $\Delta W'_q$  по (2.15) и воспользоваться формулами (2.3) или (2.13):

$$\bar{N}_q = \bar{n}_q N_q = \bar{n}_q D_q = \bar{n}_q \lim_{(\Delta \gamma_q \rightarrow 0)} \frac{\Delta W'_q}{\Delta \gamma_q} = -\bar{n}_q \lim_{\Delta \gamma_q} \frac{\Delta W_q}{\Delta \gamma_q}. \quad (2.30)$$

Определив три компоненты полного момента относительно начала системы координат в точке  $O$ , найдем полный момент в виде суммы этих компонент:

$$\bar{N} = \sum_q \bar{N}_q = \sum_q \bar{n}_q N_q, \quad (2.31)$$

где  $q \in x, y, z$ .

Таким образом, приходится определять 6 компонент силы и момента и общая трудоемкость определения полной силы  $\bar{F}$  и полного момента  $\bar{N}$  с помощью рассматриваемого метода увеличивается почти в 6 раз по сравнению с весьма трудоемким определением силы или момента, действующих в заранее известном направлении [см. 2.4.2].

По трудоемкости и точности метод определения ЭМС по изменению магнитной энергии возбуждающих контуров существенно уступает при численных расчетах методу определения ЭМС по изменению магнитной энергии ветвей магнитной цепи (гл. 3), а также двум другим известным методам: методу определения ЭМС по их объемной плотности и особенно методу определения ЭМС по натяжениям в магнитном поле (см. гл. 4). По этой причине рассматриваемый метод при численных расчетах ЭМС не применяется. Практическое значение метода состоит в том, что в силу своей фундаментальности он может быть положен в основу других методов расчета ЭМС (см. гл. 3—5).

### **2.5. Появление ошибочных результатов при определении ЭМС по приращениям магнитной энергии или коэнергии, найденным с учетом нелинейности системы (без перехода к линейной модели)**

Как показано ранее, для определения приращений энергии  $\Delta W$  или коэнергии  $\Delta W'$  при перемещении выделенного объема нелинейной системы в условиях  $\Phi_k = \text{const}$  или  $i_k = \text{const}$  необходимо предварительно заменить эту систему ее линейной моделью. Затем, исходя из того, что в линейной модели правильно воспроизводятся магнитные поля нелинейной системы в исходном и новом положениях, а также процессы электромеханического преобразования энергии во время перемещения, найти искомые приращения энергии или коэнергии по (2.7) или (2.15) в виде разности магнитных энергий или коэнергий линейной модели в новом и исходном положениях.

Определение составляющих приращений энергии  $\Delta W_k$  [см. (2.7)] и коэнергии  $\Delta W'_k$  [см. (2.15)], приходящихся на долю  $k$ -го контура линейной модели системы, графически иллюстрируется рис. 2.7. На рисунке наряду с характеристиками намагничивания

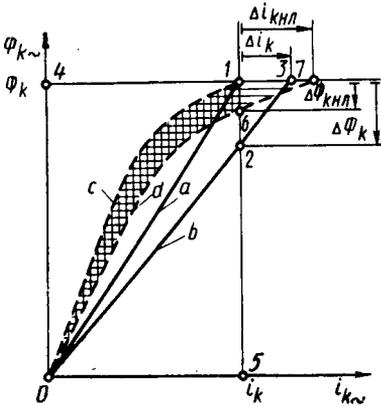


Рис. 2.7. Сравнение приращений энергии и коэнергии  $k$ -го контура при перемещении на  $\Delta q$ , найденных в линейной модели нелинейной системы и в самой нелинейной системе (без перехода к линейной модели)

до  $k$ -го контура линейной модели до перемещения, равна площади треугольника  $041$ , магнитная энергия  $W_k^H$ , приходящаяся на долю этого контура после перемещения — площади треугольника  $043$ .

Приращение магнитной коэнергии  $k$ -го контура линейной модели при перемещении объема  $V$  в условиях  $i_k = \text{const}$ ,  $\Delta W'_k = (W'_k)^H - W'_k = i_k \Delta \Phi_k / 2$  равно площади треугольника  $012$ , заключенной между линейными характеристиками намагничивания  $k$ -го контура до и после перемещения в новое положение и линией  $i_k = \text{const}$ .

Соответственно магнитная коэнергия  $W'_k$ , приходящаяся на долю  $k$ -го контура линейной модели до перемещения, равна площади треугольника  $015$ , магнитная коэнергия ( $W'_k$ ), приходящаяся на долю этого контура после перемещения, — площади треугольника  $025$ .

Суммируя приращения энергии или коэнергии по всем контурам системы, можно найти полные приращения магнитной энергии

$$\Delta W = \sum_{k=1}^N \Delta W_k \quad \text{или} \quad \text{коэнергии} \quad \Delta W' = \sum_{k=1}^N \Delta W'_k \quad \text{при перемещении вы-$$

деленного объема в линейной модели и рассчитать по (2.3) или (2.13) искомую ЭМС  $D_q$ , действующую на выделенный объем в направлении перемещения  $\Delta q$ . Так как *магнитные поля* (распределения магнитных индукций, напряженностей и магнитных проницаемостей) *в нелинейной системе и в ее линейной модели при заданных токах в контурах  $i_k$  полностью совпадают* (см. §1.1), а ЭМС, действующая на выделенный объем, определяется только этими полями и не

$k$ -го контура в линейной модели до (кривая  $a$ ) и после (кривая  $b$ ) перемещения показаны характеристики намагничивания этого контура в нелинейной системе как до (кривая  $c$ ), так и после (кривая  $b$ ) перемещения на  $\Delta q$ .

Приращение магнитной энергии  $k$ -го контура линейной модели при перемещении объема  $V$  в условиях  $\Phi_k = \text{const}$ ,  $\Delta W_k = W_k^H - W_k = \Phi_k \Delta i_k / 2$  равно площади треугольника  $013$ , заключенной между линейной характеристикой намагничивания контура до перемещения  $a$  ( $\Phi_{k\sim} = L_k i_{k\sim}$ ), линейной характеристикой намагничивания контура после перемещения  $b$  ( $\Phi_{k\sim} = L_k^H i_{k\sim}$ ) и линией  $\Phi_k = \text{const}$ .

Соответственно магнитная энергия  $W_k$ , приходящаяся на до-

зависит от истории намагничивания и характера изменения магнитной проницаемости в процессе намагничивания, то можно утверждать, что ЭМС  $D_q$ , действующая на выделенный объем в линейной модели, не отличается от ЭМС, действующей на тот же объем в самой нелинейной системе. Эта ЭМС всегда совпадает с экспериментальными данными и с ЭМС, которые определены для нелинейной системы или ее модели другими методами: по объемной плотности ЭМС и по натяжениям в магнитном поле (см. гл. 4).

Вместе с тем приходится констатировать, что изложенный здесь подход к определению приращений магнитной энергии  $\Delta W$  или коэнергии  $\Delta W'$  при определении ЭМС, действующей на выделенный объем  $V$  нелинейной системы, получил строгое обоснование только в последние годы [4], хотя необходимость его применения отмечалась и ранее [10, 11].

В большей части публикаций, посвященных этому вопросу, например [9, 12, 13, 14], приращения энергии  $\Delta W_{\text{н.л}} = \Sigma \Delta W_{k \text{ н.л}}$  или коэнергии  $\Delta W'_{\text{н.л}} = \Sigma \Delta W'_{k \text{ н.л}}$ , которые вводятся в (2.3) или (2.13) при расчете ЭМС  $D_q$ , действующей в направлении перемещения  $\Delta q$ , рекомендуется определять *без предварительного перехода к линейной модели с помощью нелинейных характеристик намагничивания отдельных контуров* до (кривая  $c$ ) и после (кривая  $d$ ) перемещения (рис. 2.7). Авторы этих публикаций рекомендуют определять приращение магнитной энергии  $\Delta W_{\text{н.л}}$  при перемещении выделенного объема  $V$  нелинейной системы в условиях  $\Phi_k = \text{const}$  в виде разности магнитных энергий нелинейной системы в новом и исходном положениях, рассчитанных по (1.37):

$$\Delta W_{\text{н.л}} = W_{\text{н.л}}^{\text{H}} - W_{\text{н.л}} = \sum_{k=1}^N \Delta W_{k \text{ н.л}}, \quad (2.32)$$

$$\text{где } \Delta W_{k \text{ н.л}} = W_{k \text{ н.л}}^{\text{H}} - W_{k \text{ н.л}} = \int_0^{\Phi_k} i_{k \sim}^{\text{H}} d\Phi_{k \sim} - \int_0^{\Phi_k} i_{k \sim} d\Phi_{k \sim}$$

— приращение магнитной энергии  $k$ -го контура нелинейной системы при перемещении объема в условиях  $\Phi_k = \text{const}$ .

На рис. 2.7 приращение  $\Delta W_{k \text{ н.л}}$  равно заштрихованной горизонтальными линиями площади криволинейной треугольной фигуры  $O17$ , заключенной между характеристикой намагничивания контура до перемещения (кривая  $c$ )  $\Phi_{k \sim} = \Phi_k (i_{k \sim})$ , характеристикой намагничивания контура после перемещения (кривая  $d$ )  $\Phi_{k \sim}^{\text{H}} = \Phi_k^{\text{H}} (i_{k \sim}^{\text{H}})$  и линией  $\Phi_k = \text{const}$ . Соответственно магнитная энергия  $W_{k \text{ н.л}}$ , приходящаяся на долю  $k$ -го контура нелинейной системы до перемещения, равна площади криволинейной треугольной фигуры  $O41$ , заключенной между характеристикой намагничивания контура до перемещения (кривая  $c$ ), осью ординат и линией  $\Phi_k = \text{const}$ ; магнитная энергия  $W_{k \text{ н.л}}^{\text{H}}$ , приходящаяся на долю  $k$ -го

контура нелинейной системы после перемещения равна площади криволинейной треугольной фигуры 047, заключенной между характеристикой намагничивания контура после перемещения (кривая  $d$ ), осью ординат и линией  $\Phi_k = \text{const}$ .

Таким же образом (без перехода к линейной модели) рекомендуется в этих публикациях определять и приращение магнитной коэнергии при перемещении выделенного объема нелинейной системы в условиях  $i_k = \text{const}$ . Это приращение рекомендуется определять в виде разности магнитных коэнергий нелинейной системы в новом и исходном положениях, рассчитанных по (2.9), (2.10) с помощью нелинейных характеристик намагничивания контуров системы в этих положениях:

$$\Delta W'_{\text{нл}} = (W'_{\text{нл}})^{\text{н}} - W'_{\text{нл}} = \sum_{k=1}^N \Delta W'_{k\text{нл}}, \quad (2.33)$$

$$\text{где } \Delta W'_{k\text{нл}} = (W'_{k\text{нл}})^{\text{н}} - W'_{k\text{нл}} = \int_0^{i_k} \Phi_{k\sim}^{\text{н}} di_{k\sim} - \int_0^{i_k} \Phi_{k\sim} di_{k\sim}$$

— приращение магнитной коэнергии  $k$ -го контура нелинейной системы при перемещении выделенного объема  $V$  в условиях  $i_k = \text{const}$ .

На рис. 2.7 приращение  $\Delta W'_{k\text{нл}}$  равно заштрихованной вертикальными линиями площади криволинейной треугольной фигуры 016, заключенной между характеристикой намагничивания контура до перемещения (кривая  $c$ ), характеристикой намагничивания контура после перемещения (кривая  $d$ ) и линией  $i_k = \text{const}$ . Соответственно магнитная коэнергия  $W'_{k\text{нл}}$ , приходящаяся на долю  $k$ -го контура нелинейной системы до перемещения, равна площади криволинейной треугольной фигуры 015, заключенной между характеристикой намагничивания контура до перемещения (кривая  $c$ ), осью абсцисс и линией  $i_k = \text{const}$ ; магнитная коэнергия  $(W'_{k\text{нл}})^{\text{н}}$ , приходящаяся на долю  $k$ -го контура нелинейной системы после перемещения, равна площади криволинейной треугольной фигуры 065, заключенной между характеристикой намагничивания контура после перемещения (кривая  $d$ ), осью абсцисс и линией  $i_k = \text{const}$ .

По аналогии с тем, как это было сделано в 2.3 для приращений магнитной энергии  $\Delta W$  и коэнергии  $\Delta W'$  в линейной модели (2.18) нетрудно доказать, что при  $\Delta q \rightarrow 0$  приращения энергии  $\Delta W_{\text{нл}}$  по (2.32) и коэнергии  $\Delta W'_{\text{нл}}$  по (2.33), найденные с помощью нелинейных характеристик намагничивания отдельных контуров до и после перемещения, совпадают по абсолютной величине и отличаются только знаком:

$$\Delta W_{\text{нл}} (\Phi_k = \text{const}) = \sum_{k=1}^N \Delta W_{k\text{нл}} = - \sum_{k=1}^N \Delta W'_{k\text{нл}} = - \Delta W'_{\text{нл}} (i_k = \text{const}) \quad (2.34)$$

Действительно, из рис. 2.7 видно, что абсолютные значения приращения  $\Delta W_{k \text{ нл}}$ , равного площади криволинейного треугольника  $O17$ , и приращения  $\Delta W'_{k \text{ нл}}$ , равного площади криволинейного треугольника  $O16$ , отличаются на величину площади треугольника  $176$ , имеющей второй порядок малости по сравнению с самими приращениями, и при  $\Delta q \rightarrow 0$  эти приращения совпадают по абсолютной величине. Поэтому для того, чтобы оценить правомерность определения приращений магнитной энергии или коэнергии вышеизложенным способом по (2.32) или (2.33), достаточно сравнить с соответствующим приращением в линейной модели только одно из этих приращений, например приращение магнитной энергии по (2.32).

Сравнивая приращения энергии в наиболее общем случае, когда поверхность  $S$ , выделяющая объем  $V$  (см. рис. 1.5), полностью или частично располагается в магнитно-нелинейных средах, нетрудно убедиться в том, что приращение магнитной энергии  $k$ -го контура  $\Delta W_{k \text{ нл}}$  (площадь  $O17$ , рис. 2.7), найденное по (2.32) без перехода к линейной модели, всегда несколько меньше (по абсолютной величине), чем приращение магнитной энергии этого контура  $\Delta W_k$  (площадь  $O13$ , рис. 2.7), найденное по (2.7) после перехода к линейной модели:

$$|\Delta W_{k \text{ нл}}| \leq |\Delta W_k|. \quad (2.35)$$

В таком же соотношении, как вытекает из (2.7), (2.32), (2.3), находятся и абсолютные значения полных приращений магнитной энергии нелинейной системы, а также электромагнитных сил, найденных соответственно с переходом или без перехода к линейной модели:

$$|\Delta W_{\text{нл}}| = \left| \sum_{k=1}^N \Delta W_{k \text{ нл}} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N \Delta W_k \right| = |\Delta W|; \quad (2.36)$$

$$|D_{q \text{ нл}}| = \left| \frac{\Delta W_{\text{нл}}}{\Delta q} \right| \leq \left| \frac{\Delta W}{\Delta q} \right| = |D_q|, \quad (2.37)$$

где  $\Delta W$  — приращение магнитной энергии при перемещении выделенного объема нелинейной системы, найденное с помощью линейной модели [см. (2.7)];  $D_q$  — ЭМС, выраженная по (2.3) через  $\Delta W$ ;  $\Delta W_{\text{нл}}$  — приращение магнитной энергии при перемещении выделенного объема нелинейной системы, найденное без перехода к линейной модели [см. (2.32)];  $D_{q \text{ нл}}$  — ЭМС, выраженная по (2.3) через  $\Delta W_{\text{нл}}$ .

Таким образом, мы приходим к выводу, что в общем случае результаты расчета приращения  $\Delta W_{\text{нл}}$  и ЭМС  $D_{q \text{ нл}}$  по (2.32) и (2.3) без замены нелинейной системы ее линейной моделью ошибочны. Для получения правильных результатов необходима замена нелинейной системы ее линейной моделью и определение приращения магнитной энергии  $\Delta W$  и ЭМС  $D_q$  по уравнениям (2.7) и (2.3), справедливым для линейной модели.

Этот вывод, как вытекает из (2.34), распространяется и на определение приращения магнитной коэнергии  $\Delta W'_{нл}$  по (2.33) без перехода к линейной модели, а также на определение ЭМС  $D_{qнл}$  по (2.13) через это приращение коэнергии.

Для подтверждения сделанного вывода приведен пример 2.3, в котором приращение магнитной энергии, коэнергии и ЭМС определяются без перехода к линейной модели по (2.32), (2.33), (2.3), (2.13).

**Пример 2.3.** Рассматривается та же нелинейная магнитная система, что и в примерах 2.1 и 2.2. Заданными считаются те же величины, но сила, действующая на верхнее полукольцо  $IB$  (см. рис. 2.2), определяется по (2.32), (2.33), (2.3), (2.13) без перехода к линейной модели с помощью нелинейных характеристик намагничивания возбуждающего контура.

Зададимся текущими индукциями  $B_{\sim}$  и выразим через них потоки  $\Phi_{\sim} = B_{\sim}S$ . Обратимся к табл. 2.1, в которой приведены нелинейные характеристики намагничивания материала полуколец  $B_{\sim} = f_1(H_{1\sim})$  и среды в зазорах  $B_{\sim} = f_2(H_{2\sim})$ . Рассчитаем характеристику намагничивания контура в исходном положении:

$$i = H_{1\sim} l_1 + H_{2\sim} l_2 = f(\Phi_{\sim}),$$

где  $l_2 = 2\delta = 0,001$  м — длина линий поля в зазорах до перемещения полукольца, а также характеристику намагничивания контура после перемещения верхнего полукольца в новое положение на то же расстояние, что и в

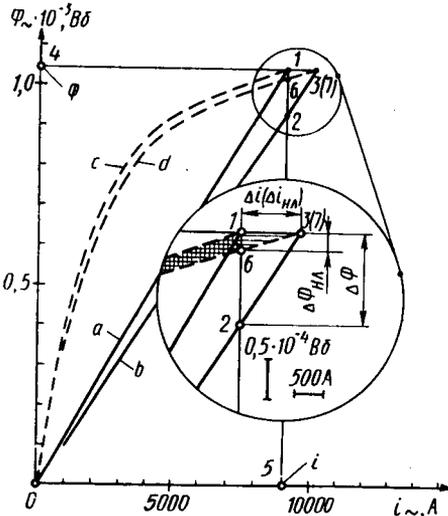


Рис. 2.8. Приращения энергии и коэнергии в нелинейной системе и ее линейной модели (для примера 2.3):

$a, b$  — характеристики намагничивания контура в линейной модели нелинейной системы до и после перемещения;  $c, d$  — характеристики намагничивания контура в самой нелинейной системе

примере 2.2;  $i_{\sim}^H = H_{1\sim} l_1 + H_{2\sim} l_2 = f^H(\Phi_{\sim})$ , где  $l_2^H = 2\delta^H = 0,006$  м,  $\delta^H = \delta + \Delta\delta = 0,003$  м,  $\Delta\delta = \Delta\delta = 0,0025$  м.

Нелинейные характеристики намагничивания контура до и после перемещения представлены графически на рис. 2.8 (кривые  $c$  и  $d$ ) и приведены в табл. 2.2.

В диапазоне индукций 2,4 — 2,65 Тл (между точками  $\alpha$  и  $\beta$ , см. рис. 2.3) характеристики намагничивания контура можно представить аппроксимирующими функциями:

$$i_{\sim} = I_1(\text{tg}(a_1 \Phi_{\sim}))/m_{H1} + I_2(\text{tg}(a_2 \Phi_{\sim}))/m_{H2} = f(\Phi_{\sim});$$

$$i_{\sim}^H = I_1(\text{tg}(a_1 \Phi_{\sim}))/m_{H1} + I_2^H(\text{tg}(a_2 \Phi_{\sim}))/m_{H2} = f^H(\Phi_{\sim}).$$

С помощью аппроксимирующей функции для тока  $i_{\sim}^H$  найдем новое значение этого тока при перемещении в условиях  $\Phi_{\sim} = \Phi = 1,04 \cdot 10^{-3}$  Вб = const,  $i_{нл}^H = 10168$  А и приращение тока

Таблица 2.2

$\Phi_{\sim} \cdot 10^4, \text{ Вб}$	$i_{\sim}, \text{ А}$	$\Delta i_{\sim}, \text{ А}$	$i_{\sim}^H, \text{ А}$	$W_{\text{нл}}, \text{ Дж}$	$W_{\text{нл}}^H, \text{ Дж}$
0	0	0	0	0	0
1,6	408	43	452	0,032	0,035
3,2	856	91	947	0,133	0,147
4,4	1249	133	1382	0,259	0,286
5,2	1557	166	1724	0,371	0,410
6,0	1923	207	2130	0,509	0,564
6,8	2375	257	2632	0,681	0,754
7,6	2963	323	3286	0,894	0,990
8,4	3777	416	4193	1,162	1,287
9,2	5015	564	5579	1,511	1,675
10,216	8102	965	9067	2,157	2,396
10,400	9067	1100	10 168	2,315	2,573

контура  $\Delta i_{\text{нл}} = i_{\text{нл}}^H - i = 1100,3 \text{ А}$  (для рассматриваемой в примере простой последовательной цепи это приращение совпадает с приращением в линейной модели,  $\Delta i_{\text{нл}} = \Delta i$ ).

Магнитная энергия нелинейной системы до перемещения  $W_{\text{нл}}$  находится с помощью характеристики намагничивания контура  $i_{\sim} = f(\Phi_{\sim})$  по табл. 2.2. Эта энергия равна площади криволинейной треугольной фигуры 041 на рис. 2.8, заключенной между кривой  $s$ , осью ординат и линией  $\Phi = \text{const}$ . Для ее вычисления с помощью программируемого микрокалькулятора используется численное интегрирование по формуле трапеций (см. П5). Результаты расчета  $W_{\text{нл}} = i_{\sim} \int_0^{\Phi} d\Phi_{\sim} = 2,315 \text{ Дж}$  представлены в табл. 2.2.

Магнитная энергия нелинейной системы после перемещения  $W_{\text{нл}}^H$  находится с помощью характеристики намагничивания контура  $i_{\sim}^H = f^H(\Phi_{\sim})$  по табл. 2.2. Эта энергия соответствует площади криволинейной фигуры 043 на рис. 2.8, заключенной между кривой  $d$ , осью ординат и линией  $\Phi = \text{const}$ . Результаты расчета  $W_{\text{нл}}^H = \int_0^{\Phi} i_{\sim}^H d\Phi_{\sim} = 22,573 \text{ Дж}$ , проведенного по той же программе, представлены в табл. 2.2. Приращение магнитной энергии нелинейной системы определяется по (2.32):

$$\Delta W_{\text{нл}} = W_{\text{нл}}^H - W_{\text{нл}} = 0,258 \text{ Дж.}$$

Выражая ЭМС, действующую на верхнее полукольцо, через  $\Delta W_{\text{нл}}$  по (2.3), получим силу

$$F_{\text{нл}}^W = -\Delta W_{\text{нл}} / \Delta q = -103,3 \text{ Н,}$$

которая в 2,22 раза меньше, чем действительная сила  $F^W = -228,9 \text{ Н}$ , найденная по приращению энергии в линейной модели (см. примеры 2.1, 2.2).

К такому же результату придем, выражая ЭМС, действующую на верхнее полукольцо, через приращение коэнергии нелинейной системы  $\Delta W_{\text{нл}}$  при перемещении в условиях  $i = \text{const}$ . Новое значение потока  $\Phi_{\sim} = \Phi_{\text{нл}}^H$  после перемещения при  $i_{\sim}^H = i = \text{const}$  найдем, решая нелинейное уравнение

$$f(x) = f(\Phi_{\text{нл}}^H) = -l_1 (\text{tg}(a_1 \Phi_{\text{нл}}^H)) / m_{H1} - l_2^H (\text{tg}(a_2 \Phi_{\text{нл}}^H)) / m_{H2} + i = 0.$$

Корень этого уравнения  $x = \Phi_{\text{нл}}^{\text{H}} = 1,0216 \cdot 10^{-3}$  Вб можно найти с помощью программы, приведенной в П4. Приращение магнитного потока  $\Delta \Phi_{\text{нл}} = \Phi_{\text{нл}}^{\text{H}} - \Phi = -1,836 \cdot 10^{-5}$  Вб при перемещении в условиях  $i = \text{const}$ . Это приращение потока существенно меньше (по абсолютной величине), чем приращение потока  $\Delta \Phi = -1,124 \cdot 10^{-4}$  Вб, найденное при том же перемещении для линейной модели системы в примере 2.2. Магнитная коэнергия нелинейной системы до перемещения  $W'_{\text{нл}}$  находится с помощью характеристики намагничивания контура  $i_{\sim} = f(\Phi_{\sim})$  по табл. 2.2. Эта коэнергия соответствует площади криволинейной фигуры 015 на рис. 2.8, заключенной между кривой  $c$ , осью абсцисс и линией  $i = \text{const}$ . Магнитную коэнергию

$W'_{\text{нл}} = \int_0^i \Phi_{\sim} di_{\sim}$  при вычислении наиболее удобно представить в виде  $W'_{\text{нл}} = i\Phi - W_{\text{нл}} = 7,115$  Дж. Магнитная коэнергия нелинейной системы после перемещения  $(W'_{\text{нл}})^{\text{H}}$  находится с помощью характеристики намагничивания контура  $i_{\sim}^{\text{H}} = f(\Phi_{\sim})$  по табл. 2.2. Эта коэнергия соответствует площади криволинейной фигуры 065 на рис. 2.8, заключенной между кривой  $d$ , осью абсцисс и линией  $i = \text{const}$ . Магнитную коэнергию  $(W'_{\text{нл}})^{\text{H}} = \int_0^i \Phi_{\sim}^{\text{H}} di_{\sim}$  наиболее удобно представить в виде

$$(W'_{\text{нл}})^{\text{H}} = i\Phi_{\text{нл}}^{\text{H}} - W_{\text{нл}}^{\text{H}} = 6,86 \text{ Дж},$$

где  $W_{\text{нл}}^{\text{H}} = 2,396$  Дж — магнитная энергия нелинейной системы в новом положении при потоке  $\Phi_{\text{нл}}^{\text{H}}$  (табл. 2.2). Приращение магнитной коэнергии нелинейной системы определяем по (2.33)  $\Delta W'_{\text{нл}} = (W'_{\text{нл}})^{\text{H}} - W'_{\text{нл}} = 0,248$  Дж. Выражая ЭМС, действующую на верхнее полукольцо, через  $\Delta W'_{\text{нл}}$  по (2.13), получим

$$(F_{\text{нл}}^{\text{W}})' = \frac{\Delta W'_{\text{нл}}}{\Delta q} = -99,2 \text{ Н}.$$

Эта сила несколько отличается от  $F_{\text{нл}}^{\text{W}}$ , найденной по (2.32) и (2.3), что связано с погрешностью первого рода [см. (2.21)]. По сравнению с действительной силой  $F^{\text{W}} = -228,9$  Н, найденной по приращению энергии в линейной модели (см. примеры 2.1, 2.2), сила  $(F_{\text{нл}}^{\text{W}})'$  в  $228,9/99,2 = 2,31$  раза меньше.

Соотношение между приращениями магнитной энергии  $|\Delta W_{\text{нл}}|$  и  $|\Delta W|$  по (2.36) или между ЭМС  $|D_{q\text{нл}}|$  и  $D_q$  по (2.37), которые соответствуют этим приращениям, зависит от уровня магнитного насыщения нелинейных сред, в которых располагается поверхность  $S$ , выделяющая объем  $V$  (см. рис. 1.5). При больших магнитных насыщениях нелинейных сред, в которых располагается поверхность  $S$ , приращения энергии  $|\Delta W_{\text{нл}}|$  и ЭМС  $|D_{q\text{нл}}|$ , найденные без перехода к линейной модели по (2.32) и (2.3), могут быть в несколько раз меньше, чем те же величины  $|\Delta W|$  и  $|D_q|$ , найденные с помощью линейной модели по (2.7) и (2.3). И только в некоторых частных случаях, когда поверхность  $S$ , выделяющая объем  $V$ , располагается целиком в магнитно-линейных средах, приращения  $\Delta W_{\text{нл}}$  и  $\Delta W$ , а также ЭМС  $D_{q\text{нл}}$  и  $D_q$  полностью совпадают. Имеется два таких

частных случая определения ЭМС: 1) определение ЭМС в магнитно-линейной системе; 2) определение ЭМС, действующей на магнитно-нелинейное тело, окруженное со всех сторон магнитно-линейной средой (в которой располагается поверхность  $S$ , охватывающая это тело)\*.

В этих двух частных случаях можно найти правильные значения приращения магнитной энергии  $\Delta W_{\text{нл}} = \Delta W$  и ЭМС  $D_{q \text{ нл}} = D_q$  как по (2.32) и (2.3) без замены нелинейной системы ее линейной моделью, так и по (2.7), (2.3) после замены системы ее линейной моделью. Однако, имея в виду чрезвычайно большую трудоемкость численного расчета приращения магнитной энергии по (2.32) с помощью нелинейных характеристик намагничивания контуров (см. § 1.3), даже во втором частном случае всегда целесообразно *заменить нелинейную систему ее линейной моделью и определить приращение энергии по весьма простым формулам (2.7)*.

Возможность получения правильных результатов по (2.32) и (2.3) без замены нелинейной системы ее линейной моделью во втором частном случае подтверждается примером 2.4.

**Пример 2.4.** Рассмотрим ту же нелинейную магнитную систему (см. рис. 2.2), что и в примерах 2.1, 2.2, но зазоры между полукольцами заполним магнитно-линейной средой с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_2 = B/H_2 = 2,6/220070 = 1,18 \cdot 10^{-5} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ , равной магнитной проницаемости зазоров при заданном токе в возбуждающем контуре  $i = 9067,7 \text{ А}$  (или магнитной проницаемости зазоров в линейной модели системы). Остальные заданные величины остались без изменения.

Силу, действующую на верхнее полукольцо, определим, как в примере 2.3, по (2.32) и (2.3) без замены нелинейной системы ее линейной моделью. Зададимся текущей индукцией  $B_{\sim}$  и выразим через нее поток  $\Phi_{\sim} = B_{\sim} S$ . Обратимся к табл. 2.1, в которой приведена нелинейная характеристика намагничивания материала полуколец  $B_{\sim} = f(H_{1\sim})$ , показанная на рис. 2.3,а сплошной линией. Будем иметь в виду, что характеристика намагничивания среды в зазорах линейна  $B_{\sim} = \mu_2 H_{2\sim}$  (пунктирная линия на рис. 2.3, б). После этого рассчитаем характеристику намагничивания контура в исходном положении  $i_{\sim} = H_{1\sim} l_1 + B_{\sim} l_2 / \mu_2 = f(\Phi_{\sim})$ , где  $l_2 = 2 \delta = 0,001 \text{ м}$ , а также характеристику намагничивания контура после перемещения верхнего полукольца на то же расстояние, что и в примере 2.2,  $i_{\sim}^{\text{н}} = H_{1\sim} l_1 + B_{\sim} l_2^{\text{н}} / \mu_2 = f^{\text{н}}(\Phi_{\sim})$ , где  $l_2^{\text{н}} = 2 \delta^{\text{н}} = 0,006 \text{ м}$ .

Эти характеристики представлены на рис. 2.9 (кривые  $c$  и  $d$ ) и в табл. 23. В диапазоне индукций 2,4 — 2,65 Тл (между точками  $\alpha$  и  $\beta$  на рис. 2.3, а) характеристики намагничивания контура представим аппроксимирующими функциями:

$$i_{\sim} = l_1 (\text{tg}(a_1 \Phi_{\sim})) / m_{H1} + \Phi_{\sim} l_2 / (\mu_2 S) = f(\Phi_{\sim});$$

$$i_{\sim}^{\text{н}} = l_1 (\text{tg}(a_1 \Phi_{\sim})) / m_{H1} + \Phi_{\sim} l_2^{\text{н}} / (\mu_2 S) = f^{\text{н}}(\Phi_{\sim}).$$

С помощью аппроксимирующей функции для тока  $i_{\sim}^{\text{н}}$  найдем новое значение этого тока при перемещении в условиях  $\Phi_{\sim} = \Phi = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ Вб} = \text{const}$ ,  $i_{\text{нл}}^{\text{н}} = 10168 \text{ А}$  и приращение тока контура  $\Delta i_{\text{нл}} = i^{\text{н}} - i = 1100 \text{ А}$  (как и в примере 2.3, это приращение совпадает с прираще-

\* Второй частный случай анализируется в гл. 3.

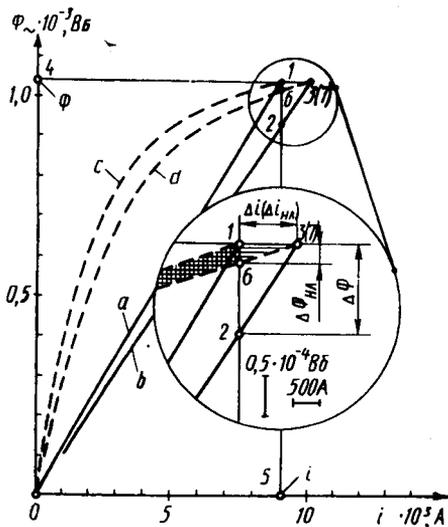


Рис. 2.9. Приращения энергии и ко-  
энергии:

*a, b* — характеристики намагничивания контура в линейной модели нелинейной системы;  
*c, d* — характеристики намагничивания контура в самой нелинейной системе (для примера (2.4))

Там же представлены результаты расчета магнитной энергии нелинейной системы после перемещения  $W_{нл}^H = \int_0^{\Phi} i_{нл}^H d\Phi_{нл}^H = 2,950$  Дж.

Приращение магнитной энергии нелинейной системы при перемещении находим по (2.32):  $\Delta W_{нл} = W_{нл}^H - W_{нл} = 0,572$  Дж. Выражая ЭМС, действующую на верхнее полукольцо, через  $\Delta W_{нл}$  по (2.3), получим

$$F_{нл}^W = -\Delta W_{нл} / \Delta q = -228,9 \text{ Н.}$$

Таблица 2.3

$\Phi_{нл} \cdot 10^3, \text{ Вб}$	$i_{нл}, \text{ А}$	$\Delta i_{нл}, \text{ А}$	$i_{нл}^H, \text{ А}$	$W_{нл}, \text{ Дж}$	$W_{нл}^H, \text{ Дж}$
0	0	0	0	0	0
1,6	434	169	603	0,034	0,048
3,2	905	338	1244	0,141	0,195
4,4	1315	465	1781	0,273	0,376
5,2	1634	550	2184	0,391	0,534
6,0	2009	634	2644	0,537	0,727
6,8	2468	719	3187	0,715	0,960
7,6	3059	804	3863	0,936	1,241
8,4	3871	888	4760	1,211	1,585
9,2	5096	973	6070	1,567	2,015
10,187	7991	1077	9067	2,196	2,745
10,400	9067	1100	10 168	2,378	2,950

нием в линейной модели,  $\Delta i_{нл} = \Delta i$ . Новое значение потока  $\Phi_{нл}^H = \Phi_{нл}^H$  после перемещения ( $i_{нл}^H = i = \text{const}$ ) есть корень ( $x = \Phi_{нл}^H$ ) нелинейного уравнения

$$f(x) = f(\Phi_{нл}^H) = -I_1(\text{tg}(a_1 \Phi_{нл}^H)) /$$

$$m_{H1} - \Phi_{нл}^H l_{нл}^H / (\mu_2 S) + i = 0.$$

Для определения корня используем программу, составленную по аналогии с программой, приведенной в П4.  $x = \Phi_{нл}^H = 1,0187 \cdot 10^{-3}$  Вб. Приращение магнитного потока  $\Delta \Phi_{нл} = \Phi_{нл}^H - \Phi = 2,13 \cdot 10^{-3}$  Вб.

Магнитную энергию нелинейной системы до перемещения вычислим с помощью характеристики намагничивания контура  $i_{нл} = f(\Phi_{нл})$  (табл. 2.3) путем численного интегрирования по формуле трапеций (см. П5):  $W_{нл} = \int_0^{\Phi} i_{нл} d\Phi_{нл} = 2,378$  Дж.

Эта сила полностью совпадает с действительной силой  $F^W = -228,9$  Н, найденной по приращению магнитной энергии в линейной модели (см. примеры 2.1, 2.2), что подтверждает возможность получения правильных результатов по (2.32) и (2.3) без замены нелинейной системы ее линейной моделью во втором частном случае, когда, как в данном примере, определяется сила, действующая на тело (верхнее полукольцо), окруженное со всех сторон магнитнолинейной средой (зазорами с  $\mu_2 = \text{const}$ ). К такому же результату придем, выражая ЭМС, действующую на верхнее полукольцо, через приращение коэнергии нелинейной системы  $\Delta W'_{\text{нл}}$  при перемещении в условиях  $i = \text{const}$ . Поступая таким же образом, как и в примере 2.3, и обращаясь к табл. 2.3 и уравнению (2.33), найдем: коэнергию системы до перемещения  $W'_{\text{нл}} = i\Phi - W_{\text{нл}} = 7,052$  Дж; коэнергию системы после перемещения  $(W'_{\text{нл}})^{\text{н}} = i\Phi_{\text{нл}}^{\text{н}} - W_{\text{нл}}^{\text{н}} = 6,492$  Дж; приращение коэнергии при перемещении  $\Delta W'_{\text{нл}} = (W'_{\text{нл}})^{\text{н}} - W'_{\text{нл}} = -0,560$  Дж. Выражая ЭМС, действующую на верхнее полукольцо через  $\Delta W'_{\text{нл}}$  по (2.13), получим

$$(F^W)_{\text{нл}}' = \Delta W'_{\text{нл}} / \Delta q = -224,2 \text{ Н.}$$

В пределах погрешности  $(228,9 - 224,2) / 228,9 = 0,02$  сила  $(F^W)_{\text{нл}}'$  совпадает с действительной силой  $F^W = -228,9$  Н, найденной по приращению энергии в линейной модели.

#### КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. Наиболее фундаментальным методом расчета ЭМС в магнитном поле, из которого вытекают все другие известные методы расчета, является энергетический метод.

2. Энергетический метод предлагает два способа для определения ЭМС, действующей в заданном направлении  $q$  на выделенный объем  $V$  нелинейной системы. В первом способе ЭМС выражается через приращение магнитной энергии  $\Delta W$ , которое происходит при малом перемещении выделенного объема ( $\Delta q \rightarrow 0$ ) в условиях постоянства потоков  $\Phi_k$ , сцепленных с возбуждающими контурами ( $\Phi_k = \text{const}$ ). Причем приращение магнитной энергии системы вычисляется в виде суммы приращений энергии, приходящихся на долю отдельных возбуждающих контуров. Во втором способе ЭМС выражается через приращение магнитной коэнергии  $\Delta W'$ , которое происходит при малом перемещении выделенного объема ( $\Delta q \rightarrow 0$ ) в условиях постоянства токов  $i_k$  возбуждающих контуров ( $i_k = \text{const}$ ). Приращение коэнергии системы вычисляется в виде суммы приращений коэнергии, приходящихся на долю отдельных возбуждающих контуров.

3. Для получения правильных значений приращений энергии и коэнергии необходимо заменить нелинейную систему ее линейной моделью и только после этого производить перемещение объема  $V$  в новое положение.

4. Приемлемые по точности результаты можно получить с помощью энергетического метода только в тех случаях, когда приращения энергии или коэнергии выражены аналитически.

5. Определение приращений энергии или коэнергии численным путем (на основании численных расчетов полей в линейной модели системы до и после перемещения объема  $V$ ) приводит к появлению неприемлемых погрешностей в расчете приращений.

6. Определение приращений энергии или коэнергии с помощью нелинейных характеристик намагничивания возбуждающих контуров (без перехода к линейной модели) приводит в общем случае к появлению существенных ошибок в расчете ЭМС.

**Определение электромагнитных сил  
по изменению магнитной энергии  
или коэнергии при малом перемещении  
в условиях постоянства потоков  
или токов ветвей магнитной цепи**

**3.1. Определение электромагнитных сил  
по изменению магнитной энергии  
при перемещении в условиях постоянства  
потоков ветвей магнитной цепи**

В § 1.5 было показано, что с помощью системы поверхностных токов  $i_{вс}$ , охватывающих отдельные ветви эквивалентной магнитной цепи с индексами  $s \in 1, 2, \dots, Q$ , можно возбудить в рассматриваемой магнитной системе магнитное поле, полностью совпадающее с магнитным полем, создаваемым в этой системе реальными возбуждающими контурами с токами  $i_k$  ( $k \in 1, 2, \dots, N$ ). При этом с каждым из контуров с током  $i_{вс}$ , возбуждающим поле в ветви с индексом  $s$  (см. рис. 1.16), будет сцеплен такой же поток  $\Phi_{вс}$ , который был создан реальными возбуждающими контурами с токами  $i_k$  (см. рис. 1.15).

В связи с этим появляется возможность замены реального возбуждения магнитного поля токами  $i_k$  эквивалентным ему возбуждением токами  $i_{вс}$  и вычисления магнитной энергии нелинейной системы по (1.51) в виде суммы энергий ветвей ее магнитной цепи

$$W_{нл} = \sum_{s=1}^Q W_{вс(нл)}. \quad (3.1)$$

Соответственно приращение магнитной энергии системы  $\Delta W$ , через которое по (2.3) выражается электромагнитная сила, действующая на выделенный объем системы, можно найти в виде суммы приращений энергий ветвей магнитной цепи [4] при перемещении этого объема на  $\Delta q$  в условиях постоянства потоков этих ветвей ( $\Phi_{вс} = \text{const}$ ):

$$\Delta W = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{вс}. \quad (3.2)$$

Приращение энергии  $\Delta W_{вс}$  каждой из ветвей магнитной цепи при перемещении на  $\Delta q$  в условиях  $\Phi_{вс} = \text{const}$  зависит только от приращения ее собственного магнитного сопротивления  $\Delta R_{вс}$  из-

за изменения размеров зоны поля, соответствующей этой ветви. В наиболее общем случае, когда ветвь эквивалентировать магнитно-нелинейную зону области поля, размеры которой зависят от положения выделенного объема, магнитное сопротивление ветви  $R_{BS\sim}$  зависит как от потока ветви  $\Phi_{BS}$ , так и от координаты  $q$ , определяющей положение этого объема:  $R_{BS\sim} = R_{BS}(q, \Phi_{BS\sim})$ .

В исходном положении выделенного объема, определяемом координатой  $q$ , ветвь  $s$  обладает нелинейной характеристикой намагничивания  $i_{BS\sim} = R_{BS\sim} \Phi_{BS\sim} = i_{BS}(\Phi_{BS\sim})$ , которая проходит через точку  $i_{BS}$ ,  $\Phi_{BS}$ , соответствующую заданным токам  $i_k$  в реальных возбуждающих контурах (кривая  $c$  на рис. 3.1). Однако даже в том случае, когда ветвь обладает нелинейной характеристикой намагничивания, при перемещении в условиях  $\Phi_{BS} = \text{const}$  сохраняются индукции  $\bar{B}$ , и магнитные проницаемости  $\mu$  во всех элементах зоны поля, эквивалентированной данной ветвью. Поэтому изменение магнитной энергии ветви за счет изменения размеров эквивалентированной ей зоны при перемещении  $\Delta q$  нужно определять с помощью линейной модели (см. § 2.1), воспроизводящей магнитное поле в зоне ветви при потоке  $\Phi_{BS}$ . Магнитное сопротивление ветви  $R_{BS}$  в линейной модели нелинейной системы при положении, определяемом координатой  $q$ , совпадает с магнитным сопротивлением этой ветви в нелинейной системе  $R_{BS}(q, \Phi_{BS\sim})$  при потоке  $\Phi_{BS\sim} = \Phi_{BS}$  и магнитном напряжении  $u_{BS}$ , равно току  $i_{BS}$ :

$$R_{BS} = u_{BS}/\Phi_{BS} = i_{BS}/\Phi_{BS} = R_{BS}(q, \Phi_{BS}). \quad (3.3)$$

При возбуждении магнитного поля системы поверхностными токами  $i_{BS}$ , охватывающими отдельные ветви ее магнитной цепи (см. рис. 1.16), каждая ветвь возбуждается собственной МДС  $i_{BS}$  и результирующее магнитное напряжение на ней при потоке  $\Phi_{BS} = i_{BS}/R_{BS}$  всегда равно нулю:  $u = u_{BS} - i_{BS} = 0$ . Это относится как к ветви самой нелинейной системы, так и к ветви в ее линейной модели. Поэтому возбуждаемую таким образом ветвь линейной модели цепи, обладающую сопротивлением  $R_{BS}$ , можно считать короткозамкнутой и представить ее независимой схемой, показанной для положения, характеризуемого координатой  $q$ , на рис. 3.2, а.

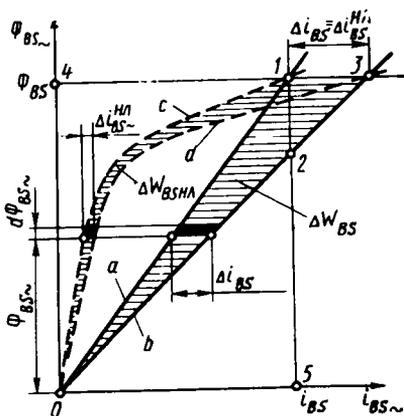


Рис. 3.1. Определение приращения магнитной энергии  $s$ -й ветви линейной модели нелинейной системы

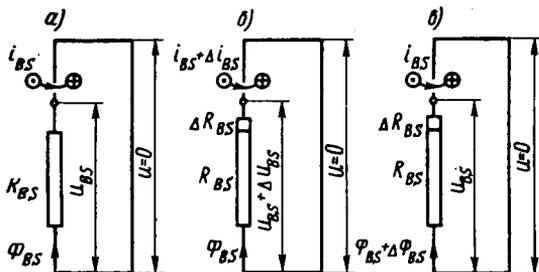


Рис. 3.2. Магнитная цепь ветви в различных состояниях:

*a* — до перемещения; *б* — после перемещения на  $\Delta q$  при  $\Phi_{BS} = \text{const}$ ; *в* — после перемещения при  $i_{BS} = \text{const}$

Приращение магнитной энергии  $\Delta W_{BS}$  ветви *s* в линейной модели при перемещении на  $\Delta q$  зависит от изменения собственного магнитного сопротивления ветви  $\Delta R_{BS}$  и приращения МДС ветви  $\Delta i_{BS} = \Delta R_{BS} \Phi_{BS}$ , которое требуется для поддержания постоянства потока ветви ( $\Phi_{BS} = \text{const}$ ). Определение МДС ветви  $i_{BS} + \Delta i_{BS} = i_{BS}^H$  для положения, определяемого координатой  $q + \Delta q$ , с помощью схемы линейной модели ветви показано на рис. 3.2, б.

Приращение магнитной энергии ветви *bs* в линейной модели при перемещении  $\Delta q$  в условиях  $\Phi_{BS} = \text{const}$  равно разности магнитных энергий ветви для положений, определяемых координатами  $q$  и  $q^H = q + \Delta q$ :

$$\begin{aligned} \Delta W_{BS} &= W_{BS}^H - W_{BS} = \int_0^{\Phi_{BS}} i_{BS}^H d\Phi_{BS} - \int_0^{\Phi_{BS}} i_{BS} d\Phi_{BS} = \\ &= \int_0^{\Phi_{BS}} \Delta i_{BS} d\Phi_{BS} = \int_0^{\Phi_{BS}} \Delta R_{BS} \Phi_{BS} d\Phi_{BS} = \\ &= (\Phi_{BS}^2/2) \Delta R_{BS} = \Phi_{BS} \Delta i_{BS}/2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $W_{BS}$ ,  $W_{BS}^H$  — магнитные энергии ветви в линейной модели соответственно в положении  $q$  до перемещения и в новом положении  $q + \Delta q = q^H$  после перемещения;  $i_{BS}$ ,  $i_{BS}^H$  — текущая МДС (ток) ветви линейной модели соответственно в положении  $q$  до перемещения и в положении  $q^H$  после перемещения;  $\Delta i_{BS} = i_{BS}^H - i_{BS}$  — приращение МДС (тока) ветви при перемещении на  $\Delta q$  в условиях  $\Phi_{BS} = \text{const}$ .

Определение приращения магнитной энергии ветви по формуле (3.4) иллюстрируется рис. 3.1. Как видно из рисунка, приращение магнитной энергии ветви  $\Delta W_{BS}$  равно площади треугольника *013*

Изменение магнитного сопротивления ветви в линейной модели при перемещении на  $\Delta q$  находится при условии  $\Phi_{BS} = \text{const}$  или  $\mu(x, y, z) = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \Delta R_{BS} &= R_{BS}^H - R_{BS} = \\ &= (\partial R_{BS}/\partial q)/\Delta q, \end{aligned}$$

где  $R_{BS}^H$  — магнитное сопротивление ветви в линейной модели системы после перемещения выделенного объема на  $\Delta q$ .

с основанием  $\Delta i_{B_s}$  и высотой  $\Phi_{B_s}$ , заключенного между характеристиками намагничивания ветви линейной модели ( $a$  и  $b$ ) в положениях  $q$  и  $q + \Delta q$ . Эта площадь заштрихована на рисунке горизонтальными линиями.

Сравним найденное по формуле (3.4) приращение магнитной энергии ветви  $\Delta W_{B_s}$  с приращением магнитной энергии ветви при перемещении из положения  $q$  в положение  $q + \Delta q$ , найденным с учетом магнитной нелинейности,

$$\begin{aligned} \Delta W_{B_s \text{ нл}} &= W_{B_s \text{ нл}}^H - W_{B_s \text{ нл}} = \int_0^{\Phi_{B_s}} i_{B_s \sim}^H d\Phi_{B_s \sim} - \int_0^{\Phi_{B_s}} i_{B_s \sim} d\Phi_{B_s \sim} = \\ &= \int_0^{\Phi_{B_s}} \Delta i_{B_s \sim}^H d\Phi_{B_s \sim} = \int_0^{\Phi_{B_s}} \Delta R_{B_s \sim} \Phi_{B_s \sim} d\Phi_{B_s \sim}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На рис. 3.1 приращение магнитной энергии  $\Delta W_{B_s \text{ нл}}$  равно площади, заключенной между характеристиками намагничивания ветви до и после перемещения (кривые  $c$  и  $d$ ), найденными с учетом магнитной нелинейности. Эта площадь заштрихована на рисунке более часто проведенными горизонтальными линиями.

Элементарное приращение магнитной энергии ветви с учетом нелинейности  $\Delta i_{B_s \sim}^H d\Phi_{B_s \sim} = \Delta R_{B_s \sim} \Phi_{B_s \sim} d\Phi_{B_s \sim}$  (см. рис. 3.1) всегда меньше, чем элементарное приращение магнитной энергии в линейной модели ветви  $\Delta i_{B_s \sim} d\Phi_{B_s \sim} = \Delta R_{B_s \sim} \Phi_{B_s \sim} d\Phi_{B_s \sim}$ .

В этом особенно легко убедиться на примере ветви, магнитное поле которой во всем объеме равномерно. Магнитное сопротивление такой ветви, соответствующее текущему потоку  $\Phi_{B_s \sim}$ , равно  $R_{B_s \sim} = l_{B_s} / (\mu_{B_s \sim} S_{B_s})$ , где  $l_{B_s}$  — длина ветви;  $\mu_{B_s \sim} = \mu_{B_s}(B_{B_s \sim})$  — магнитная проницаемость ветви при потоке  $\Phi_{B_s \sim}$ ;  $B_{B_s} = \Phi_{B_s \sim} / S_{B_s}$  — магнитная индукция при потоке  $\Phi_{B_s \sim}$ ;  $S_{B_s}$  — сечение ветви.

Соответственно магнитное сопротивление линейной модели ветви, определяемое при потоке  $\Phi_{B_s}$ , равно  $R_{B_s} = l_{B_s} / (\mu_{B_s} S_{B_s})$ , где  $\mu_{B_s} = \mu_{B_s}(B_{B_s})$  — магнитная проницаемость ветви при потоке  $\Phi_{B_s}$ ;  $B_{B_s} = \Phi_{B_s} / S_{B_s}$  — магнитная индукция ветви при потоке  $\Phi_{B_s}$ . Примем для упрощения, что длина ветви  $l_{B_s}$  является одновременно координатой, определяющей положение перемещаемой части, т. е.  $l_{B_s} = q$ , и найдем при перемещении  $\Delta q$  в условиях  $\Phi_{B_s \sim} = \text{const}$  изменения сопротивлений ветви и ее линейной модели. Так как  $S_{B_s} = \text{const}$ ,  $\mu_{B_s} = \text{const}$ ,  $\mu_{B_s \sim} = \mu_{B_s}(\Phi_{B_s \sim})$ , то  $\Delta R_{B_s \sim} = \frac{\partial R_{B_s \sim}}{\partial q} \Delta q = \frac{\Delta q}{\mu_{B_s \sim} S_{B_s}}$ ,  $\Delta R_{B_s} = \frac{\partial R_{B_s}}{\partial q} \Delta q = \frac{\Delta q}{\mu_{B_s} S_{B_s}}$ . Имея в виду,

что в магнитно-нелинейных средах проницаемость по мере уменьшения потока и ослабления насыщения увеличивается, можно утверждать, что магнитная проницаемость  $\mu_{B_s \sim} > \mu_{B_s}$ , так как

$\Phi_{B_s \sim} \approx \Phi_{B_s}$ . Откуда  $|\Delta R_{B_s \sim}| \approx |R_{B_s}|$  и  $|\Delta i_{B_s \sim}^{нл}| < |\Delta i_{B_s}|$ . Очевидно, в таком же соотношении находятся сами изменения энергии

$$|\Delta W_{B_s \sim}| < |\Delta W_{B_s}|. \quad (3.6)$$

А это означает, что в общем случае расчет приращения энергии ветви по формуле (3.5) с учетом магнитной нелинейности (без перехода к линейной модели) приводит к неправильному результату. К такому же выводу мы пришли ранее в 2.5, исходя из определения приращения магнитной энергии в виде суммы приращений энергии возбуждающих контуров с токами  $i_h$ .

Таким образом, сделанный в § 2.5 важный вывод о том, что правильные значения приращения магнитной энергии при перемещении выделенного объема системы и электромагнитной силы, действующей в направлении перемещения, можно получить в общем случае только после линеаризации системы (замены ее линейной моделью), распространяется на любые другие возможные способы определения электромагнитных сил по изменению магнитной энергии при перемещении.

### 3.2. Определение электромагнитных сил по изменению магнитной коэнергии при перемещении в условиях постоянства токов ветвей магнитной цепи

После замены реальных возбуждающих контуров поверхностными токами  $i_{B_s}$ , охватывающими отдельные ветви магнитной цепи, появляется возможность выразить коэнергию нелинейной системы [см. (1.53)] в виде суммы коэнергий ветвей ее магнитной цепи

$$W'_{нл} = \sum_{s=1}^Q W'_{B_s \sim}, \quad (3.7)$$

где  $W'_{B_s \sim} = \int_0^{i_{B_s}} \Phi_{B_s \sim} di_{B_s \sim}$ .

Соответственно приращение магнитной коэнергии системы  $\Delta W'$ , через которое выражается электромагнитная сила [см. (2.13)], действующая на выделенный объем системы, можно найти в виде суммы приращений коэнергий ветвей магнитной цепи при перемещении этого объема на  $\Delta q$  в условиях постоянства токов (МДС) этих ветвей ( $i_{B_s} = \text{const}$ ),

$$\Delta W' = \sum_{s=1}^Q \Delta W'_{B_s}. \quad (3.8)$$

Разумеется, приращение магнитной коэнергии ветви  $\Delta W'_{B_s}$ , так же как приращение магнитной энергии ветви, должно быть определено для линейной модели ветви, магнитные проницаемости в

элементах которой должны соответствовать потоку  $\Phi_{BS}$  (или току  $i_{BS}$ ). Приращение коэнергии ветви  $bs$  в линейной модели  $\Delta W'_{BS}$  при перемещении  $\Delta q$  зависит от приращения собственного магнитного сопротивления  $\Delta R_{BS}$  (или приращения собственной магнитной проводимости  $\Delta \Lambda_{BS}$  ветви) и приращения потока ветви  $\Delta \Phi_{BS} = \Delta \Lambda_{BS} i_{BS}$ , которое происходит при поддержании МДС ветви постоянной,  $i_{BS} = \text{const}$ . Определенные потока ветви  $\Phi_{BS} + \Delta \Phi_{BS} = \Phi_{BS}^H$  для нового положения  $q + \Delta q = q^H$  с помощью схемы линейной модели ветви показано на рис. 3.2, в.

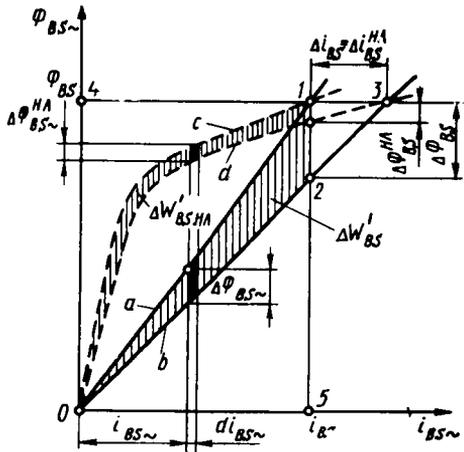


Рис. 3.3. Определение приращения магнитной коэнергии  $s$ -й ветви линейной модели нелинейной системы

Характеристики намагничивания этой ветви с учетом магнитной нелинейности  $\Phi_{BS\sim} = \Lambda_{BS\sim} \times i_{BS\sim} = \Phi_{BS}(i_{BS\sim})$  и  $\Phi_{BS\sim}^H = \Phi_{BS\sim} + \Delta \Phi_{BS\sim}^H = \Lambda_{BS\sim}^H i_{BS\sim}^H$  в положениях  $q$  и  $q + \Delta q$  показаны на рис. 3.3 пунктирными линиями (здесь  $\Lambda_{BS\sim} = \Lambda_{BS}(q, i_{BS\sim}) = 1/R_{BS\sim}$  и  $\Lambda_{BS\sim}^H = \Lambda_{BS}(q + \Delta q, i) = 1/R_{BS\sim}^H$  — магнитные проводимости ветви в положениях  $q$  и  $q + \Delta q$  с учетом магнитной нелинейности). Кроме того, на рис. 3.3 сплошными линиями изображены характеристики линейной модели ветви  $\Phi_{BS\sim} = \Lambda_{BS} i_{BS\sim}$  и  $\Phi_{BS\sim}^H = \Phi_{BS\sim} + \Delta \Phi_{BS\sim} = (\Lambda_{BS} + \Delta \Lambda_{BS}) i_{BS\sim} = \Lambda_{BS}^H i_{BS\sim}$  в положениях  $q$  и  $q + \Delta q$ , проведенные из начала координат через точки  $\Phi_{BS}, i_{BS}$  и  $\Phi_{BS}, (i_{BS} + \Delta i_{BS})$ . При этом  $\Delta i_{BS} = \Delta R_{BS} \Phi_{BS}$  следует понимать как приращение магнитного напряжения ветви или ее модели в условиях  $\Phi_{BS} = \text{const}$ , когда магнитные проницаемости в отдельных их элементах соответствуют потоку  $\Phi_{BS}$ .

Магнитная проводимость линейной модели ветви  $\Lambda_{BS} = 1/R_{BS} = \Phi_{BS}/i_{BS}$  и ее приращение  $\Delta \Lambda_{BS} = \frac{\partial \Lambda_{BS}}{\partial q} \Delta q = - \left( \frac{\partial R_{BS}}{\partial q} \right) \frac{\Delta q}{R_{BS}^2} = - \frac{\Delta R_{BS}}{R_{BS}^2}$  также должны определяться при магнитных проницаемостях, соответствующих потоку  $\Phi_{BS}$ .

Учитывая, что в линейной модели ветви

$$\Delta \Phi_{BS\sim} = \frac{\partial \Phi_{BS\sim}}{\partial q} \Delta q = i_{BS\sim} \frac{\partial \Lambda_{BS}}{\partial q} \Delta q = i_{BS\sim} \Delta \Lambda_{BS},$$

с помощью (3.7) получим следующее выражение для приращения коэнергии ветви при перемещении:

$$\Delta W'_{\text{вс}} = (\partial W'_{\text{вс}} / \partial q) \Delta q = \int_0^{i_{\text{вс}}} i_{\text{вс}} \sim \Delta \Lambda_{\text{вс}} di_{\text{вс}} \sim i_{\text{вс}} \Delta \Phi_{\text{вс}} / 2, \quad (3.9)$$

где  $\Delta \Phi_{\text{вс}} = \Delta \Lambda_{\text{вс}} i_{\text{вс}}$  — приращение потока в линейной модели ветви при перемещении в условиях  $i_{\text{вс}} = \text{const}$ .

Приращение магнитной коэнергии ветви при перемещении  $\Delta W'_{\text{вс}}$  (рис. 3.3) равно площади треугольника  $O12$  с основанием  $\Delta \Phi_{\text{вс}}$  и высотой  $i_{\text{вс}}$ , заключенного между характеристиками намагничивания ветви линейной модели в положениях  $q$  (кривая  $a$ ) и  $q + \Delta q$  (кривая  $b$ ). Эта площадь заштрихована на рисунке вертикальными линиями.

В § 2.3 было доказано, что приращение магнитной энергии, приходящей на долю контура с током, равно взятому со знаком «—» приращению магнитной коэнергии того же контура. Распространяя это доказательство на ветви эквивалентной магнитной цепи, можно выявить, что приращение магнитной энергии ветви  $\Delta W_{\text{вс}}$  при перемещении  $\Delta q \rightarrow 0$  в условиях  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$  всегда равно взятому со знаком «—» приращению магнитной коэнергии ветви  $\Delta W'_{\text{вс}}$  при том же перемещении в условиях  $i_{\text{вс}} = \text{const}$ . В полной мере это относится и к линейной модели ветви. Поэтому при  $\Delta q \rightarrow 0$  всегда существует тождество

$$\Delta W_{\text{вс}} = -\Delta W'_{\text{вс}} \quad (\Phi_{\text{вс}} = \text{const}) (i_{\text{вс}} = \text{const}) \quad (3.10)$$

Графическим подтверждением этого тождества является совпадение (при  $\Delta q \rightarrow 0$ ,  $\Delta i_{\text{вс}} \rightarrow 0$  и  $\Delta \Phi_{\text{вс}} \rightarrow 0$ ) площадей треугольников, соответствующих в линейной модели приращению энергии  $\Delta W_{\text{вс}}$  на рис. 3.1 и приращению коэнергии  $\Delta W'_{\text{вс}}$  на рис. 3.3.

Тождество (3.10) разумеется справедливо и для изменений энергии и коэнергии, найденных с учетом нелинейности:

$$\Delta W_{\text{вснл}} = -\Delta W'_{\text{вснл}} = \int_0^{i_{\text{вс}}} \Delta \Phi_{\text{вс}}^{\text{нл}} di_{\text{вс}} \quad (\Phi_{\text{вс}} = \text{const}). \quad (3.11)$$

Так как в общем случае приращение энергии ветви с учетом магнитной нелинейности меньше приращения энергии в ее линейной модели  $|\Delta W_{\text{вснл}}| < |\Delta W_{\text{вс}}|$ , то приращение коэнергии ветви с учетом магнитной нелинейности всегда меньше приращения коэнергии в ее линейной модели  $|\Delta W'_{\text{вснл}}| < |\Delta W'_{\text{вс}}|$ . Именно в таком соотношении находятся площади фигур, соответствующих  $\Delta W'_{\text{вснл}}$  и  $\Delta W'_{\text{вс}}$  на рис. 3.3.

Таким образом, правильное значение приращения коэнергии ветви при перемещении можно получить в общем случае только с

помощью ее линейной модели. Для определения результирующей силы  $D_q$ , действующей на перемещаемую часть системы в направлении перемещения  $\Delta q$ , нужно обратиться к схеме замещения магнитной цепи системы, определить приращение энергии или коэнергии, которые произойдут в отдельных ее ветвях соответственно при  $\Phi_{B_s} = \text{const}$  или  $i_{B_s} = \text{const}$ , и по сумме этих приращений, отнесенной к перемещению  $\Delta q$ , определить по (2.3) или (2.13) искомую силу  $D_q$ .

Результаты расчета приращений энергии и коэнергии отдельных ветвей зависит от того, как влияют текущий поток  $\Phi_{B_s \sim}$  и положение  $q$  выделенного объема системы на магнитное сопротивление данной ветви  $R_{B_s \sim} = R_{B_s}(q, \Phi_{B_s \sim})$ .

Кроме указанного общего случая можно выделить частные случаи проявления влияния потока ветви и положения выделенного объема на магнитное сопротивление ветви:

1. Сопротивление ветви не зависит ни от потока ветви, ни от положения перемещаемой части — для ветви, эквивалентирующей магнитно-линейную зону, размеры которой при изменении положения перемещаемой части сохраняются:

$$R_{B_s \sim} = R_{B_s} = \text{const.}$$

2. Сопротивление ветви зависит от потока ветви, но не зависит от положения перемещаемой части — для ветви, эквивалентирующей магнитно-нелинейную зону, размеры которой при изменении положения перемещаемой части сохраняются:

$$R_{B_s \sim} = R_{B_s}(\Phi_{B_s \sim}).$$

3. Сопротивление ветви зависит от положения перемещаемой части, но не зависит от потока ветви — для ветви, эквивалентирующей магнитно-линейную зону, размеры которой зависят от положения перемещаемой части:

$$R_{B_s \sim} = R_{B_s}(q) = R_{B_s}.$$

Рассмотрим особенности расчета изменения энергии или коэнергии ветви при перемещении и обобщенной силы ветви в этих частных случаях.

Для ветви, сопротивление которой постоянно (случай 1) или зависит только от магнитного потока (случай 2), частная производная  $\partial R_{B_s} / \partial q$ , взятая при условии  $\Phi_{B_s} = \text{const}$ , и приращение магнитного сопротивления ветви  $\Delta R_{B_s}$  равны нулю. Следовательно, и приращение энергии  $\Delta W_{B_s}$  здесь также равно нулю (см. § 3.4) Причем при замене ветви во 2-м случае ее линейной моделью производная  $\partial R_{B_s} / \partial q$  и изменение энергии  $\Delta W_{B_s}$  также будут равны нулю.

Для ветви, эквивалентирующей магнитно-линейную зону и обладающей линейными характеристиками намагничивания (случай 3), магнитное сопротивление ветви зависит только от положения

$q$  перемещаемой части и, следовательно, частная производная  $\frac{\partial R_{B_2} \sim}{\partial q}$  не зависит от текущего потока  $\Phi_{B_2} \sim$  и совпадает с производной  $\frac{\partial R_{B_2}}{\partial q}$ , т.е.  $\frac{\partial R_{B_2} \sim}{\partial q} = \frac{\partial R_{B_2}}{\partial q} = \text{const}$ . В этом случае при определении  $\Delta W_{B_2}$  нет нужды в переходе к линейной модели ветви, поскольку ветвь и так обладает естественными линейными характеристиками намагничивания.

**Пример 3.1.** Рассмотрим ту же нелинейную магнитную систему (см. рис. 2.2), что и в примерах 2.1, 2.2. Заданными считаются те же величины. Но сила, действующая на верхнее полукольцо  $1B$ , определяется после перехода к линейной модели системы по изменению магнитной энергии или ко-энергии ветвей эквивалентной магнитной цепи при перемещении полукольца. **▲** Чтобы определить силу  $F$  аналитическим способом, представим изменение энергии линейной модели системы при перемещении верхнего полукольца в условиях  $\Phi_{B_2} = \text{const}$  в виде суммы изменений энергии в тех ветвях магнитной цепи, размеры которых подвергаются изменению. В данном случае к числу таких ветвей относятся два зазора между верхними и нижними полукольцами. Поскольку эти зазоры с сечением  $S$  и длиной  $\delta$  совершенно одинаковы, их можно объединить в одну ветвь с тем же сечением  $S$  и с удвоенной длиной  $l = 2\delta$ . Энергию этой ветви при перемещении на  $\delta q = \delta\delta$  в условиях  $\Phi_{B_2} = \text{const}$  можно представить в функции длины зазора  $q = \delta$ :

$$W_{B_2} = f(\Phi_{B_2}, \delta) = \Phi_{B_2} i_{B_2} / 2 = \Phi_{B_2}^2 R_{B_2} / 2 = i_{B_2}^2 / (2R_{B_2}),$$

где  $R_{B_2} = 2\delta / (\mu_2 S)$  — магнитное сопротивление ветви, состоящей из двух последовательно включенных зазоров.

Силу  $F$  рассчитаем по (3.2), (2.3):

$$F = -\frac{\partial W}{\partial \delta} = -\Sigma \frac{\partial W_{B_2}}{\partial \delta} = -\frac{\partial W_{B_2}}{\partial \delta} = -0,5 \Phi_{B_2}^2 \frac{\partial R_{B_2}}{\partial \delta} = -2S\omega_2 = -228,9 \text{ Н},$$

где  $\omega_2 = BH_2^2 / 2 = 286\,090 \text{ Дж/м}^3$  — плотность магнитной энергии в зазоре.

Точно такой же результат для силы  $F$  получим по (3.8), (2.13), выражая ее через производную от коэнергии ветви зазоров  $W'_{B_2}$  по координате  $q = \delta$  при перемещении в условиях  $i_{B_2} = \text{const}$ :

$$F = \frac{\partial W'}{\partial \delta} = \Sigma \frac{\partial W'_{B_2}}{\partial \delta} = \frac{\partial W'_{B_2}}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{i_{B_2}^2}{2R_{B_2}} \right) = \left( \frac{\partial W_{B_2}}{\partial R_{B_2}} \right) \left( \frac{\partial R_{B_2}}{\partial \delta} \right) = -\left( \frac{i_{B_2}^2}{2R_{B_2}^2} \right) \left( \frac{2}{\mu_2 S} \right) = -2S\omega_2 = -228,9 \text{ Н}.$$

Как и следовало ожидать, сила получилась такой же как в примере 2.1, где она выражалась также аналитически по изменению энергии возбуждающих контуров при перемещении.

Для определения силы  $F$  с л е н н ы м с п о с о б о м через приближенные значения производных в формулах (2.3) и (2.13) переместим верхнее полукольцо на расстояние  $\Delta q = \Delta\delta = 0,1\delta = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ . Приращение магнитной энергии при перемещении в условиях  $\Phi_{B_2} = \text{const}$  произойдет только в ветви  $B_2$  и будет равно  $\Delta W = \Delta W_{B_2} = \Phi_{B_2}^2 \Delta i_{B_2}^2 / 2 = 1,14 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$ , где

$\Phi_{B2} = \Phi = 1,04 \cdot 10^{-3}$  Вб;  $B = B_2 = 2,6$  Тл;  $H_2 = 220\ 000$  А/м (см. табл. 2.1);  $l_2 = 2\delta = 0,001$  м;  $l_2^H = l + 2\Delta\delta = 0,0011$  м;  $i_{B2} = H_2 l_2 = 220$  А;  $i_{B2}^H = H_2 l_2^H = 242$  А;  $\Delta i_{B2} = i_{B2}^H - i_{B2} = 22$  А. Сила, выраженная через приращение энергии по (2.3):  $F^W = -\Delta W/\Delta q = -(\Sigma\Delta W_{B2})/\Delta q = -\Delta W_{B2}/\Delta q = -228,9$  Н (см. пример 2.2), совпадает с действительным значением  $F^W$ , найденным аналитически. Приращение коэнергии при перемещении в условиях  $i_{B2} = \text{const}$  произойдет также только в ветви  $B2$  и будет равно:  $\Delta W' = \Delta W'_{B2} = i_{B2}\Delta\Phi_{B2}/2 = -1,04 \cdot 10^{-2}$  Дж, где  $\Delta\Phi_{B2} = \Phi_{B2}^H - \Phi_{B2} = -9,46 \cdot 10^{-5}$  Вб;  $\Phi_{B2}^H = B_{B2}^H S = 9,454 \cdot 10^{-4}$  Вб;  $S = 4 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $B_{B2}^H = \mu_2 H_{B2}^H = 2,36$  Тл;  $\mu_2 = 1,18 \cdot 10^{-5}$  Гн/м;  $H_{B2}^H = i_{B2}^H/l_2^H = 200\ 000$  А/м.

Сила, выраженная через приращение коэнергии по (2.13),  $(F^W)' = \Delta W'/\Delta q = \Sigma\Delta W'_{B2}/\Delta q = \Delta W'_{B2}/\Delta q = -208,08$  Н.

Погрешность в вычислении силы через коэнергию ветви составляет  $\epsilon_{1B} = |F^W| - |(F^W)'|/|F^W| = 0,0909$ , что совпадает с ожидаемым значением погрешности по (2.20):

$$\epsilon_{1B} = |\Delta\Phi_{B2}/\Phi_{B2}| = 0,0909.$$

В следующем примере показано, к каким ошибкам в определении ЭМС приводит расчет приращений энергии или коэнергии магнитно-нелинейной ветви по (3.5), (3.11) без перехода к линейной модели.

**Пример 3.2.** Рассмотрим ту же нелинейную магнитную систему, что и в примерах 2.1, 2.2 и 3.1 (см. рис. 2.2). Заданными считаются те же величины. Но сила, действующая на верхнее полукольцо  $1B$ , определяется по (3.5), (3.11), (2.3), (2.13) без перехода к линейной модели с помощью нелинейных характеристик намагничивания ветвей эквивалентной магнитной цепи, размеры которых подвергаются изменению. Обращаясь к табл. 2.1, рассчитаем характеристику намагничивания ветви зазоров в исходном положении до перемещения  $i_{B2} \sim H_{B2} \sim l_2 = f(\Phi_{B2})$ , где  $l_2 = 2\delta = 0,001$  м — длина линий поля в зазорах до перемещения полукольца; а также характеристику намагничивания ветви зазоров после перемещения верхнего полукольца в новое положение на то же расстояние, что и в примере 3.1,  $\Delta q = \Delta\delta = 0,510 \cdot 10^{-4}$  м;  $i_{B2}^H \sim H_{B2}^H \cdot l_2^H = f(\Phi_{B2}^H)$ , где  $l_2^H = 2\delta^H = 0,0011$  м;  $\delta^H = \delta + \Delta\delta = 0,55 \cdot 10^{-3}$  м. Эти нелинейные характеристики намагничивания до и после перемещения представлены графически на рис. 3.4 (кривые  $c$  и  $d$ ) и приведены в табл. 3.1. В диапазоне индукций 2,4—2,65 Тл (между точками  $\alpha$  и  $\beta$ , см. рис. 2.3, б) характе-

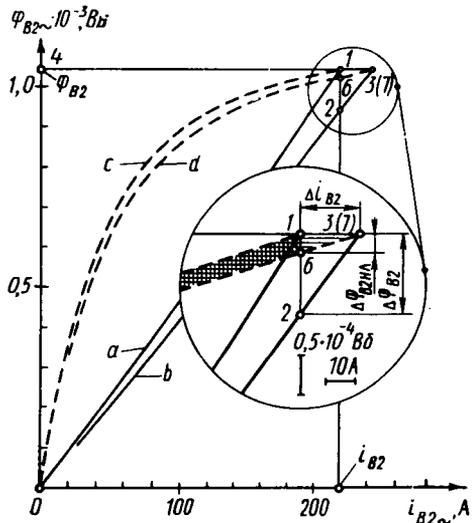


Рис. 3.4. Определение приращений энергии и коэнергии ветви

Таблица 3.1

$\Phi_{B2\sim} \cdot 10^4, \text{ Вб}$	$i_{B2\sim}, \text{ А}$	$i_{B2\sim}^H, \text{ А}$	$W_{B2 \text{ нл}} \cdot 10^4, \text{ Дж}$	$W_{B2 \text{ нл}}^H \cdot 10^4, \text{ Дж}$
0	0	0	0	0
1,6	8,69	9,56	6,91	7,60
3,2	18,24	20,07	28,3	31,1
4,4	26,69	29,36	55,1	60,7
5,2	33,38	36,72	79,1	87,0
6,0	41,39	45,53	109	119
6,8	51,40	56,54	146	160
7,6	64,61	71,07	192	211
8,4	83,38	91,71	251	276
9,2	113	124,3	328	361
10,268	200,0	220,0	488	537
10,400	220,0	242,0	516	568

ристки намагничивания ветви представим аппроксимирующими функциями

$$i_{B2\sim} = H_{B2\sim} I_2 = I_2 (\text{tg} (a_2 \Phi_{B2\sim})) / m_{H2} = f(\Phi_{B2\sim});$$

$$i_{B2\sim}^H = H_{B2\sim} I_2^H = I_2^H (\text{tg} (a_2 \Phi_{B2\sim})) / m_{H2} = f^H(\Phi_{B2\sim}).$$

С помощью функции для тока  $i_{B2\sim}^H = f^H(\Phi_{B2\sim})$  найдем новое значение этого тока при перемещении в условия  $\Phi_{B2\sim} = \Phi_{B2} = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ Вб} = \text{const}$ ;  $i_{B2\sim}^H = 242 \text{ А}$  и приращение тока ветви  $\Delta i_{B2} = i_{B2}^H - i_{B2} = 242 - 220 = 22 \text{ А}$ . При перемещении эквипотенциальной поверхности, ограничивающей ветвь, как в данном случае, это приращение совпадает с приращением в линейной модели ветви  $\Delta i_{B2}$  (см. пример 3.1).

Новое значение потока ветви после перемещения при токе  $i_{B2} = 220,0 \text{ А}$  найдем как корень  $x = \Phi_{B2\text{нл}}^H$  нелинейного уравнения

$$f(x) = f(\Phi_{B2\sim}^H) = -I_2^H (\text{tg} (a_2 \Phi_{B2\sim}^H)) / m_{H2} + i_{B2} = 0.$$

Для определения корня используем программу, составленную по аналогии с программой, приведенной в П4;  $x = \Phi_{B2\sim}^H = 1,0268 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$ . Приращение магнитного потока  $\Delta \Phi_{B2\text{нл}} = \Phi_{B2\sim}^H - \Phi_{B2\sim} = -1,31 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}$ . Магнитную энергию ветви до перемещения вычислим с помощью характеристики намагничивания ветви  $i_{B2\sim} = f(\Phi_{B2\sim})$  по табл. 3.1 путем численного интегрирования по формуле трапеций (см. П5). Результаты расчета энергии ветви до перемещения  $W_{B2\text{нл}} = \int_0^{\Phi_{B2\sim}} i_{B2\sim} d\Phi_{B2\sim} = 5,16 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$  представлены в табл. 2.3. Там же даны результаты расчета по П5 магнитной энергии ветви после перемещения при  $\Phi_{B2\sim} = \text{const}$ :

$$W_{B2\text{нл}}^H = \int_0^{\Phi_{B2\sim}^H} i_{B2\sim}^H d\Phi_{B2\sim} = 5,68 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

Приращение магнитной энергии системы при перемещении, равное сумме приращений магнитной энергии ветвей, находим по (3.5):  $\Delta W_{\text{нл}} = \Sigma \Delta W_{\text{вснл}} = W_{\text{в2нл}}^{\text{н}} - W_{\text{в2нл}} = 5,16 \cdot 10^{-3}$  Дж.

Выражая ЭМС, действующую на верхнее полукольцо, через  $\Delta W_{\text{нл}}$  по (2.3), получим

$$F_{\text{нл}}^W = -\Delta W_{\text{нл}} / \Delta q = -103,3 \text{ Н.}$$

Точно такой ошибочный результат получен для этой силы в примере 2.3, где сила выражалась через сумму приращений энергий возбуждающих контуров. Такое совпадение ошибочных результатов при расчете через  $\Sigma \Delta W_{\text{в}}^{\text{н}}$  и  $\Sigma \Delta W_{\text{вс}}$  характерно для последовательной цепи при  $\Phi_{\text{в}} = \text{const}$  или  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$ .

Кознергия ветви до перемещения по (3.11)

$$W'_{\text{в2нл}} = i_{\text{в2}} \Phi_{\text{в2}} - W_{\text{в2нл}} = 0,177 \text{ Дж};$$

кознергия ветви после перемещения  $(W'_{\text{в2нл}})^{\text{н}} = i_{\text{в2}} \Phi_{\text{в2нл}}^{\text{н}} - W_{\text{в2нл}}^{\text{н}} = 0,172 \text{ Дж};$

приращение кознергии системы при перемещении в условиях  $i_{\text{вс}} = \text{const}$ , равное сумме приращений кознергии ветвей,

$$\Delta W'_{\text{нл}} = \Sigma \Delta W'_{\text{вснл}} = \Delta W'_{\text{в2нл}} = (W'_{\text{в2нл}})^{\text{н}} - W_{\text{в2нл}} = -5,02 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Выражая ЭМС, действующую на верхнее полукольцо, через  $\Delta W'_{\text{нл}}$  по (2.13), получим

$$(F_{\text{нл}}^W)' = \Delta W'_{\text{нл}} / \Delta q = -100,4 \text{ Н.}$$

Из-за погрешности первого рода, которая в данном случае равна  $|\Delta \Phi_{\text{в2нл}} / \Phi_{\text{в2}}| = 0,029$ , сила  $(F_{\text{нл}}^W)'$  в 1,029 раз меньше силы  $F_{\text{нл}}^W$ .

### 3.3. О тождественности приращений магнитной энергии, найденных через приращения энергии возбуждающих контуров и ветвей магнитной цепи

Предположим, что нам известна схема магнитной цепи, эквивалентной заданной нелинейной магнитной системе (например, схема по рис. 1.15), и требуется найти обобщенную электромагнитную силу  $D_q$ , которая действует на некоторую часть системы в направлении изменения координаты  $q$ , определяющей положение этой части. Кроме порядка соединения ветвей в схеме, включающей  $Q$  ветвей, известно также расположение возбуждающих электрических контуров и их общее количество  $N$ . Заданными считаются:

а) координата  $q$ , определяющая положение перемещаемой части системы;

б) токи ( $i_{\text{в}}$  в электрических контурах, возбуждающих систему (или потоки  $\Phi_{\text{в}}$ , сцепленные с этими контурами);

в) характеристики намагничивания  $i_{\text{вс}} \sim u_{\text{вс}} = R_{\text{вс}} \Phi_{\text{вс}} \sim$  и зависимости магнитных сопротивлений  $R_{\text{вс}} = R_{\text{вс}}(q, \Phi_{\text{вс}})$  всех ветвей цепи.

Требуется доказать тождественность приращений магнитной энергии, найденных через приращеня энергии возбуждающих контуров и ветвей магнитной цепи.

Приступая к доказательству, начнем с определения величин, характеризующих магнитное состояние нелинейной магнитной цепи в положении, определяемой координатой  $q$ . К этим величинам относятся: потоки  $\Phi_{\text{вс}}$  и магнитные напряжения или МДС  $u_{\text{вс}} = i_{\text{вс}}$  всех ветвей цепи, а также (в зависимости от того, что было задано) потоки  $\Phi_{\text{к}}$ , сцепленные с электрическими контурами (или токи  $i_{\text{к}}$  в этих контурах).

Эти величины определяют из системы уравнений, составленной на основе анализа графа магнитной цепи (см. рис. 1.15) таким же образом, как это было сделано в § 1.5.

Следующий этап доказательства — это линеаризация магнитной цепи или иными словами замена всех ветвей цепи их линейными моделями, воспроизводящими магнитное поле в зоне ветви при потоках  $\Phi_{\text{вс}}$  (см. § 3.1). Магнитное сопротивление линейной модели ветви  $R_{\text{вс}}$  при положении перемещаемой части, определяемом координатой  $q$ , принимается равным магнитному сопротивлению этой ветви в нелинейной цепи  $R_{\text{вс}}(q, \Phi_{\text{вс}})$  при потоке  $\Phi_{\text{вс}}$  и том же положении перемещаемой части, т. е.  $R_{\text{вс}} = R_{\text{вс}}(q, \Phi_{\text{вс}}) = u_{\text{вс}}/\Phi_{\text{вс}}$ .

Изменение магнитного сопротивления линейной модели ветви при перемещении  $\Delta q$ :

$$\Delta R_{\text{вс}} = R_{\text{вс}}(q + \Delta q, \Phi_{\text{вс}}) - R_{\text{вс}}(q, \Phi_{\text{вс}}) = \frac{\partial R_{\text{вс}}}{\partial q} \Delta q$$

находится при условии сохранения магнитных проницаемостей во всех элементах зоны поля ветви постоянными и равными значениям магнитных проницаемостей в тех же точках нелинейной системы при индукциях  $B$ , соответствующих потоку  $\Phi_{\text{вс}}$ , т. е.  $\mu(x, y, z) = \mu(\bar{B}, x, y, z) = \text{const}$ .

Линеаризованная характеристика намагничивания ветви  $\text{вс}$  при положении перемещаемой части, определяемом координатой  $q$ ,

$$i_{\text{вс}\sim} = R_{\text{вс}} \Phi_{\text{вс}\sim},$$

показана на рис. 3,5, б в виде пунктирной прямой 1, которая в точке  $O'$  ( $i_{\text{вс}}$ ,  $\Phi_{\text{вс}}$ ) пересекается с естественной нелинейной характеристикой намагничивания ветви (сплошная линия).

Соответственно линеаризованная характеристика намагничивания этой ветви при положении перемещаемой части, определяемом координатой  $q + \Delta q$ ,

$$i_{\text{вс}\sim} = (R_{\text{вс}} + \Delta R_{\text{вс}}) \Phi_{\text{вс}\sim}$$

показана на рис. 3.5, б в виде пунктирной прямой 2, которая проходит через точку  $A$  ( $i_{\text{вс}} + \Delta i_{\text{вс}}$ ;  $\Phi_{\text{вс}}$ ) и точку  $B$  ( $i_{\text{вс}}$ ,  $\Phi_{\text{вс}} + \Delta \Phi_{\text{вс}}$ ), где  $\Delta i_{\text{вс}} = \Delta R_{\text{вс}} \Phi_{\text{вс}}$  — приращение МДС ветви при перемещении

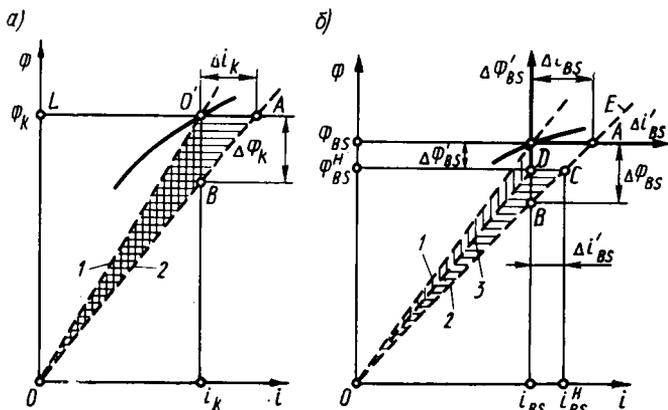


Рис. 3.5. Характеристики намагничивания возбуждающего контура (а) и ветви эквивалентной магнитной цепи (б)

в условиях  $\Phi_{BS} = \text{const}$ ;  $\Delta\Phi_{BS} = \Delta\Lambda_{BS}i_{BS}$  — приращение потока ветви при перемещении в условиях  $i_{BS} = \text{const}$ .

После этого можно приступить к определению приращений магнитной энергии  $\Delta W_h$  или коэнергии  $\Delta W'_k$  электрических контуров в линейной модели при перемещении  $\Delta q$  соответственно в условиях  $\Phi_h = \text{const}$  или  $i_h = \text{const}$ , используя формулы  $\Delta W_h = \Phi_h \Delta i_h / 2$  и  $\Delta W'_k = i_h \Delta \Phi_k / 2$  [см. (2.7), (2.15)]. Для нахождения  $\Delta W_h$  или  $\Delta W'_k$  требуется найти приращения  $\Delta i_h$  или  $\Delta \Phi_k$  для линейной модели при перемещении  $\Delta q$  соответственно в условиях  $\Phi_h = \text{const}$  или  $i_h = \text{const}$ .

С этой целью по аналогии с уравнениями магнитной цепи для исходного положения  $q$  (см. П2) нужно составить уравнения магнитной цепи для нового положения  $q + \Delta q$ , ввести в число этих уравнений линеаризованные характеристики намагничивания ветвей при новых магнитных сопротивлениях  $R_{BS} + \Delta R_{BS}$  и решить эти уравнения при  $\Phi_h = \text{const}$  или  $i_h = \text{const}$ , определив новые значения токов  $i_k^H$  или потоков  $\Phi_k^H$  контуров. После этого приращения токов или потоков можно найти в виде разности величин в новом и исходном положениях:  $\Delta i_h = i_k^H - i_k$  или  $\Delta \Phi_k = \Phi_k^H - \Phi_k$ .

Такой путь определения  $\Delta i_h$  и  $\Delta \Phi_k$  в принципе вполне корректен. Однако он не позволяет определить  $\Delta i_h$  или  $\Delta \Phi_k$  с приемлемой точностью. Объясняется это тем, что при  $\Delta q \rightarrow 0$  и  $\Delta R_{BS} \ll \ll R_{BS}$  приращения  $\Delta i_h$  и  $\Delta \Phi_k$  приходится определять как разность больших величин ( $i_k^H \approx i_k \gg \Delta i$  или  $\Phi_k^H \approx \Phi_k \gg \Delta \Phi_k$ ), точность определения которых снижается по мере усложнения магнитной цепи.

Поэтому желательно построить алгоритм расчета таким образом, чтобы приращения  $\Delta i_h$  или  $\Delta \Phi_k$  вычислялись непосредственно в результате решения уравнений, составленных для прираще-

ний, а не в виде разности больших величин. Эти уравнения должны связывать приращения токов и потоков электрических контуров, возбуждающих магнитную цепь,

$$\Delta i_k = i_k^H - i_k; \quad \Delta \Phi_k = \Phi_k^H - \Phi_k,$$

и приращения магнитных напряжений (или МДС) и потоков ветвей цепи

$$\Delta u'_{B_s} = \Delta i'_{B_s} = i_{B_s}^H - i_{B_s}; \quad \Delta \Phi'_{B_s} = \Phi_{B_s}^H - \Phi_{B_s}.$$

Чтобы получить такие уравнения, следует записать в матричной форме первые и вторые уравнения Кирхгофа и уравнения потоков электрических контуров для рассматриваемой магнитной цепи в исходном  $q$  и новом  $q + \Delta q$  положениях.

Для исходного положения  $q$  справедливы уравнения (см. приложения). Уравнения для нового положения  $q + \Delta q$  могут быть записаны по аналогии, если иметь в виду, что матрицы  $\|A\|$ ,  $\|B\|$ ,  $\|M\|$ ,  $\|P\|$  для нового положения не отличаются от соответствующих матриц в исходном положении:

$$\|A\| \bar{\Phi}_B^H = 0; \quad \|A\| \bar{\Phi}_B = 0; \quad (3.12)$$

$$\|M\| \bar{i}^H = \|B\| \bar{i}_B^H; \quad \|M\| \bar{i} = \|B\| \bar{i}_B; \quad (3.13)$$

$$\bar{\Phi}^H = \|P\| \bar{\Phi}_B^H; \quad \bar{\Phi} = \|P\| \bar{\Phi}_B, \quad (3.14)$$

где  $\bar{\Phi}_B^H = \|\Phi_{B_1}^H, \dots, \Phi_{B_N}^H\|^T$  — вектор потоков ветвей в новом положении;  $\bar{i}^H = \|i_1^H, \dots, i_N^H\|^T$  — вектор токов электрических контуров в новом положении;  $\bar{i}_B^H = \|i_{B_1}^H, \dots, i_{B_Q}^H\|^T$  — вектор МДС ветвей в новом положении;  $\bar{\Phi}^H = \|\Phi_1^H, \dots, \Phi_N^H\|^T$  — вектор потоков, сцепленных с электрическими контурами в новом положении.

Вычитая второе уравнение из первого в (3.12) — (3.14), получим в матричной форме:

первое уравнение Кирхгофа для приращений потоков ветвей

$$\|A\| \Delta \bar{\Phi}'_B = 0, \quad (3.12a)$$

где  $\Delta \bar{\Phi}'_B = \bar{\Phi}_B^H - \bar{\Phi}_B = \|\Delta \Phi'_{B_1}, \dots, \Delta \Phi'_{B_N}\|^T$  — вектор приращений потоков ветвей;

второе уравнение Кирхгофа, связывающее приращение токов электрических контуров и приращения МДС ветвей:

$$\|M\| \Delta \bar{i} = \|B\| \Delta \bar{i}'_B, \quad (3.13a)$$

где  $\Delta \bar{i} = \bar{i}^H - \bar{i} = \|\Delta i_1, \dots, \Delta i_N\|^T$  — вектор приращений токов электрических контуров;  $\Delta \bar{i}'_B = \bar{i}_{B_s}^H - \bar{i}_B = \|\Delta i'_{B_1}, \dots, \Delta i'_{B_Q}\|^T$  — вектор приращений МДС ветвей цепи;

уравнение, связывающее приращения потоков электрических контуров и ветвей;

$$\Delta\Phi = \|P\| \Delta\bar{\Phi}'_{\text{в}}, \quad (3.14a)$$

где  $\Delta\bar{\Phi} = \bar{\Phi}^{\text{н}} - \bar{\Phi} = \|\Delta\Phi_1, \dots, \Delta\Phi_N\|^{\text{T}}$  — вектор приращений потоков, сцепленных с электрическими контурами.

К этим уравнениям следует добавить уравнения, связывающие между собой приращения МДС  $\Delta i'_{\text{вс}}$  и потока  $\Delta\Phi'_{\text{вс}}$  в линейной модели ветви.

Для составления последних уравнений нужно воспользоваться характеристиками намагничивания линейной модели ветви в положении  $q$  (прямая 1) и в положении  $q + \Delta q$  (прямая 2) и рассмотреть треугольник  $O'AB$ , катетами которого являются приращение МДС ветви  $\Delta i_{\text{вс}} = \Delta R_{\text{вс}} \Phi_{\text{вс}}$  при  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$  и приращение потока ветви  $\Delta\Phi_{\text{вс}} = \Delta \Lambda_{\text{вс}} i_{\text{вс}}$  при  $i_{\text{вс}} = \text{const}$ .

Заметив, что при  $\Delta q \rightarrow 0$  и  $\Delta R_{\text{вс}} \ll R_{\text{вс}}$  приращение магнитной проводимости ветви

$$\Delta \Lambda_{\text{вс}} = \frac{\partial \Lambda_{\text{вс}}}{\partial q} \Delta q = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{R_{\text{вс}}} \right) \Delta q = - \frac{\Delta R_{\text{вс}}}{R_{\text{вс}}^2},$$

легко убедиться, что приращения  $\Delta i_{\text{вс}}$  и  $\Delta\Phi_{\text{вс}}$  и, следовательно, катеты треугольника  $O'AB$  находятся в соотношении

$$\Delta i_{\text{вс}} / \Delta\Phi_{\text{вс}} = -i_{\text{вс}} / \Phi_{\text{вс}} = -R_{\text{вс}}. \quad (3.15)$$

Связь между новыми значениями МДС ( $i_{\text{вс}}^{\text{н}} = i_{\text{вс}} + \Delta i'_{\text{вс}}$ ) и потока ( $\Phi_{\text{вс}}^{\text{н}} = \Phi_{\text{вс}} + \Delta\Phi'_{\text{вс}}$ ) ветвей определяются характеристикой намагничивания в положении  $q + \Delta q$  (прямая 2), которая одновременно служит гипотенузой треугольника  $O'AB$ .

В системе координат с началом отсчета в точке  $O$  уравнение связи между  $i_{\text{вс}}^{\text{н}}$  и  $\Phi_{\text{вс}}^{\text{н}}$  имеет вид

$$i_{\text{вс}} + \Delta i'_{\text{вс}} = (R_{\text{вс}} + \Delta R_{\text{вс}}) (\Phi_{\text{вс}} + \Delta\Phi'_{\text{вс}}).$$

Имея в виду, что в исходном положении  $i_{\text{вс}} = R_{\text{вс}} \Phi_{\text{вс}}$ , и учитывая, что член  $\Delta R_{\text{вс}} \Delta\Phi'_{\text{вс}}$  имеет второй порядок малости по сравнению с членами  $\Phi_{\text{вс}} \Delta R_{\text{вс}}$  или  $R_{\text{вс}} \Delta\Phi'_{\text{вс}}$ , можно (при  $\Delta q \rightarrow 0$ ) отбросить член  $\Delta R_{\text{вс}} \Delta\Phi'_{\text{вс}}$  и получить следующее уравнение связи между приращениями МДС  $\Delta i'_{\text{вс}}$  и потока  $\Delta\Phi'_{\text{вс}}$  в линейной модели ветви

$$\Delta i'_{\text{вс}} = \Delta i_{\text{вс}} + R_{\text{вс}} \Delta\Phi'_{\text{вс}}, \quad (3.16)$$

где  $R_{\text{вс}} = -\Delta i_{\text{вс}} / \Delta\Phi_{\text{вс}}$ .

Нетрудно выявить, что это уравнение воспроизводит характеристику намагничивания ветви в положении  $q + \Delta q$  (прямая 2), представленную в системе координат для приращений МДС и потока ветви  $\Delta i'_{\text{вс}}$  и  $\Delta\Phi'_{\text{вс}}$ . Начало отсчета этой системы координат находится в точке  $O'$ , имеющей координаты  $i_{\text{вс}}$ ,  $\Phi_{\text{вс}}$  относительно

начала отсчета в точке  $O$ . Оси этой системы координат проведены на рис. 3.5, б более толстыми линиями. По оси абсцисс этой системы координат откладываются приращения МДС  $\Delta i'_{\text{вс}}$ ; по оси ординат — приращения потока  $\Delta \Phi'_{\text{вс}}$ .

Характеристика намагничивания ветви для положения  $q + \Delta q$  (прямая 2) пересекает ось системы координат для приращений МДС и потока ветви в точке  $A$ , имеющей координаты  $\Delta i'_{\text{вс}} = \Delta i_{\text{вс}}$ ;  $\Delta \Phi'_{\text{вс}} = 0$ , и в точке  $B$ , имеющей координаты  $\Delta \Phi'_{\text{вс}} = \Delta \Phi_{\text{вс}}$ ;  $\Delta i'_{\text{вс}} = 0$ .

В матричной форме система уравнений связи (3.16) между приращениями МДС и потоков для всех ветвей цепи имеет вид

$$\Delta \bar{i}'_{\text{в}} = \Delta \bar{i}_{\text{в}} + [R_{\text{в}}] \Delta \bar{\Phi}'_{\text{в}}, \quad (3.17)$$

где  $[R_{\text{в}}]$  — матрица магнитных сопротивлений ветвей.

Таким образом для определения приращений МДС, токов и потоков ветвей и электрических контуров можно использовать следующие уравнения:

а) уравнение (3.12а), которое, так же как уравнение (П1), включает  $D$  алгебраических уравнений;

б) уравнение (3.13а), которое, так же как (П2), включает  $K = Q - D$  алгебраических уравнений;

в) уравнение (3.14а), которое, так же как (П4), включает  $N$  алгебраических уравнений;

г) уравнение (3.17), которое, так же как (П3), включает  $Q$  алгебраических уравнений.

Всего имеется  $D + Q - D + N + Q = 2Q + N$  уравнений, что вполне достаточно для однозначного определения искомых приращений.

Если изменение положения перемещаемой части производится в условиях  $\Phi_h = \text{const}$  (рис. 3.6), то приращения  $\Delta \Phi_h = 0$ . Тогда в результате решения системы уравнений (3.12а), (3.13а), (3.14а), (3.17) определению подлежат:  $N$  приращений токов электрических контуров ( $\Delta i_h$ );  $2Q$  приращений МДС и потоков ветвей цепи ( $\Delta i'_{\text{вс}}$  и  $\Delta \Phi'_{\text{вс}}$ ); т. е. всего  $2Q + N$  неизвестных, что соответствует количеству уравнений, которыми мы располагаем.

Если изменение положения перемещаемой части производится в условиях  $i_h = \text{const}$  (рис. 3.7), то приращения  $\Delta i_h = 0$ . Тогда в результате решения той же системы уравнений определению подлежат:  $N$  приращений потоков, сцепленных с электрическими контурами ( $\Delta \Phi_h$ );  $2Q$  приращений МДС и потоков ветвей цепи ( $\Delta i'_{\text{вс}}$  и  $\Delta \Phi'_{\text{вс}}$ ); всего  $2Q + N$  неизвестных, что также соответствует количеству уравнений, которыми мы располагаем.

Определение неизвестных приращений сводится к аналитическому решению системы линейных алгебраических уравнений относительно самих приращений, что позволяет найти их с любой заданной точностью.

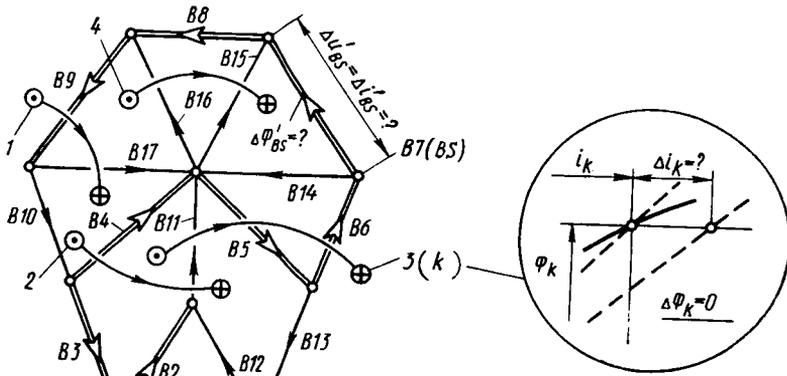


Рис. 3.6. Определение приращений токов, МДС и потоков для электрических контуров и ветвей магнитной цепи при изменении положений перемещаемой части в условиях  $\Delta\Phi_k=0$

Найденными значениями  $\Delta i_k$  и  $\Delta\Phi_k$  определяется характеристика намагничивания линейной модели контура  $k$  в положении  $q + \Delta q$  (прямая 2, рис. 3.5, а), проходящая через точку  $A$  с координатами  $\Phi_k, i_k + \Delta i_k$ , и через точку  $B$  с координатами  $i_k, \Phi_k + \Delta\Phi_k$ .

Там же показана характеристика намагничивания контура линейной модели контура  $k$  в положении  $q$  (прямая 1), которая пересекается с естественной характеристикой намагничивания контура, проведенной сплошной линией, в точке  $O'$  с координатами  $i_k, \Phi_k$ .

Поскольку приращения  $\Delta i_{BS}$  и  $\Delta\Phi_{BS}$  для ветвей были найдены при  $q \rightarrow 0$  и  $\Delta R_{BS} \ll R_{BS}$  и удовлетворяют (3.15), приращения  $\Delta i_k$  и

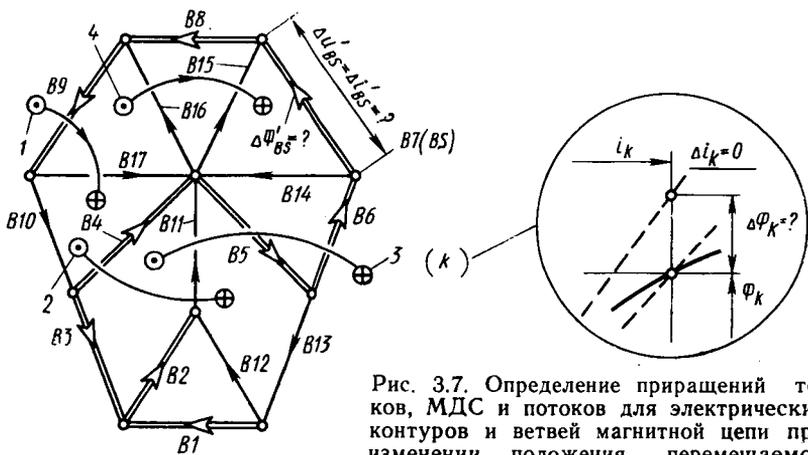


Рис. 3.7. Определение приращений токов, МДС и потоков для электрических контуров и ветвей магнитной цепи при изменении положения перемещаемой части в условиях  $\Delta i_k=0$

$\Delta\Phi_k$ , полученные в результате решения системы уравнений при  $q \rightarrow 0$ , находятся в соотношении

$$\Delta i_k / \Delta\Phi_k = -i_k / \Phi_k. \quad (3.18)$$

Это соотношение вытекает из подобия треугольников  $O'AB$  и  $LO'O$ , которое наблюдается при  $q \rightarrow 0$  и  $\Delta i_k \ll i_k$  (рис. 3.5, а).

Приращение энергии  $\Delta W_k$  электрического контура  $k$  соответствует площади треугольника между характеристиками 1 и 2 намагничивания контура, заштрихованной горизонтальными линиями и определяется по формуле (2.7):

$$\Delta W_k = \Phi_k \Delta i_k / 2.$$

Приращение коэнергии  $\Delta W'_k$  электрического контура  $k$  соответствует площади треугольника между характеристиками 1 и 2 намагничивания контура, заштрихованной вертикальными линиями и определяется по формуле (2.15):

$$\Delta W'_k = i_k \Delta\Phi_k / 2.$$

При  $q \rightarrow 0$ , когда  $\Delta i_k \Delta\Phi_k \ll \Phi_k \Delta i_k = i_k \Delta\Phi_k$ , в соответствии с (3.18)

$$\Delta W_k = \Phi_k \Delta i_k / 2 = -i_k \Delta\Phi_k / 2 = -\Delta W'_k. \quad (3.19)$$

Таким же образом связаны между собой и полные приращения энергии и коэнергии магнитной системы, выраженные в виде суммы приращений для отдельных электрических контуров:

$$\Delta W = \sum_{k=1}^N \Delta W_k = - \sum_{k=1}^N \Delta W'_k = -\Delta W'. \quad (3.20)$$

Поэтому обобщенную электромагнитную силу можно выразить как через приращение энергии, так и через приращение коэнергии

$$D_q = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} (\Delta W' / \Delta q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} (-\Delta W / \Delta q).$$

На этом решение задачи определения электромагнитной силы через изменения энергии или коэнергии возбуждающих электрических контуров при перемещении можно считать законченным. Благодаря использованию линеаризации и системы уравнений, составленных для приращений, трудоемкость решения сокращается во много раз. Однако, как будет показано далее, возможно еще большее сокращение трудоемкости при определении электромагнитных сил. После решения системы уравнений для приращений при перемещении в условиях  $\Delta\Phi_h = 0$  или  $\Delta i_k = 0$  появляется возможность доказать, что полное приращение энергии или коэнергии системы равно сумме приращений коэнергии или энергии в отдельных ветвях магнитной цепи в условиях перемещения при  $\Phi_{вс} = \text{const}$  или  $i_{вс} = \text{const}$ , которые легко вычисляют по (3.4), (3.9). Переходя к доказательству, напомним, что для каждой из ветвей при заданном изменении положения перемещаемой части  $\Delta q$  заранее известны приращение сопротивления ветви  $\Delta R_{вс}$ , прираще-

ние МДС  $\Delta i_{\text{BS}} = \Delta R_{\text{BS}} \Phi_{\text{BS}}$  при  $\Phi_{\text{BS}} = \text{const}$  и приращение потока  $\Delta \Phi_{\text{BS}} = \Delta \Lambda_{\text{BS}} i_{\text{BS}}$  при  $i_{\text{BS}} = \text{const}$ . А в результате решения системы уравнений для приращений в заданных условиях ( $\Delta \Phi_{\text{R}} = 0$  или  $\Delta i_{\text{R}} = 0$ ) найдены также приращения МДС и потока ветви  $\Delta i'_{\text{BS}}$ ,  $\Delta \Phi'_{\text{BS}}$ , связанные между собой уравнением (3.17).

Приращениями  $\Delta i'_{\text{BS}}$  и  $\Delta \Phi'_{\text{BS}}$  определяется на характеристике намагничивания ветви в положении  $q + \Delta q$  (прямая 2 на рис. 3.5, б) точка С, соответствующая ее магнитному состоянию.

В зависимости от полученного при решении системы уравнений значения  $\Delta i'_{\text{BS}}$  точка С может располагаться на характеристике намагничивания любым образом.

Если  $\Delta i_{\text{BS}} > 0$  и  $\Delta \Phi_{\text{BS}} < 0$  (рис. 3.5, б), то при  $\Delta i'_{\text{BS}} > \Delta i_{\text{BS}}$  точка С лежит на участке АЕ; при  $\Delta i'_{\text{BS}} = \Delta i_{\text{BS}}$  совпадает с А; при  $0 < \Delta i'_{\text{BS}} < \Delta i_{\text{BS}}$  лежит на участке АВ; при  $\Delta i'_{\text{BS}} = 0$  совпадает с В; при  $\Delta i'_{\text{BS}} < 0$  лежит на участке ВО.

Впрочем, во всех случаях приращение  $\Delta i'_{\text{BS}}$  по абсолютной величине (так же как  $\Delta i_{\text{BS}}$ ) всегда во много раз меньше самой МДС  $i_{\text{BS}}$ , т. е.  $|\Delta i'_{\text{BS}}| \ll |i_{\text{BS}}|$ .

Переход ветви (см. рис. 3.5, б) из магнитного состояния  $i_{\text{BS}}$ ,  $\Phi_{\text{BS}}$  (точка О' на характеристике намагничивания 1 для положения  $q$ ) в состояние  $i_{\text{BS}} + \Delta i'_{\text{BS}}$ ,  $\Phi_{\text{BS}} + \Delta \Phi'_{\text{BS}}$  (точка С на характеристике 2 для положения  $q + \Delta q$ ) можно представить состоящим из двух стадий. На первой из стадий осуществляется переход из состояния  $i_{\text{BS}}$ ,  $\Phi_{\text{BS}}$  (точка О') в состояние  $i_{\text{BS}}$ ,  $\Phi_{\text{BS}} + \Delta \Phi'_{\text{BS}}$  (точка D) при  $i_{\text{BS}} = \text{const}$  за счет перемещения на  $\Delta q' = \Delta q \Delta \Phi'_{\text{BS}} / \Delta \Phi_{\text{BS}}$ ; на второй стадии — переход из состояния  $i_{\text{BS}}$ ,  $\Phi_{\text{BS}} + \Delta \Phi'_{\text{BS}}$  (точка D) в состояние  $i_{\text{BS}} + \Delta i'_{\text{BS}}$ ,  $\Phi_{\text{BS}} + \Delta \Phi'_{\text{BS}}$  (точка С) при  $\Phi_{\text{BS}} + \Delta \Phi'_{\text{BS}} = \text{const}$  за счет перемещения  $\Delta q - \Delta q'$ .

Проведем через точку D прямую 3 из начала координат. Эта прямая является характеристикой намагничивания линейной модели ветви в положении  $q + \Delta q'$ . Тогда, учитывая, что  $\Delta q \rightarrow 0$ ,  $|\Delta i'_{\text{BS}}| \ll |i_{\text{BS}}|$ ,  $|\Delta \Phi'_{\text{BS}}| \ll |\Phi_{\text{BS}}|$ , приращение коэнергии ветви  $\Delta W'_{\text{BS}}$  можно представить в виде суммы двух приращений: приращения коэнергии на первой стадии  $\Delta W'_{\text{BS1}}$  при перемещении на  $\Delta q'$  и приращения коэнергии на второй стадии  $\Delta W'_{\text{BS2}}$  при перемещении на  $(\Delta q - \Delta q')$ . На первой стадии перемещение на  $\Delta q'$  происходит в условиях  $i_{\text{BS}} = \text{const}$  и сопровождается изменением потока ветви на  $\Delta \Phi'_{\text{BS}}$ . При этом коэнергия ветви получает приращение  $\Delta W'_{\text{BS1}} = \Delta \Phi'_{\text{BS}} i_{\text{BS}} / 2$  [см. (3.9)]. На рис. 3.5, б приращение  $|\Delta W'_{\text{BS1}}|$  соответствует по абсолютной величине площади треугольника O'DO, заштрихованной вертикальными линиями. На второй стадии перемещение на  $(\Delta q - \Delta q')$  происходит в условиях  $\Phi_{\text{BS}} + \Delta \Phi'_{\text{BS}} = \text{const}$  и сопровождается изменением тока ветви на  $\Delta i'_{\text{BS}}$ . При этом энергия ветви получает приращение  $\Delta W'_{\text{BS2}} = \Delta i'_{\text{BS}} (\Phi_{\text{BS}} + \Delta \Phi'_{\text{BS}}) / 2$  [см. (3.4)], которое отличается только знаком от приращения коэнергии  $\Delta W'_{\text{BS2}} = -\Delta W'_{\text{BS2}}$  при переме-

щении на второй стадии. На рис. 3.5, б приращения  $|\Delta W'_{B2}| = |\Delta W_{B2}|$  соответствуют по абсолютной величине площади треугольника  $DCO$ .

Таким образом, приращениям тока  $\Delta i'_{B2}$  и потока  $\Delta \Phi'_{B2}$  ветви, наблюдающимся при перемещении в условиях  $\Phi_k = \text{const}$  или  $i_k = \text{const}$ , соответствует приращение энергии  $|\Delta W'_{B1}| + |\Delta W'_{B2}| = |\Delta \Phi'_{B2} i_{B2}/2| + |\Delta i'_{B2} (\Phi_{B2} + \Delta \Phi'_{B2})/2|$ , соответствующее сумме площадей треугольников  $O'DO$  и  $DCO$ . При  $\Delta q \rightarrow 0$  в силу малости площади треугольника  $DCB$ , равной  $|\Delta i'_{B2} (\Delta \Phi_{B2} - \Delta \Phi'_{B2})/2|$ , это приращение энергии совпадает по абсолютной величине с приращением коэнергии  $|\Delta W'_{B1}| = |\Delta \Phi_{B2} i_{B2}/2|$ , соответствующим площади треугольника  $O'BO$ . По той же причине в силу малости площади трапеции  $O'ADC$ , равной  $|\Delta i'_{B2} + \Delta i_{B2}| \Delta \Phi'_{B2}/2|$ , это приращение энергии при  $\Delta q \rightarrow 0$  не отличается по абсолютной величине от приращения энергии  $|\Delta W_{B1}| = |\Delta i_{B2} \Phi_{B2}/2|$ , соответствующее площади треугольника  $O'AO$ .

Откуда следует важный вывод о том, что при перемещении на  $\Delta q \rightarrow 0$  в условиях  $\Phi_k = \text{const}$  или  $i_k = \text{const}$  для возбуждающих контуров, когда ни МДС  $i_{B2}$ , ни поток  $\Phi_{B2}$  ветви не остаются постоянными, а изменяются на приращения  $\Delta i'_{B2}$  и  $\Delta \Phi'_{B2}$ , приращение энергии ветви не отличается от приращения ее энергии  $\Delta W_{B2} = \Phi_{B2} \Delta i_{B2}/2$  при том же перемещении в условиях  $\Phi_{B2} = \text{const}$ ; соответственно приращение коэнергии ветви не отличается от приращения ее коэнергии  $\Delta W'_{B2} = i_{B2} \Delta \Phi_{B2}/2$  при том же перемещении в условиях  $i_{B2} = \text{const}$ .

$$\left. \begin{aligned} \Delta W_{B1} + \Delta W_{B2} &= \Delta W_{B2} = i_{B2} \Delta \Phi_{B2}/2, \\ \Delta W'_{B1} + \Delta W'_{B2} &= \Delta W'_{B2} = \Phi_{B2} \Delta i_{B2}/2, \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

где  $\Delta W_{B2} = -\Delta W'_{B2}$  при  $\Delta q \rightarrow 0$ .

На основании этого вывода полное приращение энергии  $\Delta W$  в магнитной системе, возбуждаемой токами  $i_k$  в электрических контурах, при перемещении в условиях  $\Phi_k = \text{const}$  можно найти в виде суммы приращений энергии  $\Delta W_{B2}$  в отдельных ветвях эквивалентной магнитной цепи при том же изменении положения перемещаемой части в условиях  $\Phi_{B2} = \text{const}$ :

$$\Delta W_{(\Phi_k = \text{const})} = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{B2} = \sum_{s=1}^Q \frac{\Phi_{B2} \Delta i_{B2}}{2} \quad (\Phi_{B2} = \text{const}) \quad (3.22)$$

Соответственно полное приращение коэнергии  $\Delta W'$  в магнитной системе, возбуждаемой токами  $i_k$  в электрических контурах, при перемещении  $\Delta q$  в условиях  $i_k = \text{const}$  можно найти в виде суммы приращений коэнергии в отдельных ветвях эквивалентной маг-

нитной цепи при том же изменении положения перемещаемой части в условиях  $i_{\text{вк}} = \text{const}$ :

$$\Delta W' = \sum_{\substack{s=1 \\ (i_k = \text{const})}}^Q \Delta W'_{\text{вс}} = \sum_{s=1}^Q \frac{i_{\text{вс}} \Delta \Phi_{\text{вс}}}{2}. \quad (3.23)$$

Таким образом, приращения энергии (коэнергии) магнитной системы при перемещении части этой системы в условиях  $\Phi_k = \text{const}$  ( $i_k = \text{const}$ ) могут быть определены двумя способами: либо в виде суммы приращений энергии (коэнергии) электрических контуров, возбуждающих систему при перемещении в условиях  $\Phi_k = \text{const}$  ( $i_k = \text{const}$ ) по (3.19), (3.20), либо в виде суммы приращений энергии (коэнергии) ветвей ее магнитной цепи при перемещении в условиях  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$  ( $i_{\text{вс}} = \text{const}$ ).

Так как второй способ не требует предварительного вычисления приращений  $\Delta i_k$  или  $\Delta \Phi_k$ , для определения которых нужно решить систему уравнений (3.12 а), (3.13 а), (3.14 а), (3.17), во всех случаях целесообразно рассчитывать изменение энергии или коэнергии системы в виде суммы приращений энергии или коэнергии в отдельных ветвях цепи. При этом трудоемкость по сравнению с первым способом снижается в несколько раз.

### **3.4. Появление ошибочных результатов при определении электромагнитных сил по приращениям магнитной энергии или коэнергии ветвей магнитной цепи, найденным с учетом нелинейности характеристик намагничивания [без перехода к линейной модели]**

Для определения электромагнитной силы, действующей на определенные тела (или их элементы) в области поля, необходимо отделить эти тела (или их элементы) от остальной области поля с помощью замкнутой разделительной поверхности  $S$ . Этой поверхностью область поля делится на две части (подобласти).

Подход к расчету сил электромагнитного взаимодействия между этими частями существенным образом зависит от того, какими магнитными свойствами обладают среды, по которым проходит разделительная поверхность  $S$ . Рассмотрим особенности расчета электромагнитных сил, действующих на выделенную часть области поля, в следующих двух характерных случаях.

В первом, наиболее часто встречающемся случае выделенная часть области поля полностью включает магнитно-нелинейное тело, а разделительная поверхность  $S$  размещается в магнитно-линейной среде. К первому случаю относится определение силы на выделенную часть области поля по рис. 3.8, а, на котором выделен-

ная часть области поля полностью включает магнитно-нелинейный сердечник 1—2, а разделительная поверхность  $S$  размещается целиком в магнитно-линейном зазоре между сердечниками 1—2 и 3—4. Во втором, наиболее общем случае разделительная поверхность  $S$  охватывает только элемент магнитно-нелинейного тела и располагается как в магнитно-нелинейной среде, так и в магнитно-линейной среде. Ко второму случаю относится определение силы на часть области поля по рис. 3.9,  $a$ , на котором выделенная часть области включает только элемент магнитно-нелинейного сердечника 1—2, а разделительная поверхность  $S$  размещается частично в магнитно-нелинейной среде сердечника 1—2 (на участке 5, 6) и частично в магнитно-линейной среде зазора между сердечниками (на участке 5', 1, 6). И в первом, и во втором случае обобщенную электромагнитную силу  $D_q$ , действующую на выделенную часть области поля в направлении  $q$ , можно выразить через приращение энергии  $\Delta W$ , которое произойдет при перемещении на  $\Delta q$  поверхности  $S$  (вместе с охваченными ею телами):

Электромагнитную силу  $D_q$ , действующую на выделенную часть области поля в направлении  $q$ , можно выразить через приращение энергии  $\Delta W$ , которое произойдет при перемещении на  $\Delta q$  поверхности  $S$  (вместе с охваченными ею телами):

$$D_q = - \lim_{(\Delta q \rightarrow 0)} (\Delta W / \Delta q).$$

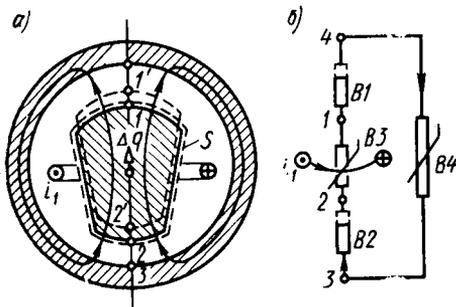


Рис. 3.8. Определение ЭМС, действующей на магнитно-нелинейное тело 1—2, отделенное магнитно-линейным зазором от тела 3—4:

$a$  — поперечный разрез системы,  $b$  — схема магнитной цепи

Приращение энергии  $\Delta W$  наиболее просто выражается по (3.2) в виде суммы приращений энергии отдельных ветвей магнитной цепи при перемещении на  $\Delta q$  (3.4).

Предварительно по § 1.5 нужно рассчитать магнитное поле нелинейной системы при заданных токах  $i_k$  в возбуждающих электрических контурах, составить схему эквивалентной магнитной цепи и определить МДС  $i_{вс}$ , потоки  $\Phi_{вс}$  и магнитные сопротивления  $R_{вс}$  ветвей.

Если среди магнитно-нелинейных ветвей цепи имеются такие ветви, сопротивление которых изменяется при перемещении поверхности  $S$ , то их следует заменить линейными моделями и прира-

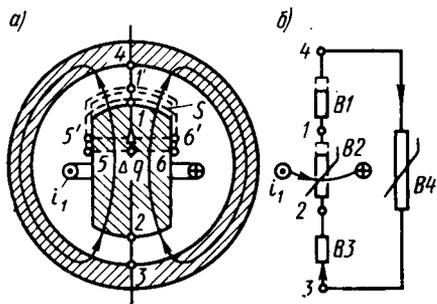


Рис. 3.9. Определение ЭМС, действующей на часть магнитно-нелинейного тела в объеме 156, выделенном поверхностью (пример задачи второго типа):

$a$  — поперечный разрез системы;  $b$  — схема магнитной цепи

щения сопротивлений  $\Delta R_{вс}$  и энергии найти для линейных моделей ветвей.

Разумеется, магнитно-нелинейные ветви, сопротивления которых изменяются при перемещении поверхности  $S$ , имеются только во втором случае, поскольку здесь перемещение поверхности  $S$  приводит к изменению размеров магнитно-нелинейной среды и к изменению магнитного сопротивления эквивалентирующей ее ветви.

Как было показано в § 3.1, приращение энергии ветви при перемещении  $\Delta W_{вс нл}$ , найденное с учетом ее магнитной нелинейности, существенно отличается от правильного значения приращения энергии  $\Delta W_{вс} = \Delta i_{вс} \Phi_{вс} / 2$ , найденного в условиях  $\Phi_{вс} = \text{const}$  для ее линейной модели. Поэтому во втором случае линеаризация магнитно-нелинейных ветвей с изменяющимися сопротивлениями совершенно необходима. Только после проведения линеаризации можно получить правильное приращение энергии системы  $\Delta W = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{вс}$ , которое не совпадает с приращением энергии, найденным с учетом магнитной нелинейности ветвей,

$$|\Delta W_{нл}| = \left| \sum_{s=1}^Q \Delta W_{вс нл} \right| < |\Delta W|.$$

Все сказанное распространяется и на расчет приращения энергии в виде суммы приращений энергии возбуждающих электрических контуров. Выполнение этих расчетов без перехода к линейной модели поля, как уже было показано в § 2.5, приведет во втором случае к существенным ошибкам в определении приращения энергии.

Приведем пример определения ЭМС через приращения энергии ветвей во втором частном случае.

**Пример 3.3.** Рассмотрим магнитную систему по рис. 3.9, а. Найдем электромагнитную силу, которая действует в направлении  $\overline{\Delta q}$  на элемент 5, 1, 6 сердечника 1—2, охваченный поверхностью  $S$  (второй случай). Магнитная цепь системы показана на рис. 3.9, б. Она состоит из четырех ветвей ( $Q = 4$ ) в число которых входят две магнитно-линейные ветви ( $B1$  — между узлами 1 и 4 в зазоре,  $B2$  — между узлами 2 и 1 в зазоре) и две магнитно-нелинейные ветви ( $B3$  — между узлами 3 и 2 сердечника;  $B4$  — между узлами 3 и 4 в ярме).

▲ Для определения этой силы поверхность  $S$  с заключенным внутри нее элементом сердечника 5, 1, 6 необходимо переместить на  $\overline{\Delta q}$ , после чего она займет положение  $5', 1', 6'$ .

Перемещение поверхности  $S$  в условиях  $\Phi_{вс} = \text{const}$  приведет к увеличению сопротивления ветви  $B2$  ( $\Delta R_{B2} > 0$ ) и уменьшению сопротивления ветви  $B1$  ( $\Delta R_{B1} < 0$ ). Сопротивления остальных ветвей не изменятся. При расчете приращения энергии ветви  $B2$  заменим ее линейной моделью. Тогда приращение энергии

$$\Delta W_{B2} = \Delta R_{B2} \Phi_{B2}^2 / 2 = \Delta i_{B2} \Phi_{B2} / 2.$$

Если линейризация ветви  $B2$  не будет произведена, то изменение ее энергии составит  $\Delta W_{B2нл} = \int_0^{\Phi_{B2}} \Delta i_{B2}^{нл} d\Phi_{B2}$  и будет во много раз меньше правильного значения  $\Delta W_{B2}$ . Возникающая из-за отсутствия линейризации ошибка в расчете силы возрастает по мере увеличения насыщения сердечника. Предположим, например, что индукция в сердечнике  $l-2$   $B_{B2} = 2,63$  Тл; его сечение  $S_{B2} = 0,01$  м<sup>2</sup>; сердечник изготовлен из стали 3413, имеющей  $H_{B2} = 4 \cdot 10^5$  А/м при такой индукции.

Тогда приращение энергии в линейной модели ветви составит

$$\Delta W_{B2} = \frac{\Delta i_{B2} \Phi_{B2}}{2} = \Delta q \frac{H_{B2} B_{B2}}{2} S_{B2} = \Delta q S_{B2} w_{B2} = \Delta q 5,26 \cdot 10^3 \text{ Дж},$$

где  $w_{B2} = H_{B2} B_{B2} / 2 = 5,26 \cdot 10^5$  Дж/м<sup>3</sup> — удельная магнитная энергия в линейризованном сердечнике.

В то же время приращение энергии ветви с учетом магнитной нелинейности составит

$$\Delta W_{B2нл} = \int_0^{\Phi_{B2}} \Delta i_{B2}^{нл} d\Phi_{B2} = \Delta q S_{B2} w_{B2нл} = \Delta q 1,44 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

где  $w_{B2нл} = \int_0^{B_{B2}} H_{B2}^{нл} dB_{B2}^{нл} = 1,44 \cdot 10^5$  Дж/м<sup>3</sup> — удельная магнитная энергия в нелинейном сердечнике при  $B_{B2} = 2,63$  Тл.

Если считать сечение и индукцию в зазоре  $l-4$  такими же, как в сердечнике, т. е.  $S_{B1} = S_{B2}$  и  $B_{B1} = B_{B2}$ , то изменение энергии в зазоре

$$\Delta W_{B1} = \Delta i_{B1} \Phi_{B1} / 2 = -\Delta q S_{B1} w_{B1} = -\Delta q \cdot 2,4 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

где  $w_{B1} = H_{B1} B_{B1} / 2 = 2,4 \cdot 10^6$  Дж/м<sup>3</sup> — удельная магнитная энергия в зазоре при  $B_{B1} = 2,63$  Тл;

$$H_{B1} = B_{B1} / \mu_0 = 2,63 / (4\pi \cdot 10^{-7}) = 2,1 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

В конечном счете получаются следующие значения полных приращений энергии и сил:

$$\Delta W = \Delta W_{B2} + \Delta W_{B1} = -\Delta q \cdot 18,74 \cdot 10^3 \text{ Дж};$$

$$\Delta W_{нл} = \Delta W_{B2нл} + \Delta W_{B1} = -\Delta q \cdot 22,56 \cdot 10^3 \text{ Дж};$$

$$D_q = -\lim_{(\Delta q \rightarrow 0)} \frac{\Delta W}{\Delta q} = -18,74 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$D_{qнл} = -\lim_{(\Delta q \rightarrow 0)} \frac{\Delta W}{\Delta q} = 22,56 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

В этом примере ошибка в расчете силы даже при высоком уровне насыщения сравнительно небольшая (порядка 20 %)\*. Но, имея в виду, что линейризация не только исключает систематические погрешности, но и делает расчет силы менее трудоемким, во втором

\* В том случае, когда поверхность  $S$  располагается целиком в магнитно-нелинейной среде (см. пример 3.2), ошибка получается во много раз большей

случае всегда следует заменять магнитно-нелинейные ветви с изменяющимся сопротивлением их линейными моделями.

Наоборот, в первом частном случае, замена магнитно-нелинейных ветвей их линейными моделями не требуется.

Здесь разделительная поверхность  $S$  размещается только в магнитно-линейных средах. Ее перемещение приводит только к изменению размеров магнитно-линейных сред и изменениям магнитных сопротивлений ветвей, эквивалентирующих эти среды. Такие ветви обладают линейными естественными характеристиками, и приращения энергии в них при перемещении в условиях  $\Phi_{B_s} = \text{const}$  можно найти без перехода к линейным моделям:

$$\Delta W_{B_s \text{ нл}} = \int_0^{\Phi_{B_s}} \Delta i_{B_s \sim}^{\text{нл}} d\Phi_{B_s \sim} = \Delta i_{B_s} \Phi_{B_s} / 2 = W_{B_s}.$$

Пусть общее количество линейных ветвей в цепи равно  $Q_L$  с индексами  $s = 1, 2, \dots, Q_L$ . Остальные ветви с индексами  $s = Q_L + 1, Q_L + 2, \dots, Q$  могут обладать линейными или нелинейными характеристиками намагничивания, которые при перемещении сохраняются. Приращений токов в них не происходит ( $\Delta i_{B_s \sim} = 0; \Delta i_{B_s} = 0$ ); следовательно, равны нулю как приращения энергии этих ветвей, найденные с учетом их нелинейности,

$$\Delta W_{B_s \text{ нл}} = \int_0^{\Phi_{B_s}} \Delta i_{B_s \sim}^{\text{нл}} d\Phi_{B_s \sim} = 0,$$

так и приращения энергии в линейных моделях этих ветвей

$$\Delta W_{B_s} = \Delta i_{B_s} \Phi_{B_s} / 2 = 0.$$

Полное приращение энергии при перемещении можно определить либо в виде суммы приращений энергии линейных моделей ветвей,

$$\Delta W = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{B_s} = \sum_{s=1}^{Q_L} \Delta W_{B_s} + \sum_{s=Q_L+1}^{Q_L} \Delta W_{B_s} = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{B_s},$$

либо в виде суммы приращений энергии ветвей, найденных с учетом их нелинейности,

$$\Delta W_{\text{нл}} = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{B_s \text{ нл}} = \sum_{s=1}^{Q_L} \Delta W_{B_s \text{ нл}} + \sum_{s=Q_L+1}^{Q_L} \Delta W_{B_s \text{ нл}} = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{B_s \text{ нл}}.$$

Так как для всех ветвей  $\Delta W_{B_s} = \Delta W_{B_s \text{ нл}}$ , то результат всегда будет одним и тем же:

$$\Delta W = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{B_s} = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{B_s \text{ нл}} = \Delta W_{\text{нл}}. \quad (3.24)$$

Как показано в § 3.3, во всех случаях, и в том числе в первом случае, сумма приращений энергии электрических контуров, совпадает с приращением энергии, выраженным через приращения энергии ветвей.

Это имеет место как в случае приращений, найденных с учетом нелинейности ветвей,

$$\Delta W_{\text{нл}} = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{\text{вснл}} = \sum_{k=1}^N \Delta W_{\text{кнл}},$$

так и в случае приращений, найденных при линейризации ветвей,

$$\Delta W = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{\text{вс}} = \sum_{k=1}^N \Delta W_k.$$

Учитывая, кроме того, уравнение (3.24), которое всегда справедливо в первом частном случае, можно утверждать, что

$$\Delta W = \sum_{k=1}^N \Delta W_k = \sum_{k=1}^N \Delta W_{\text{кнл}} = \Delta W_{\text{нл}}. \quad (3.25)$$

Это означает, что в первом частном случае приращение энергии, выраженное через приращение энергии электрических контуров, может быть найдено как с учетом нелинейности ветвей, так и при их линейризации. В обоих случаях результат будет одним и тем же. Продемонстрируем это на следующем примере.

**Пример 3.4.** Рассмотрим магнитную систему, показанную на рис. 3.8. Найдем ЭМС, действующую в направлении  $\overline{\Delta q}$  на сердечник 1—2, охваченный поверхностью  $S$  (первый частный случай). Магнитная цепь (рис. 3.8, б) состоит из  $Q = 4$  ветвей; магнитно-линейных ветвей  $B1$  и  $B2$  и магнитно-нелинейных ветвей  $B3$  и  $B4$ .

Для определения ЭМС поверхность  $S$  с заключенным внутри нее сердечником 1—2 необходимо переместить на  $\overline{\Delta q}$ , после чего она займет положение  $1'—2'$ .

Сначала выразим ЭМС в направлении перемещения через приращения энергии ветвей. С этой целью переместим поверхность  $S$  в условиях  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$ . Такое перемещение приведет к увеличению сопротивления ветви  $B2$  ( $\Delta R_{\text{в}2} > 0$ ) и уменьшению сопротивления ветви  $B1$  ( $\Delta R_{\text{в}1} < 0$ ). Сопротивления ветвей  $B3$ ,  $B4$  останутся без изменений. Так как  $\Delta W_{\text{в}3} = \Delta W_{\text{в}4} = 0$ , то полное приращение энергии при перемещении сердечника 1—2 составит

$$\Delta W = \sum_{s=1}^Q \Delta W_{\text{в}s} = \Delta W_{\text{в}1} + \Delta W_{\text{в}2} = \Delta i_{\text{в}1} \Phi_{\text{в}1} / 2 + \Delta i_{\text{в}2} \Phi_{\text{в}2} / 2,$$

где  $\Delta i_{\text{в}1} = \Phi_{\text{в}1} \Delta R_{\text{в}1}$ ,  $\Delta i_{\text{в}2} = \Phi_{\text{в}2} \Delta R_{\text{в}2}$ .

Если принять  $\Phi_{\text{в}1} = \Phi_{\text{в}2} = 0,028 \text{ Вб}$ ; поперечные сечения ветвей  $S_{\text{в}1} = 0,04 \text{ м}^2$ ,  $S_{\text{в}2} = 0,025 \text{ м}^2$ , то индукции в зазорах  $B_{\text{в}1} = \Phi_{\text{в}1} / S_{\text{в}1} = 0,7 \text{ Тл}$ ;  $B_{\text{в}2} = \Phi_{\text{в}2} / S_{\text{в}2} = 1,12 \text{ Тл}$ ;

приращения сопротивлений ветвей при перемещении  $\Delta R_{\text{в}1} = -\Delta q / (\mu_0 S_{\text{в}1}) = -\Delta q \cdot 1,95 \cdot 10^7 \text{ Гн}^{-1}$ ;  $\Delta R_{\text{в}2} = \Delta q / (\mu_0 S_{\text{в}2}) = \Delta q \cdot 3,1 \cdot 10^7 \text{ Гн}^{-1}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ .

приращения МДС ветвей  $\Delta i_{B1} = \Phi_{B1} \Delta R_{B1} = -\Delta q \cdot 0,0546 \cdot 10^7 \text{ A}$ ;

$$\Delta i_{B2} = \Phi_{B2} \Delta R_{B2} = \Delta q \cdot 0,0867 \cdot 10^7 \text{ A};$$

приращения энергии  $\Delta W_{B1} = \Delta i_{B1} \Phi_{B1} / 2 = -\Delta q \cdot 7,65 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ ;  
 $\Delta W_{B2} = \Delta i_{B2} \Phi_{B2} / 2 = \Delta q \cdot 11,3 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ ;  
 $\Delta W = \Delta W_{B1} + \Delta W_{B2} = \Delta q \cdot 3,65 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ ;  
 сила в направлении перемещения  $Dq = -\lim \Delta W / \Delta q = -3,65 \cdot 10^3 \text{ Н}$ .

Теперь выразим ЭМС в направлении перемещения через приращения энергии возбуждающих электрических контуров. Покажем, что независимо от того, будут ли найдены эти приращения с учетом магнитной нелинейности или без нее — результат будет таким же, как при расчете силы через приращения энергии ветвей.

В рассматриваемом примере магнитная цепь состоит из четырех последовательно включенных ветвей с сопротивлениями  $R_{B1}$ ,  $R_{B2}$ ,  $R_{B3}$  и  $R_{B4}$  и возбуждается током  $i_1$  в электрическом контуре  $I$ .

Магнитное сопротивление такой цепи  $R_{1\sim}$  зависит как от текущего потока  $\Phi_{1\sim}$ , так и от положения перемещаемой части  $q$ , но может быть представлено в виде суммы двух сопротивлений, одно из которых  $R_1(q) = R_{B1} + R_{B2}$  зависит только от  $q$ , а другое  $R_1(\Phi_{1\sim}) = R_{B3} + R_{B4}$  — только от  $\Phi_{1\sim}$ . Таким образом, магнитное сопротивление цепи имеет вид

$$R_{1\sim} = R_1(q; \Phi_{1\sim}) = R_1(q) + R_1(\Phi_{1\sim}).$$

Соответственно магнитное сопротивление линейной модели цепи при потоке  $\Phi_{1\sim} = \Phi_1$

$$R_1 = R_1(q, \Phi_1) = R_1(q) + R_1(\Phi_1).$$

Характеристики намагничивания контура и его линейной модели в положении  $q$  показаны на рис. 3.10 соответственно в виде пунктирной кривой  $c$  и сплошной прямой  $a$ , проведенными через точку с координатами  $(i_1; \Phi_1)$ . Те же характеристики в положении  $q + \Delta q$  показаны в виде пунктирной кривой  $d$  и сплошной прямой  $b$ , проведенными через точку с координатами  $(i_1 + \Delta i, \Phi_1)$ , где  $\Delta i_1$  — приращение МДС при потоке  $\Phi_1 = \text{const}$ .

Нетрудно доказать, что производные сопротивлений цепи и линейной модели цепи по перемещению всегда одинаковы:

$$\partial R_1 / \partial q = \partial R_1(q) / \partial q = \text{const}; \quad \partial R_{1\sim} / \partial q = \partial R_1(q) / \partial q = \text{const},$$

так как  $\partial R_1(\Phi_{1\sim}) / \partial q = \partial R_1(\Phi_1) / \partial q = 0$ .

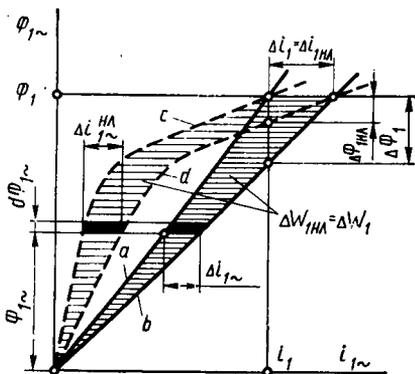


Рис. 3.10. Определение приращения энергии при перемещении магнитно-нелинейного тела  $I-2$  по рис. 3.8

Производные текущих МДС, их приращения и приращения сопротивлений, найденные для самой цепи и для ее линейной модели, также одинаковы:

$$\begin{aligned} \partial i_{1\sim}^{\text{нл}} / \partial q &= \Phi_{1\sim} \partial R_{1\sim} / \partial q = \Phi_{1\sim} \partial R_1 / \partial q = \partial i_{1\sim} / \partial q; \\ \Delta i_{1\sim}^{\text{нл}} &= (\partial i_{1\sim}^{\text{нл}} / \partial q) \Delta q = (\partial i_{1\sim} / \partial q) \Delta q = \Delta i_{1\sim}; \\ \Delta R_{1\sim} &= (\partial R_{1\sim} / \partial q) \Delta q = (\partial R_1 / \partial q) \Delta q = \Delta R_1. \end{aligned}$$

При этом оказываются равными друг другу элементы приращений энергии цепи и ее линейной модели:  $\Delta i_{1\sim}^{\text{нл}} d\Phi_{1\sim} = \Delta i_{1\sim} d\Phi_{1\sim} = \Phi_{1\sim} \Delta R_1 d\Phi_{1\sim}$  (на рис. 3.10 — это площади, заштрихованные наклонными линиями). Так как площади элементов, из которых складываются приращения энергии цепи и ее линейной модели, равны, то приращения энергии получаются также одинаковы:

$$\Delta W_{\text{нл}} = \int_0^{\Phi_1} \Delta i_{1\sim}^{\text{нл}} d\Phi_{1\sim} = \int_0^{\Phi_1} \Delta i_{1\sim} d\Phi_{1\sim} = \Delta i_1 \Phi_1 / 2 = \Delta W_1,$$

где  $\Delta i_1 = \Delta R_1 \Phi_1$ .

Площадь, соответствующая  $\Delta W_{\text{нл}}$ , заштрихована редко проведенными горизонтальными линиями; площадь, соответствующая  $\Delta W_1$ , — часто проведенными горизонтальными линиями.

Приращение энергии  $\Delta W_1$  совпадает с приращением энергии, выраженным через приращения энергии ветвей:

$$\begin{aligned} \Delta W_1 &= \frac{\Delta i_1 \Phi_1}{2} = (\Delta i_{\text{в1}} + \Delta i_{\text{в2}}) \frac{\Phi_1}{2} = \frac{\Delta i_{\text{в1}} \Phi_{\text{в1}}}{2} + \\ &+ \frac{\Delta i_{\text{в2}} \Phi_{\text{в2}}}{2} = \Delta W = \Delta q \cdot 11,3 \cdot 10^3 \text{ Дж}, \end{aligned}$$

так как  $\Delta i_1 = \Delta R_1 \Phi_1 = (\Delta R_{\text{в1}} + \Delta R_{\text{в2}}) \Phi_1 = \Delta i_{\text{в1}} + \Delta i_{\text{в2}}$ .

Как и следовало ожидать, сила  $D_{\text{нл}}$ , найденная с учетом магнитной нелинейности цепи, совпадает с силой  $D_1$ , найденной с помощью линейной модели цепи, и с силой  $D_q$ , выраженной через приращения энергии ветвей:

$$D_{\text{нл}} = -\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{\text{нл}}}{\Delta q} = -\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta W_1}{\Delta q} = D_1 = D_q = -3,65 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

### 3.5. Выражение приращений магнитной энергии и электромагнитных сил через приращения проводимостей ветвей магнитной цепи

Как было показано, определение обобщенной электромагнитной силы сводится к вычислению приращений энергии или коэнергии линейных моделей ветвей при изменении положения перемещаемой части на  $\Delta q$ :

$$D_q = -\lim_{(\Delta q \rightarrow 0)} \frac{1}{\Delta q} \sum_{s=1}^q \Delta W_{\text{вs}}. \quad (3.26)$$

Если при изменении положения перемещаемой части в данной ветви сохраняется поток, т. е.  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$ , то приращение магнитной энергии ветви составляет

$$\Delta W_{\text{вс}} = \Delta i_{\text{вс}} \Phi_{\text{вс}} / 2 = \Delta R_{\text{вс}} \Phi_{\text{вс}}^2 / 2. \quad (\Phi_{\text{вс}} = \text{const})$$

Если сохраняется МДС ветви, т. е.  $i_{\text{вс}} = \text{const}$ , то приращение энергии ветви равно приращению коэнергии, взятому со знаком «минус»:

$$\Delta W_{\text{вс}} = -\Delta W'_{\text{вс}} = -\Delta \Phi_{\text{вс}} i_{\text{вс}} / 2 = -\Delta \Lambda_{\text{вс}} i_{\text{вс}}^2 / 2. \quad (i_{\text{вс}} = \text{const})$$

Таким образом, приращение энергии ветви можно выразить либо через приращения потока  $\Delta \Phi_{\text{вс}}$  (при  $i_{\text{вс}} = \text{const}$ ) или МДС линейной модели ветви  $\Delta i_{\text{вс}}$  (при  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$ ), либо через приращение проводимости  $\Delta \Lambda_{\text{вс}} = \frac{\partial \Lambda_{\text{вс}}}{\partial q} \Delta q$  или сопротивления  $\Delta R_{\text{вс}} = \frac{\partial R_{\text{вс}}}{\partial q} \Delta q$  линейной модели ветви.

Так как сопротивление и проводимость ветви и их приращения связаны между собой, а также с потоком и МДС ветви соотношениями

$$\Lambda_{\text{вс}} = \frac{1}{R_{\text{вс}}} = \frac{\Phi_{\text{вс}}}{i_{\text{вс}}}; \quad \Delta \Lambda_{\text{вс}} = \frac{\partial \Lambda_{\text{вс}}}{\partial q} \Delta q = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R_{\text{вс}}} \right) \Delta q = -\frac{\Delta R_{\text{вс}}}{R_{\text{вс}}^2},$$

то приращения энергии линейной модели ветви, найденные при  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$  и при  $i_{\text{вс}} = \text{const}$ , всегда одинаковы:

$$\Delta W_{\text{вс}} = \Delta R_{\text{вс}} \Phi_{\text{вс}}^2 / 2 = -\Delta \Lambda_{\text{вс}} i_{\text{вс}}^2 / 2 = \Delta W'_{\text{вс}}. \quad (\text{при } \Phi_{\text{вс}} = \text{const} \text{ и } i_{\text{вс}} = \text{const}) \quad (3.27)$$

**3.5.1. Аналитическое определение приращений проводимостей ветвей магнитной цепи.** Если магнитное поле найдено аналитическим решением задачи, то проводимость ветви эквивалентной магнитной цепи можно представить в функции от размеров и углов, характеризующих данную ветвь и положение граничных поверхностей в области поля,

$$\Lambda_{\text{вс}} = \Lambda_{\text{вс}}(b_1, \dots, b_i, \dots, b_m), \quad (3.28)$$

где  $b_1, \dots, b_m$  — размеры и углы, влияющие на проводимость ветви  $s$ .

Некоторые из этих размеров или углов могут зависеть от координаты  $q$ , определяющей расположение выделенной части магнитной системы,  $b_i = b_i(q)$ .

Определив приращения размеров при перемещении на  $\Delta q$  выделенной части системы  $\Delta b_i = (\partial b_i / \partial q) \Delta q$ , нетрудно вычислить приращение проводимости ветви

$$\Delta \Lambda_{Bs} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial \Lambda_{Bs}}{\partial b_i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial q} \Delta q$$

и выразить по (3.26) и (3.27) обобщенную силу через производные проводимостей отдельных ветвей магнитной цепи:

$$D_q = \sum_{s=1}^Q \frac{i_{Bs}^2}{2} \cdot \frac{\partial \Lambda_{Bs}}{\partial q}, \quad (3.29)$$

где  $\frac{\partial \Lambda_{Bs}}{\partial q} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial \Lambda_{Bs}}{\partial b_i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial q}$ .

Согласно (3.22), в тех случаях, когда это более удобно, можно выразить силу и через производные проводимостей для потоков, сцепленных с отдельными электрическими контурами системы,

$$D_q = \sum_{k=1}^N \frac{i_k^2}{2} \cdot \frac{\partial \Lambda_k}{\partial q}, \quad (3.30)$$

где  $\frac{\partial \Lambda_k}{\partial q} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial \Lambda_k}{\partial b_i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial q}$ .

Результат, разумеется, будет таким же.

**Пример 3.5.** Для магнитной системы, изображенной на рис. 3.11, найти приращения проводимостей немагнитного зазора между ферромагнитными телами 1 и 2 при перемещениях тела 1 на малые расстояния  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

При магнитном потоке  $\Phi = 0,06$  Вб, толщине зазора  $b_1 = \delta = 0,005$  м,  $b_2 = 0,2$  м и длине тел  $b_3 = 0,3$  м, определить ЭМС, действующие на тело 1 в направлении осей  $x$  и  $y$ .

▲ Считая магнитную проницаемость тел 1 и 2 бесконечно большой, поле двумерным и пренебрегая краевыми эффектами из-за малости толщины зазора  $b_1 = \delta$  по сравнению с его шириной  $b_2$  и длиной  $b_3$  в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, можно прийти к заключению, что поле в зазоре равномерно, и выразить его проводимость следующим образом:

$$\Lambda_{Bs} = \mu_0 b_2 b_3 / b_1 = 1,508 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

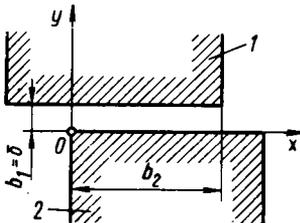


Рис. 3.11. Определение электромагнитных сил в равномерном поле

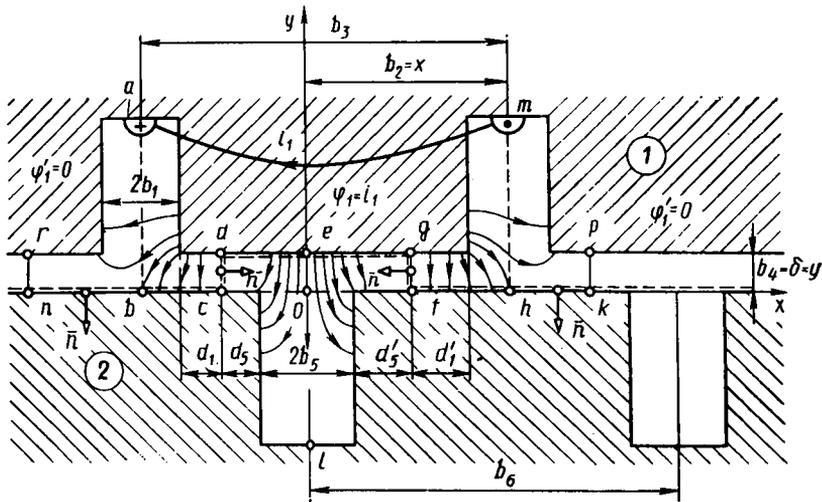


Рис. 3.12. Определение электромагнитных сил в поле зубцового контура при  $b_2 = 0,105$  м

Приращения проводимости при перемещении в направлении  $x = b_2$  и  $y = b_1 = \delta$  найдем по (3.29):

$$\Delta \Lambda_{\text{Bs},x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Lambda_{\text{Bs}}}{\partial b_i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x} \Delta x = \mu_0 \frac{b_3 \Delta x}{\delta} = 0,756 \cdot 10^{-4} \Delta x;$$

$$\Lambda_{\text{Bs},y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Lambda_{\text{Bs}}}{\partial b_i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial y} \Delta y = -\mu_0 \frac{b_2 b_3}{\delta^2} \Delta y = -0,302 \cdot 10^{-2} \Delta y.$$

Силы, действующие на тело 1 в направлениях  $x$  и  $y$ :

$$D_x = -\lim_{(\Delta x \rightarrow 0)} \frac{\Delta W_{\text{Bs},x}}{\Delta x} = \lim_{(\Delta x \rightarrow 0)} \frac{\Delta \Lambda_{\text{Bs},x}}{\Delta x} \cdot \frac{i_{\text{Bs}}^2}{2} = \mu_0 \frac{b_3}{\delta} \cdot \frac{i_{\text{Bs}}^2}{2} = 5,97 \cdot 10^2 \text{ Н};$$

$$\begin{aligned} D_y &= -\lim_{(\Delta y \rightarrow 0)} \frac{\Delta W_{\text{Bs},y}}{\Delta y} = \lim_{(\Delta y \rightarrow 0)} \frac{\Delta \Lambda_{\text{Bs},y}}{\Delta y} \cdot \frac{i_{\text{Bs}}^2}{2} = \\ &= -\mu_0 \frac{b_2 b_3}{\delta^2} \cdot \frac{i_{\text{Bs}}^2}{2} = -2,39 \cdot 10^4 \text{ Н}, \end{aligned}$$

где  $i_{\text{Bs}} = \Phi_{\text{Bs}} / \Lambda_{\text{Bs}} = 3980$  А.

**Пример 3.6.** Проанализировать магнитное поле, образованное в зазоре между двумя зубчатыми ферромагнитными телами 1 и 2 (рис. 3.12), при возбуждении током  $i_1$  контура, охватывающего зубец тела 1.

Найти аналитически проводимости ветвей эквивалентной магнитной цепи и их производные при перемещении тела 1 в направлении осей  $x$  и  $y$ .

При токе  $i_1 = 6000$  А, размерах  $b_1 = 0,02$  м,  $b_2 = 0,105$  м,  $b_3 = b_6 = 0,19$  м,  $b_4 = \delta = 0,01$  м,  $b_5 = 0,025$  м и длине ферромагнитных тел  $b_7 = 0,3$  м (в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа) определить электромагнитные силы, действующие на тело  $I$  в направлении осей  $x$  и  $y$ .

Принимаем магнитную проницаемость ферромагнитных тел  $\mu_c = \infty$  и считаем эти тела бесконечно протяженными в направлении оси  $x$  (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ), а глубину пазов настолько большой, что увеличение ее до бесконечности не повлияет на поле в зазоре.

▲ Так как магнитное поле непрерывно, то прямой поток  $\Phi$  в зазоре под намагниченным зубцом, охваченным током  $i_1$ , равен обратному потоку на всем остальном протяжении зазора. Образующаяся магнитная цепь состоит из двух последовательно включенных сопротивлений: сопротивления зоны зазора  $R$  под намагниченным зубцом и сопротивления зоны  $R'$  на всем остальном протяжении зазора вне намагниченного зубца. Сопротивление  $R$  конечно, а  $R'$  при бесконечно большой протяженности зазора равно нулю. В соответствии с законом полного тока сумма магнитных напряжений на этих сопротивлениях равна току контура ( $R\Phi + R'\Phi = i_1$ ). А так как магнитное напряжение зазора вне намагниченного зубца  $R'\Phi = 0$ , то магнитное напряжение зазора под зубцом  $R\Phi = i_1$ . Принимая потенциал тела 2 равным нулю ( $\varphi_2 = 0$ ), нетрудно убедиться в том, что магнитным напряжениям  $R\Phi_1 = i_1$  и  $R'\Phi = 0$  соответствует распределение потенциала по границе тела, показанное на рисунке. В зоне намагниченного зубца (на участке  $adcqm$ ) потенциал  $\varphi_1 = i_1$ . Вне этой зоны (левее точки  $a$  и правее точки  $m$ ) потенциал  $\varphi_1 = 0$ . Действительно, при таком распределении потенциала  $R\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 = i_1$ ;  $R'\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$ .

При заданном расстоянии  $b_2$  между осями пазов ферромагнитных тел  $I$  и 2 имеются зоны зазора с толщиной  $\delta$ , ширина которых не менее чем в 3 раза больше  $\delta$ :

$$b_2 - b_1 - b_5 \geq 3\delta.$$

При такой ширине этих зон в их центральной части устанавливается равномерное поле, что говорит об отсутствии взаимного влияния пазов друг на друга и позволяет рассматривать поле каждого из пазов изолировано как поле одиночного паза.

Поле одиночного бесконечно глубокого паза задается током размещенным на дне паза и потенциалами зубцов, расположенных левее и правее паза ( $\varphi_{\text{л}}$  и  $\varphi_{\text{п}} = \varphi_{\text{л}} + i$ ). Потенциал гладкого ферромагнитного тела, отделенного зазором  $\delta$  от тела с пазом, принимается равным нулю (рис. 3.13, а). Для упрощения анализа это поле раскладывается на два симметричных поля, одно из которых обладает нечетной (рис. 3.13, б), а другое — четной симметрией (рис. 3.13, в). Нечетная составляющая поля образуется током  $i$  на дне паза: при потенциале правого зубца

$$\varphi_S = (\varphi_{\text{п}} - \varphi_{\text{л}})/2 = i/2; \quad (3.31)$$

при потенциале левого зубца

$$-\varphi_S = (\varphi_{\text{л}} - \varphi_{\text{п}})/2 = -i/2.$$

Четная составляющая поля образуется при одинаковых потенциалах левого и правого зубцов:

$$\varphi_C = (\varphi_{\text{п}} + \varphi_{\text{л}})/2. \quad (3.32)$$

Поскольку и нечетное и четное поля симметричны относительно оси паза, достаточно определить их в зоне, например, правее оси паза, приняв за одну из граничных поверхностей области поля ось паза.

В нечетном поле ось паза — эквипотенциальная линия, потенциал которой равен нулю; в четном поле ось паза — линия поля.

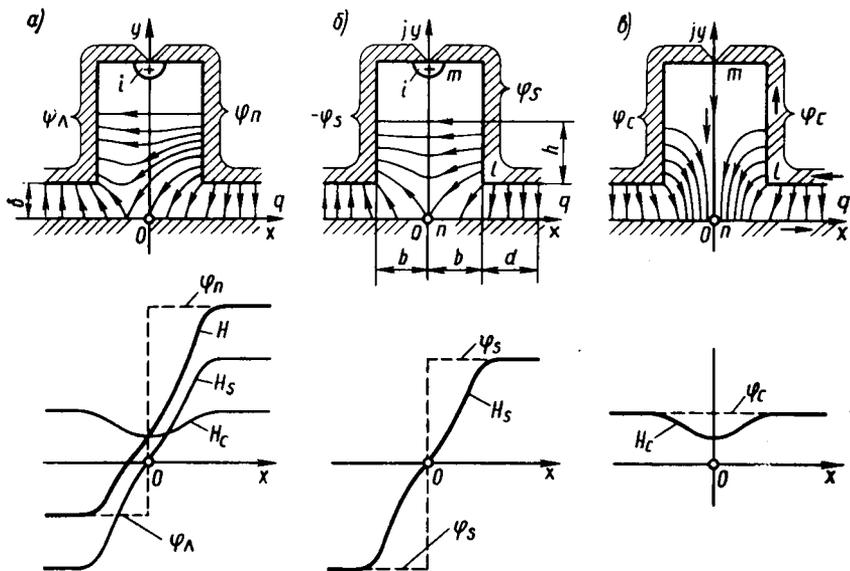


Рис. 3.13. Разложение поля одиночного паза с током (а) на нечетную (б) и четную (в) составляющие

Таким образом, как нечетное, так и четное поля нужно определить внутри четырехугольника  $nqtlm$ , две вершины которого,  $m$  и  $q$ , образуются в бесконечности «пересечением» параллельно направленных сторон. Для аналитического определения четного и нечетного полей в указанной области можно воспользоваться методом конформного преобразования. Разместив четырехугольник в комплексной плоскости  $z = x + jy$ , начало координат которой  $O$  совмещено с вершиной  $n$ , можно с помощью конформного преобразования Шварца—Кристоффеля превратить четырехугольник в действительную ось комплексной плоскости  $t = u + jv$ , а область внутри четырехугольника — в верхнюю часть этой плоскости, расположенную над ее действительной осью (рис. 3.14). Выбрав направление обхода четырехугольника (см. рис. 3.13, в) и размещая вершину  $q$  в плоскости  $t$  в  $\pm\infty$ , можно произвольно назначить координаты двух вершин на действительной оси: вершину  $l$  разместить в точке  $t = -1$ , вершину  $m$  — в точке  $t = 0$ . Вершина  $n$  размещается в точке  $t = a$ , координата которой подлежит определению.

Уравнение преобразования находят путем интегрирования дифференциального уравнения Шварца — Кристоффеля, которое в данном случае записывается в следующем виде:

$$dz/dt = S(t+1)^{1/2} t^{-1} (t-a)^{-1/2}. \quad (3.33)$$

Как показано, например, в [21], преобразование комплексных координат точек в плоскости  $t = u + jv$  в комплексные координаты соответствующих точек в плоскости  $z = x + jy$ , а также обратное преобразование, осуществляется в данном случае с помощью уравнения

$$z = 2S \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{a}} + \operatorname{arc th} \eta \right]. \quad (3.34)$$

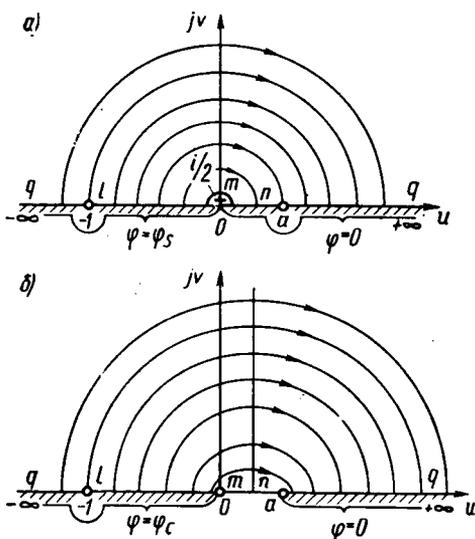


Рис. 3.14. Нечетное (а) и четное (б) поля одиночного паза, преобразованные в плоскости  $t$  по Шварцу — Кристоффелю

$B$  (3.33), (3.34)  $\eta = \sqrt{(t-a)/(t+a)}$  — промежуточная комплексная переменная;  $S = \delta/\pi$  — постоянная масштаба;  $a = (\delta/b)^2$  — координата вершины  $n$  в плоскости  $t$ .

Переноса заданные в плоскости  $z$  граничные условия без изменения в плоскость  $t$ , можно определить аналитически преобразованные в эту плоскость нечетное и четное поля. Семейство линий нечетного поля в виде окружностей с центром в точке  $m$ , в которой располагается ток  $i/2$ , показано на рис. 3.14, а. Семейство линий четного поля в виде эллипсов, фокусы которых помещаются в точках  $m$  и  $n$  — показано на рис. 3.14, б. Путем обратного преобразования можно получить картины нечетного и четного полей (см. рис. 3.13, б, в), а также аналитические выражения для модулей напряженности соответственно нечетного и четного полей

$$H_S = \frac{\Psi_S}{\delta} \left| \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} \right|, \quad (3.35)$$

$$H_C = \frac{\Psi_C}{\delta} \left| \sqrt{\frac{t}{t+1}} \right|. \quad (3.36)$$

В этих выражениях комплексная координата  $t$  имеет смысл параметра. Задаваясь  $t = u + jv$  и рассчитывая соответствующие ему  $H_S$  и  $H_C$ , а также комплексную координату  $z = x + jy$  по (3.34), можно найти модули напряженности нечетного и четного полей в любой точке комплексной плоскости  $z$ .

С помощью приведенного выражения для  $H_C$  нетрудно найти магнитную проводимость зазора для четного поля в зоне  $0 < x < b + d$  на единицу длины в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа. При  $d > 1,5 \delta$  эта проводимость составляет

$$\Lambda_C = \mu_0 \left( \frac{b+d}{\delta} - \frac{\gamma}{2} \right), \quad (3.37)$$

где  $\mu_0 (b+d)/\delta$  — проводимость гладкого зазора толщиной  $\delta$  в рассматриваемой зоне при равномерном поле;  $\mu_0 \gamma/2$  — уменьшение проводимости зазора в этой зоне за счет появления паза шириной  $2b$ ;  $\gamma$  — коэффициент проводимости,

$$\gamma = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{a}} - \ln \sqrt{1 + \frac{1}{a}} \right).$$

Магнитная проводимость той же зоны зазора для нечетного поля с на-  
пряженностью  $H_S$  при  $d > 1,5 \delta$  меньше проводимости для четного поля на  
величину  $\mu_0 \theta$ , т. е.

$$\Lambda_S = \Lambda_C - \mu_0 \theta = \mu_0 [(b+d)/\delta - \gamma/2 - \theta], \quad (3.38)$$

где  $\theta = (2/\pi) \ln 2 = 0,442$ .

Как видно, уменьшение проводимости при переходе от четного поля к  
нечетному  $\mu_0 \theta$  не зависит от соотношения размеров  $b$  и  $\delta$  и, как может быть  
показано, формы паза.

Часть линий нечетного поля (см. рис. 3.13, б) замыкается поперек паза,  
образуя пазовое рассеяние. На достаточно большом расстоянии от зазора  
 $h > 3b$  поле рассеяния в бесконечно глубоком пазу становится равномерным.  
Это позволяет определить магнитную проводимость для нечетного поля в па-  
зу в зоне  $0 < y < \delta + h$  по аналогии с определением проводимости для не-  
четного поля в зазоре. При  $h > 3b$  магнитная проводимость для нечетного  
поля в пазу (на половину ширины паза)

$$\Lambda_{\sigma S} = \mu_0 [(\delta + h)/b - \gamma'/2 - \theta], \quad (3.39)$$

где  $\gamma' = (4/\pi) (\sqrt{a} \arctg \sqrt{a} - \ln \sqrt{1+a})$ .

Так как  $a = (\delta/b)^2$  зависит от соотношения между размерами зазора и па-  
за, а  $\theta$  — постоянная величина, то проводимости  $\Lambda_C$ ,  $\Lambda_S$  и  $\Lambda_{\sigma S}$  являются  
функциями размеров  $\delta$ ,  $b$ ,  $h$  и  $d$ .

Возвратимся теперь к анализируемому полю от тока  $i_1$  в контуре, охва-  
тывающем зубец ферромагнитного тела 1 (см. рис. 3.12). Определим поток  
 $\Phi_1$ , сцепленный с этим контуром, как поток через поверхность  $abcdegfhm$ ,  
опирающуюся на контур тока  $i_1$ .

Для определения потока  $\Phi_1$  при заданном токе  $i_1$ , а также результирую-  
щей магнитной проводимости  $\Lambda_1 = \Phi_1/i_1$ , разобьем магнитное поле на три  
независимых поля: поля в области одиночного паза с осью  $ab$ , поля в области  
одиночного паза с осью  $mh$  и поля в области одиночного паза с осью  $el$   
(рис. 3.12). Затем каждое из этих полей представим (при найденном распре-  
делении потенциалов на граничных поверхностях) в виде суммы четной и не-  
четной составляющих полей. Для паза с осью  $ab$  с помощью (3.31), (3.32)  
найдем, что нечетная и четная составляющие полей должны быть определены  
соответственно при потенциалах:

$$\varphi_S = (\varphi_1 - \varphi'_1)/2 = i_1/2; \quad \varphi_C = (\varphi_1 + \varphi'_1)/2 = i_1/2;$$

для паза с осью  $mh$  — при потенциалах

$$-\varphi_S = -(\varphi_1 - \varphi'_1)/2 = -i_1/2; \quad \varphi_C = (\varphi_1 + \varphi'_1)/2 = i_1/2,$$

для паза с осью  $el$ , в зоне которого существует четное поле,  $\varphi_C = i_1$

Полагая, что на линиях  $gf$  и  $dc$ , равноудаленных от края ближайших па-  
зов и нормальных к телам 1 и 2, поля становятся равномерными, можно счи-  
тать, что эти линии совпадают с линиями поля, и рассчитывать потоки в об-  
ласти каждого из данных пазов независимо. При этом для нечетных составляю-  
щих поля, возникающих под действием потенциалов  $\varphi_S$ , и  $-\varphi_S$ , потоки оп-  
ределяем по (3.38) и (3.39), а для четных составляющих поля, возникающих  
под действием потенциалов  $\varphi_C$ , — по (3.37).

Поток  $\Phi_1$  складывается из нечетных и четных потоков на участках  $ab$ ,  
 $bc$ ,  $cd$ ,  $de$ ,  $eg$ ,  $gf$ ,  $fh$ ,  $hm$  обозначенных соответствующими индексами,

$$\Phi_1 = \Phi_{ab} + (\Phi_{bc} + \Phi_{cd} + \Phi_{de}) + (\Phi_{eg} + \Phi_{gf} + \Phi_{fh}) + \Phi_{hm},$$

где

$$\Phi_{ab} = \frac{i_1}{2} \mu_0 b_7 \left( \frac{\delta + h}{b_1} - \frac{\gamma'_1}{2} - \theta \right) = i_1 \Lambda_{ab};$$

$$\begin{aligned} \Phi_{be} = \Phi_{bc} + \Phi_{de} &= \frac{i_1}{2} \Lambda_C(bc) + \frac{i_1}{2} \Lambda_S(bc) + i_1 \Lambda_C(de) = i_1 \mu_0 b_7 \left( \frac{b_3 - b_2}{\delta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_5}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = i_1 \Lambda_{be}; \\ \Phi_{cd} &= \Phi_{gh} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{eh} = \Phi_{eg} + \Phi_{fh} &= i_1 \Lambda_C(eg) + \frac{i_1}{2} \Lambda_C(fh) + \frac{i_1}{2} \Lambda_S(fh) = i_1 \mu_0 \left( \frac{b_2}{\delta} - \frac{\gamma_1}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_5}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = i_1 \Lambda_{eh}; \end{aligned}$$

$$\gamma'_1 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\delta}{b_1} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{b_1} - \ln \sqrt{1 + (\delta/b_1)^2} \right);$$

$$\gamma_1 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{b_1}{\delta} \operatorname{arctg} \frac{b_1}{\delta} - \ln \sqrt{1 + (b_1/\delta)^2} \right);$$

$$\gamma_5 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{b_5}{\delta} \operatorname{arctg} \frac{b_5}{\delta} - \ln \sqrt{1 + (b_5/\delta)^2} \right).$$

Таким образом, рассматриваемое магнитное поле может быть эквивалентировано магнитной цепью, состоящей из четырех параллельно включенных ветвей с магнитными проводимостями:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{ab} = \Lambda_{B1} &= \frac{\mu_0 b_7}{2} \left( \frac{\delta + h}{b_1} - \frac{\gamma'_1}{2} - \theta \right); \\ \Lambda_{hm} = \Lambda_{B4} &= \frac{\mu_0 b_7}{2} \left( \frac{\delta + h}{b_1} - \frac{\gamma'_1}{2} - \theta \right); \\ \Lambda_{be} = \Lambda_{B2} &= \mu_0 b_7 \left( \frac{b_3 - b_2}{\delta} - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_5}{2} - \frac{\theta}{2} \right); \\ \Lambda_{eh} = \Lambda_{B3} &= \mu_0 b_7 \left( \frac{b_2}{\delta} - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_5}{2} - \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Для определения силы, действующей на тело  $I$  в направлении оси  $y$ , нужно принять  $q = y = \delta$ , воспользоваться (3.29) и подставить в это уравнение проводимости по (3.40).

При изменении координаты  $y$ , характеризующей положение тела  $I$ , все размеры, за исключением размера зазора  $b_4 = \delta = y$ , остаются постоянными. Поэтому все производные  $\partial b_i / \partial y$  (за исключением  $\partial b_4 / \partial y = 1$ ) равны нулю. Это обстоятельство, а также то, что все ветви цепи включены параллельно и возбуждаются одной и той же МДС ( $i_1 = i_{B1} = i_{B2} = i_{B3} =$

$= i_{B4}$ ) заметно упрощает преобразования и позволяет получить выражение для силы в следующем виде:

$$D_y = \frac{i_1^2}{2} \left( \frac{\partial \Lambda_{B1}}{\partial \delta} + \frac{\partial \Lambda_{B2}}{\partial \delta} + \frac{\partial \Lambda_{B3}}{\partial \delta} + \frac{\partial \Lambda_{B4}}{\partial \delta} \right) = \frac{\mu_0 i_1^2 b_7}{2\delta} \left( \frac{b_3}{\delta} - \frac{4}{\pi \sqrt{a_5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{a_5}} - \frac{4}{\pi \sqrt{a_1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{a_1}} - \sqrt{a_1} + \frac{2 \sqrt{a_1}}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{a_1} \right),$$

где  $a_1 = (\delta/b_1)^2$ ;  $a_5 = (\delta/b_5)^2$ .

Используя формулы преобразования для обратных тригонометрических функций, это выражение можно записать более компактно:

$$D_y = -\frac{\mu_0 i_1^2 b_7}{2\delta} \left[ \frac{b_3}{\delta} - \frac{2}{\pi \sqrt{a_5}} \left( \operatorname{arc} \sin \frac{1-a_5}{1+a_5} + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{2+a_1}{\pi \sqrt{a_1}} \left( \operatorname{arc} \sin \frac{1-a_1}{1+a_1} + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

При заданных размерах и токе  $a_1 = (\delta/b_1)^2 = 0,25$ ;  $a_5 = (\delta/b_5)^2 = 0,16$  сила, действующая на тело  $l$  в направлении оси  $y$ , равна  $D_y = -8176$  Н.

Если бы пазы отсутствовали, т. е.  $b_1 = 0$ ,  $b_5 = 0$ ,  $a_1 = 0$  и  $a_5 = 0$ , то эта сила была бы равна  $D_y = -12893$  Н.

Для определения силы, действующей на тело  $l$  в направлении оси  $x$ , нужно принять  $q = x = b_2$ , воспользоваться уравнением (3.29) и подставить в него проводимости по (3.40). При изменении координаты  $x$  все размеры  $b_i$ , за исключением  $b_2 = x$ , остаются неизменными. Поэтому все производные  $db_i/dx$  (за исключением  $db_2/dx = 1$ ) равны нулю.

Это позволяет записать выражение для силы в виде

$$D_x = \frac{i_{B1}^2}{2} \frac{\partial \Lambda_{B1}}{\partial b_2} + \frac{i_{B2}^2}{2} \frac{\partial \Lambda_{B2}}{\partial b_2} + \frac{i_{B3}^2}{2} \frac{\partial \Lambda_{B3}}{\partial b_2} + \frac{i_{B4}^2}{2} \frac{\partial \Lambda_{B4}}{\partial b_2}.$$

Заметив, что

$$\partial \Lambda_{B1} / \partial b_2 = \partial \Lambda_{B4} / \partial b_2 = 0; \quad \partial \Lambda_{B3} / \partial b_2 = -\partial \Lambda_{B2} / \partial b_2 = \mu_0 \frac{b_7}{\delta},$$

упростим это выражение следующим образом:

$$D_x = \frac{\mu_0 b_7}{2\delta} (i_{B3}^2 - i_{B2}^2).$$

Из этого выражения следует, что сила  $D_x$  может отличаться от нуля только при  $|i_{B3}| \neq |i_{B2}|$ , например в том случае, когда в пазу с осью  $el$  имеется ток.

В рассматриваемой задаче ветви  $B1$ ,  $B2$ ,  $B3$  и  $B4$  включены параллельно и возбуждаются током  $i_1 = i_{B1} = i_{B2} = i_{B3} = i_{B4}$ . Поэтому сила, действующая на тело  $l$  в направлении оси  $x$ ,  $D_x = 0$ .

**3.5.2. Численное определение приращений проводимостей ветвей магнитной цепи.** Если магнитное поле системы определяется численным путем, то для вычисления приращений проводимостей ветвей магнитной цепи нужно выполнять численный расчет магнитного поля системы дважды: 1) в исходном состоянии системы;

2) после замены системы линейной моделью и перемещения части системы, на которую действует определяемая сила или момент.

Если требуется определить силу, действующую на часть системы в заданном направлении, то нужно переместить ее относительно другой части системы на малое расстояние  $\Delta \bar{q}$  в заданном направлении, и для нового положения частей системы повторить расчет магнитного поля.

Если требуется определить момент, действующий на часть системы относительно заданной оси, то нужно повернуть эту часть относительно другой части системы на малый угол  $\Delta q = \Delta \theta$  вокруг заданной оси и для нового положения частей системы повторить расчет магнитного поля.

Расчет поля в исходном состоянии производят с учетом магнитной нелинейности системы с помощью заданных характеристик намагничивания для ее сред. В результате расчета определяют потоки  $\Phi_k$ , сцепленные с отдельными электрическими контурами или МДС  $i_{\text{вс}}$ , и потоки  $\Phi_{\text{вс}}$  всех ветвей эквивалентной магнитной цепи. По ним рассчитывают соответствующие магнитные проводимости

$$\Lambda_k = \Phi_k / i_k \text{ или } \Lambda_{\text{вс}} = \Phi_{\text{вс}} / i_{\text{вс}}.$$

Для найденного поля рассчитывают также магнитные проницаемости во всех элементах нелинейных сред  $\mu_0 \mu_r = B/H$ , которые в дальнейшем при переходе к линейной модели системы считают постоянными.

Магнитное поле для нового положения частей системы рассчитывают в ее линейной модели при таких же МДС электрических контуров  $i_k$  и таких же магнитных проницаемостях во всех элементах сред, как в исходном состоянии системы.

В результате расчета магнитного поля для нового положения частей системы определяют потоки  $\Phi_k^h$ , сцепленные с отдельными электрическими контурами или МДС  $i_{\text{вс}}^h$ , и потоки  $\Phi_{\text{вс}}^h$  тех же ветвей эквивалентной магнитной цепи, что и в исходном состоянии. По ним рассчитываются соответствующие магнитные проводимости  $\Lambda_k^h = \Phi_k^h / i_k$  и  $\Lambda_{\text{вс}}^h = \Phi_{\text{вс}}^h / i_{\text{вс}}^h$ .

Затем по разности проводимостей в новом и исходном положениях определяют приращения проводимостей  $\Delta \Lambda_k = \Lambda_k^h - \Lambda_k$  и  $\Delta \Lambda_{\text{вс}} = \Lambda_{\text{вс}}^h - \Lambda_{\text{вс}}$  и приближенные значения их производных по перемещению  $\Delta q$ .

$$\partial \Lambda_k / \partial q \approx \Delta \Lambda_k / \Delta q \text{ и } \partial \Lambda_{\text{вс}} / \partial q \approx \Delta \Lambda_{\text{вс}} / \Delta q. \quad (3.41)$$

По формуле (3.29) или (3.30) рассчитывают искомую обобщенную ЭМС.

**Пример 3.7.** Для условий примера 3.6 на основании численных расчетов полей выразить через приращения проводимостей магнитной цепи электромагнитную силу, действующую на тело  $I$  в направлении оси  $y$  (рис. 3.12).

▲ Расчет магнитного поля произведем методом конечных разностей. С этой целью предварительно разобьем область поля на несколько зон, в каждой из которых рассчитаем магнитное поле методом конечных разностей. Поле в зоне около паза с осью  $el$  рассчитаем при следующем распределении потенциалов на границе: на участке  $de$   $\varphi = i_1$ , на участке  $cl$   $\varphi = 0$ ; на участках  $cd$  и  $fg$ , где поле можно считать равномерным,  $\varphi$  линейно изменится от 0 до  $i_1$ . Поле в зоне около паза с осью  $ab$  рассчитаем при следующем распределении потенциалов на границе: на участке  $da$   $\varphi = i_1$ ; на участке  $arnbc$   $\varphi = 0$ ; на участке  $cd$ , где поле можно считать равномерным,  $\varphi$  линейно изменится от 0 до  $i_1$ . Поле в зоне около паза с осью  $mh$  рассчитаем при аналогичном распределении потенциалов на границе: на участке  $gm$   $\varphi = i_1$ ; на участке  $mpkhf$   $\varphi = 0$ ; на участке  $fg$   $\varphi$  линейно изменится от 0 до  $i_1$ .

Расчеты полей в каждой из этих зон были проведены на ЭВМ с помощью универсальной программы\*.

Расчеты проводились для исходного положения тел 1 и 2 и при смещении тела 1 на расстояние  $\Delta y = \Delta u = 0,001$  м, т. е. при зазоре, равном  $\delta + \Delta y = 0,01 + 0,001 = 0,011$  м.

Определены проводимость для потока возбуждающего контура в исходном положении  $\Lambda_1 = 55,48 \cdot 10^{-7}$  Гн; в новом положении (после смещения)  $\Lambda_1^* = 51,18 \cdot 10^{-7}$  Гн.

По этим проводимостям с помощью (3.29) и (3.30) найдена сила, действующая на тело 1 в направлении оси  $y$

$$D_y = \frac{i_1^2}{2} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} = -7722 \text{ Н.}$$

Сравнивая эту силу с силой, полученной в примере 3.6 аналитически, видим, что отличаются они на 5,4 %. Объясняется это расхождением тем, что в численном расчете приходится определять малую разность двух больших величин, найденных с известной погрешностью.

**Пример 3.8.** При тех же размерах тел 1 и 2 ( $b_1 = 0,02$  м,  $b_3 = 0,19$  м,  $b_5 = 0,025$  м,  $b_6 = 0,19$  м), зазоре между телами  $b_4 = \delta = 0,01$  м; токе  $i_1 = 6000$  А, что и в примере 3.6, но при ином расстоянии между осями пазов  $b_2 = 0,16$  м, найти электромагнитные силы, действующие на тело 1 в направлении осей  $y$  и  $x$ . Как видно из рис. 3.15, на котором показано в масштабе взаимное размещение тел при  $b_2 = 0,16$  м, в данном случае паза тела 1 располагаются напротив пазов тела 2. Это исключает возможность аналитического подхода к расчету поля.

▲ Магнитное поле рассчитаем методом конечных разностей с помощью универсальной программы, упомянутой выше. Предварительно разобьем область поля на три зоны, в каждой из которых поле рассчитывается независимо.

В зоне  $cdg_1f_1$ , где поле можно считать равномерным, поле и проводимости рассчитаем аналитически;

в зоне  $fgaedclb$  поле рассчитаем при следующем распределении потенциалов на границе: на участке  $aed$   $\varphi = i_1$ , на участке  $clbfga$   $\varphi = 0$ , на участке  $cd$ , где поле равномерно,  $\varphi$  линейно изменится от 0 до  $i_1$ ;

в зоне  $f_1g_1a_1e_1d_1c_1l_1b_1$  — при аналогичном распределении потенциалов на границе: на участке  $g_1a_1$   $\varphi = i_1$ , на участке  $a_1e_1d_1c_1l_1b_1f_1$   $\varphi = 0$ , на участке  $f_1g_1$   $\varphi$  линейно изменится от 0 до  $i_1$ .

Расчеты проведены на ЭВМ при исходном положении тел 1 и 2 и при смещении тела 1 на расстояние  $\Delta y = \Delta u = 0,001$  м (т.е. при зазоре, равном  $\delta + \Delta y = 0,01 + 0,001 = 0,011$  м), а также при смещении тела 1 на расстояние  $\Delta y = \Delta x = -0,001$  м.

\* Универсальная программа для расчета двумерных полей методом конечных разностей с автоматическим разбиением на элементы разработана канд. техн. наук Н. А. Серихиным. Им же были проведены расчеты на ЭВМ.

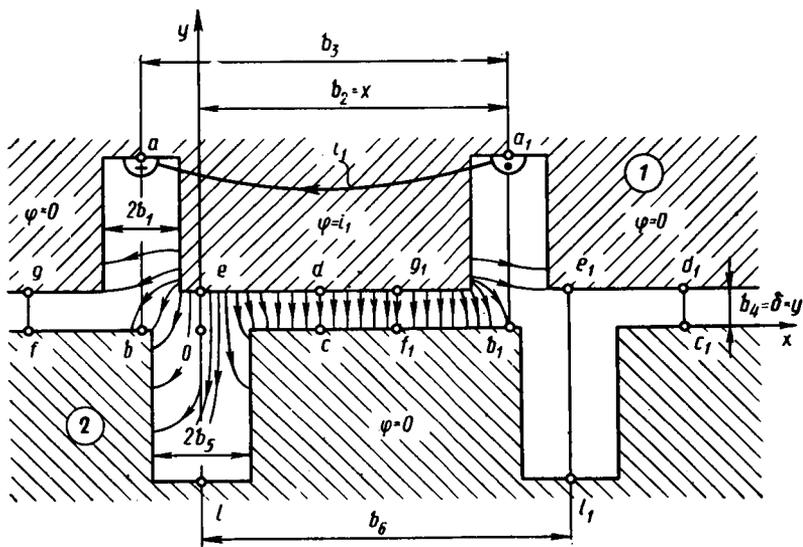


Рис. 3.15. Определение электромагнитных сил в поле зубцового контура при  $b_2=0,16$  м

Определены проводимости для потока возбуждающего контура в исходном положении

$$\Lambda_1 = 56,92 \cdot 10^{-7} \text{ Гн};$$

после смещения на  $\Delta y$  и  $\Delta x$

$$\Lambda_{1y}^H = 52,39 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}; \quad \Lambda_{1x}^H = 56,63 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

По этим проводимостям с помощью (3.29) и (3.41) найдена сила, действующая на тело  $l$  в направлении оси  $y$

$$D_y = \frac{i_1^2}{2} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} = \frac{6000^2 (52,39 - 56,92) 10^{-7}}{2 (0,001)} = -8154 \text{ Н},$$

и сила, действующая на тело  $l$  в направлении оси  $x$ ,

$$D_x = \frac{i_1^2}{2} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} = \frac{6000^2 (56,63 - 56,92) 10^{-7}}{2 (-0,001)} = 522 \text{ Н}.$$

### 3.6. Выражение приращения магнитной энергии при перемещении выделенного объема через величины магнитного поля при исходном положении объема

Определим электромагнитную силу или момент, действующие на объем  $V$  выделенной части нелинейной системы (рис. 3.16). Ограничим объем  $V$  разделительной поверхностью  $S$ , показанной двойной

линией. С целью упрощения анализа проведем поверхность  $S$  (12345678) так, чтобы она включала только участки эквипотенциальных и магнитных поверхностей и нигде не совпадала с поверхностями разрыва магнитной проницаемости.

На участках 12, 34, 56, 78 поверхность  $S$  является эквипотенциальной поверхностью  $S_0$ , на участках 23, 45, 67, 81 — магнитной поверхностью  $S_m$ . Разобьем область поля на отдельные ветви таким образом, чтобы эти ветви размещались целиком либо в объеме  $V$  выделенной части системы, либо в объеме остальной части системы  $V'$ . Тогда ветви B6 — B9 расположатся в объеме  $V$ , ветви B1 — B5; B10 — B14 — в объеме  $V'$ . Кроме того, используя возможность, выявленную в § 1.5, заменим заданные токи в возбуждающих контурах  $i_1, i_2, i_3$  (рис. 3.16) на систему поверхностных токов, охватывающих каждую из ветвей магнитного поля по отдельности (рис. 3.17).

Поверхностные токи  $i_{вс}$  изображены с целью упрощения рисунка в виде линейных контуров с сосредоточенными токами (действительное распределение поверхностных токов  $i_{вс}$  по боковой магнитной поверхности ветви показано на рис. 1.12).

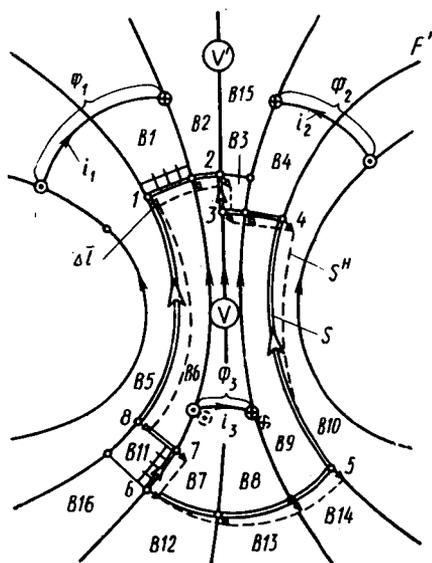


Рис. 3.16. Магнитное поле нелинейной системы, образованное токами в возбуждающих контурах

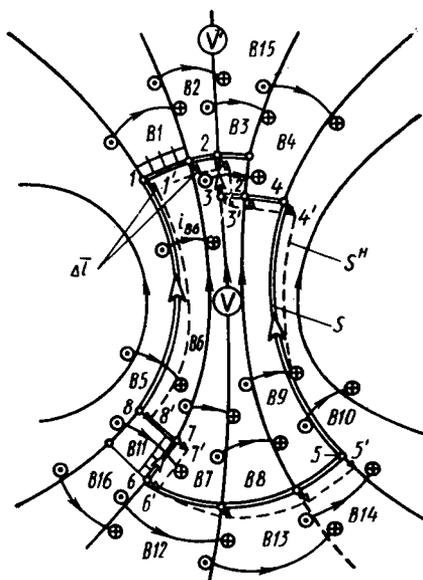


Рис. 3.17. Эквивалентирование магнитного поля в нелинейной системе с помощью поверхностных токов  $i_{вс}$  в контурах, охватывающих зоны отдельных ветвей этого поля

МДС  $i_{вн}$  воспроизводит исходное поле в пределах ветви, если она выбрана равной падению магнитного напряжения на ветви (см. 1.5.2):

$$i_{вн} = \int_0^{l_{вн}} \bar{H} d\bar{l} = u_{вн}, \quad (3.42)$$

где  $d\bar{l}$  — элемент одной из линий поля ветви;  $l_{вн}$  — длина одной из линий поля ветви.

Для определения силы, действующей на объем  $V$  в направлении приращения линейной координаты  $q$ , все элементы объема  $V$  и раздельной поверхности  $S$  необходимо сместить на одинаковое расстояние

$$|\Delta \bar{l}| = \Delta q. \quad (3.43)$$

Для определения электромагнитного момента относительно некоторой оси  $z$ , действующего на объем  $V$ , угловую координату  $q = \theta$ , характеризующую положение этого объема, следует изменить на  $\Delta q = \Delta \theta$ . При этом элементы объема  $V$  и ограничивающей его поверхности  $S$ , положение которых относительно некоторой точки на оси  $z$  определяет вектор  $\bar{r}$ , смещаются на расстояние

$$\Delta \bar{l} = [\bar{q}_z \bar{r}] \Delta q. \quad (3.44)$$

В результате изменения на  $\Delta q$  координаты  $q$ , определяющей положение объема  $V$ , элементы этого объема и ограничивающей его поверхности  $S$  переместятся на расстояние  $\Delta \bar{l}$  (рис. 3.17). Раздельная поверхность займет новое положение  $S''$  (1'2' 3' 4' 5' 6' 8'), показанное пунктирной линией.

Так как заданная система возбуждающих токов  $i_k = i_1, i_2, \dots, i_N$  изменена на эквивалентную систему токов  $i_{вн} \in i_{вн1}, i_{вн2}, \dots, i_{внq}$ , возбуждающих отдельные ветви магнитной цепи нелинейной системы, то приращение энергии  $\Delta W$ , которое произойдет при перемещении объема  $V$ , можно записать в виде суммы приращений энергии ветвей магнитной цепи  $\Delta W = \sum_{s=1}^q \Delta W_{внs}$ , а приращение коэнергии  $\Delta W'$  — в виде суммы приращений коэнергии ветвей магнитной цепи  $\Delta W' = \sum_{s=1}^q \Delta W'_{внs}$ .

Причем в соответствии с результатами, полученными в § 2.1, 2.2, для произвольной системы возбуждающих контуров теперь, когда поле возбуждается контурами, охватывающими отдельные ветви магнитной цепи, при определении приращения энергии перемещение объема  $V$  следует производить в условиях постоянства потока ветви, т.е. при  $\Phi_{вн} = \text{const}$ .

Соответственно (см. § 2.3), при определении приращения коэнергии перемещение объема  $V$  следует производить в условиях постоянства МДС ветви или падения магнитного напряжения ветви  $i_{вс} = u_{вс} = \text{const}$ .

Разумеется, приращение магнитной энергии  $\Delta W_{вс}$  произойдет лишь в тех ветвях, размеры зон которых изменяются при перемещении. Поскольку размеры зон ветвей перемещаемой части системы в объеме  $V$  при перемещении сохраняются, приходим к заключению, что изменяются лишь размеры зон ветвей и в неподвижной части системы в объеме  $V'$ . Причем изменение размеров зон и приращение энергии происходят только в тех ветвях неподвижной части системы, которые примыкают к разделительной поверхности  $S$ . К числу таких ветвей относятся, например, ветви неподвижной части системы (рис. 3.17), примыкающие к разделительной поверхности  $S$  ( $B1 - B5, B10, B11 - B14$ ).

Ветви неподвижной части системы, примыкающие к разделительной поверхности  $S$ , можно разбить на три группы:

ветви, примыкающие к эквипотенциальным участкам поверхности  $S$  ( $B1, B2, B4, B12 - B14$ );

ветви, примыкающие к магнитным участкам поверхности  $S$  ( $B5, B10$ );

ветви, примыкающие и к эквипотенциальным, и к магнитным участкам поверхности  $S$  ( $B3, B11$ ).

Подход к определению приращения энергии ветви зависит от того, какая из ограничивающих зону ветвей поверхностей, магнитная или эквипотенциальная, изменяет свое положение при перемещении элементов разделительной поверхности на  $\Delta \bar{l}$ .

Найдем сначала приращение энергии, которое происходит при изменении положения эквипотенциальной разделительной поверхности, ограничивающей зону ветви (рис. 3.18, а). Предположим, что в исходном состоянии эта поверхность занимает положение  $S = S_{вс}$ , а после перемещения — положение  $S'' = S_{вс}''$ . Ориентацию элементов  $dS$  перемещаемой эквипотенциальной поверхности будем определять нормальным ортом  $\bar{n}$ , направленным в сторону неподвижной части системы, т. е. внутрь зоны ветви. После перемещения каждый элемент поверхности  $dS$  переносится на расстояние  $\Delta \bar{l}$ .

Будем считать, перемещение эквипотенциальной поверхности  $S_{вс}$ , ограничивающей зону ветви с индексом  $вс$ , производится при условии постоянства потока ветви,  $\Phi_{вс} = \text{const}$ . Осуществим выполнение этого условия за счет сохранения потоков  $\Phi_{эс}$  элементарных ветвей, примыкающих к поверхности  $S_{вс}$ , из которых складывается поток ветви  $\Phi_{вс} = \Sigma \Phi_{эс} = \text{const}$ .

Одна из таких элементарных ветвей (рис. 3.18, а) опирается на элемент  $dS$  эквипотенциальной разделительной поверхности (заштрихован на рисунке). Поток этой элементарной ветви  $\Phi_{эс} = -(\bar{B}\bar{n}) dS$  при перемещении сохраняется постоянным ( $\Phi_{эс} = \text{const}$ ).

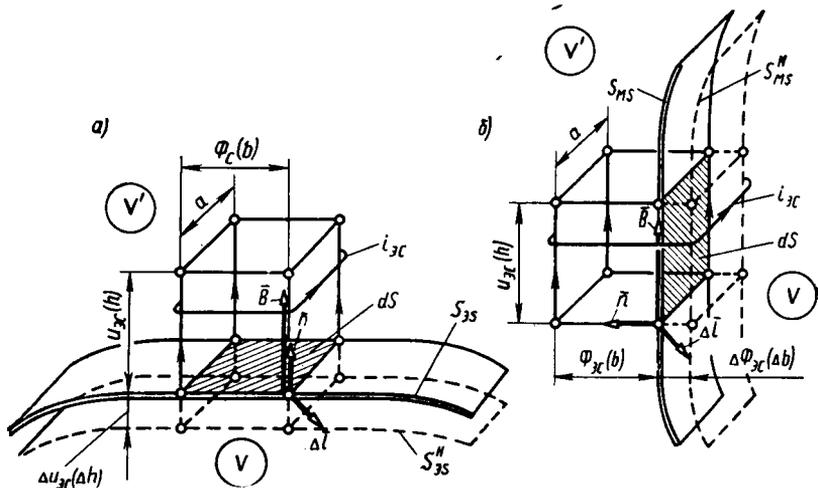


Рис. 3.18. Определение приращения магнитной энергии элементарной ветви при перемещении:

$u$  — ее нормального сечения (элемента эквипотенциальной разделительной поверхности);  
 $b$  — элемента ее боковой (магнитной) поверхности

Так как при перемещении сечение элементарной ветви и нормаль сохраняются ( $dS = \text{const}$ ,  $n = \text{const}$ ), то условие  $\Phi_{zc} = \text{const}$  выполняется только в том случае, если перемещение одной из частей системы относительно другой части системы производится при сохранении неизменной индукции поля во всех элементарных ветвях перемещаемой и неподвижной частей системы, в том числе в рассматриваемой элементарной ветви с сечением  $dS$ , т. е. при выполнении условия  $B = \Phi_{zc} / dS = \text{const}$ . Но при  $B = \text{const}$  во всех элементарных ветвях системы сохранится неизменной и магнитная проницаемость  $\mu = \text{const}$ .

Во всех элементах она будет такой же, как при заданном магнитном поле в исходном состоянии (до перемещения).

Или, иными словами, при перемещении поверхности  $S_{zs}$  нелинейная система, как уже было показано другим путем в § 2.1, должна быть заменена ее линейной моделью, обладающей требуемыми свойствами в отношении постоянства магнитной проницаемости. И вычисление приращений энергии элементарных ветвей при перемещении должно быть произведено в условиях такой линейной модели.

Для поддержания потока элементарной ветви  $\Phi_{zc}$  и индукции  $B$  в ее пределах постоянными, МДС элементарной ветви  $i_{zc}$  должна получить приращение  $\Delta i_{zc}$ , равное приращению  $\Delta u_{zc}$  магнитного напряжения ветви за счет увеличения ее длины на  $\Delta h$ :

$$\Delta i_{zc} = \Delta u_{zc} = H \Delta h,$$

где  $\Delta h = -\bar{n}\Delta l = -\Delta l \cos(\bar{n}\Delta l)$  — увеличение длины элементарной ветви за счет перемещения  $dS$  на  $\Delta \bar{l}$ ;  $H = B/(\mu_r \mu_0) = \text{const}$  — напряженность магнитного поля в пределах ветви.

Таким образом, после перемещения МДС элементарной ветви

$$i_{\text{эс}}^H = i_{\text{эс}} + \Delta i_{\text{эс}}.$$

Приращение энергии элементарной ветви при перемещении поверхности  $S_{\text{эс}}$  при  $\Phi_{\text{эс}} = \text{const}$  в условиях линейной модели найдем по (2.7):

$$\Delta W_{\text{эс}} = W_{\text{эс}}^H - W_{\text{эс}} = \frac{\Phi_{\text{эс}} \Delta i_{\text{эс}}}{2} = -\frac{B^2}{2\mu_r \mu_0} \Delta l \cos(\bar{n}, \Delta \bar{l}) dS. \quad (3.45)$$

Это приращение энергии представляет собой энергию, которая заключена при  $\bar{B} = \text{const}$  в приращении объема ветви  $\Delta V = -\Delta l \cos(\bar{n}, \Delta \bar{l}) dS$  за счет перемещения элемента эквипотенциальной поверхности  $dS$ , так как  $B^2/(2\mu_r \mu_0)$  имеет смысл объемной плотности магнитной энергии в пределах элементарной ветви.

Приращение энергии ветви с индексом  $vs$  за счет перемещения ограничивающей ее зону эквипотенциальной разделительной поверхности  $S_{vs}$  будет складываться из приращений энергии элементарных ветвей, входящих в ее объем и примыкающих к поверхности  $S_{vs}$ :

$$\left. \begin{matrix} W_{vs} \\ (\Phi_{vs} = \text{const}) \end{matrix} \right|_{(\Phi_{\text{эс}} = \text{const})} = \sum_{S_{\text{эс}}} \Delta W_{\text{эс}} = - \int_{S_{\text{эс}}} \frac{B^2}{2\mu_r \mu_0} \Delta l \cos(\bar{n}, \Delta \bar{l}) dS. \quad (3.46)$$

По (3.46) можно рассчитать, например, приращения энергии ветвей  $B1, B2, B4, B12, B13, B14$  (см. рис. 3.17).

Рассмотрим перемещение *магнитной разделительной поверхности*  $S_{ms}$ , ограничивающей зону ветви с индексом  $BS$ . Предположим, что до перемещения эта магнитная поверхность занимала положение  $S_{ms}$ , а после перемещения положение —  $S^H \dots S_{ms}^H$  (рис. 3.18, б).

После перемещения поверхности  $S_{ms}$  каждый элемент этой поверхности с нормалью  $\bar{n}$  переместится на расстояние  $\Delta \bar{l}$ .

Будем считать, что перемещение магнитной поверхности  $S_{ms}$  производится при условии постоянства МДС или магнитного напряжения ветви  $i_{vs} = u_{vs} = \text{const}$ .

Выполним это условие за счет сохранения МДС  $i_{\text{эс}}$  или магнитных напряжений элементарных ветвей, примыкающих к поверхности  $S_{ms}$ , из которых складывается МДС или магнитное напряжение ветви:

$$i_{vs} = u_{vs} = \sum i_{\text{эс}} = \sum u_{\text{эс}}.$$

Рассмотрим одну из таких элементарных ветвей, примыкающих к поверхности  $S_{ms}$ . Боковой поверхностью этой элементарной ветви в исходном состоянии является прямоугольный элемент  $dS$  раздвигательной магнитной поверхности  $S_{ms}$ , заштрихованный на рис. 3.18, б. Обозначим длину элементарной ветви вдоль линий поля  $h$  и ее ширину  $a$ . В силу малости размеров элемент  $dS = ha$  можно считать плоским и характеризовать его положение в пространстве нормалью  $\bar{n}$ , направленной в сторону неперемещаемой части системы  $V'$ .

МДС элементарной ветви  $i_{эс} = u_{эс}$  при перемещении сохраняется постоянной:

$$i_{эс} = u_{эс} = Hh = Bh/(\mu_r \mu_0) = \text{const.}$$

Поскольку длина  $h$  элементарной ветви при перемещении поверхности  $S_{ms}$  сохраняется, условие  $i_{эс} = u_{эс} = \text{const}$  для МДС и магнитных напряжений всех элементарных ветвей, примыкающих к поверхности  $S_{ms}$ , выполняется только в том случае, если индукция  $B$  в пределах всех таких элементарных ветвей остается при перемещении  $S_{ms}$  неизменной.

При  $B = \text{const}$  сохранится неизменной и магнитная проницаемость во всех элементах ветви  $\mu = \text{const}$ .

Или, иными словами, при перемещении поверхности  $S_{ms}$  нелинейная система должна быть заменена ее линейной моделью, обладающей требуемыми свойствами в отношении постоянства магнитной проницаемости. А вычисление приращений коэнергии элементарных ветвей должно быть произведено в условиях такой линейной модели.

При поддержании МДС элементарной ветви  $i_{эс}$  и индукции  $B$  в ее пределах неизменными поток элементарной ветви, равный в исходном состоянии (до перемещения)  $\Phi_{эс}$ , получит приращение  $\Delta\Phi_{эс}$  за счет увеличения размера  $b$  на  $\Delta b$  в направлении нормали  $\bar{n}$ :

$$\Delta\Phi_{эс} = Ba\Delta b,$$

где  $\Delta b = (\bar{n}\Delta\bar{l}) = \Delta l \cos(\bar{n}, \Delta\bar{l})$  — увеличение размера  $b$  за счет перемещения элемента поверхности  $dS = ah$  на  $\Delta b$ .

Таким образом после перемещения поток элементарной ветви составляет  $\Phi_{эс}'' = \Phi_{эс}' + \Delta\Phi_{эс}$ .

Приращение коэнергии  $\Delta W'_{эс}$  элементарной ветви при перемещении поверхности  $S_{ms}$  в линейной модели найдем по (2.15). При перемещении элемента  $dS$  магнитной поверхности  $S_{ms}$  на  $dq$  при  $i_{эс} = \text{const}$  ( $B = \text{const}$ )

$$\Delta W'_{эс} = (W'_{эс})'' - W'_{эс}' = \frac{i_{эс} \Delta\Phi_{эс}}{2} = - \frac{B^2}{2\mu_r \mu_0} \Delta l \cos(\bar{n}, \Delta\bar{l}) dS. \quad (3.47)$$

Приращение коэнергии  $\Delta W'_{\text{эс}}$  по (3.47) представляет собой коэнергию, которая при  $B = \text{const}$  заключена в приращении объема этой ветви  $dV$  за счет перемещения элемента магнитной поверхности, так как  $B^2/(2\mu_r\mu_0)$  имеет смысл объемной плотности магнитной коэнергии в пределах элементарной ветви.

Исходя из (2.17), получим формулу для приращения энергии линейной модели элементарной ветви за счет перемещения элемента магнитной поверхности  $dS$  при  $\Phi_{\text{эс}} = \text{const}$ :

$$\Delta W_{\text{эс}} = -\Delta W'_{\text{эс}} = \frac{B^2}{2\mu_r\mu_0} \Delta l \cos(\bar{n}, \bar{l}) dS. \quad (3.48)$$

Это выражение отличается от (3.45) только знаком. Изменение знака объясняется тем, что перемещение боковой (магнитной) поверхности элементарной ветви, связанное с увеличением ее сечения, приводит при  $\Phi_{\text{эс}} = \text{const}$  к уменьшению МДС ветви  $i_{\text{эс}}$  ( $\Delta i_{\text{эс}} < 0$ ). Напротив, перемещение нормального сечения элементарной ветви (элемента эквипотенциальной поверхности), связанное с увеличением ее длины, приводит при  $\Phi_{\text{эс}} = \text{const}$  к увеличению МДС ветви  $i_{\text{эс}}$  ( $\Delta i_{\text{эс}} > 0$ ).

Приращение энергии ветви с индексом  $vs$  за счет перемещения ограничивающей ее зону магнитной разделительной поверхности  $S_{\text{м.с}}$  будет складываться из приращений энергии элементарных ветвей, входящих в ее объем и примыкающих к поверхности  $S_{\text{м.с}}$  [см. (3.47)]:

$$\Delta W_{\text{вс}} = \sum_{(\Phi_{\text{эс}} = \text{const})} \Delta W_{\text{эс}} = \int_{S_{\text{м.с}}} \frac{B^2}{2\mu_r\mu_0} \Delta l \cos(\bar{n}, \bar{l}) dS. \quad (3.49)$$

По (3.49) можно рассчитать приращения энергии ветвей  $B5$   $B10$  (см. рис. 3.17). В общем случае, когда ветвь с индексом  $vs$  примыкает как к эквипотенциальным  $S_{\text{эс}}$ , так и к магнитным  $S_{\text{м}}$  участкам разделительной поверхности  $S$ , ее полное приращение энергии за счет перемещения поверхности  $S$  при  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$  будет складываться из приращений по формулам (3.46) и (3.49):

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{вс}} = & \int_{S_{\text{м.с}}} \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} \Delta l \cos(\bar{n}, \bar{l}) dS - \\ & - \int_{S_{\text{эс}}} \frac{B^2}{2\mu_r\mu_0} \Delta l \cos(\bar{n}, \bar{l}) dS. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Приращение энергии ветви линейной модели при перемещении выделенной части системы в условиях  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$  или  $i_{\text{вс}} = \text{const}$  можно выразить по (3.27) через приращения МДС  $\Delta i_{\text{вс}}$  и сопротивления ветви  $\Delta R_{\text{вс}}$  или через приращения потока  $\Delta \Phi_{\text{вс}}$  и проводимости ветви  $\Delta \Lambda_{\text{вс}}$ .

Если приращение энергии  $\Delta W_{\text{вс}}$  ( $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$ ) уже найдено по (3.50), то с помощью (3.27) можно определить приращения сопротивлений или проводимостей ветвей при перемещении выделенной части линейной модели системы:

$$\Delta R_{\text{вс}} = 2\Delta W_{\text{вс}}/\Phi_{\text{вс}}^2; \quad \Delta \Lambda_{\text{вс}} = -2\Delta W_{\text{вс}}/i_{\text{вс}}^2. \quad (3.51)$$

Полное приращение энергии, которое произойдет при перемещении выделенной части системы в объеме  $V$ , охваченном разделительной поверхностью  $S$ , складывается из приращений энергии ветвей системы, найденных по (3.50):

$$\begin{aligned} \Delta W = & \sum_{s=1}^Q \Delta W_{\text{вс}} = \int_{S_M} \frac{B^2}{2\mu_r \mu_0} \Delta l \cos(\bar{n}, \Delta \bar{l}) dS - \\ & - \int_{S_3} \frac{B^2}{2\mu_r \mu_0} \Delta l \cos(\bar{n}, \Delta \bar{l}) dS, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где  $S_M = \sum_{s=1}^Q S_{M,s}$  — суммарная поверхность всех магнитных участков разделительной поверхности  $S$ , охватывающей выделенную часть системы в объеме  $V$ ;  $S_3 = \sum_{s=1}^Q S_{3,s}$  — суммарная поверхность всех эквипотенциальных участков разделительной поверхности  $S$ ;  $\bar{n}$  — нормаль к элементу  $dS$ , направленная в сторону остальной части системы в объеме  $V'$ ;  $\Delta \bar{l}$  — линейное перемещение элемента  $dS$  [см. (3.43), (3.44)], соответствующее приращению  $\Delta q$  координаты  $q$ , определяющей положение выделенной части системы в объеме  $V$ .

Полную ЭМС, действующую на выделенную часть системы в направлении  $\Delta \bar{q} = \Delta \bar{l}$ , найдем по (3.26):

$$D = - \lim_{(\Delta q \rightarrow 0)} \sum_{s=1}^Q \frac{\Delta W_{\text{вс}}}{\Delta q} = - \lim \frac{\Delta W}{\Delta q}. \quad (3.53)$$

Соответственно для определения полного электромагнитного момента, действующего на выделенную часть системы относительно оси  $z$ , орт которой равен  $\bar{q}_z$ , разделительную поверхность поворачивают на малый угол  $\Delta q = \Delta \theta$  вокруг оси  $z$ . При этом элемент разделительной поверхности  $dS$ , положение которого определяется вектором  $\bar{r}$ , смещается на расстояние  $\Delta \bar{l} = [\bar{q}_z \bar{r}] \Delta \theta$ . Это значение  $\Delta \bar{l}$  вводится в (3.50), (3.52), после чего полный электромагнитный момент, исходя из (3.26), рассчитывают по формуле

$$M_z = \lim_{(\Delta \theta \rightarrow 0)} \sum_{s=1}^Q \frac{\Delta W_{\text{вс}}}{\Delta \theta} = - \lim \frac{\Delta W}{\Delta \theta}. \quad (3.54)$$

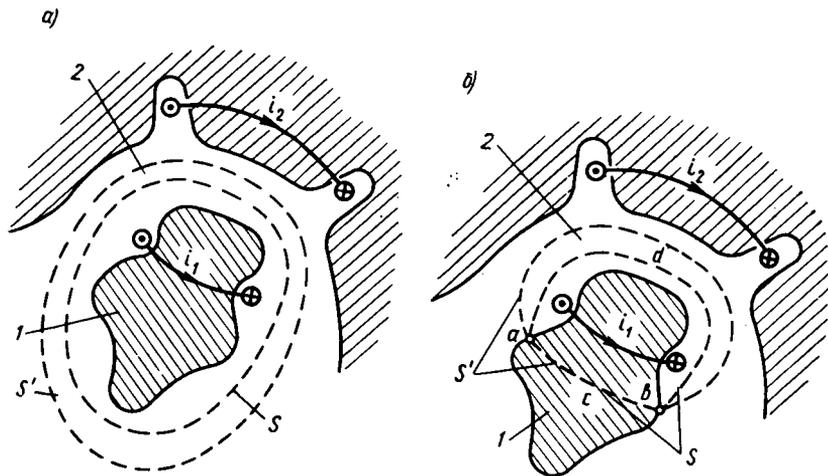


Рис. 3.19. Определение электромагнитных сил, действующих на нелинейное тело (а) и его часть (б)

Таким образом, правильное приращение магнитной энергии при изменении положения выделенной части нелинейной системы можно найти в общем случае только после линеаризации системы или, иными словами, замены нелинейной системы ее линейной моделью. Этот важный вывод о необходимости линеаризации относится не только к определению приращения магнитной энергии системы через приращения энергии ветвей ее магнитной цепи, но и к определению приращения магнитной энергии системы в виде суммы приращений энергии возбуждающих контуров при перемещении выделенной части системы.

Только в одном частном случае при определении ЭМС, действующей на нелинейное тело целиком, полное приращение магнитной энергии можно найти как в виде суммы приращений энергии ветви или возбуждающих контуров, найденных с учетом магнитной нелинейности, так и в виде приращений энергии ветвей или возбуждающих контуров, найденных после перехода к линейной модели.

Это объясняется тем, что в данном случае разделительная поверхность  $S$ , охватывающая нелинейное тело и закрепленные на нем контуры с токами  $i_k$  (например, тело 1 и контур с током  $i_1$ , рис. 3.19, а), должна располагаться целиком в магнитно-линейной среде, окружающей тело (например, в среде 2) \*. Все ветви, примы-

\* Поскольку на элементы линейной среды с постоянной магнитной проницаемостью (в данном случае среды 2) электромагнитные силы не действуют, поверхность  $S$  может включать любой объем линейной среды, в котором находятся закрепленные на нелинейном теле токи  $i_k$  (контур с током  $i_1$  в данном случае). С этой оговоркой поверхность  $S$  может иметь любую форму (например, занимать положение  $S'$ ).

кающие к этой поверхности, также располагаются в линейной среде. Иными словами, они уже линейны и не нуждаются в линеаризации при переходе к линейной модели системы. Приращения энергии в этих ветвях, найденные с учетом магнитной нелинейности в условиях  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$ , не отличаются от приращений энергии в их линейных моделях. Поэтому одинаковы и полные приращения энергии, складывающиеся только из приращений энергии ветвей, примыкающих к разделительной поверхности  $S$ . Но так как линеаризация не только исключает систематические погрешности, но и делает расчеты менее трудоемкими, то всегда следует при проведении расчетов сил заменять нелинейную систему ее линейной моделью.

В общем случае, когда требуется определить ЭМС, действующую на часть нелинейного тела (например, часть тела  $I$ , показанную на рис. 3.19, б), выполнение такого расчета в соответствии с рекомендациями [9], без перехода к линейной модели (см. § 2.5, 3.1, 3.4), приводит к существенным ошибкам в определении приращения энергии при перемещении выделенной части системы и обобщенной ЭМС.

#### КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. Изложенный в гл. 3 метод расчета электромагнитных сил через приращения энергии или коэнергии в отдельных ветвях магнитной цепи при перемещении обладает существенными преимуществами по сравнению с ранее известным, в котором силы выражались через изменения энергии или коэнергии, возбуждающих электрических контуров (см. гл. 2).

2. Магнитное поле в нелинейной магнитной системе при заданных токах в контурах  $i_k$  и заданном положении  $q$  рассчитывают только один раз. В результате расчета определяют магнитные потоки  $\Phi_{\text{вс}}$  и магнитные напряжения ветвей  $i_{\text{вс}}$  (после предварительного выделения зон отдельных ветвей).

3. Приращение магнитной энергии при перемещении  $\Delta q$  определяют в виде суммы приращений магнитных энергий отдельных ветвей. Причем эти приращения находятся независимо по изменению магнитного сопротивления  $\Delta R_{\text{вс}}$  в линейной модели ветви при перемещении  $\Delta q$  в условиях  $\Phi_{\text{вс}} = \text{const}$ . Определение  $\Delta R_{\text{вс}}$  при перемещении  $\Delta q$  производится на основе анализа картины магнитного поля в положении  $q$ . Проведение повторного расчета магнитного поля цепи в положении  $q + \Delta q$  для этого не требуется. Трудоемкость расчетов снижается примерно в 2 раза.

4. Магнитные энергии отдельных ветвей в линейной модели до и после перемещения вычисляют с большой точностью, поэтому приращение  $\Delta q$  при численных расчетах можно выбрать близким к нулю. Это позволяет резко уменьшить погрешности при вычислении приращений энергии ветвей, сумм этих приращений и ЭМС.

5. Расчет приращений магнитных энергий отдельных ветвей без перехода к линейной модели приводит к существенным ошибкам в определяемых электромагнитных силах.

## Определение электромагнитных сил и моментов через объемные плотности электромагнитных сил и натяжения

### 4.1. Выражение электромагнитных сил и моментов через объемные плотности ЭМС и натяжения

Чтобы выразить через объемную плотность ЭМС  $\bar{f}$ , силу  $\bar{F}$  и момент  $\bar{M}$ , действующие в магнитном поле на выделенный объем  $V$ , нужно охватить этот объем поверхностью  $S$  (рис. 4.1). Разобьем объем  $V$  внутри поверхности  $S$  на элементарные объемы  $dV$ , в пределах которых объемную плотность ЭМС в магнитном поле

$$\bar{f} = \bar{q}_x f_x + \bar{q}_y f_y + \bar{q}_z f_z \quad (4.1)$$

можно считать постоянной.

Определим элементарную ЭМС

$$d\bar{F} = \bar{f}dV;$$

элементарный момент относительно начала системы координат в точке  $O$

$d\bar{M} = [\bar{r}\bar{f}] dV$ , действующие на элементарный объем  $dV$ , расположенный на расстоянии  $\bar{r} = \bar{q}_x x + \bar{q}_y y + \bar{q}_z z$  от точки  $O$ .

Суммируя элементарные ЭМС, найдем ЭМС, действующую на объем  $V$ , и ее составляющие по осям прямоугольной системы координат  $x, y, z$

$$\bar{F} = \int_V \bar{f}dV = \bar{q}_x F_x + \bar{q}_y F_y + \bar{q}_z F_z, \quad (4.2)$$

где  $F_x = \int_V f_x dV$ ,  $F_y = \int_V f_y dV$ ,  $F_z = \int_V f_z dV$ .

Суммируя элементарные моменты, найдем электромагнитный момент относительно начала системы координат в точке  $O$ , действующий на объем  $V$ , и его составляющие относительно осей  $x, y, z$ :

$$\bar{M} = \int_V [\bar{r}\bar{f}] dV = \bar{q}_x M_x + \bar{q}_y M_y + \bar{q}_z M_z, \quad (4.3)$$

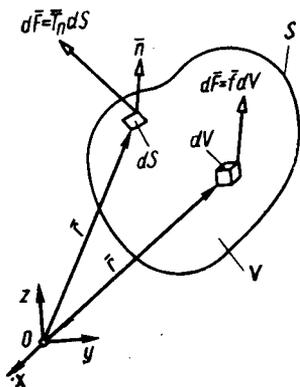


Рис. 4.1. Выражение электромагнитной силы и момента, действующих на объем  $V$  в области поля, через объемные плотности сил  $\bar{f}$  или натяжения  $\bar{T}_n$ .

$$\begin{aligned} \text{где } M_x &= \bar{q}_x \bar{M} = \int_V (yf_z - zf_y) dV; & M_y &= \\ &= \bar{q}_y \bar{M} = \int_V (zf_x - xf_z) dV; & M_z &= \bar{q}_z \bar{M} = \\ &= \int_V (xf_y - yf_x) dV. \end{aligned}$$

Объемная плотность ЭМС в магнитном поле  $\bar{f}$  понимается как ЭМС в магнитном поле, приходящаяся на единицу объема поля,

$$\bar{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta V} \quad (4.4)$$

Электромагнитную силу по (4.2) и момент по (4.3) можно выразить и через натяжения  $\bar{T}_n$  на элементах  $dS$  поверхности  $S$ , охватывающей объем  $V$ .

Понятие «сила натяжения» впервые было введено в механике применительно к явлениям в деформированных средах. *Силами натяжения* называются силы упругости, действующие извне на наружную поверхность участка деформированной среды. Поверхностная плотность сил натяжения называется в механике *натяжением*. В механистической теории электромагнитного поля, искавшей причины электрических явлений в упругих деформациях гипотетической среды-эфира, электромагнитные силы, действующие на участок среды, сводились к «силам натяжения» в деформированном эфире. Причем, поскольку термин «натяжение» в электротехнике имеет иной смысл, поверхностная плотность сил натяжения была названа «натяжением». Несмотря на то что механическая теория поля, использующая понятие «эфира» в целом оказалась несостоятельной, замена электромагнитных сил эквивалентными им силами натяжения всегда возможна и во многих случаях весьма целесообразна.

Сила натяжения  $d\bar{F}$ , действующая извне на элемент поверхности  $S$ , охватывающей объем  $V$  (рис. 4.1), пропорциональна величине этого элемента  $dS$  и зависит не только от положения этого элемента, но и от его ориентации, т. е. она является не только функцией координат точки  $(x, y, z)$ , но и функцией направления внешней нормали  $\bar{n}$  к элементу  $dS$ .

Под *натяжением*  $\bar{T}_n$  будем понимать силу натяжения, действующую извне на единицу поверхности, внешняя нормаль к которой направлена по  $\bar{n}$ :

$$\bar{T}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta \bar{F} / \Delta S). \quad (4.5)$$

Если система натяжений  $\bar{T}_n$  на поверхности  $S$  эквивалентна электромагнитной силе по (4.2), действующей на объем  $V$ , то эту силу можно найти путем суммирования элементарных сил натяжения  $\bar{T}_n dS$ ,

$$\bar{F} = \oint_S \bar{T}_n dS = \bar{q}_x F_x + \bar{q}_y F_y + \bar{q}_z F_z, \quad (4.6)$$

где  $F_x = \oint_S T_{nx} dS$ ,  $F_y = \oint_S T_{ny} dS$ ,  $F_z = \oint_S T_{nz} dS$ .

Суммируя элементарные моменты относительно точки  $O$ ,  $d\bar{M} = [\bar{r}d\bar{F}] = [\bar{r}\bar{T}_n] dS$ , найдем электромагнитный момент относительно точки  $O$ , действующий на объем  $V$ , и его составляющие относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\bar{M} = \oint_S [\bar{r}\bar{T}_n] dS = \bar{q}_x M_x + \bar{q}_y M_y + \bar{q}_z M_z, \quad (4.7)$$

где  $M_x = \bar{q}_x \bar{M} = \oint_S (yT_{nz} - zT_{ny}) dS$ ;  $M_y = \bar{q}_y \bar{M} =$   
 $= \oint_S (zT_{nx} - xT_{nz}) dS$ ;  $M_z = \bar{q}_z \bar{M} = \oint_S (xT_{ny} - yT_{nx}) dS$ .

В этих уравнениях через  $T_{nx}$ ,  $T_{ny}$  и  $T_{nz}$  обозначены компоненты вектора натяжения  $\bar{T}_n$  по осям выбранной системы координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Сам вектор натяжения выражается через эти компоненты следующим образом:

$$\bar{T}_n = \bar{q}_x T_{nx} + \bar{q}_y T_{ny} + \bar{q}_z T_{nz}. \quad (4.8)$$

Как уже говорилось, величина и направление вектора натяжений  $T_n$  в данной точке области поля зависят от ориентации площадки  $dS$ , на которую он действует. Обозначим через  $\bar{T}_x$ ,  $\bar{T}_y$  и  $\bar{T}_z$  векторы натяжений на площадках  $\Delta S_x$ ,  $\Delta S_y$ ,  $\Delta S_z$ , внешние нормали к которым направлены соответственно по  $\bar{q}_x$ ,  $\bar{q}_y$  и  $\bar{q}_z$ . Компоненты вектора  $\bar{T}_x$  по осям координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  обозначим  $T_{xx}$ ,  $T_{yx}$  и  $T_{zx}$ , компоненты вектора  $\bar{T}_y$  обозначим  $T_{yy}$ ,  $T_{xy}$  и  $T_{zy}$  и т.д. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_x &= \bar{q}_x T_{xx} + \bar{q}_y T_{yx} + \bar{q}_z T_{zx}; \\ \bar{T}_y &= \bar{q}_x T_{xy} + \bar{q}_y T_{yy} + \bar{q}_z T_{zy}; \\ \bar{T}_z &= \bar{q}_x T_{xz} + \bar{q}_y T_{yz} + \bar{q}_z T_{zz}; \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где  $T_{yz}$  — слагающая по оси  $y$  вектора натяжения  $\bar{T}_z$ , действующего на площадку  $\Delta S_z$ , нормаль к которой  $\bar{q}_z$  направлена по оси  $z$ .

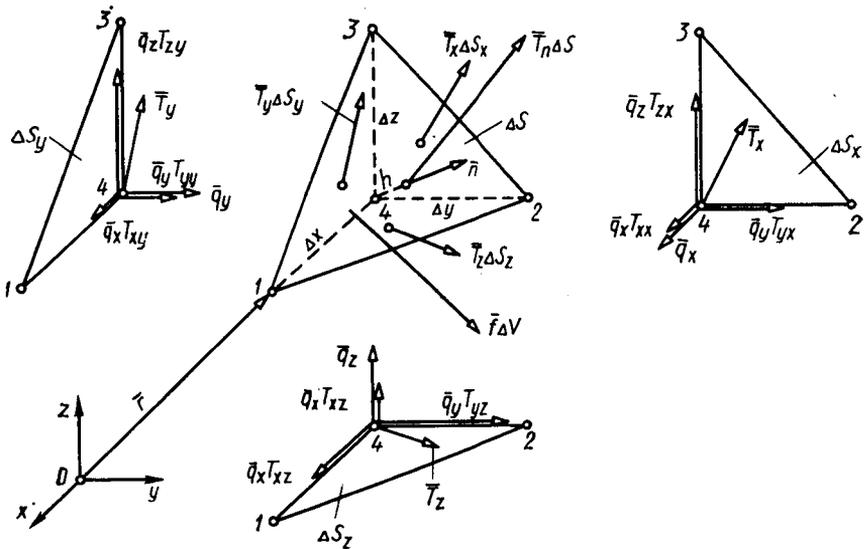


Рис. 4.2. Компоненты тензора натяжения

Для того, чтобы выразить вектор  $\bar{T}_n$  через компоненты векторов  $\bar{T}_x$ ,  $\bar{T}_y$  и  $\bar{T}_z$ , рассмотрим элементарный тетраэдр, построенный на рис. 4.2. Основание тетраэдра  $1\ 2\ 3$  имеет форму треугольника, его площадь равна  $\Delta S$ . Ориентация основания в пространстве определяется нормальным к нему ортом

$$\bar{n} = \bar{q}_x \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + \bar{q}_y \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + \bar{q}_z \cos(\bar{n}, \bar{q}_z).$$

Боковые грани тетраэдра  $\Delta S_x$  ( $2\ 3\ 4$ ),  $\Delta S_y$  ( $1\ 3\ 4$ ) и  $\Delta S_z$  ( $1\ 2\ 4$ ) нормальны к одной из осей прямоугольной системы координат ( $x$ ,  $y$  или  $z$ ). Нормальными к ним являются соответствующие орты  $-\bar{q}_x$ ,  $-\bar{q}_y$  или  $-\bar{q}_z$ . В соответствии с введенными выше обозначениями на основание тетраэдра действует сила натяжения  $\bar{T}_n \Delta S$ , на его боковые грани действуют силы натяжения  $-\bar{T}_x \Delta S_x$ ,  $-\bar{T}_y \Delta S_y$  и  $-\bar{T}_z \Delta S_z$ . Применяя к объему  $dV$  тетраэдра и к его внешней поверхности  $S$  уравнения (4.2) и (4.6) и приравнивая найденные таким образом электромагнитные силы, действующие на тетраэдр, получим

$$\bar{T}_n \Delta S - \bar{T}_x \Delta S_x - \bar{T}_y \Delta S_y - \bar{T}_z \Delta S_z = \bar{f} \Delta V.$$

Заметим, что появление знаков « $-$ » перед силами натяжения на боковых гранях связано с тем, что сила натяжения, действующая на некоторый элемент поверхности изнутри, равна взятой со знаком « $-$ » силе натяжения, действующей на этот элемент извне.

Разделим правую и левую части полученного уравнения на  $\Delta S$ , учитывая, что  $\Delta S_x = \Delta S \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) = \bar{n}q_x$ ;  $\Delta S_y = \Delta S \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) = \bar{n}q_y$ ;  $\Delta S_z = \Delta S \cos(\bar{n}, \bar{q}_z) = \bar{n}q_z$ ,  $\Delta V = \Delta S h/3$ , где  $h$  — высота тетраэдра.

Устремим размеры тетраэдра  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  и его высоту  $h$  к нулю и найдем предел левой части уравнения в виде равного ему предела правой части уравнений, который при конечной величине объемной плотности ЭМС  $\bar{f}$  и  $h \rightarrow 0$  всегда равен нулю,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [\bar{T}_n - \bar{T}_x \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) - \bar{T}_y \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) - \bar{T}_z \cos(\bar{n}, \bar{q}_z)] = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{f} h/3 = 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\bar{T}_n = \bar{T}_x \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + \bar{T}_y \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + \bar{T}_z \cos(\bar{n}, \bar{q}_z).$$

Выражая  $\bar{T}_n$  по (4.8) и  $\bar{T}_x$ ,  $\bar{T}_y$  и  $\bar{T}_z$  по (4.9), получим соотношения между компонентами и слагающими натяжения

$$\left. \begin{aligned} T_{nx} &= T_{xx} \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + T_{xy} \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + T_{xz} \cos(\bar{n}, \bar{q}_z); \\ T_{ny} &= T_{yx} \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + T_{yy} \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + T_{yz} \cos(\bar{n}, \bar{q}_z); \\ T_{nz} &= T_{zx} \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + T_{zy} \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + T_{zz} \cos(\bar{n}, \bar{q}_z). \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Девять величин  $T_{xx}$ ,  $T_{xy}$ , ...,  $T_{zz}$  характеризуют систему натяжений в данной точке области поля. Значения этих величин определяют вектор натяжения, действующий на произвольно ориентированную площадку, нормаль к которой направлена по  $\bar{n}$ . Величины  $T_{xx}$ ,  $T_{xy}$ , ...,  $T_{zz}$  называются *компонентами тензора натяжений*, а их совокупность — *тензором натяжений*

$$T_{ik} \quad (k, i \in x, y, z). \quad (4.11)$$

#### 4.2. Соотношение между компонентами плотности объемных сил и компонентами тензора натяжений

Исходя из интегральных соотношений между объемными силами и силами натяжений, которые вытекают из совместного решения (4.2) и (4.6),

$$\begin{aligned} \int_V f_x dV &= \oint_S T_{nx} dS; \quad \int_V f_y dV = \oint_S T_{ny} dS; \\ \int_V f_z dV &= \oint_S T_{nz} dS \end{aligned} \quad (4.12)$$

можно перейти к дифференциальным соотношениям между ними.

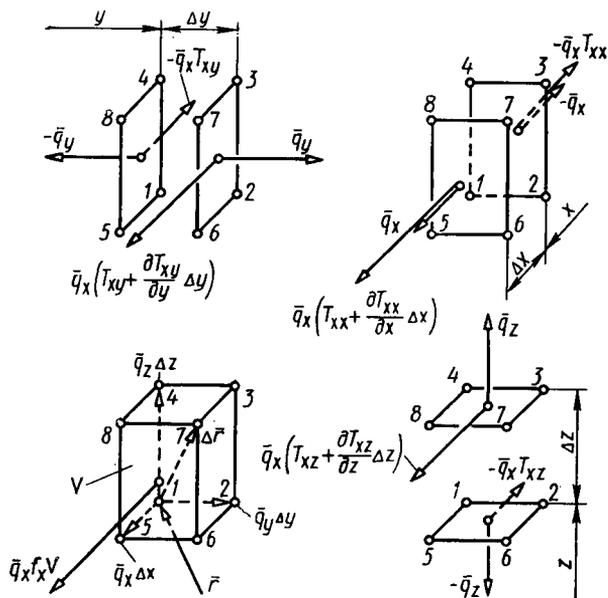


Рис. 4.3. Составляющие объемной силы и силы натяжения, действующие на элементарный прямоугольный параллелепипед

С этой целью применим формулы (4.12) к бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду 12345678, расположенному в точке  $x, y, z$  и построенному на положительных приращениях координат  $\Delta x, \Delta y$  и  $\Delta z$ , которые являются его ребрами (рис. 4.3). Размеры параллелепипеда возьмем настолько малыми, чтобы можно было считать компоненты объемной плотности силы  $f_x, f_y$  и  $f_z$  постоянными в пределах его объема  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ , а компоненты тензора натяжений — в пределах поверхности каждой из его граней (1234, 1485 и др.). Чтобы выразить компоненту  $f_x$  через компоненты тензора натяжений, воспользуемся первым из уравнений (4.12). Распространяя интеграл левой части уравнения на объем  $V$  параллелепипеда и имея в виду, что  $f_x = \text{const}$  в пределах этого объема, получим

$$\int_V f_x dV = f_x \int_V dV = f_x V = f_x \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (4.13)$$

Интеграл правой части уравнения распространяется на всю наружную поверхность  $S$  параллелепипеда. Его можно представить в виде суммы интегралов, каждый из которых соответствует одной из граней параллелепипеда. Этот интеграл можно также представить в виде суммы составляющих сил натяжений по оси  $x$ , которые действуют на пары параллельных граней параллелепипеда показанные на отдельных выносках рис. 4.3. Найдем сначала составляю-

щую силы натяжения, действующую на параллельные грани 1234 и 5678, нормальные к оси  $x$ . Рассмотрим интеграл для грани 1234, площадь которой  $S_{1234} = \Delta y \Delta z$ . Внешняя нормаль  $\bar{n}$  к этой грани направлена в противоположную сторону по отношению к  $\bar{q}_x$ , т. е.  $\bar{n} = -\bar{q}_x$ . Пренебрегая приращениями второго порядка малости, можно считать, что составляющая  $T_{nx}$  в пределах этой грани будет такой же, как в вершине 1 с координатами  $x, y, z$ . С помощью (4.10), имея в виду, что  $\cos(\bar{n}, \bar{q}_x) = \cos(-\bar{q}_x, \bar{q}_x) = -1$ ,  $\cos(-\bar{q}_x, \bar{q}_y) = 0$  и  $\cos(-\bar{q}_x, \bar{q}_z) = 0$ , получим  $T_{nx} = -T_{xx}$ . Откуда составляющая силы натяжения по оси  $x$  на этой грани

$$\int_{S_{1234}} T_{nx} dx = -T_{xx} \int_{S_{1234}} dS = -T_{xx} \Delta y \Delta z.$$

При определении интеграла для грани 5678, параллельной 1234 и расположенной от нее на расстоянии  $\Delta x$ , нужно учесть, что положение грани 5678 определяется координатой  $(x + \Delta x)$ . В связи с этим компоненты тензора натяжений при переходе от 1234 к 5678 и изменении координаты на  $\Delta x$  получают соответствующие приращения и будут равны  $T_{xx} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} \Delta x$ ,  $T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \Delta x$  и т. д.

Имея в виду, что внешняя нормаль  $\bar{n}$  к грани 5678 совпадает по направлению с  $\bar{q}_x$ , т. е.  $\bar{n} = \bar{q}_x$ , и замечая, что  $\cos(\bar{q}_x, \bar{q}_x) = 1$ , с помощью (4.10) получим для этой грани

$$T_{nx} = T_{xx} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} \Delta x.$$

Откуда составляющая силы натяжения по оси  $x$  на этой грани

$$\int_{S_{5678}} T_{nx} dS = \left( T_{xx} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z.$$

Составляющая силы натяжения по оси  $x$ , действующая на параллельные грани, нормальные к оси  $x$ , равна сумме найденных интегралов:

$$\int_{S_{1234}} T_{nx} dS + \int_{S_{5678}} T_{nx} dS = \frac{\partial T_{nx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Рассмотрим параллельные грани 1485 и 2376, нормальные к оси  $y$  (см. выноску на рис. 4.3). Положение грани 1485 определяется координатой  $y$ , грани 2376 — координатой  $y + \Delta y$ . Поэтому на грани 1485 компоненты тензора натяжений равны  $T_{yy}$ ,  $T_{xy}$ , и  $T_{zy}$ , а при переходе к грани 2376 получают соответствующие приращения и оказываются равными:  $T_{yy} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \Delta y$ ;  $T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \Delta y$  и т. д.

Учитывая, что внешняя нормаль к грани 1485, площадь которой

$S_{1485} = \Delta x \Delta z$  направлена в противоположную сторону по отношению к орту  $\bar{q}_y$  ( $\bar{n} = -\bar{q}_y$ ), и что  $\cos(\bar{n}, \bar{q}_y) = \cos(-\bar{q}_y, \bar{q}_y) = -1$  и  $\cos(-\bar{q}_y, \bar{q}_x) = \cos(-\bar{q}_y, \bar{q}_z) = 0$ , с помощью (4.10) для этой грани получим  $T_{nx} = -T_{xy}$ . Откуда составляющая силы натяжения по оси  $x$  на этой грани

$$\int_{S_{1485}} T_{nx} dS = -T_{xy} \int_{S_{1485}} dS = -T_{xy} \Delta x \Delta z.$$

Учитывая, что внешняя нормаль к грани 2376, площадь которой  $S_{2376} = \Delta x \Delta z$  совпадает по направлению с  $\bar{q}_z$  ( $\bar{n} = \bar{q}_y$ ) и что  $\cos(\bar{n}, \bar{q}_y) = \cos(\bar{q}_y, \bar{q}_y) = 1$ ;  $\cos(\bar{q}_y, \bar{q}_x) = \cos(\bar{q}_y, \bar{q}_z) = 0$  с помощью (4.10) для этой грани получим  $T_{nx} = T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \Delta y$ . Откуда составляющая силы натяжения по оси  $x$  на этой грани

$$\int_{S_{2376}} T_{nx} dS = \left( T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z.$$

Составляющая силы натяжения по оси  $x$ , действующая на параллельные грани 1485 и 2376, нормальные к оси  $y$ , равна сумме найденных интегралов;

$$\int_{S_{1485}} T_{nx} dS + \int_{S_{2376}} T_{nx} dS = \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Аналогично составляющая силы натяжения по оси  $x$ , действующая на параллельные грани 1265 и 4378, нормальные к оси  $z$  (см. выноску на рис. 4.3), можно записать в виде

$$\int_{S_{1265}} T_{nx} dS + \int_{S_{4378}} T_{nx} dS = \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Складывая составляющие силы натяжения по оси  $x$ , действующие на грани, нормальные к осям  $x, y, z$ , получим составляющую силы натяжения по оси  $x$ , действующую на внешнюю поверхность параллелепипеда:

$$\int_S T_{nx} dS = \left( \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (4.14)$$

Подставляя в первое из уравнений (4.12) найденные выражения для объемного и поверхностного интегралов (4.13) и (4.14), после сокращения на  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$  получим дифференциальное соотношение между компонентой объемной плотности силы по оси  $x$  и компонентами тензора натяжений. Дифференциальные соотношения между другими компонентами объемной плотности силы и компо-

нентами тензора натяжений можно записать, применяя круговую перестановку индексов.

Полученная таким образом система уравнений, связывающая компоненты объемной плотности силы с компонентами тензора натяжений, имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}; \\ f_y &= \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x}; \\ f_z &= \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Причем, как вытекает из (4.9), в случае симметрии тензора натяжений в магнитном поле (см. § 4.3), которая выражается в равенствах  $T_{xy} = T_{yx}$ ,  $T_{yz} = T_{zy}$ ,  $T_{zx} = T_{xz}$ , правая часть первого из уравнений (4.15) равна  $\operatorname{div} \bar{T}_x$ , второго —  $\operatorname{div} \bar{T}_y$ , третьего —  $\operatorname{div} \bar{T}_z$ . Откуда следует, что

$$f_x = \operatorname{div} \bar{T}_x; \quad f_y = \operatorname{div} \bar{T}_y; \quad f_z = \operatorname{div} \bar{T}_z, \quad (4.16)$$

или в более компактной форме  $f_k = \operatorname{div} \bar{T}_k$ , где  $k \in x, y, z$ .

Исходя из (4.1) и (4.16), можно выразить объемную плотность ЭМС с помощью операции, называемой *дивергенцией тензора натяжений*:

$$\bar{f} = \Sigma \bar{q}_k f_k = \Sigma \bar{q}_k \operatorname{div} \bar{T}_k = \operatorname{div} T_{ik}, \quad (4.17)$$

где  $i, k \in x, y, z$ .

Из (4.17) следует, что объемная плотность ЭМС отличается от нуля только в таких зонах поля, где  $\bar{T}_x \neq \operatorname{const}$ ,  $\bar{T}_y \neq \operatorname{const}$ ,  $\bar{T}_z \neq \operatorname{const}$ , и  $\operatorname{div} T_{ik} \neq 0$ . Напомним, что система уравнений (4.15) получена исходя из того, чтобы при замене объемных сил натяжениями оставалась неизменной равнодействующая сил, приложенных к определенному объему. Однако для того, чтобы считать компоненты объемной плотности силы и компоненты тензора натяжений, удовлетворяющие (4.15), эквивалентными, нужно проверить, будут ли они создавать одинаковые моменты, действующие на этот объем. С этой целью выразим через компоненты тензора натяжений момент  $M$ , действующий на элементарный прямоугольный параллелепипед 12345678 (рис. 4.4). Причем ограничимся определением только одной компоненты момента, например  $M_x$ . Чтобы определить эту компоненту через компоненты тензора натяжений, используем (4.7):

$$M_x = \oint_S (yT_{nz} - zT_{ny}) dS.$$

Интеграл правой части этого уравнения распространяется на всю наружную поверхность  $S$  параллелепипеда. Его можно представить в виде суммы интегралов, каждый из которых соответствует одной из граней параллелепипеда. Учитывая направления внешних нормалей  $\bar{n}$  к граням и их пространственное положение, с помощью (4.10) можно найти составляющие  $T_{nz}$  и  $T_{ny}$  на каждой из граней. Например, на грани  $1234$ , положение которой в пространстве определяется координатой  $x$  и нормаль  $\bar{n}$  к которой направлена по  $-\bar{q}_x$ , имеем  $\cos(\bar{n}, \bar{q}_x) = -1$ , и, следовательно,  $T_{ny} = -T_{yx}$ ;  $T_{nz} = -T_{zx}$ . Соответственно на грани  $5678$ , положение которой в пространстве определяется координатой  $(x + \Delta x)$  и нормаль  $\bar{n}$  к которой направлена по  $\bar{q}_x$ , имеем  $\cos(\bar{n}, \bar{q}_x) = 1$  и, следовательно,

$$T_{ny} = T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} \Delta x; \quad T_{nz} = T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} \Delta x.$$

Таким же образом получим значения  $T_{ny}$  и  $T_{nz}$  на других гранях и сведем их в табл. 4.1, в которую включим также координаты  $y$  и  $z$  точек приложения натяжений  $T_{ny}$  и  $T_{nz}$ .

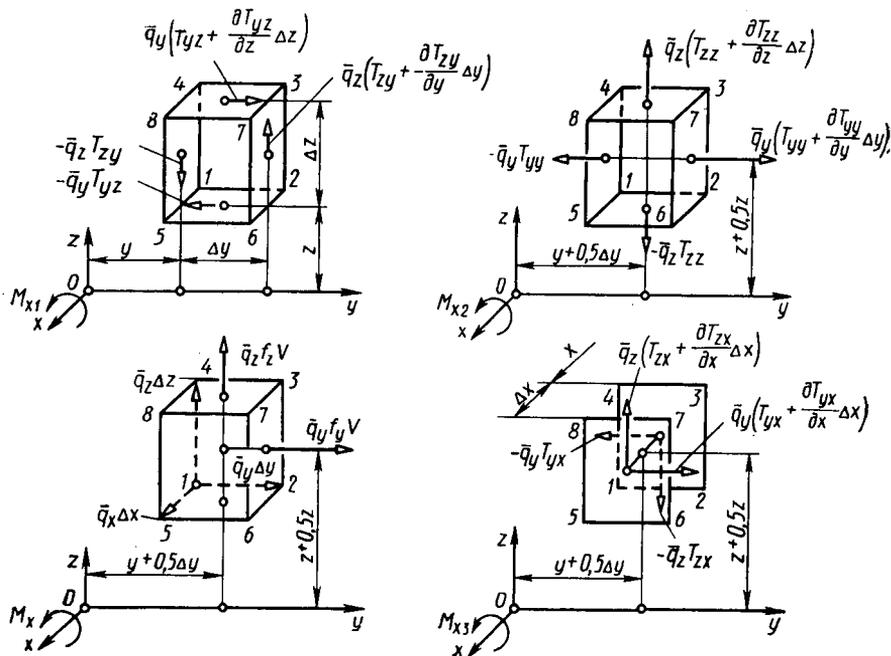


Рис. 4.4. Определение вращающего момента относительно оси  $x$ , действующего на прямоугольный параллелепипед

Таблица 4.1

Обозначение грани	$\bar{n}$	$T_{ny}$	$T_{nz}$	$y$	$z$
1234	$-\bar{q}_x$	$-T_{yx}$	$-T_{zx}$	$y + 0,5\Delta y$	$z + 0,5\Delta z$
5678	$\bar{q}_x$	$T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} \Delta x$	$T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} \Delta x$	$y + 0,5\Delta y$	$z + 0,5\Delta z$
1485	$-\bar{q}_y$	$-T_{yy}$	$-T_{zy}$	$y$	$z + 0,5\Delta z$
2376	$\bar{q}_y$	$T_{yy} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \Delta y$	$T_{zy} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} \Delta y$	$y + \Delta y$	$z + 0,5\Delta z$
1265	$-\bar{q}_z$	$-T_{yz}$	$-T_{zz}$	$y + 0,5\Delta y$	$z$
4378	$\bar{q}_z$	$T_{yz} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \Delta z$	$T_{zz} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \Delta z$	$y + 0,5\Delta y$	$z + \Delta z$

Компоненты тензора натяжений, образующие момент  $M_x$  относительно оси  $x$  и включенные в табл. 4.1, приложены к центрам соответствующих граней (рис. 4.4).

Результирующий момент относительно оси  $x$ , действующий на все грани параллелепипеда, представим в виде трех составляющих  $M_{x1}$ ,  $M_{x2}$  и  $M_{x3}$ . Первая из них связана с тангенциальными компонентами натяжений на гранях, нормальных к осям  $z$  и  $y$ .

$$M_{x1} = \left[ \left( T_{zy} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} \Delta y \right) (y + \Delta y) - T_{zy} y \right] \Delta x \Delta z - \\ \cdot \left[ \left( T_{yz} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \Delta z \right) (z + \Delta z) - T_{yz} z \right] \Delta x \Delta y.$$

Учитывая, что при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  и  $\Delta z \rightarrow 0$  члены  $\frac{\partial T_{zy}}{\partial y} \times (\Delta y)^2 \Delta x \Delta z$  и  $\frac{\partial T_{yz}}{\partial z} (\Delta z)^2 \Delta x \Delta y$  имеют больший порядок малости по сравнению с другими членами и могут быть отброшены, а также симметрию тензора натяжений, которая выражается в равенствах  $T_{yz} = T_{zy}$ ;  $T_{zx} = T_{xz}$  и  $T_{xy} = T_{yx}$ , выражение для  $M_{x1}$  можно упростить следующим образом:

$$M_{x1} = \left( y \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} - z \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) V,$$

где  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ .

Вторая составляющая  $M_x$  связана с нормальными компонентами натяжений на гранях, нормальных к осям  $z$  и  $y$ :

$$M_{x2} = \left[ \left( T_{zz} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \Delta z \right) (y + 0,5\Delta y) - T_{zz} (y + 0,5\Delta y) \right] \Delta x \Delta y - \\ - \left[ \left( T_{yy} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \Delta y \right) (z + 0,5\Delta z) - T_{yy} (z + 0,5\Delta z) \right] \Delta x \Delta z.$$

Исключив члены второго порядка малости, получим

$$M_{x2} = \left( y \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} - z \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \right) V.$$

Третья составляющая  $M_x$  связана с тангенциальными компонентами натяжений на гранях, нормальных к оси  $x$ :

$$M_{x3} = \left[ \left( T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} \Delta x \right) (y + 0,5\Delta y) - T_{zx} (y + 0,5\Delta y) \right] \Delta y \Delta z - \\ - \left[ \left( T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} \Delta x \right) (z + 0,5\Delta z) - T_{yx} (z + 0,5\Delta z) \right] \Delta y \Delta z.$$

Исключив члены второго порядка малости, получим

$$M_{x3} = \left( y \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} - z \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} \right) V.$$

Результирующий момент относительно оси  $x$ , действующий на все грани параллелепипеда, можно получить, складывая составляющие  $M_{x1}$ ,  $M_{x2}$  и  $M_{x3}$ :

$$M_x = M_{x1} + M_{x2} + M_{x3} = \left[ y \left( \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - z \left( \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) \right] V.$$

Заметим, что в (4.15) суммы производных в круглых скобках являются соответственно компонентами  $f_z$  и  $f_y$  объемной плотности силы. А это означает, что момент  $M_x$ , выраженный через компоненты тензора натяжений, не отличается от того же момента, выраженного по (4.3) через компоненты объемной плотности силы [при условии, что компоненты объемной плотности силы и компоненты тензора натяжений удовлетворяют (4.15)]:  $M_x = (yf_z - zf_y) V = \int_V (yf_z - zf_y) dV$ . Кроме того, при интегрировании объем параллелепипеда  $V$  считается настолько малым, что в его пределах  $f_z = \text{const}$ ,  $f_y = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  и  $z = \text{const}$ . Система уравнений (4.15), на основании которой могут быть сведены либо натяжения к объемным силам, либо объемные силы к натяжениям, получена в самой общей форме. Она одинаково применима к любым физическим полям (механическим, гидравлическим, электромагнитным). Причем применительно к конкретным физическим полям эту систему можно использовать либо для перехода от заранее найденных выражений для компонент объемной плотности силы, связывающих эти компоненты с величинами поля, к выражениям для компонент тензора натяжений; либо для обратного перехода от заранее найденных выражений для компонент тензора натяжений, связывающих эти компоненты с величинами поля, к выражениям для компонент объемной плотности силы.

В этой главе уравнение (4.15) будет использовано для перехода от выведенных в § 4.3 выражений для компонент тензора натяжений к выражениям для компонент объемной плотности электромагнитной силы (см. § 4.5).

### 4.3. Натяжения в магнитном поле

**4.3.1. Вывод формулы для натяжения в магнитном поле энергетическим методом.** Формулу для натяжения выведем с помощью математической модели магнитного поля, называемой *микромоделью* (см. § 1.5).

В этой модели поверхность  $S$ , выделяющая объем  $V$ , образуется из участков эквипотенциальных поверхностей  $S_p$  (рис. 4.5, а) и магнитных поверхностей  $S_m$  (рис. 4.5, б) \*. Все поле разбивают на  $Q$  элементарных ветвей с индексами  $c \in 1, 2, \dots, Q$ . Под *элементарной ветвью* с индексом  $c$  понимается элемент трубки поля с достаточно малыми длиной  $h_c$  и поперечным сечением  $S_c = a_c b_c$ , внутри которого магнитную проницаемость  $\mu = \mu(x_c, y_c, z_c)$ , индукцию  $\vec{B} = f_B(x_c, y_c, z_c)$  и напряженность  $\vec{H} = f(x_c, y_c, z_c)$  можно считать постоянными по величине и направлению.

Магнитное поле в каждой из таких элементарных ветвей с индексом  $c$  возбуждается поверхностным током  $i_c = j h_c = H h_c$ . Магнитный поток ветви равен  $\Phi_c = B S_c$ .

Силу  $\vec{F}_n$ , действующую на элемент поверхности  $\Delta S$  со стороны нормали  $\vec{n}$ , можно найти путем перемещения этого элемента на расстояние  $\Delta \vec{l} = \vec{n} \Delta l$  за счет изменения размеров элементарной ветви  $c$ , примыкающей к этому элементу со стороны нормали  $\vec{n}$ . Силу  $\vec{F}$

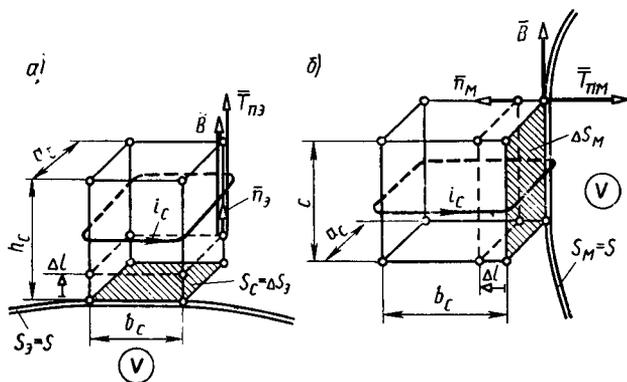


Рис. 4.5. Натяжения на эквипотенциальной (а) и магнитной (б) поверхностях

\* Нормаль  $\vec{n}_z$  к элементам эквипотенциальных поверхностей параллельна вектору индукции ( $\vec{n}_z \parallel \vec{B}$ ); нормаль  $\vec{n}_m$  к элементам магнитных поверхностей нормальна вектору индукции ( $\vec{n}_m \perp \vec{B}$ ).

можно выразить через приращение энергии  $\Delta W_{cn}$  или коэнергии  $\Delta W'_{cn}$  этой ветви при перемещении элемента  $\Delta S$  на расстояние  $\overline{\Delta l} \rightarrow 0$ :

$$\overline{F}_n = \overline{n} F_n = \overline{n} \lim (\Delta W'_{cn}/\Delta l) = -\overline{n} \lim (\Delta W_{cn}/\Delta l), \quad (4.18)$$

где  $\Delta W_{cn} = \Phi_c \Delta i_c/2$  — приращение магнитной энергии  $c$ -й элементарной ветви при перемещении элемента поверхности  $\Delta S$ , примыкающего к этой ветви, на расстояние  $\overline{\Delta l}$  в условиях постоянства ее потока ( $\Phi_c = BS_c = \text{const}$ );  $\Delta i_c = i_c^H - i_c$  — приращение тока ветви;  $\Delta W'_{cn} = i_c \Delta \Phi_c/2$  — приращение магнитной коэнергии  $c$ -й элементарной ветви при перемещении элемента  $\Delta S$  на расстояние  $\overline{\Delta l}$  в условиях постоянства возбуждающего его тока ( $i_c = Hh_c = \text{const}$ );  $\Delta \Phi_c = \Phi_c^H - \Phi_c$  — приращение потока ветви.

Для определения формулы натяжения  $\overline{T}_n$  на эквипотенциальной поверхности  $S_o(\overline{n}_o || \overline{B})$  применим (4.18) к перемещению элемента  $\Delta S = \Delta S_o$  такой поверхности, примыкающему к  $c$ -й ветви (рис. 4.5, а).

В этом случае  $\overline{n} = \overline{n}_o$  и  $\Delta S = \Delta S_o = S_c$  является торцевой поверхностью элементарной  $c$ -й ветви. Перемещая  $\Delta S_o$  на  $\overline{\Delta l} = \overline{n}_o \Delta l$  в условиях  $\Phi_c = BS_c = \text{const}$  за счет уменьшения высоты ветви  $h_c$  на  $\Delta l$ , найдем

$$\overline{F}_n = \overline{T}_{no} S_c = T_{no} \overline{n}_o S_c = -\overline{n}_o \lim \Delta W_{cn}/\Delta l = \overline{n}_o BHS_c/2,$$

где  $\Delta W_{cn} = \Phi_c \Delta i_c/2 = -BHS_c \Delta l/2$ ;

$$\Delta i_c = i_c^H - i_c = H(h_c - \Delta l) - Hh_c = -H\Delta l.$$

Откуда для натяжения на эквипотенциальной поверхности  $(\overline{n}_o || \overline{B})$  получим формулу

$$\overline{T}_{no} = \overline{n}_o T_{no} = \overline{n}_o \mu H^2/2 = \overline{n}_o B^2/(2\mu_o \mu_r). \quad (4.19)$$

Для определения формулы натяжения  $\overline{T}_{nm}$  на магнитной поверхности  $S_m(\overline{n}_m \perp \overline{B})$  применим (4.18) к перемещению элемента  $\Delta S = \Delta S_m$  такой поверхности, примыкающему к  $c$ -й ветви (рис. 4.5, б).

В этом случае  $\overline{n} = \overline{n}_m$ ;  $\Delta S = \Delta S_m = h_c a_c$  является элементом боковой поверхности ветви;  $\overline{F}_n = \overline{T}_{nm} \Delta S_m = T_{nm} h_c a_c \overline{n}_m$ . Перемещая  $\Delta S_m$  на  $\overline{\Delta l} = \overline{n}_m \Delta l$  в условиях  $i_c = Hh_c = \text{const}$  за счет уменьшения размера  $b_c$  на  $\Delta l$ , найдем

$$\begin{aligned} \overline{F}_n &= \overline{T}_{nm} \Delta S_m = T_{nm} h_c a_c \overline{n}_m = \overline{n}_m \lim (\Delta W'_{cn}/\Delta l) = \\ &= -\overline{n}_m BHh_c a_c/2, \end{aligned}$$

где  $\Delta W'_{cn} = i_c \Delta \Phi_c/2 = -BHh_c a_c \Delta l/2$ ;

$$\Delta \Phi_c = \Phi_c^H - \Phi_c = Ba_c(b_c - \Delta l) - Ba_c b_c = -B\Delta l a_c.$$

Откуда для натяжения на магнитной поверхности ( $\vec{n}_m \perp \vec{B}$ ) получим формулу

$$\begin{aligned} \vec{T}_{nm} &= \vec{n}_m T_{nm} = \vec{n}_m (-\mu H^2/2) = \\ &= -\vec{n}_m B^2/(2\mu_0 \mu_r). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Напомним, что мы условились понимать орт  $\vec{n} = \vec{n}_m$  или  $\vec{n}_z$  как внешнюю нормаль к поверхности  $S$ , направленную в противоположную сторону по отношению к рассматриваемому объему  $V$ , охватываемому этой поверхностью. При таком выборе направления  $\vec{n}_z$  [см. (4.19) и (4.20)], натяжение  $\vec{T}_{nm}$ , действующее на элемент магнитного участка поверхности  $S$ , всегда направлено в сторону рассматриваемого объема  $V$  (рис. 4.6).

А натяжение  $\vec{T}_{nz}$ , действующее на элемент эквипотенциального участка поверхности  $S$ , наоборот, всегда направлено в противоположную сторону по отношению к объему  $V$ . Зона рассматриваемого объема  $V$ , т. е. объема, к которому приложена определяемая сила, заштрихована.

Полученные здесь частные выражения для натяжений (4.19), (4.20) можно использовать только при определенной ориентации поверхностей в области поля, т. е. когда они направлены вдоль линий поля или нормальны к линиям поля. Но от этих выражений можно перейти к общим выражениям для определения натяжений на произвольных поверхностях, элементы которых  $d\vec{S}$  произвольно ориентированы в пространстве. С этой целью выделим на произвольной поверхности  $S$ , охватывающей объем  $V$ , элемент  $\Delta S$  с бесконечно малыми размерами, имеющий форму треугольника  $123$  (рис. 4.7, а). Построим этот элемент в окрестности одной из точек на поверхности  $S$ , например в окрестности точки  $3$ , где внешняя (по отношению к охватываемому объему) нормаль к поверхности направлена по орту  $\vec{n}$ .

Предположим, что магнитное поле в области известно и в точке  $3$  характеризуется вектором индукции  $\vec{B}$ . Проведем через точку  $3$  параллельно  $\vec{B}$  линию  $34'$ , которая представляет собой касательную к линии поля и на участке  $34'$  располагается внутри охватываемого объема. На бесконечно малом расстоянии  $34$  от точки  $3$  проведем эквипотенциальную поверхность, нормальную к индукции  $\vec{B}$ . Эта поверхность пересечется с поверхностью  $S$  по линии  $1'2'$ .

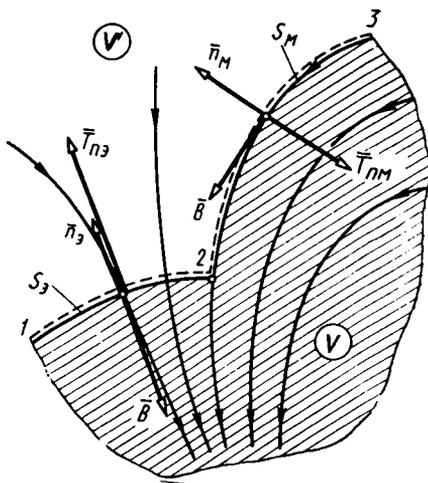


Рис. 4.6. Натяжения на участках магнитной (23) и эквипотенциальной (12) поверхностей, охватывающих рассматриваемый объем  $V$

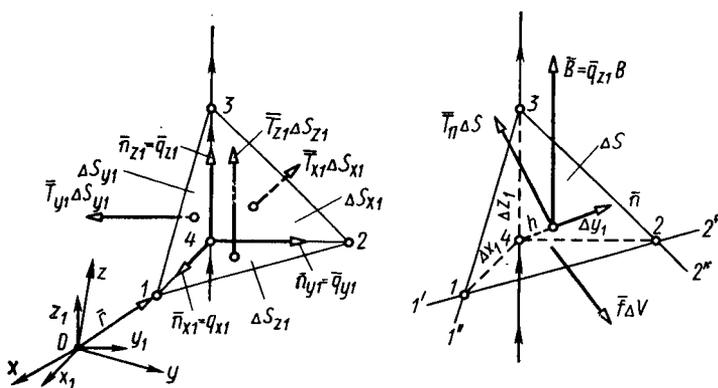


Рис. 4.7. Натяжение на поверхности элемента  $\Delta S$ , произвольно ориентированного в магнитном поле

Кроме того, проведем две взаимно ортогональные магнитные поверхности, параллельные вектору индукции  $\vec{B}$  и пересекающиеся между собой на линии  $34$ .

Одна из поверхностей пересечется с поверхностью  $S$  по линии  $32''$ , другая — по линии  $31''$ . Пересечение линий  $32''$  и  $31''$  между собой в точке  $3$  и с линией  $1'2'$  в точках  $1$  и  $2$  определит положение вершин треугольного элемента  $\Delta S$  на поверхности  $S$ .

Чтобы выразить натяжение на произвольно ориентированном элементе  $\Delta S$  через натяжения на взаимно ортогональных магнитных и эквипотенциальных площадках, рассмотрим равновесие электромагнитных сил, действующих на элементарный тетраэдр  $1234$ , основанием которого является элемент  $\Delta S$ . Пусть в системе координат  $x_1, y_1, z_1$  ось  $z_1$  параллельна магнитной индукции  $\vec{B}$  (в месте расположения элемента  $\Delta S$ ) и ребру  $34$  тетраэдра, а оси  $x_1$  и  $y_1$  нормальны соответственно к его граням  $234$  и  $143$ . Направления осей  $x_1, y_1, z_1$  выберем таким образом, чтобы их орты совпадали с направлениями внешних нормалей к соответствующим граням тетраэдра: на грани  $\Delta S_{x_1}$  ( $234$ )  $\vec{n}_{x_1} = \vec{q}_{x_1}$ ; на грани  $\Delta S_{y_1}$  ( $143$ )  $\vec{n}_{y_1} = \vec{q}_{y_1}$ ; на грани  $\Delta S_{z_1}$  ( $124$ )  $\vec{n}_{z_1} = \vec{q}_{z_1}$ . Напомним, что нормали  $\vec{n}, \vec{n}_{x_1}, \vec{n}_{y_1}, \vec{n}_{z_1}$  являются внешними нормальными по отношению к объему, охватываемому, поверхностью  $S$  и ее элементами. Причем элементы  $\Delta S_{x_1}, \Delta S_{y_1}, \Delta S_{z_1}$  со стороны нормалей  $\vec{n}_{x_1}, \vec{n}_{y_1}, \vec{n}_{z_1}$  также могут рассматриваться как элементы охватывающей поверхности, поскольку в совокупности они заменяют собой ее элемент  $\Delta S$ . В соответствии с введенными в § 4.1 обозначениями на внешнюю поверхность элемента  $\Delta S$  с нормалью  $\vec{n}$ , являющегося основанием тетраэдра, действует подлежащая определению сила натяжения  $\vec{T}_n \Delta S$ . Соответственно на внешние поверхности его боковых граней  $\Delta S_{x_1}$ ,

$\Delta S_{y_1}$ ,  $\Delta S_{z_1}$  со стороны нормалей  $\bar{n}_{x_1} = \bar{q}_{x_1}$ ,  $\bar{n}_{y_1} = \bar{q}_{y_1}$ ,  $\bar{n}_{z_1} = \bar{q}_{z_1}$  действуют силы натяжения  $\bar{T}_{x_1} \Delta S_{x_1}$ ,  $\bar{T}_{y_1} \Delta S_{y_1}$ ,  $\bar{T}_{z_1} \Delta S_{z_1}$ . Если бы система координат  $x_1, y_1, z_1$  была бы ориентирована в пространстве произвольно, то каждое из натяжений  $\bar{T}_{x_1}$ ,  $\bar{T}_{y_1}$ ,  $\bar{T}_{z_1}$  [см. (4.9)] содержало бы составляющие по ортам  $\bar{q}_{x_1}$ ,  $\bar{q}_{y_1}$ ,  $\bar{q}_{z_1}$ . При выбранной здесь ориентации системы координат боковые грани тетраэдра  $\Delta S_{x_1}$ ,  $\Delta S_{y_1}$  являются магнитными поверхностями, а боковая грань  $\Delta S_{z_1}$  — эквипотенциальной поверхностью. Поэтому натяжения  $\bar{T}_{x_1}$ ,  $\bar{T}_{y_1}$ ,  $\bar{T}_{z_1}$  можно найти с помощью (4.19), (4.20), и, как видно из этих уравнений, они будут содержать только составляющие, нормальные к соответствующим граням. Для грани  $\Delta S_{x_1}$  с нормалью  $\bar{n}_{x_1} = \bar{q}_{x_1}$  с помощью (4.20) получим

$$\bar{T}_{x_1} = \bar{q}_{x_1} T_{xx1} + \bar{q}_{y_1} T_{yx1} + \bar{q}_{z_1} T_{zx1} = -\frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} \bar{q}_{x_1}, \quad (4.21)$$

где  $T_{xx1} = -B^2/(2\mu_0 \mu_r)$ ;  $T_{yx1} = T_{zx1} = 0$ .

Для грани  $\Delta S_{y_1}$  с нормалью  $\bar{n}_{y_1} = \bar{q}_{y_1}$  с помощью того же уравнения получим

$$\bar{T}_{y_1} = \bar{q}_{x_1} \bar{T}_{xy1} + \bar{q}_{y_1} T_{yy1} + \bar{q}_{z_1} T_{zy1} = -\frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} \bar{q}_{y_1}, \quad (4.22)$$

где  $T_{yy1} = -\frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}$ ;  $T_{xy1} = T_{zy1} = 0$ .

Для грани  $\Delta S_{z_1}$  с нормалью  $\bar{n}_{z_1} = \bar{q}_{z_1}$  с помощью (4.19) получим

$$\bar{T}_{z_1} = \bar{q}_{x_1} T_{xz1} + \bar{q}_{y_1} T_{yz1} + \bar{q}_{z_1} T_{zz1} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} \bar{q}_{z_1}, \quad (4.23)$$

где  $T_{zz1} = B^2/(2\mu_0 \mu_r)$ ;  $T_{xz1} = T_{yz1} = 0$ .

Рассматривая грани  $\Delta S_{x_1}$ ,  $\Delta S_{y_1}$ ,  $\Delta S_{z_1}$  в совокупности как элемент, охватывающий поверхности  $S$ , можно утверждать, что сила натяжения  $\bar{T}_n \Delta S$ , приложенная к основанию тетраэдра  $\Delta S$ , отличается от силы натяжения  $\bar{T}_{x_1} \Delta S_{x_1} + \bar{T}_{y_1} \Delta S_{y_1} + \bar{T}_{z_1} \Delta S_{z_1}$ , приложенной к его боковым граням, на величину объемной силы  $\bar{f} \Delta V$ , действующей на внутренний объем тетраэдра  $\Delta V = \frac{1}{3} h \Delta S$ , т. е.

$$\bar{T}_n \Delta S = \bar{T}_{x_1} \Delta S_{x_1} + \bar{T}_{y_1} \Delta S_{y_1} + \bar{T}_{z_1} \Delta S_{z_1} + \bar{f} \Delta V.$$

Разделив правую и левую части полученного уравнения на  $\Delta S$  и учитывая, что  $\Delta S_{x_1}/\Delta S = \cos(\bar{n}, \bar{q}_{x_1})$ ;  $\Delta S_{y_1}/\Delta S = \cos(\bar{n}, \bar{q}_{y_1})$ ;  $\Delta S_{z_1}/\Delta S = \cos(\bar{n}, \bar{q}_{z_1})$ ;  $\Delta V/\Delta S = h/3$ , устремим размеры тет-

раздра  $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1$  и его высоту  $h$  к нулю. Заметив, что при конечном значении объемной плотности силы  $\bar{f}$  предел  $\bar{f}h$  равен нулю и отбрасывая в связи с этим член  $\bar{f}h/3$ , получим

$$\bar{T}_n = \bar{T}_{x1} (\cos \bar{n}, \bar{q}_{x1}) + \bar{T}_{y1} \cos (\bar{n}, \bar{q}_{y1}) + \bar{T}_{z1} \cos (\bar{n}, \bar{q}_{z1}).$$

Выразим натяжения  $\bar{T}_{x1}, \bar{T}_{y1}$  и  $\bar{T}_{z1}$  в этом уравнении через величины магнитного поля с помощью полученных выше уравнений, записав натяжение на эквипотенциальной грани  $\Delta S_{z1}$  иными образом:

$$\bar{T}_{z1} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} (B^2 - 0,5B^2) \bar{q}_{z1}.$$

После этого уравнение для  $\bar{T}_n$  приобретает следующий вид:

$$\bar{T}_n = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \{ [\bar{q}_{z1} B] [B \cos (\bar{n}, \bar{q}_{z1})] - 0,5B^2 [\bar{q}_{x1} \cos (\bar{n}, \bar{q}_{x1}) + \bar{q}_{y1} \cos (\bar{n}, \bar{q}_{y1}) + \bar{q}_{z1} \cos (\bar{n}, \bar{q}_{z1})] \}.$$

Так как в выбранной системе координат  $\bar{B} = \bar{q}_{z1} B$ ;  $B_n = \bar{n} \bar{B} = B_{z1} \cos (\bar{n}, \bar{q}_{z1}) = B \cos (\bar{n}, \bar{q}_{z1})$ ;  $\bar{n} = \bar{q}_{x1} \cos (\bar{n}, \bar{q}_{x1}) + \bar{q}_{y1} \times \cos (\bar{n}, \bar{q}_{y1}) + \bar{q}_{z1} \cos (\bar{n}, \bar{q}_{z1})$ , то выражение для натяжения на произвольно ориентированной в магнитном поле поверхности можно представить в векторной форме:

$$\bar{T}_n = \frac{1}{\mu_r \mu_0} (\bar{B} B_n - 0,5B^2 \bar{n}), \quad (4.24)$$

где  $\bar{B}$  — вектор индукции в рассматриваемой точке поверхности;  $\mu_r \mu_0$  — магнитная проницаемость среды в этой точке;  $\bar{n}$  — нормальный орт к той стороне поверхности, на которую действует натяжение  $\bar{T}_n$ ;  $B_n$  — нормальная составляющая индукции.

Натяжения по (4.24) могут быть использованы для нахождения с помощью (4.6) или (4.7) электромагнитной силы или момента, которые приложены к охваченному поверхностью  $S$  объему  $V$ . При этом нормальные орты  $\bar{n}$  в (4.24) должны пониматься как орты к внешней (по отношению к объему  $V$ ) стороне поверхности  $S$  (иными словами, эти орты должны направляться в сторону внешнего по отношению к объему  $V$  пространства). Записанное в векторной форме уравнение (4.24), позволяющее найти вектор натяжения  $\bar{T}_n$  на произвольно ориентированной в магнитном поле поверхности, никак не связано с особой системой координат  $x_1, y_1, z_1$ , использованной при его выводе. Поэтому компоненты векторов в (4.24) можно выразить в любой другой прямоугольной системе координат, например  $x, y, z$ , показанной на рис. 4.7. Пусть в этой системе координат в рассматриваемой точке поверхности с координатами  $x, y, z$

вектор индукции  $\vec{B} = \bar{q}_x B_x + \bar{q}_y B_y + \bar{q}_z B_z$ , нормальный орт к стороне поверхности  $S$ , на которую действует натяжение  $\vec{T}_n$ , равен  $\bar{n} = \bar{q}_x \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + \bar{q}_y \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + \bar{q}_z \cos(\bar{n}, \bar{q}_z)$ , нормальная составляющая вектора индукции  $B_n = \bar{n}\vec{B} = B_x \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + B_y \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + B_z \cos(\bar{n}, \bar{q}_z)$ . Подставим эти величины в (4.24):

$$\begin{aligned} \vec{T}_n = & \{1/(\mu_r \mu_0)\} \{[\bar{q}_x B_x + \bar{q}_y B_y + \bar{q}_z B_z] [B_x \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + \\ & + B_y \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + B_z \cos(\bar{n}, \bar{q}_z)] - 0,5B^2 [\bar{q}_x \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + \\ & + \bar{q}_y \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + \bar{q}_z \cos(\bar{n}, \bar{q}_z)]\} = \{1/(\mu_r \mu_0)\} \{[\bar{q}_x [(B_x^2 - 0,5B^2) \cos \times \\ & \times (\bar{n}, \bar{q}_x) + B_x B_y \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + B_x B_z \cos(\bar{n}, \bar{q}_z)] + \\ & + \bar{q}_y [B_y B_x \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + (B_y^2 - 0,5B^2) \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + B_y B_z \times \\ & \times \cos(\bar{n}, \bar{q}_z)] + \bar{q}_z [B_z B_x \cos(\bar{n}, \bar{q}_x) + B_z B_y \cos(\bar{n}, \bar{q}_y) + \\ & + (B_z^2 - 0,5B^2) \cos(\bar{n}, \bar{q}_z)]\}. \end{aligned}$$

Сравнивая преобразованное таким образом уравнение (4.24) с (4.8), в котором  $T_{nx}$ ,  $T_{ny}$ ,  $T_{nz}$  выражены по (4.10), получим следующие выражения для компонент тензора натяжения в магнитном поле:

$$\left. \begin{aligned} T_{xx} &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} (B_x^2 - 0,5B^2); & T_{xy} &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_x B_y; \\ T_{xz} &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_x B_z; \\ T_{yx} &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_y B_x; & T_{yy} &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} (B_y^2 - 0,5B^2); \\ T_{yz} &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_y B_z; \\ T_{zx} &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_z B_x; & T_{zy} &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_z B_y; \\ T_{zz} &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} (B_z^2 - 0,5B^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Записывая (4.25) более компактно, получим формулу для тензора натяжения в магнитном поле

$$T_{ik} = (B_i B_k - 0,5B^2 \delta_{ik}) / (\mu_r \mu_0), \quad (4.26)$$

где  $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$ ;  $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ ;  $i, k \in x, y, z$ .

Формула (4.26) совпадает с единственно правильной формулой для тензора натяжения  $T_{ik}$  в магнитном поле, которая была предложена Максвеллом в 1862 г. в одной из ранних его работ «О физических силовых линиях» [16, с. 117 с учетом замечаний Больцмана

на с. 205 и примечаний редактора и переводчика на с. 647]. В силу принятых допущений формулы (4.24), (4.26) пригодны для любых магнитных полей в линейных и нелинейных изотропных безгистерезисных средах. Расчеты, проведенные с помощью (4.24), (4.26), во всех случаях совпадают с экспериментальными данными (см. гл. 7). Другие формулы для тензора  $T_{ih}$  и вектора  $\bar{T}_n$ , предложенные различными авторами всегда ошибочны (см. гл. 6).

Поскольку компоненты тензора натяжений в магнитном поле удовлетворяют равенствам  $T_{xy} = T_{yx}$ ;  $T_{yz} = T_{zy}$ ;  $T_{zx} = T_{xz}$ , этот тензор, как мы приняли в § 4.2, действительно симметричен. Это дает нам право использовать компоненты тензора натяжений по (4.25) и вектор натяжения  $\bar{T}_n$  по (4.24), который также выражается через эти компоненты с помощью (4.8) и (4.10), не только для определения электромагнитных сил по (4.6), но и для определения электромагнитных моментов по (4.7).

**4.3.2. Вывод формулы для натяжения в магнитном поле с помощью пробной оболочки.** Изложенный в 4.3.1 вывод формулы для натяжения в математическом отношении вполне строг, однако он весьма громоздок и недостаточно физически нагляден. Поэтому целесообразно привести еще одно доказательство формулы для натяжения в магнитном поле,

опубликованное в [37]. Это доказательство приводит к той же формуле для вектора натяжения (4.24) и отличается не только физической наглядностью, но и строгостью и краткостью математических выкладок.

Чтобы найти ЭМС  $\bar{F}$ , действующую на объем  $V$  в магнитном поле, охватим этот объем тонкой оболочкой, толщина которой  $h_{об} \rightarrow 0$ , а магнитная проницаемость бесконечно велика ( $\mu_{об} \rightarrow \infty$ ). При  $h_{об} \rightarrow 0$  эта оболочка совпадает с поверхностью  $S$ , выделяющей объем  $V$ .

Если, как показано на рис. 4.8, на наружной поверхности оболочки разместить токи с поверхностной плотностью

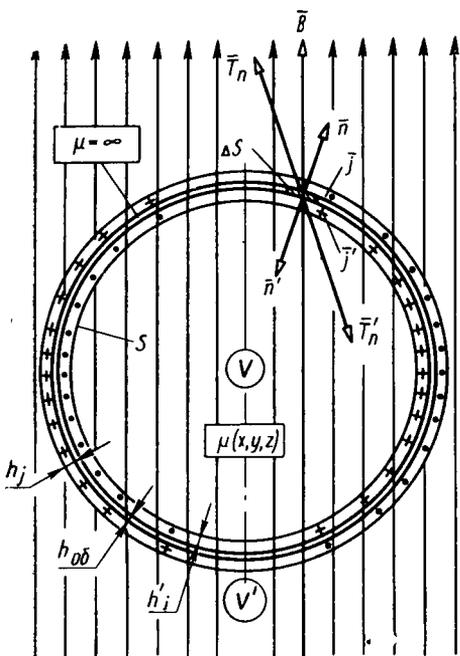


Рис. 4.8. Эквивалентирование магнитного поля в объемах  $V$  и  $V'$  с помощью бесконечно тонкой оболочки с  $\mu = \infty$

$$\bar{j} = [\bar{n} \times \bar{H}_t] = [\bar{n} \times \bar{H}], \quad (4.27)$$

а на внутренней поверхности оболочки — токи с поверхностной плотностью

$$\vec{j}' = [\vec{n}' \times \vec{H}_\tau] = [\vec{n}' \times \vec{H}] = -\vec{j},$$

то на той и другой поверхностях оболочек сохранится то же магнитное поле, т. е. те же нормальные составляющие индукции  $\vec{B}_n = (\vec{n}\vec{B}) \vec{n} = B_n \vec{n}$  и тангенциальные составляющие напряженности поля  $\vec{H}_{\text{тоб}} = \vec{H}_\tau = (\vec{\tau}\vec{H}) \vec{\tau} = H_\tau \vec{\tau}$ .

Действительно, индукция  $\vec{B}_n$  сохранится из-за того, что  $h_{\text{об}} \rightarrow 0$  и  $\mu \rightarrow \infty$ . В сохранении  $\vec{H}_\tau$  можно убедиться, составив граничные условия на поверхностях оболочки, обладающей  $\mu \rightarrow \infty$ . При этом нужно учесть, что на этих поверхностях имеются поверхностные токи с плотностями  $\vec{j}$  и  $\vec{j}' = -\vec{j}$ . Тогда, раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{тоб}} &= [\vec{j} \times \vec{n}] = [(\vec{n} \times \vec{H}_\tau) \times \vec{n}] = \\ &= (\vec{n}\vec{n}) \vec{H}_\tau - \vec{n} (\vec{n}\vec{H}_\tau) = \vec{H}_\tau \end{aligned}$$

$$\text{или } \vec{H}'_{\text{тоб}} = [\vec{j}' \times \vec{n}'] = [\vec{j} \times \vec{n}] = \vec{H}_\tau.$$

В силу сохранения магнитной проницаемости на наружной и внутренней поверхностях оболочки сохраняются  $\vec{H}_n = \vec{B}_n/\mu$  и  $\vec{B}_\tau = \mu \vec{H}_\tau$  и, следовательно, векторы  $\vec{H} = \vec{H}_\tau + \vec{H}_n$  и  $\vec{B} = \vec{B}_\tau + \vec{B}_n$ . А это означает, что внесение в магнитное поле охватывающей объем  $V$  бесконечно тонкой оболочки с бесконечно большой магнитной проницаемостью, на наружной и внутренней поверхностях которой имеются поверхностные токи с плотностями  $\vec{j}$  и  $\vec{j}' = -\vec{j}$  по (4.27), не окажет влияния ни на поле в объеме  $V$  (внутри поверхности  $S$ ), ни на поле в объеме  $V'$  (вне поверхности  $S$ ).

В качестве примера на рис. 4.9 показаны картины токов  $\vec{j}$  на шаровой и цилиндрической оболочках  $S$ , при которых сохраняется равномерное магнитное поле как внутри оболочки (в объеме  $V$ ), так и вне оболочки (в объеме  $V'$ ).

Обратимся теперь к определению ЭМС  $\Delta \vec{F}$ , действующей в магнитном поле на элемент  $\Delta S$  поверхности  $S$  со стороны нормали  $\vec{n}$ , т. е. снаружи. Эта ЭМС выражается через вектор натяжения на элементе  $\vec{T}_n$ :

$$\Delta \vec{F} = \vec{T}_n \Delta S. \quad (4.28)$$

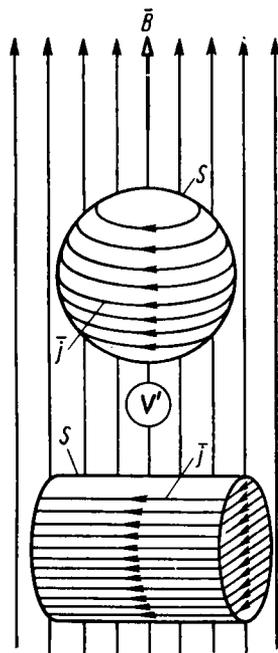


Рис. 4.9. Картины токов  $\vec{j} = [\vec{H}\vec{n}]$  на наружной поверхности цилиндрической и шаровой оболочек, при которых сохраняется равномерное магнитное поле

Соответственно полная сила  $\vec{F}$ , действующая на объем  $V$ , выделенный поверхностью  $S$ , определяется путем интегрирования элементарных сил  $\Delta\vec{F} : \vec{F} = \oint \vec{T}_n dS$ .

Поскольку вектор натяжения  $\vec{T}_n$  полностью определяется индукцией  $\vec{B}_n$  и напряженностью  $\vec{H}$  магнитного поля на рассматриваемом элементе поверхности  $S$  с нормалью  $\vec{n}$ , то можно утверждать, что он не изменится, если совместить с поверхностью  $S$  оболочку с указанными особенностями, появление которой не приводит к изменению магнитного поля вне поверхности  $S$  (в объеме  $V'$ ). То же самое можно сказать и о силе  $\Delta\vec{F}$ , действующей на элемент  $\Delta S$  поверхности  $S$ . Она также сохранится без изменения. Однако теперь сила  $\Delta\vec{F}$  представляет собой силу, действующую снаружи на элемент  $\Delta S = \vec{n}\Delta S$  оболочки с указанными особенностями.

Рассуждая аналогично, придем к заключению, что силу  $\vec{F}'$ , действующую на объем  $V'$ , можно выразить путем интегрирования элементарных сил  $\Delta\vec{F}' = \vec{T}'_n\Delta S$ , действующих изнутри на элементы  $\Delta S' = \vec{n}'\Delta S$  оболочки с указанными особенностями,

$$\vec{F}' = \oint \vec{T}'_n dS,$$

где  $\vec{T}'_n$  — натяжение на элементе  $\Delta S$  поверхности  $S$  со стороны нормали  $n$ .

Начнем с определения элементарной силы  $\Delta\vec{F}$ , действующей на элемент  $\Delta S$  поверхности оболочки, в частном случае, когда  $\vec{B} = \vec{B}_n$ ,  $\vec{H}_\tau = 0$  и, следовательно,  $\vec{j} = [n\vec{H}_\tau] = 0$ .

В этом случае токи  $\vec{j}$  на элементе  $\Delta S$  отсутствуют, и сила  $\Delta\vec{F}$  понимается как сила, действующая на элемент  $\Delta S$  наружной грани

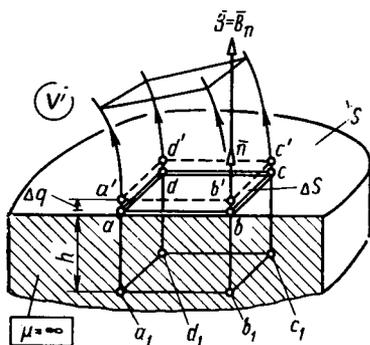


Рис. 4.10. Определение силы  $\Delta\vec{F}$ , приложенной к элементу поверхности оболочки с  $\mu = \infty$  в случае  $\vec{B} = \vec{B}_n$  и  $\vec{B}_\tau = 0$

оболочки с бесконечно большой магнитной проницаемостью. Для определения силы  $\Delta F$  охватим границу оболочки  $S$  (рис. 4.10) параллелепипедом  $abcda_1b_1c_1d_1$ , основанием которого является элемент  $\Delta S$  ( $abcd$ ) с нормалью  $\vec{n}$ , расположенный в объеме  $V'$  на бесконечно малом расстоянии от поверхности  $S$ . Этот параллелепипед является элементом трубки поля с сечением  $\Delta S$  и потоком  $\Phi = B_n \Delta S$ . Выразим силу  $\Delta\vec{F} = \vec{n}\Delta F$ , действующую на грань  $abcd$  параллелепипеда, через изменение магнитной энергии  $\Delta W$  при перемещении этой грани (вместе с элементом грани-

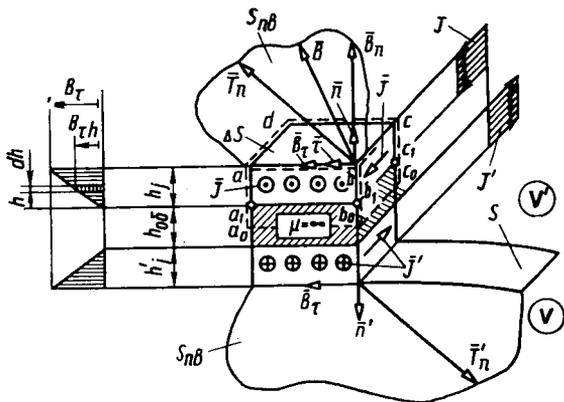


Рис. 4.11. Определение силы  $\overline{\Delta F}$ , приложенной к элементу поверхности оболочки с  $\mu = \infty$ , в общем случае, когда  $\overline{B} \neq B_n$  и  $\overline{B}_\tau \neq 0$

ной поверхности  $\Delta S$ ) на малое расстояние  $\Delta \bar{q} = \bar{n} \Delta q$  в условиях  $\Phi = \text{const}$ .

Очевидно, при таком перемещении индукция  $B = B_n = \Phi / \Delta S = \text{const}$ , следовательно,  $\mu = \text{const}$ . А это означает, что перемещение производится после замены нелинейной системы ее линейной моделью. В связи с этим объемная плотность энергии на элементе поверхности  $\Delta S$  в объеме  $V'$  вычисляется для магнитно-линейной среды

$$\omega = B_n H_n / 2 = \mu H_n^2 / 2.$$

Изменение магнитной энергии при перемещении грани  $\Delta S$  будет связано с тем, что малый объем  $\Delta V = \Delta S \Delta q$  ( $abcd a' b' c' d'$ ), в котором до перемещения была среда с магнитной проницаемостью  $\mu$ , после перемещения заполняется средой с  $\mu = \infty$ . Так как до перемещения в объеме  $\Delta V = \Delta S \Delta q$  была сосредоточена энергия  $\omega \Delta V$ , а после перемещения энергия в этом объеме становится равной нулю (так как при  $\mu = \infty$ ,  $H = 0$ ), то изменение энергии  $\Delta W = -\omega \Delta V = -0,5 B_n H_n \Delta S \Delta q$ . С помощью уравнения (2.1) найдем

$$\overline{\Delta F} = \bar{n} \Delta F = \bar{n} \lim (-\Delta W / \Delta q) = 0,5 B_n H_n \Delta S \bar{n}. \quad (4.29)$$

После этого можно перейти к определению ЭМС  $\overline{\Delta F}$ , действующей на элемент  $\Delta S$  поверхности оболочки, в общем случае, когда  $\overline{H}_\tau \neq 0$  и на наружной поверхности оболочки имеются токи с плотностью  $\bar{j}$  по (4.27). Такой элемент оболочки ( $\mu = \infty$ ) показан на рис. 4.11. Толщина оболочки равна  $h_{об}$ . На ее наружной поверхности с нормалью  $\bar{n}$  имеется токовый слой толщиной  $h_j$  с объемной плотностью тока  $\bar{J} = \bar{j} / h_j$ ; соответственно на внутренней поверхности с нормалью  $\bar{n}'$  токовый слой толщиной  $h'_j = h_j$  с объемной плотностью тока  $\bar{J}' = \bar{j}' / h'_j = -\bar{J}$ .

Как легко установить на основании закона полного тока, на наружной поверхности оболочки с  $\mu = \infty$  тангенциальная составляющая напряженности  $\overline{H}_\tau = 0$  и  $\overline{H} = \overline{H}_n$ , а при удалении от оболочки она изменяется линейно и на расстоянии  $h \leq h_j$  от нее становится равной  $\overline{H}_{\tau h} = \overline{H}_\tau h/h_j$ . На наружной поверхности токового слоя, т. е. при  $h = h_j$ , напряженность  $H_{\tau h} = H_\tau$ . Таким же образом изменяется в пределах токового слоя тангенциальная составляющая индукции  $B_{\tau h} = \mu H_{\tau h}$ .

Элементарную силу  $\Delta \overline{F}$ , действующую на элемент  $\Delta S$  оболочки с током  $\overline{j}$ , найдем как силу, приложенную к объему параллелепипеда  $abcd a_0 b_0 c_0 d_0$  (выделен на рис. 4.10 пунктирными линиями). Он охватывает элемент наружной границы оболочки  $a_1 b_1 c_1 d_1$  и токовый слой толщиной  $h_j$ . Сила  $\Delta \overline{F}$  складывается из двух сил:

1)  $\Delta \overline{F}_1$ , приложенной к наружной границе оболочки с  $\mu = \infty$ , на которой  $\overline{B} = \overline{B}_n = B_n \overline{n}$  и  $\overline{H} = \overline{H}_n = H_n \overline{n}$ ,  $\Delta \overline{F}_1 = 0,5 B_n H_n \times \Delta S \overline{n} = 0,5 \overline{n} B_n^2 \Delta S / \mu$  [см. (4.29)]; 2)  $\Delta \overline{F}_2$ , складывающейся из элементарных сил, приложенных к элементам объема  $dV = \Delta S dh$  токового слоя с плотностью тока  $\overline{J} = \overline{j}/h_j$ . Так как в пределах толщины токового слоя нормальная составляющая индукции  $\overline{B}_n = \text{const}$ , то на расстоянии  $h$  от оболочки

$$\overline{B} = \overline{B}_n + \overline{B}_{\tau h} = \overline{B}_n + \overline{B}_\tau h/h_j.$$

Интегрируя элементарные силы по объему  $V = \Delta S h_j$  элемента токового слоя, найдем

$$\begin{aligned} \Delta \overline{F}_2 &= \int_V [\overline{J} \times \overline{B}] dV = \frac{\Delta S}{h_j} \int_0^{h_j} [\overline{j} \times \overline{B}_n] dh + \frac{\Delta S}{h_j^2} \int_0^{h_j} [\overline{j} \times \overline{B}_\tau] \times \\ &\quad \times h dh = \Delta S ([\overline{j} \times \overline{B}_n] + 0,5 [\overline{j} \times \overline{B}_\tau]). \end{aligned}$$

Выражая  $\overline{j}$  через  $\overline{H}_\tau$  по (4.27) и раскрывая полученные двойные векторные произведения:

$$\begin{aligned} [\overline{j} \times \overline{B}_n] &= -[\overline{B}_n \times [\overline{n} \times \overline{H}_\tau]] = -\overline{n} (\overline{B}_n \overline{H}_\tau) + \overline{H}_\tau (\overline{B}_n \overline{n}) = H_\tau B_n \overline{\tau}; \\ [\overline{j} \times \overline{B}_\tau] &= -[\overline{B}_\tau \times [\overline{n} \times \overline{H}_\tau]] = -\overline{n} (\overline{B}_\tau \overline{H}_\tau) + \overline{H}_\tau (\overline{B}_\tau \overline{n}) = -\overline{B}_\tau H_\tau \overline{n}, \end{aligned}$$

получим

$$\Delta \overline{F}_2 = (H_\tau B_n \overline{\tau} - 0,5 B_\tau H_\tau \overline{n}) \Delta S = (B_\tau B_n \overline{\tau} - 0,5 B_\tau^2 \overline{n}) \Delta S / \mu.$$

Тогда, имея в виду, что  $\Delta \overline{F} = \Delta \overline{F}_1 + \Delta \overline{F}_2$ , и используя (4.28), получим искомую формулу для натяжения:

$$\begin{aligned} \overline{T}_n &= \Delta \overline{F} / \Delta S = 0,5 (B_n^2 - B_\tau^2) \overline{n} / \mu + B_\tau B_n \overline{\tau} / \mu = \\ &= (1/\mu) (\overline{B} B_n - 0,5 B^2 \overline{n}) \dots \end{aligned} \quad (4.30)$$

Формула (4.30) для вектора натяжения совпадает с (4.24).

Аналогично рассуждая и имея в виду, что  $\bar{n}' = -\bar{n}$  и  $\bar{j}' = -\bar{j}$ , можно найти формулу для натяжения  $\bar{T}'_n$ , действующего на элемент  $\Delta S$  поверхности  $S$  со стороны нормали  $\bar{n}'$ . Это натяжение совпадет по абсолютной величине с натяжением  $\bar{T}_n$  и направлено в противоположную сторону:  $\bar{T}'_n = -\bar{T}_n$ .

Из приведенного вывода формул для  $\bar{T}_n$  и  $\bar{T}'_n = -\bar{T}_n$  следует, что силы, действующие снаружи и изнутри на элементы поверхности бесконечно тонкой оболочки с  $\mu = \infty$  и с токами  $\bar{j}$  и  $\bar{j}' = -\bar{j}$ , также оказываются взаимно уравновешенными:

$$\Delta \bar{F}' = \bar{T}'_n \Delta S = -\bar{T}_n \Delta S = -\Delta \bar{F}.$$

Из этого соотношения, в свою очередь, вытекают два важных вывода:

1) результирующая сила  $\Delta \bar{F}'_\Sigma$ , действующая на элементы оболочки с указанными особенностями, равна нулю:

$$\Delta \bar{F}'_\Sigma = \Delta \bar{F} + \Delta \bar{F}' = 0;$$

2) если предположить, что оболочка с  $\mu \rightarrow \infty$  и поверхностные токи с плотностями  $\bar{j}$  и  $\bar{j}'$  представляют собой одно целое, то силы  $\Delta \bar{F}$  и  $\Delta \bar{F}' = -\Delta \bar{F}$  вызовут в материале оболочки механические напряжения, составляющие которых можно выразить через составляющие натяжения.

Нормальная составляющая механического напряжения  $\bar{\sigma}_n$ , вызывающая растяжение в материале оболочки в направлении  $\bar{n}$ , выражается через нормальную составляющую вектора натяжения:

$$\bar{\sigma}_n = \sigma_n \bar{n} = T_{nn} \bar{n} = \bar{T}_{nn},$$

где

$$T_{nn} = (B_n^2 - B_t^2)/(2\mu).$$

Тангенциальная составляющая механического напряжения  $\bar{\sigma}_\tau$ , вызывающая сдвиг в материале оболочки в направлении  $\bar{\tau}$ , выражается через тангенциальную составляющую вектора натяжения:

$$\bar{\sigma}_\tau = \sigma_\tau \bar{\tau} = T_{n\tau} \bar{\tau} = \bar{T}_{n\tau},$$

где  $T_{n\tau} = B_n B_\tau / \mu$ .

На основании вывода 2 оболочку с указанными свойствами можно рассматривать как «пробную» оболочку, с помощью которой в принципе могут быть экспериментально обнаружены составляющие натяжения в магнитном поле. Для этого достаточно измерить деформации оболочки в виде растяжения в направлении  $\bar{n}$  и сдвига в направлении  $\bar{\tau}$ , определить составляющие механических напряжений

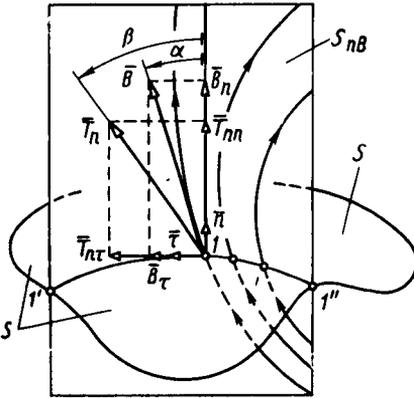


Рис. 4.12. Разложение натяжения  $\bar{T}_n$  на нормальную  $\bar{T}_{nn}$  и тангенциальную  $\bar{T}_{n\tau}$  составляющие

циальному орту  $\bar{\tau}$  и равна  $\bar{T}_{n\tau} = \bar{\tau}T_{n\tau}$ , где  $T_{n\tau} = \bar{\tau}\bar{T}_n$  — проекция  $\bar{T}_n$  на орт  $\bar{\tau}$ .

Направление тангенциального орта  $\bar{\tau}$ , касательного к поверхности  $S$  в рассматриваемой точке, нельзя выбрать произвольно. Орт  $\bar{\tau}$  должен лежать в плоскости  $S_{nB}$  (рис. 4.12), включающей векторы  $\bar{n}$  и  $\bar{B}$ , и быть касательным к линии пересечения плоскости  $S_{nB}$  с поверхностью  $S$  ( $l'l''$ ). В этом случае вектор  $\bar{B}$  можно разложить по направлениям  $\bar{n}$  и  $\bar{\tau}$  и представить в виде суммы составляющих по этим направлениям:  $\bar{B} = \bar{B}_n + \bar{B}_\tau$ ,

где  $\bar{B}_n = \bar{n}B_n$ ;  $\bar{B}_\tau = \bar{\tau}B_\tau$ ;  $B_n = \bar{n}\bar{B}$ ;  $B_\tau = \bar{\tau}\bar{B}$ .

Исходя из этих выражений, нетрудно выразить орт  $\bar{\tau}$  аналитически:

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{B}_\tau}{|B_\tau|} = \frac{\bar{B} - \bar{n}(\bar{n}\bar{B})}{|\bar{B} - \bar{n}(\bar{n}\bar{B})|} = \bar{q}_x \tau_x + \bar{q}_y \tau_y + \bar{q}_z \tau_z,$$

где  $\bar{B}_\tau = \bar{\tau}(\bar{\tau}\bar{B}) = \bar{q}_x B_{\tau x} + \bar{q}_y B_{\tau y} + \bar{q}_z B_{\tau z}$ ;  $\bar{n} = \bar{q}_x n_x + \bar{q}_y n_y + \bar{q}_z n_z$ ;

$$n_x = \cos(\bar{n}, \bar{q}_x); \quad n_y = \cos(\bar{n}, \bar{q}_y); \quad n_z = \cos(\bar{n}, \bar{q}_z);$$

$$\tau_x = \cos(\bar{\tau}, \bar{q}_x); \quad \tau_y = \cos(\bar{\tau}, \bar{q}_y); \quad \tau_z = \cos(\bar{\tau}, \bar{q}_z).$$

После несложных преобразований компоненты  $\bar{\tau}$  можно представить следующим образом:

$$\tau_x = B_{\tau x} / |B_\tau|; \quad \tau_y = B_{\tau y} / |B_\tau|; \quad \tau_z = B_{\tau z} / |B_\tau|,$$

в оболочке  $\sigma_n$  и  $\sigma_\tau$ , пропорциональные соответствующим деформациям, и приравнять их составляющим натяжений:  $T_{nn} = \sigma_n$ ;  $T_{n\tau} = \sigma_\tau$ .

**4.3.3. Свойства вектора натяжения** Вектор натяжения  $\bar{T}_n$  по (4.24) удобно представить в виде суммы двух составляющих: нормальной  $\bar{T}_{nn}$  и тангенциальной  $\bar{T}_{n\tau}$ . Нормальная составляющая натяжения направлена по нормальному орту  $\bar{n}$  и равна  $\bar{T}_{nn} = \bar{n}T_{nn}$ , где  $T_{nn} = \bar{n}\bar{T}_n$  — проекция  $\bar{T}_n$  на орт  $\bar{n}$ .

Тангенциальная составляющая направлена по тангенциальному орту  $\bar{\tau}$  и равна  $\bar{T}_{n\tau} = \bar{\tau}T_{n\tau}$ , где  $T_{n\tau} = \bar{\tau}\bar{T}_n$  — проекция  $\bar{T}_n$  на орт  $\bar{\tau}$ .

$$\begin{aligned} \text{где } |B_{\tau}| &= \sqrt{B_{\tau x}^2 + B_{\tau y}^2 + B_{\tau z}^2}; \quad B_{\tau x} = B_x(1 - n_x^2) - B_y n_x n_y - \\ &- B_z n_x n_z; \quad B_{\tau y} = -B_x n_y n_x + B_y(1 - n_y^2) - B_z n_y n_z; \\ &B_{\tau z} = -B_x n_z n_x - B_y n_z n_y + B_z(1 - n_z^2). \end{aligned}$$

Выражая индукцию в (4.24) через ее нормальную и тангенциальную составляющие

$$\bar{T}_n = \frac{1}{\mu\mu_0} [(\bar{n}B_n + \bar{\tau}B_{\tau})B_n - 0,5\bar{n}(B_n^2 + B_{\tau}^2)],$$

разложим натяжения по двумя взаимно ортогональным направлениям,

$$\bar{T}_n = \bar{T}_{nn} + \bar{T}_{n\tau}, \quad (4.31)$$

где  $\bar{T}_{nn} = T_{nn}\bar{n} = \frac{B_n^2 - B_{\tau}^2}{2\mu\mu_0}\bar{n}$  — нормальная составляющая натяжения;  $\bar{T}_{n\tau} = T_{n\tau}\bar{\tau} = \frac{B_n B_{\tau}}{\mu\mu_0}\bar{\tau}$  — тангенциальная составляющая натяжения.

Из (4.31) видно, что тангенциальная составляющая натяжения появляется только в том случае, когда вектор  $\bar{B}$  имеет одновременно и тангенциальную и нормальную составляющие, т. е.  $B_n \neq 0$  и  $B_{\tau} \neq 0$ . Если одна из этих составляющих равна нулю, то натяжение имеет только нормальную составляющую  $\bar{T}_n = \bar{T}_{nn}$ . Причем на эквипотенциальной поверхности, когда  $\bar{B}_{\tau} = 0$ , уравнение (4.31) превращается в (4.23), а на магнитной поверхности, когда  $B_n = 0$ , — в (4.22).

Из (4.31) также следует, что при одинаковых по абсолютной величине нормальной и тангенциальной составляющих индукций ( $|B_n| = |B_{\tau}|$ ) нормальная составляющая натяжения исчезает, и натяжение имеет только тангенциальную составляющую.

Посмотрим теперь, как зависят модуль натяжения  $T_n = |T_n|$  и угол  $\beta$  между натяжением и нормалью  $\bar{n}$ , от модуля индукции  $|\bar{B}| = B$  и угла  $\alpha$  между индукцией  $\bar{B}$  и нормалью  $\bar{n}$  (рис. 4.12).

Выражая  $B_n$  и  $B_{\tau}$  в (4.31) в виде  $B_n = B \cos \alpha$ ,  $B_{\tau} = B \sin \alpha$  и за-

$$\text{мечая, что } T_{nn} = \frac{B_n^2 - B_{\tau}^2}{2\mu\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{B^2 \cos 2\alpha}{2\mu\mu_0};$$

$$T_{n\tau} = \frac{B_n B_{\tau}}{\mu\mu_0} = \frac{B^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\mu\mu_0} = \frac{B^2 \sin 2\alpha}{2\mu\mu_0}, \text{ получим}$$

$$\bar{T}_n = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} (\bar{n} \cos 2\alpha + \bar{\tau} \sin 2\alpha). \quad (4.32)$$

С другой стороны, векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{T}_n$  можно выразить в осях  $n$ ,  $\tau$  через модули и углы по отношению к оси  $n$  (орту  $\vec{n}$ ):

$$\vec{B} = B_n \vec{n} + B_\tau \vec{\tau} = B (\vec{n} \cos \alpha + \vec{\tau} \sin \alpha);$$

$$\vec{T}_n = T_{nn} \vec{n} + T_{n\tau} \vec{\tau} = T_n (\vec{n} \cos \beta + \vec{\tau} \sin \beta).$$

Сравнивая выражение для  $\vec{T}_n$  с (4.32), приходим к заключению, что модуль вектора натяжения  $T_n = |\vec{T}_n| = B^2 / (2\mu\mu_0)$ , а направление вектора натяжения по отношению к нормали характеризуется углом  $\beta = 2\alpha$ .

Таким образом, модуль вектора натяжения  $T_n$  зависит только от относительной магнитной проницаемости  $\mu$  и модуля вектора индукции  $B$ , и не зависит от направления вектора индукции. И, наоборот, угол  $\beta$  между вектором натяжения и нормалью  $\vec{n}$  зависит только от угла  $\alpha$  между вектором индукции и нормалью  $\vec{n}$ . Из этого следует, что при сохранении модуля вектора индукции  $B = \text{const}$  и варьировании лишь угла  $\alpha$ , характеризующего направление этого вектора по отношению к нормали  $\vec{n}$  в определенной плоскости  $\vec{n}, \vec{\tau}$  (например, плоскости  $S_{nB}$  рис. 4.12), модуль вектора натяжения, расположенного в той же плоскости, будет сохраняться постоянным ( $T_n = \text{const}$ ), а изменяться будет лишь угол  $\beta$ , характеризующий направление этого вектора по отношению к нормали. Это означает, что в условиях  $B = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{var}$ , когда геометрическим местом (1) вектора  $\vec{B}$  является окружность с радиусом  $B$ , геометрическое место (2) вектора  $\vec{T}_n$  также представляет собой окружность с радиусом  $T_n = B^2 / (2\mu\mu_0)$ . Причем положения векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{T}_n$  на своих геометрических местах характеризуются соответ-

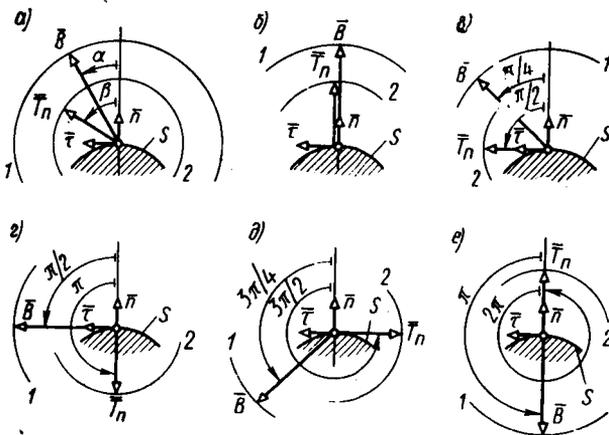


Рис. 4.13. Геометрические места векторов индукции  $\vec{B}$  и натяжения  $\vec{T}_n$  при  $B = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{var}$

ственно углами  $\alpha$  и  $\beta = 2\alpha$  (рис. 4.13, а). Некоторые характерные положения векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{T}_n$  на своих геометрических местах при изменении угла  $\alpha$  в пределах от 0 до  $\pi$  и угла  $\beta = 2\alpha$  от 0 до  $2\pi$  показаны на рис. 4.13, б — е. При  $\alpha = 0$  или  $\pi$  (рис. 4.13, б, е), когда  $S$  является эквипотенциальной поверхностью  $\beta = 0$ , или  $2\pi$  и натяжение направлено в сторону нормали  $\vec{n}$  ( $\vec{T}_n = \vec{n}T_n$ ). При  $\alpha = \pi/2$  (рис. 4.13, в), когда  $S$  является магнитной поверхностью,  $\beta = \pi$ , натяжение направлено в противоположную сторону по отношению к нормали  $\vec{n}$  ( $\vec{T}_n = -\vec{n}T_n$ ). При  $\alpha = \pi/4$  или  $(3/4)\pi$  (рис. 4.13, в, д), когда нормальная и тангенциальная составляющие вектора  $B$  одинаковы по модулю ( $|\vec{B}_n| = |\vec{B}_\tau|$ ),  $\beta = \pi/2$  или  $\beta = 3\pi/2$ , и натяжение имеет только тангенциальную составляющую ( $\vec{T}_n = \vec{\tau}T_n$  или  $\vec{T}_n = -\vec{\tau}T_n$ ).

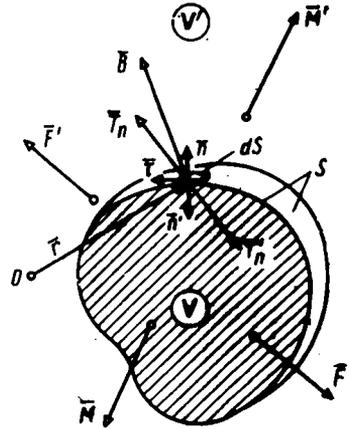


Рис. 4.14. Равновесие электромагнитных сил и моментов, действующих внутри замкнутой системы

Заметим, что одну и ту же поверхность  $S$  можно рассматривать и как поверхность, охватывающую, например, снаружи объем  $V$  (рис. 4.14), и как поверхность, охватывающую изнутри объем  $V'$ , под которым понимается объем части области поля, расположенной вне объема  $V$ . Поэтому через натяжения на поверхности  $S$  можно выразить не только силу, действующую на объем  $V$ ,

$$\vec{F} = \oint_S \vec{T}_n dS,$$

где  $\vec{T}_n = \frac{1}{\mu_0} (B_n \vec{B} - 0,5nB^2)$ , но и силу действующую на объем  $V'$ ,

$$\vec{F}' = \oint_S \vec{T}'_n dS,$$

$$\text{где } \vec{T}'_n = \frac{1}{\mu_0} (B'_n \vec{B} - 0,5n'B^2).$$

Причем, поскольку по определению  $\vec{n}' = -\vec{n}$ ,  $B'_n = -B_n$ , всегда  $\vec{T}'_n = -\vec{T}_n$ , и, следовательно, сила  $\vec{F}$ , действующая на объем  $V$  со стороны объема  $V'$ , равна по величине и направлена в противоположную сторону по отношению к силе  $\vec{F}'$ , действующей на объем  $V'$  со стороны объема  $V$  ( $\vec{F}' = -\vec{F}$ ).

В таком же соотношении находятся и моменты, действующие соответственно на объем  $V$  или на объем  $V'$ :

$$\overline{M}' = \oint_S [\vec{r} \overline{T}'_n] dS = - \oint_S [\vec{r} \overline{T}_n] dS = -\overline{M}.$$

Таким образом, на силы в электромагнитных полях распространяются все законы механики, и в том числе закон равновесия сил внутри замкнутой системы.

**4.3.4. Распространение формул для тензора натяжения в вектора натяжения на постоянные магниты.** Формулы для тензора натяжения (4.26) и вектора натяжения (4.24) можно использовать в тех случаях, когда поверхность  $S_{12}$ , охватывающая объем  $V$ , располагается в магнитно-нелинейной изотропной безгистерезисной среде. Однако их легко распространить на идеализированные постоянные магниты, если принять для них математическую модель намагничивания [1, с. 338, § 74], в которой постоянный магнит обладает определенной относительной магнитной проницаемостью  $\mu_r$ , а его постоянная намагниченность  $\overline{M}_0$  с заданным пространственным распределением складывается с напряженностью магнитного поля  $\overline{H}$ . В такой модели индукция  $\overline{B} = \mu_0 \mu_r (\overline{M}_0 + \overline{H})$ . Это дает возможность моделировать постоянный магнит некоторым магнетиком с той же магнитной проницаемостью  $\mu_0 \mu_r$ , в котором кроме заданных плотностей токов проводимости  $\overline{J}$ , имеются дополнительные плотности токов  $\overline{J}_V$ , воспроизводящие заданную постоянную намагниченность  $\overline{M}_0$ . Так как  $\overline{J} = \text{rot } \overline{H}$ ;  $\overline{J}_V = \text{rot } \overline{M}_0$ , то сумма этих токов создает некоторую эквивалентную напряженность поля  $\overline{H}_0$ , которая удовлетворяет уравнению  $\overline{J} + \overline{J}_V = \text{rot} (\overline{H} + \overline{M}_0) = \text{rot } \overline{H}_0$ .

Напряженности  $\overline{H}_0 = \overline{H} + \overline{M}_0$  соответствует прежнее магнитное поле с индукцией  $\overline{B} = \mu_0 \mu_r \overline{H}_0$ .

Если в пределах магнита имеются поверхности разрыва магнитной проницаемости  $S_p$ , на которых  $\mu_r$  и намагниченность  $\overline{M}_0$  претерпевают скачкообразные изменения, в модели на этих поверхностях необходимо ввести дополнительную поверхностную плотность тока  $\overline{j}_s = [\vec{n}_b (\overline{M}_{0b} - \overline{M}_{0a})]$ . Здесь  $\overline{M}_{0a}$  и  $\overline{M}_{0b}$  — намагниченности в средах  $a$  и  $b$ , примыкающих к граничной поверхности;  $\vec{n}_b$  — внешняя (по отношению к среде  $a$ ) нормаль к граничной поверхности. Поверхностная плотность тока  $\overline{j}_s$  должна учитываться при расчете поля в граничном условии для тангенциальных составляющих эквивалентной напряженности поля:

$$[\vec{n}_b (\overline{H}_{0b} - \overline{H}_{0a})] = \overline{j}_s.$$

В такой модели постоянного магнита правильно эквивалентрируются не только индукция магнитного поля, но и напряженность поля и энергия магнитного поля, а следовательно, и объемные и поверхностные силы. Поэтому тензор натяжения в таком постоянном магните не отличается от тензора натяжения в его модели и может быть определен по (4.26). Соответственно вектор натяжения в постоянном магните не отличается от вектора натяжения в его модели и может быть определен по (4.24).

#### 4.4. Поверхностная плотность электромагнитных сил в магнитном поле

Электромагнитные силы, действующие на различные среды в магнитном поле, складываются из объемных сил  $\vec{f}dV$ , приложенных к элементам объема этих сред, и поверхностных сил,  $\vec{f}_s dS$  приложенных к элементам границы между средами. ( $\vec{f}$  — объемная плотность сил в магнитном поле;  $\vec{f}_s$  — поверхностная плотность ЭМС на границе между средами  $a$  и  $b$  с различными магнитными проницаемостями  $\mu_a$  и  $\mu_b$ ).

Поверхностную плотность ЭМС  $\vec{f}_s$ , приложенных к границе  $S_p = S_{ab}$  между средами  $a$  и  $b$  с различными магнитными проницаемостями ( $\mu_a$  и  $\mu_b$ ), можно выразить через натяжения по обе стороны границы  $\vec{T}_{na}$  и  $\vec{T}_{nb}$ .

Для определения поверхностной плотности ЭМС  $\vec{f}_s$ , действующей на элемент границы  $\Delta S$  среды  $a$  с внешней нормалью  $\vec{n}_b$  (рис. 4.15), нужно охватить элемент  $\Delta S$  параллелепипедом, изображенным на рисунке пунктирными линиями. Верхняя грань параллелепипеда параллельна элементу границы  $\Delta S$  и располагается в среде  $b$  с магнитной проницаемостью  $\mu_b$ . Нижняя его грань также параллельна элементу границы  $\Delta S$ , но располагается в среде  $a$  с магнитной проницаемостью  $\mu_a$ . Высота параллелепипеда  $h$  является величиной второго порядка малости по сравнению с размерами его верхней и нижней граней. Площадь этих граней не отличается от площади рассматриваемого элемента границы и равна  $\Delta S$ . При  $h \rightarrow 0$  сила, действующая на объем параллелепипеда,  $\Delta V = h\Delta S$  совпадает

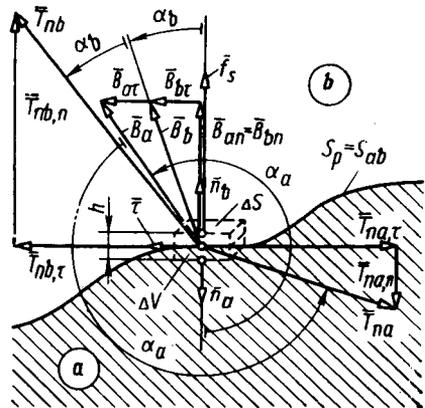


Рис. 4.15. Определение поверхностной плотности ЭМС  $\vec{f}_s$  на границе между средами  $a$  и  $b$  с различными магнитными проницаемостями

с поверхностной силой  $\bar{f}_S \Delta S$ , приложенной к рассматриваемому элементу границы  $\Delta S$ .

Силу, действующую на объем  $\Delta V$ , можно выразить через натяжения на внешней поверхности этого объема, т. е. на поверхности граней с нормальными  $\bar{n}_b$  и  $\bar{n}_a = -\bar{n}_b$ . В силу малости  $h$  можно пренебречь силами, действующими на боковые грани параллелепипеда.

Таким образом, поверхностная сила, действующая на элемент границы  $\Delta S$ , между средами 1 и 2 (при  $\Delta S \rightarrow 0$ ),

$$\bar{F}_{\Delta S} = \bar{f}_S \Delta S = \oint_S \bar{T}_n dS = \bar{T}_{nb} \Delta S + \bar{T}_{na} \Delta S.$$

Откуда поверхностная плотность ЭМС, приложенных к границе между средами  $a$  и  $b$ ,

$$\bar{f}_S = \lim_{(\Delta S \rightarrow 0)} \frac{\bar{F}_{\Delta S}}{\Delta S} = \bar{T}_{nb} + \bar{T}_{na}.$$

Выразим натяжения  $\bar{T}_{nb}$  и  $\bar{T}_{na}$  в правой части этого уравнения по (4.31) через нормальные и тангенциальные составляющие векторов поля по обе стороны границы:

$$\bar{T}_{na} = \bar{T}_{na,n} + \bar{T}_{na,\tau} = \frac{B_{an}^2 - B_{a\tau}^2}{2\mu_a} \bar{n}_a + \frac{B_{an} B_{a\tau}}{\mu_a} \bar{\tau}_a;$$

$$\bar{T}_{nb} = \bar{T}_{nb,n} + \bar{T}_{nb,\tau} = \frac{B_{bn}^2 - B_{b\tau}^2}{2\mu_b} \bar{n}_b + \frac{B_{bn} B_{b\tau}}{\mu_b} \bar{\tau}_b.$$

Здесь  $\bar{T}_{na}$  — натяжение на грани параллелепипеда с нормалью  $\bar{n}_a$ , расположенной в среде  $a$  с магнитной проницаемостью  $\mu_a$ ;  $\bar{T}_{nb}$  — натяжение на грани параллелепипеда с нормалью  $\bar{n}_b$ , расположенной в среде  $b$  с магнитной проницаемостью  $\mu_b$ .

Полагая  $\bar{\tau}_a = \bar{\tau}_b = \bar{\tau}$  и замечая, что в соответствии с условиями на границе  $B_{an} = -B_{bn}$

$$H_{a\tau} = H_{b\tau} \text{ или } B_{a\tau}/\mu_a = B_{b\tau}/\mu_b,$$

после элементарных преобразований получим формулу для поверхностной плотности ЭМС, приложенной к элементу границы между средами  $a$  и  $b$ :

$$\bar{f}_S = 0,5\bar{n}_b [H_{\tau}^2 (\mu_a - \mu_b) + B_n^2 (1/\mu_b - 1/\mu_a)], \quad (4.33)$$

где  $\mu_a, \mu_b$  — магнитные проницаемости в средах  $a$  и  $b$ ;  $B_n^2 = B_{an}^2 = B_{bn}^2$ ,  $H_{\tau}^2 = H_{a\tau}^2 = H_{b\tau}^2$  — квадраты нормальных составляющих индукции и тангенциальных составляющих напряженности в средах  $a$  и  $b$  на поверхности  $S_p$ ;  $\bar{n}_b$  — внешняя (по отношению к среде  $a$ ) нормаль, направленная в сторону среды  $b$  (по индексации, принятой в [6], эта нормаль имела бы обозначение  $\bar{n}_a$ ).

Поверхностная плотность ЭМС, действующей на границу между средами  $a$  и  $b$ , всегда направлена по нормали к границе в сторону среды с меньшей магнитной проницаемостью. Например, при  $\mu_b < \mu_a$  (см. рис. 4.10) величина в квадратных скобках в (4.33) положительна и плотность силы  $\bar{f}_S$  направлена по нормали  $\bar{n}_b$ , т. е. в сторону среды  $b$ , обладающей меньшей магнитной проницаемостью. При  $\mu_b = \mu_a$  плотность силы обращается к нулю, а при  $\mu_b > \mu_a$  направлена в противоположную сторону по отношению к нормали  $n_b$ , т. е. в сторону среды  $a$  с меньшей магнитной проницаемостью.

Отсутствие в  $f_S$  тангенциальной составляющей, направленной по  $\bar{\tau}$ , связано с тем, что сумма тангенциальных составляющих натяжений  $\bar{T}_{na,\tau}$  и  $\bar{T}_{nb,\tau}$  всегда равна нулю.

Это видно из построений, приведенных на рис. 4.15, и вытекает из условий на границе  $S_p = S_{ab}$ :

$$\bar{f}_{S\tau} = \bar{T}_{na,\tau} + \bar{T}_{nb,\tau} = \left( \frac{B_{an} B_{a\tau}}{\mu_a} + \frac{B_{bn} B_{b\tau}}{\mu_b} \right) \bar{\tau} = 0.$$

#### 4.5. Объемная плотность электромагнитных сил в магнитном поле

4.5.1. Вывод формулы для объемной плотности электромагнитных сил, исходя из натяжений. Как было показано в § 4.2, компоненты плотности объемных сил в магнитном или любом другом физическом поле связаны с компонентами тензора натяжений уравнениями (4.15). Выражения для компонент тензора натяжений через величины магнитного поля в виде системы уравнений (4.25), (4.26) получены в § 4.3. Поэтому теперь имеется возможность, рассмотрев совместно (4.15) и (4.25), выразить через величины магнитного поля и компоненты плотности объемной силы в магнитном поле.

Компоненты тензора натяжений можно выразить не только через компоненты индукции  $B_x, B_y, B_z$  и  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , как в (4.25), но и через те же величины с добавлением к ним компонент напряженности магнитного поля  $H_x, H_y, H_z$ :

$$T_{xx} = B_x H_x - 0,5 H^2 \mu; \quad T_{xy} = B_x H_y; \quad T_{xz} = B_x H_z \text{ и т. д. (4.34)}$$

Вводя в (4.15) компоненты тензора натяжений по (4.34), найдем одну из компонент объемной плотности ЭМС, например компоненту по оси  $x$ :

$$f_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \quad (4.35)$$

где

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} = H_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_x \frac{\partial H_x}{\partial x} - 0,5H^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} - 0,5\mu \frac{\partial H^2}{\partial x}; \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = H_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_y \frac{\partial H_x}{\partial y}; \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = H_x \frac{\partial B_z}{\partial z} + B_z \frac{\partial H_x}{\partial z}. \quad (4.38)$$

Подставляя (4.36), (4.37), (4.38) в (4.35), получим

$$\begin{aligned} f_x = & H_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_x \frac{\partial H_x}{\partial x} - 0,5H^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu \left( H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + \right. \\ & \left. + H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + H_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_x \frac{\partial B_z}{\partial z} + B_z \frac{\partial H_x}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

После элементарных преобразований представим (4.39) в виде

$$\begin{aligned} f_x = & B_z \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - B_y \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \\ & - 0,5H^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + H_x \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = \operatorname{div} \bar{B} = 0; \quad (4.40)$$

$$\left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \operatorname{rot}_y \bar{H} = J_y; \quad (4.41)$$

$$\left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \operatorname{rot}_z \bar{H} = J_z, \quad (4.42)$$

окончательно получим

$$f_x = (J_y B_z - J_z B_y) - 0,5H^2 \partial \mu / \partial x. \quad (4.43)$$

Аналогично можно получить выражения для других компонент объемной плотности ЭМС:

$$f_y = (J_z B_x - B_z J_x) - 0,5H^2 \partial \mu / \partial y; \quad (4.44)$$

$$f_z = (J_x B_y - J_y B_x) - 0,5H^2 \partial \mu / \partial z. \quad (4.45)$$

С учетом (4.43)—(4.45) запишем вектор объемной плотности следующим образом:

$$\bar{f} = \bar{q} f_x + \bar{q}_y f_y + \bar{q}_z f_z = [\bar{J} \bar{B}] - 0,5H^2 \operatorname{grad} \mu. \quad (4.46)$$

Второй член в (4.46) можно выразить и через индукцию магнитного поля:

$$\bar{f} = [\bar{J} \bar{B}] + 0,5B^2 \operatorname{grad} (1/\mu). \quad (4.47)$$

Из (4.46) следует, что объемная плотность ЭМС в элементе среды с постоянной магнитной проницаемостью, в котором  $\mu(x, y, z) = \text{const}$  при  $x, y, z = \text{var}$ , определяется лишь взаимодействием плотности токов  $\vec{J}$  с индукцией магнитного поля  $\vec{B}$  и равна их векторному произведению  $[\vec{J}\vec{B}]$  (рис. 4.16):

$$\vec{f}_{(\mu=\text{const})} = [\vec{J}\vec{B}]. \quad (4.48)$$

Соответственно второй член в (4.46) представляет собой объемную плотность ЭМС в элементе среды с  $\mu = \text{var}$ , в котором  $\vec{J} = 0$ :

$$\vec{f}_{(\mu=\text{var})} = -0,5H^2 \text{grad } \mu. \quad (4.49)$$

Объемная плотность  $\vec{f}_{(\mu=\text{var})}$  пропорциональна  $H^2$ , коллинеарна  $\text{grad } \mu$  направлена по отношению к нему в противоположную сторону, т. е. в сторону уменьшения магнитной проницаемости.

Формула для объемной плотности ЭМС [см. (4.46) или (4.47)] полностью совпадает с формулой, полученной Максвеллом в 1861—62 гг. в его работе «О физических силовых линиях» [16]. В этой работе Максвелл вывел формулу [16, с. 117—124] для объемной плотности ЭМС (точнее для ее составляющих  $f_x$  и др.), исходя из натяжения в магнитном поле (4.26), и получил для  $f_x$  выражение, содержащее как член  $[\vec{J}\vec{B}] \bar{q}_x$ , так и член  $-0,5 \mu_0 H^2 \text{grad}_x \mu_r$ , что полностью соответствует (4.46). В этом можно убедиться, если учесть примечания А. Больцмана к упомянутой работе [16, с. 205], а также переводчика и редактора [16, с. 648].

Так как на поверхностях разрыва магнитной проницаемости  $\text{grad } \mu$  и  $\vec{f}$  становятся бесконечно большими [см. (4.46)], то силу, действующую на эти поверхности, приходится выражать через поверхностную плотность ЭМС  $\vec{f}_s$ .

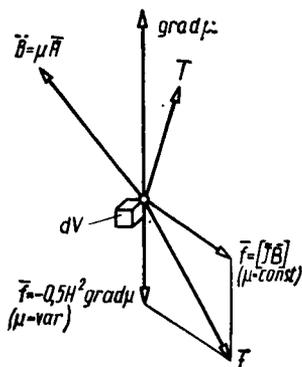


Рис. 4.16. Определение плотности объемной ЭМС  $\vec{f}$  в общем случае

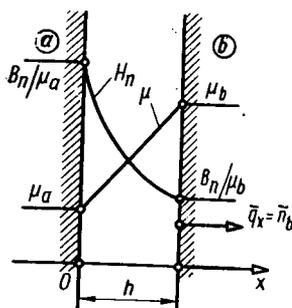


Рис. 4.17. К выводу формулы для поверхностной плотности ЭМС

Формулу для  $\bar{f}_S$  можно получить исходя из (4.46), (4.47), если принять  $\bar{J} = 0$  и заменить скачок магнитной проницаемости на поверхности  $S_p$  (от  $\mu_a$  до  $\mu_b$ ) линейным изменением проницаемости в пределах прилегающего к этой поверхности тонкого слоя толщиной  $h$  (рис. 4.17):

$$\mu = \mu_a + \alpha x, \quad (4.50)$$

где  $\alpha = (\mu_b - \mu_a)/h$ .

Так как на границе раздела сред нормальная составляющая индукции  $B_n$  и тангенциальная составляющая напряженности  $H_\tau$  сохраняют свою непрерывность, то в пределах слоя  $h$  эти величины остаются постоянными:  $B_n = \text{const}$ ;  $H_\tau = \text{const}$  при  $x \in [0, h]$ .

Составляющие  $H_n$  и  $B_\tau$  в пределах слоя  $h$  изменяются следующим образом:

$$B_\tau = \mu H_\tau = (\mu_a + \alpha x) H_\tau; \quad H_n = B_n/\mu = B_n/(\mu_a + \alpha x). \quad (4.51)$$

Для определения ЭМС  $\Delta\bar{F}$ , действующей на малый объем  $\Delta V = h\Delta S$  переходного слоя толщиной  $h$ , можно воспользоваться формулой (4.46):  $\Delta\bar{F} = \int_{\Delta V} \bar{f} dV$  ( $dV = dx \Delta S$  — элемент рассматриваемого объема толщиной  $dx$ ). Устремляя  $h \rightarrow 0$ , выразим поверхностную плотность ЭМС следующим образом:

$$\bar{f}_S = \lim_{(h \rightarrow 0)} (\Delta\bar{F}/\Delta S) = -0,5 \int_0^h H^2 (\text{grad } \mu) dx. \quad (4.52)$$

Замечая, что  $\text{grad } \mu = \bar{q}_x \alpha = \bar{n}_b \alpha$ ,  $H^2 = H_n^2 + H_\tau^2$  и обращаясь к (4.51), получим формулу для поверхностной плотности ЭМС:

$$\bar{f}_S = -0,5 \bar{q}_x \alpha \int_0^h \left[ \frac{B_n^2}{(\mu_a + \alpha x)^2} + H_\tau^2 \right] dx$$

или

$$\bar{f}_S = 0,5 \bar{n}_b [H_\tau^2 (\mu_a - \mu_b) + B_n^2 (1/\mu_b - 1/\mu_a)], \quad (4.53)$$

полностью совпадающую с формулой (4.33), выведенной исходя из натяжения по (4.24).

Поэтому формулу (4.33), вытекающую из (4.24) или из (4.46), можно называть формулой Максвелла для поверхностной плотности электромагнитной силы  $\bar{f}_S$ . Формула Максвелла для объемной плотности ЭМС  $\bar{f}$  (4.46) или (4.47) и вытекающая из нее формула для поверхностной плотности ЭМС  $\bar{f}_S$  (4.33) выведены для магнитного поля в линейных или нелинейных изотропных безгистерезисных средах. Они носят универсальный характер и пригодны для

определения ЭМС, действующих на выделенный объем произвольной нелинейной магнитной системы.

Расчеты ЭМС, проведенные с помощью (4.46, 4.33), во всех случаях совпадают с экспериментальными данными (см. гл. 5). Другие формулы для объемной плотности ЭМС  $\bar{f}$  и поверхностной плотности ЭМС  $\bar{f}_s$ , предложенные различными авторами всегда ошибочны (см. гл. 6). По аналогии с тем, как это было сделано для натяжений в 4.3.3, формулу (4.46) или (4.47) для объемной плотности ЭМС легко распространить на идеализированные постоянные магниты. Для этого нужно принять для постоянного магнита такую же математическую модель, как в 4.3.3, т. е. математическую модель намагничивания по [1, с. 338, § 74]. В такой модели правильно эквивалентируются объемные и поверхностные силы, и объемная плотность ЭМС может быть определена по (4.46) или (4.47), если ввести в них  $\bar{H}_0$  вместо  $\bar{H}$ , и  $\bar{J} + \bar{J}_v$  вместо  $\bar{J}$ .

Обратимся теперь к вопросу определения ЭМС  $\bar{F}$ , действующей на магнетик, через объемную плотность ЭМС.

Сила  $\bar{F} = \int_V \bar{f} dV$ , действующая на магнетик в объеме  $V$ , может быть выражена по (4.2) в виде суммы объемных сил  $\bar{f} dV$ , приложенных к элементам его объема, только в том случае, если в пределах этого объема отсутствуют поверхности разрыва магнитной проницаемости. Если такие поверхности (в виде границ между средами с различными магнитными проницаемостями) в пределах объема имеются, то сила  $\bar{F}$  включает дополнительно сумму поверхностных сил  $\bar{f}_s dS$ , приложенных к элементам этих поверхностей, и оказывается равной

$$\bar{F} = \int_V \bar{f} dV + \int_{S_p} \bar{f}_s dS. \quad (4.54)$$

В этом уравнении  $S_p$  сумма поверхностей разрыва магнитной проницаемости в пределах объема  $V$ ;  $\bar{f}_s$  — поверхностная плотность ЭМС на поверхностях разрыва магнитной проницаемости по (4.33).

Аналогичное уточнение должно быть внесено и в расчет электромагнитного момента относительно начала системы координат в точке  $O$ , действующего на выделенный объем  $V$ . Этот момент может быть определен по (4.3) только в том случае, если в пределах этого объема отсутствуют поверхности разрыва магнитной проницаемости  $S_p$ . В противном случае момент  $M$  включает дополнительную сумму моментов  $[\bar{r}\bar{f}_s] dS$ , приложенных к элементам поверхностей,

$$M = \int_V [\bar{r}\bar{f}] dV + \int_{S_p} [\bar{r}\bar{f}_s] dS. \quad (4.55)$$

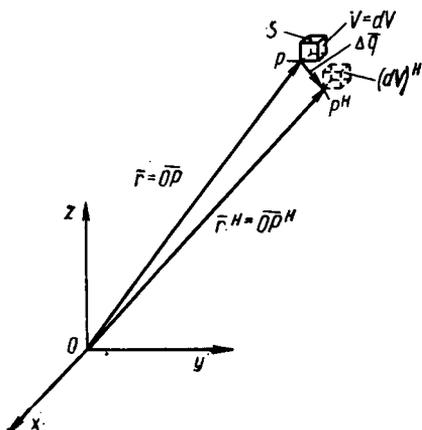


Рис. 4.18. К определению изменения магнитной энергии при перемещении малого объема

4.5.2. Вывод формулы для объемной плотности электромагнитных сил, исходя из изменения энергии магнитного поля при перемещении. В дополнение к выводу формулы для объемной плотности ЭМС, который был изложен в 4.5.1, приведем более наглядное доказательство этой формулы, предложенное в [38].

Рассмотрим стационарное магнитное поле в магнитной, нелинейной, изотропной, безгистерезисной среде, называемой далее нелинейной магнитной системой (НМС). Область исследуемого магнитного поля НМС совпадает с безграничным трехмерным пространством. Распределение магнитной проницаемости в среде НМС считается непрерывным:  $\mu = f_\mu(x, y, z, B)$ . Магнитное поле задано известным распределением плотностей тока  $\vec{J} = f_J(x, y, z)$  в ограниченной зоне НМС. Распределение в пространстве полей магнитной индукции  $\vec{B} = f_B(x, y, z)$ , магнитной напряженности  $\vec{H} = f_H(x, y, z)$  и магнитной проницаемости  $\mu = f_\mu(x, y, z, B)$  предполагается рассчитанным тем или иным аналитическим или численным способом (см. § 1.1).

Для определения пространственного распределения объемной плотности ЭМС

$$\vec{f} = \lim (d\vec{F}/dV), \quad (4.56)$$

где  $dV \rightarrow 0$ , разделим рассматриваемую НМС с помощью замкнутой поверхности  $S$  на две части: ограниченную внутреннюю, называемую далее объемом  $V$ , и неограниченную внешнюю, называемую далее объемом  $V_1$ . Возьмем в качестве объема  $V$  бесконечно малый элементарный объем  $V = dV$  (рис. 4.18). Попытаемся найти ЭМС  $\vec{F} = d\vec{F}$ , действующую на объем  $V = dV$ , и ЭМС  $\vec{F}_1$ , действующую на объем  $V_1$ . Обратим внимание на соотношение, связывающее между собой эти силы

$$\vec{F} = d\vec{F} = -\vec{F}_1,$$

которое можно рассматривать как следствие очевидного свойства рассматриваемой бесконечно протяженной НМС: электромагнитная сила, действующая на такую систему в целом, равна нулю:

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F} + \vec{F}_1 = 0. \quad (4.57)$$

Следуя [38], воспользуемся энергетическим методом для определения ЭМС  $d\bar{F}$ , действующей на объем  $dV$ . Выразим ЭМС  $d\bar{F}$  через изменение магнитной энергии при малом перемещении выделенного объема  $V = dV$  подобно тому, как это было сделано в 4.3.1 при выводе формулы для натяжения в магнитном поле.

Однако в отличие от 4.3.1 само перемещение выделенного объема  $V$  при определении объемной плотности ЭМС произведем принципиально иным образом. *Подвергнем перемещению относительно неподвижного пространства не только объем  $V$ , но и объем  $V_1$ , т. е. всю рассматриваемую НМС целиком (контуры с токами и среды).*

Другими словами, перемещению на  $\Delta\bar{q}$  подвергаются все бесконечно малые элементы, из которых состоит рассматриваемая НМС. В частности, такому перемещению подвергаются оба объема  $dV$  и  $V_1$ , на которые подразделяется НМС замкнутой поверхностью  $S$ . В процессе перемещения НМС при оговоренных выше условиях сохраняются неизменными как токи, так и магнитные потоки контуров, а также магнитное состояние в пределах любого элементарного объема среды. Существенно, что перед перемещением рассматриваемая НМС заменена ее линейной моделью (см. § 1.6), в которой функция магнитной проницаемости  $\mu$  учитывает магнитное состояние НМС в ее исходном положении, но зависит только от пространственных координат.

Таким образом, нелинейность магнитной среды действительной НМС учитывается в ее линейной модели в самой функциональной зависимости магнитной проницаемости от пространственных координат. Отсутствие среди аргументов функции  $\mu(x, y, z)$  напряженности магнитного поля свидетельствует о линейности магнитных свойств среды линейной модели НМС. По этой причине каждое из векторных магнитных полей  $\bar{B}$  и  $\bar{H}$  можно представить в виде суммы двух полей:

$$\bar{B} = \bar{B}_e + \bar{B}_i; \quad \bar{H} = \bar{H}_e + \bar{H}_i, \quad (4.58)$$

где  $B_e = \mu\bar{H}_e$ ,  $H_e$  — соответственно индукция и напряженность магнитного поля, созданного в рассматриваемой точке малого объема  $dV$  внешними по отношению к этому объему токами с плотностью  $\bar{J}_e$  (в пределах малого объема  $dV$  выполняется условие  $\text{rot } \bar{H}_e = 0$ );  $\bar{B}_i = \mu\bar{H}_i$ ,  $\bar{H}_i$  — соответственно индукция и напряженность магнитного поля, созданного в той же точке малого объема  $dV$  токами, распределенными в нем с плотностью  $\bar{J}_i = \text{rot } \bar{H}_i = \text{rot } \bar{H}$ .

Представим далее зависимость магнитной проницаемости  $\mu(x, y, z)$  в пределах малого объема  $dV$  в виде суммы постоянной составляющей  $\mu_c$ , равной среднему значению магнитной проницаемости внутри объема  $dV$ , и переменной составляющей  $\mu_v = \mu_v(x, y, z)$ :

$$\mu(x, y, z) = \mu_c + \mu_v. \quad (4.59)$$

Тогда

$$\bar{B}_e = \mu \bar{H}_e = \bar{B}_{e0} + \bar{B}_{e\mu}, \quad (4.60)$$

где  $\bar{B}_{e0} = \mu_c \bar{H}_e$  — составляющая индукции  $\bar{B}_e$ , соответствующая средней в пределах объема  $dV$  постоянной магнитной проницаемости  $\mu_c = \text{const}$ ;  $\bar{B}_{e\mu} = \mu_v \bar{H}_e$  — составляющая индукции  $\bar{B}_e$ , соответствующая переменной составляющей магнитной проницаемости  $\mu_v = \mu_v(x, y, z) = \text{var}$ .

Теперь расчетному выражению для объемной плотности магнитной энергии в линейной модели можно придать следующий вид:

$$\omega = (\bar{B} \bar{H}) \cdot 0,5 = \omega_e + \omega_f + \omega_i, \quad (4.61)$$

где

$$\omega_e = (1/2) (\bar{B}_{e0} \bar{H}_e) \quad (4.62)$$

— объемная плотность энергии магнитного поля, созданного внешними к малому объему  $dV$  токами при постоянной магнитной проницаемости ( $\mu_c = \text{const}$ );

$$\omega_f = \omega_{fJ} + \omega_{f\mu} \quad (4.63)$$

— объемная плотность магнитной энергии взаимодействия, обусловленная взаимодействием внешнего ( $\bar{B}_e, \bar{H}_e$ ) и внутреннего ( $\bar{B}_i, \bar{H}_i$ ) магнитных полей, а также действием внешнего магнитного поля  $\bar{H}_e$  на переменную часть магнитной проницаемости  $\mu_v$  среды малого объема  $dV$ .

Исходя из (4.58), (4.60), (4.61), получим следующие выражения для каждой из составляющих  $\omega_{fJ}$  и  $\omega_{f\mu}$  объемной плотности магнитной энергии взаимодействия:

$$\omega_{fJ} = 0,5 \bar{B}_e \bar{H}_i + 0,5 \bar{B}_i \bar{H}_e = \bar{B}_e \bar{H}_i = \bar{B}_i \bar{H}_e; \quad (4.64)$$

$$\omega_{f\mu} = 0,5 \bar{B}_{e\mu} \bar{H}_e = 0,5 \mu_v H_e^2. \quad (4.65)$$

Третья составляющая объемной плотности

$$\omega_i = 0,5 \bar{B}_i \bar{H}_i \quad (4.66)$$

совпадает с объемной плотностью энергии магнитного поля в пределах малого объема  $dV$ , которое возбуждается распределенными в нем токами с плотностью  $\bar{J}_i$ . Заметим, что при уменьшении до нуля объема  $dV$  к нулю стремятся также объемные плотности энергии магнитного поля  $\omega_f$  и  $\omega_i$  из-за  $\bar{B}_i \rightarrow 0, \bar{H}_i \rightarrow 0$ , причем  $\omega_i$  стремится к нулю как бесконечно малая величина второго порядка малости в сравнении с  $\omega_f$ .

Для определения ЭМС  $d\bar{F} = \bar{f} dV$  воспользуемся изложенной рекомендацией [38] и переместим на  $\Delta \bar{q}$  относительно неподвижного пространства всю рассматриваемую НМС. Отметим, что пере-

мещение НМС не сопровождается совершением работы, поскольку как было отмечено выше, результирующая ЭМС  $\bar{F}_\Sigma$ , действующая на НМС, равна нулю [см. (4.57)]. В то же время в общем случае произвольный элементарный объем  $V = dV$  испытывает на себе действие некоторой силы  $d\bar{F} = \bar{f}dV$  электромагнитного происхождения. Работа  $\Delta\bar{A} = \Delta\bar{q}d\bar{F}$ , совершаемая силой  $d\bar{F}$  при перемещении объема  $dV$  на  $\Delta\bar{q}$ , тождественна убыли энергии магнитного поля в том элементарном объеме неподвижного пространства, с которым перед началом перемещения был совмещен данный объем  $dV$  среды НМС [см. (1.28)]. Важно подчеркнуть, что при применяемом здесь способе перемещения выделенного объема  $dV$ , когда этот объем перемещается на  $\Delta\bar{q}$  вместе с другими элементарными объемами НМС, работа силы  $d\bar{F}$  равна убыли не всей энергии магнитного поля в данном элементарном объеме пространства, а только той ее части, которая имеет отношение к силовому взаимодействию между элементами НМС в объемах  $dV$  и  $V_1$ . Приращение магнитной энергии в данном элементарном объеме пространства  $dV$  при перемещении на  $\Delta\bar{q}$  выражается через приращение объемной плотности магнитной энергии

$$\Delta W = \Delta\omega dV = (\Delta\omega_e + \Delta\omega_f + \Delta\omega_i) dV,$$

где  $\Delta\omega = (\partial\omega/\partial q) \Delta q$ ;  $\Delta\omega_e = (\partial\omega_e/\partial q) \Delta q$ ;  $\Delta\omega_f = (\partial\omega_f/\partial q) \Delta q$ ;  $\Delta\omega_i = (\partial\omega_i/\partial q) \Delta q$  — приращения  $\omega$  по (4.61),  $\omega_e$  по (4.62),  $\omega_f$  по (4.63) и  $\omega_i$  по (4.66).

Поэтому приращение магнитной энергии, через которое выражается сила  $d\bar{F}$ , следует связывать с приращением только той части объемной плотности энергии, которая имеет отношение к силовому взаимодействию между элементами НМС в объемах  $dV$  и  $V_1$ . Покажем, что сила  $d\bar{F}$  выражается только через приращение объемной плотности магнитной энергии взаимодействия  $\Delta\omega_f$ , а приращения  $\Delta\omega_e$  и  $\Delta\omega_i$  не имеют отношения к силовому взаимодействию между элементами НМС в объемах  $dV$  и  $V_1$ . Действительно, можно экспериментально выявить, например, с помощью линейного униполярного двигателя с ферромагнитным якорем (рис. 4.19, а), что при отсутствии тока ( $J_i = 0$ ) как во всем якоре, так и в его элементе  $dV$ , тангенциальная сила  $dF$ , действующая на этот элемент, будет равна нулю, несмотря на то, что внешнее поле возбуждения существует и  $\bar{B}_e = \bar{B}_{e0} \neq 0$ . Таким образом, экспериментально установлено, что при отсутствии внутреннего поля в элементе объема  $dV$  ( $J_i = 0$ ;  $H_i = 0$ ;  $B_i = 0$ ) и при ( $\mu_v = 0$ ) сила  $dF$ , действующая на элемент, равна нулю даже в том случае, когда внешнее поле существует ( $H_e \neq 0$ ;  $B_e = B_{e0} = \mu_c H_e \neq 0$ ,  $\omega_e = 0,5 \mu_c H_e^2 \neq 0$  и  $\Delta\omega_e = (\partial\omega_e/\partial q) \Delta q \neq 0$ ).

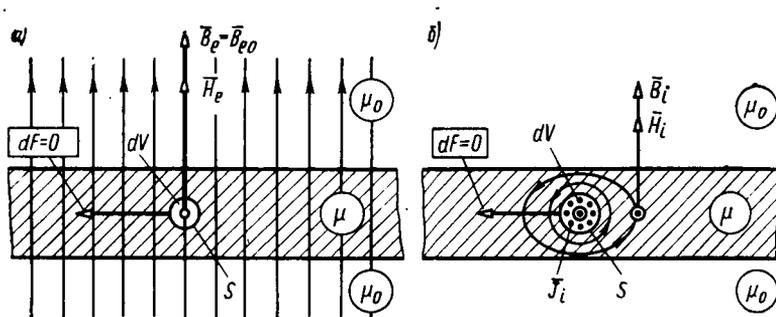


Рис. 4.19. Экспериментальное подтверждение отсутствия ЭМС, действующих на объем  $dV$ :

а — при  $\vec{B}_i = 0$  и  $\mu = \text{const}$ ; б — при  $\vec{B}_e = 0$

А это означает, что при определении силы  $d\vec{F}$  через  $\Delta\omega = \Delta\omega_e + \Delta\omega_j + \Delta\omega_i$  член  $\Delta\omega_e$  не следует учитывать, как не имеющий отношения к силовому взаимодействию между элементами НМС в объемах  $dV$  и  $V_1$ . Если член  $\Delta\omega_e$  не отбросить, то сила  $d\vec{F}$ , экспериментально равная нулю, окажется зависящей от величины внешнего поля  $B_e = B_{e0}$  и приращения его энергии  $\Delta\omega_e$ .

Также экспериментально, например, с помощью того же линейного униполярного двигателя с ферромагнитным якорем (рис. 4.19, б) можно выявить, что при отсутствии поля возбуждения ( $\vec{J}_e = 0$ ;  $H_e = 0$ ;  $B_e = 0$ ) тангенциальная сила  $dF$ , действующая на элемент  $dV$ , будет равна нулю, несмотря на то, что в элементе  $dV$  существуют токи, распределенные с плотностью  $J_i \neq 0$  и  $B_i \neq 0$ .

Таким образом, экспериментально установлено, что при отсутствии внешнего поля в элементе объема  $dV$  ( $H_e = 0$ ;  $B_e = 0$ ) сила  $d\vec{F}$ , действующая на элемент  $dV$ , равна нулю даже в том случае, когда  $J_i \neq 0$ ,  $H_i \neq 0$ ,  $B_i \neq 0$ ,  $\omega_i \neq 0$  и  $\Delta\omega_i \neq 0$ . А это означает, что при определении силы  $d\vec{F}$  через  $\Delta\omega = \Delta\omega_e + \Delta\omega_j + \Delta\omega_i$  член  $\Delta\omega_i$  (так же как член  $\Delta\omega_e$ ) не следует учитывать как не имеющий отношения к силовому взаимодействию между элементами НМС в объемах  $dV$  и  $V_1$ .

Из сказанного следует, что работа  $\Delta A = \Delta q d\vec{F}$ , совершаемая силой  $d\vec{F}$  при перемещении объема  $dV$  на  $\Delta q$ , не зависит ни от приращения энергии  $\Delta W_i = \Delta\omega_i dV$ , ни от приращения энергии  $\Delta W_e = \Delta\omega_e dV$  и оказывается тождественно равной убыли магнитной энергии взаимодействия ( $-\Delta W_j = -\Delta\omega_j dV$ ) в том элементарном объеме неподвижного пространства, с которым перед началом перемещения был совмещен данный объем среды НМС.

Эта убыль магнитной энергии взаимодействия ( $-\Delta W_j$ ) определяется как разность магнитной энергии взаимодействия (МЭВ) в данном малом объеме пространства  $W_j^h = \omega_j^h dV$  после перемеще-

ния НМС на  $\Delta\bar{q}$  и МЭВ в том же объеме пространства  $W_f = w_f dV$  до перемещения НМС:

$$-\Delta W_f = W_f'' - W_f = (w_f'' - w_f) dV. \quad (4.67)$$

С другой стороны, та же убыль МЭВ ( $-\Delta W_f$ ) есть не что иное, как разность МЭВ в двух пространственных элементарных объемах в исходном состоянии НМС

$$-\Delta W_f = w_f(O\bar{P}) dV - w_f(O\bar{P} + \Delta\bar{q}) dV. \quad (4.68)$$

Один из этих объемов  $dV$  совпадает с рассматриваемым элементарным объемом НМС и его положение в пространстве определяется радиусом-вектором  $\bar{r} = O\bar{P}$  (см. рис. 4.18), другой совпадает с тем элементарным объемом НМС  $(dV)''$ , который после перемещения НМС на  $\Delta\bar{q}$  будет заменен рассматриваемым элементарным объемом НМС. Положение другого пространственного малого объема  $(dV)''$  определяется радиусом-вектором  $\bar{r}'' = O\bar{P}'' = O\bar{P} + \Delta\bar{q}$ .

С учетом сказанного выше работа  $\Delta A$  и убыль энергии МЭВ ( $-\Delta W_f$ ) оказываются связанными соотношением, вытекающим из закона сохранения энергии:

$$\Delta A = -\Delta W_f, \quad (4.69)$$

где  $\Delta A = \Delta\bar{q} d\bar{F}$ ;  $dF = \bar{f} dV$ .

Заметим, что искомую ЭМС  $d\bar{F}$  можно представить в виде суммы трех слагающих ее ЭМС:

$$d\bar{F} = \bar{f} dV = d\bar{F}_x + d\bar{F}_y + d\bar{F}_z = (\bar{q}_x f_x + \bar{q}_y f_y + \bar{q}_z f_z) dV, \quad (4.70)$$

а вектор перемещения  $\Delta\bar{q}$  в виде совокупности трех слагающих его векторов — смещений по трем осям

$$\Delta\bar{q} = \Delta\bar{x} + \Delta\bar{y} + \Delta\bar{z} = \bar{q}_x \Delta x + \bar{q}_y \Delta y + \bar{q}_z \Delta z. \quad (4.71)$$

Очевидно, поиск искомой ЭМС  $d\bar{F}$  можно заменить последовательным определением слагающих ее ЭМС  $d\bar{F}_x$ ,  $d\bar{F}_y$ ,  $d\bar{F}_z$ . При этом в качестве вектора перемещения  $\Delta\bar{q}$  следует выбрать соответственно  $\Delta\bar{x}$ ,  $\Delta\bar{y}$ ,  $\Delta\bar{z}$ . Рассмотрим более подробно определение слагающей ЭМС  $d\bar{F}_x$ . Для этой слагающей уравнение баланса энергии (4.69) имеет вид

$$(\Delta A)_x = -(\Delta W_f)_x, \quad (4.72)$$

где

$$(\Delta A)_x = dF_x \Delta x = f_x dV \Delta x; \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} (\Delta W_f)_x &= (w_f(O\bar{P} + \Delta\bar{x}) - w_f(O\bar{P})) dV = (\Delta w_f)_x dV = \\ &= \frac{\partial w_f}{\partial x} \Delta x dV, \end{aligned} \quad (4.74)$$

а индекс  $x$  указывает на то, что  $(\Delta A)_x$  и  $(\Delta W_f)_x$  определяются при малом перемещении  $\Delta \bar{q} = \Delta \bar{x}$  НМС вдоль оси  $x$ .

Рассматривая (4.72) — (4.74) совместно, найдем

$$\bar{f}_x = \bar{q}_x f_x = \bar{q}_x \left\{ -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta w_f)_x}{\Delta x} \right\}_{dV \rightarrow 0} = -\frac{\partial w_f}{\partial x} \bar{q}_x \Big|_{dV \rightarrow 0}. \quad (4.75)$$

Аналогично определяют выражения для слагающих  $\bar{f}_y, \bar{f}_z$

$$\bar{f}_y = \bar{q}_y f_y = -\frac{\partial w_f}{\partial y} \bar{q}_y \Big|_{dV \rightarrow 0}; \quad \bar{f}_z = \bar{q}_z f_z = -\frac{\partial w_f}{\partial z} \bar{q}_z \Big|_{dV \rightarrow 0}. \quad (4.76)$$

Суммируя правые и левые части (4.75) и (4.76), найдем выражение для объемной плотности ЭМС

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \bar{f}_x + \bar{f}_y + \bar{f}_z = \\ &= -\bar{q}_x \frac{\partial w_f}{\partial x} - \bar{q}_y \frac{\partial w_f}{\partial y} - \bar{q}_z \frac{\partial w_f}{\partial z} = -\text{grad } w_f \Big|_{dV \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

представляющее собой взятый с обратным знаком градиент от объемной плотности магнитной энергии взаимодействия при  $dV \rightarrow 0$ . Воспользовавшись соотношением (4.61), выраженную для объемной плотности ЭМС  $\bar{f}$  можно придать иной вид:

$$\bar{f} = -\text{grad } w + \text{grad } w_e + \text{grad } w_i. \quad (4.78)$$

Последние два уравнения в явной форме указывают на потенциальный (безвихревой) характер поля вектора  $\bar{f}$ . При этом скалярной потенциальной функцией, с помощью которой описывается поле вектора  $\bar{f}$ , является объемная плотность МЭВ  $w_f = w - w_e - w_i$ . Векторное поле  $\bar{f}$  не имеет вихрей, так как  $\text{rot grad } w_f = 0$ .

Чтобы представить объемную плотность ЭМС  $\bar{f}$  в виде зависимости от величин магнитного поля, преобразуем (4.77) с учетом (4.63) — (4.65):

$$\begin{aligned} \bar{f} &= -\text{grad } w_f = -\text{grad } w_{fJ} - \text{grad } w_{fM} = \\ &= -\text{grad } (\bar{B}_{e0} \bar{H}_i) - 0,5 \text{grad } (\bar{B}_{eM} \bar{H}_e) \Big|_{dV \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Рассчитаем вначале первый из градиентов в правой части (4.79)

$$\begin{aligned} -\text{grad } w_{fJ} &= -\text{grad } (\bar{B}_{e0} \bar{H}_i) \Big|_{dV \rightarrow 0} = \\ &= -\text{grad } (\bar{B}_{e0} \bar{H}_i) \Big|_{\bar{B}_{e0} = \text{const}} - \text{grad } (\bar{B}_{e0} \bar{H}_i) \Big|_{\bar{H}_i = \text{const}}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

где на основании [1, с. 595, форм. 45] имеем:

$$\begin{aligned} -\text{grad } (\bar{B}_{e0} \bar{H}_i) \Big|_{\bar{B}_{e0} = \text{const}} &= \{ -(\bar{B}_{e0} \text{grad}) \bar{H}_i - \\ &- [\bar{B}_{e0} \times \text{rot } \bar{H}_i] \} \Big|_{dV \rightarrow 0}; \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$-\text{grad } (\bar{B}_{e0} \bar{H}_i) \Big|_{\bar{H}_i = \text{const}} = \{ -(\bar{H}_i \text{grad}) \bar{B}_{e0} - [\bar{H}_i \times \text{rot } \bar{B}_{e0}] \} \Big|_{dV \rightarrow 0}. \quad (4.82)$$

Анализируя последние два уравнения, замечаем, что в правой части уравнения (4.82) оба слагаемых  $(\bar{H}_i \text{ grad}) \bar{B}_{e0}$  и  $[\bar{H}_i \times \text{rot } \bar{B}_{e0}]$ , а в (4.81) одно из слагаемых его правой части  $(\bar{B}_{e0} \text{ grad}) \bar{H}_i$  оказываются равными нулю. Причиной стремления к нулю при  $dV \rightarrow 0$  указанных выражений является стремление к нулю  $\bar{J}_i dV$  и функции  $\bar{H}_i$  при том же условии  $dV \rightarrow 0$ .

При этом необходимо отметить, что функция  $\bar{H}_i(x, y, z)$  стремится к нулю во всем бесконечном пространстве: это, в частности, имеет своим следствием то, что изменение этой функции в любом направлении, в том числе и в направлении вектора  $\bar{B}_{e0}$  также будет равно нулю.

С учетом сказанного получим формулу для составляющей объемной плотности ЭМС  $\bar{f}_J$ , по которой определяются ЭМС, действующие на плотности тока:

$$\begin{aligned} \bar{f}_J &= -\text{grad}(\bar{B}_{e0} H_i)|_{dV \rightarrow 0} = \\ &= \lim \{[-\bar{B}_{e0} \times \text{rot } H_i]\}_{dV \rightarrow 0} = [\bar{J} \times \bar{B}]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Упрощая (4.83), мы имели ввиду, что при  $dV \rightarrow 0$  выполняются следующие условия:  $\text{rot } \bar{H}_i = \bar{J}_i \rightarrow \bar{J}$  и  $\bar{B}_{e0} \rightarrow \bar{B}$ .

Раскроем теперь второй из градиентов в правой части уравнения (4.79)

$$\begin{aligned} -\text{grad } w_{i\mu} &= -0,5 \text{grad}(\bar{B}_{e\mu} \bar{H}_e)|_{dV \rightarrow 0} = \\ &= -0,5 \text{grad}(\bar{B}_{e\mu} \bar{H}_e)|_{\bar{B}_{e\mu} = \text{const}} - \\ &= -0,5 \text{grad}(\bar{B}_{e\mu} \bar{H}_e)|_{\bar{H}_e = \text{const}}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Первый из градиентов в правой части (4.84) на основании [1, с. 595, форм. (45)] равен сумме двух векторных выражений:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\bar{B}_{e\mu} H_e)|_{B_{e\mu} = \text{const}} &= \\ &= (\bar{B}_{e\mu} \text{ grad}) \bar{H}_e + [\bar{B}_{e\mu} \times \text{rot } \bar{H}_e], \end{aligned} \quad (4.85)$$

каждое из которых оказывается равным нулю из-за того, что  $B_{e\mu} = \mu_v \bar{H}_e \rightarrow 0$  при  $dV \rightarrow 0$ , так как при этом  $\mu_v \rightarrow 0$ ;  $\mu \rightarrow \mu_c$ .

Второй из градиентов в правой части (4.84) на основании той же формулы [1, с. 595, форм. (45)] приводится к виду

$$\begin{aligned} -0,5 \text{grad}(\bar{B}_{e\mu} \bar{H}_e)|_{\substack{H_e = \text{const} \\ dV \rightarrow 0}} &= \\ &= -0,5(\bar{H}_e \text{ grad}) \bar{B}_{e\mu} + [\bar{H}_e \times \text{rot } \bar{B}_{e\mu}]. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Заменяв в первом слагаемом правой части (4.86)  $\bar{B}_{e\mu}$  на  $\mu_v \bar{H}_e$ , раскрыв по известным правилам [1, с. 596, форм. (50)] производную от векторной функции  $\bar{B}_{e\mu} = \mu_v \bar{H}_e$  в направлении вектора  $\bar{H}_e$  и учитывая, что  $\bar{H}_e = \text{const}$ , получим

$$\begin{aligned} & -0,5(\bar{H}_e \text{ grad}) \bar{B}_{e\mu} \Big|_{\substack{H_e = \text{const} \\ dV \rightarrow 0}} = \\ & = -0,5 \left\{ \bar{q}_x \left[ H_{ex} H_{ex} \frac{\partial \mu_v}{\partial x} + H_{ey} H_{ex} \frac{\partial \mu_v}{\partial y} + H_{ez} H_{ex} \frac{\partial \mu_v}{\partial z} \right] + \right. \\ & \quad + \bar{q}_y \left[ H_{ex} H_{ey} \frac{\partial \mu_v}{\partial x} + H_{ey} H_{ey} \frac{\partial \mu_v}{\partial y} + H_{ez} H_{ey} \frac{\partial \mu_v}{\partial z} \right] + \\ & \quad \left. + \bar{q}_z \left[ H_{ex} H_{ez} \frac{\partial \mu_v}{\partial x} + H_{ey} H_{ez} \frac{\partial \mu_v}{\partial y} + H_{ez} H_{ez} \frac{\partial \mu_v}{\partial z} \right] \right\} = \\ & = -0,5 \bar{H}_e (\bar{H}_e \text{ grad } \mu_v). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Заменяв далее во втором слагаемом правой части (4.86)  $\bar{B}_{e\mu}$  на  $\mu_v \bar{H}_e$ , преобразуем это слагаемое в соответствии с [1, с. 594, форм. (43)]. Тогда

$$\begin{aligned} & -0,5 [\bar{H}_e \times \text{rot } \bar{B}_{e\mu}] \Big|_{\substack{H_e = \text{const} \\ dV \rightarrow 0}} = -0,5 [\bar{H}_e \times \text{rot}(\mu_v \bar{H}_e)] = \\ & = -0,5 [\bar{H}_e \times \text{rot}(\mu_v \bar{H}_e)]_{\mu_v = \text{const}} - 0,5 [\bar{H}_e \times \text{rot}(\mu_v \bar{H}_e)]_{\bar{H}_e = \text{const}} = \\ & = -0,5 [\bar{H}_e \times \mu_v \text{rot } \bar{H}_e] - 0,5 [\bar{H}_e \times [\text{grad } \mu_v \times \bar{H}_e]] = \\ & = -0,5 [\bar{B}_{e\mu} \times \text{rot } \bar{H}_e] - 0,5 H_e^2 \text{ grad } \mu_v + \\ & + 0,5 \bar{H}_e (\bar{H}_e \text{ grad } \mu_v) = -0,5 H^2 \text{ grad } \mu + 0,5 \bar{H}_e (\bar{H}_e \text{ grad } \mu_v). \end{aligned} \quad (4.88)$$

В проведенных при упрощении (4.88) преобразованиях учтено, что: 1) внешнее магнитное поле  $\bar{H}_e$  не имеет вихрей в пределах малого объема  $dV$ , т. е.  $\text{rot } \bar{H}_e = 0$ ; 2)  $B_{e\mu} \rightarrow 0$  при  $dV \rightarrow 0$ ; 3)  $\text{grad } \mu = \text{grad}(\mu_c + \mu_v) = \text{grad } \mu_v$ ; 4)  $\bar{H}_e \rightarrow \bar{H}$  при  $dV \rightarrow 0$ . Кроме того, при вычислении двойного векторного произведения использована формула [22, с. 522].

Суммируя правые части уравнений (4.87) и (4.88), получим формулу для составляющей объемной плотности ЭМС  $\bar{f}_\mu$ , по которой определяются ЭМС, действующие на магнетик:

$$\bar{f}_\mu = -0,5 H^2 \text{ grad } \mu. \quad (4.89)$$

Суммируя правые и левые части (4.83) и (4.89), получим искомую формулу для объемной плотности ЭМС в НМС

$$\bar{f} = \bar{f}_J + \bar{f}_\mu = [\bar{J} \times \bar{B}] - 0,5 H^2 \text{ grad } \mu. \quad (4.90)$$

Полученная формула полностью совпадает с формулой (4.46), выведенной исходя из натяжений в магнитном поле, что еще раз подтверждает справедливость формулы Максвелла, предложенной в его работе «О физических силовых линиях» [16].

#### 4.6. Развитие методов доказательства формул для натяжения и объемной плотности электромагнитных сил в магнитном поле

Впервые формулы для тензора натяжений  $T_{ik}$  и плотности электромагнитных сил  $\vec{f}$  в магнитном поле были получены Максвеллом в 1862 г. в его работе «О физических силовых линиях» [16, с. 117, форм. (2); с. 124, форм. (12)], в которой были обоснованы и его основные уравнения. В современных обозначениях и в системе СИ формулы Максвелла для тензора натяжения  $T_{ik}$  и для компонент плотности электромагнитных сил записывают следующим образом:

$$T_{ik} = \mu H_i H_k - p_1 \delta_{ik}, \quad (4.91)$$

где  $i, k \in x, y, z$ ,  $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$ ,  $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ ;

$$f_x = H_x m + \frac{\mu}{2} \frac{dH^2}{dx} + B_z J_y - B_y J_z - \frac{dp_1}{dx} \text{ и т. д.} \quad (4.92)$$

В эти формулы наряду с магнитной проницаемостью  $\mu = \mu_0 \mu_r$  компонентами напряженности  $H_x, H_y, H_z$ , индукции  $B_x, B_y, B_z$ , плотности тока  $J_x, J_y, J_z$  и плотностью магнитного заряда  $m = \text{div } \vec{B}$  входит величина  $p_1$ , не полностью расшифрованная Максвеллом и названная им «гидростатическим давлением (в нашем понимании натяжением), действующим равномерно во всех направлениях» [16, с. 116]. В своих примечаниях к работе Максвелла [16, с. 205] Л. Больцман выявил смысл величины  $p_1$ . Имея в виду, что  $p_1$  в формуле для натяжения (4.91) не зависит от того, имеем ли мы  $\mu = \text{const}$  или  $\mu = \text{var}$ , Л. Больцман обратился к формуле для  $f_x$  (4.92), в которую входит  $dp_1/dx$ , и принял  $\mu = \text{const}$ . Затем он рассмотрел частный случай, когда в элементе объема отсутствуют магнитные заряды ( $m = \text{div } \vec{B} = 0$ ) и плотности тока ( $\vec{J} = 0$ ), и, следовательно, на этот элемент не действуют электромагнитные силы. Соответственно равна нулю плотность электромагнитных сил ( $\vec{f} = 0$ ) и ее компоненты ( $f_x = f_y = f_z = 0$ ). Для этого частного случая, исходя из (4.92)

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{\mu}{2} \frac{dH^2}{dx} \quad (4.93)$$

и проведя интегрирование при  $\mu = \text{const}$ , Л. Больцман получил

$$p_1 = \mu H^2 / 2 + c, \quad (4.94)$$

где  $c$  — постоянная величина, равная нулю, так как при  $H = 0$  величина  $p_1 = 0$ .

После введения  $p_1$  по (4.94) в (4.91) удается выразить тензор натяжений Максвелла через величины магнитного поля и привести его к такому виду, в котором он используется и в наше время [см. (4.26)]:

$$T_{ih} = \mu (H_i H_h - 0,5H^2 \delta_{ih}).$$

Тензору натяжений Максвелла (4.26) соответствует вектор натяжения [см. (4.24)]:

$$\bar{T}_n = \mu (\bar{H} H_n - 0,5H^2 \bar{n}).$$

Исходя из того, что  $p_1$  в (4.91) и, следовательно, в (4.92) будет записываться одинаковым образом, как в случае  $\mu = \text{const}$ , так и в случае  $\mu = \text{var}$ , формулу Максвелла (4.92) можно преобразовать и для более общего случая, когда  $m = 0$ ,  $J \neq 0$  и  $\mu \neq \text{const}$ .

Подставляя  $p_1$  по (4.94) в (4.92), приведем формулу Максвелла для плотности электромагнитных сил к такому виду, в котором она используется и в наше время [см. (4.47)]:

$$f_x = J_y B_z - J_z B_y + \frac{\mu}{2} \frac{dH^2}{dx} - \frac{\mu}{2} \frac{dH^2}{dx} - \frac{H^2}{2} \frac{d\mu}{dx}$$

или

$$f_x = [\bar{J} \bar{B}]_x - 0,5H^2 \text{grad}_x \mu,$$

или

$$\bar{f} = \bar{q}_x f_x + \bar{q}_y f_y + \bar{q}_z f_z = [\bar{J} \bar{B}] - 0,5H^2 \text{grad} \mu.$$

Несмотря на то что в 1873 г. вышел в свет в первом издании основной труд Максвелла «Трактат об электричестве и магнетизме» \*, в котором были предложены иные и, как будет показано далее, ошибочные формулы для плотности электромагнитных сил и натяжений в магнитном поле [см. (6.25), (6.27)], в большинстве работ по теории электромагнетизма формулами Максвелла были названы формулы (4.26), (4.47). Они как единственно правильные рекомендовались для практического использования, в то время как (6.25), (6.27) часто вообще не упоминались даже в фундаментальных руководствах по теории электричества и магнетизма. Во многих работах были приведены дополнительные разъяснения к обоснованию формул (4.26), (4.47), которые были даны самим Максвеллом, или новые выводы этих формул.

---

\* *Maxwell J. C. A. treatise on electricity and magnetism. Vol. 1—2. Oxford. Clarendon Press. 1873.*

Впервые формулы Максвелла были записаны в виде (4.26), (4.47) в статье Г. Гельмгольца \* в 1881 г. В этой же статье был четко разъяснен физический смысл давлений  $p_1$  и  $p_2$ , введенных Максвеллом. Исходя из уравнения равновесия давлений \*\*

$$p_1 - p_2 = \mu H^2, \quad (4.95)$$

записанного Максвеллом [16, с. 115, ф. 1], и выражения для  $p_1 = 0,5 \mu H^2$ , расшифрованного Л. Больцманом [см. (4.94)], Г. Гельмголец получает выражение для  $p_2 = -0,5 \mu H^2$ . Он поясняет, что  $p_1$  представляет собой натяжение [см. (4.96)] на эквипотенциальной поверхности в магнитном поле, на которой  $\bar{H}$  и  $\bar{n}$  коллинеарны; а  $p_2$  — натяжение на магнитной поверхности в магнитном поле, на которой  $\bar{H}$  и  $\bar{n}$  нормальны. Причем знак перед этими величинами означает, что  $p_1$  направлено в сторону внешней нормали  $\bar{n}$ ; а  $p_2$  — в противоположную сторону по отношению к внешней нормали  $\bar{n}$ .

Вывод формул Максвелла [см. (4.26), (4.47)], выполненный по аналогии с тем, как это было сделано автором, приводится в книге Л. Больцмана «Лекции о Максвелловской теории электричества и света»\*\*\*. Е. Кон в учебнике по теории электромагнитного поля \*\*\*\* впервые приводит вывод формулы Максвелла [см. с. 153, форм. (20 а)] для плотности электромагнитных сил исходя из сохранения энергии при малом перемещении элементарного объема магнитного поля.

В руководстве по теории электромагнитного поля М. Абрагама\*\*\*\*\* дан еще более строгий вывод формулы Максвелла для плотности электромагнитных сил  $\bar{f}$ . Он рассматривает приращение энергии  $\delta W$  при бесконечно малом перемещении на расстояние  $\bar{q}$  элементарного объема  $dV$  магнитного поля в условиях постоянства токов  $i$  через произвольную поверхность  $S$   $i = \int_S \bar{J} d\bar{S} = \text{const}$ .

Считая, что  $\mu$  имеет произвольное пространственное распределение и не зависит от индукции  $B$ , он полагает, что в соответствии с законом сохранения энергии работа электромагнитных сил  $\int \bar{f} dV$ , действующих на элементы объема поля, при перемещении этих элементов на расстояние  $\bar{q}$  равна приращению магнитной энергии

$$A = (\delta W)_{i = \text{const}}, \quad (4.96)$$

\* *Helmholtz H.* Über die auf das innere Magnetisch oder dielectricisch Polarisirter Körper wirkenden Kräfte. *Annalen der Physik*, 1881, 13, p. 385.

\*\* Здесь уравнение записано в системе СИ.

\*\*\* *Boltzman L.* Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes. Teil 1 — 1891. Teil 2 — 1893, Leipzig: J. A. Barth.

\*\*\*\* *Cohn E.* Das electromagnetische Feld. Leipzig, Hirzel, 1890, 577 с.

\*\*\*\*\* *М. Абрагам.* Теория электричества. Т. 1. Введение в теорию электричества Максвелла. — Л. — М.: ГОНТИ, 1939. 260 с.

где  $A = \int_V \bar{q} \bar{f} dV$  — работа электромагнитных сил во всем объеме  $V$ ;

$$\delta W = \delta \left( \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu} dV \right) = \frac{1}{2} \int_V B^2 \delta \left( \frac{1}{\mu} \right) dV + \int_V \frac{1}{\mu} \bar{B} \delta \bar{B} dV$$

— приращение магнитной энергии во всем объеме поля.

Учитывая, что

$$\delta(1/\mu) = -\bar{q} \text{grad}(1/\mu), \quad (4.97)$$

он получает из (4.96) формулу Максвелла [см. (4.47)] для плотности электромагнитных сил  $\bar{f}$ .

Вывод формулы Максвелла для плотности электромагнитных сил  $\bar{f}$  (4.47) приводится и в книге И. Е. Тамма [1, форм. (83.3)]. Этот вывод отличается от вывода М. Абрагама тем, что приращение магнитной проницаемости  $\delta(1/\mu)$  при перемещении элементарного объема  $dV$  относительно среды связывается не только с заданным пространственным изменением  $\mu$  [см. (4.96)], но и с деформацией среды, которая может приводить к изменению плотности среды  $\tau$  и ее магнитной проницаемости  $\mu$ . В связи с этим и в выражении  $\delta(1/\mu)$  появляется второй член, пропорциональный  $\text{div} \bar{q}$ ;

$$\delta(1/\mu) = -\bar{q} \text{grad}(1/\mu) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\mu} \right) \tau \text{div} \bar{q}. \quad (4.98)$$

Появление второго члена приводит к тому, что формула для плотности электромагнитной силы  $\bar{f}$ , выведенная в [1, форм. (83.3)],

$$\bar{f} = [\bar{J} \bar{B}] + 0,5B^2 \text{grad}(1/\mu) - 0,5 \text{grad}(B^2 \tau \partial(1/\mu)/\partial \tau), \quad (4.99)$$

отличается от формулы Максвелла для  $\bar{f}$  (4.47) на величину дополнительного члена

$$-0,5 \text{grad} [(B^2 \partial \tau (1/\mu))/\partial \tau], \quad (4.100)$$

названного автором *плотностью стрижкионных сил*. Аналогично, исходя из (4.99) и из дифференциальных уравнений (4.15), выражающих компоненты  $\bar{f}$  через компоненты тензора натяжений  $T_{ik}$ , выведена формула [1, форм. (84.4); (84.5)] для тензора натяжений в магнитном поле

$$T_{ik} = (1/\mu) (B_i B_k - 0,5B^2 \delta_{ik}) - 0,5B^2 \tau \delta_{ik} \partial(1/\mu)/\partial \tau, \quad (4.101)$$

где  $\delta_{ik}$  — имеет смысл тот же, что и в (4.26).

Формула (4.101) также отличается от формулы Максвелла (4.26) наличием в этой формуле дополнительного стрикционного члена

$$-0,5B^2 \tau \delta_{ik} \partial(1/\mu)/\partial \tau. \quad (4.102)$$

Как указывается в [1, с. 384], стрикционные члены [см. (4.100) и (4.105)] «вливают лишь на распределение ЭМС по объему тела и при расчете равнодействующей ЭМС  $\bar{F}$ , действующей на тело, могут быть отброшены». К такому же заключению (причем не только в отношении полной силы, действующей на магнитное тело, но и в отношении силы  $\bar{F}$ , действующей на произвольный объем поля) можно прийти и формально математическим путем. Действительно, при определении полной силы  $\bar{F} = \int_V \bar{f} dV$ , действующей на

произвольный объем поля  $V$ , все элементы этого объема должны быть перемещены на одно и то же расстояние  $\bar{q} = \text{const}$ . При этом  $\text{div } \bar{q} = 0$  и второй член в (4.98) обращается в нуль. Соответственно обращаются в нуль и стрикционные члены в формулах Тамма для  $\bar{f}$  [см. (4.99)] и  $T_{ik}$  [см. (4.101)], обязанные своим появлением второму члену в (4.98). После исключения стрикционных членов формулы Тамма для  $\bar{f}$  [см. (4.99)] и  $T_{ik}$  [см. (4.101)] совпадают с формулами Максвелла для этих величин [см. (4.47), (4.26)].

Плотность электромагнитных сил  $\bar{f}$  и тензор натяжений  $T_{ik}$  рекомендуется определять по формулам Максвелла (4.47), (4.26) во всех фундаментальных руководствах по теории электромагнитного поля, например в книгах Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [17, с. 184, форм. (34.3)], Дж. Стреттона [18, с. 143, форм (10)], К. Шимони [19, с. 57, форм (7.65)].

В последние годы в связи с необходимостью совершенствования методов численного расчета электромагнитных сил в нелинейных магнитных системах появился ряд работ [4—6, 37, 38, 39], в которых даны новые доказательства формул Максвелла для натяжения  $T_{ik}$  и плотности электромагнитных сил  $\bar{f}$  в магнитном поле. Показано, что формулы (4.47), (4.26) распространяются на нелинейные магнитные системы. Выявлено, что эти формулы являются единственно правильными формулами для расчета  $T_{ik}$  и  $\bar{f}$ , а все другие формулы, отличающиеся от них ошибочны (см. гл.6). На основании этих работ написаны параграфы этой главы, посвященные обоснованию формул Максвелла (4.26), (4.47).

В 1988 г. опубликованы также статьи [40, 41], в которых экспериментально подтверждена правильность формул Максвелла (4.47), (4.26) и ошибочность других формул (см. гл.7).

## КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. ЭМС или электромагнитный момент, действующие на произвольный объем  $V$  в магнитном поле, могут быть выражены двумя равноценными способами: либо через объемную плотность ЭМС  $\vec{j}$  в этом объеме и через поверхностную плотность ЭМС  $\vec{j}_S$  на поверхностях разрыва магнитной проницаемости, имеющих в этом объеме [см. (4.54) и (4.55)], либо через натяжение  $T_n$  на поверхности  $S$ , выделяющей объем  $V$  [см. (4.6), (4.7)].

2. Плотности ЭМС и натяжения, через которые выражаются ЭМС и электромагнитные моменты, должны рассчитываться по формулам Максвелла для объемной плотности ЭМС  $\vec{j}$  [см. (4.46), (4.47)], для поверхностной плотности ЭМС  $\vec{j}_S$  [см. (4.33)] и для натяжений  $T_n$  [см. (4.24), (4.26)]. Применение других формул, не совпадающих с указанными формулами Максвелла, может привести к получению ошибочных результатов.

3. Формулы Максвелла, приведенные выше, пригодны для расчета ЭМС и моментов в любых магнитных полях в линейных или нелинейных безгистерезисных средах.

## Примеры расчетов электромагнитных сил через их объемную плотность или натяжения

### 5.1. Практические рекомендации к расчетам электромагнитных сил через их объемную плотность или через натяжения

Как уже отмечалось ранее, электромагнитные силы или электромагнитные моменты можно найти одним из трех способов: 1) через изменение магнитной энергии или коэнергии системы при малом перемещении; 2) через натяжения; 3) через объемную и поверхностную плотности ЭМС.

Примеры расчетов ЭМС и ЭММ первым способом были даны ранее (см. гл. 2, 3). В этом способе ЭМС или ЭММ определяется в виде производной магнитной коэнергии или энергии системы по перемещению, найденной при определенных условиях (при постоянстве токов или потокссцеплений контуров) в виде предела отношения приращения коэнергии (энергии) к перемещению при стремлении последнего к нулю. Эту производную и ЭМС или ЭММ можно вычислить достаточно точно лишь в тех случаях, когда магнитное поле системы выражается аналитически. Если поле рассчитывают численно приближенными методами, и приращение энергии определяют в виде малой разности двух больших величин (энергий системы до и после перемещения одной из ее частей), то получить достаточно точное значение ЭМС весьма затруднительно (см. § 2.4). Поэтому при расчете поля численным путем всегда предпочтительнее второй и третий способы, в которых не требуется рассчитывать малую разность двух больших величин. Кроме того, эти способы не только более точны, но и менее трудоемки. Поэтому они предпочтительнее и в тех случаях, когда поле может быть рассчитано аналитически. Первый способ можно рекомендовать только в тех случаях, когда процессы в электромагнитной системе описываются уравнениями ее электрической и магнитной цепей. Причем с помощью полевых методов заранее рассчитаны с достаточной точностью магнитные проводимости элементов магнитной цепи (в зависимости от перемещения), что предопределяет возможность точного определения производных проводимостей по перемещению, через которые легко выражаются ЭМС или ЭММ. Именно для такого случая первый способ был применен в § 2.4. Он также успешно используется для определения ЭМС в электромагнитном расчете электрических машин методом проводимостей зубцовых контуров [20].

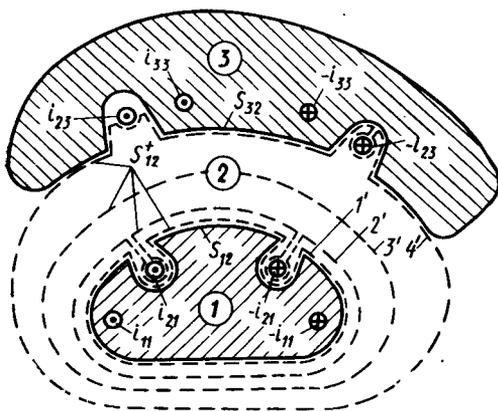


Рис. 5.1. Возможные варианты размещения охватывающих поверхностей  $S_{12}^+$  при расчете ЭМС и ЭММ, действующих на тело 1

входит в состав нелинейной системы, например на тело 1 магнитной системы (рис. 5.1). Тело 1 со всех сторон окружено средой 2 (жидким или газообразным телом), в которой кроме тела 1 имеются другие тела, например 3. Тело 1 отделяется от среды 2 поверхностью  $S_{12}$ ; тело 3 — поверхностью  $S_{32}$ .

Считаются заданными: пространственное распределение относительных магнитных проницаемостей в объеме системы и их зависимостей от индукции в пределах каждого из тел системы:  $\mu_{1r} = \mu_{1r}(x, y, z, B)$ ;  $\mu_{2r} = \mu_{2r}(x, y, z, B)$ ;  $\mu_{3r} = \mu_{3r}(x, y, z, B)$  и т.д.; мгновенные токи в контурах, размещающихся в каждом из тел:  $i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, \dots$ ;  $i_{21}, i_{22}, i_{23}, i_{24}, \dots$ ;  $i_{31}, i_{32}, i_{33}, i_{34}, \dots$ .

На рис. 5.1 показан двухмерный вариант магнитной системы, в которой сумма токов в пределах сечения каждого из тел равна нулю. Каждому току в пределах сечения данного тела соответствует равный ему по величине и направленный в противоположную сторону ток. Например, току  $i_{11}$  в сечении тела 1 соответствует ток  $-i_{11}$ ; току  $i_{21}$  в сечении тела 2 — ток  $-i_{21}$ . После расчета поля нелинейной системы (при заданных мгновенных токах в контурах) оказывается известным распределение индукции в объеме системы  $B = B(x, y, z)$  и, следовательно, пространственное распределение относительных магнитных проницаемостей в пределах объема каждого из тел:

$$\mu_{1r} = \mu_{1r}(x, y, z), \mu_{2r} = \mu_{2r}(x, y, z), \mu_{3r} = \mu_{3r}(x, y, z).$$

Причем на поверхностях  $S_{12}$  и  $S_{32}$ , отделяющих тела друг от друга, будут наблюдаться разрывы магнитной проницаемости:

$$\mu_{1r}(S_{12}) \neq \mu_{2r}(S_{12}); \mu_{3r}(S_{32}) \neq \mu_{2r}(S_{32}) \text{ и т. д.}$$

Перейдем теперь к особенностям использования второго и третьего способов при решении двух типовых задач: определении ЭМС или ЭММ, действующих на нелинейное магнитное тело целиком; определении ЭМС или ЭММ, действующих на часть нелинейного магнитного тела.

### 5.1.1. Определение ЭМС или ЭММ, действующих на нелинейное магнитное тело целиком.

В задачах данного типа требуется определить ЭМС или ЭММ, действующие на тело, которое

Приступая к определению ЭМС или ЭММ, действующих на тело  $1$  системы, нужно выбрать пространственное положение поверхности  $S_{12}^+$ , охватывающей это тело. Напомним, что поверхность  $S_{12}^+$  должна во всех случаях охватывать (включать в себя) границу тела  $1$ , на которой происходит разрыв магнитной проницаемости. Иными словами поверхность  $S_{12}^+$  должна полностью располагаться в среде  $2$ . Однако подход к выбору положения поверхности  $S_{12}^+$  в теле  $2$  зависит от характера распределения в нем магнитной проницаемости. Если магнитная проницаемость в отдельных элементах тела  $2$  имеет различные значения, т. е.  $\mu_{2r} = \text{var}$ , то для определения ЭМС или ЭММ следует охватить тело  $1$  поверхностью  $S_{12}^+$ , расположенной целиком в среде  $2$  на бесконечно малом расстоянии от поверхности  $S_{12}$ , т. е. в положении  $1'$ .

Другие варианты размещения поверхности  $S_{12}^+$  исключаются, поскольку при  $\mu_{2r} = \text{var}$  объемные плотности ЭМС могут отличаться от нуля в любом элементе тела  $2$  (в том числе в таких элементах этого тела, где  $\bar{J} = 0$ , а  $\text{grad } \mu_{2r} \neq 0$  [см. (4.46)]).

Если  $\mu_{2r} = \text{const}$ , то поверхность  $S_{12}^+$  может охватывать не только объем тела  $1$ , но и любой дополнительный объем тела  $2$ , на протяжении которого  $\mu_{2r} = \text{const}$  и  $\bar{J} = 0$  (токи отсутствуют). Таким образом, при  $\mu_{2r} = \text{const}$  кроме положения  $1'$  поверхность  $S_{12}^+$  может занимать, например, положение  $2'$ , в котором она не охватывает токи в теле  $2$ . Разумеется, поверхность  $S_{12}^+$  не должна охватывать зоны тела  $2$ , в которых  $\mu_{2r} \neq \text{const}$ , а также поверхность разрыва магнитной проницаемости  $S_{32}$ , отделяющую тело  $2$  от тела  $3$ . Как мы видели, токи тела  $2$  должны располагаться вне поверхности  $S_{12}^+$  (см., например, положение  $2'$  этой поверхности). Однако это правило не распространяется на такие токи в среде  $2$ , ЭМС которых механически передается на тело  $1$  (например, на токи  $i_{21}$  и  $-i_{21}$  в пазах тела  $1$ , ЭМС которых передаются механически через изоляцию на тело  $1$ ). Если ЭМС или ЭММ на тело  $1$  нужно найти с учетом влияния ЭМС таких токов в среде  $2$ , то поверхность  $S_{12}^+$  должна охватывать и эти токи (положения  $3'$ ,  $4'$  на рис. 5.1).

После назначения положения поверхности  $S_{12}^+$  ЭМС или ЭММ на тело  $1$  можно выразить вторым способом [см. (4.24)] через натяжения  $\bar{T}_n$ , действующие извне на поверхность  $S_{12}^+$ . Эту же ЭМС или ЭММ можно выразить третьим способом через поверхностную плотность ЭМС  $\bar{f}_S$  на поверхности  $S_{12}$  [см. (4.33)] и через объемную плотность ЭМС  $\bar{f}$  [см. (4.46)] внутри поверхности  $S_{12}$ , т. е. в объеме тела  $1$ . Причем  $\bar{f}$  может отличаться от нуля как в зоне размещения токов (например, токов  $i_{11}$  и  $-i_{11}$ , где  $J \neq 0$ , так и в зоне объема тела  $1$ , где токи отсутствуют ( $J = 0$ ), но  $\text{grad } \mu_{1r} \neq 0$ .

Если ЭМС или ЭММ на тело  $1$  определяется с учетом влияния токов ЭМС, которых механически передается на тело  $1$ , то при рас-

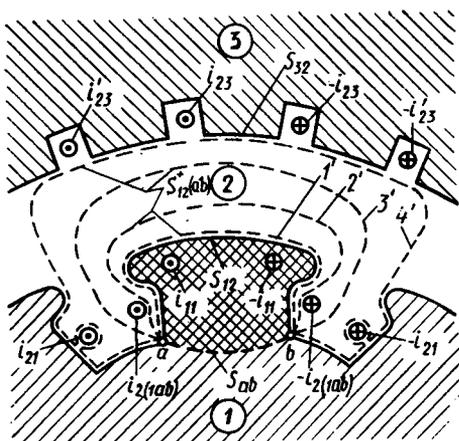


Рис. 5.2. Возможные варианты размещения охватывающих поверхностей  $S_{12}^{+(ab)}$  при расчете ЭМС и ЭММ, действующих на часть тела  $I$ , выделенную поверхностью  $S_{ab}$

выделяется из объема нелинейной системы поверхностью  $S_{12}^{+(ab)}$ , состоящей из двух участков:

$$S_{12}^{+(ab)} = S_{12} + S_{ab},$$

где  $S_{ab}$  — поверхность, отделяющая рассматриваемую часть тела  $I$  от самого тела  $I$ ;  $S_{12}$  — поверхность, отделяющая рассматриваемую часть тела  $I$  от окружающей среды  $2$ .

Магнитное поле системы, так же как в задачах, рассмотренных в (§ 5.1.1) предполагается рассчитанным при заданных токах в контурах, а распределение индукции  $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$  и относительной проницаемости в пределах каждого из тел системы известны:  $\mu_{1r}^i = \mu_{1r}^i(x, y, z)$ ;  $\mu_{2r}^i = \mu_{2r}^i(x, y, z)$  и т. д.

На поверхностях  $S_{12}$ ,  $S_{32}$ , отделяющих тела системы друг от друга, наблюдаются разрывы магнитной проницаемости. На поверхности  $S_{ab}$  магнитная проницаемость не претерпевает скачкообразных изменений.

Приступая к определению ЭМС или ЭММ, действующих на рассматриваемую часть тела  $I$ , нужно выбрать пространственное положение поверхности  $S_{12}^{+(ab)}$ , охватывающей эту часть тела  $I$ . На участке  $S_{ab}$  положение этой поверхности является заданным. Здесь она совпадает с поверхностью  $S_{ab}$ , отделяющей рассматриваемую часть тела  $I$  от самого тела.

На участке  $S_{12}$  поверхность  $S_{12}^{+(ab)}$  должна обязательно включать в себя границу тела  $I$ , на которой происходит разрыв магнитной проницаемости. Иными словами, на этом участке поверхность

чете третьим способом нужно учесть ЭМС или ЭММ от объемной плотности сил  $\vec{f}$  в объеме, занимаемом этими токами. Это относится, например, к токам  $i_{21}$  и  $-i_{21}$  при расчете ЭМС или ЭММ в объеме, охваченном поверхностью  $S_{12}^{+(ab)}$  в положениях  $3'$  и  $4'$ .

5.1.2. Определение ЭМС или ЭММ, действующих на часть нелинейного магнитного тела. В задачах этого типа требуется найти ЭМС или ЭММ, действующие на часть тела, которое входит в состав нелинейной системы, например, на крестообразно заштрихованную часть тела  $I$  в магнитной системе (рис. 5.2). Рассматриваемая часть тела  $I$

$S_{12(ab)}$  должна полностью располагаться в среде 2. Причем подход к выбору положения поверхности  $S_{12(ab)}^+$  в теле 2 должен быть таким же, как в задачах, рассматриваемых в § 5.1.1. Если магнитная проницаемость в теле 2 непостоянна ( $\mu_{2r} = \text{var}$ ), то поверхность  $S_{12(ab)}^+$  на этом участке должна проходить на бесконечно малом расстоянии от поверхности  $S_{12}$ , т. е. находиться в положении  $1'$  (рис. 5.2).

Если магнитная проницаемость в теле 2 постоянна ( $\mu_{2r} = \text{const}$ ), то внутри поверхности  $S_{12(ab)}^+$  может располагаться любой дополнительный объем тела 2, на протяжении которого  $\mu_{2r} = \text{const}$  и,  $J = 0$  (отсутствуют контура с токами). Таким образом, при  $\mu_{2r} = \text{const}$  кроме положения  $1'$  поверхность  $S_{12(ab)}^+$  может занимать положение  $2'$ , в котором она не охватывает токи в теле 2. Разумеется, поверхность  $S_{12(ab)}^+$  не должна охватывать зону тела 2, в которых  $\mu_{2r} \neq \text{const}$ , а также поверхность разрыва магнитной проницаемости  $S_{32}$ , отделяющую тело 2 от тела 3. Как отмечалось, токи тела 2 должны располагаться вне поверхности  $S_{12(ab)}^+$ . Однако это правило не распространяется на такие токи в среде 2, ЭМС которых механически передается на рассматриваемую часть тела 1 (например, на токи  $i_{2(1ab)}$  и  $-i_{2(1ab)}$ , ЭМС которых передается механически через изоляцию на рассматриваемую часть тела 1). Если ЭМС или ЭММ, действующие на рассматриваемую часть тела 1, нужно найти с учетом влияния ЭМС таких токов в среде 2, то поверхность  $S_{12(ab)}^+$  должна охватывать и эти токи (положения  $3'$ ,  $4'$  на рис. 5.2).

После назначения положения поверхности  $S_{12(ab)}^+$  ЭМС или ЭММ на рассматриваемую часть тела 1 можно выразить вторым способом [см. (4.24)] через натяжения  $\bar{T}_n$ , действующие извне на поверхность  $S_{12(ab)}^+$ . Эту же ЭМС или ЭММ можно выразить третьим способом через поверхностную плотность ЭМС  $\bar{f}_S$  на поверхности разрыва магнитной проницаемости  $S_{12}$  [см. (4.33)] и через объемную плотность ЭМС  $\bar{f}$  [см. (4.46)] в пределах объема рассматриваемой части тела 1. Причем  $\bar{f}$  может отличаться от нуля как в зоне размещения токов (например, токов  $i_{11}$  и  $-i_{11}$ ), где  $J \neq 0$ , так и в зоне объема рассматриваемой части тела 1, где токи отсутствуют ( $J = 0$ ), но  $\text{grad } \mu_{1r} \neq 0$ .

Если ЭМС или ЭММ, действующие на рассматриваемую часть тела 1, определяются с учетом влияния токов, ЭМС которых механически передается на рассматриваемую часть тела 1, то нужно (при расчете третьим способом) учесть ЭМС или ЭММ от объемной плотности ЭМС  $\bar{f}$  в объеме, занимаемом этими токами. Это относится, например, к токам  $i_{2(1ab)}$  и  $-i_{2(1ab)}$  (при расчете ЭМС или ЭММ в объеме, охваченном поверхностью  $S_{12(ab)}^+$  в положениях  $3'$  и  $4'$ ).

В заключение заметим, что результаты расчета ЭМС или ЭММ вторым и третьим способами при аналитических расчетах поля всегда должны быть полностью совпадающими, а при численных

расчетах поля совпадающими в пределах достигнутой точности расчета поля и вычислений поверхностных и объемных интегралов. В большинстве случаев расчет вторым способом (через  $\bar{T}_n$ ) менее трудоемок, чем расчет третьим способом (через  $\bar{f}_S$  и  $\bar{f}$ ), так как он сводится к вычислению поверхностных, а не объемных интегралов, как в третьем способе. Однако в некоторых частных случаях, когда вычисление объемных интегралов по тем или иным причинам не вызывает затруднений, или вообще отпадает (например, при  $\bar{f} = 0$ ), более предпочтительным может оказаться третий способ.

Существуют также задачи, которые могут быть наиболее просто решены, если ЭМС, действующие на некоторые из тел системы, будут определены вторым способом, а ЭМС, действующие на остальные тела системы, — третьим способом. Подход к выбору наиболее эффективного способа определения ЭМС или комбинации этих способов рассматривается в приведенных ниже примерах.

## 5.2. Электромагнитные силы, действующие на токи в магнитном поле

5.2.1. Электромагнитная сила, действующая на ток в равномерном поле. Ток  $i$  размещен в среде с магнитной проницаемостью  $\mu = \mu_0 \mu_r$  на расстоянии  $d$  от начала координат (рис. 5.3). В среде создано равномерное внешнее магнитное поле с индукцией  $B_0 = \mu H_0$ . Выразим силу, действующую на ток  $i$ , через натяжения на цилиндрической поверхности с радиусом  $r_1 > d$  и центром в начале координат. Рассмотрим точку  $B$ , в которой размещается ток, как точку, обратную некоторой точке  $A$  относительно окружности [21, с. 63]. Положение точки  $B$  определяется путем построений, показанных на рис. 5.3. Расстояние от центра окружности до точки  $A$ , обозначаемое  $r_A$ , должно быть таким, чтобы треугольники  $PBO$  и  $AOP$ , имеющие общий угол  $\theta$  и одинаковые углы  $\beta = OPB$  и  $PAO$ , были подобны. Откуда следует, что  $OP/OB = OA/OP$  или  $r_1/d = r_A/r_1$ . А это означает, что расстояние

$$OA = r_A = r_1^2/d \quad (5.1)$$

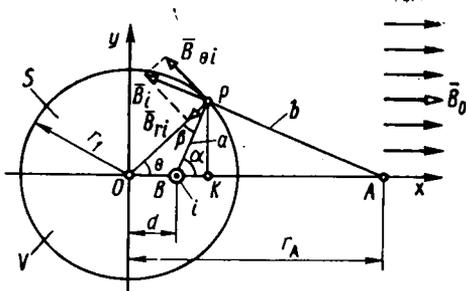


Рис. 5.3. Определение силы, действующей на линейный ток  $i$  в равномерном магнитном поле, через натяжения на круговой цилиндрической поверхности  $S$ , охватывающей ток

не зависит от выбора точки  $P$ . Используя далее очевидные соотношения между размерами сторон треугольников, изображенных на рис. 5.3, и тригонометрическими функциями их углов,

$$\left. \begin{aligned} PK &= r_1 \sin \theta; \quad BK = r_1 \cos \theta - d = (r_1 r_A \cos \theta - r_1^2)/r_A; \\ \cos \beta &= \cos(\alpha - \theta) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha; \\ \sin \beta &= \sin(\alpha - \theta) = \cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha; \\ \cos \alpha &= BK/a; \quad \sin \alpha = PK/a; \quad a^2 = r_1^2 b^2/r_A^2; \\ b^2 &= r_1^2 + r_A^2 - 2r_1 r_A \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

легко найти выражения для компонент индукции на поверхности окружности  $r = r_1$  в цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} B_{\theta i} &= \frac{i\mu_0 \mu_r \cos \beta}{2\pi a} = \frac{i\mu_0 \mu_r (r_A/r_1 - \cos \theta) r_A}{2\pi b^2}; \\ B_{r i} &= -\frac{i\mu_0 \mu_r \sin \beta}{2\pi a} = -\frac{i\mu_0 \mu_r r_A \sin \theta}{2\pi b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Компоненты индукции внешнего поля  $B_0$ :

$$B_\theta = -\mu_0 \mu_r H_0 \sin \theta; \quad B_r = \mu_0 \mu_r H_0 \cos \theta. \quad (5.4)$$

Сила, действующая на единицу длины тока  $i$  во внешнем поле  $B_0$ , выражается по (4.24) через натяжения на цилиндрической поверхности ( $r = r_1$ ):

$$F_y = \int_0^{2\pi} (T_{nr} \sin \theta + T_{n\theta} \cos \theta) r_1 d\theta, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \text{где } T_{nr} &= (B_{r\Sigma}^2 - B_{\theta\Sigma}^2)/(2\mu_0 \mu_r); \quad T_{n\theta} = B_{r\Sigma} B_{\theta\Sigma}/(\mu_0 \mu_r); \\ B_{r\Sigma} &= B_r + B_{r i}; \quad B_{\theta\Sigma} = B_\theta + B_{\theta i}. \end{aligned}$$

Подставляя в (5.5) значения составляющих натяжений и индукций, имеем

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{r_1}{2\mu_0 \mu_r} \int_0^{2\pi} (B_{r i}^2 + 2B_{r i} B_r + B_r^2 - B_{\theta i}^2 - 2B_{\theta i} B_\theta - B_\theta^2) \sin \theta d\theta + \\ &\quad + 2(B_{r i} B_{\theta i} + B_{r i} B_\theta + B_r B_{\theta i} + B_r B_\theta) \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Учитывая, что интегралы от  $B_{r i}^2 \sin \theta$ ;  $B_r^2 \sin \theta$ ;  $B_{\theta i}^2 \sin \theta$ ;  $B_\theta^2 \sin \theta$ ;  $B_{r i} B_{\theta i} \cos \theta$  и  $B_r B_\theta \cos \theta$  равны нулю, получим

$$F_y = \frac{B_{\theta i}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(k^{-1} - \cos \theta) d\theta}{(p - \cos \theta)},$$

где  $k = r_1/r_A \leq 1$ ;  $p = (1 + k^2)/(2k)$ .

Путем подстановки  $x = \rho - \cos \theta$ ,  $dx = d\theta/\sin \theta$ ,  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - (\rho - x)^2} = \sqrt{x}$  этот интеграл сводится к известным интегралам от иррациональных функций [22, с. 99 форм. 241, 258],

$$F_y = \frac{B_0 i}{2\pi k} \int_{\rho-1}^{\rho+1} \frac{dx}{x \sqrt{x}} - \frac{B_0 i}{2\pi} \int_{\rho-1}^{\rho+1} \frac{(\rho-x) dx}{x \sqrt{x}} = B_0 i, \quad (5.6)$$

где  $\int_{\rho-1}^{\rho+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \pi$ ;  $\int_{\rho-1}^{\rho+1} \frac{dx}{x \sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{\rho^2-1}} = \frac{2\pi k}{1-k^2}$ .

Тот же результат для силы, действующей на ток в равномерном магнитном поле, легко получить через объемную плотность электромагнитной силы:

$$F_y = f_y \pi r_0^2 = B_0 (J \pi r_0^2) = B_0 i,$$

где  $f_y = JB_0$ .

Из (5.6) видно, что значение силы  $F_y$  не зависит ни от расположения центра цилиндрической поверхности тока (расстояния  $d$ ) ни от ее радиуса  $r_1$  (если  $r_1 > d$ ). Таким образом, при расчете силы на ток через натяжения охватывающая его цилиндрическая поверхность может быть произвольной. Более того, если ток располагается в однородной изотропной среде, при расчете силы через натяжения его можно охватить любой произвольной поверхностью. Вообще говоря, это следует из общих соображений [см. § 5.1.1]. Однако представляется полезным подтвердить на этом простейшем примере, что общие соображения правильны. Охватим ток  $i$ , расположенный в равномерном поле с индукцией  $B_0$ , произвольной поверхностью  $S$  (рис. 5.4).

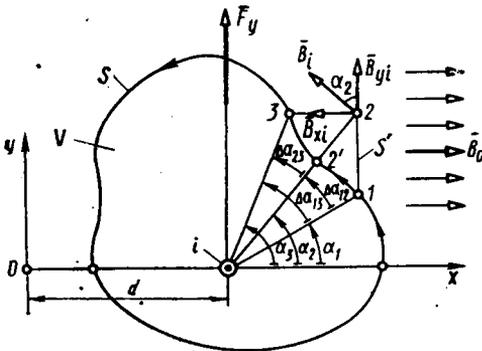


Рис. 5.4. Определение силы, действующей на линейный ток  $i$  в равномерном магнитном поле, через натяжения на произвольной цилиндрической поверхности  $S$ , охватывающей ток

Предположим, что ток  $i$  направлен по оси  $z$  и лежит на оси  $x$  на расстоянии  $d$  от начала координат. Образующие произвольной цилиндрической поверхности  $S$  также направлены по оси  $z$ . Определим силу на ток через натяжения на этой поверхности по (4.24). С этой целью заменим поверхность  $S$  многогранной поверхностью  $S'$ , грани которой параллельны или плоскости  $xz$ , или плоскости  $yz$ . Две грани поверхности  $S'$  (12 и 23), заме-

няющие элемент поверхности  $S$  между образующими 1 и 3, показаны на рис. 5.4. Другие ее грани не показаны. Найдем индукцию от тока  $i$  и ее составляющие в произвольной точке с координатами  $x, y$  на поверхности  $S'$ :

$$\left. \begin{aligned} B_i &= \frac{\mu_0 \mu_r i}{2\pi \sqrt{(x-d)^2 + y^2}}; & B_{yi} &= B_i \cos \alpha = \frac{\mu_0 \mu_r i (x-d)}{2\pi [(x-d)^2 + y^2]}; \\ B_{xi} &= -B_i \sin \alpha = -\frac{\mu_0 \mu_r i y}{2\pi [(x-d)^2 + y^2]}, \end{aligned} \right\} (5.7)$$

где  $\alpha$  — угол между лучом, направленным от тока  $i$  в точку  $x, y$  и осью  $x$ .

Индукция внешнего равномерного поля направлена по оси  $x$ . Ее составляющие  $B_{y0} = 0$ ;  $B_{x0} = B_0 = \mu_0 \mu_r H_0$ . Выразим составляющую ЭМС по оси  $y$  на грани 12 ( $x = x_1 = x_2 = \text{const}$ ,  $y_1 < y < y_2$ ) через натяжения. Так как на этой грани по оси  $y$  направлена тангенциальная составляющая натяжения  $T_{n\tau} = T_{ny}$ , то

$$\Delta F_{y12} = \int_{y=y_1}^{y_2} T_{n\tau} dy = \frac{(x_1-d) B_0 i}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(x_1-d)^2 + y^2},$$

где  $T_{n\tau} = B_{n\Sigma} B_{\tau\Sigma} / \mu_0 \mu_r = B_{x\Sigma} B_{y\Sigma} / \mu_0 \mu_r$ ;  $B_{x\Sigma} = B_{x0} + B_{xi}$ ;  $B_{y\Sigma} = B_{y0} + B_{yi}$ .

С помощью формулы 40 [см. 22, с. 92] получим

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(x_1+d)^2 + y^2} = \frac{1}{(x_1-d)} \left[ \text{arctg} \frac{y_2}{x_1-d} - \text{arctg} \frac{y_1}{x_1-d} \right],$$

где  $\text{arctg} \frac{y_2}{x_1-d} = \alpha_2$ ,  $\text{arctg} \frac{y_1}{x_1-d} = \alpha_1$ .

Откуда

$$\Delta F_{y12} = \frac{B_0 i}{2\pi} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{B_0 i}{2\pi} \Delta \alpha_{12}. \quad (5.8)$$

Из полученной формулы следует, что сила на грань 12 пропорциональна приращению угла  $\alpha$  ( $\Delta \alpha_{12}$ ) грани 12 в положительном направлении (против часовой стрелки). Составляющая ЭМС по оси  $y$  на грани 23 ( $y = y_2 = y_3 = \text{const}$ ,  $x_3 < x < x_2$ ) выражается через нормальную составляющую натяжения  $T_{nn} = T_{ny}$ ,

$$\Delta F_{y23} = \int_{x_3}^{x_2} T_{nn} dx = \frac{y_2 B_0 i}{2\pi} \int_{x_3}^{x_2} \frac{dx}{(x-d)^2 + y_2^2},$$

где  $T_{nn} = (B_{n\Sigma}^2 - B_{\tau\Sigma}^2) / (2\mu_0 \mu_r) = (B_{y\Sigma}^2 - B_{x\Sigma}^2) / (2\mu_0 \mu_r)$ .

С помощью формулы 40 [см. 22, с. 92] получим

$$\int_{x_3}^{x_2} \frac{dx}{(x-d)^2 + y_2^2} = \frac{1}{y_2^2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x_2-d}{y_2} - \operatorname{arctg} \frac{x_3-d}{y_2} \right],$$

где  $\operatorname{arctg} \frac{x_3-d}{y_2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_3$ ;  $\operatorname{arctg} \frac{x_2-d}{y_2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$ .

Откуда

$$\Delta F_{y23} = \frac{B_0 i}{2\pi} (\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{B_0 i}{2\pi} \Delta\alpha_{23}. \quad (5.9)$$

Из (5.9) следует, что и сила на грань 23 пропорциональна приращению угла  $\alpha$  ( $\Delta\alpha_{23}$ ) при перемещении по грани 23 в положительном направлении.

Сила, действующая на обе грани,

$$\Delta F_y = \Delta F_{y13} = \Delta F_{y12} + \Delta F_{y23} = \frac{B_0 i}{2\pi} \Delta\alpha_{13} = \frac{B_0 i}{2\pi} \Delta\alpha, \quad (5.10)$$

где  $\Delta\alpha = \Delta\alpha_{13} = \Delta\alpha_{12} + \Delta\alpha_{23}$ ,

также пропорциональна приращению угла  $\alpha$  ( $\Delta\alpha_{13}$ ) при перемещении по элементу 13, поверхности  $S'$  (или элементу 13 замещаемой им поверхности  $S$ ) в положительном направлении (рис. 5.4).

Если расстояние  $\Delta l = \Delta l_{13}$  между точками 1 и 3 и приращение угла  $\Delta\alpha = \Delta\alpha_{13}$  стремятся к нулю, то сила на элемент поверхности  $S$  не будет отличаться от силы на соответствующий элемент поверхности  $S'$  по (5.10).

Результирующая сила, соответствующая всем элементам поверхности  $S$ , будет определяться как сумма сил на эти элементы по (5.10):

$$F_y = \Sigma \Delta F_y = \frac{B_0 i}{2\pi} \Sigma \Delta\alpha, \quad (5.11)$$

где  $\Delta\alpha$  — приращение угла  $\alpha$  при перемещении по элементу поверхности  $S$  в положительном направлении.

Если ток  $i$  охвачен поверхностью  $S$ , то приращения углов при обходе следа поверхности  $S$  суммируются, и их сумма  $\Sigma \Delta\alpha = 2\pi$ . Поэтому сила, найденная по (5.11) через натяжения на этой поверхности, получается, как следует ожидать, такой же, как по (5.6):

$$F_y = \frac{B_0 i}{2\pi} \Sigma \Delta\alpha = B_0 i. \quad (5.12)$$

Если поверхность  $S$  не охватывает ток  $i$  (рис. 5.5), то к следу поверхности нужно провести касательные  $CA$  и  $CB$  из места расположения тока  $i$ . Точками касания  $A$  и  $B$  след поверхности  $S$  разделится на две части. При перемещении по поверхности  $S$  в положи-

тельном направлении от точки  $A$  к точке  $B$  происходит увеличение угла  $\alpha$  от  $\alpha_A$  до  $\alpha_B > \alpha_A$ . При перемещении от точки  $B$  к точке  $A$  происходит уменьшение угла  $\alpha$  от  $\alpha_B$  до  $\alpha_A$ . Причем каждому элементу  $12$  на участке поверхности  $AB$ , на котором происходит положительное приращение угла  $\Delta\alpha_{12}$ , соответствует элемент  $1'2'$  на участке поверхности  $BA$ , на котором происходит отрицательное приращение угла  $\Delta\alpha'_{12} = -\Delta\alpha_{12}$ . Поэтому при обходе поверхности  $S$  полная сумма приращений углов по (5.11) через натяжения на этой поверхности равно нулю, т. е.  $F_y = \frac{B_0 i}{2\pi} \Sigma \Delta\alpha = 0$ .

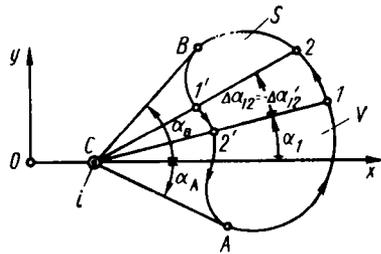


Рис. 5.5. Определение силы, действующей в равномерном магнитном поле на поверхность  $S$ , которая не охватывает ток  $i$

Как следует из (5.6) или (5.12), сила, действующая на ток  $i$  в равномерном внешнем магнитном поле с индукцией  $B_0$ , равна  $B_0 i$  и не зависит ни от магнитной проницаемости среды, ни от магнитной проницаемости провода с током. Это выражение для силы на ток совпадает с экспериментальными данными и положено в основу расчета сил во всех применяемых в технике электромеханических устройствах.

**5.2.2. Силы в системе параллельных линейных токов.** Рассмотрим систему из двух положительных линейных токов  $i_\alpha$  и  $i_\beta$ , направленных по оси  $z$  и расположенных в среде с магнитной проницаемостью  $\mu_r$ .

Токи лежат на оси  $x$ , как показано на рис. 5.6. Расстояние между ними равно  $d$ . Силу, действующую на единицу длины тока  $i_\alpha$  в поле тока  $i_\beta$ , наиболее просто выразить через объемную плотность ЭМС по (4.46). Сила имеет только одну составляющую по оси  $x$ . В случае  $r_\alpha \ll d$  ( $r_\alpha$  — диаметр провода с током  $i_\alpha$ ) эта сила

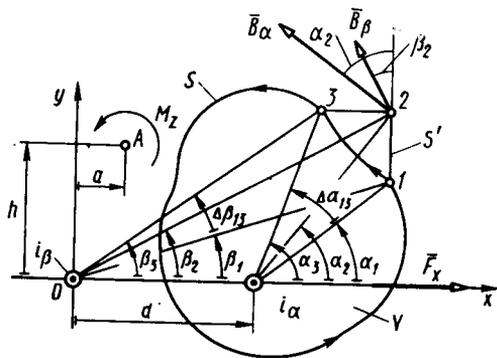


Рис. 5.6. Определение силы, действующей на ток  $i_\alpha$  в поле тока  $i_\beta$ , через натяжения на произвольной цилиндрической поверхности, охватывающей ток  $i_\alpha$

$$F_x = f_x V_\alpha = -\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta / (2\pi d), \quad (5.13)$$

где  $f_x = J_{\alpha y} B_{\beta z} - J_{\alpha z} B_{y\beta}$ ;  $J_{\alpha z} = i_\alpha / (\pi r_\alpha^2)$ ;  $J_{\alpha y} = 0$ ;

$B_{y\beta} = \mu_0 \mu_r i_\beta / (2\pi d)$ ;  $V_\alpha = \pi r_\alpha^2$  — объем единицы длины провода.

Следует заметить, что при выводе (5.13) мы полагали, что магнитная проницаемость провода с током  $i_\alpha$  не отличается от магнитной проницаемости окружающей среды, так как только в этом случае можно было рассчитывать индукцию  $B_{y\beta}$  внутри провода по приведенной формуле и не учитывать поверхностную плотность ЭМС  $\bar{f}_S$  по (4.33) на границе между проводом и окружающей средой.

Силу  $F_x$ , найденную по (5.13), разумеется, можно выразить и через натяжения. Это позволит не только получить для нее такую же формулу, но и показать, что (5.13) распространяется также на провода с произвольной магнитной проницаемостью и что  $\mu_r$  в (5.13) следует понимать как относительную магнитную проницаемость окружающей среды.

Для определения силы через натяжения по (4.24) охватим ток  $i_\alpha$  замкнутой цилиндрической поверхностью  $S$ , образующие которой направлены по оси  $z$ . Определим силу на ток  $i_\alpha$  через натяжения на этой поверхности. Так же как и в предыдущей задаче, заменим поверхность  $S$  многогранной поверхностью  $S'$ , две грани которой (12 и 23), заменяющие элемент поверхности  $S$  между образующими 1 и 3, показаны на рис. 5.6.

Индукции от токов  $i_\alpha$  и  $i_\beta$  и их составляющие в произвольной точке  $x, y$  поверхности  $S'$  запишем по аналогии с (5.7):

$$\left. \begin{aligned} B_\alpha &= \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha}{2\pi \sqrt{(x-d)^2 + y^2}}; & B_\beta &= \frac{\mu_0 \mu_r i_\beta}{2\pi \sqrt{x^2 + y^2}}; \\ B_{y\alpha} &= \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha (x-d)}{2\pi [(x-d)^2 + y^2]}; \\ B_{y\beta} &= \frac{\mu_0 \mu_r i_\beta x}{2\pi [x^2 + y^2]}; & B_{x\alpha} &= \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha y}{2\pi [(x-d)^2 + y^2]}; \\ B_{x\beta} &= -\frac{\mu_0 \mu_r i_\beta y}{2\pi [x^2 + y^2]}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Найдем составляющую ЭМС по оси  $x$  на грани 12 ( $x = x_1 = x_2 = \text{const}$ ,  $y_1 < y < y_2$ ) через натяжения. Поскольку на этой грани по оси  $x$  направлена нормальная составляющая натяжения  $T_{nn} = T_{nx}$ , получим

$$\Delta F_{x12} = \int_{y=y_1}^{y_2} T_{nn} dy = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta}{(2\pi)^2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{[y^2 - x_1(x_1 - d)] dy}{[(x_1 - d)^2 + y^2][x_1^2 + y^2]},$$

где  $T_{nn} = (B_{n\Sigma}^2 - B_{t\Sigma}^2) / (2\mu_0 \mu_r) = (B_{x\Sigma}^2 - B_{y\Sigma}^2) / (2\mu_0 \mu_r)$ ;  $B_{x\Sigma} = B_{x\alpha} + B_{x\beta}$ ;  $B_{y\Sigma} = B_{y\alpha} + B_{y\beta}$ .

Путем разложения на элементарные дроби интеграл в выражении  $\Delta F_{x_{12}}$  сводится к известным интегралам от рациональных функций [22, с. 92 форм. 40] и

$$\Delta F_{x_{12}} = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta}{(2\pi)^2 d} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x_1} - \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1 - d} - \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x_1 - d} \right],$$

$$\text{где } \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x_1} = \beta_2; \quad \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} = \beta_1; \quad \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x_1 - d} = \alpha_2;$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1 - d} = \alpha_1.$$

Откуда

$$\Delta F_{x_{12}} = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta}{(2\pi)^2 d} (\Delta\beta_{12} - \Delta\alpha_{12}), \quad (5.15)$$

где  $\Delta\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1$ ;  $\Delta\beta_{12} = \beta_2 - \beta_1$  — приращения углов  $\alpha$  и  $\beta$  при перемещении по грани 12 в положительном направлении.

Составляющая ЭМС по оси  $x$  на грани 23 ( $y = y_2 = y_3$ ,  $x_3 < x < x_2$ ) выражается через тангенциальную составляющую натяжения  $T_{n\tau} = T_{nx}$ :

$$\Delta F_{x_{23}} = \int_{x_2}^{x_3} T_{n\tau} dx = -\frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta y_2}{(2\pi)^2} \int_{x_2}^{x_3} \frac{(2x-d) dx}{[(x-d)^2 + y_2^2][x^2 + y_2^2]},$$

где  $T_{n\tau} = B_{\tau\Sigma} B_{n\Sigma} / (\mu_0 \mu_r) = B_{x\Sigma} B_{y\Sigma} / (\mu_0 \mu_r)$ .

После разложения на элементарные дроби этот интеграл сводится к известным интегралам от рациональных функций [22, с.92, форм. 40] и

$$\Delta F_{x_{23}} = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta}{(2\pi)^2 d} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x_2}{y_2} - \operatorname{arctg} \frac{x_3}{y_2} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{x_3 - d}{y_2} - \operatorname{arctg} \frac{x_2 - d}{y_2} \right],$$

$$\text{где } \operatorname{arctg} \frac{x_2}{y_2} = \frac{\pi}{2} - \beta_2; \quad \operatorname{arctg} \frac{x_3}{y_2} = \frac{\pi}{2} - \beta_3; \quad \operatorname{arctg} \frac{x_3 - d}{y_2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \alpha_2; \quad \operatorname{arctg} \frac{x_2 - d}{y_2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_3.$$

Откуда

$$\Delta F_{x_{23}} = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta}{(2\pi)^2 d} (\Delta\beta_{23} - \Delta\alpha_{23}), \quad (5.16)$$

где  $\Delta\alpha_{23} = \alpha_3 - \alpha_2$ ;  $\Delta\beta_{23} = \beta_3 - \beta_2$  — приращения углов  $\alpha$  и  $\beta$  при перемещении по грани  $23$  в положительном направлении.

Определив силу, действующую на обе грани вместе,

$$\Delta F_x = \Delta F_{x13} = \Delta F_{x12} + \Delta F_{x23} = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta}{(2\pi)^2 d} (\Delta\beta - \Delta\alpha), \quad (5.17)$$

где  $\Delta\alpha = \Delta\alpha_{13} = \Delta\alpha_{12} + \Delta\alpha_{23}$ ;  $\Delta\beta = \Delta\beta_{13} = \Delta\beta_{12} + \Delta\beta_{23}$ , замечаем, что она также пропорциональна разности приращений углов  $\beta$  и  $\alpha$  ( $\Delta\beta_{13}$  и  $\Delta\alpha_{13}$ ) при перемещении в положительном направлении по элементу  $13$  многогранной поверхности  $S'$  (или по элементу  $13$  замещающей им поверхности  $S$ ).

Если расстояние  $\Delta l = \Delta l_{13}$  между началом и концом элемента и приращения углов при перемещении в положительном направлении по элементу ( $\Delta\beta = \Delta\beta_{13}$  и  $\Delta\alpha = \Delta\alpha_{13}$ ) стремятся к нулю, то сила на элемент поверхности  $S$  не будет отличаться от силы на соответствующий элемент поверхности  $S$  по (5.17).

Результирующая сила, соответствующая всем элементам поверхности  $S$ , будет определяться как сумма сил на эти элементы по (5.17):

$$F_x = \Sigma \Delta F_x = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta}{(2\pi)^2 d} (\Sigma \Delta\beta - \Sigma \Delta\alpha), \quad (5.18)$$

где  $\Delta\beta$  и  $\Delta\alpha$  — приращения углов  $\beta$  и  $\alpha$  при перемещении по элементу поверхности  $S$  в положительном направлении.

Если поверхность  $S$  охватывает ток  $i_\alpha$  и не охватывает ток  $i_\beta$  (рис. 5.6 и 5.7, а), то, как было пояснено в предыдущем примере,  $\Sigma \Delta\alpha = 2\pi$ ;  $\Sigma \Delta\beta = 0$ , и сила, найденная по (5.18), получается такой же, как по (5.13).

Если поверхность  $S$  охватывает ток  $i_\beta$  и не охватывает ток  $i_\alpha$  (рис. 5.7, б), то  $\Sigma \Delta\alpha = 0$ ;  $\Sigma \Delta\beta = 2\pi$ , и сила, определяемая по (5.18),  $F_x = \mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta / (2\pi d)$ , является силой, действующей на ток  $i_\beta$ . Она отличается только знаком от силы по (5.13), действующей на ток  $i_\alpha$ .

Если поверхность  $S$  охватывает оба тока  $i_\alpha$  и  $i_\beta$  (рис. 5.7, в), то  $\Sigma \Delta\alpha = 2\pi$ ;  $\Sigma \Delta\beta = 2\pi$ , и сила по (5.18)  $F_x = 0$  является силой, действующей на оба тока. Эта сила, как и следовало ожидать, равна нулю.

Наконец, если поверхность  $S$  не охватывает токи (рис. 5.7, г), то  $\Sigma \Delta\alpha = 0$ ;

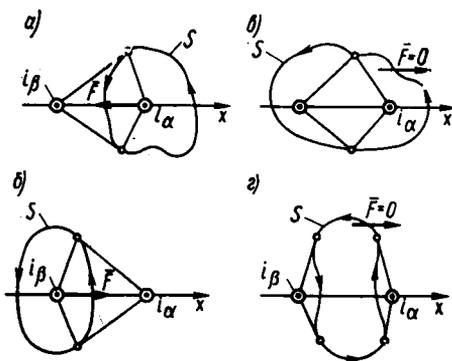


Рис. 5.7. Определение силы  $\vec{F}$ , действующей на произвольную поверхность  $S$  в поле двух линейных токов ( $i_\alpha$  и  $i_\beta$ )

$\Sigma \Delta \beta = 0$ , и сила по (5.18)  $F_x = 0$  является силой, действующей на объем, внутри которого объемная плотность ЭМС равна нулю. Эта сила, как и следовало ожидать, также всегда равна нулю.

Следует подчеркнуть, что сила взаимодействия между токами по (5.17), выраженная через натяжения, зависит только от магнитной проницаемости окружающей среды  $\mu_r$  и не зависит от магнитной проницаемости проводов с токами. Причем при выводе формулы (5.17) в отличие от (5.13) никаких допущений относительно магнитной проницаемости проводов не принималось. А это означает, что (5.17) справедливо при любой магнитной проницаемости проводов.

Правда, чтобы найти место приложения силы  $\bar{F} = \bar{q}_x F_x$ , найденной по (5.17), требуется дополнительно выразить (через натяжения на поверхности  $S$ ) момент этой силы  $M_z$  относительно произвольной точки  $A$  ( $x = a$ ,  $y = h$ ), показанной на рис. 5.6.

Найдем сначала по (4.3) момент  $\Delta M_{13}$ , действующий на элемент  $13$  поверхности  $S$ , равный моменту, действующему на грани  $12$  и  $23$  многогранной поверхности  $S'$ .

На грань  $12$  действует момент [см. 22, с. 92, форм. 40 и 44]

$$\begin{aligned} \Delta M_{12} &= \int_{y_1}^{y_2} [T_{\pi\pi}(x_1 - a) + T_{nn}(h - y)] dy = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta h}{(2\pi)^2 d} \times \\ &\times \left[ \arctg \frac{y_2}{x_1} - \arctg \frac{y_1}{x_1} + \arctg \frac{y_1}{x_1 - d} - \arctg \frac{y_2}{x_1 - d} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta h}{(2\pi)^2 d} (\Delta\beta_{12} - \Delta\alpha_{12}). \end{aligned}$$

На грань  $23$  действует момент

$$\begin{aligned} \Delta M_{23} &= \int_{x_1}^{x_3} [(h - y_2) T_{\pi\pi} + (x - a) T_{nn}] dy = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta h}{(2\pi)^2 d} \times \\ &\times \left[ \arctg \frac{x_2}{y_2} - \arctg \frac{x_3}{y_3} + \arctg \frac{x_3 - d}{y_2} - \arctg \frac{x_2 - d}{y_2} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta h}{(2\pi)^2 d} (\Delta\beta_{23} - \Delta\alpha_{23}). \end{aligned}$$

На обе грани вместе и на элемент  $13$  поверхности  $S$  действует момент

$$\Delta M_{13} = \Delta M_{12} + \Delta M_{23} = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta h}{(2\pi)^2 d} (\Delta\beta_{13} - \Delta\alpha_{13}).$$

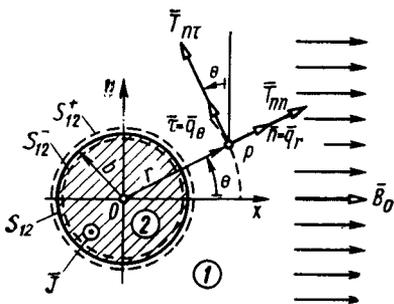


Рис. 5.8. Электромагнитные силы, действующие на провод с током в равномерном магнитном поле

Результирующий момент, действующий на всю поверхность  $S$ ,

$$M_z = \frac{\mu_0 \mu_r i_\alpha i_\beta h}{(2\pi)^2 d} (\Sigma \Delta\beta - \Sigma \Delta\alpha), \quad (5.19)$$

где  $\Delta\beta$  и  $\Delta\alpha$  — приращения углов  $\beta$  и  $\alpha$  при перемещении по элементам поверхности  $S$  в положительном направлении. Момент относительно точки  $A$  можно представить в виде произведения силы  $F_x$  на плечо  $r$ :

$$M_z = F_x r$$

(длину перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на направление силы  $F_x$ ). Откуда при известных  $M_z$  по (5.19) и  $F_x$  по (5.18) легко найти плечо

$$r = M_z / F_x = h.$$

Как и следовало ожидать, сила находится на расстоянии  $r = h$  от точки  $A$ . Следовательно, ее направление совпадает с осью  $x$ , на которой лежат токи  $i_\alpha$  и  $i_\beta$ .

**5.2.3. Магнитный провод с током во внешнем равномерном магнитном поле.** Круглый провод 2 радиуса  $b$ , имеющий постоянную магнитную проницаемость  $\mu_{2r}$ , помещен в среду 1 с магнитной проницаемостью  $\mu_{1r}$ . В среде 1 создано внешнее магнитное поле, которое на достаточном удалении от провода делается равномерным и имеет индукцию  $B_0 = B_{0x}$  (рис. 5.8). Магнитное поле нормально к оси провода  $z$ . По проводу 2 протекает ток  $i$ , распределенный по сечению провода равномерно с плотностью  $\bar{J} = J_z \bar{q}_z$ , где  $J_z = i / (\pi b^2)$ .

Определить силу  $F_y$ , испытываемую проводом, и ее составляющие.

▲ В силу линейности задачи результирующее поле можно представить в виде суммы внешнего поля, искаженного внесением в него провода 2, и поля от тока  $i$  в проводе.

Внешнее поле после внесения в него провода 2 можно найти методом разделения переменных в цилиндрической системе координат  $r, \theta$  [21, с. 78—79]. Решение относительно скалярного магнитного потенциала в средах 1 и 2 представляется таким образом:

$$\varphi_1 = -(c_1 r - d_1/r) \cos \theta; \quad \varphi_2 = -(c_2 r - d_2/r) \cos \theta.$$

Откуда компоненты напряженности магнитного поля

$$H_{1r} = -\partial\varphi_1/\partial r = (c_1 + d_1/r^2) \cos \theta; \quad H_{1\theta} = -\partial\varphi_1/(r\partial\theta) = -(c_1 - d_1/r^2) \sin \theta;$$

$$H_{2r} = (c_2 + d_2/r^2) \cos \theta; \quad H_{2\theta} = -(c_2 - d_2/r^2) \sin \theta.$$

Исходя из того, что при  $x = \infty$ ,  $y = 0$  и  $r = \infty$ ,  $\theta = 0$  поле становится равномерным [ $H_{1x} = H_{1r} = H_0 = B_0/(\mu_0\mu_{1r})$ ], заключаем  $c_1 = H_0$ . Так как при  $r = 0$  потенциал  $\varphi_2$  должен быть конечным, то  $d_2 = 0$ . Исходя из граничных условий на поверхности  $r = b$  для индукции ( $B_{1r} = B_{2r}$ ) и для напряженности магнитного поля ( $H_{1\theta} = H_{2\theta}$ ), находим

$$d_1 = \frac{\mu_{2r} - \mu_{1r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} b^2 H_0; \quad c_2 = \frac{2\mu_{1r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} H_0.$$

Напряженность поля от тока  $i$  при  $r = b$

$$H_{i0} = i/(2\pi r); \quad H_{ir} = 0.$$

Компоненты напряженности и индукции результирующего поля при  $r = b$  на поверхности  $S_{12}^+$  в среде 1, охватывающей провод 2 целиком,

$$H_{1r\Sigma} = H_0 k_2 \cos \theta; \quad H_{1\theta\Sigma} = H_{i\theta} - H_0 k_1 \sin \theta;$$

$$B_{1r\Sigma} = \mu_0 \mu_{1r} H_{1r\Sigma}; \quad B_{1\theta\Sigma} = \mu_0 \mu_{1r} H_{1\theta\Sigma},$$

где

$$k_1 = 2\mu_{1r}/(\mu_{1r} + \mu_{2r}); \quad k_2 = 2\mu_{2r}/(\mu_{1r} + \mu_{2r}).$$

Компоненты напряженности и индукции результирующего поля при  $r = b$  на поверхности  $S_{12}^-$  в среде 2, охватывающей ток провода и не охватывающей границу между средами 1 и 2,

$$H_{2r\Sigma} = H_0 k_1 \cos \theta; \quad H_{2\theta\Sigma} = H_{\theta i} - H_0 k_1 \sin \theta;$$

$$B_{2r\Sigma} = \mu_0 \mu_{2r} H_{2r\Sigma}; \quad B_{2\theta\Sigma} = \mu_0 \mu_{2r} H_{2\theta\Sigma}.$$

Нормальные и тангенциальные составляющие натяжений на поверхности  $S_{12}^+$  в среде 1, найденные по (4.24),

$$T_{nn1} = \frac{\mu_0 \mu_{1r}}{2} [H_0^2 k_2^2 \cos^2 \theta - (H_{\theta i}^2 - 2H_{\theta i} H_0 k_1 \sin \theta + H_0^2 k_1^2 \sin^2 \theta)];$$

$$T_{n\tau 1} = \mu_0 \mu_{1r} (H_{\theta i} H_0 k_2 \cos \theta - H_0^2 k_1 k_2 \cos \theta \sin \theta).$$

Нормальные и тангенциальные составляющие натяжений на поверхности  $S_{12}^-$  в среде 2;

$$T_{nn2} = \frac{\mu_0 \mu_{2r}}{2} [H_0^2 k_1^2 \cos^2 \theta - (H_{\theta i}^2 - 2H_{\theta i} H_0 k_1 \sin \theta + H_0^2 k_1^2 \sin^2 \theta)];$$

$$T_{n\tau 2} = \mu_0 \mu_{2r} (H_{\theta i} H_0 k_1 \cos \theta - H_0^2 k_1^2 \cos \theta \sin \theta).$$

Как видно из рис. 5.8, силу в направлении оси  $y$ , действующую на элемент цилиндрической поверхности  $ds = r d\theta$  можно выразить через составляющие натяжений:

$$dF_y = (T_{nn} \sin \theta + T_{n\tau} \cos \theta) r d\theta.$$

Полную силу, действующую на провод во внешнем поле, находят путем интегрирования элементарной силы  $dF_y$  по поверхности  $S_{12}^+$  в среде 1:

$$F_{y1} = 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (T_{nn1} \sin \theta + T_{\tau\tau1} \cos \theta) b d\theta = B_0 i. \quad (5.20)$$

Иными словами, сила, действующая на единицу длины провода, есть произведение тока провода  $i$  на индукцию  $B_0$  внешнего равномерного поля при достаточном удалении от провода. Она не зависит ни от магнитной проницаемости самого провода  $\mu_{2r}$ , ни от магнитной проницаемости среды  $\mu_{1r}$ , в которую он помещен. Этот результат не отличается от (5.12) и совпадает с экспериментальными данными.

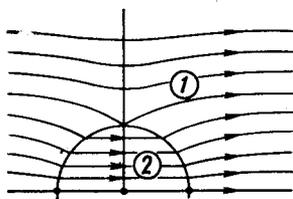


Рис. 5.9. Искажение равномерного магнитного поля в среде 1 с магнитной проницаемостью  $\mu_1$  после размещения в ней провода 2 с магнитной проницаемостью  $\mu_2$  (случай  $\mu_2/\mu_1=3$ )

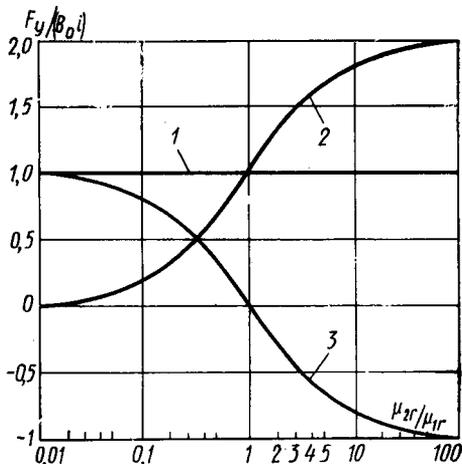


Рис. 5.10. Зависимость электромагнитных сил, действующих на провод с током  $i$  в равномерном поле с индукцией  $B_0$  от магнитных проницаемостей провода  $\mu_2$  и окружающего пространства  $\mu_1$ :

1 — результирующая сила; 2 — сила, действующая на ток провода; 3 — сила, действующая на границу между проводом и окружающим пространством

Силу, действующую непосредственно на ток провода, находят путем интегрирования элементарной силы  $dF_y$  по поверхности  $S_{12}^-$  в среде 2:

$$F_{y2} = 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (T_{nn2} \sin \theta + T_{\tau\tau2} \cos \theta) b d\theta = \frac{2\mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} B_0 i. \quad (5.21)$$

Ту же силу можно выразить при  $\text{grad } \mu_{2r} = 0$  через объемную плотность электромагнитной силы, действующей во внешнем магнитном поле на токи  $\vec{j} dV$  в элементах объема провода. Нетрудно

убедиться в том, что внешнее поле внутри провода равномерно (рис. 5.9) и имеет индукцию

$$B_2 = \mu_0 \mu_{2r} \sqrt{H_{2r}^2 + H_{2\theta}^2} = \frac{2\mu_0 \mu_{1r} \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} H_0 = \frac{2\mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} B_0 = \text{const.}$$

Плотность тока внутри провода  $J = J_z = i/(\pi b^2) = \text{const}$ , поэтому объемная плотность силы внутри провода по (4.46) равна  $B_2 J$ , а полная сила, действующая на ток единицы длины провода, пропорциональна его сечению:

$$F_{y2} = B_2 J (\pi b^2) = \frac{2\mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} B_0 i. \quad (5.22)$$

Как видно, полученная сила совпадает с (5.21).

На границу между проводом 2 и средой 1, где магнитная проницаемость изменяется скачкообразно от  $\mu_{2r}$  до  $\mu_{1r}$ , действует сила

$$F_{y12} = F_{y1} - F_{y2} = \frac{\mu_{1r} - \mu_{2r}}{\mu_{1r} + \mu_{2r}} B_0 i. \quad (5.23)$$

При  $\mu_{1r} = 1$ ,  $\mu_{2r} = \infty$ , когда  $B_2 = 2B_0$ , имеем

$$F_{y2} = 2B_0 i, \quad F_{y12} = -B_0 i, \quad F_{y1} = F_{y2} + F_{y12} = B_0 i;$$

при  $\mu_{1r} = 1$ ,  $\mu_{2r} = 1$ , когда  $B_2 = B_0$ ,

$$F_{y2} = B_0 i, \quad F_{y12} = 0, \quad F_{y1} = F_{y2} + F_{y12} = B_0 i;$$

при  $\mu_{1r} = \infty$ ,  $\mu_{2r} = 1$ , когда  $B_2 = 0$ ,

$$F_{y2} = 0, \quad F_{y12} = B_0 i, \quad F_{y1} = F_{y2} + F_{y12} = B_0 i.$$

Зависимость этих сил от соотношения  $\mu_{2r}/\mu_{1r}$  между магнитными проницаемостями представлена в логарифмическом масштабе на рис. 5.10.

### 5.3. Электромагнитные силы, действующие на токи, и магнитные тела в магнитном поле

5.3.1. Экранированный провод с током во внешнем равномерном магнитном поле. Круглый провод 1 радиусом  $b$ , имеющий постоянную магнитную проницаемость  $\mu_{1r}$ , заключен в трубу 2 с внешним радиусом  $a$  и магнитной проницаемостью  $\mu_{2r}$ , которая играет роль магнитного экрана (рис. 5.11). Провод 1 и труба 2 помещены в среду 3 с магнитной проницаемостью  $\mu_{3r}$ . В среде 3 создано внешнее магнитное поле, которое при достаточном удалении от провода имеет индукцию  $B_0 = B_{0x}$ . Магнитное поле нормально к оси провода  $z$ . По проводу 1 протекает ток  $i$ , распределенный по сечению провода равномерно с плотностью  $\bar{J} = J\bar{q}_z$ , где  $J = i/(\pi b^2)$ .

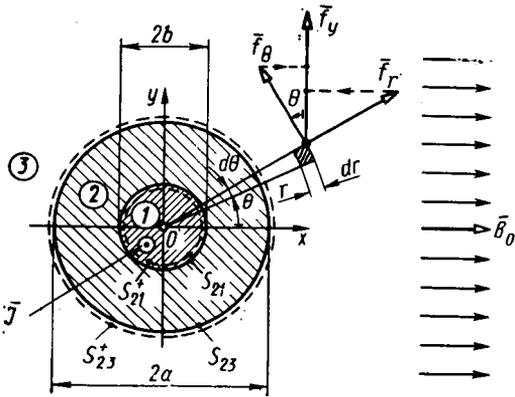


Рис. 5.11. К расчету электромагнитных сил, действующих в равномерном магнитном поле в области 3 на провод 1 с током и на трубу 2, охватывающую этот провод

1 и трубы 2 можно определить методом разделения переменных в цилиндрической системе координата  $r, \theta$  [21, с. 78]. Решение задачи относительно скалярного магнитного потенциала в средах 1—3 можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -(c_1 r - d_1/r) \cos \theta; \quad \varphi_2 = -(c_2 r - d_2/r) \cos \theta; \\ \varphi_3 &= -(c_3 r - d_3/r) \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Откуда для компонент напряженности, индукции и намагниченности имеем

$$\left. \begin{aligned} H_{kr} &= -\partial\varphi_k/\partial r = (c_k + d_k/r^2) \cos \theta; \\ H_{k\theta} &= -\partial\varphi_k/(r\partial\theta) = (c_k - d_k/r^2) \sin \theta; \\ B_{kr} &= \mu_0 \mu_{kr} H_{kr}, \quad B_{k\theta} = \mu_0 \mu_{kr} H_{k\theta}; \\ M_{kr} &= (\mu_{kr} - 1) H_{kr}, \quad M_{k\theta} = (\mu_{kr} - 1) H_{k\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

где  $k \in 1-3$ .

Исходя из того, что в области 3 при  $x = \infty, y = 0, r = \infty$  и  $\theta = 0$  поле становится равномерным, т. е.  $H_{3x} = H_{3r} = H_0 = B_0/(\mu_0 \mu_{3r})$ , заключаем, что  $c_3 = H_0$ . Так как при  $r = 0$  в области 1 потенциал  $\varphi_1$  должен быть конечным, имеем  $d_1 = 0$ . Исходя из граничных условий для нормальных составляющих индукции и тангенциальных составляющих напряженности на поверхности  $r = b$  ( $B_{1r} = B_{2r}, H_{1\theta} = H_{2\theta}$ ) и на поверхности  $r = a$  ( $B_{2r} =$

Определить силы:  $F_1$ , действующую на провод 1 с током;  $F_2$ , действующую на экранирующую трубу 2; суммарную силу  $F_{\Sigma} = F_1 + F_2$ , действующую на экранированный провод.

В силу линейности задачи результирующее поле можно представить в виде суммы внешнего поля в среде 3, искаженного внесением в него провода 1 и трубы 2, и поля от тока  $i$ .

Внешнее поле после внесения в него провода

1 и трубы 2 можно определить методом разделения переменных в цилиндрической системе координата  $r, \theta$  [21, с. 78]. Решение задачи относительно скалярного магнитного потенциала в средах 1—3 можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -(c_1 r - d_1/r) \cos \theta; \quad \varphi_2 = -(c_2 r - d_2/r) \cos \theta; \\ \varphi_3 &= -(c_3 r - d_3/r) \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Откуда для компонент напряженности, индукции и намагниченности имеем

$$\left. \begin{aligned} H_{kr} &= -\partial\varphi_k/\partial r = (c_k + d_k/r^2) \cos \theta; \\ H_{k\theta} &= -\partial\varphi_k/(r\partial\theta) = (c_k - d_k/r^2) \sin \theta; \\ B_{kr} &= \mu_0 \mu_{kr} H_{kr}, \quad B_{k\theta} = \mu_0 \mu_{kr} H_{k\theta}; \\ M_{kr} &= (\mu_{kr} - 1) H_{kr}, \quad M_{k\theta} = (\mu_{kr} - 1) H_{k\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

где  $k \in 1-3$ .

Исходя из того, что в области 3 при  $x = \infty, y = 0, r = \infty$  и  $\theta = 0$  поле становится равномерным, т. е.  $H_{3x} = H_{3r} = H_0 = B_0/(\mu_0 \mu_{3r})$ , заключаем, что  $c_3 = H_0$ . Так как при  $r = 0$  в области 1 потенциал  $\varphi_1$  должен быть конечным, имеем  $d_1 = 0$ . Исходя из граничных условий для нормальных составляющих индукции и тангенциальных составляющих напряженности на поверхности  $r = b$  ( $B_{1r} = B_{2r}, H_{1\theta} = H_{2\theta}$ ) и на поверхности  $r = a$  ( $B_{2r} =$

$= B_{3r}, H_{2\theta} = H_{3\theta}$ ), находим с помощью (5.25) остальные постоянные:

$$\left. \begin{aligned} d_2 &= 2\mu_{3r} H_0 (\mu_{2r} - \mu_{1r}) a^2 b^2 / D; \\ c_2 &= -2\mu_{3r} H_0 (\mu_{2r} + \mu_{1r}) a^2 / D; \\ c_1 &= -4\mu_{3r} \mu_{2r} H_0 a^2 / D; \\ d_3 &= H_0 a^2 \{ 1 + 2\mu_{3r} [(\mu_{2r} + \mu_{1r}) a^2 + (\mu_{2r} + \mu_{1r}) b^2] / D \}, \end{aligned} \right\} (5.26)$$

где  $D = b^2 (\mu_{2r} - \mu_{3r}) (\mu_{2r} - \mu_{1r}) - a^2 (\mu_{2r} + \mu_{3r}) (\mu_{2r} + \mu_{1r})$ .

Напряженности поля, индукции и намагниченности от тока  $i$ : в проводе 1 при  $r < b$

$$\begin{aligned} H_1^i &= H_{1\theta}^i = \pi r^2 J / (2\pi r) = Jr/2; & B_1^i &= B_{1\theta}^i = \mu_0 \mu_{1r} H_{1\theta}^i; \\ M_{1\theta}^i &= (\mu_{1r} - 1) H_{1\theta}^i; \end{aligned}$$

в трубе 2 при  $b < r < a$

$$H_{2\theta}^i = i / (2\pi r); \quad B_{2\theta}^i = \mu_0 \mu_{2r} H_{2\theta}^i; \quad M_{2\theta}^i = (\mu_{2r} - 1) H_{2\theta}^i; \quad (5.27)$$

в среде 3 при  $r > a$

$$H_{3\theta}^i = i / (2\pi r); \quad B_{3\theta}^i = \mu_0 \mu_{3r} H_{3\theta}^i; \quad M_{3\theta}^i = (\mu_{3r} - 1) H_{3\theta}^i.$$

Компоненты напряженности, индукции и намагниченности результирующего поля в  $k$ -й области складываются из составляющих по (5.25) и (5.27):

$$\left. \begin{aligned} H_{kr\Sigma} &= H_{kr} + H_{kr}^i; & H_{k\theta\Sigma} &= H_{k\theta} + H_{k\theta}^i; \\ B_{kr\Sigma} &= B_{kr} + B_{kr}^i; & B_{k\theta\Sigma} &= B_{k\theta} + B_{k\theta}^i; \\ M_{kr\Sigma} &= M_{kr} + M_{kr}^i; & M_{k\theta\Sigma} &= M_{k\theta} + M_{k\theta}^i. \end{aligned} \right\} (5.28)$$

Электромагнитные силы рассчитаем двумя способами: 1) через объемную и поверхностную плотности ЭМС; 2) через натяжения.

Для определения суммарной силы на провод 1 и трубу 2 через натяжения нужно охватить их поверхностью  $S_{23}^+$  ( $r = a$ ) расположенной в среде 3; для определения силы на трубу 2 — охватить ее снаружи поверхностью  $S_{23}^+$  и изнутри поверхностью  $S_{21}^+$  ( $r = b$ ), расположенной в среде 1. Соответственно для определения силы на провод 1 нужно охватить его поверхностью  $S_{21}^+$  (рис. 5.11)\*.

\* Для экспериментального определения таких сил необходимо использовать в качестве среды 3 жидкость с магнитной проницаемостью  $\mu_{3r}$ . Зазор между трубой 2 и проводом 1 нужно заполнить жидкостью или газом с магнитной проницаемостью  $\mu_{1r}$ . Это наиболее просто осуществимо при  $\mu_{1r} = \mu_{3r} = 1$ , когда пространство 3 и зазор между трубой 2 и проводом 1 могут быть заполнены воздухом.

При таком выделении объема провода  $l$  магнитная проницаемость в его пределах постоянна ( $\mu_{1r} = \text{const}$ ) и не претерпевает разрывов. Поэтому в пределах провода  $\text{grad } \mu_{1r} = 0$  и объемная плотность ЭМС по (4.46) определяется членом  $[\bar{J}\bar{B}]$ . Составляющие этой силы по (5.25) — (5.28)

$$\begin{aligned} f_r &= -JB_{1\theta\Sigma} = -J\mu_0\mu_{1r}(Jr/2 - c_1 \sin \theta); \\ f_\theta &= JB_{1r\Sigma} = J\mu_0\mu_{1r}c_1 \cos \theta. \end{aligned}$$

Составляющая объемной плотности силы в проводе  $l$  по оси  $y$ :

$$f_y = f_\theta \cos \theta + f_r \sin \theta.$$

Сила, действующая на единицу длины провода  $l$ ,

$$F_1 = 2 \int_0^b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_y r dr d\theta = -4\mu_{1r}\mu_{2r}a^2(B_0 i)/D. \quad (5.29)$$

В объеме, занятом трубой 2, между поверхностями  $S_{23}^+$  и  $S_{21}^+$  располагаются две поверхности разрыва магнитной проницаемости:  $S_{23}$  ( $r = a$ ) и  $S_{21}$  ( $r = b$ ). В зоне между этими поверхностями магнитная проницаемость  $\mu_{2r} = \text{const}$  и плотность тока  $\bar{J} = 0$ . Поэтому  $\text{grad } \mu_{2r} = 0$  и объемная плотность ЭМС  $\bar{f} = 0$ . Следовательно, сила на трубу 2 складывается из сил  $F_{S(23)}$  и  $F_{S(21)}$ , действующих на поверхности разрыва магнитной проницаемости (соответственно  $S_{23}$  и  $S_{21}$ ). Как было показано, на поверхности разрыва магнитной проницаемости действует только поверхностная плотность ЭМС по (4.33). На поверхности  $S_{23}$  ( $r = a$ ), где внешняя нормаль к области 2 совпадает с радиальным ортом ( $\bar{n}_3 = \bar{q}_r$ ), поверхностная плотность ЭМС по (4.33)

$$\bar{f}_{S(23)} = \bar{q}_r f_{Sr(23)} = \left[ \frac{\mu_{2r} - \mu_{3r}}{\mu_0 \mu_{2r} \mu_{3r}} B_{3r\Sigma}^2 - \mu_0 (\mu_{3r} - \mu_{2r}) H_{3\theta\Sigma}^2 \right] \bar{q}_r.$$

Сила, действующая на поверхность  $S_{23}$ , выражается через проекцию  $\bar{f}_{S23}$  на ось  $y$ :

$$F_{S(23)} = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{y(23)} a d\theta,$$

где  $f_{y(23)} = f_{Sr(23)} \sin \theta$ , откуда

$$F_{S(23)} = (\mu_{2r} - \mu_{3r}) [(\mu_{2r} + \mu_{1r}) a^2 + (\mu_{2r} - \mu_{1r}) b^2] B_0 i / D.$$

Соответственно на поверхности  $S_{21}$  ( $r = b$ ), где внешняя нормаль к области 2 направлена в противоположную сторону по отношению к радиальному орту ( $\bar{n}_1 = -\bar{q}_r$ ), поверхностная плотность ЭМС по (4.33)

$$\bar{f}_{S(21)} = \bar{q}_r f_{Sr(21)} = \left[ \frac{\mu_{2r} - \mu_{1r}}{\mu_0 \mu_{1r} \mu_{2r}} B_{1r\Sigma}^2 - \mu_0 (\mu_{1r} - \mu_{2r}) H_{1\theta\Sigma}^2 \right] (-\bar{q}_r).$$

Сила, действующая на поверхность  $S_{21}$ , выражается через проекцию  $\vec{f}_{S(21)}$  на ось  $y$ :

$$F_{S(21)} = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_y(21) b d\theta,$$

где  $f_{y21} = f_{Sr(21)} \sin \theta$ , откуда

$$F_{S(21)} = 2\mu_2 \cdot (\mu_{1r} - \mu_{2r}) a^2 B_0 i / D.$$

Полная сила, действующая на трубу 2,

$$\begin{aligned} F_2 &= F_{S(32)} + F_{S(21)} = \\ &= (1 + 4\mu_{1r} \mu_{2r} a^2 / D) B_0 i. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Суммарная сила на провод 1 и трубу 2 складывается из силы  $F_1$  по (5.29) и силы  $F_2$  по (5.30):

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 = B_0 i. \quad (5.31)$$

Как и следовало ожидать, эта сила независимо от значений  $\mu_{1r}$ ,  $\mu_{2r}$ ,  $\mu_{3r}$  всегда равна силе, действующей на заданный ток  $i$ , если поместить его в заданное равномерное поле  $B_0$ . От соотношения между  $\mu_{1r}$ ,  $\mu_{2r}$ ,  $\mu_{3r}$  зависит лишь распределение силы (рис. 5.12) между проводом 1 и трубой 2.

В частном случае при  $\mu_{3r} = \mu_{1r} = 1$  результаты расчетов по формулам (5.29)—(5.31) подтверждены экспериментально. В этом частном случае на долю провода 1 приходится относительная сила

$$\frac{F_1}{F_{\Sigma}} = \frac{F_1}{B_0 i} = \frac{4\mu_{2r} a^2}{a^2 (\mu_{2r} + 1)^2 - b^2 (\mu_{2r} - 1)^2}.$$

При  $\mu_{2r} = \infty$  относительная сила  $F_1/(B_0 i) = 0$  и, следовательно,  $F_2/(B_0 i) = 1$ , т. е. вся сила приходится на экранирующую трубу 2. При  $\mu_{2r} = 1$  сила  $F_1/(B_0 i) = 1$  и, следовательно,  $F_2/(B_0 i) = 0$ , т. е. вся сила приходится на провод с током  $i$ .

В общем случае (при произвольных  $\mu_{1r}$ ,  $\mu_{2r}$ ,  $\mu_{3r}$ ) полученные результаты в виде уравнений (5.29)—(5.31) могут быть подтверждены расчетом тех же сил через натяжения на разделительных поверхностях (4.24).

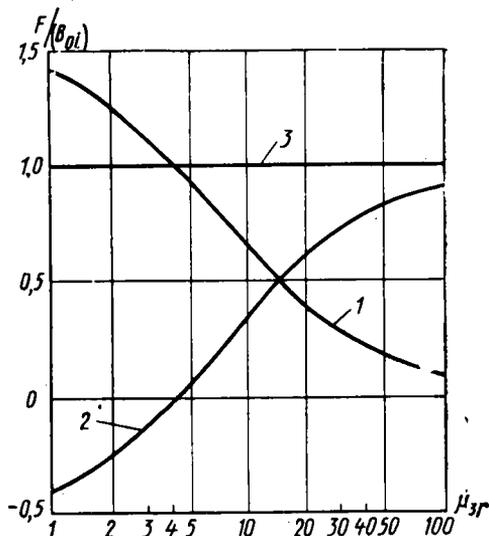


Рис. 5.12. Зависимость электромагнитных сил, действующих на магнитную систему, по рис. 5.11, от магнитной проницаемости  $\mu_{3r}$ :

$$\mu_{1r} = 5, \mu_{2r} = 10, b/a = 1/\sqrt{2};$$

1 — относительная сила на провод с током  $F_1/(B_0 i)$ ; 2 — относительная сила  $F_2/(B_0 i)$  на провод 1 и трубу 2; 3 — суммарная относительная сила  $F_{\Sigma}/(B_0 i)$  на провод 1 и трубу 2

Силу, действующую на провод 1, можно найти путем интегрирования натяжений, приложенных к элементам поверхности  $S_{21}^+$ . При этом учитываются только проекции натяжений на ось  $y$ :

$$F_1 = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_{ny} b d\theta = -4\mu_{1r}\mu_{2r} a^2 (B_0 i) / D, \quad (5.32)$$

$$\text{где } T_{ny} = T_{nr} \sin \theta + T_{n\theta} \cos \theta; \quad T_{nr} = \frac{1}{2\mu_0 \mu_{1r}} (B_{1r\Sigma}^2 - B_{1\theta\Sigma}^2);$$

$$T_{n\theta} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{1r}} B_{1r\Sigma} B_{1\theta\Sigma}.$$

Суммарную силу, действующую на провод 1 и экранирующую трубу 2, определяют путем интегрирования натяжений, приложенных к элементам поверхности  $S_{23}^+$ . При этом также учитываются только проекции натяжений на ось  $y$ :

$$F_\Sigma = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_{ny} a d\theta = B_0 i, \quad (5.33)$$

$$\text{где } T_{ny} = T_{nr} \sin \theta + T_{n\theta} \cos \theta; \quad T_{nr} = \frac{1}{2\mu_0 \mu_{3r}} (B_{3r\Sigma}^2 - B_{3\theta\Sigma}^2);$$

$$T_{n\theta} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{1r}} B_{3r\Sigma} B_{3\theta\Sigma}.$$

Силу, действующую на трубу 2, определяют как разность сил  $F_\Sigma$  и  $F_1$ :

$$F_2 = F_\Sigma - F_1 = (1 + 4\mu_{1r}\mu_{2r} a^2 / D) B_0 i. \quad (5.34)$$

Сопоставляя (5.29) и (5.32), (5.31) и (5.33), (5.30) и (5.34), видим, что силы, найденные через натяжения [см. (4.24)], как и следовало ожидать, полностью совпадают с силами, найденными через объемную плотность ЭМС [см. (4.46)].

**5.3.2. Силы взаимодействия между линейным током и магнитным цилиндром.** Рассмотрим магнитную систему, состоящую из линейного тока  $i$  и магнитного круглого цилиндра, помещенных в магнитную среду 1 (рис. 5.13, а). Ток  $i$  бесконечно протяжен, направлен вдоль оси  $z$  и расположен в точке А с координатами  $x = r_A$ ,  $y = 0$ . Круглый цилиндр 2 также бесконечно протяжен. Его ось совпадает с осью  $z$  выбранной системы координат и параллельна проводу стоком  $i$ . Радиус цилиндра 2 равен  $r_1$ . Цилиндр 2 обладает относительной магнитной проницаемостью  $\mu_{2r}$ , окружающая среда 1 — магнитной проницаемостью  $\mu_{1r}$ . Радиус  $r_i$  провода с током  $i$  весьма мал по сравнению с радиусом цилиндра  $r_i \ll r_1$ .

Определяется сила  $F_{ix}$  на провод с током  $i$ , равная по абсолютной величине силе  $F_{2x}$ , которая приложена к магнитному цилиндру 2.

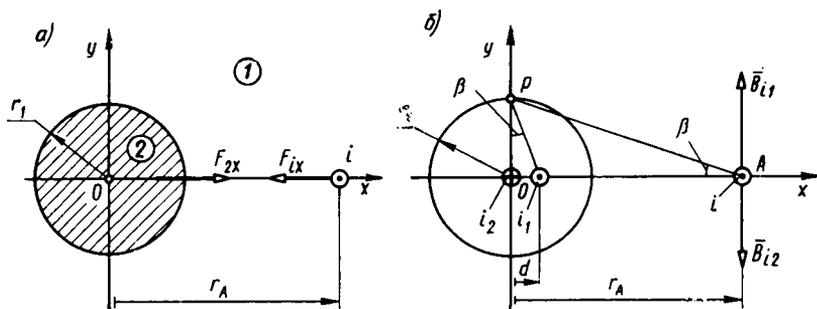


Рис. 5.13. К определению силы взаимодействия между линейным током и магнитным цилиндром 2

Поле тока  $i$  с учетом влияния магнитного цилиндра можно найти методом зеркальных отображений [21, с. 64]. Согласно этому методу влияние магнитного цилиндра на поле вне цилиндра воспроизводится двумя отображенными токами (рис. 5.13, б):

1) током, расположенным в точке  $B$ , обратной точке  $A$  относительно наружной поверхности цилиндра:

$$i_1 = k_0 i, \quad (5.35)$$

2) током, расположенным в центре цилиндра (точка  $O$ ):

$$i_2 = -k_0 i. \quad (5.36)$$

Здесь  $k_0 = (\mu_{2r} - \mu_{1r}) / (\mu_{2r} + \mu_{1r})$ .

Причем при определении поля вне цилиндра, образованного как самим током  $i$ , так и отображенными токами  $i_1$  и  $i_2$ , внутренность цилиндра должна быть заполнена средой с магнитной проницаемостью  $\mu_{1r}$ . Таким образом, все токи оказываются расположенными в однородной изотропной среде  $I$  с магнитной проницаемостью  $\mu_{1r}$ . Соответственно для определения поля внутри цилиндра нужно поместить в точке  $A$  кроме самого тока  $i$  еще и дополнительный отраженный ток  $i_3 = k_0 i$ , а также заменить среду  $I$  вне цилиндра средой с магнитной проницаемостью  $\mu_{2r}$  (такой же, как внутри цилиндра). На рис. 5.14 показана картина поля вне и внутри цилиндра 2 при  $\mu_{2r} / \mu_{1r} = 3$ , построенная указанным способом.

Силу  $F_{ix}$ , действующую на ток  $i$ , можно найти как силу на этот ток в магнитном поле, образованном отображенными токами  $i_1$  и  $i_2$ . Индукция магнитного поля тока  $i_1$  в месте расположения тока  $i$  (точка  $A$ ) имеет только составляющую по оси  $y$  \*;

$$B_{i1y} = i_1 \mu_0 \mu_{1r} / [2\pi (r_A - d)] = k_0 i / [2\pi (r_A - d)],$$

\* Поскольку ранее было показано, что сила, действующая на провод с током, не зависит от его магнитной проницаемости, здесь проницаемость провода принимается равной магнитной проницаемости окружающей среды  $\mu_{1r}$ .

где  $d = r_1^2/r_A$  — расстояние от центра цилиндра до точки  $B$ , обратной точке  $A$  относительно наружной поверхности цилиндра с радиусом  $r_1$ . Индукция магнитного поля тока  $i_2$  в месте расположения тока  $i$  (точка  $A$ ) имеет также только составляющую по оси  $y$ :

$$B_{i_2y} = i_2 \mu_0 \mu_{1r} / (2\pi r_A) = -k_0 i / (2\pi r_A).$$

Суммарная индукция от токов  $i_1$  и  $i_2$  в точке  $A$ :

$$B_{i\Sigma y} = B_{i_1y} + B_{i_2y} = ik_0 r_1^2 \mu_0 \mu_{1r} / [2\pi r_A (r_A^2 - r_1^2)].$$

Силу, действующую на единицу длины провода с током  $i$ , выразим через объемную плотность ЭМС в поле токов  $i_1$  и  $i_2$ :

$$F_{ix} = \int_V f_x dV = f_x \pi r_1^2 = -i^2 k_0 \mu_0 \mu_{1r} r_1^2 / [2\pi r_A (r_A^2 - r_1^2)], \quad (5.37)$$

где  $f_x = B_{i\Sigma z} J_y - B_{i\Sigma y} J_z = -B_{i\Sigma y} J_z$ ;  $J_z = i / (\pi r_1^2)$ .

Сила  $F_{ix}$  отрицательна (направлена в сторону цилиндра) в случае

$$k_0 = \frac{\mu_{2r} - \mu_{1r}}{\mu_{2r} + \mu_{1r}} > 0 \text{ или } \mu_{2r} > \mu_{1r}.$$

При  $k_0 < 0$  или  $\mu_{2r} < \mu_{1r}$  сила  $F_{ix}$  направлена в противоположную сторону. Для выражения силы  $F_{ix}$  в относительной форме примем в качестве базисной силу взаимодействия между двумя токами

$i$ , расположенными на расстоянии  $r_1$  в среде с магнитной проницаемостью  $\mu_{1r}$ ,

$$F_0 = \mu_0 \mu_{1r} i^2 / (2\pi r_1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_{*ix} &= F_{ix} / F_0 = \\ &= -\frac{k_0}{r_{*A} (r_{*A}^2 - 1)}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

где  $r_{*A} = r_A / r_1$ .

Зависимость  $F_{*ix}$  от  $r_{*A}$  при различных значениях  $|k_0|$  в пределах  $0 < |k_0| < 1$  показана на рис. 5.15.

Возникает вопрос, работоспособна ли формула (5.37) в случае,

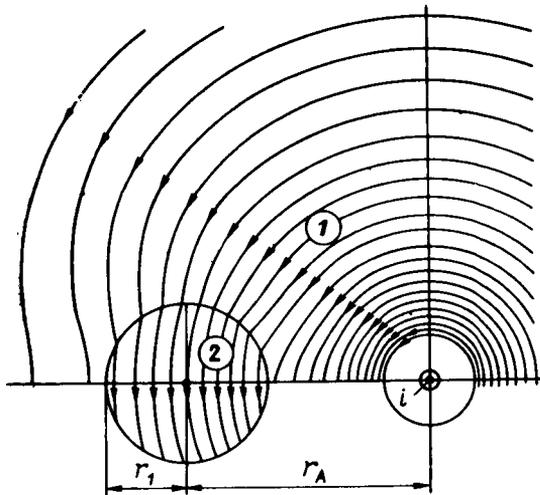


Рис. 5.14. Картина магнитного поля тока  $i$ , расположенного в среде 1, с учетом влияния магнитного цилиндра 2 при  $\mu_{2r}/\mu_{1r} = 3$

когда сечение провода с током  $i$  имеет конечные размеры. С этой целью ток  $i$  в сечении провода был представлен в виде суммы элементарных токов и было найдено уточненное значение силы, действующей на провод с радиусом  $r_n$ . При этом оказалось, что даже в случае  $r_1 = r_n$  и  $r_A = 2r_1$  уточненная сила превосходила силу по (5.37) всего в 1,0078 раза, т. е. практически совпадала с ней.

**5.3.3. Силы, действующие на линейный ток и магнитный цилиндр в равномерном магнитном поле.** Рассмотрим магнитную систему, состоящую из линейного тока  $i$  и магнитного круглого цилиндра 2, помещенных в среду 1 (рис. 5.16, а). Ток  $i$  бесконечно протяжен, направлен вдоль оси  $z$  и расположен в точке с координатами  $x = r_A$ ,  $y = 0$ . Круглый цилиндр 2 также бесконечно протяжен. Его ось совпадает с осью  $z$  выбранной системы координат и параллельна проводу с током  $i$ .

Радиус цилиндра равен  $r_1$ . Цилиндр 2 обладает относительной магнитной проницаемостью  $\mu_{2r}$ ; окружающая среда 1 — проницаемостью  $\mu_{1r}$ . В среде 1 создано внешнее магнитное поле, которое при достаточном удалении от цилиндра 2 становится равномерным и имеет индукцию  $B_0 = B_{0x}$ . Магнитное поле — двумерно и нормально к оси  $z$ . Радиус  $r_i$  провода с током  $i$  весьма мал по сравнению с радиусом цилиндра  $r_i \ll r_1$ . Определить силы:  $F_{iy}$ , действующую на провод с током  $i$  во внешнем магнитном поле;  $F_{2y}$ , действующую на цилиндр 2;

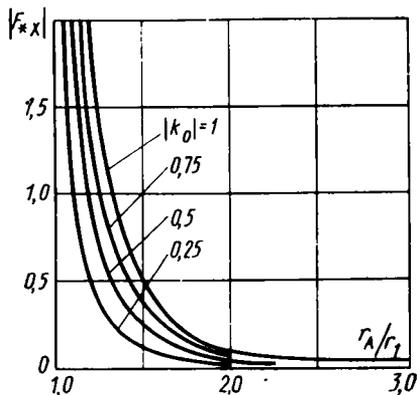


Рис. 5.15. Зависимость электромагнитной силы взаимодействия между линейным током и магнитным цилиндром 2 (см. рис. 5.14) от относительного расстояния между ними ( $r_A/r_1$ ) и от соотношения между магнитными проницаемостями  $|k_0| = |(\mu_{2r} - \mu_{1r}) / (\mu_{2r} + \mu_{1r})|$

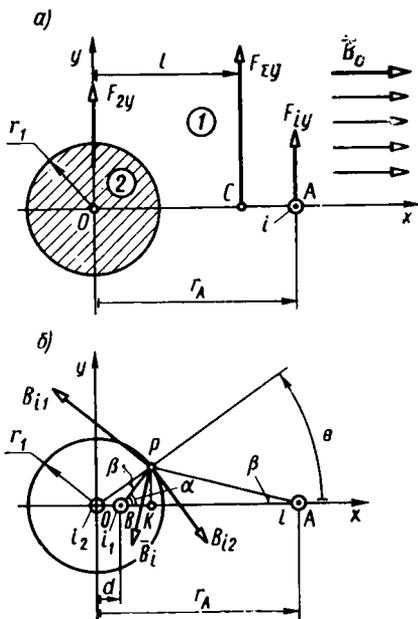


Рис. 5.16. К определению сил, действующих на ток  $i$  и магнитный цилиндр 2, в равномерном магнитном поле

$F_{xy} = F_{iy} + F_{2y}$ , действующую на систему, состоящую из провода с током  $i$  и цилиндра 2.

В силу линейности задачи результирующее поле вне цилиндра 2 можно найти как сумму внешнего равномерного поля в среде 1, искаженного внесением в него цилиндра 1, и поля тока  $i$  с учетом влияния цилиндра 2.

Влияние магнитного цилиндра 2 на поле тока  $i$  (вне цилиндра) можно, как в предыдущем параграфе, воспроизвести двумя отображенными токами  $i_1 = k_0 i$  и  $i_2 = -k_0 i$  по (5.35) и (5.36), расположение которых показано на рис. 5.13, б и 5.16, б. Напомним, что здесь

$$k_0 = (\mu_{2r} - \mu_{1r}) / (\mu_{2r} + \mu_{1r}). \quad (5.39)$$

Точку  $B$ , обратную точке  $A$  относительно окружности с радиусом  $r_1$  и центром в точке  $O$ , можно найти с помощью построения, показанного на рис. 5.16, б. Взяв на окружности любую точку  $P$  и отложив  $\angle OPB = \angle OAP = \beta$ , легко найти положение точки  $B$  и убедиться, что треугольники  $AOP$  и  $POB$  подобны. Откуда следует, что расстояние от центра окружности  $O$  до точки  $B$  не зависит от выбора точки  $P$ ;

$$d = OB = OP^2/OA = r_1^2/r_A. \quad (5.40)$$

Далее, используя очевидные соотношения (5.2) между размерами сторон треугольников (рис. 5.16, б) и тригонометрическими функциями их углов  $\alpha$ ,  $\theta$ , легко выразить функции углов  $\beta$  и  $\alpha$  через функции угла  $\theta$  и найти компоненты индукций от токов  $i$ ,  $i_1$  и  $i_2$  на поверхности  $r = r_1$  в среде 1 на бесконечно малом расстоянии от цилиндра 2.

В цилиндрической системе координат при  $r = r_1$  (вне цилиндра) компоненты индукции от тока  $i$ :

$$B_{ir} = -\mu_0 \mu_{1r} i r_A \sin \theta / (2\pi b^2);$$

$$B_{i\theta} = -\mu_0 \mu_{1r} i (r_A \cos \theta - r_1) / (2\pi b^2),$$

где  $b^2 = (PA)^2 = r_1^2 + r_A^2 - 2r_1 r_A \cos \theta$ ;

компоненты индукции от тока  $i_1$ :

$$B_{i_1 r} = -k_0 i \mu_0 \mu_{1r} r_A \sin \theta / (2\pi b^2);$$

$$B_{i_1 \theta} = k_0 i \mu_0 \mu_{1r} (r_A - r_1 \cos \theta) r_A / (2\pi r_1 b^2);$$

компоненты индукции от тока  $i_2$ :

$$B_{i_2 r} = 0; \quad B_{i_2 \theta} = -i k_0 \mu_0 \mu_{1r} / (2\pi r_1).$$

Суммируя соответствующие компоненты индукции от токов  $i_1$ ,  $i$ ,  $i_2$  на поверхности  $r = r_1$  (вне цилиндра 2), получим компоненты индукции поля тока  $i$  с учетом влияния цилиндра 2

$$\left. \begin{aligned} B_{i\Sigma r} &= B_{ir} + B_{i1r} + B_{i2r} = -ic_r r_A \sin \theta / b^2; \\ B_{i\Sigma \theta} &= B_{i\theta} + B_{i1\theta} + B_{i2\theta} = ic_\theta (r_1 - r_A \cos \theta) / b^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

где  $c_r = \mu_0 \mu_{1r} (1 + k_0) / (2\pi)$ ;  $c_\theta = \mu_0 \mu_{1r} (1 - k_0) / (2\pi)$ .

Картина поля тока  $i$  с учетом влияния цилиндра 2 при  $\mu_{2r} / \mu_{1r} = 3$ , построенная с помощью приведенных выше уравнений (5.41), показана на рис. 5.14.

Внешнее поле после внесения в него цилиндра 2 можно определить методом разделения переменных в цилиндрической системе координат [21, с. 78].

Решение относительно скалярного магнитного потенциала в средах 1 и 2 представляется таким образом

$$\varphi_1 = -(c_1 r - d_1 / r) \cos \theta; \quad \varphi_2 = -(c_2 r - d_2 / r) \cos \theta. \quad (5.42)$$

Откуда для компонент напряженности внешнего магнитного поля в средах 1 и 2

$$\left. \begin{aligned} H_{10r} &= -\partial \varphi_1 / \partial r = (c_1 + d_1 / r^2) \cos \theta; \\ H_{10\theta} &= -\partial \varphi_1 / r \partial \theta = -(c_1 - d_1 / r^2) \sin \theta; \\ H_{20r} &= (c_2 + d_2 / r^2) \cos \theta; \quad H_{20\theta} = -(c_2 - d_2 / r^2) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Исходя из того, что при  $x = \infty$ ;  $y = 0$ ,  $r = \infty$ ,  $\theta = 0$  поле становится равномерным ( $H_{10x} = H_{10r} = H_0 = B_0 / \mu_0 \mu_{1r}$ ), заключаем, что  $c_1 = H_0$ . Так как при  $r = 0$  потенциал  $\varphi_2$  должен быть конечным, имеем  $d_2 = 0$ . Исходя из граничных условий на поверхности  $r = r_1$  для индукции ( $B_{10r} = B_{20r}$ ) и для напряженности внешнего магнитного поля ( $H_{10\theta} = H_{20\theta}$ ), находим  $d_1 = k_0 r_1^2 H_0$ ;  $c_2 = (1 - k_0) H_0$ . Подставляя найденные постоянные ( $c_1$ ;  $d_2$ ;  $d_1$ ;  $c_2$ ) в (5.43), получим компоненты напряженности и индукции внешнего поля на поверхности  $r = r_1$  (вне цилиндра 2):

$$\left. \begin{aligned} H_{10r} &= H_0 k_2 \cos \theta; \quad H_{10\theta} = -H_0 k_1 \sin \theta; \\ B_{10r} &= \mu_0 \mu_{1r} H_{10r}; \quad B_{10\theta} = \mu_0 \mu_{1r} H_{10\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

где  $k_1 = 1 - k_0$ ;  $k_2 = 1 + k_0$ .

Картина внешнего магнитного поля с учетом влияния цилиндра 2 при  $\mu_{2r} / \mu_{1r} = 3$ , построенная с помощью (5.42) и (5.43), показана на рис. 5.9.

С помощью (5.41) и (5.44) найдем компоненты индукции результирующего поля при  $r = r_1$  (вне цилиндра 2):

$$\left. \begin{aligned} B_{\Sigma r} &= B_{10r} + B_{i\Sigma r} = B_0 k_2 \cos \theta - ic_r r_A \sin \theta / b^2; \\ B_{\Sigma \theta} &= B_{10\theta} + B_{i\Sigma \theta} = -B_0 k_1 \sin \theta + ic_\theta (r_1 - r_A \cos \theta) / b^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

Силу, действующую на единицу длины цилиндра **2**, выразим по (4.24) через натяжения на поверхности  $r = r_1$  (вне цилиндра)

$$F_{y2} = \int_0^{2\pi} (T_{nr} \sin \theta + T_{n\theta} \cos \theta) r_1 d\theta, \quad (5.46)$$

где  $T_{nr} = (B_{\Sigma r}^2 - B_{\Sigma \theta}^2)/(2\mu_0 \mu_{1r})$ ;  $T_{n\theta} = B_{\Sigma r} B_{\Sigma \theta}/(\mu_0 \mu_{1r})$ .

Выразим индукцию в (5.46) по (5.45). Введем обозначение:

$$r_1/r_A = k. \quad (5.47)$$

Преобразуем выражение для  $b^2$  в (5.41) и в (5.45), введя в него  $k$  по (5.47),

$$b^2 = r_A^2 (1 + k^2 - 2k \cos \theta) = 2kr_A^2 (p - \cos \theta), \quad (5.48)$$

где  $p = (1 + k^2)/(2k)$ .

Учтем, что в силу нечетности функций  $\sin \theta$ ,  $\sin^3 \theta$  и четности функций  $\cos \theta$ ,  $\cos^2 \theta$ ,  $b^2$ ,  $b^4$  в (5.46) будут обращаться в нуль интегралы

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta; \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{b^2} d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{b^4} d\theta,$$

если  $f(\theta) = \sin \theta$ ;  $\sin^3 \theta$ ;  $\cos \theta \sin \theta$ ;  $\cos \theta$ ,  $\sin^3 \theta$ ;  $\cos^2 \theta \sin \theta$ ;  $\cos^2 \theta \sin^3 \theta$ .

После этого уравнение (5.46) приобретает вид

$$F_{y2} = \frac{kB_0 i}{2\pi} \left[ -4 \frac{k_0^2}{k} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{(p - \cos \theta)} + k_1 k_2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(p - \cos \theta)} - \right. \\ \left. - \frac{k_1 k_2}{k} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(p - \cos \theta)} - 2k_0 k_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(p - \cos \theta)} \right]. \quad (5.49)$$

Введя подстановки  $y = \cos \theta$ ;  $x = p - y$ ;  $\cos \theta = y = p - x$ ;  $\sin \theta = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - p^2 + 2px - x^2}$ ;  $d\theta = -dy/\sin \theta = -dx/\sin \theta$ , можно свести интегралы, которые входят в (5.49), к интегралам от иррациональных функций вида

$$\int \frac{\sqrt{X} dx}{x}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{X}}; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}; \quad \int \sqrt{X} dx,$$

где  $X = -x^2 + 2px + 1 - p^2 = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ ;  $a_1 = -1$ ;  
 $b_1 = 2p$ ;  $c_1 = 1 - p^2 = -(1 - k^2)^2/(4k^2) < 1$ .

Обращаясь к справочным данным [22, с. 99; форм. 241, 245, 258, 260], получим для интегралов в (5.49) следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta / (\rho - \cos \theta) &= [p^2 - p \sqrt{p^2 - 1} - 0,5] \pi = k^2 \pi / 2; \\ \int_0^{\pi} d\theta / (\rho - \cos \theta) &= \pi / \sqrt{p^2 - 1} = 2\pi k / (1 - k^2); \\ \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta / (\rho - \cos \theta) &= (p / \sqrt{p^2 - 1} - 1) \pi = 2k^2 \pi / (1 - k^2); \\ \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta / (\rho - \cos \theta) &= (p - \sqrt{p^2 - 1}) \pi = k\pi. \end{aligned} \right\} (5.50)$$

Подставляя найденные значения интегралов по (5.50) в (5.49), получим для силы, действующей на цилиндр 2, следующее выражение:

$$F_{2y} = -(B_0 i) k^2 k_0 = -(B_0 i) (r_1 / r_A)^2 [(\mu_{2r} - \mu_{1r}) / (\mu_{2r} + \mu_{1r})]. \quad (5.51)$$

Силу, действующую на ток  $i$  во внешнем поле, искаженном присутствием цилиндра 2, наиболее просто можно вычислить через объемную плотность ЭМС в проводе с током  $i$ :

$$F_{iy} = (\pi r_1^2) f_y = B_0 i (1 + k^2 k_0), \quad (5.52)$$

где  $f_y = J_z B_x - J_x B_z = \left( \frac{i}{\pi r_1^2} \right) \mu_0 \mu_{1r} H_0 \left( 1 + \frac{r_1^2}{r_A^2} k_0 \right)$ ;  $J_z = \frac{i}{\pi r_1^2}$ ;

$J_x = 0$ ;  $B_z = 0$ ;  $B_x = B_{10r}$  по (5.43) при  $r = r_A$  и  $\theta = 0$  в месте расположения тока.

Суммарную силу, действующую на систему, состоящую из провода с током  $i$  и цилиндра 2 (рис. 5.16), можно определить по (5.51) и (5.52):

$$F_{\Sigma y} = F_{2y} + F_{iy} = B_0 i [-k^2 k_0 + (1 + k^2 k_0)] = B_0 i. \quad (5.53)$$

Это означает, что сила, действующая на указанную систему, равна произведению тока  $i$  на индукцию  $B_0$  того равномерного поля, которое существовало (в месте расположения системы) до того, как в поле были внесены ток  $i$  и цилиндр 2.

Обозначим через  $l$  расстояние точки приложения суммарной силы  $F_{\Sigma y}$  (точки  $C$  на рис. 5.16,  $a$ ) от начала координат. Найдем это расстояние из условия равновесия моментов частичных сил  $F_{2y}$  и  $F_{iy}$  относительно этой точки:  $F_{2y} l = (r_A - l) F_{iy}$ . Откуда с помощью (5.51), (5.52) получим в относительных единицах

$$l_* = l / r_1 = F_{iy} r_{*A} / (F_{2y} + F_{iy}) = (1 + k^2 k_0) / k. \quad (5.54)$$

Суммарную силу  $F_{\Sigma y}$ , действующую на систему, можно выразить и другим, более простым способом — через натяжения на поверхности  $S$ , охватывающей и ток  $i$ , и цилиндр 2. Имея в виду, что эта поверхность может иметь произвольную форму и произвольное расположение, проведем ее в виде цилиндрической поверхности  $S$  с радиусом  $R > r_A$  и с центром в начале координат. Радиус  $R$  выберем настолько большим, чтобы на протяжении всей поверхности  $S$  искажающее влияние цилиндра 2 на внешнее поле можно было не учитывать и считать это поле равным. Вспомнив, что поле тока  $i$  с учетом влияния цилиндра 2 можно представить в виде суммы полей самого тока  $i$  и полей токов  $i_1$  и  $i_2$  по (5.35) и по (5.36), для определения силы  $F_{\Sigma y}$  воспользуемся результатом решения задачи о силе, действующей на ток в равномерном магнитном поле (см. 5.2.1). Она будет равна сумме сил по (5.6), действующих в равномерном поле с индукцией  $B_0$  на токи  $i$ ,  $i_1$  и  $i_2$ ,

$$F_{\Sigma y} = B_0 i + B_0 i_1 + B_0 i_2 = B_0 i. \quad (5.55)$$

Этот результат объясняется тем, что при  $i_1 = -i_2 = k_0 i$  можно пренебречь влиянием цилиндра 2 не только на внешнее поле, но и на поле тока  $i$  (поля от токов  $i_1$  и  $i_2$  на поверхности  $S$  взаимно уничтожаются).

Если суммарную силу на систему  $F_{\Sigma y}$  определить по (5.55), а силу на ток — через объемную плотность электромагнитных сил во внешнем поле, то силу, действующую на цилиндр 2, можно выразить как разность этих сил:

$$F_{2y} = F_{\Sigma y} - F_{iy} = -B_{0i} k^2 k_0. \quad (5.56)$$

Таким существенно более простым путем получим результат, полностью совпадающий с (5.51).

В качестве примера рассмотрим силы при  $\mu_{2r}/\mu_{1r} = 3$ ;  $k_0 = 0,5$ ;  $1/k = r_A/r_1 = 1,25$  и  $k = 0,8$  получим по (5.51), (5.52):

$$F_{2y}/(B_0 i) = -k^2 k_0 = -0,32; \quad F_{iy}/(B_0 i) = 1 + k^2 k_0 = 1,32;$$

$$F_{\Sigma y}/(B_0 i) = 1; \quad l_* = l/r_1 = (1 + k^2 k_0)/k = 1,65.$$

Значения сил при некоторых характерных предельных соотношениях между магнитными проницаемостями  $\mu_{2r}$  и  $\mu_{1r}$  и при  $r_A = r_1$ ;  $k = 1$  (т. е. при расположении тока  $i$  в среде 1 на поверхности цилиндра 2) приведены ниже:

$\mu_{2r}/\mu_{1r}$	...	...	1	$\infty$	0
$k_0$	...	...	0	1	-1
$F_{2y}/(B_0 i)$	...	...	0	-1	1
$F_{iy}/(B_0 i)$	...	...	1	2	0
$F_{\Sigma y}/(B_0 i)$	...	...	1	1	1

Семейство зависимостей сил  $F_{\Sigma y}$ ,  $F_{2y}$ ,  $F_{iy}$  от  $r_{*A} = 1/k = r_A/r_1$  при нескольких значениях  $k_0 = \frac{(\mu_{2r}/\mu_{1r} - 1)}{(\mu_{2r}/\mu_{1r} + 1)}$  показано на рис. 5.17.

5.3.4. **Магнетик с переменной магнитной проницаемостью во внешнем магнитном поле.** Магнетик, ограниченный плоскостью  $yz$ , занимает полупространство в направлении оси  $x$ . Другая часть полупространства заполнена средой с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_{r1} = 1$  (рис. 5.18). Магнитная проницаемость  $\mu_r$  в поверхностном слое магнетика толщиной  $h$  изменяется по линейному закону  $\mu_r = 1 + k_0x$ . На поверхности  $11'$  при  $x = 0$   $\mu_r = \mu_{r1} = 1$ ; на поверхности  $22'$  при  $x = h$ ,  $\mu_r = \mu_{r2} = 1 + k_0h$ . С помощью внешних источников в магнетике создано магнитное поле. Рассмотрим два случая. В первом случае (рис. 5.18, а) индукция этого поля нормальна к поверхности  $11'$  и всюду одинакова:  $\vec{B} = \epsilon \bar{q}_x B_x = \text{const}$ . Во втором случае (рис. 5.18, б) напряженность этого поля тангенциальна к поверхности  $11'$  и всюду одинакова:  $\vec{H} = \bar{q}_y H_y = \text{const}$ . И в том, и в другом случаях определяется сила, действующая на поверхностный слой магнетика в объеме параллелепипеда  $122'1'$  с единичной площадью основания  $11'$ . Этот параллелепипед выделен на рис. 5.18

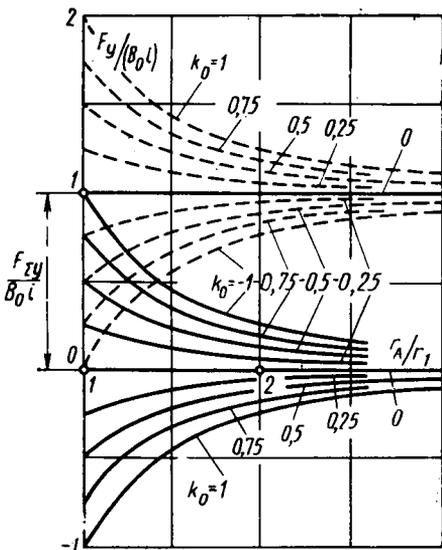


Рис. 5.17. Зависимость электромагнитных сил, действующих на ток  $i$  [ $-F_{iy} / (B_0 i)$ ] и цилиндр 2 [ $-F_{2y} / (B_0 i)$ ] в равномерном магнитном поле, от относительного расстояния между ними ( $r_2/r_1$ ) и от соотношения между магнитными проницаемостями  $k_0 = (\mu_{2r} - \mu_{1r}) / (\mu_{2r} + \mu_{1r})$

Этот параллелепипед выделен на рис. 5.18

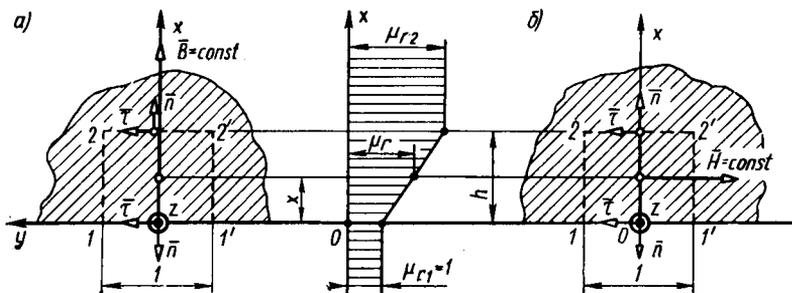


Рис. 5.18. К расчету ЭМС, действующих на магнетик с переменной магнитной проницаемостью в поверхностном слое:

а — при постоянной нормальной составляющей индукции; б — при постоянной тангенциальной составляющей индукции

пунктирными линиями. Рассмотрим первый случай ( $\bar{B} = \bar{q}_x B_x = \text{const}$ ). Сначала найдем ЭМС через объемную плотность ЭМС по (4.46). Поскольку  $H_x = B/(\mu_0 \mu_r)$ , где  $\mu_r = 1 + \kappa_0 x$ ;  $H_y = H_z = 0$ , имеем

$$F = F_x = \int_0^h f_x dx = B^2 (1 - \mu_{2r}) / (2\mu_0 \mu_{2r}),$$

где  $f = f_x = -\frac{\mu_0 H^2}{2} \frac{\partial \mu_r}{\partial x} = -\frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r^2} k_0$ ;  $k_0 = \frac{\mu_{2r} - 1}{h}$ .

Тот же результат получим через натяжения по (4.24). Так как  $B_{1n} = -B_{2n} = B$ ,  $B_{1\tau} = B_{2\tau} = 0$ , то  $F = (T_{2nx} + T_{1nx}) S_{11} = B^2 (1 - \mu_{2r}) / (2\mu_0 \mu_{2r})$ ,

где  $T_{1nx} = -T_{1nn} = -(B_{1n}^2 - B_{1\tau}^2) / (2\mu_0) = -B^2 / (2\mu_0)$ ;

$$T_{2nx} = +T_{2nn} = (B_{2n}^2 - B_{2\tau}^2) / (2\mu_0 \mu_{2r}) = B^2 / (2\mu_0 \mu_{2r}).$$

Перейдем теперь ко второму случаю ( $\bar{H} = \bar{q}_y H_y = \text{const}$ ).

Сначала найдем ЭМС через объемную плотность ЭМС по (4.46). Пусть  $H = H_y = B/\mu_0 = \text{const}$ , где  $B$  — индукция при  $x = 0$ . Так как  $H_x = H_z = 0$ , то

$$F = F_x = \int_0^h f_x dx = -B^2 (\mu_{2r} - 1) / (2\mu_0),$$

где  $f = f_x = -\mu_0 H^2 \partial \mu_r / (2\partial x) = -\mu_0 H^2 k_0 / 2$ .

Тот же результат получим через натяжения по (4.24). Так как

$$B_{1\tau} = -\mu_0 H = -B; \quad B_{2\tau} = -\mu_0 \mu_{2r} H = -\mu_{2r} B;$$

$B_{1n} = B_{2n} = 0$ , то

$$F_x = (T_{2nx} + T_{1nx}) S_{11}' = -\frac{B^2}{2\mu_0} (\mu_{2r} - 1),$$

где  $T_{1nx} = -T_{1nn} = -(B_{1n}^2 - B_{1\tau}^2) / (2\mu_0) = B^2 / (2\mu_0)$ ,  $T_{2nx} = T_{2nn} = (B_{2n}^2 - B_{2\tau}^2) / (2\mu_0 \mu_{2r}) = -B^2 \mu_{2r} / (2\mu_0)$ .

**5.3.5. Магнитные полукольца с тороидальной обмоткой.** Магнитный сердечник, состоящий из двух полуколец с прямоугольным сечением, бесконечно протяжен в направлении оси  $z$  (рис. 5.19) и имеет внутренний  $r_1$  и внешний  $r_2$  радиусы. Между верхней и нижней половинами сердечника имеется зазор  $2$ . Сердечник охвачен равномерно-распределенной тороидальной обмоткой с полным током  $i$ . Относительная магнитная проницаемость сердечника  $\mu_{1r}$ . Относительная магнитная проницаемость зазора  $\mu_{2r}$  и окружающей среды равна  $1$ .

Определить силу, притягивающую верхнюю половину сердечника к нижней его половине.

Предположим, что зазор  $\delta$  настолько мал ( $\delta/\mu_r \ll r_1/\mu_r$ ), что не оказывает влияние на поле в сердечнике и в окружающем пространстве. Тогда в силу симметрии будем иметь следующие индукции в рассматриваемом магнитном поле:

в сердечнике и в зазоре  $\delta$  на радиусе  $r$

$$B_1 = i\mu_0 \mu_{1r} / (2\pi r);$$

в сердечнике на радиусе  $r = r_1$

$$B_{11} = i\mu_0 \mu_{1r} / (2\pi r_1);$$

в сердечнике на радиусе  $r = r_2$

$$B_{12} = i\mu_0 \mu_{1r} / (2\pi r_2);$$

в окружающем пространстве на радиусе  $r = r_2$

$$B_{02} = i\mu_0 / (2\pi r_2);$$

в окружающем пространстве на радиусе  $r = r_1$

$$B_{01} = i\mu_0 / (2\pi r_1).$$

Найдем силу, действующую на объем верхней половины сердечника  $V_{abcd}$ , выделенный поверхностью  $S_{abcd}$ . Поскольку в этом объеме  $\vec{J} = 0$ ,  $\mu_1 = \text{const}$  и  $\text{grad } \mu_1 = 0$ , объемная плотность ЭМС в нем, по формуле Максвелла (4.46),  $\vec{f} = 0$ . Поверхностные плотности ЭМС на границе  $S_{abcd}$  этого объема по формуле Максвелла (4.33) имеют следующие значения:

$$\bar{f}_{Sad} = \bar{f}_{Sbc} = \bar{n}_{ad} B_1^2 (1/\mu_2 - 1/\mu_1)/2;$$

$$\bar{f}_{Sab} = \bar{n}_{ab} [B_{12}^2 / (2\mu_1) - B_{02}^2 / (2\mu_0)];$$

$$\bar{f}_{Scd} = \bar{n}_{cd} [B_{11}^2 / (2\mu_1) - B_{01}^2 / (2\mu_0)].$$

Здесь  $\bar{n}_{ab} = \bar{q}_r$ ;  $\bar{n}_{cd} = -\bar{q}_r$ .

Объемная сила, действующая на объем  $V_{abcd}$ ,

$$\vec{F}_V = \int_{V_{abcd}} \vec{f} dV = 0.$$

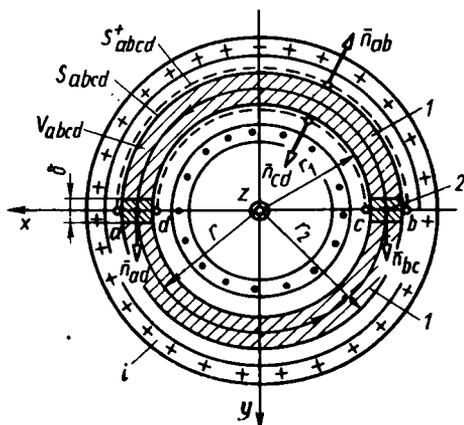


Рис. 5.19. К расчету ЭМС, действующей на верхнюю половину кольцевого сердечника с торондальной обмоткой

Рис. 5.21. Ферромагнитное кольцо, охваченное тороидальной возбуждающей обмоткой с током

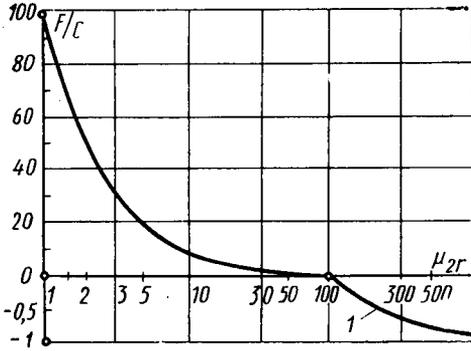
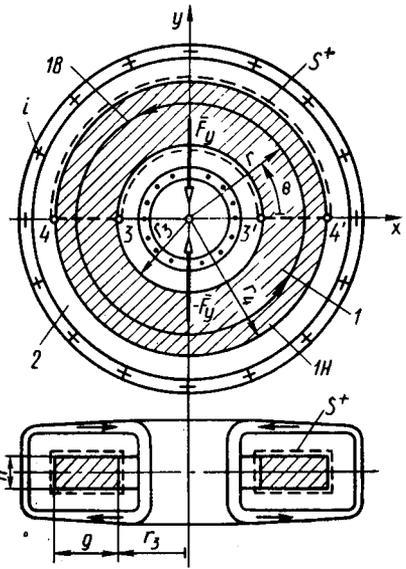


Рис. 5.20. Зависимость ЭМС, действующей на верхнюю половину кольцевого сердечника, по рис. 5.19, от магнитной проницаемости зазора  $\mu_{2r}$  (при магнитной проницаемости сердечника  $\mu_{1r}=10$ )

Поверхностная сила, действующая на границу объема,

$$F_S = \int_{S_{ad}} \vec{f}_{Sad} dS + \int_{S_{bc}} \vec{f}_{Sbc} dS + \int_{S_{ab}} \vec{f}_{Sab} dS + \int_{S_{cd}} \vec{f}_{Scd} dS = \\ = [i^2 \mu_0 \bar{n}_{ad} / (4\pi^2)] (\mu_{1r}^2 / \mu_{2r} - 1) (1/r_1 - 1/r_2).$$

Полная сила, действующая на объем  $V_{abcd}^*$ ,

$$\vec{F} = \vec{F}_V + \vec{F}_S = \frac{i^2 \mu_0}{4\pi^2} \left( \frac{\mu_{1r}^2}{\mu_{2r}} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \bar{n}_{ad}.$$

Из данной формулы следует, что сила  $F$  по величине и знаку зависит от соотношения между  $\mu_{1r}$  и  $\mu_{2r}$ : при  $\mu_{1r}^2 > \mu_{2r}$  половины сердечника притягиваются, при  $\mu_{1r}^2 < \mu_{2r}$  — отталкиваются, а при  $\mu_{1r}^2 = \mu_{2r}$  сила притяжения исчезает.

Это хорошо видно на рис. 5.20, на котором представлена зависимость силы  $F/C$  от  $\mu_{2r}$  при  $\mu_{1r} = 10$  (при  $\mu_{2r} = \mu_{1r}^2 = 100$  сила  $F$  проходит через нуль и изменяет свой знак). Здесь  $C =$

$$= \frac{i^2 \mu_0}{4\pi^2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

**5.3.6. Ферромагнитное кольцо, охваченное тороидальной обмоткой с током.** Ферромагнитное кольцо, состоящее из верхней  $IB$  и нижней  $IH$  частей (рис. 5.21), имеет прямоугольное попереч-

\* При  $\mu_{2r}=1$  эта сила совпадает с силой, определяемой по формуле (29) [см. статью К. М. Поливанова «Подъемная сила магнита», Электричество, 1984, № 6].

ное сечение с радиальным размером  $g = 0,1$  м и осевым  $h = 0,004$  м. Площадь поперечного сечения  $S = gh = 4,0 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Внутренний радиус кольца  $r_3 = 0,1$  м; внешний радиус  $r_4 = 0,2$  м; средний радиус  $r_{cp} = 0,15$  м.

Промежуток между обмоткой и кольцом заполнен немагнитной средой 2 с магнитной проницаемостью  $\mu_0$ . Поле в кольце возбуждается тороидальной равномерно распределенной обмоткой с током. Заданными считаются полный ток (МДС) возбуждающей обмотки  $i = 8856$  А и нелинейная характеристика намагничивания материала кольца (см. рис. 2.3, а), представленная аппроксимирующей функцией

$$B = m_B^{-1} (1 - e^{-m_H H}), \quad (5.57)$$

в которой  $m_B = 0,3618$  Тл<sup>-1</sup>;  $m_H = 3,006 \cdot 10^{-4}$  м · А<sup>-1</sup>.

Определить индукции и напряженности магнитного поля, относительные магнитные проницаемости в кольце 1 и окружающей среде 2; ЭМС, действующую на верхнюю половину кольца 1В; механические напряжения в кольце; деформацию кольца.

Аналогичная задача уже рассматривалась ранее (см. пример 2.1), но магнитное поле в кольце и ЭМС были определены при целом ряде упрощающих допущений. Причем ЭМС, действующая на верхнюю половину кольца, определялась по приращению магнитной энергии при малом перемещении.

В нашем примере ЭМС, действующую на верхнюю половину кольца, определим двумя способами: 1) по натяжениям; 2) по объемной и поверхностной плотностям ЭМС. Причем допущения, принятые в примере 2.1, будут отброшены, что позволит учесть распределение поля по сечению кольца и дать более точную оценку ЭМС за счет учета сил, действующих на цилиндрические поверхности полуколец. Кроме того, с целью упрощения аналитического решения задачи применим другую аппроксимирующую функцию. В требуемом диапазоне индукций она совпадает (с точностью 0,5 %) с аппроксимирующей функцией, использованной в примере 2.1. Начнем с расчета магнитного поля в кольце. Напряженность в кольце  $H = i/(2\pi r)$ ; напряженность в кольце на радиусах  $r_3, r_4, r_{cp}$ :  $H_3 = 12529$  А/м;  $H_4 = 6265$  А/м;  $H_{cp} = 9397$  А/м. Индукция в кольце на радиусах  $r_3, r_4, r_{cp}$  (по 5.57):  $B_3 = 2,700$  Тл;  $B_r = 2,34$  Тл;  $B_{cp} = 2,6$  Тл.

Перейдем к вычислению ЭМС, действующей на верхнюю половину кольца 1В, по натяжениям  $T_n$ . Охватим эту часть кольца поверхностью  $S^+ = S_3^+ + S_4^+ + S_{34}$  (рис. 5.22, а), которая включает поверхности  $S_3^+$  и  $S_4^+$ , примыкающие к выделенному объему кольца на участках 33' и 44', располагающиеся в немагнитной среде 2, а также поверхность  $S_{34}$ , отделяющую верхнюю часть кольца от нижней на участках 34 и 3'4' и располагающуюся в кольце 1.

Эпюры распределения натяжений  $\bar{T}_{n3}^+$ ,  $\bar{T}_{n4}^+$  и  $\bar{T}_{n34}$  на участках поверхностей с теми же индексами показаны на рис. 5.22, а. В си-

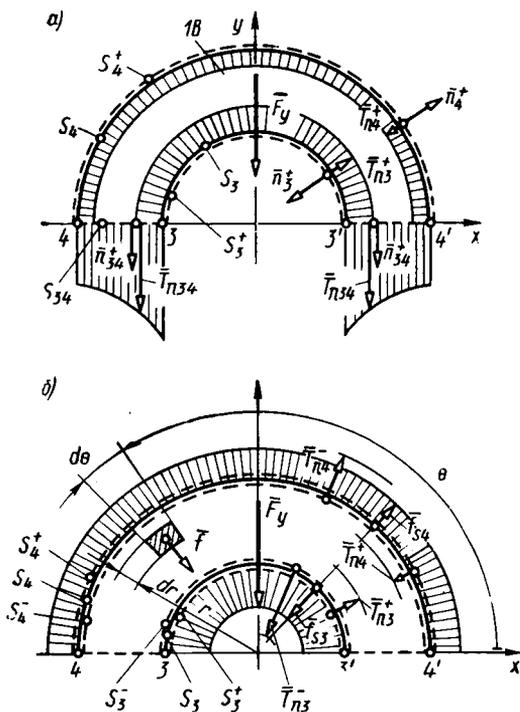


Рис. 5.22. Натяжение  $\bar{T}_n$  (а), поверхностные  $\bar{f}_s$  и объемные  $\bar{f}$  плотности ЭМС (б), действующие на верхнюю половину кольца (см. рис. 5.21)

$\bar{T}_{n34} = \bar{q}_y T_{n34y}$  по (4.24) иметь в виду, что  $S_{34}$  — эквипотенциальная поверхность ( $\bar{B} = S_{34}$ ):

$$\bar{F}_{S_{34}} = \int_{S_{34}} \bar{T}_{n34} dS = 2h\bar{q}_y \int_{r_3}^{r_4} T_{n34y} dr = \bar{q}_y F_{S_{34y}},$$

где  $T_{n34y} = -B^2/(2\mu) = -BH/2 = -i(1 - e^{-m_H H})/(4\pi m_B r)$

— проекция натяжения  $T_{n34}$  на ось  $y$ .

Используя подстановку  $z = m_H H = im_H/(2\pi r) = a/r$  и обращаясь к [22, с. 107, форм. 451], найдем

$$F_{S_{34y}} = \frac{h_i}{2\pi m_B} [L(-z_3) - L(-z_4)] = 10,197 \text{ Н.}$$

лу симметрии распределения натяжений относительно оси  $y$  ЭМС, действующая на верхнюю часть кольца, имеет только одну составляющую, направленную по оси  $y$ , т. е.

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \int_{S^+} \bar{T}_n dS = \bar{F}_y = \\ &= \bar{q}_y F_y. \end{aligned}$$

Составляющую силы  $\bar{F}$  по оси  $y$  найдем в виде суммы составляющих сил, действующих на отдельные участки поверхности  $S^+$ ,

$$F_y = F_{S_{34y}} + F_{S_{3y}}^+ + F_{S_{4y}}^+.$$

При расчете силы  $F_{S_{34y}}$ , действующей на левую и правую половины поверхности  $S_{34}$ , внешняя нормаль к которой  $\bar{n}_{34}^+ = -\bar{q}_y$ , нужно при определении

В этой формуле функция  $L(x)$  представляется в виде бесконечно-го функционального ряда, который быстро сходится при любых положительных или отрицательных  $x$ :

$$L(x) = \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

Программа для расчета такого ряда легко реализуется на программируемых микрокалькуляторах «Электроника-БЗ-34», МК-54 и др. При  $x = -z_3 = -a/r_3 = -4,2368$  и  $x = -z_4 = -a/r_4 = -2,1184$  получим  $L(-z_3) = -2,0238$  и  $L(-z_4) = -1,3694$ .

При расчете силы  $\bar{F}_{S_3y}^+$ , действующей на поверхность  $S_3^+$ , внешняя нормаль к которой  $\bar{n}_3^+ = -\bar{q}_r$ , нужно при определении  $\bar{T}_{n_3}^+ = \bar{q}_r T_{n_3r}^+$  по (4.24) иметь в виду, что  $S_3^+$  — магнитная поверхность ( $\bar{B}_3^+ \parallel S_3^+$ ):

$$F_{S_3y}^+ = \int_0^\pi dF_{S_3y}^+ = hr_3 T_{n_3r}^+ \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2hr_3 T_{n_3r}^+,$$

где  $T_{n_3r}^+ = B_3^+ H_3/2 = \mu_0 i^2/(8\pi^2 r_3^2)$ ;  $B_3^+ = \mu_0 H_3$ ;  $H_3 = i/(2\pi r_3)$ .

Откуда

$$F_{S_3y}^+ = i^2 \mu_0 h / (4\pi^2 r_3) = 9,986 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

Соответственно при расчете силы  $F_{S_4y}^+$ , действующей на поверхность  $S_4^+$ , внешняя нормаль к которой  $\bar{n}_4^+ = \bar{q}_r$ , нужно при определении  $\bar{T}_{n_4}^+ = \bar{q}_r T_{n_4r}^+$  по (4.24) иметь в виду, что  $S_4^+$  — также магнитная поверхность ( $\bar{B}_4^+ \parallel S_4^+$ ):

$$F_{S_4y}^+ = \int_0^\pi dF_{S_4y}^+ = hr_4 T_{n_4r}^+ \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2hr_4 T_{n_4r}^+,$$

где  $T_{n_4r}^+ = -B_4^+ H_4/2 = -\mu_0 i^2/(8\pi^2 r_4^2)$ ;  $B_4^+ = \mu_0 H_4$ ;  $H_4 = i/(2\pi r_4)$ .

Откуда

$$F_{S_4y}^+ = i^2 \mu_0 h / (4\pi^2 r_4) = -4,993 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

Суммируя силы на отдельных частях поверхности  $S^+$ , найдем результирующую силу, действующую на верхнюю часть кольца 1В:

$$F_y = F_{S_3y}^+ + F_{S_4y}^+ = \frac{hi}{2\pi m_B} [L(-z_3) - L(-z_4)] + \frac{i^2 \mu_0 h}{4\pi^2} \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) = -10,15 \text{ Н.} \quad (5.58)$$

Теперь найдем силу  $F_y$  вторым возможным способом — по объемным и поверхностными плотностям ЭМС  $\bar{f}$  и  $\bar{f}_s$ . Эта сила складывается из сил  $\bar{f}dV$ , приложенных к элементам объема верхней половины кольца, и из сил  $\bar{f}_{S3}dS$  и  $\bar{f}_{S4}dS$ , приложенных к элементам граничных поверхностей  $S_3$  и  $S_4$ , отделяющих среды 1 и 2 с различными магнитными свойствами (на поверхности  $S_{34}$  поверхностная плотность ЭМС равна нулю  $f_{S4} = 0$ , поскольку на этой поверхности не наблюдается разрыва магнитной проницаемости). В силу симметрии в распределении  $\bar{f}$ ,  $\bar{f}_{S3}$  и  $\bar{f}_{S4}$  относительно оси  $y$  (рис. 5.22, б) ЭМС  $\bar{F}$ , действующая на верхнюю часть кольца  $1B$ , имеет только одну составляющую, направленную по оси  $y$ , т. е.

$$\bar{F} = \bar{F}_y = \int_V \bar{f}dV + \int_{S_3} \bar{f}_{S3} dS + \int_{S_4} \bar{f}_{S4} dS = \bar{q}_y F_y,$$

$$\text{где } \int_V \bar{f}dV = F_{1y} \bar{q}_y; \quad \int_{S_3} \bar{f}_{S3} dS = F_{S3y} \bar{q}_y; \quad \int_{S_4} \bar{f}_{S4} dS = F_{S4y} \bar{q}_y.$$

Составляющую силы  $\bar{F}$  по оси  $y$  найдем в виде суммы составляющих перечисленных сил по этой оси:

$$F_y = F_{1y} + F_{S3y} + F_{S4y}.$$

Объемную плотность ЭМС в кольце 1 рассчитаем по (4.46):

$$\bar{f} = [\bar{J} \bar{B}] - (H^2/2) \text{ grad } \mu.$$

Так как

$$\bar{J} = 0; \quad \mu = B/H = (1 - e^{-a/r}) m_H r / (m_B a),$$

$$\text{где } a = im_H / (2\pi), \quad \text{grad } \mu = \bar{q}_r \frac{\partial \mu}{\partial r} + \bar{q}_z \frac{\partial \mu}{\partial z} + \bar{q}_\theta \frac{\partial \mu}{\partial \theta} = \bar{q}_r \frac{\partial \mu}{\partial r} =$$

$$= \bar{q}_r \frac{m_H}{am_B} \left( 1 - \frac{ae^{-a/r}}{r} - e^{-a/r} \right),$$

то  $\bar{f}$  в цилиндрической системе координат содержит только радиальную составляющую  $\bar{f} = \bar{q}_r f_r$ , где  $f_r = \frac{-H^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial r} = -\frac{a}{2m_H m_B} \times$   
 $\times \left( \frac{1}{r^2} - \frac{a}{r^3} e^{-a/r} - \frac{1}{r^2} e^{-a/r} \right).$

Объемную силу  $F_{1y}$ , приложенную к верхней половине кольца  $1B$ , найдем путем суммирования проекций элементарных объемных сил  $dF_{1y} = f_r \sin \theta dV$  на ось  $y$ :

$$F_{1y} = \int_V dF_{1y} = \int_{r_2}^{r_1} \int_0^\pi \int f_r \sin \theta h r dr d\theta = 2h \int_{r_2}^{r_1} f_r r dr.$$

Используя подстановку  $z = m_H H = a/r$  и обращаясь к [22, с. 107, форм. 451], получим

$$F_{1y} = -\frac{ih}{2\pi m_B} [e^{-z_3} - e^{-z_4} + L(-z_4) - L(-z_3)] = -8,549 \text{ Н.}$$

Поверхностную плотность ЭМС  $\bar{f}_{S_3}$  выразим по (4.33) или в виде суммы натяжений на поверхностях  $S_3^+$  и  $S_3^-$ , охватывающих граничную поверхность  $S_3$  (рис. 5.22, б).

$$\bar{f}_{S_3} = \bar{T}_{n_3^+} + \bar{T}_{n_3^-} = (T_{n_3r}^+ + T_{n_3r}^-) \bar{q}_r = f_{S_3r} \bar{q}_r,$$

где  $T_{n_3r}^+ = B_3^+ H_3/2 = \mu_0 i^2/(8\pi^2 r_3^2)$ ;  $T_{n_3r}^- = -B_3^- H_3/2 =$   
 $= a(1 - e^{-a/r_3})/(2m_H m_B r_3)$ ;  $f_{S_3r} = T_{n_3r}^+ + T_{n_3r}^-$ .

Таким же образом выразим поверхностную плотность ЭМС:

$$\bar{f}_{S_4} = \bar{T}_{n_4^+} + \bar{T}_{n_4^-} = (T_{n_4r}^+ + T_{n_4r}^-) \bar{q}_r = f_{S_4r} \bar{q}_r,$$

где  $T_{n_4r}^+ = -B_4^+ H_4/2 = -\mu_0 i^2/(8\pi^2 r_4^2)$ ;  $T_{n_4r}^- = B_4^- H_4/2 =$   
 $= a(1 - e^{-a/r_4})/(2m_H m_B r_4)$ ;  $f_{S_4r} = T_{n_4r}^+ + T_{n_4r}^-$ .

Из приведенных формул видно, что  $\bar{f}_{S_3}$  и  $\bar{f}_{S_4}$  нормальны к граничным поверхностям  $S_3$  и  $S_4$  и содержат только радиальные составляющие.

Поверхностную силу  $F_{S_3y}$ , приложенную к граничной поверхности  $S_3$ , найдем путем суммирования проекций элементарных поверхностных сил  $dF_{S_3y} = f_{S_3r} \sin \theta dS$  на ось  $y$ :

$$F_{S_3y} = \int_{S_3} dF_{S_3y} = \int_0^\pi f_{S_3r} \sin \theta r_3 d\theta = 2hr_3 f_{S_3r} = \frac{h\mu_0 i^2}{4\pi^2 r_3} -$$

$$-\frac{ih}{2\pi m_B} (1 - e^{-z_3}) = -15,26 \text{ Н.}$$

Поверхностную силу  $F_{S_4y}$ , приложенную к граничной поверхности  $S_4$ , найдем путем суммирования проекций элементарных поверхностных сил  $dF_{S_4y} = f_{S_4r} \sin \theta dS$  на ось  $y$ :

$$F_{S_4y} = \int_{S_4} dF_{S_4y} = \int_0^\pi f_{S_4r} \sin \theta r_4 d\theta = 2hr_4 f_{S_4r} = \frac{h\mu_0 i^2}{4\pi^2 r_4} +$$

$$+\frac{ih}{2\pi m_B} (1 - e^{-z_4}) = 13,65 \text{ Н.}$$

Складывая силы  $F_{1y}$ ,  $F_{S3y}$  и  $F_{S4y}$ , выраженные через объемные и поверхностные плотности ЭМС, найдем полную силу, действующую на верхнюю половину кольца  $1B$ :

$$F_y = F_{1y} + F_{S3y} + F_{S4y} = \frac{h_i}{2\pi m_B} [L(-z_3) - L(-z_4)] + \frac{i\mu_0 h}{4\pi^2} \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) = -10,15 \text{ Н.} \quad (5.59)$$

Полученная формула совпадает с формулой (5.58), выведенной исходя из натяжений.

Под действием силы  $F_y$  кольцо  $l$  равномерно сжимается. В нем возникает механическое напряжение  $\sigma = |F_y|/(2S) = 12695$  Па.

Средний диаметр кольца  $d_{ср} = 2r_{ср}$  уменьшается на величину

$$\Delta d = 2r_{ср} \sigma / E = 1,85 \cdot 10^{-8} \text{ м.} \quad (5.60)$$

Путем измерения деформации диаметра ферромагнитного кольца при возбуждении в нем магнитного поля можно экспериментально подтвердить правильность формулы Максвелла для натяжения [см. (4.24)] и ошибочность формул для натяжения, рассмотренных в гл. 6.

Правда, затруднение состоит в том, что возникающая в кольце деформация весьма мала. Ожидаемое ее значение — 0,0185 мк. Такие деформации с помощью обычных механических индикаторов невозможно измерить. Однако можно предложить способы радикального увеличения деформаций магнитного сердечника под действием магнитного поля. Вместо кольцевого сердечника нужно применить замкнутый сердечник, обладающий существенно меньшей жесткостью. Одно из возможных исполнений такого магнитного сердечника, в котором под действием ЭМС возникают в десятки тысяч раз большие деформации, будет рассмотрено в следующем параграфе. Результаты исследований экспериментальной установки, в которой использовано предложенное исполнение магнитного сердечника, приведены в гл. 7. Как и следовало ожидать, они полностью подтверждают правильность формулы Максвелла для натяжения.

**5.3.7. Зубчатый кольцеобразный сердечник из ферромагнитной ленты, охваченный тороидальной обмоткой с током.** Зубчатый кольцеобразный ферромагнитный сердечник  $1$  изготовлен из согнутой в виде гармошки полосы рулонной электротехнической стали 2013 толщиной 0,5 мм (рис. 5.23). Начало и конец полосы сварены встык. Сердечник  $1$  установлен внутри тороидальной обмотки  $2$  на двух опорах — на неподвижно закрепленной и на шарнирной опоре, обеспечивающей свободу деформации сердечника под действием электромагнитных сил.

Сердечник для упрощения изображен не в масштабе и с уменьшенным количеством зубцов. В действительности сердечник имеет

следующие размеры: толщину полосы 0,5 мм из стали 2013; ширину полосы  $h = 47$  мм; число зубцов  $z = 20$ ; внутренний  $r_1 = 100$  мм и внешний  $r_2 = 150$  мм радиусы; ширина зубца равна ширине паза; радиусы внутренних поверхностей торoidalной обмотки  $r_3 = 90$  мм,  $r_4 = 160$  мм. Характеристики намагничивания материала сердечника приведены в [24, с. 460]. Магнитное поле в заданной нелинейной магнитной системе возбуждается током  $i = 4,48$  А в торoidalной обмотке, содержащей  $w = 1340$  витков. Это поле оказывается весьма сложным, и может быть рассчитано только численным путем.

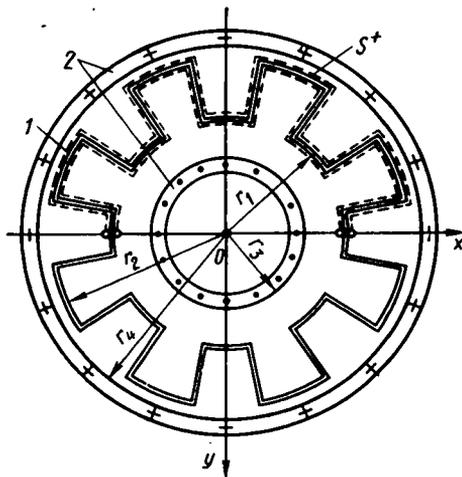


Рис. 5.23. Зубчатый кольцеобразный ферромагнитный сердечник, охваченный торoidalной обмоткой с током

Однако численный расчет облегчается из-за периодичности поля. Угловой период этого поля  $\theta_z = 2\pi/z$ .

Примерная картина поля в пределах углового периода показана на рис. 5.24. Из рисунка видно, что поле в пределах периода обладает четной симметрией. Поэтому его расчет можно произвести на

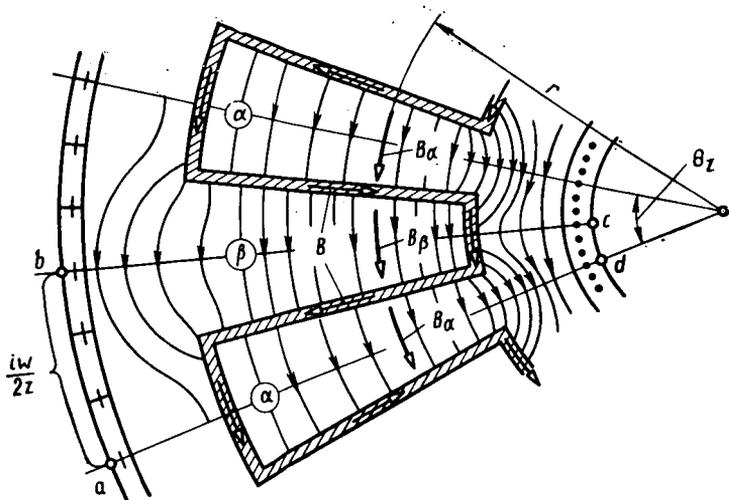


Рис. 5.24. Примерная картина поля на полупериоде нелинейной системы по рис. 5.23

угловом полупериоде  $\theta_z/2$ , т. е. в области  $abcd$ , заключенной между эквипотенциалами  $ad$  и  $bc$ . Между этими эквипотенциалами заключен ток  $i\omega/(2z) = 150$  А; разность потенциалов между этими эквипотенциалами равна  $i\omega/(2z) = 150$  А. Искомое поле складывается из поля в самом зигзагообразном сердечнике с индукцией  $B$ , поля в пазах типа  $\alpha$  с индукцией (на оси пазов)  $B_\alpha$  и поля в пазах типа  $\beta$  с индукцией (на оси пазов)  $B_\beta$ .

Поле в пределах полупериода рассчитано численным методом. При этом приняты два допущения. Поле считается двухмерным. Напряженности поля на внутренних поверхностях тороидальной обмотки направлены тангенциально и имеют следующие значения:  $H_3 = i\omega/(2\pi r_3) = 10610$  А/м;  $H_4 = i\omega/(2\pi r_4) = 5968$  А/м ( $B_3 = \mu_0 H_3 = 13,3 \cdot 10^{-3}$  Тл;  $B_4 = \mu_0 H_4 = 7,50 \cdot 10^{-3}$  Тл). Результаты расчета поля в виде зависимостей индукций  $B$ ,  $B_\beta$ ,  $B_\alpha$ , а также напряженности  $H$  в сердечнике от расстояния  $r$  (центра системы) приведены на рис. 5.25.

Чтобы найти силу, равномерно сжимающую зубчатый кольцеобразный сердечник, поступим так же, как в § 5.3.6.

Выделим верхнюю часть сердечника, охватив ее замкнутой поверхностью  $S^+$  (на рис. 5.23 эта поверхность показана пунктирной линией).

Тогда силу  $2\bar{F}_y$ , действующую на верхнюю часть сердечника, можно выразить через натяжения  $\bar{T}_n$ , действующие извне на участки поверхности  $S^+$ ,

$$2\bar{F}_y = \int_{S^+} \bar{T}_n dS.$$

Рассмотренные варианты расположения поверхности  $S^+$ , охватывающей верхнюю часть сердечника, показаны на рис. 5.26. В силу симметрии картины поля и эпюр распределения напряжений полную силу  $2F_y$  можно определить путем удвоения силы  $F_y$ , действующей на левую половину верхней части сердечника. На рис. 5.26, *а* левая половина замкнутой поверхности  $S^+$  состоит из радиального участка 23 сечения ферромагнитного сердечника по оси паза  $\beta$ ; цилиндрического участка 45 ( $r = r_4$ ) и радиального участка 34, совпадающего с осью паза  $\beta$ ; цилиндрического участка 12. На рис. 5.26, *б* левая половина замкнутой поверхности  $S^+$  состоит из радиального участка 23 сечения ферромагнитного сердечника по оси паза  $\alpha$ ; участка 34, на котором поверхность  $S^+$  располагается в воздухе на бесконечно малом расстоянии от сердечника, охватывая его снаружи; участка 12, на котором поверхность  $S^+$  располагается в воздухе на бесконечно-малом расстоянии от сердечника, охватывая его изнутри.

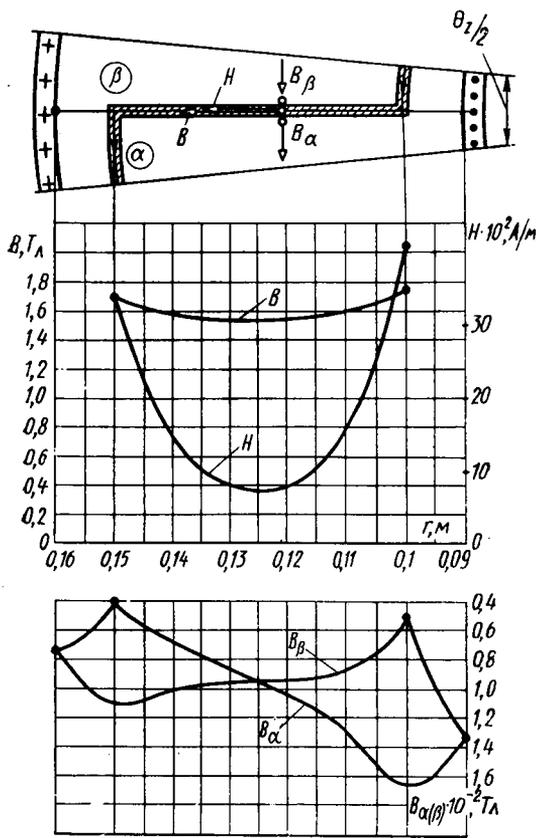


Рис. 5.25. Зависимости индукций  $B$ ,  $B_\alpha$ ,  $B_\beta$  и напряженности  $H$  нелинейной системы от расстояния  $r$  до центра системы в элементе

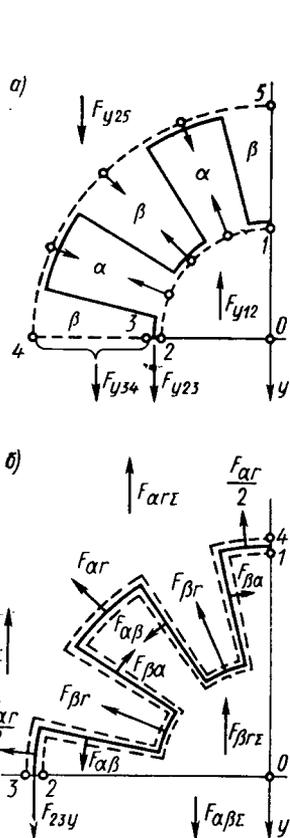


Рис. 5.26. Варианты расположения поверхности  $S^+$ , охватывающей половину зубчатого сердечника

При выражении силы  $F_y$  и ее составляющих, показанных на рис. 5.26, а, получим (в проекции на ось  $y$ ):

$F_{y23}$	8,38 · 10 <sup>-2</sup> Н
$F_{y34}$	8,37 · 10 <sup>-2</sup> Н
$F_{y12}$	-2,69 · 10 <sup>-1</sup> Н
$F_{y45}$	1,79 · 10 <sup>-1</sup> Н
$F_y$	7,78 · 10 <sup>-2</sup> Н

При выражении силы  $F_y$  и ее составляющих, показанных на рис. 5.26, б, получим (в проекции на ось  $y$ ):

$F_{y23}$ . . . . .	$6,78 \cdot 10^{-2} \text{H}$
$F_{\alpha r \Sigma} = \Sigma F_{\alpha r y}$ . . . . .	$-8,28 \cdot 10^{-4} \text{H}$
$F_{\beta r \Sigma} = \Sigma F_{\beta r y}$ . . . . .	$-1,32 \cdot 10^{-3} \text{H}$
$F_{\alpha \beta \Sigma} = \Sigma F_{\alpha \beta y}$ . . . . .	$8,18 \cdot 10^{-2} \text{H}$
$F_{\beta \alpha \Sigma} = \Sigma F_{\beta \alpha y}$ . . . . .	$-6,98 \cdot 10^{-2} \text{H}$
$F_y$ . . . . .	$7,75 \cdot 10^{-2} \text{H}$

Сила  $F = F_y$  действует в любом сечении кольцевого сердечника. Это приводит к равномерному сжатию сердечника за счет деформации отдельных его элементов. Элемент сердечника в пределах углового периода зубчатой структуры  $\theta_z = 2\pi/z$  изображен на рис. 5.27. Он сжимается силами  $F = F_y$ , приложенными к нему в точках  $A_n$  и  $A_n'$ . Причем деформация сжатия кольцевого сердечника в целом происходит таким образом, что угол  $\theta_z$  сохраняется, а лучи  $OA_n'$  и  $OA_n$  в точках  $A_n'$  и  $A_n$  остаются нормальными к дугам  $A_n'B_n'$  и  $A_nB_n$ . Такая деформация элемента обеспечивается неизвестным силовым фактором — моментом  $X_1$ , который поддерживает нормальность луча  $OA_n'$  к дуге  $A_n'B_n'$ . В силу симметрии относительно оси  $OD$  задача один раз статически неопределима: имеется один неизвестный силовой фактор — момент  $X_1$ . Для решения задачи обратимся к [25]. Имея в виду симметрию элемента, рассмотрим

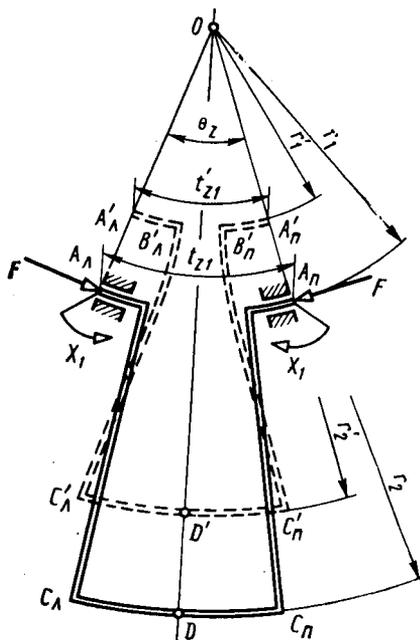


Рис. 5.27. К расчету деформации элемента зубчатого сердечника

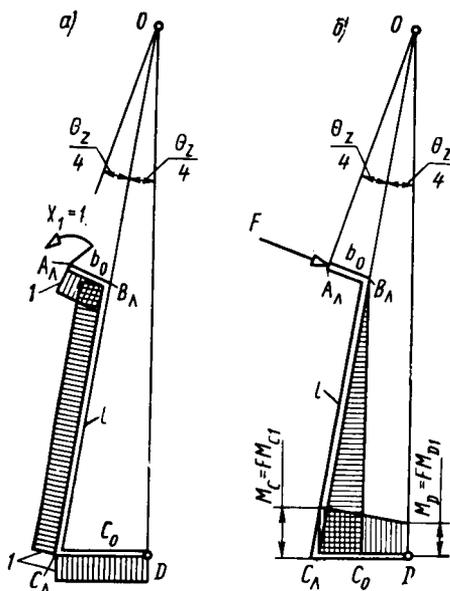


Рис. 5.28. Эпюры моментов на половине зубцового деления сердечника

только его левую половину. С целью упрощения расчета заменим дуги  $A_{\pi}B_{\pi}$ ,  $C_{\pi}D$  соответствующими хордами (рис. 5.28). Незвестный момент  $X_1$  определим из условия отсутствия поворота сечения в точке  $A_{\pi}$  (сохранения угла  $\theta_z$ ), т. е. отсутствия перемещения по направлению момента  $X_1$ :

$$\delta_1(X_1, F) = \delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0,$$

где  $\delta_{11}$  — угол поворота сечения  $A_{\pi}$  под действием единичного момента  $X_1 = 1$ , определяемый умножением эпюры единичного момента  $X_1 = 1$  саму на себя (рис. 5.28, а);  $\delta_{1F}$  — угол поворота сечения  $A_{\pi}$  под действием силы  $F$ , определяемый умножением эпюры единичного момента  $X_1 = 1$  (рис. 5.28, а) на эпюру силы  $F$  (рис. 5.28, б).

Примем  $l = r_2 - r_1 = 0,05$  м;  $b_0 = r_1 \theta_z / 4 = 7,85 \cdot 10^{-3}$  м;  
 $c_0 = r_2 \theta_z / 4 = 1,18 \cdot 10^{-2}$  м;  $\theta_z = 2\pi/z = 0,314$ ; модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>; момент инерции  $J = bh^3/12 = 4,89 \cdot 10^{-13}$  м<sup>4</sup>.

При этом получим  $\delta_{11} = (b_0 + l + c_0)/(EJ)$ ;

$$\delta_{1F} = F(-M_{C1}l/2 - (M_{D1} + M_{C1})c_0/2)/(EJ),$$

где  $M_{C1} = 5,016 \cdot 10^{-2}$  м;  $M_{D1} = 4,820 \cdot 10^{-2}$  м.

Откуда  $X_1 = -\delta_{1F}/\delta_{11} = -F(-M_{C1}l - (M_{D1} + M_{C1})c_0)/(2(b_0 + l + c_0)) = F2,590 \cdot 10^{-2}$  Дж.

Для определения перемещения в направлении силы  $F$  следует ввести единичную фиктивную силу  $X_2 = 1$ , действующую в этом направлении. Эпюру моментов для силы  $X_2 = 1$  можно получить путем деления на  $F$  эпюры, показанной на рис. 5.28, б. Тогда полное перемещение по направлению единичной силы  $X_2 = 1$ , обозначаемое  $\delta_2(X_1, F)$ , можно найти в виде суммы перемещений в этом направлении от момента  $X_1$  и от силы  $F$ :

$$\delta_2(X_1, F) = \delta_2(X_1) + \delta_2(F).$$

Перемещение в направлении  $X_2 = 1$  от момента  $X_1$  можно получить путем умножения эпюры от единичной силы  $X_2 = 1$  на эпюру от момента  $X_1$ , подобную эпюре, показанной на рис. 5.28, а,

$$\begin{aligned} \delta_2(X_1) &= X_1(-M_{C1}l - (M_{D1} + M_{C1})c_0)/(2EJ) = \\ &= -X_1(1,805 \cdot 10^{-3})/(EJ) = -F(4,678 \cdot 10^{-5})/(EJ). \end{aligned}$$

Перемещение в направлении  $X_2 = 1$  от силы  $F$  можно получить путем умножения эпюры от единичной силы  $X_2 = 1$  на эпюру от силы  $F$  (рис. 5.28, б):

$$\begin{aligned} \delta_2(F) &= F(M_{C1}^2l/3 + (M_{C1}^2 + M_{C1}M_{D1} + M_{D1}^2)c_0/3)/(EJ) = \\ &= F(6,875 \cdot 10^{-5})/(EJ). \end{aligned}$$

Откуда  $\delta_2(X_1, F) = \delta_2(X_1) + \delta_2(F) = F(2,197 \cdot 10^{-5})/(EJ)$ .

Вследствие перемещения на  $\delta_2(X_1, F)$ , найденного на 1 2 зубцового деления, длина зубцового деления  $t_{z1} = 2\pi r_1/z$  (см. рис.5.27) уменьшится на  $2\delta_2(X_1, F) = 2\delta_2$  и сделается равной  $t'_{z1} = t_{z1} - 2\delta_2$ . При этом общая длина окружности сделается равной  $zt'_{z1} = zt_{z1} - 2\delta_2 z = 2\pi r_1 - 2\delta_2 z$  и будет иметь диаметр  $D'_1 = 2r'_1 = 2r_1 - 2\delta_2 z/\pi$ .

Уменьшение диаметра (в м) составит  $\Delta D = \Delta D_1 = \Delta D_2 = D_1 - D'_1 = 2\delta_2 z/\pi = 2,197 \cdot 10^{-6} 2z F/(\pi EJ)$ .

Если сила  $F = 7,75 \cdot 10^{-2}$  Н определена по формуле Максвелла [см. (4.24)], то  $\Delta D = 2,20 \cdot 10^{-4}$  м, что подтверждено экспериментальными данными в гл. 7.

### 5.4. Электромагнитные силы в области зубцов и пазов электрической машины

5.4.1. Радиальная электромагнитная сила, действующая на зубец сердечника электрической машины. Зубец сердечника, имеющий магнитную проницаемость  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , отделен от другого гладкого сердечника немагнитным зазором толщиной  $\delta$  (рис. 5.29).

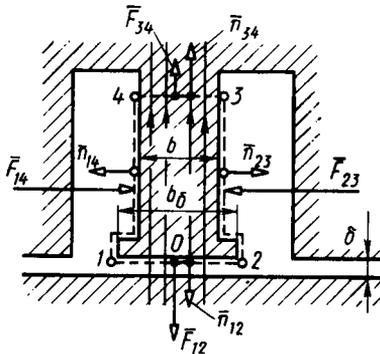


Рис. 5.29. К расчету ЭМС радиального тяжения, действующей на зубец сердечника электрической машины

Тело зубца имеет ширину  $b$  и длину  $l$ , наконечник зубца — ширину  $b_\delta$  и длину  $l_\delta$ . Зазор  $\delta$  мал по сравнению с шириной наконечника ( $\delta \ll b_\delta$ ). В зазоре и зубце возбуждено униполярное двухмерное магнитное поле, линии которого показаны на рис. 5.29.

Определить испытываемую зубцом силу радиального магнитного притяжения. Полагая, что магнитная проницаемость зубца во много раз больше, чем магнитная проницаемость в зазоре и пазах ( $\mu = \mu_0 \mu_r \gg \mu_0$ ), можно пренебречь полем в пазах и учитывать только

радиальные составляющие индукции поля в зазоре  $B_\delta$  и в зубце  $B = B_\delta b_\delta l_\delta / (bl)$ .

Силу  $F$ , действующую на объем зубца  $V_{1234}$  выделенный поверхностью  $S_{1234}$ , можно найти, выражая ее через натяжения на поверхности  $S_{1234}^+$ , охватывающей объем  $V_{1234}$  целиком и расположенной на участках 12, 14, 23 в среде с магнитной проницаемостью  $\mu_0$ , а на участке 34 — в среде с магнитной проницаемостью  $\mu$ :

$$\bar{F} = \int_{S_{12}^+} \bar{T}_{n12} dS + \int_{S_{34}} \bar{T}_{n34} dS + \int_{S_{14}^+} \bar{T}_{n14} dS + \int_{S_{23}^+} \bar{T}_{n23} dS.$$

При принятых допущениях силы  $\int_{S_{14}^+} \bar{T}_{n14} dS$  и

$\int_{S_{23}^+} \bar{T}_{n23} dS$ , приложенные к поверхностям  $S_{14}^+$  и  $S_{23}^+$ , в сумме равны нулю, и сила  $F$  складывается из интегралов по поверхностям  $S_{12}^+$  и  $S_{34}^+$ . Тогда, учитывая  $\bar{T}_{n12} = \bar{n}_{12} B_\delta^2 / (2\mu_0)$ ,  $\bar{T}_{n34} = \bar{n}_{34} B^2 / (2\mu)$ , получим

$$\bar{F} = \bar{F}_{12} + \bar{F}_{34} = \int_{S_{12}^+} \bar{T}_{n12} dS + \int_{S_{34}^+} \bar{T}_{n34} dS = \frac{B_\delta^2 l_\delta b_\delta}{2\mu_0} \left( 1 - \frac{l_\delta b_\delta}{\mu_r l b} \right) \bar{n}_{12}.$$

Сила  $\bar{F}$  тянет зубец в сторону зазора. При больших  $\mu \gg 1$  она мало зависит от  $\mu_r$  и при  $\mu_r = \infty$  равна  $F_\infty = 0,5 B_\delta^2 l_\delta b_\delta / \mu_0$ , что соответствует формуле, используемой при проектировании электрических машин и подтверждается экспериментальными данными. При малых  $\mu_r$ , близких к единице, принятые допущения оказываются справедливыми только в случае, когда  $l_\delta = l$  и  $b_\delta = b$  и зубец имеет форму параллелепипеда. В этом случае

$$F = (B_\delta^2 l_\delta b_\delta / (2\mu_0)) (1 - 1/\mu_r).$$

Причем эта формула справедлива при любых  $\mu_r$ . Зависимость силы  $F$ , представленной в относительной форме ( $F/C$ ) от относительной магнитной проницаемости сердечника  $\mu_r$ , приводится на рис. 5.30. Здесь  $C = B_\delta^2 l_\delta b_\delta / (2\mu_0)$ .

5.4.2. Электромагнитный момент, действующий на область паза с током в простейшей электрической машине. Рассмотрим простейшую электрическую машину, разрез которой показан на рис. 5.31. Ее сердечник статора 2 содержит два диаметрально распо-

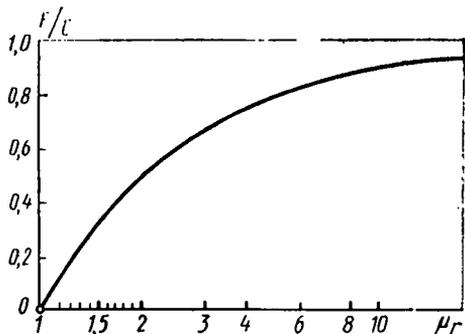


Рис. 5.30. Зависимость ЭМС, действующей на зубец сердечника, от магнитной проницаемости зубца  $\mu_r$ .

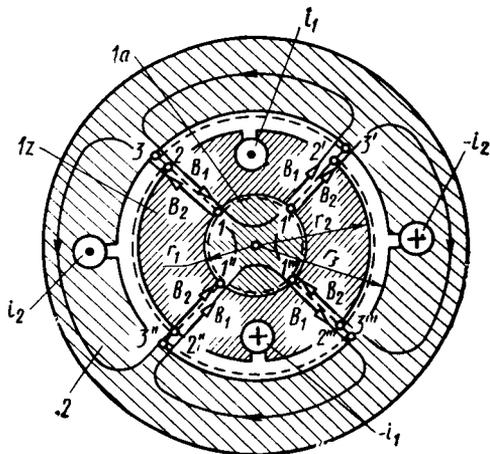


Рис. 5.31. К расчету ЭММ, действующего на область паза с током в электрической машине

ложенных паза с токами  $i_2$ , сердечник ротора  $I$  — два диаметрально расположенных паза с токами  $i_1$ . Пазы статора и ротора имеют произвольную форму и размеры. Зубцы сердечника ротора (12) обладают постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_z = \mu_0 \mu_r = \text{const}$ . Магнитная проницаемость сердечника статора 2 и ярма ротора 1а настолько велика, что ее можно считать бесконечно большой  $\mu = \infty$ . Заданы следующие размеры: наружный радиус ярма ротора (вала)  $r_1$ ; наружный радиус сердечника ротора  $r_2$ ; внутренний радиус сердечника статора  $r_3$ ; расчетная длина зазора  $l_\delta$ , совпадающая с длиной сердечников.

Определить вращающие электромагнитные моменты  $M_{1\text{II}}$  и  $M_1$ , действующие соответственно на паз ротора и на ротор в целом.

▲ Решение задачи следует начать с определения двумерного магнитного поля в пределах активной длины машины. Имея в виду линейность задачи, представим это поле в виде наложения двух полей: магнитного поля статора, возбужденного токами  $i_2$ , и магнитного поля ротора, возбужденного токами  $i_1$ .

Причем на достаточно большом удалении от токов, возбуждающих эти поля (от токов  $i_2$  для поля статора и от токов  $i_1$  для поля ротора), индукции и того, и другого поля в пространстве между сердечником статора и ярмом ротора ( $r_3 > r > r_1$ ) содержат только радиальные составляющие:  $\bar{B}_2 = \bar{B}_{2r}$ ;  $\bar{B}_1 = \bar{B}_{1r}$ . Тангенциальные составляющие этих индукций обращаются в нуль:  $\bar{B}_{2\theta} = 0$ ;  $\bar{B}_{1\theta} = 0$ .

Исходя из условия непрерывности, выразим индукцию магнитного поля статора  $B_2$  на произвольном радиусе  $r$  через индукцию  $B_{2\delta}$  на среднем радиусе зазора  $r_\delta = (r_3 + r_2)/2$ :

$$B_2 = B_{2\delta} r_\delta / r,$$

а индукцию поля ротора — через индукцию  $B_{1\delta}$ :

$$B_1 = B_{1\delta} r_\delta / r.$$

Напряженность этих полей

в зубцовом слое ротора ( $r_2 > r > r_1$ )

$$H_2 = B_2 / \mu_z = B_{2\delta} r_\delta / (\mu_z r), \quad H_1 = B_1 / \mu_z = B_{1\delta} r_\delta / (\mu_z r);$$

в зазоре ( $r_3 > r > r_2$ )

$$H_2 = B_2 / \mu_0 = B_{2\delta} r_\delta / (\mu_0 r); \quad H_1 = B_1 / \mu_0 = B_{1\delta} r_\delta / (\mu_0 r).$$

Исходя из закона полного тока

$$i_2/2 = \int_{r_1}^{r_2} H_2 dr + \int_{r_2}^{r_3} H_2 dr, \quad \text{найдем} \quad B_{2\delta} = i_2 / (2r_\delta k_{13}),$$

$$\text{где} \quad k_{13} = \frac{1}{\mu_z} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\mu_0} \ln \frac{r_3}{r_2}.$$

$$\text{Аналогично,} \quad B_{1\delta} = i_1 / (2r_\delta k_{13}).$$

Электромагнитный момент на область паза ротора в объеме  $V_{122'1'}$ , охваченный поверхностью  $S_{122'1'}$ , можно выразить или через плотности электромагнитных сил по формулам Максвелла для  $\vec{f}$  [см. (4.46)] и  $\vec{f}_S$  [см. (4.33),] или через натяжения по формуле Максвелла для  $\bar{T}_n$  [см. (4.26)]. Результаты всегда будут одними и теми же. Однако для определения момента через  $\vec{f}$  и  $\vec{f}_S$  требуется знать распределение магнитного поля в области пазов ротора, которое можно найти только численным путем. В то время как для определения момента через  $\bar{T}_n$  нужно знать только индукции магнитного поля  $B_1$  и  $B_2$  на достаточном удалении от пазов, которые были найдены ранее аналитически.

Для определения момента  $M_{111}$ , действующего на область паза ротора с током  $i_1$  через натяжения  $\bar{T}_n$  по (4.26), охватим этот паз поверхностью  $S = S_{1233'2'1'1'}$ , след которой показан пунктиром. Эта поверхность выбрана таким образом, что она охватывает паз ротора, на который действует момент  $M_{111}$ , и проходит через такие точки поля, индукции в которых можно легко рассчитать.

На участке  $11'$  эта поверхность располагается в ярме ротора  $1a$ , обладающем  $\mu = \infty$ , где натяжения равны нулю.

На участке  $33'$ , прилегающем к границе с сердечником статора ( $\mu = \infty$ ), индукции нормальны к этой границе. Поэтому, как следует из (4.26), натяжения на участке  $33'$  также нормальны к границе и не принимают участия в образовании момента  $M_{111}$ .

На радиальных участках  $123$  и  $1'2'3'$ , достаточно удаленных от пазов с токами  $i_1$  и  $i_2$ , индукции  $B_1$  и  $B_2$  от этих токов имеют радиальное направление и определяются записанными ранее формулами.

Заметим, что выбранная охватывающая поверхность  $S_{1233'2'1'}$  включает не только элементы объема ротора, но и элементы объема зазора. Однако это не скажется на определяемом моменте  $M_{111}$ , поскольку к объему ротора добавляются объемы зазора, внутри которых  $\vec{f} = 0$  (так как  $\mu_0 = \text{const}$ ).

Таким образом, момент  $M_{111}$  складывается из моментов, действующих на радиальные участки поверхности  $1233'2'1'$ :

$$M_{111} = \bar{q}_z \int_S [\vec{r} \bar{T}_n] dS = \bar{q}_z \int_{S_{13}} [\vec{r} \bar{T}_n] dS + \bar{q}_z \int_{S'_{13}} [\vec{r} \bar{T}'_n] dS.$$

Поскольку индукции  $B_1$  и  $B_2$  тангенциальны по отношению к поверхностям  $S_{13}$  и  $S'_{13}$  (т. е.  $\bar{B}_1 = \bar{B}_{1\tau}$ ,  $\bar{B}_2 = \bar{B}_{2\tau}$ ) и имеют на поверхности  $S'_{13}$  одинаковые направления, а на поверхности  $S_{13}$  — противоположные, с помощью (4.26) легко найти натяжения на этих поверхностях:

$$\bar{T}_n = -\frac{B_\tau^2}{2\mu_i} \bar{n} = -\frac{B_\tau^2}{2\mu_i} \bar{q}_\theta; \quad \bar{T}'_n = -\frac{(B'_\tau)^2}{2\mu_i} \bar{n}' = \frac{(B'_\tau)^2}{2\mu_i} \bar{q}_\theta,$$

где  $B_\tau = B_1 - B_2$ ;  $B'_\tau = B_1 + B_2$ ,  $i \in z$ , 0.

Тогда, исходя из уравнения для  $M_{\text{пн}}$ , получим

$$\begin{aligned}
 M_{\text{пн}} &= 0,5l_{\delta} \int_{r_1}^{r_3} (1/\mu_i) (B_i^2 - (B_i')^2) r dr = 2l_{\delta} \int_{r_1}^{r_3} (1/\mu_i) B_1 B_2 r dr = \\
 &= 2B_{1\delta} B_{2\delta} l_{\delta} r_{\delta}^2 \left( \int_{r_1}^{r_2} dr/(r\mu_z) + \int_{r_2}^{r_3} dr/(r\mu_0) \right) = 2B_{1\delta} B_{2\delta} l_{\delta} r_{\delta}^2 k_{13} = \\
 &= i_1 B_{2\delta} l_{\delta} r_{\delta},
 \end{aligned}$$

где  $k_{13} = (1/\mu_z) \ln(r_2/r_1) + (1/\mu_0) \ln(r_3/r_2)$ .

Как видно из рис. 5.31, момент на ротор в целом складывается из двух одинаковых моментов  $M_{\text{пн}}$ , действующих на области пазов ротора, выделенные поверхностями  $133'1'$  и  $1'1'3'3''1''$ , и из моментов, действующих на объемы сердечника ротора, выделенные поверхностями  $122''1''$  и  $1'2'2'''1'''$ .

Поскольку внутри поверхности  $122''1''$  и  $1'2'2'''1'''$  объемные плотности ЭМС  $f = 0$  (так как  $\mu_z = \text{const}$ ), а поверхностные плотности ЭМС  $f_s$  на поверхностях разрыва магнитной проницаемости  $22''$ ,  $2'2'''$ ,  $11''$ ,  $1'1'''$  имеют радиальное направление и в образовании момента не участвуют, всегда равны нулю и моменты, действующие на эти объемы ротора. Поэтому электромагнитный момент на ротор в целом равен удвоенному моменту на область паза ротора:

$$M_1 = 2M_{\text{пн}} = 2i_1 B_{2\delta} l_{\delta} r_{\delta}.$$

Полученную формулу применяют при проектировании электрических машин. Формула эта напоминает формулу для момента  $M = iBlr$ , действующего во внешнем двухмерном магнитном поле с индукцией  $B$  на ток  $i$ . Однако это сходство только кажущееся. Существенное различие между ними состоит в том, что через индукцию  $B_{2\delta}$  поля в зазоре, образованного токами  $i_2$ , выражается полный момент  $M_{\text{пн}}$ , действующий на паз с током и равный сумме двух моментов: момента  $M_{\text{пн}i}$ , приложенного непосредственно к току  $i_1$ , и момента  $M_{\text{пн}} - M_{\text{пн}i}$ , приложенного к граничной поверхности между пазом и зубцами сердечника.

Отношение тангенциальной силы  $F_i$ , действующей непосредственно на ток  $i_1$ , к полной силе  $F$ , действующей на область паза с током, подробно анализируется в [26], а также в примере 5.13, где кривизна зазора и сердечников не учитывается. Как видно из рис. 5.32, момент  $M_{\text{пн}}$ , действующий на область паза, не зависит ни от радиальных размеров сердечника, ни от его магнитной проницаемости  $\mu_z$ .

**5.4.3. Распределение сил в области паза с током в электрической машине.** Проанализируем силы в локальных областях, характерных для электрических машин, и в областях отдельных пазов сердечников. Поле в области паза электрической машины существ-

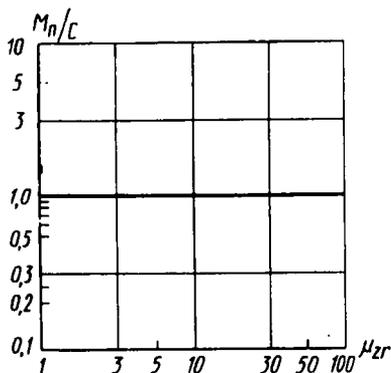


Рис. 5.32. Зависимость ЭММ, действующего на область паза с током в электрической машине, от магнитной проницаемости сердечника  $\mu_{zr}$

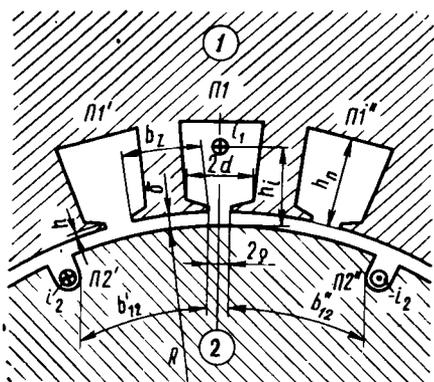


Рис. 5.33. Определение сил, действующих на область паза  $\Pi I$  с током  $i_1$  во внешнем поле, образованном токами  $i_2$  и  $-i_2$

венно сложнее, чем поля, рассмотренные в предыдущих примерах. Тем не менее в том случае, когда учитывается зубчатость только одного из сердечников, а другой сердечник считается гладким, магнитное поле в области паза зубчатого сердечника при определенных допущениях можно найти аналитически методом конформного преобразования.

**Постановка задачи.** Найдем тангенциальную силу, действующую на область паза  $\Pi I$  сердечника 1 (рис. 5.33). Поместим в пазу линейный ток  $i_1$  на расстоянии  $h_1$  от гладкой поверхности сердечника 2. Предположим, что искомая тангенциальная сила образуется в результате взаимодействия тока  $i_1$  с внешним полем, образованным токами  $i_2$  и  $-i_2$  в пазах  $\Pi 2'$  и  $\Pi 2''$  сердечника 2.

С целью упрощения задачи примем следующие допущения:

1. Магнитная проницаемость сердечников 1 и 2 бесконечно велика ( $\mu_c = \infty$ );
2. Глубина паза  $h_{\Pi}$  настолько велика ( $h_{\Pi} \geq 3,0 \rho$ ), что на дне паза на расстоянии  $h_{\Pi}$  от зазора индукция внешнего поля пренебрежимо мала;
3. Расстояния  $b_z$  до соседних пазов  $\Pi I'$  и  $\Pi I''$  сердечника 1 настолько велики ( $b_z \geq 3 \delta$ ), что их влиянием на поле в области паза  $\Pi I$  можно пренебречь;
4. Расстояния  $b'_{12}$  и  $b''_{12}$  до пазов  $\Pi 2'$  и  $\Pi 2''$  сердечника 2, в которых размещаются токи  $i_2$  и  $-i_2$ , настолько велики ( $b'_{12} \geq 3\delta$  и  $b''_{12} \geq 3\delta$ ), что внешнее поле в области паза  $\Pi I$  не зависит от формы пазов  $\Pi 2'$  и  $\Pi 2''$ .
5. Кривизна зазора  $\delta/R$  настолько мала ( $\delta/R \approx 0$ ), что с ее влиянием на поле можно не считаться.

При этих допущениях поле в области рассматриваемого паза  $П I$  изменится несущественно, если:

1) соседние пазы  $П I'$  и  $П I''$  сердечника 1 и пазы  $П 2'$  и  $П 2''$  сердечника 2 с токами  $i_2$  и  $-i_2$  удалить бесконечность и вместо сердечника 1 и сердечника 2 со многими пазами рассматривать сердечник 1 с одиночным пазом  $П I$  и гладкий сердечник 2;

2) кольцевой зазор с кривизной  $1/R \approx 0$  заменить полосовым с той же толщиной  $\delta$ , обладающим кривизной  $1/R = 0$  за счет перехода к  $R = \infty$ ;

3) полузакрытый паз (рис. 5.33) заменить одной из двух упрощенных моделей паза — пазом прямоугольной формы (рис. 5.34, а), в котором ширина паза  $2d$  принята равной ширине шлица паза ( $2d = 2\rho$ ), или пазом с бесконечно тонким усиком (см. 5.38, а), в котором ширина паза  $2d$  и ширина шлица  $2\rho$  сохранены такими же, как на рис. 5.33, а высота усика  $h$  сделана равной нулю ( $h = 0$ ); причем в первой и второй модели местоположение тока  $i_1$ , определяемое размером  $h_i$ , сохранено; а высота паза сделана бесконечно большой ( $h_n = \infty$ ).

Переходя к определению магнитного поля в области паза первой или второй модели (по рис. 5.34, а или 5.38, а) в силу принятых допущений ( $\mu_c = \infty$ ) можно находить это поле в виде суммы двух симметричных полей: нечетного поля от тока  $i_1$  (по рис. 5.34, а или 5.38, а) и четного поля от токов  $i_2$  и  $-i_2$  (по рис. 5.35, а или 5.39, а).

Силы в модели паза прямоугольной формы. Сначала определим силы и поле в области первой модели паза — паза прямоугольной формы. Нечетное поле от тока  $i_1$  в такой модели показано на рис. 5.34, а, нечетное — от токов  $i_2$  и  $-i_2$  — на рис. 5.35, а. В силу симметрии этих полей они могут быть определены только на одной половине области паза в пределах внутренней вырожденного четырехугольника  $nkml$ , расположенного в комплексной плоскости  $z = x + jy$ . Вершины  $k$  и  $m$  этого

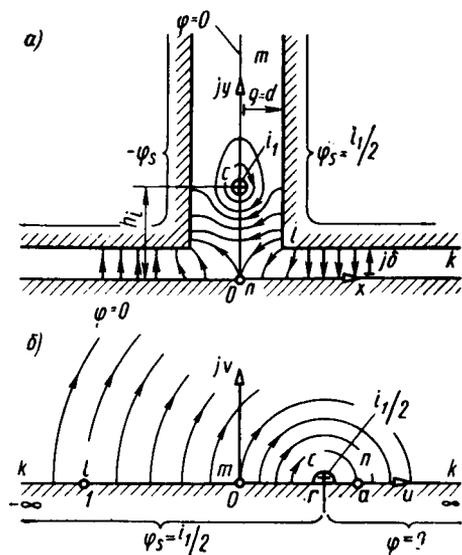


Рис. 5.34. Поле произвольного тока  $i_1$ , расположенного на оси бесконечно глубокого прямоугольного паза:

а — нечетное исходное поле в комплексной плоскости  $z$ ; б — конформное преобразование этого поля в области полупаза на верхнюю часть комплексной плоскости  $t$

четырёхугольника образуются пересекающимися в бесконечности параллельными сторонами и имеют координаты  $z_k = +\infty$ ;  $z_m = +j\infty$ ; вершины  $n$  и  $l$  координаты  $z_n = 0$ ,  $z_l = d + jd$ . Нечетное поле в пределах четырёхугольника  $nklm$  определяется при следующих условиях на участках его границы: на участке  $klmc$  потенциал  $\varphi_s = i_1/2$ ; на участке  $cnk$  потенциал  $\varphi = 0$ . Четное поле определяется при граничных условиях: на участке  $mlk$ , потенциал  $\varphi_c = i_2$ ; на участке  $mn$  функция потока  $\psi = \text{const} = 0$ , на участке  $nk$  потенциал  $\varphi = 0$ . Для определения этих полей используем конформное преобразование Шварца — Кристоффеля [21], с помощью которого границы четырёхугольника  $nklm$  превратим в действительную ось  $u$  комплексной плоскости  $t = u + jv$  (рис. 5.34, б), а внутрен-

ренность четырёхугольника превращается в верхнюю часть плоскости  $t$ , располагающуюся над действительной осью. Одну из вершин четырёхугольника, например  $k$ , поместим в плоскости  $t$  в бесконечности ( $t_k = \pm\infty$ ), вершину  $l$  — в произвольной точке с координатой  $t_l = -1$ ; вершину  $m$  — в произвольную точку с координатой  $t_m = 0$ ; вершину  $n$  — в точку с координатой  $t_n = a$ , которую следует определить. После этого можно записать дифференциальное уравнение Шварца — Кристоффеля

$$dz/dt = S \sqrt{t+1} / (t \sqrt{t-a}). \quad (5.61)$$

Путем интегрирования (5.61) получим уравнение преобразования координат:

$$z = 2S \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right] + L, \quad (5.62)$$

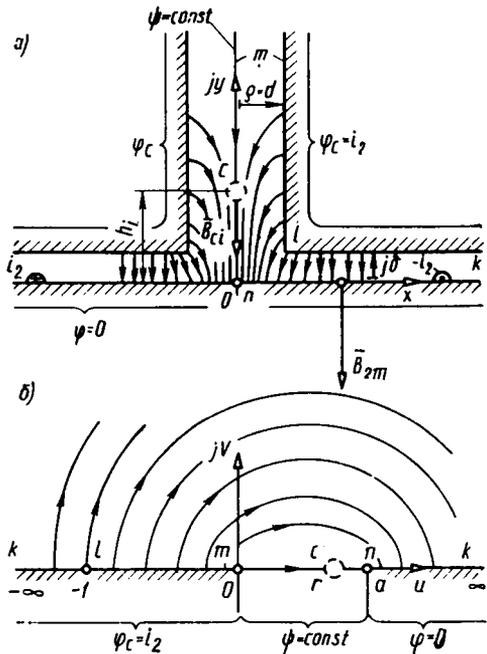


Рис. 5.35. Внешнее униполярное поле в области бесконечно глубокого прямоугольного паза, образованное достаточно удаленными от паза токами  $i_2$  и  $-i_2$ :

$a$  — исходное четное поле в комплексной плоскости  $z$ ;  $b$  — конформное преобразование этого поля в области полупаза на верхнюю часть комплексной плоскости  $t$

где

$$\eta = \sqrt{(t-a)/(t+1)} \quad (5.63)$$

— промежуточная комплексная переменная;

$$a = (\delta/d)^2 = (\delta/\rho)^2; \quad S = \delta/\pi; \quad L = 0 \quad (5.64)$$

— постоянные, определяемые из уравнений связи между координатами вершин четырехугольника в плоскостях  $z$  и  $t$ .

Чтобы найти координату тока  $i_1$  в плоскости  $t$  ( $t_c = r$ ), нужно решить нелинейное уравнение (5.62) с учетом (5.63), (5.64) относительно  $t = t_c = r$  при  $z = z_c = jh_i$ . Определив  $t_c = r$ , можно приступить к определению нечетного поля от тока  $i_1$  методом конформного преобразования. При использовании этого метода граничные условия, заданные в плоскости  $z$  для искомого нечетного поля, переносим без изменения на сходственные участки границы многоугольника в плоскости  $t$  (рис. 5.34, б). После чего при этих граничных условиях определяем комплексную потенциальную функцию искомого нечетного поля в плоскости  $t$ . Найти ее нетрудно, так как в плоскости  $t$  это поле превращается в поле тока  $i_2/2$ , лежащего в точке  $t_c = r$  на ферромагнитной плоскости  $v = 0$ . Комплексная потенциальная функция этого поля  $\psi_S$  совпадает с комплексной потенциальной функцией нечетного поля;

$$\psi_S = \frac{\Psi_S}{\pi} \ln \frac{(t-r)}{a} = \frac{i_1}{2\pi} \ln \frac{(t-r)}{a}. \quad (5.65)$$

Через эту функцию с учетом (5.61), (5.64) нетрудно выразить напряженность нечетного поля в плоскости  $z$ :

$$H_S = \left| \frac{d\psi_S}{dz} \right| = \left| \frac{d\psi_S}{dt} \right| \cdot \left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{i_1 t \sqrt{t-a}}{2\delta (t-r) \sqrt{t+1}}. \quad (5.66)$$

Поступая таким же образом, можно выяснить, что четное поле от токов  $i_2$  и  $-i_2$  после конформного преобразования превращается в поле двух бесконечно тонких и бесконечно протяженных пластин с потенциалами  $\psi_C = i_2$  и  $\psi = 0$ , расстояние между которыми равно  $a$  (рис. 5.35, б). Комплексную потенциальную функцию этого поля, совпадающую с комплексной потенциальной функцией четного поля, можно найти по формуле

$$\omega_C = \frac{\Psi_C}{\pi} \operatorname{arsh} \left( \frac{2t}{a} - 1 \right) = \frac{i_2}{\pi} \operatorname{arsh} \left( \frac{2t}{a} - 1 \right). \quad (5.67)$$

Через эту функцию с учетом (5.61), (5.64) нетрудно выразить напряженность четного поля в плоскости  $z$ :

$$H_C = \left| \frac{d\omega_C}{dz} \right| = \left| \frac{d\omega_C}{dt} \right| \cdot \left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{i_2}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}}. \quad (5.68)$$

Тангенциальную силу  $F_{н1}$ , действующую на область паза, тангенциальную силу  $F_{i1}$ , действующую на ток  $i_1$  в пазу, и тангенциальную силу  $F_{c1}$ , действующую на ферромагнитные стенки паза, можно выразить через натяжения  $\bar{T}_n$  на охватывающих поверхностях, показанных пунктирными линиями соответственно на рис. 5.36, а — в. Силу  $F_{н1}$ , действующую на всю область паза с током  $i_1$ , наиболее просто определить, если охватить паз с током  $i_1$  поверхностью  $1233'2'1'$ , которая пересекает зазор в таком удалении от паза, где и нечетное, и четное поля в зазоре становятся равномерными, а их напряженности по (5.66), (5.68) достигают максимальных (по абсолютной величине) значений:

$$H_S(t=\infty) = H_{Sm} = i_1 / (2\delta);$$

$$H_C(t=\infty) = H_{Cm} = i_2 / \delta.$$

$$(5.69)$$

Так как  $\mu_c = \infty$ , то натяжение на участке, охватывающем поверхности  $233'2'$ , равно нулю и в создании тангенциальной силы  $F_{н1}$  принимают участие только натяжения на участках  $12$  и  $1'2'$ , которые выражаются через напряженности результирующего поля  $H_{12}$  и  $H'_{12}$  на этих участках:

$$\bar{T}_{n12} = -0,5\mu_0 H_{12}^2 \bar{n} = -0,5\mu_0 H_{12}^2 \bar{q}_x;$$

$$\bar{T}'_{n12} = -0,5\mu_0 (H'_{12})^2 \bar{n}' = -0,5\mu_0 (H'_{12})^2 \bar{q}_x, \quad (5.70)$$

где  $H_{12} = H_{Cm} - H_{Sm}$ ;  $H'_{12} = H_{Cm} + H_{Sm}$ .

Результирующее натяжение на участках  $12$  и  $1'2'$

$$\bar{T}^z_{n12} = \bar{T}'_{n12} + \bar{T}_{n12} = -2\mu_0 H_{Cm} H_{Sm} \bar{q}_x. \quad (5.71)$$

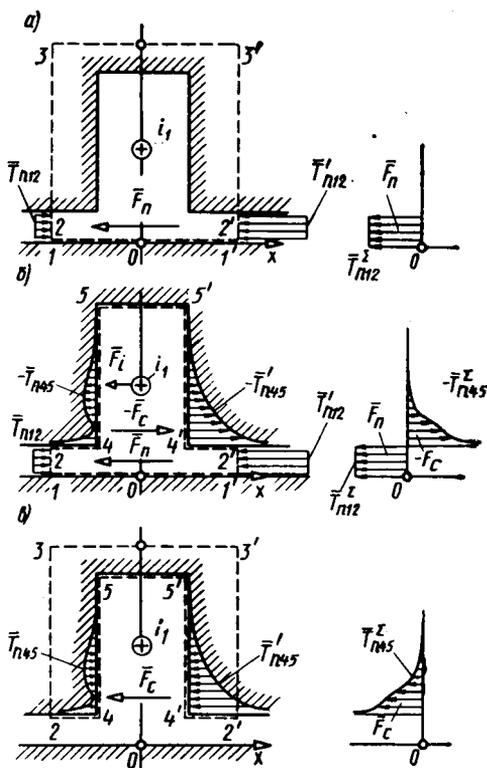


Рис. 5.36. К определению сил, действующих на область паза (см. рис. 5.34, а) с током  $i_1$  во внешнем магнитном поле токов  $i_2$  и  $-i_2$ :

а — к определению результирующей силы  $F_{н1}$ ;  
 б — к определению силы на ток в пазу  $F_{i1}$ ;  
 в — к определению силы на сердечник  $F_{c1}$ .

Через это натяжение по (4.6) легко выразить силу  $\bar{F}_{II}$ , действующую на область паза,

$$\begin{aligned}\bar{F}_{II} &= \int_{S_{12}} \bar{T}_n dS = \int_0^{\delta} \bar{T}'_{n12} dy + \int_0^{\delta} \bar{T}_{n12} dy = \\ &= \int_0^{\delta} \bar{T}_{n12}^{\Sigma} dy = -\mu_0 i_1 H_{cm} \bar{q}_x = -i_1 B_{cm} \bar{q}_x,\end{aligned}\quad (5.72)$$

где  $B_{cm} = \mu_0 i_2' \delta$  — индукция внешнего четного поля в зоне зазора, в которой это поле делается равномерным, и искажающее влияние паза на это поле полностью исчезает.

Таким образом, мы приходим к неожиданному заключению\*, что сила, действующая на область паза с током  $i_1$  во внешнем четном поле, образованном токами  $i_2$  и  $-i_2$ , оказывается равной силе, которая действовала бы на ток  $i_1$ , помещенный в такую зону гладкого зазора  $\delta$ , в которой внешнее четное поле становится равномерным, а его индукция достигает максимального (по абсолютной величине) значения  $B_{cm} = \mu_0 H_{cm} = \mu_0 i_2' \delta$ .

Тангенциальная сила  $F_{II}$ , действующая на всю область паза, складывается из двух тангенциальных сил:  $F_c$ , приложенной к ферромагнитным стенкам паза, и  $F_i$ , приложенной непосредственно к току  $i_1$  в пазу. Для определения тангенциальной силы  $F_c$  стенки паза следует охватить поверхностью  $233'2'4'5'54$ , показанной на рис. 5.36 пунктирной линией и совпадающей на участке  $233'2'$  с поверхностью  $1233'2'1'$  (рис. 5.36, а). По тем же причинам, что и при определении силы  $F_{II}$ , в создании силы  $F_c$  принимают участие только натяжения на участках  $45$  и  $4'5'$ , которые выражаются через напряженности результирующего поля  $H_{45}$  и  $H'_{45}$  на этих участках:

$$\begin{aligned}\bar{T}_{n45} &= 0,5\mu_0 H_{45}^2 \bar{n} = 0,5\mu_0 H_{45}^2 \bar{q}_x; \\ \bar{T}'_{n45} &= 0,5\mu_0 (H'_{45})^2 \bar{n}' = -0,5\mu_0 (H'_{45})^2 \bar{q}_x,\end{aligned}\quad (5.73)$$

где  $H_{45} = H_c - H_s$ ;  $H'_{45} = H_c + H_s$ .

Результирующее натяжение на участках  $45$  и  $4'5'$

$$\bar{T}_{n45}^{\Sigma} = \bar{T}'_{n45} + \bar{T}_{n45} = -2\mu_0 H_c H_s \bar{q}_x.\quad (5.74)$$

Через это натяжение тангенциальная сила  $\bar{F}_c$ , действующая на стенки паза, выражается по (4.6) следующим образом:

$$\bar{F}_c = \int_{S_{12}} \bar{T}_n dS = \int_0^{\infty} \bar{T}'_{n45} dy + \int_0^{\infty} \bar{T}_{n45} dy = \int_{y=\delta}^{\infty} \bar{T}_{n45}^{\Sigma} dy.$$

\* Тот же результат при  $\mu_2 \neq \infty$  был получен через натяжения (см. пример 5.12).

Учитывая (5.74), (5.66), (5.68), получим

$$\bar{F}_c = - \frac{\mu_1 i_1 i_2 \bar{q}_x}{\delta^2} \int_{y=\delta}^{\infty} \frac{t \sqrt{t} \sqrt{t-a}}{(t+1)(t-r)} dy.$$

Заметив, что  $z_l = b + j\delta$  (точка  $l$ ) и  $z_m = 0 + j\infty$  (точка  $m$ ) на рис. 5.34,  $a$  соответствует  $t_l = -1$  и  $t_m = 0$  на рис. 5.34, б, и, выражая с помощью (5.61)  $dy$  через  $dt$ :

$$dy = \frac{jdy}{j} = \frac{dz}{j} = \frac{\delta \sqrt{t+1}}{j\pi t \sqrt{t-a}} dt,$$

перейдем к интегрированию в комплексной плоскости  $t$  и найдем окончательное выражение для силы, действующей на стенки паза:

$$\begin{aligned} \bar{F}_c &= - \frac{\mu_0 i_1 i_2 \bar{q}_x}{j\delta\pi} \int_{t=-1}^0 \frac{\sqrt{t} dt}{\sqrt{t+1}(t-r)} = \\ &= - \frac{\mu_0 i_1 i_2 \bar{q}_x}{\delta} \left( 1 - \sqrt{\frac{r}{r+1}} \right) = \bar{F}_n \left( 1 - \sqrt{\frac{r}{r+1}} \right). \end{aligned} \quad (5.75)$$

где  $\bar{F}_n$  — полная сила, действующая на область паза [см. (5.72)].

Выясним теперь, какая тангенциальная сила  $F_i$  приложена непосредственно к току  $i_1$  в пазу. Для выражения этой силы через натяжения целесообразно охватить ток  $i_1$  поверхностью  $12455'4'2'1'$ , показанной на рис. 5.36, б пунктирной линией. На участках  $12$  и  $1'2'$  совместим эту поверхность с охватывающей поверхностью  $1233'2'1'$  на рис. 5.36, а. Учтем также, что при  $\mu_c = \infty$ , напряженности нечетного и четного полей на участках  $11'$ ,  $245$ ,  $2'4'5'$  содержат только нормальные к охватывающей поверхности составляющие. А это означает, что в образовании тангенциальной силы будут принимать участие только натяжения на участках  $12$  и  $1'2'$ , которые создают ранее определенную силу  $\bar{F}_n$  по (5.72), а также натяжения на участках  $45$  и  $4'5'$ , которые равны со знаком «-» натяжениям на этих участках поверхности, выраженным по (5.73), (5.74). Откуда следует, что

$$\bar{F}_i = \bar{F}_n + \int_{y=\delta}^{\infty} (-\bar{T}_{n45}) dy = \bar{F}_n - \bar{F}_c = -i_1 B_{cm} \bar{q}_x \sqrt{r/(r+1)}. \quad (5.76)$$

То же выражение для силы можно получить, исходя из объемной плотности ЭМС, в виде силы, действующей на ток  $i_1$  во внешнем четном поле. Эта сила равна

$$\bar{F}_i = -i_1 B_{ci} \bar{q}_x = -i_1 B_{cm} \bar{q}_x \sqrt{r/(r+1)}, \quad (5.77)$$

где  $B_{Ct} = \mu_0 H_{Ct}$  — индукция четного поля по (5.68) в точке расположения тока  $i_1$  с координатой  $z_c = 0 + jh_i$ , которой соответствует координата  $t = t_c = r$  в плоскости  $t$ :

$$B_{Ct} = (\mu_0 i_2 / \delta) \sqrt{r / (r + 1)}. \quad (5.78)$$

Как видно из рис. 5.37, на котором представлены зависимости относительной силы  $F_i / F_{\Pi} = F_i / (B_{Cm} i_1)$ , значение этой силы существенно зависит как от относительной ширины паза  $\rho / \delta$ , так и от положения тока в пазу, характеризуемого относительным расстоянием  $h_i / \delta$ . При заданной ширине паза ( $2\rho = 2d$ ) сила  $\bar{F}_i$  достигает наибольшей величины при  $h_i = 0$ , т. е. при токе  $i_1$ , вынесенном в зазор и помещенном на поверхности гладкого сердечника в точке  $n$ , которой в плоскости  $t$  (рис. 5.34, б) соответствует  $t_c = r = a = (\delta / \rho)^2$ . В этой точке, как следует из (5.77), она равна

$$\bar{F}_{im} = -i_1 B_{Cm} \bar{q}_x \sqrt{a / (a + 1)}. \quad (5.79)$$

Причем при  $\rho / \delta = 0$ , т. е. для бесконечно узкого паза, сила  $\bar{F}_{im} = \bar{F}_{\Pi} = -\mu_0 i_1 B_{Cm} \bar{q}_x$ . При токе  $i_1$ , бесконечно углубленном в паз ( $h_i = \infty$ ) и размещенном в точке  $m$ , которой в плоскости  $t$  (см. рис. 5.34, б) соответствует  $t_c = r = 0$ , сила  $\bar{F}_i$  по (5.77) обращается в нуль ( $\bar{F}_i = 0$ ). Для суждения о зависимости относительной силы  $F_c / F_{\Pi} = F_c / (B_{Cm} i_1)$  от размеров паза и от положения тока  $i_1$  в пазу можно воспользоваться также рис. 5.37. На этом рисунке кроме зависимостей  $F_i / (B_{Cm} i_1)$  приведена также относительная сила, действующая на всю область паза  $F_{\Pi} / (B_{Cm} i_1) = 1$ , которая при заданных  $B_{Cm}$  и  $i_1$  от размеров паза и положения тока в пазу не зависит.

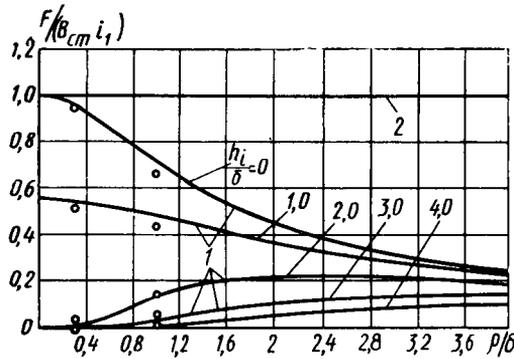


Рис. 5.37. Зависимость ЭМС, действующих на прямоугольный паз с током  $i_1$  (см. рис. 5.34, а) во внешнем четном поле токов  $i_2$  и  $-i_2$ :

1 — относительная сила  $F_i / (B_{Cm} i_1)$ , действующая на ток  $i_1$ ; 2 — суммарная относительная сила  $F_{\Pi} / (B_{Cm} i_1)$ , действующая на всю область паза

Поэтому исходя из (5.76) относительную силу  $F_c / (B_{Cm} i_1)$  можно определить по рис. 5.37 в виде расстояния между кривыми  $F_{\Pi} / (B_{Cm} i_1)$  и  $F_i / (B_{Cm} i_1)$ :

$$F_c / (B_{Cm} i_1) = F_{\Pi} / (B_{Cm} i_1) - F_i / (B_{Cm} i_1).$$

Наибольшего значения эта сила достигает при токе  $i_1$ , бесконечно углубленном в паз ( $h_i = \infty$ ), когда  $F_i = 0$  и  $F_c = F_{\Pi}$ . Однако, как

видно из рис. 5.37, уже при сравнительно небольших углублениях провода в паз сила  $F_i$  становится близкой к нулю, а сила  $F_c$  приближается к полной силе  $F_n$ , действующей на область паза. Например, при  $\varrho/\delta=1$  и  $h_i/\delta=2$  имеем  $F_i/(B_{cm}i_1) = 0,14$ ;  $F_c/(B_{cm}i_1) = 0,86$ ; а при  $\varrho/\delta = 0,6$  и  $h_i/\delta = 3$  имеем  $F_i/(B_{cm}i_1) = 0$ ;  $F_c/(B_{cm}i_1) = 1$ .

Наоборот, при токе  $i_1$ , вынесенном в зазор и помещенном на поверхности гладкого сердечника ( $h_i = 0$ ) сила  $F_i$  может составлять значительную часть от  $F_n$ , а сила  $F_c$  может быть сравнительно невелика. Например, при  $\varrho/\delta=1$  и  $h_i = 0$ , сила  $F_i/(B_{cm}i_1) = 0,7$ , сила  $F_c/(B_{cm}i_1) = 0,3$ .

Силы в модели полузакрытого паза с бесконечно тонким усиком. Определим силы и поля в области второй модели паза — полузакрытого паза с бесконечно тонким усиком.

Нечетное поле от тока  $i_1$  в такой модели паза показано на рис. рис. 5.38, а, четное — от токов  $i_2$  и  $-i_2$  на рис. 5.39, а. Так же как в прямоугольном пазу, эти поля симметричны и могут быть определены только на одной половине паза в пределах внутренности выродившегося пятиугольника  $nklfm$ , расположенного в комплексной плоскости  $z$ . Его вершины  $k$  и  $m$  образуются пересекающимися в бесконечности параллельными сторонами и имеют координаты  $z_k = \infty$  и  $z_m = +j\infty$ ; вершина  $f$  соответствует пересечению в точке  $z_f = \varrho + j\delta$  параллельных сторон многоугольника, образующих бесконечно тонкий ферромагнитный усик с магнитной проницаемостью  $\mu_c = \infty$ ; вершины  $n$  и  $l$  обладают координатами  $z_n = 0$  и  $z_l = d + j\delta$ . Нечетное поле в пределах пятиугольника  $nklfm$  определим при граничных условиях, указанных на рис. 5.38, а, четное — на рис. 5.39, а. Для определения этих полей [26] используем конформное преобразование Шварца — Кристоффеля, с помощью которого границы пятиугольника превращаются в действительную ось комплексной плоскости  $t$  (рис. 5.38, б), а его внут-

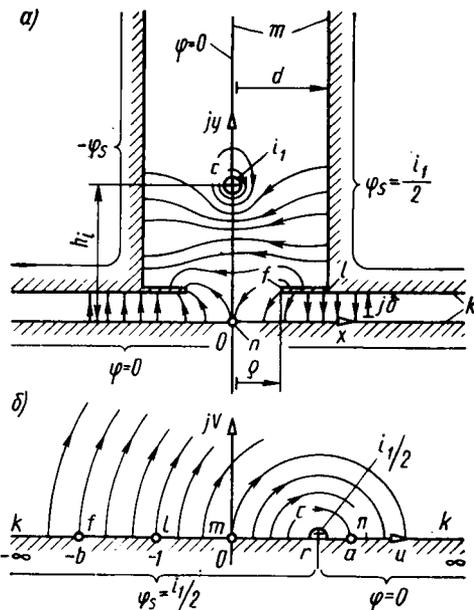


Рис. 5.38. Поле произвольного тока, расположенного на оси бесконечно глубокого прямоугольного полузакрытого паза с бесконечно тонкими «усиками»  $fl$ :  $a$  — исходное нечетное поле в комплексной плоскости  $z$ ;  $b$  — конформное преобразование этого поля в области полупаза на верхнюю часть комплексной плоскости  $t$

ренность — в верхнюю часть этой плоскости. Вершину  $k$  пятиугольника поместим в плоскости  $t$  в бесконечности ( $t_k = \pm\infty$ ), вершину  $l$  — в точке  $t_l = -1$ , вершину  $m$  — в точке  $t_m = 0$ ; вершины  $n$  и  $f$  — в точках с координатами  $t_n = a$  и  $t_f = -b$ , которые подлежат определению. После этого можно записать дифференциальное уравнение Шварца — Кристоффеля

$$\frac{dz}{dt} = S \frac{(t+b)}{t \sqrt{t+1} \sqrt{t-a}}. \quad (5.80)$$

Путем интегрирования (5.80) получим уравнения преобразования координат

$$z = S \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}}{1 - \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{(1-a)t-2a}{t(a+1)} \right] + L, \quad (5.81)$$

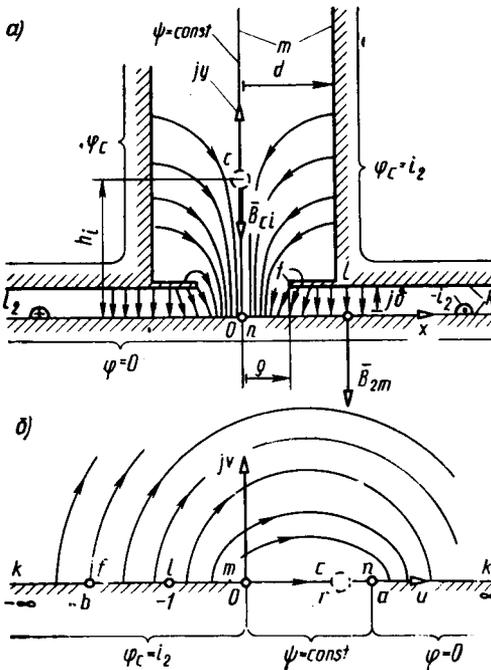


Рис. 5.39. Внешнее униполярное поле в области бесконечно глубокого прямоугольного паза с бесконечно тонкими «усиками»  $jl$ :  $a$  — исходное четное поле в комплексной плоскости  $z$ ;  $b$  — конформное преобразование этого поля в области полупаза на верхнюю половину комплексной плоскости  $t$

в котором

$$S = \delta/\pi; \quad L = d/2, \quad (5.82)$$

$a$  постоянная

$$a = (bd/d)^2 \quad (5.83)$$

выражается через постоянную  $b$ , определяемую из нелинейного уравнения

$$\rho = \frac{\delta}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\frac{b(d^2+b)}{d^2(b-1)}} + 1}{\sqrt{\frac{b(d^2+b)}{d^2(b-1)}} - 1} + \frac{d}{\pi} \arcsin \frac{2b+d^2-b^2}{b^2+d^2} + \frac{d}{2}. \quad (5.84)$$

Для решения (5.84) используем численные методы, например метод Ньютона [15]. Воспользовавшись (5.81)—(5.84), можно найти координату тока  $i_1$  в плоскости  $t$ ,  $t_c = r$ . Для этого нужно решить нелинейное уравнение (5.81) с учетом (5.82) — (5.84)

относительно  $t = t_c = r$  при  $z = z_c = jh_i$ . После этого можно приступить к определению нечетного поля тока  $i_1$  методом конформного преобразования. Перенеся граничные условия для этого поля по рис. 5.38, *a* без изменения на сходственные участки границы многоугольника в плоскости  $t$  (рис. 5.38, *б*), заметим, что нечетное поле в плоскости  $t$  ничем не отличается от нечетного поля прямоугольного паза в этой плоскости (см. рис. 5.34) и описывается той же комплексной потенциальной функцией  $w_S$ . Исходя из (5.65) и учитывая (5.80), найдем напряженность нечетного поля в модели по рис. 5.38, *a* в плоскости  $z$ :

$$H_S = \left| \frac{dw_S}{dz} \right| = \left| \frac{dw_S}{dt} \right| \left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{i_1 t \sqrt{t+1} \sqrt{t-a}}{2\delta (t+b) (t-r)}. \quad (5.85)$$

Учитывая, что четное поле от токов  $i_2$  и  $-i_2$  в плоскости  $t$  (рис. 5.39, *б*) ничем не отличается от четного поля прямоугольного паза в этой плоскости (см. рис. 5.35, *б*) и описывается той же комплексной потенциальной функцией  $w_C$  по (5.67), можно, обращаясь к (5.80), (5.82—5.84), найти напряженность поля в модели по рис. 5.39, *б* в плоскости  $z$ :

$$H_C = \left| \frac{dw_C}{dz} \right| = \left| \frac{dw_C}{dt} \right| \left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{i_2 \sqrt{t} \sqrt{t+1}}{\delta (t+b)}. \quad (5.86)$$

Выразим теперь тангенциальную силу  $F_n$ , действующую на область паза, тангенциальную силу  $F_i$ , действующую на ток  $i_1$  в пазу, и тангенциальную силу  $F_c$ , действующую на ферромагнитные стенки паза, через натяжения  $\bar{T}_n$  на охватывающих поверхностях, показанных пунктирными линиями на рис. 5.40, *a—в*. Для определения силы  $F_n$ , действующей на всю область паза с током  $i_1$ , охватим паз с током  $i_1$  поверхностью  $1233'2'1'$ , показанной на рис. 5.40. Эту поверхность выбираем таким же образом, как и в модели прямоугольного паза (см. рис. 5.36, *a*). Она пересекает зазор в таком удалении от паза, где и нечетное, и четное поля в зазоре становятся равномерными, а их напряженности по (5.85), (5.86) достигают максимальных (по абсолютной величине) значений:

$$H_{S(t=+\infty)} = H_{Sm} = i_1/(2\delta), \quad H_{C(t=\infty)} = H_{Cm} = i_2/\delta. \quad (5.87)$$

Сравнивая (5.87) с (5.69), замечаем, что напряженности  $H_{Sm}$  и  $H_{Cm}$  в случае модели полузакрытого паза с бесконечно тонким усиком получаются такими же, как в модели прямоугольного паза. Напомним, что в создании тангенциальной силы  $F_n$  в рассматриваемой модели паза по тем же причинам принимают участие также только натяжения  $\bar{T}_{n12}$  и  $\bar{T}'_{n12}$  на участках  $12$  и  $1'2'$  по (5.70), которые выражаются в рассматриваемой модели через напряженности на этих участках по (5.87):

$$H_{12} = H_{Cm} - H_{Sm}; \quad H'_{12} = H_{Cm} + H_{Sm},$$

поэтому результирующее натяжение на участках 12 и 1'2'

$$\bar{T}_{n12}^{\Sigma} = -2\mu_0 H_{Cm} H_{Sm} \bar{q}_x$$

по-прежнему выражается по (5.71), а сила  $\bar{F}_n$ , действующая на область паза, — по (5.72) и получается такой же, как в модели прямоугольного паза:

$$\bar{F}_n = \int_{S_{12}} \bar{T}_n dS = \int_0^{\delta} \bar{T}_{n12}^{\Sigma} dy = -i_1 B_{Cm} \bar{q}_x, \quad (5.88)$$

где  $B_{Cm} = \mu_0 i_2 / \delta$  — индукция внешнего поля в зоне зазора, где это поле делается равномерным и искажающее влияние паза на это поле полностью исчезает.

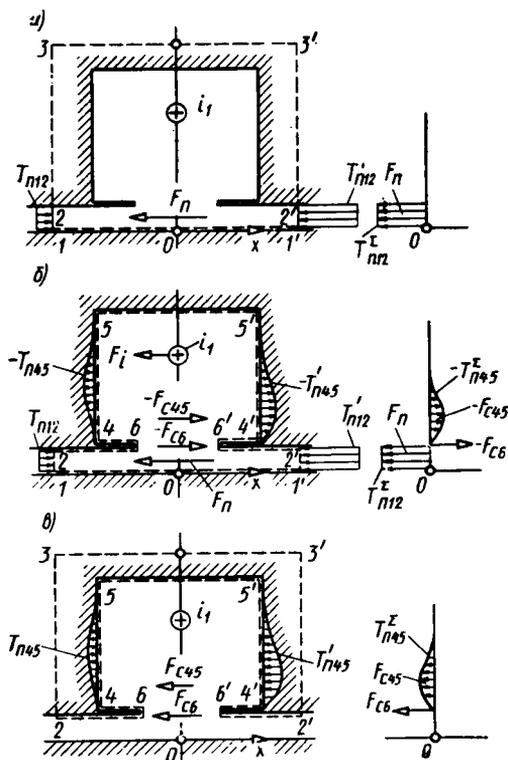


Рис. 5.40. Определение сил, действующих на область паза (см. рис. 5.38, а) с током  $i_1$  во внешнем магнитном поле токов  $i_2$  и  $-i_2$ :

а — результирующей силы  $F_n$ ; б — силы на ток в пазу  $F_c$ ; в — силы на стенки паза  $F_c$

Анализ выражения (5.88) позволяет прийти к заключению, что не только для двух рассмотренных моделей паза, но и вообще для одиночного паза любой формы (в случае бесконечно большой магнитной проницаемости ферромагнитного сердечника) сила  $F_n$ , действующая на область паза с током  $i_1$  во внешнем четном поле токов  $i_2$  и  $-i_2$ , оказывается равной силе на ток  $i_1$ , помещенный в такую зону гладкого зазора  $\delta$ , в которой внешнее четное поле становится равномерным, а его индукция достигает максимального (по абсолютной величине) значения

$$B_{Cm} = \mu_0 H_{Cm} = \mu_0 i_2 / \delta.$$

Причем для любой формы паза силу  $F_n$  можно определить по (5.72). Тангенциальная сила  $F_n$ , действующая на область паза (рис. 5.40, а), складывается из двух тангенциальных сил:  $F_c$ , приложенной к ферромагнитным стенкам

паза (рис. 5.40, *в*), и  $F_i$ , приложенной непосредственно к току  $i_1$  в пазу. Для определения тангенциальной силы  $F_c$ , действующей на стенки паза, следует охватить стенки паза поверхностью  $233'2'6'4'5'546$ , показанной на рис. 5.40, *в* пунктирной линией и совпадающей на участке  $233'2'$  с поверхностью  $1233'2'1'$  по рис. 5.40, *а*.

По тем же причинам, что и в прямоугольной модели паза, в создании силы  $F_c$  принимают участие только натяжения на участках  $45$  и  $4'5'$ , а также натяжения на остриях левого и правого бесконечно тонких усиков в точках  $b$  и  $b'$ . Таким образом, сила  $\bar{F}_c$  складывается из двух составляющих  $\bar{F}_{c45}$  и  $\bar{F}_{c6'}$ , индексы которых говорят об их пространственном распределении:

$$\bar{F}_c = \bar{F}_{c45} + \bar{F}_{c6'}. \quad (5.89)$$

Найдем сначала силу  $\bar{F}_c$ , выражающуюся через напряженности результирующего поля  $H_{45}$  и  $H'_{45}$  на участках  $45$  и  $4'5'$ . Натяжения на этих участках

$$\bar{T}_{n45} = 0,5\mu_0 H_{45}^2 \bar{q}_x; \quad \bar{T}'_{n45} = -0,5\mu_0 (H'_{45})^2 \bar{q}_x, \quad (5.90)$$

где  $H_{45} = H_C - H_S$ ;  $H'_{45} = H_C + H_S$ ;  $H_S$  и  $H_C$  — по (5.85), (5.86).

Результирующее натяжение на этих участках

$$\bar{T}_{n45}^\Sigma = \bar{T}'_{n45} + \bar{T}_{n45} = -2\mu_0 H_C H_S \bar{q}_x. \quad (5.91)$$

Через это натяжение сила  $\bar{F}_{c45}$  выражается по (4.24) следующим образом:

$$\bar{F}_{c45} = \int_{S_{12}} \bar{T}_n dS = \int_0^\infty \bar{T}'_{n45} dy + \int_0^\infty \bar{T}_{n45} dy = \int_0^\infty \bar{T}_{n45}^\Sigma dy.$$

Учитывая (5.91), (5.85), (5.86) и выражая с помощью (5.80)  $dy$  через  $dt$

$$dy = \frac{jdy}{i} = \frac{dz}{i} = \frac{\delta(t+b) dt}{j\pi t \sqrt{t+1} \sqrt{t-a}}, \quad (5.92)$$

замечаем, что  $z_l = j\delta$  (точка  $l$ ) и  $z_m = j\infty$  (точка  $m$ ) на рис. 5.38, *а* соответствуют  $t_\infty = -1$  и  $t_m = 0$  на рис. 5.38, *б*. Переходя к интегрированию в плоскости  $t$ , найдем окончательное выражение для силы  $\bar{F}_{c45}$ :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{c45} &= -\frac{\mu_0 i_1 i_2 \bar{q}_x}{j\pi\delta} \int_{t=-1}^{\infty} \frac{\sqrt{t} \sqrt{t+1}}{(t+b)(t-r)} dt = \\ &= \bar{F}_n \left( 1 - \frac{\sqrt{b} \sqrt{b-1}}{b+r} - \frac{\sqrt{r} \sqrt{r+1}}{b+r} \right). \end{aligned} \quad (5.93)$$

Силу  $F_{c6}$ , приложенную к остриям усиков в точках  $b$  и  $b'$ , также можно выразить через напряженность результирующего поля  $H_6$  и  $H'_6$  в этих точках и соответствующие им натяжения:

$$\bar{T}_{n6} = 0,5\mu_0 H_6^2 \bar{q}_x; \bar{T}'_{n6} = -0,5\mu_0 (H'_6)^2 \bar{q}_x, \quad (5.94)$$

где  $H_6 = H_C - H_S$ ;  $H'_6 = H_C + H_S$ .

При этом нужно иметь в виду, что результирующее натяжение обеих точек

$$\bar{T}_{n6}^\Sigma = \bar{T}'_{n6} + \bar{T}_{n6} = -2\mu_0 H_C H_S \bar{q}_x, \quad (5.95)$$

а также напряженности  $H_C$  и  $H_S$  в этих точках бесконечно велики. Поэтому при определении тангенциальной силы  $\bar{F}_{c6}$ , действующей на бесконечно тонкий усик ( $h = 0$ , см. рис. 5.33), приходится решать неопределенность типа  $T_{n6}^\Sigma h = \infty \cdot 0$ ,

$$\bar{F}_{c6} = \int_{S_{12}} \bar{T}_n dS = \int_{y=\delta}^{y=\delta+h} \bar{T}_{n6}^\Sigma dy. \quad (5.96)$$

Учитывая (5.85), (5.86), (5.95), выражая  $dy$  через  $dt$  по (5.92), замечаем, что  $z_f = \rho + j\delta$  (точка  $f$ ) на рис. 5.38,  $a$  соответствует  $t_f = -b$  на рис. 5.38,  $b$ . Переходя к интегрированию в плоскости  $t$ , произведем обход полюса в точке  $t_f = -b$  по окружности с бесконечно малым радиусом  $c_p \rightarrow 0$ . При этом  $t = -b + \xi$ , где  $\xi = c_p e^{j\gamma}$ ,  $\gamma = 0 \div \pi$ . Соответственно  $dt = d\xi$ . Тогда искомую силу  $F_{c6}$  по (5.96) можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{c6} &= -\frac{\mu_0 i_1 i_2 \bar{q}_x}{j\pi\delta} \int_{t=-b-c_p}^{t=-b+c_p} \frac{\sqrt{t} \sqrt{t+1} dt}{(t+b)(t-r)} = \\ &= -\frac{\mu_0 i_1 i_2 \bar{q}_x \sqrt{b} \sqrt{b-1}}{j\pi\delta (b+r)} \int_{\gamma=0: c_p=\text{const}}^{\gamma=\pi} \frac{d\xi}{\xi} = \\ &= -\frac{\mu_0 i_1 i_2 \bar{q}_x \sqrt{b} \sqrt{b-1}}{\delta (b+r)} = \bar{F}_n \frac{\sqrt{b} \sqrt{b-1}}{(b+r)}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Полная боковая сила  $\bar{F}_c$ , действующая на ферромагнитные стенки паза, складывается из сил по (5.93) и (5.97)

$$\bar{F}_c = \bar{F}_{c45} + \bar{F}_{c6} = \bar{F}_n \left( 1 - \frac{\sqrt{r} \sqrt{r+1}}{b+r} \right). \quad (5.98)$$

Для выражения силы  $F_i$ , приложенной непосредственно к току  $i_1$ , через натяжения охватим ток  $i_1$  поверхностью 12645 5' 4' 6' 2' 1', показанной на рис. 5.40,  $b$  пунктиром. На участках 12 и 1' 2' эта поверхность совпадает с поверхностью 1233' 2' 1' на

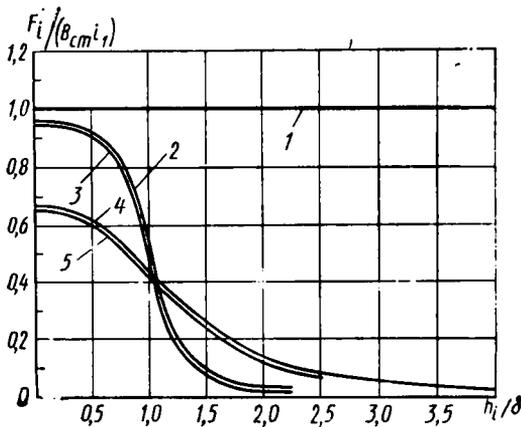


Рис. 5.41. Зависимость ЭМС, действующих на паз с током  $i_1$  (см. рис. 5.38, а) во внешнем четном поле токов  $i_2$  и  $-i_2$ :

1 — суммарная относительная сила  $F_n/Bcm i_1$ , действующая на всю область паза; 2 — относительная сила  $F_i/(Bcm i_1)$ , действующая на ток  $i_1$  при  $\rho/\delta=0,3$  и  $d/\delta=0,45$ ; 3 — то же при  $\rho/\delta=0,3$  и  $d/\delta=1,5$ ; 4 — то же при  $\rho/\delta=1$  и  $d/\delta=1,5$ ; 5 — то же при  $\rho/\delta=1$  и  $d/\delta=5$

рис. 5.40, а, а на участке 26455' 4' 6' 2' с поверхностью 326455' 4' 6' 2' 3' на рис. 5.40, в. А это означает, что в образовании тангенциальной силы  $F_i$  принимают участие натяжения на участках 12 и 1'2', которым соответствует сила  $\bar{F}_n$  по (5.88), а также взятые со знаком «—» натяжения на участке 26455' 4' 6' 2', которым соответствует сила  $-\bar{F}_c$  по (5.98). Откуда следует, что

$$\bar{F}_i = \bar{F}_n - \bar{F}_c = \bar{F}_n \frac{\sqrt{r} \sqrt{r+1}}{b+r}. \quad (5.99)$$

То же выражение для силы  $F_i$ , приложенной непосредственно к току, можно получить исходя из объемной плотности ЭМС, в виде силы, действующей на ток  $i_1$  во внешнем четном поле:

$$\bar{F}_i = -i_1 B_{C1} \bar{q}_x = \bar{F}_n \frac{\sqrt{r} \sqrt{r+1}}{r+b}, \quad (5.100)$$

где  $B_{C1} = \mu_0 H_{C1}$  — индукция четного поля по (5.86) в точке расположения тока  $i_1$  с координатой  $z_c = j h_i$ , которой соответствует координата  $t = t_c = r$  в плоскости  $t$ ,

$$B_{C1} = \frac{\mu_0 i_2 \sqrt{r} \sqrt{r+1}}{\delta (r+b)}. \quad (5.101)$$

Зависимости относительной силы  $F_i/F_n = F_i/(Bcm i_1)$  от соотношений размеров в области паза с бесконечно тонким усиком представлены на рис. 5.41. Как видно из рисунка, эта сила наиболее существенно зависит от положения тока в пазу, характеризуемого относительным расстоянием  $h_i/\delta$ . При заданных относительной ширине паза  $d/\delta$  и относительной ширине шлица паза  $\rho/\delta$  сила  $F_i$  достигает наибольшей величины при  $h_i = 0$ , т. е. при токе  $i_1$ , вынесенном в зазор и помещенном на поверхности гладкого сердечника в точке

$n$ , которой в плоскости  $t$  (см. рис. 5.38, б) соответствует  $t_c = r = a = (b\delta/d)^2$ . В этой точке, как следует из (5.100),

$$\bar{F}_{im} = \bar{F}_{II} (\sqrt{a} \sqrt{a+1}) / (a+b). \quad (5.102)$$

Причем при  $\rho/\delta = 0$  и  $d/\delta = 0$ , т. е. для бесконечно малой ширины шлица, когда  $a = \infty$ ,  $\bar{F}_{im} = \bar{F}_{II}$ .

При токе  $i_1$ , бесконечно углубленном в паз ( $h_i = \infty$ ) и размещенном в точке  $m$ , которой в плоскости  $t$  (рис. 5.38, б) соответствует  $t_c = r = 0$ , сила  $F_i$  по (5.100) обращается в нуль ( $F_i = 0$ ). Причем из приведенных кривых следует, что уже при  $h_i/\delta = 4,0$  сила  $F_i$  меньше  $0,02 F_{II}$ . Заметное влияние на величину силы оказывает относительная ширина шлица  $\rho/\delta$ . Это видно из сопоставления кривых 2 и 4. Наоборот, относительная ширина паза  $d/\delta$  имеет второстепенное значение. Об этом свидетельствует небольшое различие, например, между кривыми 1 и 2, построенными при одинаковых  $q/\delta = 0,3$  и сильно отличающихся  $d/\delta$  (0,45 для кривой 2 и 1,5 для кривой 3). Об этом же говорит и сопоставление относительных ЭМС  $F_i$  в модели паза прямоугольной формы ( $d/q = 1$ ) с ЭМС  $F_i$  в модели паза с тонким усиком при  $d/q = 5$ , которое приводится на

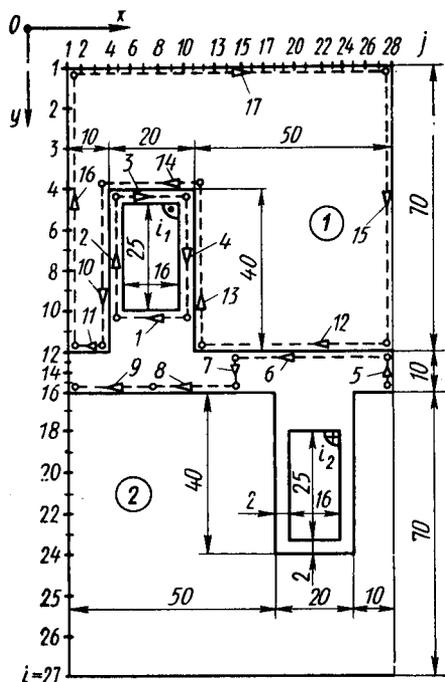


Рис. 5.42. Поперечный разрез простейшей электрической машины на полупериоде

рис. 5.37. Из рисунка видно, что значение ЭМС  $F_i$  в модели паза с тонким усиком, дискретные значения которых при  $\rho/\delta = 0,3$ ;  $h_i/\delta = 0 \div 3$  и  $q/\delta = 1$ ;  $h_i/\delta = 0 \div 4$  обозначены значками (o), мало отличаются от значений ЭМС  $F_i$  в модели прямоугольного паза при тех же соотношениях размеров  $q$ ,  $h_i$  и  $\delta$ .

**5.4.4. Распределение радиальных и тангенциальных сил на полупериоде простейшей электрической машины.** В предыдущем примере было проанализировано распределение тангенциальных сил в области паза электрической машины при бесконечно большой магнитной проницаемости сердечника. Представляет интерес выявить влияние насыщения сердечника на распределение как тангенциальных, так и радиальных сил в электрической машине.

Магнитное поле в насыщенной электрической машине можно

Таблица 5.1

Номер / участка кривой	Индукция $B$ , Тл	Коэффициенты полинома			
		$a_{0j}$	$a_{1j}$	$a_{2j}$	$a_{3j}$
1	0—0,5	470,0	0	150,1	—140,1
2	0,5—0,9	578,0	—476,3	758,0	—315,7
3	0,9—1,3	7924,4	—20745,9	18593,2	—5185,5
4	1,3—1,6	121419,3	—244600,7	161514,8	—34325,8
5	1,6—2,0	636235,1	—1034891,9	546079,1	—91658,5
6	2,0—2,6	—58946,2	168939,5	—136366,4	35504,1

рассчитать только численным путем. С целью его упрощения рассмотрим явнополюсную электрическую машину, полупериод которой показан на рис. 5.42. Поле машины образуется током  $i_1 = 90\ 000$  А в пазу 1 сердечника и током  $i_2 = 18\ 000$  А в пазу 2 сердечника. Направления этих токов показаны на рисунке. С целью выявления влияния насыщения на распределение электромагнитных сил расчет поля машины производился для сердечников, изготовленных из двух различных ферромагнитных материалов: 1) из материала, не насыщающегося при заданных токах и обладающего постоянной бесконечно большой магнитной проницаемостью  $\mu_r = 2400 \approx \infty$ , при которой  $\nu = 1/(\mu_0\mu_r) = 330$  м/Гн; 2) из материала, сильно насыщающегося при заданных токах и обладающего характеристикой  $\nu = 1/(\mu_0\mu_r) = f(B)$ , которая при  $B = (0 \div 2,6)$  Тл аппроксимируется полиномами вида  $\nu_u = a_{0j} + a_{1j}B + a_{2j}B^2 + a_{3j}B^3$ .

Коэффициенты полинома приведены в табл. 5.1.

Двухмерное магнитное поле в машине описывается уравнением для векторного потенциала

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial}{\partial x} A \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial}{\partial y} A \right) = J,$$

где  $J$  — плотность тока.

Для решения этого уравнения, записанного на основе метода конечных разностей в виде системы квазилинейных уравнений, используется метод Ньютона — Рафсона. Причем исходная система уравнений для г.о.пракки формируется путем обхода не узлов сетки, покрывающей область расчета (рис. 5.42), а ее ячеек по аналогии с тем, как это делается в методе конечных элементов\*.

Ориентация примененной сетки по отношению к осям системы координат  $x, y$ , а также индексация узлов и ячеек показаны на рис. 5.43. Каждая ячейка сетки обладает обратной магнитной проницаемостью  $1/\mu_{i,j} = \nu_{i,j}$ ; потенциал  $A_{i,j}$  отнесен к узлу, образо-

\* Алгоритм и программа расчета поля и сил, основанные на таком подходе, разработаны канд. техн. наук *Н. А. Серихиним*. Им же проведены расчеты.

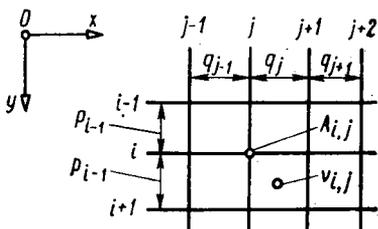


Рис. 5.43. Индексация ячеек и узлов сетки на полупериоде

Для расчета составляющих суммарной силы, действующей на поверхность, след которой представлен на рис. 5.44, применяют формулы, вытекающие из (4.26):

$$F_x = \left[ \int_S \bar{T}_n dS \right]_x = \frac{1}{2} \text{sign}(i_2 - i_1) \sum_{i=i_1}^{i_2} (B_{xi,j}^2 - B_{yi,j}^2) v_{ij} p_i f(i);$$

$$F_y = \left[ \int_S \bar{T}_n dS \right]_y = \text{sign}(i_2 - i_1) \sum_{i=i_1}^{i_2} B_{xi,j} B_{yi,j} v_{ij} p_i f(i),$$

$B_{xi,j}$ ;  $B_{yi,j}$  — составляющие индукции для  $i, j$  ячейки;  $v_{i,j} = 1/\mu_{i,j}$  — для  $i, j$  ячейки;  $f(i) = 0,5$ , если  $i = i_1$  или  $i = i_2$ ;  $f(i) = 1$  — в остальных случаях ( $f(i)$  учитывает «половинки» крайних ячеек при приближенном вычислении интеграла);  $p_i$  — шаги сетки по вертикали.

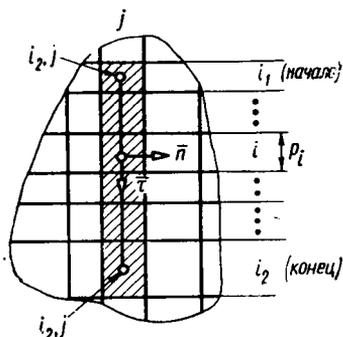


Рис. 5.44. Размещение вертикального следа поверхности  $(i_1, j)$ ,  $(i_2, j)$  по отношению к ячейкам сетки

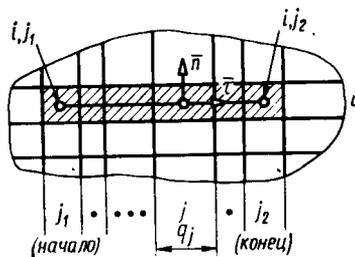


Рис. 5.45. Размещение горизонтального следа поверхности  $(i, j_1)$ ,  $(i, j_2)$  по отношению к ячейкам сетки

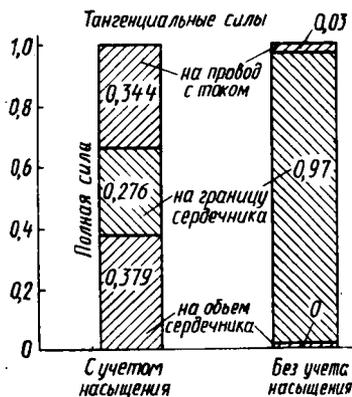


Рис. 5.46. Соотношение между составляющими тангенциальной силы, приложенной к полупериоду статора  $I$

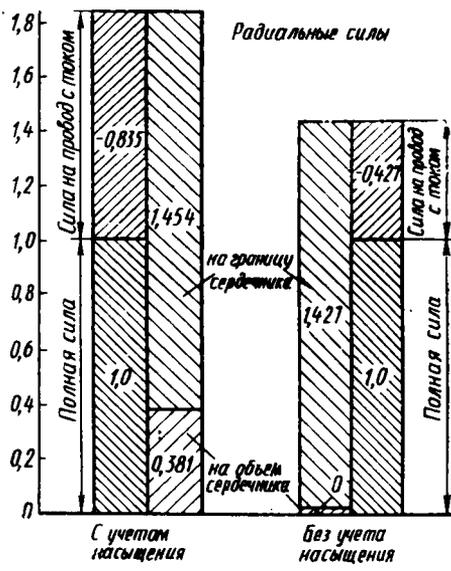


Рис. 5.47. Соотношение между составляющими радиальной силы, приложенной к полупериоду статора  $I$

Для расчета составляющих суммарной силы, действующей на поверхность, след которой представлен на рис. 5.45, применяют формулы, вытекающие из (4.26):

$$F_x = \left[ \int_S \bar{T}_n dS \right]_x = \text{sign}(j_1 - j_2) \sum_{j=1}^{j_2} B_{xj,i} B_{yj,j} q_j f(j);$$

$$F_y = \left[ \int_S \bar{T}_n dS \right]_y = \frac{1}{2} \text{sign}(j_1 - j_2) \sum_{j=1}^{j_2} (B_{yj,i}^2 - B_{xj,i}^2) q_j f(j),$$

Таблица 5.2

Результаты расчета ЭМС, действующих на полупериод статора  $I$  электрической машины по рис. 5.42

Силы	Тангенциальные силы по оси $x$ , Н/м		Радиальные силы по оси $y$ , Н/м	
	с учетом насыщения $\mu=f(B)$	без учета насыщения $\mu=\infty$	с учетом насыщения $\mu=f(B)$	без учета насыщения $\mu=\infty$
Сила на провод с током $i_1$	-11944 (0,344)	-2970 (0,0290)	-56340 (-0,835)	-255106 (-0,427)
Сила на границу сердечника $I$	-9571 (0,276)	-99348 (0,9701)	98103 1,454	851482 1,427
Сила на объем сердечника $I$	-13126 (0,379)	0 (0)	25702 (0,381)	0
Полная сила на полупериод статора $I$	-34641 (1)	-102318 (1)	67465 (1)	596376 (1)

где  $B_{xi,j}$ ,  $B_{yi,j}$ ,  $v_{i,j}$  — аналогично формулам для вертикальных следов;  $q_j$  — шаги сетки по горизонтали;  $f(j) = 0,5$ , если  $j = j_1$  и или  $j = j_2$ ;  $f(j) = 1,0$  — в остальных случаях.

С помощью этих формул определяют ЭМС, приложенную к полупериоду статора  $I$  (суммированием по следу 5, 6, 7, 8, охватывающему на рис. 5.42 полупериод статора  $I$ ), а также ЭМС, приложенную к проводу с током  $i_1$  (суммированием по следу 1, 2, 3, 4, охватывающему этот провод); ЭМС, приложенную к объему сердечника  $I$  (суммированием по следу 10, 11, 16, 17, 15, 12, 13, 14, охватывающему этот объем); ЭМС, приложенную к сердечнику  $I$  (в виде разности ЭМС, приложенных к полупериоду и к проводу); ЭМС, приложенную к границе сердечника  $I$  (в виде разности ЭМС, приложенных к сердечнику  $I$  и к его объему).

Результаты расчета радиальных и тангенциальных составляющих перечисленных ЭМС при  $\mu = f(B)$ , т. е. с учетом насыщения, и при  $\mu = \infty$ , т. е. без учета насыщения, представлены в табл. 5.2 и на рис. 5.46 и 5.47. При  $\mu = \infty$  тангенциальная ЭМС приложена в основном к границе сердечника, а радиальная ЭМС — к границе сердечника и к проводу с током. При  $\mu = f(B)$  влияние насыщения сердечника проявляется в уменьшении абсолютных значений ЭМС, а также в том, что значительная часть тангенциальной силы оказывается приложенной к объемам провода и сердечника. Часть радиальной силы в этом случае также оказывается приложенной к объему сердечника.

#### КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. Приведенные в статье примеры расчетов электромагнитных сил по формулам Максвелла для объемной (4.46) и для поверхностной (4.33) плотностей или для натяжений (4.24) приводят к одинаковым результатам, совпадающим с экспериментальными данными.

2. Найденное расчетным путем соотношение между объемными силами, действующими на элементы объема ферромагнитных тел, и поверхностными силами, действующими на элементы поверхности этих тел, также всегда соответствует экспериментальным данным.

3. Выполнение расчетов через натяжения всегда менее трудоемко, чем выполнение расчетов через плотности ЭМС.

## Анализ ошибочных формул для расчета плотностей электромагнитных сил и натяжений в магнитном поле

### 6.1. Общие сведения

В гл. 4 дано обоснование единственно правильных формул Максвелла для расчета натяжений  $\bar{T}_n$  (4.24) и  $T_{ik}$  (4.26) поверхностной плотности электромагнитных сил  $\bar{f}_S$  (4.33) и объемной плотности электромагнитных сил  $\bar{f}$  (4.47). Как показано в гл. 7, расчеты электромагнитных сил, выполненные по формулам Максвелла, всегда подтверждаются экспериментальными данными. Формулы Максвелла рекомендуются в большинстве руководств по теории электромагнитного поля [1, 17, 18, 19 и др.]. Эти формулы применяются при расчетах электромагнитных сил в электрических машинах и трансформаторах [3, 28, 29, 30 и др.].

Однако во многих работах по теории электромагнитного поля, например в [1, 17, 18, 19], наряду с упомянутыми формулами Максвелла для объемной плотности ЭМС  $\bar{f}$  (4.47) и натяжения  $T_{ik}$  (4.26) приводятся и другие ошибочные формулы для этих величин, предложенные в более поздней работе Максвелла [16, с. 514] и совпадающие с формулами А. Эйнштейна и И. Лауба [31, с. 126]. В достаточно многочисленных публикациях формулы Максвелла для  $\bar{T}_n$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{f}_S$  подвергаются сомнению и их предлагается заменить либо ошибочной формулой Максвелла для  $\bar{f}$  [16, с. 514, форм. (4)] и вытекающими из нее формулами для  $\bar{T}_n$  и  $\bar{f}_S$ , либо другими, по мнению авторов, более правильными формулами для этих величин. К сожалению, количество публикаций, в которых содержатся попытки ревизии Максвелловских формул, в последние годы даже увеличилось [12, 13, 32, 33, 34 и др.]. Анализ работ, в которых рекомендуются ошибочные формулы для  $\bar{T}_n$ ,  $\bar{f}$  и  $\bar{f}_S$ , отличающиеся от Максвелловских, проведен в [5, 6]. Он показывает, что появление ошибочных формул почти всегда связано с применением для их вывода так называемой неполной модели магнитного поля (модели Ампера), в которой правильно воспроизводится только индукция магнитного поля  $\bar{B}$ , а напряженность  $\bar{H}$  и плотность энергии магнитного поля  $w$  не воспроизводятся. При этом появление ошибочных формул связано не с тем, что неправоверна сама концепция Ампера, принятая Максвеллом. Ни у кого нет сомнений в том, что модель магне-

тика Ампера воспроизводит точно такое же поле индукций  $\bar{B}$ , как в оригинале. Это поле можно найти путем решения системы уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные явления в модели Ампера. Более того, определив напряженность поля в этой модели  $\bar{H}_* = \bar{B}/\mu_0$ , можно расчетным путем найти напряженность поля в оригинале  $\bar{H} = \bar{B}/\mu = \bar{H}_* \mu_0/\mu = \bar{H}_* - \bar{M}$ , и по ней определить плотность энергии магнитного поля в оригинале  $\omega = BH^2/2$ , а если необходимо, и силы, действующие в оригинале.

Если бы авторы упомянутых работ избрали такой путь использования модели Ампера, они получили бы формулы Максвелла для объемной плотности сил  $\bar{f}$  и для натяжений  $\bar{T}_n$ .

Однако они избирают иной путь получения формул для сил с помощью модели Ампера. Они считают, что *силы, действующие в оригинале на плотности токов  $\bar{J} = \text{rot } \bar{H}$  и магнетики, не отличаются от сил, которые действуют в самой модели Ампера либо на объемные плотности макротоков  $\bar{J}_* = \bar{J} + \bar{J}_M = \text{rot } (\bar{H} + \bar{M})$ , либо на поверхностные плотности микротоков  $\bar{j} = \bar{j} + \bar{j}_M = |(\bar{H} + \bar{M}) \bar{n}|$* . При этом модель Ампера рассматривается как физически реальный объект, в котором имеющиеся в оригинале магнитные среды с заданным распределением магнитной проницаемости  $\mu$  заменены немагнитной средой с магнитной проницаемостью  $\mu_0$ , а магнитное поле с такой же индукцией  $\bar{B} = \mu \bar{H}$ , как в оригинале, воспроизводится за счет добавления к заданным плотностям токов  $\bar{J} = \text{rot } \bar{H}$ , или  $\bar{j} = |\bar{H}\bar{n}|$  дополнительных макротоков с плотностью  $\bar{J}_M = \text{rot } \bar{M}$ , или дополнительных микротоков с плотностью  $\bar{j}_M = |\bar{M}\bar{n}|$ . При этом не учитывается неполнота модели Ампера в отношении воспроизведения напряженности поля  $\bar{H}$ .

В *неполной модели* правильно воспроизводится только индукция магнитного поля  $\bar{B}$ . Магнитная проницаемость среды уменьшается в  $\mu_r$  раз и делается в модели, равной  $\mu_0 = \mu/\mu_r$ .

Поскольку индукцию магнитного поля при уменьшенной магнитной проницаемости необходимо сохранить, напряженность поля в *неполной модели* нужно увеличить в  $\mu_r$  раз:

$$\bar{H}_* = \bar{B}/\mu_0 = \mu \bar{H}/\mu_0 = \mu_r \bar{H} = \bar{H} + (\mu_r - 1) \bar{H}.$$

Объемная плотность магнитной энергии  $\omega$  в *неполной модели* также не воспроизводится. Как и напряженность  $\bar{H}_*$ , плотность магнитной энергии в модели  $\omega_*$  завышена по сравнению с оригиналом в  $\mu_r$  раз:

$$\omega_* = H_* B/2 = \mu_r HB/2 = \mu_r \omega + (\mu_r - 1) \omega.$$

Применяя к определению сил, действующих в *неполной макро-*модели (модели Ампера), энергетические методы (см. гл. 3 и 4), можно прийти к заключению, что объемные плотности электромаг-

нитных сил  $\bar{f}_*$  и натяжения  $\bar{T}_{*n}$  в модели будут превосходить соответствующие величины в оригинале (в случае  $\mu = \text{const}$ ) также в  $\mu_r$  раз:  $\bar{f}_* = \mu_r \bar{f}$ ;  $\bar{T}_{*n} = \mu_r \bar{T}_n$ , т. е. будут находиться в том же соотношении, что и напряженности ( $\bar{H}_*$  и  $\bar{H}$ ) или объемные плотности энергии ( $\omega_*$  и  $\omega$ ). К сожалению, авторы ошибочных формул для  $\bar{f}_*$  и  $\bar{T}_{*n}$  игнорируют различие между силами в оригинале и в неполной модели — модели Ампера, рассматриваемой как реальный физический объект, и исходят из упомянутого ложного постулата о совпадении сил в модели и оригинале.

Чтобы убедиться в правильности формул Максвелла для  $\bar{T}_n$ ,  $\bar{f}_s$  и  $\bar{f}$  (4.24), (4.33), (4.47) и в ошибочности всех других формул для этих величин, проанализируем две возможные разновидности модели Ампера: неполной макромодели, поле в которой воспроизводится с помощью объемных токов с плотностью  $\bar{J}_* = \text{rot}(\bar{H} + \bar{M}) = \text{rot} \bar{H}_*$ , и неполной микромоделю, поле в которой воспроизводится с помощью поверхностных токов с плотностью  $\bar{j}_* = [(\bar{H} + \bar{M})\bar{n}]$ .

## 6.2. Неполная линейная макромодель магнитного поля

Эта модель предназначена для воспроизведения магнитного поля в нелинейных средах оригинала, заданного известным распределением  $\bar{J}$ . После того, как это поле рассчитано по § 1.1 и найдены для всей области поля распределения  $\bar{B} = f_B(x, y, z)$ ;  $\bar{H} = f_H(x, y, z)$  и  $\mu = B/H = \mu(x, y, z)$ , имеется возможность воспроизвести магнитное поле с таким же распределением  $B = f_B(x, y, z)$  в модели, в которой магнитно-линейные среды с  $\mu = \mu(x, y, z)$  заменены немагнитной средой с магнитной проницаемостью  $\mu_0$ . Поскольку в такой модели распределение напряженности поля  $\bar{H} = f_H(x, y, z)$ , а также объемной плотности магнитной энергии  $\omega$  не воспроизводится, в дальнейшем эта модель называется *неполной линейной макромоделью магнитного поля*. Обоснование этой модели (модели Ампера) дано в [1, с. 280], где показано, что для воспроизведения в немагнитной среде с проницаемостью  $\mu_0$  найденного распределения индукции  $\bar{B} = f_B(x, y, z) = \mu \bar{H}$  [ $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu(x, y, z)$ ] к заданному распределению макротокков с объемной плотностью  $\bar{J} = \text{rot} \bar{H}$  (см. рис. 1.9, а) необходимо добавить некоторые дополнительные макротокки с объемной плотностью

$$\bar{J}_M = \text{rot} \bar{M}, \quad (6.1)$$

где  $\bar{M} = (\mu_r - 1) \bar{H} = (\bar{B} - \mu_0 \bar{H})/\mu_0$  — намагниченность элемента объема поля в полной линейной макромодели;  $\mu_r = \mu/\mu_0 = \mu_r(x, y, z)$  — относительная магнитная проницаемость.

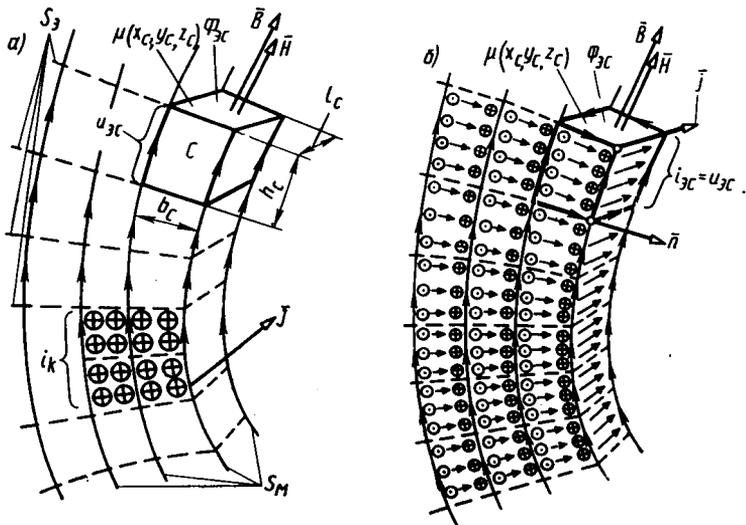


Рис. 6.1. Неполные линейные макромоделли (а) и микромоделли (б) магнитного поля

Таким образом, в неполной линейной макромоделли (рис 6.1,а) результирующие макротокки имеют плотность

$$\bar{J}_* = \bar{J} + \bar{J}_M = \text{rot } \bar{H} + \text{rot } \bar{M}. \quad (6.2)$$

Здесь и далее индекс «\*» при той или иной величине означает, что эта величина в неполной модели имеет иное значение, чем в оригинале. Этим плотностям токов в неполной модели соответствует увеличенная в  $\mu_r$  раз напряженность поля

$$\bar{H}_* = \bar{B}/\mu_0 = \mu_0 \mu_r \bar{H}/\mu_0 = \mu_r \bar{H} = \bar{H} + \bar{M}. \quad (6.3)$$

В области, где  $\mu_r = \mu_r(x, y, z) = \text{const}$  и  $\bar{J}_M = \text{rot } \bar{M} = \text{rot } (\mu_r - 1) \bar{H} = (\mu_r - 1) \text{rot } \bar{H} = (\mu_r - 1) \bar{J}$ , плотность результирующих макротокков в модели  $\bar{J}_*$  превышает плотность заданных макротокков  $\bar{J}$  в  $\mu_r$  раз,

$$\bar{J}_* = \bar{J} + \bar{J}_M = \mu_r \bar{J}. \quad (6.4)$$

Причем плотности токов  $\bar{J}_*$  направлены таким же образом, как и  $\bar{J}$  (сравните рис. 1.9, а и 6.1, а). В этом случае токи в возбуждающих контурах неполной модели  $i_{*k}$  превосходят заданные токи в возбуждающих контурах также в  $\mu_r$  раз:

$$i_{*k} = i_k + i_{kM} = i_k + (\mu_r - 1) i_k = \mu_r i_k. \quad (6.5)$$

Для воспроизведения граничных условий на поверхности разрыва магнитной проницаемости  $S_D$  между средами  $a$  и  $b$  в неполной модели вводятся поверхностные токи с плотностью

$$\vec{j}_{*s} = [(\overline{M}_a - \overline{M}_b) \vec{n}_b], \quad (6.6)$$

где  $\overline{M}_a = (\mu_{ar} - 1) \overline{H}_a$ ;  $\overline{M}_b = (\mu_{br} - 1) \overline{H}_b$  — намагниченности в элементах сред  $a$  и  $b$ , примыкающих к границе;  $\mu_{ar}$ ,  $\mu_{br}$  — относительные магнитные проницаемости в этих элементах.

Объемная плотность магнитной энергии в неполной линейной модели не воспроизводится. Как и напряженность  $H_*$  [см. (6.3)], она завышена по сравнению с полной линейной моделью в  $\mu_r$  раз. Применяя (1.54) для определения объемной плотности магнитной энергии  $w_*$  в неполной линейной модели, имеем

$$w_* = BH_*/2 = \mu_r BH/2 = \mu_r w. \quad (6.7)$$

Магнитная энергия неполной линейной модели  $W_*$  в объеме области поля  $V_0$  также во много раз превышает магнитную энергию полной линейной модели по (1.55)

$$W_* = \int_{V_0} w_* dV = \int_{V_0} \mu_r w dV \gg W. \quad (6.8)$$

Если во всей области поля  $\mu_r = \mu_r(x, y, z) = \text{const}$ , то энергия  $W_*$  превышает энергию  $W$  в  $\mu_r$  раз;

$$W_* = \int_{V_0} \mu_r w dV = \mu_r W. \quad (6.9)$$

Обращаясь к (1.59), (6.5), легко видеть, что в этом случае и энергия, приходящаяся на долю  $k$ -го возбужденного контура в неполной линейной модели, увеличивается в  $\mu_r$  раз:

$$W_{*k} = \Phi_k i_{*k}/2 = \mu_r \Phi_k i_k/2 = \mu_r W_k. \quad (6.10)$$

### 6.3. Неполная линейная микромодель магнитного поля

Эта модель (в отношении способа возбуждения магнитного поля с помощью микротоков) аналогична полной линейной микромодели (см. § 1.5, 1.6), но воспроизводится в ней с помощью поверхностных микротоков такое же магнитное поле, как в неполной линейной микромодели, т. е.  $\vec{B}$  — воспроизводится, а  $\vec{H}$  — не воспроизводится. Именно поэтому ее целесообразно называть *неполной линейной микромоделью*. Эта модель является дальнейшим развитием микроскопической модели, предложенной и рассмотренной в [32], в которой с помощью микротоков с поверхностной плотностью  $\vec{j}_s = [\overline{M}\vec{n}]$

воспроизводилась «поляризованная среда, заполняющая элементарный объем  $dV$  трубки  $\overline{M}$ ». В отличие от [32] в неполной линейной микромодели (рис. 6.1, б) используются поверхностные микротокки с плотностью

$$\vec{j}_* = [\overline{H}_* \vec{n}] = [(\overline{H} + \overline{M}) \vec{n}] = \mu_r \vec{j} = \vec{j} + \vec{j}_M, \quad (6.11)$$

где  $\vec{j} = [\overline{H} \vec{n}]$  по (1.43);  $\vec{j}_M = [\overline{M} \vec{n}]$  — плотности поверхностных микротокков, возбуждающих в каждой из элементарных ветвей магнитное поле с напряженностью  $\overline{M}$ .

Токи  $\vec{j}_*$  возбуждают в каждой из элементарных ветвей магнитного поля ту же напряженность по (6.3)  $\overline{H}_* = \overline{H} + \overline{M} = \mu_r \overline{H}$ , что и в неполной линейной макромодели (рис. 6.1, а). Рассмотрим более подробно возбуждение магнитного поля в  $c$ -й ветви неполной линейной микромодели по рис. 6.1, б. Как и другие ветви, эта ветвь возбуждается поверхностными токами с плотностью  $\vec{j}_*$  по (6.11), протекающими по боковым граням ветви. Направления этих токов на боковых гранях показаны на рисунке. На боковой грани  $c$ -й ветви с внешней нормалью  $\vec{n}$  плотность этих токов показана в виде вектора  $\vec{j}_*$ . Полный ток на этой грани равен магнитному напряжению ветви:

$$i_{*oc} = j_* h_c = H_* h_c = u_{*oc}, \quad (6.12)$$

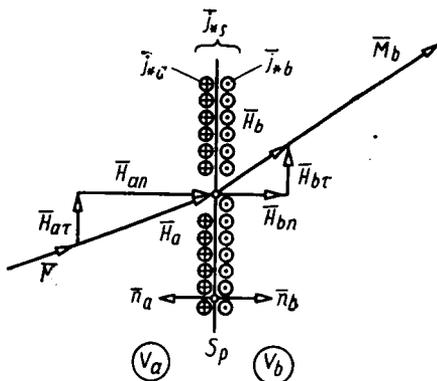
откуда следует, что модули  $\vec{j}_*$  и  $\overline{H}_*$  одинаковы ( $j_* = H_*$ ). Это относится и к остальным боковым граням ветви. Поэтому не будут отличаться и полные токи  $i_{*oc} = H_* h_c$  на боковых гранях ветви. Таким образом, образуется полный ток  $i_{*oc} = H_* h_c$ , охватывающий  $c$ -ю ветвь и возбуждающий в ней такое магнитное поле, как в неполной макромодели по рис. 6.1, а. (С такими же напряженностью  $\overline{H}_* = \overline{H} + \overline{M} = \mu_r \overline{H}$ , индукцией  $\overline{B} = \mu_0 \overline{H}_* = \mu_0 \mu_r \overline{H}$ , падением магнитного напряжения  $u_{*oc} = H_* h_c = \mu_r u_{oc}$  и магнитным потоком  $\Phi_{oc} = BS_c$ .) Причем, так же как в неполной макромодели, правильно воспроизведенными получаются только  $\overline{B}$  и  $\Phi_{oc}$ , а остальные величины оказываются завышенными в  $\mu_r$  раз:  $\overline{H}_* = \mu_r H$ ;  $u_{*oc} = \mu_r u_{oc}$ .

Как следует из (1.63), магнитная энергия  $c$ -й ветви также будет завышена в  $\mu_r$  раз:

$$W_{*oc} = i_{*oc} \Phi_{oc} / 2 = \mu_r i_{oc} \Phi_{oc} / 2 = \mu_r W_{oc}. \quad (6.13)$$

Совпадение магнитных полей, образованных макротокками с объемной плотностью  $\vec{J}_* = \text{rot} \overline{H}_*$  и микротокками с поверхностной плотностью  $\vec{j}_* = [\overline{H}_* \vec{n}]$ , объясняется тем, что макротокки  $\vec{J}_*$  представляют собой, в сущности, сумму микротокков  $\vec{j}_*$ . Это следует из приложения 1, которое может быть распространено на рассматриваемое поле, если заменить в нем  $H$  на  $\overline{H}_*$  и  $\vec{j}$  на  $\vec{j}_*$ .

Рис. 6.2. Граничные условия на поверхности разрыва магнитной проницаемости в неполной модели магнитного поля



В дополнение к этому можно показать, что микротоки на поверхности разрыва магнитной проницаемости  $S_p$  между средами  $a$  и  $b$  в неполной микромодели образуют в сумме именно тот поверхностный ток  $\vec{j}_{*s}$  [см. (6.6)], который воспроизводит граничные условия на этой поверхности в неполной макромодели. Для этого (см. §. 1.5.1), рассмотрим элемент поверхности  $S_p$  с внешней нормалью  $\vec{n}_b$  по отношению к среде  $a$  (рис. 6.2). Запишем выражения для поверхностных плотностей микротоков  $\vec{j}_{*a}$  и  $\vec{j}_{*b}$ , воспроизводящих тангенциальные составляющие напряженности поля  $\vec{H}_{*a\tau}$  и  $\vec{H}_{*b\tau}$  соответственно в средах  $a$  и  $b$ :

$$\vec{j}_{*a} = [\vec{H}_{*a} \vec{n}_b] = [(\vec{M}_a + \vec{H}_{a\tau} + \vec{H}_{an}) \vec{n}_b] = [(\vec{M}_a + \vec{H}_{a\tau}) \vec{n}_b];$$

$$\vec{j}_{*b} = [\vec{H}_{*b} \vec{n}_a] = [(\vec{M}_b + \vec{H}_{b\tau} + \vec{H}_{bn}) \vec{n}_a] = -[(\vec{M}_b + \vec{H}_{b\tau}) \vec{n}_b].$$

Складывая плотности микротоков на поверхности  $S_p$  и учитывая, что в соответствии с (1.5)  $\vec{H}_{a\tau} = \vec{H}_{b\tau}$ , убедимся в том, что их сумма равна плотности тока на этой поверхности  $\vec{j}_{*s}$  по (6.6) в неполной макромодели:

$$\vec{j}_{*a} + \vec{j}_{*b} = [(\vec{M}_a - \vec{M}_b) \vec{n}_b] = \vec{j}_{*s}.$$

#### 6.4. Формулы Львова для расчета натяжений и плотностей ЭМС, полученные с помощью неполной линейной макромодели магнитного поля

Для воспроизведения магнитного поля в магнитной среде с заданными распределениями  $\mu = \mu(x, y, z)$  и  $\vec{J} = \vec{j}_J(x, y, z)$  Львовым в [32] используются неполная линейная макромоделль по § 6.2.

Заданное поле с индукцией  $\vec{B} = \vec{f}_B(x, y, z) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$  воспроизводится в немагнитной среде ( $\mu = \mu_0$ ) объемными токами с плотностью  $\vec{J}_* = \vec{J} + \vec{J}_M$  по (6.2). По формуле Максвелла

(4.47) определяется для модели объемная плотность ЭМС\*, действующих на токи с плотностью  $\bar{J}_*$  [32, форм. (8)],

$$\bar{f}_* = [\bar{J}_* B] = [(\bar{J} + J_M) \bar{B}] = [J \bar{B}] + [(\text{rot } \bar{M}) \bar{B}]. \quad (6.14)$$

Затем исходя из (6.14) выводится для модели формула для натяжения [32, форм. (11)]:

$$\bar{T}_{*n} = \nu_0 (\bar{B} B_n - 0,5 \bar{n} B^2) = T_{*nn} \bar{n} + T_{*n\tau} \bar{\tau}, \quad (6.15)$$

где  $B_n = (\bar{B} \bar{n})$  — нормальная составляющая индукции магнитного поля ( $\nu_0 = 1/\mu_0$ );  $T_{*nn} = 0,5 \nu_0 (B_n^2 - B_\tau^2)$  — нормальная составляющая натяжения;  $T_{*n\tau} = \nu_0 B_n B_\tau$  — тангенциальная составляющая натяжения. Заметим, что формулу (6.15) для  $\bar{T}_n$  можно было бы записать и без вывода, поскольку при  $\mu = \mu_0$  она вытекает из формулы (4.24). Далее игнорируется, выявленная в 6.2 неэквивалентность выбранной модели в отношении напряженности и энергии магнитного поля и, следовательно, объемной плотности ЭМС и натяжений и делается заключение, что такие же  $\bar{f}_*$  по (6.14) и  $\bar{T}_{*n}$  по (6.15) будут иметь место не только в магнитном поле модели (в немагнитной среде), но и в магнитном поле оригинала (в магнитной среде). Однако в действительности ЭМС в оригинале в силу неадекватности модели будут совершенно иными.

Покажем это для случая  $\mu = \text{const}$ , выбрав в качестве оригинала магнитное поле (см. рис. 1.9, а), образованное токами  $i_k (k \in 1, \dots, N)$  или соответствующим распределением плотностей токов  $\bar{J}$ .

Поскольку  $\bar{M} = (\mu_r - 1) \bar{H}$ , видим, что в модели  $\bar{J}_M = \text{rot } \bar{M} = (\mu_r - 1) \bar{J}$  и, следовательно,

$$\bar{J}_* = \bar{J} + \bar{J}_M = \mu_r \bar{J}. \quad (6.16)$$

Это означает, что плотности токов  $\bar{J}_M$  и  $\bar{J}_*$  в макромодели по рис. 6.1, а имеют то же направление и распределение, что и плотности токов  $\bar{J}$  в оригинале (см. рис. 1.9, а). Причем  $\bar{J}_M$  превосходит  $\bar{J}$  в  $(\mu_r - 1)$  раз, а  $\bar{J}_*$  превосходит  $\bar{J}$  в  $\mu_r$  раз. Соответственно токи контуров  $i_{*k}$  в модели превосходят токи контуров  $i_k$  в оригинале в  $\mu_r$  раз. Это приводит к увеличению в  $\mu_r$  раз напряженности поля  $\bar{H}_* = \mu_r \bar{H} = (\bar{H} + \bar{M})$  и сохраняет индукцию во всех точках области поля модели  $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$ . При этом, как видно из сравнения  $\bar{f}_*$  в модели по (6.14) и  $f$  в оригинале по (4.47), объемная плотность ЭМС возрастает в  $\mu_r$  раз:

$$\bar{f}_* = [\bar{J}_* \bar{B}] = \bar{f} + \bar{f}_M = \mu_r [J \bar{B}] = \mu_r \bar{f}. \quad (6.17)$$

\* Здесь и далее величины  $\bar{f}$ ,  $\bar{T}_n$  и др., которые в неполной модели не производятся и не могут быть распространены на оригинал, отмечаются индексом «\*».

Кроме реально существующей ЭМС с плотностью  $\vec{f} = |\vec{J}\vec{B}|$ , действующей на токи с плотностью  $\vec{J}$  в оригинале, в модели появляются отсутствующие в оригинале ЭМС с плотностью  $\vec{f}_M = |\vec{J}_M\vec{B}| = (\mu_r - 1)\vec{f}$ , приложенные к токам с плотностью  $\vec{J}_M$ , которые воспроизводят в модели поле с индукцией  $\mu_0\vec{M}$ .

Таким образом, приходим к заключению, что формулу (6.14) недопустимо распространять на оригинал, как это необоснованно рекомендуется в [32]. Нельзя согласиться и с утверждением в [32] о том, что на магнетик оригинала с намагниченностью  $\vec{M}$  действует при  $\mu = \text{const}$  ЭМС с плотностью  $\vec{f}_M = |\vec{J}_M\vec{B}| = (\mu_r - 1)|\vec{J}\vec{B}|$ . В действительности при  $\mu = \text{const}$  никакие силы (кроме силы  $|\vec{J}\vec{B}|$ ) на элементы объема магнетика в оригинале не действуют.

Все сказанное относится и к формуле для натяжения  $\vec{T}_{*n}$  [см. (6.15)]. Натяжение  $\vec{T}_{*n}$  в модели также превосходит действительное натяжение  $\vec{T}_n$  в оригинале по (4.24) в  $\mu_r$  раз:

$$\vec{T}_{*n} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{B}B_n - 0,5B^2\vec{n}] = \mu_r\vec{T}_n = \vec{T}_n + (\mu_r - 1)\vec{T}_n. \quad (6.18)$$

Применяя ошибочные формулы для  $\vec{f}_*$  и  $\vec{T}_{*n}$  к расчету ЭМС  $\vec{F}_*$ , действующей на выделенный объем  $V$  по (4.2) или (4.6) и сравнивая полученную силу с ее правильным значением  $\vec{F}$ , выраженным через  $\vec{f}$  и  $\vec{T}_n$ , нетрудно убедиться, что ЭМС  $\vec{F}_*$  также завышена в  $\mu_r$  раз:

$$\vec{F}_* = \int_V \vec{f}_* dV = \int_S \vec{T}_{*n} dS = \int_V (\mu_r \vec{f}) dV = \int_S (\mu_r \vec{T}_n) dS = \mu_r \vec{F}.$$

Тот же результат для  $\vec{F}_*$  можно получить из энергетических соображений, перемещая объем  $V$  в модели на  $\Delta\vec{q}$  (на то же расстояние и в том же направлении, как в оригинале). Действительно, в модели взаимоиндуктивности между контурами и их приращения при перемещении на  $\Delta\vec{q}$  имеют вид

$$L_{*km} = \mu_0 \oint_{i_k} \oint_{i_m} \vec{dl}_k \vec{dl}_m / R_{mk} = L_{km} / \mu_r;$$

$$\Delta L_{*km} = (\partial L_{*km} / \partial q) \Delta q = \Delta L_{km} / \mu_r$$

уменьшаются по сравнению с оригиналом в  $\mu_r$  раз. Токи в контурах модели  $i_{*k} = \mu_r i_k$ ;  $i_{*m} = \mu_r i_m$  и другие увеличиваются по сравнению с оригиналом в  $\mu_r$  раз. Откуда следует, что энергия (коэнергия) магнитного поля в модели  $W_* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N i_{*k} i_{*m} L_{*km} = \mu_r W$  прево-

сходит энергию (коэнергию) в оригинале в  $\mu_r$  раз. Во столько же раз приращение коэнергии в модели

$$\Delta W'_{*q} \underset{(i_h = \text{const})}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N i_{*k} i_{*m} \Delta L_{*km} = \mu_r \Delta W'_q \underset{(i_h = \text{const})}{}$$

и сила  $\bar{F}_*$ , действующая на объем  $V$ , в модели

$$\bar{F}_* \underset{(\Delta q \rightarrow 0)}{=} \bar{n}_q \lim_{\Delta q} \frac{\Delta W'_{*q}}{\Delta q} = \frac{\bar{n}_q}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N i_{*k} i_{*m} \frac{\partial L_{*km}}{\partial q} = \mu_r \bar{F} \quad (6.19)$$

превосходят эти величины в оригинале.

Сила  $\bar{F}_* = \int_V (\bar{f} + \bar{f}_{*M}) dV = \bar{F} + \bar{F}_M$  состоит из двух составляющих: сила  $\bar{F} = \int_V \bar{f} dV$ , которая в действительности приложена к объему  $V$  в оригинале, и несуществующей в оригинале силы  $\bar{F}_M = \int_V \bar{f}_{*M} = (\mu_r - 1)\bar{F}$ , которая понимается в [32] как сила, приложенная в оригинале к магнетику в объеме  $V$ , а на самом деле имеется лишь в модели, где она приложена к токам  $i_{km}$  по (6.5) и плотностям токов  $\bar{J}_M$  по (6.1).

Формулам Львова для  $\bar{f}_*$  (6.14) и  $\bar{T}_{*n}$  (6.15) соответствует поверхностная плотность ЭМС  $\bar{f}_{*S}$  существенно отличающаяся от величины  $\bar{f}_S$  в оригинале по (4.33)

Для определения поверхностной плотности ЭМС  $\bar{f}_{*S}$ , по Львову, на поверхности разрыва магнитной проницаемости  $S_p$ , отделяющей среды  $a$  и  $b$  с магнитными проницаемостями  $\mu_a$  и  $\mu_b$ , можно воспользоваться общим уравнением для  $\bar{f}_S$  (4.32), выразив в этом уравнении натяжения в средах  $a$  и  $b$  по (6.15) или [32, форм. (11)] и представив их в виде суммы нормальной и тангенциальной составляющих:

$$\bar{f}_{*S} = \bar{T}_{*na} + \bar{T}_{*nb}, \quad (6.20)$$

где  $\bar{T}_{*na} = 0,5\mu_0 (H_{an}^2 - H_{*at}^2) \bar{n}_a + \mu_0 H_{*at} H_{*an} \bar{\tau}$ ;  $\bar{T}_{*nb} = 0,5\mu_0 (H_{bn}^2 - H_{*bt}^2) \bar{n}_b + \mu_0 H_{*bt} H_{*bn} \bar{\tau}$ ;

$\bar{n}_a$  — нормаль к поверхности  $S_p$ , направленная внутрь среды  $a$ ;  
 $\bar{n}_b$  — нормаль к поверхности  $b$ , направленная внутрь среды  $b$ .

Учитывая граничные условия на поверхности  $S_p$  в оригинале:

$B_{bn} = B_n = -B_{an}$ ;  $H_{b\tau} = H_{a\tau} = H_\tau$  и уравнения связи между составляющими напряженности в модели и составляющими индукции и напряженности в оригинале:  $H_{*an} = B_{an}/\mu_0$ ;

$$H_{*bn} = B_{bn}/\mu_0; H_{*a\tau} = \mu_{ar} H_{a\tau}; H_{*b\tau} = \mu_{br} H_{b\tau},$$

с помощью (6.20) получим следующую формулу для поверхностной плотности ЭМС на поверхности разрыва магнитной проницаемости между средами  $a$  и  $b$  по Львову:

$$\bar{f}_{*S} = \bar{n}_b H_{\tau}^2 \mu_{r(\text{ср})} (\mu_a - \mu_b) \div \bar{\tau} B_{bn} H_{\tau} (\mu_{br} - \mu_{av}), \quad (6.21)$$

где  $\mu_{r(\text{ср})} = (\mu_{ar} + \mu_{br})/2$  — средняя относительная магнитная проницаемость сред  $a$  и  $b$ .

Сравнивая (6.21), полученную с помощью неполной макромодели, исходя из (6.15) или [32, форм. (11)], с формулой Максвелла для  $\bar{f}_S$  (4.33), замечаем, что первый член (6.21), связанный с  $H_{\tau}^2$  и определяющий нормальную составляющую  $\bar{f}_{*S}$ , превышает в  $2\mu_{r(\text{ср})}$  раз первый член в (4.33). Второй член (6.21), определяющий тангенциальную составляющую силы, в (4.33) вообще не содержится. И, наоборот, второй член в (4.33), связанный с  $B_n^2$  и определяющий еще одну нормальную составляющую силы, не содержится в (6.21).

### 6.5. О расчете электромагнитной силы, действующей на магнитное тело или его часть, по ошибочным формулам для натяжения и плотностей

Выясним, к каким ошибкам в определении ЭМС, действующей на магнитное тело  $a$ , размещенное в магнитной среде  $b$  (рис. 6.3), приведет использование ошибочных формул Е. Л. Львова или других ошибочных формул для натяжений  $\bar{T}_{*nb}$  и плотностей ЭМС  $\bar{f}_{*S}$  и  $f_{*S}$ . С этой целью охватим тело  $a$  поверхностью  $S^+ = S_{ab}^+$ , прилегающей к поверхности разрыва магнитной проницаемости  $S_p = S_{ab}$  и расположенной в среде  $b$ , и выразим ЭМС по (4.6) и по ошибочной формуле для натяжения в среде  $b$  [например, по (6.15)]:

$$\bar{F}_* = \int_{S^+ = S_{ab}^+} \bar{T}_{*nb} dS. \quad (6.22)$$

Тот же результат для силы  $\bar{F}_*$  можно получить с помощью (4.48) и ошибочных формул для  $\bar{f}_{*S}$  в объеме  $V$  и для  $f_{*S}$  на поверхности  $S_p = S_{ab}$ , отделяющей тело  $a$  от окружающей среды  $b$  [например, по (6.14) и (6.21)]:

$$\bar{F}_* = \int_V \bar{f}_{*S} dV + \int_{S_p = S_{ab}} \bar{f}_{*S} dS = \int_{S^+ = S_{ab}^+} \bar{T}_{*nb} dS. \quad (6.23)$$

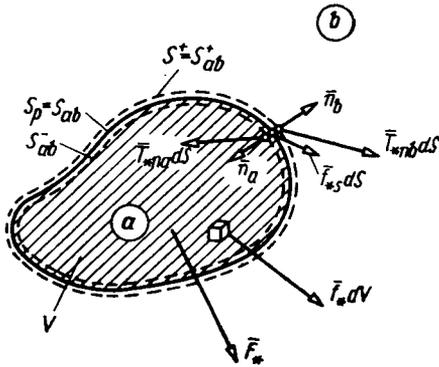


Рис. 6.3. К определению силы  $\bar{F}_*$ , действующей на магнитное тело, по формулам для  $\bar{j}_*$ ,  $\bar{j}_{*s}$  и  $\bar{T}_{*n}$ , выведенным с помощью неполных моделей магнитного поля

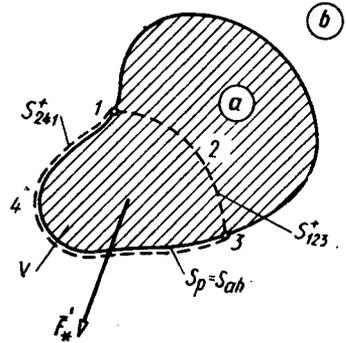


Рис. 6.4. К определению силы  $\bar{F}_*$ , действующей на часть магнитного тела в объеме  $V$

В этом можно убедиться, имея в виду, что при согласованных  $\bar{j}_*$ ,  $\bar{j}_{*s}$  и  $\bar{T}_{*n}$  всегда соблюдаются тождества, вытекающие из (6.20):

$$\int_V \bar{j}_* dV = \int_{S_{ab}^-} (-\bar{T}_{*na}) dS; \quad \int_{S_p = S_{ab}} \bar{j}_{*s} dS = \int_{S_{ab}^-} \bar{T}_{*na} dS + \int_{S_{ab}^+} \bar{T}_{*nb} dS. \quad (6.24)$$

В наиболее общем случае, когда тело  $a$  в объеме  $V$  имеет магнитную проницаемость  $\mu_a \neq \mu_0$  и среда  $b$  — магнитную проницаемость  $\mu_b \neq \mu_0$  ( $\mu_b$  может быть, в частности, равно  $\mu_a$ ), сила  $\bar{F}_*$  отличается от действительной силы  $\bar{F}$  в  $|\int_{S^-} \bar{T}_{*nb} dS|$   $|\int_{S^+} \bar{T}_{nb} dS|$  раз (здесь  $\bar{T}_{nb}$  рассчитывается по максвелловской формуле (4.24) при  $\mu = \mu_b$ ). В случае  $\mu_b = \text{const}$  отношение  $F_* / F = \mu_{br}$ . Однако в частном случае, когда тело  $a$  размещается в немагнитной среде  $b$  ( $\mu_b = \mu_0$ ;  $\mu_{br} = 1$ ;  $\bar{T}_{*nb} = \bar{T}_{nb}$ ), ЭМС  $\bar{F}_*$  по (6.22) будет вычислена правильно ( $\bar{F}_* = \bar{F}$ ).

Более того, при  $\mu_b = \mu_0$  сила  $\bar{F}_*$  будет вычисляться правильно и по (6.23) через  $\bar{j}_*$  и  $\bar{j}_{*s}$ , несмотря на то, что эти величины при  $\mu_a \neq \mu_0$  отличаются от соответствующих величин, найденных по формулам Максвелла (4.47), (4.33), т. е.  $\bar{j}_* \neq \bar{j}$ ;  $\bar{j}_{*s} \neq \bar{j}_s$ . Как было пояснено выше, объясняется этот факт существованием тождеств (6.24).

Все сказанное по поводу расчета силы  $\bar{F}_*$  и ее составляющих  $\int_V \bar{j}_* dV$  и  $\int_{S_p} \bar{j}_{*s} dS$  при  $\mu_b \neq \mu_0$  относится и к случаю расчета силы  $\bar{F}_*$ .

действующей на часть ферромагнитного тела  $b$ , расположенного в немагнитной среде  $b$  (рис. 6.4). Независимо от того, выражена ли сила через  $\vec{f}_*$  и  $\vec{f}_{*S}$  или через  $\vec{T}_{*n}$ , результат расчета при  $\mu_b \neq \mu_0$  получается одним тем же, т. е.

$$\vec{F}_* = \int_V \vec{f}_* dV + \int_{S_p=S_{241}^+} \vec{f}_{*S} dS = \int_{S^+=S_{132}^- - S_{241}^-} \vec{T}_{*n} dS.$$

В этом случае результирующая сила  $\vec{F}_*$  также отличается от действительной силы  $\vec{F}$ . Отличаются от действительных и составляющие этой силы

$$\int_V \vec{f}_* dV \neq \int_V \vec{f} dV; \quad \int_{S_p=S_{ab}} \vec{f}_{*S} dS \neq \int_{S_p=S_{ab}} \vec{f}_S dS.$$

### 6.6. Формулы Максвелла, Эйнштейна, Лауба для расчета натяжений и плотностей ЭМС, полученные с помощью неполной линейной микромодели магнитного поля

Во многих работах по теории электромагнитного поля, например в [1, 17, 18, 19], наряду с формулой Максвелла (4.47) для объемной плотности ЭМС  $\vec{f}$  приводится и другая формула для ее определения, предложенная Максвеллом в его «Трактате об электричестве и магнетизме» [16, с. 514, форм. (4)]. В этой работе объемная плотность  $\vec{f}$  и ее компоненты в современных обозначениях представляются в следующем виде\*:

$$\vec{f}_* = |\vec{J}\vec{B}| + \mu_0 \text{grad}(\overline{M\vec{H}})_{\vec{M}=\text{const}} = \vec{q}_x f_{*x} + \vec{q}_y f_{*y} + \vec{q}_z f_{*z}, \quad (6.25)$$

где  $f_{*x} = |\vec{J}\vec{B}|_x + \mu_0 \left( M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$  и т. д.

Формула (6.25) для компонент  $\vec{f}$ , как показано в [6], тождественна формулам

$$f_{*x} = \mu_0 [|\vec{J}\vec{H}|_x + \mu_0 \left( M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + M_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right)]$$

и т. д., полученным в работе Эйнштейна и Лауба «О пондеромоторных силах, действующих в электромагнитном поле на покоящиеся тела» [31, с. 126].

Второй член формулы (6.25) понимается Максвеллом как компонента объемной плотности электромагнитной силы  $f_{Mx}$ , действующей на единицу объема магнетика при отсутствии в нем токов проводимости ( $\vec{J} = 0$ ).

\*  $\text{grad}(\overline{M\vec{H}})_{\vec{M}=\text{const}} = (\overline{M}\text{grad})\vec{H} + [\overline{M} \times (\text{rot}\vec{H})] = (\overline{M}\text{grad})\vec{H}$  при  $\text{rot}\vec{H} = -\vec{J} = 0$  [1, с. 602, формула (45)].

«Силу  $f_{Mx}$ , заставляющую единицу объема магнетика двигаться в направлении оси  $x$ » [16, с. 513] Максвелл вычисляет энергетическим путем в виде производной от «плотности потенциальной энергии намагниченного тела»:

$$\omega_{\Pi} = -(M_x H_x + M_y H_y + M_z H_z) = -\overline{M\overline{H}}$$

по направлению координаты  $x$ , найденной при условии  $\overline{M} = \text{const}$ ,

$$f_{Mx} = -\frac{\partial \omega_{\Pi}}{\partial x} = M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Таким же образом при  $\overline{M} = \text{const}$  ( $M_x = \text{const}$ ,  $M_y = \text{const}$ ,  $M_z = \text{const}$ ) Максвелл находит другие компоненты объемной плотности электромагнитной силы по осям  $y$  или  $z$ , понимаемые им как силы, заставляющие единицу объема магнетика двигаться в направлении соответствующих осей ( $y$  или  $z$ ):

$$f_{My} = \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} = \mu_0 \left( M_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right);$$

$$f_{Mz} = \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z} = \mu_0 \left( M_x \frac{\partial H_x}{\partial z} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial z} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \right).$$

Откуда после элементарных преобразований можно получить второй член см. (6.25) в векторной форме:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{*M} &= \vec{q}_x f_{Mx} + \vec{q}_y f_{My} + \vec{q}_z f_{Mz} = \left( \vec{q}_x \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x} + \vec{q}_y \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} + \right. \\ &\left. + \vec{q}_z \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z} \right) \Big|_{\overline{M}=\text{const}} = \text{grad } W_{\Pi} \Big|_{\overline{M}=\text{const}} = \mu_0 \text{grad } (\overline{M\overline{H}}) \Big|_{\overline{M}=\text{const}}. \end{aligned}$$

Из вывода формулы для компонент второго члена (6.25), приведенного в книге И. Е. Тамма [1, с. 260], а также другого вывода этой формулы в приложении П6, видно, что второй член (6.25) можно получить с помощью неполной линейной модели магнитного поля (см. § 6.3). Причем второй член (6.25) представляет собой объемную плотность ЭМС, действующих во внешнем поле с индукцией  $\vec{B}_0 = \mu_0 \overline{H}$  на поверхностные микротокки с плотностью  $\vec{j}_M = [\overline{M\overline{n}}]$ , которые создают в элементарных трубках поля немагнитной среды модели такую же намагниченность  $\overline{M}$ , как в оригинале. Напомним, что здесь  $\overline{n}$  — наружная нормаль к боковой поверхности трубки поля.

Второй член в (6.25) не совпадает со вторым членом  $(-0,5 H^2 \mu_0 \text{grad} \mu_r)$  в правильной формуле Максвелла (4.46).

Появление второго ошибочного члена  $\bar{j}_{*M} = \mu_0 \text{grad} (\bar{M} \bar{H}) \Big|_{\bar{M} = \text{const}}$  во второй формуле Максвелла для объемной плотности ЭМС (6.25) связано с допущенной им при выводе неточностью

При выводе формулы (6.25) Максвелл исходил из закона сохранения энергии и совершенно правильно считал второй член (6.25), имеющий смысл объемной плотности ЭМС магнитного происхождения, равным  $\text{grad } W$ , где  $W$  — объемная плотность энергии магнитного поля. Допущенная им неточность состоит в том, что под знак градиента вместо действительной объемной плотности энергии магнитного поля ( $W = \bar{B} \bar{H} / 2$ ) он ввел некую «плотность потенциальной энергии магнитного тела ( $W_{\pi} = \mu_0 \bar{M} \bar{H}$ )».

Можно показать, что второй член в (6.25), представляющий собой объемную плотность электромагнитной силы в элементе среды с изменяющейся магнитной проницаемостью, в 2 раза превосходит второй член в правильной формуле Максвелла (4.46). В этом нетрудно убедиться, имея в виду, что  $\text{grad} (\bar{M} \bar{H})$  в (6.25) должен быть взят при условии  $\bar{M} = \text{const}$  и  $\bar{H} = \bar{M} / (\mu_r - 1)$ :

$$\begin{aligned} \mu_0 \text{grad} (\bar{M} \bar{H}) \Big|_{\bar{M} = \text{const}} &= \mu_0 \text{grad} \left( \frac{M^2}{\mu_r - 1} \right) \Big|_{M^2 = \text{const}} = \\ &= \mu_0 M^2 \text{grad} (\mu_r - 1)^{-1} = -\mu_0 \frac{M^2}{(\mu_r - 1)^2} \text{grad } \mu_r = \\ &= -\mu_0 H^2 \text{grad } \mu_r. \end{aligned}$$

Если бы Максвелл записал второй член в (6.25) правильно в виде  $\text{grad} (0,5 \bar{B} \bar{H})$ , где  $0,5 \bar{B} \bar{H}$  — объемная плотность энергии магнитного поля, и взял бы градиент при условии  $\bar{B} = \text{const}$ , положив  $\bar{H} = \bar{B} / (\mu_0 \mu_r)$ , он получил бы в (6.25) такой же второй член, как в формуле (4.46):

$$\begin{aligned} \text{grad} (0,5 \bar{B} \bar{H}) \Big|_{\bar{B} = \text{const}} &= 0,5 \mu_0^{-1} \text{grad} \left( \frac{B^2}{\mu_r} \right) \Big|_{B^2 = \text{const}} = \\ &= -\frac{0,5 B^2 \text{grad } \mu_r}{\mu_0 \mu_r^2} = -0,5 \mu_0 H^2 \text{grad } \mu_r. \end{aligned}$$

При таком уточнении второй формулы Максвелла (6.25) она совпадала бы с его первой формулой (4.46) для определения ЭМС. Причем, это совпадение моделей было бы следствием того факта, что обе модели Максвелла построены исходя из разработанной им математической модели магнитного поля, соответствующей гипотезе Ампера.

Исходя из формулы для объемной плотности ЭМС (6.25), в [16, с. 514] и [31, с. 126] выводится ошибочная формула для компонент тензора натяжения электромагнитных сил в магнитном поле

$$T_{*ik} = H_i B_k - 0,5\mu_0 H^2 \delta_{ik}. \quad (6.26)$$

Тензору (6.26) соответствует вектор натяжения

$$\bar{T}_{*n} = \mu \bar{H} H_n - 0,5\mu_0 H^2 \bar{n} = T_{*nn} \bar{n} + T_{*n\tau} \bar{\tau}, \quad (6.27)$$

где  $T_{*nn} = \mu_0 [(\mu_r - 0,5) H_n^2 - 0,5H_\tau^2]$ ;  $T_{*n\tau} = \mu H_\tau H_n$ .

Нормальная и тангенциальная составляющие вектора натяжения по (6.27) существенно отличаются от правильных значений этих составляющих по (4.31). Тангенциальная составляющая занижена в  $\mu_r$  раз:

$$T_{*n\tau} / T_{n\tau} = (\mu_0 H_\tau H_n) / (\mu_0 \mu_r H_\tau H_n) = 1/\mu_r. \quad (6.28)$$

Во столько же раз занижена составляющая  $T_{*nn}$ , пропорциональная  $H_\tau^2$ :

$$(0,5\mu_0 H_\tau^2) / (0,5\mu_0 \mu_r H_\tau^2) = 1/\mu_r.$$

Составляющая  $T_{*nn}$ , пропорциональная  $H_n^2$ , наоборот, завышена в  $(2\mu_r - 1)/\mu_r$  раз (при больших  $\mu_r$  примерно в 2 раза

$$\mu_0 (\mu_r - 0,5) H_n^2 / (0,5\mu_0 \mu_r H_n^2) = (2\mu_r - 1)/\mu_r. \quad (6.28a)$$

Натяжение по (6.27) (как при  $\mu = \text{const}$ , так и при  $\mu = \text{var}$ ) можно преобразовать следующим образом:

$$\bar{T}_{*u} = \bar{T}_n + 0,5\mu_0 (\mu_r - 1) H_2 \bar{n}, \quad (6.29)$$

где  $\bar{T}_n$  — правильное значение натяжений по формуле Максвелла (4.24).

Сравнивая (6.29) с формулой Максвелла (4.24) для  $\bar{T}_n$ , замечаем, что кроме действительно существующего натяжения  $\bar{T}_n$ , соответствующего первому члену формулы (6.29), в ней имеется второй член, который имеет смысл дополнительных натяжений, якобы действующих на элементы поверхности, охватывающей выделенный объем магнетика. По указанным выше причинам такие дополнительные натяжения в действительности отсутствуют.

Для определения соответствующей формулам (6.25), (6.27) поверхностной плотности ЭМС  $\bar{f}_{*S}$  на поверхности разрыва магнитной проницаемости  $S_p$  между средами  $a$  и  $b$  воспользуемся общим уравнением для  $\bar{f}_S$  (4.32), связывающим  $\bar{f}_{*S}$  с натяжениями в средах  $a$  и  $b$ . Выразим натяжения в этих средах с помощью (6.27):

$$\bar{T}_{*na} = \mu_0 [(\mu_{ar} - 0,5) H_{an}^2 - 0,5H_{a\tau}^2] \bar{n}_a + \mu_0 \mu_{ar} H_{a\tau} H_{an} \bar{\tau}; \quad (6.30)$$

$$\bar{T}_{*nb} = \mu_0 [(\mu_{br} - 0,5) H_{bn}^2 - 0,5H_{b\tau}^2] \bar{n}_b + \mu_0 \mu_{br} H_{b\tau} H_{bn} \bar{\tau}.$$

Учтем граничные условия на поверхности  $S_p$ :  $B_{bn} = B_n = -B_{an}$ ;  $H_{br} = H_{ar} = H_r$ , составленные при  $\bar{n}_a = -\bar{n}_b$ . Тогда с помощью (4.32) получим формулу для поверхностной плотности ЭМС, согласованную с (6.25) для  $\bar{f}_*$  и (6.27) для  $\bar{T}_{*n}$ , выведенными с помощью неполной микромодели,

$$\bar{f}_{*S} = \frac{B_n^2}{2\mu_0} \left[ \frac{(2\mu_{br} - 1)}{\mu_{br}^2} - \frac{(2\mu_{ar} - 1)}{\mu_{ar}^2} \right] \bar{n}_b, \quad (6.31)$$

где  $\mu_{ar}$ ,  $\mu_{br}$  — магнитные проницаемости соответственно в средах  $a$  и  $b$ .

Сравнивая (6.31) с формулой Максвелла для  $\bar{f}_S$  (4.33), замечаем, что в (6.31) вообще не отражено влияние  $H_r^2$ , в то время как в (4.33) имеется первый член, пропорциональный  $H_r^2$ . Плотность  $\bar{f}_{*S}$  по (6.31), как и второй член (4.33), пропорциональна  $B_n^2$  и направлена по  $\bar{n}_b$ . Однако по величине они различны. При  $\mu_{ar} \gg 1$  и  $\mu_{br} \gg 1$  плотность  $\bar{f}_{*S}$  по (6.31) превышает второй член в (4.33) в 2 раза.

В заключение заметим, что ЭМС  $\bar{F}_*$ , действующую на магнитное тело  $a$  (рис. 6.3), размещенное в магнитной среде  $b$ , можно определить по формулам Максвелла, Эйнштейна, Лауба любым из двух известных способов: по (6.22) или (6.23). Причем в (6.22) нужно ввести натяжение  $\bar{T}_{nb}$  в среде  $b$ , рассчитанное по (6.27), а в (6.23) ввести  $\bar{f}_*$  (по 6.25) и  $\bar{f}_{*S}$  по (6.31). Оба способа дадут одинаковый результат для силы  $\bar{F}_*$  в силу существования тождеств (6.24). В общем случае, когда тело  $a$  имеет магнитную проницаемость  $\mu_a \neq \mu_0$  и среда  $b$  — магнитную проницаемость  $\mu_b \neq \mu_0$ , сила  $\bar{F}_*$  превышает действительную силу  $\bar{F}$  в  $|\int_S \bar{T}_{*nb} dS| / |\int_S \bar{T}_{nb} dS|$  раз (здесь  $\bar{T}_{nb}$  рассчитывается по формуле Максвелла (4.47) при  $\mu = \mu_b$ ). Однако в частном случае, когда тело  $a$  размещается в немагнитной среде  $b$  ( $\mu_b = \mu_0$ ,  $\mu_{br} = 1$ ,  $\bar{T}_{*nb} = \bar{T}_{nb}$ ), ЭМС  $\bar{F}_*$  по (6.22) будет вычислена правильно,  $\bar{F}_* = \bar{F}$ . Более того, при  $\mu_b = \mu_0$  сила  $\bar{F}_*$  будет определена правильно и по (6.23) через  $\bar{f}_*$  и  $\bar{f}_{*S}$ , несмотря на то что эти величины при  $\mu_a \neq \mu_0$  отличаются от соответствующих величин, найденных по формулам Максвелла (4.47), (4.33), т. е.  $\bar{f}_* \neq \bar{f}$ ,  $\bar{f}_{*S} \neq \bar{f}_S$ . Это объясняется существованием тождеств (6.24), благодаря отмеченным выше особенностям формулы для  $\bar{f}_{*S}$  (6.31) интеграл  $\bar{f}_{*S}$  по поверхности тела в случае магнитного поля, обладающего четной или нечетной симметрией, становится при  $\mu_{br} = \text{const}$  и  $\mu_{ar} = \text{const}$  равным нулю ( $\int_{S_p=S_{ab}} \bar{f}_{*S} dS = 0$ ).

Интеграл  $\bar{f}_S$  по поверхности тела обращается в нуль и в случае, когда  $B = B_r$ , а  $B_n = 0$ . В этих случаях сила  $\bar{F}_*$  определяется толь-

ко первым членом (6.23) в виде интеграла по объему тела:  $\bar{F}_* = \int_V \bar{f}_* dV$ . Причем при  $\mu_{br} = 1$ , когда  $\bar{T}_{*nb} = \bar{T}_{nb}$ , сила  $\bar{F}_*$  будет совпадать с правильной,  $\bar{F}_* = \bar{F}$ .

### 6.7. Некоторые другие формулы для натяжения и плотностей электромагнитной силы, полученные с помощью неполной модели магнитного поля

6.7.1. Формулы Тамма, полученные с помощью неполной микро-модели магнитного поля. Наряду с формулой Максвелла (4.47) для объемной плотности ЭМС, полученной в [1] с помощью полной макромодели магнитного поля Тамм приводит еще одну формулу для этой величины [1, форм. (66.4)]:

$$\bar{f}_* = [\bar{J}\bar{B}] + \text{grad}(\bar{M}\bar{B}) = \bar{q}_x f_{*x} + \bar{q}_y f_{*y} + \bar{q}_z f_{*z}, \quad (6.32)$$

$$\text{где } f_{*x} = [\bar{J}\bar{B}]_x + \left( M_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right).$$

Эту формулу можно вывести так же, как и (6.25), с помощью неполной микромодели магнитного поля (см. П6). Она отличается от (6.25) только тем, что второй ее член, имеющий смысл плотности ЭМС, действующих на микротоки с плотностью  $\bar{j}_M = [\bar{M}\bar{n}]$ , определяется при взаимодействии этих токов с индукцией  $\bar{B} = \mu H$ , а не с индукцией  $\mu_0 \bar{H}$ .

Можно доказать, что второй член  $\text{grad}(\bar{M}\bar{B})_{M=\text{const}}$  в формуле Тамма (6.32), представляющий собой объемную плотность электромагнитных сил в элементе среды с изменяющейся магнитной проницаемостью, совпадает со вторым членом в ошибочной формуле Максвелла (6.25) и превышает в 2 раза второй член в его правильной формуле (4.46). В этом нетрудно убедиться, имея в виду, что  $\text{grad}(\bar{M}\bar{B})$  в формуле (6.32) должен быть взят при условии  $\bar{M}=\text{const}$  и что при этом  $\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{M} / (\mu_r - 1)$ , где  $\mu_r = \text{var}$ :

$$\begin{aligned} \text{grad}(\bar{M}\bar{B})|_{M=\text{const}} &= \mu_0 \text{grad} \left( \frac{\mu_r M^2}{\mu_r - 1} \right) \Big|_{M^2=\text{const}} = \\ &= \mu_0 M^2 \text{grad} \left( \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} \right) = \mu_0 M^2 \left[ \mu_0 \text{grad}(\mu_r - 1)^{-1} + \frac{\text{grad} \mu_r}{\mu_r - 1} \right] = \\ &= \mu_0 M^2 \left[ -\frac{\mu_r \text{grad} \mu_r}{(\mu_r - 1)^2} + \frac{(\mu_r - 1) \text{grad} \mu_r}{(\mu_r - 1)^2} \right] = -\mu_0 H^2 \text{grad} \mu_r. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Тот же результат получим, если возьмем  $\text{grad}(\bar{M}\bar{B})_{\bar{M}=\text{const}}$ , полагая  $\bar{B} = \mu_0 (\bar{M} + \bar{H})$  и  $\bar{H} = \bar{M} / (\mu_r - 1)$ :

$$\text{grad}(\bar{M}\bar{B}) \Big|_{\bar{M}=\text{const}} = \mu_0 \text{grad} [\bar{M}(\bar{M} + \bar{H})] \Big|_{\bar{M}=\text{const}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu_0 \operatorname{grad} (M^2) |_{M^2 = \text{const}} + \mu_0 \operatorname{grad} (\overline{M} \overline{H}) |_{\overline{M} = \text{const}} = \\
 &= \mu_0 \operatorname{grad} (\overline{M} \overline{H}) |_{\overline{M} = \text{const}} = -\mu_0 H^2 \operatorname{grad} \mu_r, \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

где  $\mu_0 \operatorname{grad} (M^2) |_{M^2 = \text{const}} = 0$ .

**6.7.2. Формулы Синельниковых для расчета сил, действующих на ферромагнитное тело в магнитном поле.** Авторы [33], считая, видимо, формулу Максвелла (4.24) для натяжения в магнитном поле неправильной, ставят перед собой цель получить новую формулу для натяжения в ферромагнитном теле. При этом они выбирают в качестве исходной формулу для объемной плотности ЭМС (6.32) или [1, форм. (66.4)], полученную Таммом с помощью неполной микро-модели и, как мы видели, нераспространяющуюся на оригинал. Если бы они учли при этом оба члена, которые входят в (6.32) и действовали бы дальше по аналогии с выводом (6.26), (6.27) в [16, с. 514], они получили бы формулу (6.34) для натяжения, согласованную с (6.32) и распространяющуюся на оригинал хотя бы в одном частном случае, когда  $\mu_r = 1$  и  $\overline{T}_{*n} = \overline{T}_n = \mu_0 (\overline{H} H_n - 0,5 H^2 \overline{n})$ . Однако, игнорируя необходимость обязательного учета всех членов исходной формулы (6.32) для объемной плотности ЭМС, и в первую очередь члена  $[\overline{J} \overline{B}]$ , в котором  $\overline{J} = \operatorname{rot} \overline{H}$ , они отбрасывают именно этот первый член (6.32), полагая  $\overline{J} = 0$ , а учитывают только второй член в (6.32), который, как подчеркивалось в комментариях к этой формуле, на оригинал не распространяется. Кроме того, при выводе формулы для натяжения не осуществлена замена нелинейного ферромагнитного тела его магнитно-линейной моделью, необходимость которой для получения правильного результата обоснована в [4]. Таким образом, выводится ошибочная формула для натяжения [33, форм. (16), (19)], форма записи которой зависит от уровня насыщения ферромагнитного тела,

$$\overline{T}_{*n} = f_{B \leq B_0} \overline{n} = B^2 \overline{n} / (2\mu_0) \text{ при } B \leq B_0, \quad (6.35)$$

$$\overline{T}_{*n} = f_{B > B_0} \overline{n} = \frac{\overline{n}}{\mu_0} (B - 0,5 B_0) B_0 \text{ при } B > B_0,$$

где  $B_0 \simeq 2Tл$  — индукция, соответствующая точке пересечения касательной к насыщенному участку характеристики намагничивания ферромагнитного материала  $B = f(H)$  с осью ординат.

Натяжение, найденное по (6.35), не совпадает с натяжением по формуле Максвелла (4.24) ни в общем случае при произвольном  $\mu_r > 1$ , ни в частном случае (при  $\mu_r = 1$ ). Более того, авторы (6.35) допускают еще одну неточность. Они предлагают определять силу  $\overline{F}_*$ , действующую на ферромагнитное тело  $a$  (рис. 6.3), путем интегрирования натяжения по (6.35) по поверхности  $\overline{S}_{ab}$ , расположенной

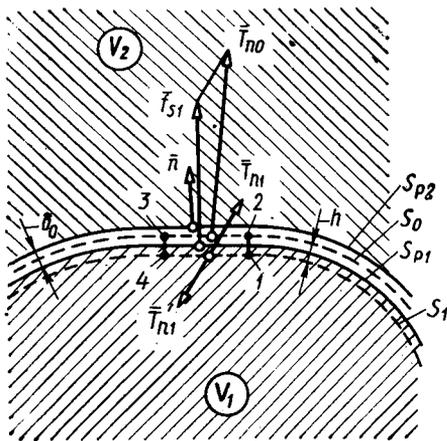


Рис. 6.5. К анализу ошибочной формулы для натяжения  $T_{*n}$ , предлагаемой Астаховым

натяжений в магнитном поле выводит Астахов в своей статье [34]. Не утруждая себя доказательством, он считает ошибочными формулы Максвелла для натяжений (4.46, 6.25). Формулу Львова для натяжения в магнитном поле (6.15), вывод которой с помощью неполной макромодели в статье зачем-то повторяется, Астахов также считает непригодной для расчета натяжений внутри ферротела. Исходя из такой оценки, состояния вопроса, он ставит перед собой цель найти формулу для силы, действующей на часть ферромагнитного тела в объеме  $V_1$ , выделенном поверхностью  $S_1$  (рис. 6.5). С этой целью Астахов исключает магнитный материал, заменяя его вакуумом в бесконечно малом зазоре ( $\delta_0 \rightarrow 0$ ), выделенном поверхностями разрыва магнитной проницаемости  $S_{p1}$  и  $S_{p2}$ , расположенными бесконечно близко к поверхности  $S_1$ .

Полагая, что введение немагнитного зазора не повлияет ни на поле в объеме  $V_1$ , ни на поле в объеме  $V_2$  остальной части магнитной системы, и используя граничные условия на поверхности  $S_{p1}$ , отделяющей зазор от объема  $V_1$ , он выражает натяжение в зазоре  $\bar{T}_{n0}$  по (4.24) или по (6.15) сначала через величины поля в зазоре  $\bar{T}_{n0} = \mu_0(\bar{H}_0 H_{0n} - 0,5 H_{0n}^2)$ .

Затем, используя граничные условия на поверхности  $S_{p1}$  ( $B_n = B_{n0}$ ;  $H_\tau = H_{0\tau}$ ;  $B_\tau = \mu_r B_{0\tau}$ ;  $H_n = H_{n0}/\mu_r$ ), — выражает  $T_{n0}$  через величины поля на поверхности  $S_1$  в объеме  $V_1$  ферротела [34, форм. (5), (6)]:

$$\bar{T}_{*n} = \bar{T}_{n0} = \mu H_\tau H_n \bar{\tau} - 0,5 (\mu_0 H_\tau^2 - \mu^2 H_n^2 / \mu_0) \bar{n}. \quad (6.36)$$

внутри (!?) поверхности  $S_{ab}$ , ограничивающей объем ферромагнетика  $V$ . Эта рекомендация находится в полном противоречии с правильным подходом к определению  $\bar{F}_*$  через натяжения. Напомним, что в соответствии с правильным подходом (см. § 6.5) к определению  $\bar{F}_*$  через натяжение сила  $\bar{F}_*$  определяется путем интегрирования натяжений по поверхности  $S_{ab}^+$ , охватывающей и объем тела  $V$ , и его границу  $S_{ab}$ , на которую действует большая часть силы  $\bar{F}_S$  с поверхностной плотностью  $\bar{f}_S$  (6.23).

### 6.7.3. Формулы Астахова. Несколько ошибочных формул для

По найденному таким образом натяжению  $\bar{T}_{*n} = \bar{T}_{n0}$  автор бездоказательно рекомендует определять силу, действующую на объем  $V_1$ . При этом он забывает о том, что натяжение  $\bar{T}_{n0}$  в зазоре существенно отличается от натяжения  $\bar{T}_{n1}$  по (4.24) на поверхности  $S_1$  в самом магнитном теле. Убедиться в ложности предположения о сохранении в малом зазоре такого же натяжения  $\bar{T}_{n1}$ , как в самом магнитном теле, не представляет труда. В малом зазоре сохраняются только тангенциальная составляющая напряженности и нормальная составляющая индукции. При этом тангенциальная составляющая индукции уменьшается в  $\mu_r$  раз, а нормальная составляющая напряженности увеличивается в  $\mu_r$  раз. Это приводит к тому, что натяжение в малом зазоре не только по величине, но и в общем случае и по направлению будет существенно отличаться от натяжения в самом теле. Нетрудно выяснить, насколько количественно будет отличаться найденное в статье [34, форм. (5), (6)] натяжение  $\bar{T}_{n0}$  в малом зазоре  $\delta_0$  от действительного натяжения  $\bar{T}_{n1}$  по (4.24) на поверхности  $S_1$  в этом теле.

Рассмотрим объем  $1234$  элементарного параллелепипеда, заключенного между поверхностями  $S_1$  и  $S_0$  и включающего в себя поверхность разрыва магнитной проницаемости  $S_{p1}$ , на которой магнитная проницаемость делает скачок от  $\mu_0\mu_r$  до  $\mu_0$ . Силу, действующую на объем параллелепипеда  $1234$  при  $h \rightarrow 0$ , можно выразить: 1) через поверхностную плотность ЭМС  $\bar{f}_{S1}$  на элементе поверхности  $S_{p1}$  внутри параллелепипеда, площадь которого равна  $\Delta S$ :  $\bar{f}_{S1} \Delta S$ ; 2) через натяжение  $\bar{T}_{n0}$ , действующее на его основание  $23$  снаружи, и через натяжение  $\bar{T}'_{n1} = (-\bar{T}_{n1})$ , действующее на его основание  $14$  также снаружи:  $\bar{f}_{S1} \Delta S = (\bar{T}'_{n1} + \bar{T}_{n0})\Delta S = (-\bar{T}_{n1} + \bar{T}_{n0})\Delta S$ . Откуда следует, что натяжение в малом зазоре  $\bar{T}_{*n} = \bar{T}_{n0}$  по (6.36) или [34, форм. (5), (6)] отличается от действительного натяжения в теле  $\bar{T}_n = \bar{T}_{n1}$  по (4.24) на величину поверхностной плотности ЭМС  $\bar{f}_{S1}$  по (4.33) на поверхности  $S_{p1}$ :

$$\bar{T}_{*n} = \bar{T}_{n0} = \bar{T}_{n1} + \bar{f}_{S1} = \bar{T}_n + \bar{f}_{S1}, \quad (6.37)$$

где  $\bar{f}_{S1} = 0,5\bar{n} (H_n^2 (\mu - \mu_0) + B_n^2 (1/\mu_0 - 1/\mu))$ .

**6.7.4. Формулы Львова, полученные с помощью неполной микромоделли магнитного поля.** Во второй части статьи Львова [32] приводится вывод еще одной ошибочной формулы для объемной плотности ЭМС  $\bar{f}$  [32, форм. (43)]. Учитывая, что по [32, форм. (38)]  $\bar{B}_{cp}^+ = \mu_0(\bar{H} + 0,5\bar{M}) = (0,5\mu_0 (\mu_r + 1)\bar{H})$ ;  $\bar{M} = (\mu_r - 1)\bar{H}$ ;  $\bar{q}_0 = \bar{H}/H$  можно записать [32, форм. (43)] в следующем виде:

$$\bar{f}_* = [\bar{J}\bar{B}] + 0,5\mu_0 [(\text{rot } \bar{M})\bar{M}] + 0,5\mu_0 M \text{ grad } ((\mu_r + 1)H). \quad (6.38)$$

Объемная плотность ЭМС, рассчитанная по формуле (6.38), существенно отличается от объемной плотности, рассчитанной по другой ошибочной формуле Львова [32, форм. (8)] или (6.14). Объясняется это ошибочностью нескольких исходных положений, принятых автором при выводе [32, форм. (43)], в то время как вывод [32, форм. (8)] или (6.14) проведен для неполной макромодели вполне корректно. В § 6.4 было показано, что формула [32, форм. (8)] или (6.14) вполне справедлива для самой неполной модели. И ее единственный изъян состоит лишь в том, что она не распространяется на оригинал. Этого нельзя сказать о формуле [32, форм. (43)] или (6.38). Первая неточность, допущенная при ее выводе, состоит в том, что сила  $\vec{d}\vec{f}$ , действующая на элементарный объем  $dV$ , трубки поля  $\vec{M}$ , складывается по [32, форм. (40)] из трех составляющих сил:

а)  $\vec{d}\vec{f}_V = [(\text{rot}\vec{M})\vec{B}]$ , действующей в макромодели на объемный ток с плотностью  $\vec{J}_M = \text{rot}\vec{M}$  в элементарном объеме  $dV$ ;

б)  $\vec{d}\vec{f}_n = [\vec{J}\vec{B}]$ , действующей в макромодели на объемный ток проводимости с плотностью  $\vec{J}$  в объеме  $dV$ ;

в)  $\vec{d}\vec{f}_S = \int_{S_T} [\vec{j}_M \vec{B}_{cp}^T] dS$ , действующей в микромодели на поверхностный ток с плотностью  $\vec{j}_M = [\vec{M}\vec{n}]$ , который охватывает элементарный объем  $dV$ .

В действительности сила  $\vec{d}\vec{f}$  в макромодели складывается только из двух составляющих ( $\vec{d}\vec{f} = \vec{d}\vec{f}_V + \vec{d}\vec{f}_n$ ), как было правильно принято при выводе [32, форм. (8)].

Введение еще одной составляющей в силу  $\vec{d}\vec{f}$ , т. е. ее вычисление по формуле  $\vec{d}\vec{f} = \vec{d}\vec{f}_V + \vec{d}\vec{f}_n + \vec{d}\vec{f}_S$ , совершенно недопустимо по той причине, что токи с плотностью  $\vec{J}_M = \text{rot}\vec{M}$  в макромодели (см. П1) представляют собой среднюю объемную плотность поверхностных токов с плотностью  $\vec{j}_M = [\vec{M}\vec{n}]$  в микромодели. Откуда следует, что сила  $\vec{d}\vec{f}_S$  представляет собой силу  $\vec{d}\vec{f}_V$ , вычисленную без учета взаимной компенсации токов  $\vec{j}_M$  на общих поверхностях соседних трубок поля  $\vec{M}$ .

Вторая неточность, допущенная при выводе [32, форм. 43], состоит в том, что сила  $\vec{d}\vec{f}_S$  (которую вообще бы не следовало учитывать!!) выражается через поверхностную плотность  $[\vec{j}_M \vec{B}_{cp}^{(r)}]$ , вычисляемую не через индукцию  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , а через индукцию  $B_{cp}^{(r)} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}/2)$ , понимаемую автором как среднюю индукцию в слое эквивалентного поверхностного тока  $\vec{j}_M = [\vec{M}\vec{n}]$ . При таком подходе к вычислению индукции  $\vec{B}_{cp}^{(r)}$  не учитывается, что на соприкасающихся поверхностях двух соседних трубок  $a$  и  $b$  токи  $\vec{j}_{Ma} = [\vec{M}_a \vec{n}_b]$  и  $\vec{j}_{Mb} = [\vec{M}_b \vec{n}_a]$  направлены в противоположные стороны и в значительной мере компенсируют друг друга. Как пока-

зано на примере токов  $\vec{j} = [\vec{H}\vec{n}]$  и  $\vec{J} = \text{rot}\vec{H}$  (см. П1), это приводит к тому, что токи  $\vec{j}_M = [\vec{M}\vec{n}]$ , протекающие по наружным поверхностям всех соприкасающихся между собой трубок поля  $\vec{M}$ , создают такое же поле, как токи  $\vec{j}_M = \text{rot}\vec{M}$ , т. е. поле с индукцией  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , а не  $\vec{B}_{\text{ср}}^{(T)}$ , как считает Львов.

Исходя из полученной таким образом ошибочной формулы для объемной плотности ЭМС [32, форм. (43)] или (6.38), непригодной ни для оригинала, ни для неполной модели, Львов выводит еще одну ошибочную формулу для натяжений  $\vec{T}_n$  [32, форм. 48].

После элементарных преобразований [32, форм. 48] записывается в следующем виде:

$$\vec{T}_n = \frac{\mu_0}{2} (\mu_r^2 H_n^2 - H_z^2) \vec{n} + \frac{\mu_0 (\mu_r^2 + 1)}{2} H_n H_z \vec{\tau}. \quad (6.39)$$

Таким образом, ни формула (43) в [32], ни вытекающие из нее формулы (45) и (48), как и другие, выведенные с помощью неполной модели магнитного поля, нельзя рекомендовать для использования при расчетах электромагнитных сил.

### 6.8. Сопоставление формул Максвелла с ошибочными формулами для натяжений и плотностей электромагнитных сил

Рассмотренные в предыдущих параграфах ошибочные формулы для натяжений  $\vec{T}_n$ , объемной  $\vec{j}$  и поверхностной  $\vec{j}_S$  плотностей ЭМС сведены для упрощения сравнения в табл. 6.1, 6.2 и 6.4.

В первой строке этих таблиц приводится формула Максвелла для рассматриваемой величины.

Формулы для объемной плотности ЭМС  $\vec{j}$  в случае  $\mu = \text{var}$  и  $\mu = \text{const}$  сравниваются в табл. 6.1. Как указывалось ранее, единственной формулой, позволяющей правильно рассчитать  $\vec{j}$  в случае  $\mu = \text{var}$ , когда  $\text{grad}\mu_r \neq 0$ , является формула Максвелла (4.46). Причем второй член этой формулы представляет собой объемную плотность силы, действующей на магнетик. При  $\mu = \text{const}$  этот член исчезает и формула Максвелла содержит только первый член, представляющий собой объемную плотность силы, действующей на токи проводимости с плотностью  $\vec{J}$ . Все другие формулы для  $\vec{j}$ , приведенные в табл. 6.1, — ошибочны.

При  $\mu = \text{var}$  второй член этих формул не совпадает со вторым членом в формуле Максвелла, что не позволяет правильно оценить силу с плотностью  $-0,5\mu_0 H^2 \text{grad}\mu_r$ , которая действует при  $\mu_r = \text{var}$  на магнетик.

При  $\mu_r = \text{const}$  второй член этих формул является вообще излишним, так как в этом случае объемная плотность сил, действующая

щих на магнетик, равна нулю. Лишь в случае  $\mu_r = 1$ , когда  $M = 0$  и силы действуют только на токи проводимости, ошибочные формулы дают правильный результат. Заметим, также, что все ошибочные формулы для  $\vec{f}$  [за исключением формулы Львова (6.14)] непригодны ни для оригинала, ни для неполной модели (модели Ампера), рассматриваемой как реальный физический объект. Что касается формулы Львова (6.14), то ее вывод с помощью модели Ампера проведен вполне корректно. Поэтому она пригодна для расчета сил в модели Ампера, и ее единственный изъян состоит лишь в том, что она не может быть распространена на оригинал. При выводе других ошибочных формул для  $\vec{f}$  с помощью модели Ампера допущены указанные ранее неточности, из-за которых они непригодны ни для модели Ампера, ни для оригинала.

Формулы для вектора натяжений в магнитном поле  $\vec{T}_n$  сравниваются в табл. 6.2. Как указывалось ранее, единственной формулой, которая позволяет правильно рассчитать вектор натяжения ( $\vec{T}_n = T_{nn} \vec{n} + T_{n\tau} \vec{\tau} = (T_{nn}^n + T_{nn}^\tau) \vec{n} + T_{n\tau} \vec{\tau}$ ) и его нормальные ( $\vec{T}_{nn}^n n = \vec{n} \mu_0 \mu_r H_n^2 / 2$  и  $T_{nn}^\tau \vec{n} = -\vec{n} \mu_0 \mu_r H_n^2 / 2$ ) и тангенциальную ( $T_{n\tau} \vec{\tau} = \vec{\tau} \mu_0 \mu_r H_n H_\tau$ ) составляющие в общем случае, когда  $\mu_r \neq 1$

Таблица 6.1

**Сопоставление формулы Максвелла (4.46) с ошибочными формулами для объемной плотности ЭМС**

Автор формулы, ее номер	Формула для $\vec{f}$	
	$\mu = \mu_0 \mu_r = \text{var}$	$\mu = \mu_0 \mu_r = \text{const}$
Максвелл (4.46)	$[\vec{J}\vec{B}] - 0,5 \mu_0 H^2 \text{grad } \mu_r$	$[\vec{J}\vec{B}]$
Максвелл; Эйнштейн — Лауб (6.25)	$[\vec{J}\vec{B}] + \mu_0 \text{grad } (\vec{M}\vec{H}); (\vec{M} = \text{const})$	$[\vec{J}\vec{B}] + 0,5 \mu_0 (\mu_r - 1) \text{grad } H^2$
Тамм (6.32)	$[\vec{J}\vec{B}] + \text{grad } (\vec{M}\vec{B}); (\vec{M} = \text{const})$	$[\vec{J}\vec{B}] + 0,5 \mu_0 \mu_r (\mu_r - 1) \text{grad } H^2$
Львов (6.14)	$[\vec{J}\vec{B}] + \{(\text{rot } \vec{M}) \vec{B}\}$	$[\vec{J}\vec{B}] + (\mu_r - 1) [\vec{J}\vec{B}]$
Львов (6.38)	$[\vec{J}\vec{B}] + 0,5 \mu_0 \{(\text{rot } \vec{M}) \vec{M}\} + 0,5 \mu_0 M \text{grad } ((\mu_r + 1) H)$	$[\vec{J}\vec{B}] + 0,5 ((\mu_r - 1)^2 / \mu_r) \times [\vec{J}\vec{B}] + 0,25 \mu_0 (\mu_r^2 - 1) \times \text{grad } H^2$

Таблица 6.2

Автор формулы (ее номер)	Формула для $\bar{T}_n$		Исходная формула для $\bar{f}$
	Нормальная составляющая $(T_{nn}^n + T_{nn}^\tau) \bar{n}$	Тангенциальная составляющая $T_{n\tau} \bar{\tau}$	
Максвелл (4.24)	$\mu_0 \left( \frac{\mu_r H_n^2}{2} - \frac{\mu_r H_\tau^2}{2} \right) \bar{n}$	$\mu_0 \mu_r H_n H_\tau \bar{\tau}$	(4.46)
Максвелл, Эйнштейн, Лауб (6.27)	$\mu_0 \left( \frac{(2\mu_r - 1) H_n^2}{2} - \frac{H_\tau^2}{2} \right) \bar{n}$	$\mu_0 \mu_r H_n H_\tau \bar{\tau}$	(6.25)
Тамм (6.34)	$\mu_0 \left( \frac{\mu_r^2 H_n^2}{2} - \frac{\mu_r^2 (2 - \mu_r) H_\tau^2}{2} \right) \bar{n}$	$\mu_0 \mu_r H_n H_\tau \bar{\tau}$	(6.32)
Львов (6.15)	$\mu_0 \left( \frac{\mu_r^2 H_n^2}{2} - \frac{\mu_r^2 H_\tau^2}{2} \right) \bar{n}$	$\mu_0 \mu_r^2 H_n H_\tau \bar{\tau}$	(6.14)
Астахов (6.36)	$\mu_0 \left( \frac{\mu_r^2 H_n^2}{2} - \frac{H_\tau^2}{2} \right) \bar{n}$	$\mu_0 \mu_r H_n H_\tau \bar{\tau}$	(6.14)
Синельниковы (6.35)	$\mu_0 \left( \frac{\mu_r^2 H_n^2}{2} + \frac{\mu_r^2 H_\tau^2}{2} \right) \bar{n}$	0	(6.32)
Львов (6.39)	$\mu_0 \left( \frac{\mu_r^2 H_n^2}{2} - \frac{H_\tau^2}{2} \right) \bar{n}$	$\frac{\mu_0 (\mu_r^2 + 1) H_n H_\tau \bar{\tau}}{2}$	(6.38)

*Примечание.* Формула Синельниковых [33, форм. (16), (19)] дана для  $B < B_s$  ( $B_0 \approx 2$  Тл — индукция, соответствующая точке пересечения с осью ординат касательной к насыщенному участку характеристики намагничивания ферромагнитного материала).

является формула Максвелла (4.24). Все другие формулы для вектора натяжения ( $\bar{T}_{*n} = T_{*nn} \bar{n} + T_{*n\tau} \bar{\tau} = (T_{*nn}^n + T_{*nn}^\tau) \bar{n} + T_{*n\tau} \bar{\tau}$ ) и его составляющих ( $T_{*nn}^n \bar{n}$ ,  $T_{*nn}^\tau \bar{n}$ ,  $T_{*n\tau} \bar{\tau}$ ), приведенные в табл. 6.2, ошибочны. Причем каждая из этих формул, как видно из табл. 6.3, ошибочна по-своему. Отношение составляющих вектора натяжения  $T_{*nn}^n \bar{n}$ ,  $T_{*nn}^\tau \bar{n}$ , рассчитанных по ошибочным формулам различных авторов, к одноименным составляющим вектора натяжения  $T_{nn}^n \bar{n}$ ,  $T_{nn}^\tau \bar{n}$ , рассчитанным по формуле Максвелла (4.24), всегда отличается от единицы ( $T_{*nn}^n / T_{nn}^n \neq 1$ ;  $T_{*nn}^\tau / T_{nn}^\tau \neq 1$ ). Тангенциальные составляющие натяжения  $T_{*n\tau} \bar{\tau}$ , рассчитанные по некоторым из ошибочных формул, могут совпадать с тангенци-

Таблица 6.3

Автор формулы (ее номер)	$T_{*np}^n/T_{nn}^n$	$T_{*np}^\tau/T_{nn}^\tau$	$T_{*n\tau}/T_{n\tau}$	Примечание
Максвелл (4.24)	1	1	1	
Максвелл, Эйнштейн, Лауб (6.27)	$(2\mu_r - 1)/\mu_r$	$1/\mu_r$	1	
Тамм (6.34)	$\mu_r$	$\mu_r(2 - \mu_r)$	1	
Львов (6.15)	$\mu_r$	$\mu_r$	$\mu_r$	
Астахов (6.36)	$\mu_r$	$1/\mu_r$	1	
Синельниковы (6.35)	$\mu_r$	$-\mu_r$	0	
Львов (6.39)	$\mu_r$	$1/\mu_r$	$(\mu_r^2 + 1)/(2\mu_r)$	

альной составляющей  $T_{n\tau}^{\bar{}}$  по формуле Максвелла (в этом случае  $T_{*n\tau}/T_{n\tau} = 1$ ).

Таким образом, натяжение  $\bar{T}_{*n}$ , рассчитанное по ошибочным формулам, во много раз отличается от натяжения  $\bar{T}_n$ , рассчитанного по формуле Максвелла (4.24). И лишь в одном частном случае, когда  $\mu_r = 1$ , ошибочные формулы для натяжения дают правильный результат ( $\bar{T}_{*n} = \bar{T}_n$ ). Впрочем, это не относится к формуле Синельниковых (6.35), которая и при  $\mu_r = 1$  не дает правильного результата.

Причем, все ошибочные формулы для  $\bar{T}_n$  [за исключением формулы Львова (6.15)], непригодны не только для оригинала, но и для

Таблица 6.4

Автор формулы (ее номер)	Формула для $\bar{f}_s$ на границе между средами $a$ и $b$	Исходная формула для
Максвелл (4.33)	$\left[ \frac{\mu_0 H_\tau^2}{2} (\mu_{ar} - \mu_{br}) + \frac{B_n^2}{2\mu_0} \left( \frac{1}{\mu_{br}} - \frac{1}{\mu_{ar}} \right) \right] \bar{n}_b$	(4.24)
Максвелл, Эйнштейн—Лауб (6.31)	$\frac{B_n^2}{2\mu_0} \left[ \frac{(2\mu_{br} - 1)}{\mu_{br}^2} - \frac{(2\mu_{ar} - 1)}{\mu_{ar}^2} \right] \bar{n}_b$	(6.27)
Львов (6.21)	$\frac{\mu_0 H_\tau^2}{2} (\mu_{ar}^2 - \mu_{br}^2) \bar{n}_b + \mu_b H_{bn} H_\tau (\mu_{br} - \mu_{ar}) \bar{\tau}$	(6.15)

Примечание.  $\bar{n}_b$  — внешняя (по отношению к среде  $a$ ) нормаль, направленная в сторону среды  $b$ .

неполной модели (модели Ампера), рассматриваемой как реальный физический объект. И лишь формула Львова (6.15), вывод которой с помощью модели Ампера проведен вполне корректно, пригодна для расчета натяжения в модели Ампера. Как было показано ранее, натяжение в модели Ампера превышает натяжение в оригинале в  $\mu$  раз, т. е. во столько же раз, во сколько натяжение  $\bar{T}_{*n}$  по (6.15) превышает натяжение по (4.24).

При выводе других ошибочных формул для  $\bar{T}_{*n}$  с помощью модели Ампера допущены указанные ранее неточности, из-за которых эти формулы непригодны ни для расчета сил в модели Ампера, ни для расчета сил в оригинале.

Формулы для поверхностной плотности ЭМС  $\bar{f}_S$  сравниваются в табл. 6.4. Единственной формулой, которая позволяет правильно рассчитать  $\bar{f}_S$ , является формула Максвелла (4.33). Вектор  $\bar{f}_S$  по ошибочной формуле (6.31), вытекающей из ошибочной формулы (6.27), имеет правильное направление (содержит только нормальную составляющую). Но модуль этого вектора  $\bar{f}_S$  существенно отличается от правильного значения. По (6.31), модуль вектора  $\bar{f}_S$  вообще не зависит от  $H_\tau$ , в то время как в (4.33) влияние  $H_\tau$  отражено. Вектор  $\bar{f}_S$ , рассчитанный по ошибочной формуле (6.21), содержит кроме неправильно определенной нормальной составляющей еще и тангенциальную составляющую, которая в (4.33) вообще отсутствует.

#### КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. Доказано, что при обосновании всех ошибочных формул для объемной плотности ЭМС и для натяжений, не совпадающих с формулами Максвелла (4.46) и (4.24), допущены те или иные неточности.

2. Единственно правильными формулами для объемной плотности ЭМС и натяжений являются формулы Максвелла (4.46) и (4.24).

Применение к расчетам электромагнитных сил всех других формул для плотности ЭМС и натяжений приводит к ошибочным результатам.

## Сопоставление экспериментальных и расчетных данных

### 7.1. Электромагнитные силы в зубчатом кольцеобразном сердечнике, охваченном тороидальной обмоткой с током

Убедительное экспериментальное подтверждение правильности формул Максвелла для натяжений и плотностей электромагнитных сил и ошибочности всех других формул для определения этих величин можно получить путем измерения упругих деформаций, возникающих под действием ЭМС в зубчатом кольцеобразном сердечнике (см. рис. 5.23). Как было показано в 5.3.7, зубчатый кольцеобразный сердечник 1, обладающий малой жесткостью, при возбуждении магнитного поля существенно деформируется, и уменьшение его диаметра, составляющее несколько десятых долей миллиметра, может быть надежно измерено с помощью обыкновенного микрометра.

Экспериментальная установка для измерения деформации диаметра сердечника, изготовленная на кафедре электромеханики МЭИ, представлена на рис. 7.1. Сердечник 1 (его размеры см. в п. 5.3.7), согнутый из полосы электротехнической стали 2013, установлен внутри тороидальной обмотки 2, которая содержит  $\omega = 1340$  витков и намотана на немагнитный каркас. Каркас состоит из нижнего 3 и верхнего 5 дисков и ряда стоек 4, скрепляющих это диски. Один из зубцов сердечника 1 закреплен на стойке 4. К другому диаметрально расположенному зубцу сердечника прикреплен немагнитный кронштейн 6, опирающийся на шарнирно закрепленную опору 15. Таким образом обеспечивается свобода деформации диаметра сердечника под действием электромагнитных сил, возникающих при возбуждении обмотки 2 постоянным током. Уменьшение диаметра сердечника  $\Delta D$  измеряется с помощью закрепленного на опоре 9 микрометра 10, подвижная часть которого расположена напротив винта 7 в бруске 8, укрепленном на кронштейне 6. Появление электрического контакта между винтом 7 и подвижной частью микрометра 10 приводит к замыканию электрической цепи, в которую входят источник ЭДС 13 и вольтметр 12. Для уменьшения вибраций сердечника под действием различных влияющих факторов установка снабжена гидравлическим демпфирующим устройством, которое состоит из пластины 11, погруженной в сосуд с минеральным маслом 14. Отдельные части установки закреплены на достаточно жестком основании 16.

Уменьшение диаметра  $\Delta D$  под действием электромагнитных сил определялось в виде разности показаний микрометра при отсутствии возбуждения и при токе в обмотке  $i = 4,48$  А.

При проведении предварительных опытов было выявлено большое влияние эллиптичности внешней поверхности зубчатого сердечника и его положения относительно обмотки на результаты эксперимента. Поэтому в заключительной стадии опытов форма сердечника и его положение относительно обмотки были тщательно выверены.

Опыт повторялся на двух аналогичных установках и за уменьшение диаметра принималось среднее значение измеренных на них уменьшений диаметров  $\Delta D_1 = 0,136$  мм и  $\Delta D_2 = 0,162$  мм, откуда среднее уменьшение диаметра  $\Delta D = (\Delta D_1 + \Delta D_2)/2 = (0,136 + 0,162)/2 = 0,149$  мм.

Этот экспериментальный результат достаточно хорошо совпадает с расчетным значением величины  $\Delta D = 0,22$  мм, найденным в примере 5.10 с помощью формулы Максвелла (4.24) для натяжений в магнитном поле.

Результаты расчета электромагнитной силы  $F = F_y$  в зубчатом кольцеобразном сердечнике (см. рис. 5.23 и 7.1) по формуле Максвелла (4.24) и по ошибочным формулам для натяжений в магнитном поле приведены в табл. 7.1. Из таблицы видно, что составляющие силы  $F_{y34}$ ,  $F_{y12}$ ,  $F_{y45}$  (см. рис. 5.26, а) и  $F_{\alpha r \Sigma}$ ,  $F_{\beta r \Sigma}$ ,  $F_{\alpha \beta \Sigma}$ ,  $F_{\beta \alpha \Sigma}$  (см. рис. 5.26, б), которые соответствуют участкам охватывающей поверхности  $S^+$ , расположенным в воздухе, не зависят от того, по каким формулам они рассчитаны и получаются такими же, как при расчете по формуле Максвелла в § 5.3.7. Объясняется это тем, что в воздухе при магнитной проницаемости  $\mu = \mu_0$  исчезает различие между ошибочными формулами и формулой Максвелла для натяжений. Таким образом, при расчете по ошибочным формулам приобре-

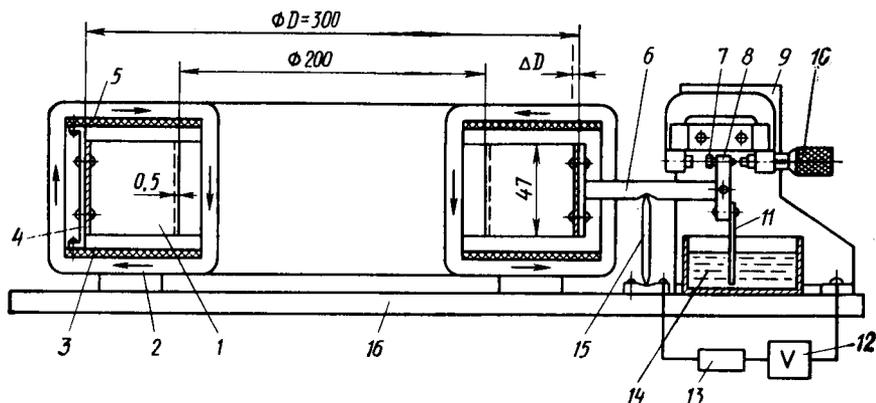


Рис. 7.1. Экспериментальная установка для измерения упругих деформаций в зубчатом кольцеобразном сердечнике

тает иное значение только составляющая силы  $F_{y23}$ , которая соответствует участку охватывающей поверхности  $S^+$ , расположенному в сечении 23 самого зубчатого сердечника (сечению по оси паза  $\beta$  на рис. 5.26, а или сечению по оси паза  $\alpha$  на рис. 5.26, б).

Поскольку в сечении 23 самого сердечника имеются только нормальные составляющие индукции  $B = B_n$  и напряженности  $H = H_n$ , нетрудно получить следующие частные формулы для натяжений на поверхности 23:

Таблица 7.1

Обозначение составляющих силы, Н	Результаты расчета по формулам		
	Максвелла (4.24)	Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27)	Львова (6.15), Тамма (6.34), Астахова (6.36)

*Расположение охватывающей поверхности  $S^+$  (см. рис. 5.26, а)*

$F_{y23}$	0,0838	0,167	28,31
$F_{y34}$		0,0837	
$F_{y12}$		-0,269	
$F_{y45}$		0,179	
$F = F_y$	0,0778	0,161	28,3

*Расположение охватывающей поверхности  $S^+$  (см. рис. 5.26, б)*

$F_{y23}$	0,0678	0,135	27,0
$F_{\alpha r \Sigma} = \Sigma F_{\alpha r y}$		-0,009828	
$F_{\beta r \Sigma} = \Sigma F_{\beta r y}$		-0,00132	
$F_{\alpha \beta \Sigma} = \Sigma F_{\alpha \beta y}$		+0,0818	
$F_{\beta \alpha \Sigma} = \Sigma F_{\beta \alpha y}$		-0,0698	
$F = F_y$	0,0775	0,1447	27,01
$F_{cp}$	0,07765	0,1528	27,65

1)  $T_n^M = T_{nn}^M = B^2 / (2\mu_0 \mu_r) = \mu_0 \mu_r H^2 / 2$ , исходя из формулы Максвелла (4.24);

2)  $T_n^{M-\Theta} = T_{nn}^{M-\Theta} = \mu_0 (2\mu_r - 1) H^2 / 2$ , исходя из формулы Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27);

3)  $T_n^{L-A} = T_{nn}^{L-A} = B^2 / (2\mu_0) = \mu_0 \mu_r^2 H^2 / 2$ , исходя из формул Львова (6.15), Тамма (6.34) или Астахова (6.36).

Из этих частных формул следует, что сила

$$\bar{F}_{y23}^{M-\Theta} = \int_{S_{23}^+} \bar{T}_n^{M-\Theta} dS,$$

рассчитанная по формуле Максвелла, Эйнштейна, Лауба, будет превышать силу  $F_{y23}^M = \int_{S_{23}^+} T_n^M dS$ , рассчитанную по формуле Максвелла в  $(2\mu_r - 1) / \mu_r$  раза. Соответственно сила, рассчитанная по формулам Львова, Тамма или Астахова, будет превосходить силу  $F_{y23}^M$ , рассчитанную по формуле Максвелла в  $\mu_r$  раз. Тогда исходя из найденной в § 5.3.7 силы  $F_{y23}^M = 0,0838$  Н (в сечении 23, см. рис. 5.26, а) и имея в виду, что по рис. 5.25 в этом сечении  $B = 1,74$  Тл,  $H = 4100$  А/м,  $\mu_r = 337,7$ , получим приведенные в табл. 7.1 значения сил  $F_{y23}$ :

$$F_{y23}^{M-\Theta} = F_{y23}^M (2\mu_r - 1) / \mu_r = 0,167 \text{ Н}; \quad F_{y23}^{L-A} = F_{y23}^M \mu_r = 28,31 \text{ Н}.$$

Соответственно исходя из найденной в § 5.3.7 силы  $F_{y23}^M = 0,0678$  Н (в сечении 23 см. рис. 5.26, б) и имея в виду, что по рис. 5.25 в этом сечении  $B = 1,701$  Тл,  $H = 3394$  А/м,  $\mu_r = 398,8$ , получим приведенные в таблице 7.1 значения сил  $F_{y23}$ :

$$F_{y23}^{M-\Theta} = F_{y23}^M (2\mu_r - 1) / \mu_r = 0,135 \text{ Н};$$

$$F_{y23}^{L-A} = F_{y23}^M \mu_r = 27,01 \text{ Н}.$$

Сложив составляющие  $F_{y23}$  с другими составляющими сил, показанных на рис. 5.26, получим электромагнитные силы  $F = F_y$ , рассчитанные по различным формулам соответственно для охватывающих поверхностей  $S^+$  по рис. 5.26, а, б. За окончательное значение силы, вызывающей деформацию сердечника, примем средние значения сил по рис. 5.26, а, б,  $F_{ср}$ , приведенные в последней строке таблицы. Полагая, что упругие деформации зубчатого кольцевого сердечника пропорциональны силам  $F_{ср}$ , нетрудно исходя из уменьшения диаметра  $\Delta D^M = 0,22$ , соответствующего силе  $F_{ср}^M = 0,07765$  Н и найденного в § 5.3.7, рассчитать уменьшения диаметров:  $\Delta D^{M-\Theta} = \Delta D^M F^{M-\Theta} / F_{ср}^M = 0,4329$  мм;  $\Delta D^{L-A} = \Delta D^M F_{ср}^{L-A} / F_{ср}^M = 78,3$  мм, соответствующих силам  $F_{ср}^{M-\Theta}$  и  $F_{ср}^{L-A}$ .

Т а б л и ц а 7.2

Способ определения силы $F$	Сила $F$ , Н	Уменьшение диаметра, мм
Расчет по формулам:		
Максвелла (4.24)	0,0776	0,22
Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27)	0,153	0,433
Львова (6.15), Тамма (6.34), Астахова (6.36)	27,65	78,3
Эксперимент на установке по рис. 7.1	—	0,15

Рассчитанные таким образом уменьшения диаметров сопоставлены с экспериментальным значением в табл. 7.2. Проведенное сопоставление подтверждает правильность формулы Максвелла для напряжений (4.24) и вытекающих из нее формул Максвелла для объемной (4.46) и поверхностной (4.33) плотностей электромагнитных сил и ошибочность всех других формул для расчета этих величин.

## 7.2. Радиальная электромагнитная сила, действующая на зубец сердечника электрической машины

Для экспериментального определения радиальной электромагнитной силы, действующей на зубец сердечника электрической машины, на кафедре электромеханики МЭИ была создана специальная установка, подробно рассмотренная в [36]. Измерение сил, действующих на зубец сердечника, было проведено на физической модели высоковольтного гидрогенератора. Один из зубцов модели 1 был свободно подвешен на двух специальных шпильках 4, ввернутых в тело зубца и закрепленных на станине 5 модели (рис. 7.2). Для обеспечения свободы перемещения зубца 1 под действием электромагнитных сил между зубцом и примыкающими к нему элементами ярем 3 были предусмотрены воздушные зазоры  $\delta_0$ . Элементы ярем 3 были закреплены на станине 5 отдельно. Таким образом, шпильки 4 полностью воспринимали усилия, приложенные к зубцу. Для измерения деформаций шпилек при действии на зубец различных сил на шпильки были наклеены тензосопротивления 6. Тензосопротивления включались таким образом, что один из измерительных мостов мерил только растяжение шпильки, т. е. радиальную силу, действующую на зубец. Тензометрируемые шпильки совместно со своими каналами усиления были предварительно проградуированы при статической нагрузке. Для уменьшения возможной температурной погрешности использовались компенсационные сопротивления, находившиеся в тех же температурных условиях, что и тензометрируемые шпильки.

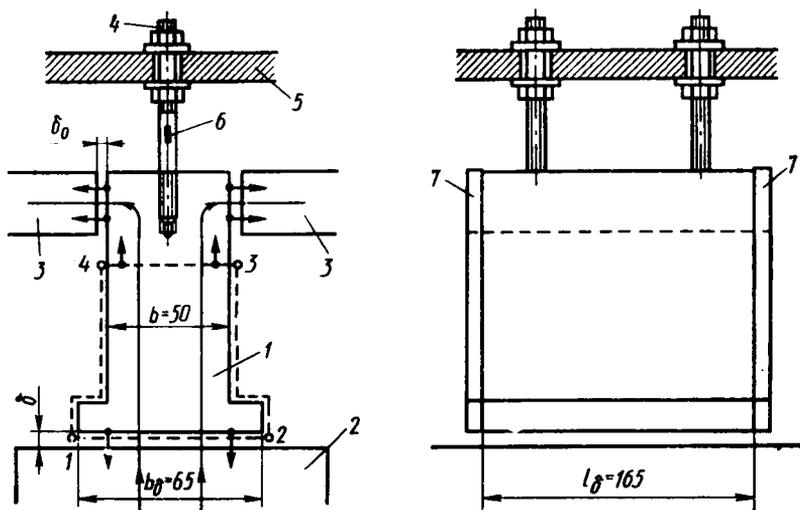


Рис. 7.2. Экспериментальная установка для измерения радиальной электромагнитной силы, действующей на зубец сердечника электрической машины

Зубец 1 набран из листов электротехнической стали марки Э48 толщиной 0,2 мм и стянут с помощью нажимных плит 7 из немагнитной стали. Характеристики намагничивания для материала сердечника приводятся в [35, табл. 7.3]. Зубец имеет следующие размеры: ширину наконечника  $b_\delta = 65$  мм; ширину тела зубца  $b = 50$  мм; расчетную длину зазора  $l_\delta = 165$  мм; активную длину пакета стали  $l_{k_c l_\delta} = 132$  мм, где  $k_c = 0,8$  — коэффициент заполнения.

Магнитное поле возбуждалось обмоткой полюсов ротора. Индукция в зазоре  $\delta$  составляла  $B_\delta = 0,520$  Тл; индукция в стали тела зубца  $B = B_\delta l_\delta b_\delta / (lb) = 0,795$  Тл; напряженность  $H = 120$  А м; относительная магнитная проницаемость  $\mu_r = B (\mu_0 H) = 5200$ .

Индукция в зазоре  $B_\delta = 0,520$  Тл соответствует экспериментально измеренная сила радиального магнитного тяжения  $F = 1230$  Н. В табл. 7.3 сопоставляются экспериментальные значения силы  $F$  с расчетными значениями силы, выраженными через натяжения по формуле Максвелла (4.24) и по ошибочным формулам (6.27), (6.15), (6.34), (6.36).

Выражение для силы  $F$  через натяжения по формуле Максвелла (4.24) получено в § 5.4.1. Выражения для силы  $F$  через натяжения по формуле Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27) и по формулам Львова (6.15), Тамма (6.34), Астахова (6.36) выведены по аналогии с выводом, приведенным в § 5.4.1.

Так как в данном случае натяжения выражаются только через нормальные составляющие индукции, а тангенциальные составляющие

Способ определения силы $F$	Формула для определения силы $F$	Значение силы $F$ , Н
Расчет по формулам: Максвелла (4.24)	$\frac{B_{\delta}^2 l_{\delta} b_{\delta}}{2\mu_0} \left( 1 - \frac{l_{\delta} b_{\delta}}{l b \mu_r} \right)$	1151
Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27)	$\frac{B_{\delta}^2 l_{\delta} b_{\delta}}{2\mu_0} \left( 1 - \frac{(2\mu_r - 1) l_{\delta} b_{\delta}}{\mu_r^2 l b} \right)$	1151
Львова (6.15), Тамма (6.34), Астахова (6.36)	$\frac{B_{\delta}^2 l_{\delta} b_{\delta}}{2\mu_0} \left( 1 - \frac{l_{\delta} b_{\delta}}{l b} \right)$	-720
Эксперимент на установке, см. рис. 7.2	-	1230

шие индукции отсутствуют, то силы  $F$ , найденные по (6.15), (6.34), (6.36), полностью совпали. Выражения для сил, найденных по (4.24) и (6.27), существенно различны. Однако это различие проявляется только при небольших  $\mu_r$ , а при  $\mu_r = 5200$  практически не сказывается.

Как и следовало ожидать, с экспериментом близко совпадает расчет по формуле Максвелла (4.24), а также расчет по ошибочной в общем случае формуле Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27). Резко расходится с экспериментальными данными (и по величине, и по направлению) расчет по формулам Львова (6.15), Тамма (6.34) и Астахова (6.36).

Влияние магнитной проницаемости  $\mu_r$  в широком диапазоне ее изменения рассмотрено в § 5.4.1 для частного случая, когда  $l_{\delta} = l$  и  $b_{\delta} = b$ . Кривые изменения относительного значения в этом частном случае в зависимости от  $\mu_r$  приведены на рис. 7.3. Из рисунка видно (см. кривую 3), что  $F$  по формуле Львова (6.15) тождественно равна нулю; силы  $F$  по Максвеллу (кривая 1) и Максвеллу, Эйн-

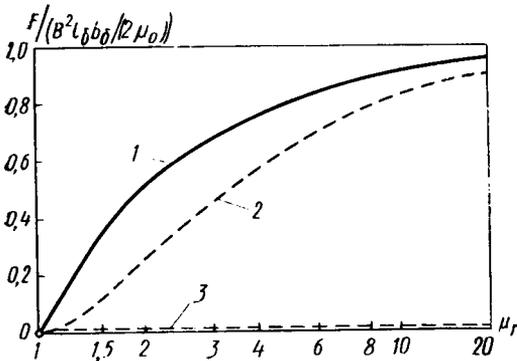


Рис. 7.3. Зависимость радиальной ЭМС, действующей на призматический зубец сердечника ( $l_{\delta} = l$ ,  $b_{\delta} = b$ ) от относительной магнитной проницаемости зубца  $\mu_r$ :

1 — эксперимент и расчет по формуле Максвелла (4.24); 2 — расчет по формуле Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27); 3 — расчет по формуле Львова (6.15) и др.

штейну, Лаубу (кривая 2) практически совпадают при больших  $\mu_r$ , а при близких к единице существенно различаются. Причем при  $\mu_r = 1$ , когда различие между формулами исчезает, все силы  $F$  совпадают с экспериментальным значением, равным нулю.

### 7.3. Электромагнитный момент, действующий на область паза с током в электрической машине

Электромагнитный момент, действующий на область паза с током  $i_1$ , найден расчетным путем (см. 5.4.2). С помощью формул Максвелла (4.24), (4.33), (4.46) для натяжений и плотностей ЭМС получено выражение для электромагнитного момента  $M$ , действующего на область паза с током  $i_1$ , в простейшей электрической машине (см. рис. 5.31):

$$M = i_1 B_{2\delta} l_\delta r_\delta,$$

где  $B_{2\delta}$  — индукция магнитного поля, возбужденного на радиусе  $r_\delta$  токами ( $i_2$  и  $-i_2$  другого сердечника в зоне равномерного зазора на достаточном удалении от пазов);  $l_\delta$  — расчетная длина зазора;  $r_\delta$  — средний радиус зазора между сердечниками. Показано, что при заданных токе  $i_1$  и индукции  $B_{2\delta}$  момент  $M$  не зависит ни от формы пазов, ни от их размеров, ни от магнитной проницаемости зубцов  $\mu_{zr}$ .

С целью экспериментального подтверждения полученного выражения для момента  $M$ , а также формул Максвелла (4.24), (4.33), (4.46), которые были использованы при выводе данного выражения, на кафедре электромеханики МЭИ была изготовлена экспериментальная установка, представленная на рис. 7.4. Установка со-

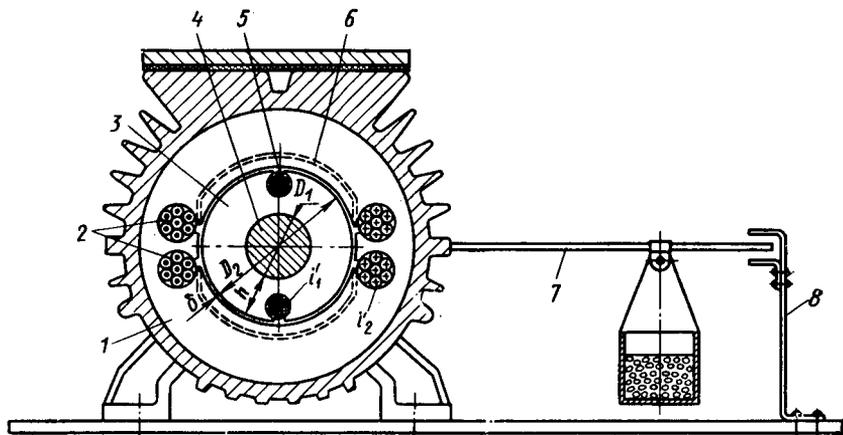


Рис. 7.4. Экспериментальная установка для измерения электромагнитного момента, действующего на область паза с током в электрической машине

стоит из простейшей электрической машины (см. рис. 5.31), устройства 7 для измерения момента, действующего на ротор машины, и ограничителя перемещения ротора 8. Конструкция и материалы элементов простейшей машины удовлетворяют допущениям, принятым в § 5.4.2. Зубцы сердечника ротора 3 изготовлены из порошкового магнитно-мягкого материала, обладающего в слабых полях относительной магнитной проницаемостью  $\mu_{zr} = 30$ . Роль ярма ротора играет вал 4, изготовленный из стали 20. Магнитная проницаемость вала 4 в слабых полях в 1000 раз превышает магнитную проницаемость зазора и ее можно считать бесконечно большой ( $\mu_r = \infty$ ). В двух диаметрально расположенных полузакрытых пазах ротора помещается обмотка ротора 5, состоящая из  $\omega_1 = 100$  витков. При токе в обмотке ротора  $i'_1 = 2$  А полный ток в пазу ротора составляет  $i_1 = i'_1 \omega_1 = 200$  А. Сердечник статора 1 изготовлен из стали 20. Магнитную проницаемость сердечника можно считать равной бесконечности ( $\mu = \infty$ ). В двух диаметрально расположенных группах полузакрытых пазов статора помещается обмотка статора 2, состоящая из  $\omega_2 = 100$  витков. При питании этой обмотки постоянным током  $i'_2$  в зонах зазора, достаточно удаленных от пазов, была создана индукция  $B_{2\delta} = 0,175$  Тл, которая измерялась с помощью катушек 6 и миллиамперметра. Измеренный на установке момент, действующий на область одного паза, составил

$$M_{п1} = Gh/2 = 0,0685 \text{ Дж},$$

где  $G = 0,548$  Н — вес уравновешивающего груза;  $h = 0,25$  м — плечо приложения груза  $G$ .

Сопоставление экспериментального значения  $M_{п1}$  с его расчетным значением, полученным по формуле Максвелла (4.26) для натяжений, а также с расчетными значениями, полученными с помощью ошибочных формул для натяжений, показано в табл. 7.4.

Формула для момента  $M_{п1}$ , выведенная с помощью формулы Максвелла (4.26) для натяжений, получена в § 5.4.2. Вывод формулы для момента  $M_{п1}$  с помощью формулы Львова (6.15) для натяжений проводится по аналогии с выводом в § 5.4.2. При этом натяжения по (6.15) отличаются от натяжения по (4.24) только на участках охватывающей поверхности 12 и 1'2' в зубцах ротора, где они имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \bar{T}'_{*n} &= -(B'_t/2\mu_0) \bar{q}_\theta \quad (\text{вместо } \bar{T}_n = -(B_t/2\mu_z) \bar{q}_\theta); \\ \bar{T}'_{*n} &= ((B'_t)^2/2\mu_0) \bar{q}_\theta \quad (\text{вместо } \bar{T}'_n = ((B'_t)^2/2\mu_z) \bar{q}_\theta). \end{aligned}$$

Вывод формулы для момента  $M_{п1}$  с помощью формул Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27), Львова (6.39), Астахова (6.36) для натяжений, которые в данном случае совпадают между собой, также проводится по аналогии с выводом в § 5.4.2. При этом натяжения, рассчитанные по этим формулам, отличаются от натяжения по (4.24)

Таблица 7.4

Способ определения момента $M_{п1}$	Формула для определения момента $M_{п1}$	Значение момента $M_{п1}$ , Дж
Расчет по формулам: Максвелла (4.24)	$i_1 B_{2\delta} l' \delta$	0,0714
Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27), Львова (6.39), Астахова (6.36)	$i_1 B_{2\delta} l' \delta \frac{\frac{1}{\mu_{zr}^2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_3}{r_2}}{\frac{1}{\mu_{zr}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_3}{r_2}}$	0,0307
Львова (6.15)	$i_1 B_{2\delta} l' \delta \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_3}{r_2}}{\frac{1}{\mu_{zr}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_3}{r_2}}$	0,679
Эксперимент на установке, см. рис. 7.5	—	0,0685

только на участках охватывающей поверхности 12 и 1'2' в зубах ротора, где они имеют следующие значения:

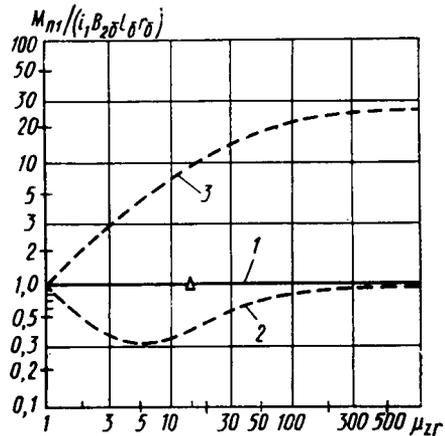
$$\bar{T}_{*n} = -\frac{B_{\tau}^2}{2\mu_0 \mu_{zr}^2} \bar{q}_0 \quad \text{и} \quad \bar{T}'_{*n} = \frac{(B'_{\tau})^2}{2\mu_0 \mu_{zr}^2} \bar{q}_0.$$

Как видно из табл. 7.4, с экспериментом близко совпадает только расчет по формуле Максвелла (4.24) для натяжений. Расчет по формуле Львова (6.15) для натяжений превышает экспериментальное значение в 9,91 раза. Расчет по формулам Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27), Львова (6.39), Астахова (6.36) для натяжений меньше экспериментального значения в 2,23 раза.

На рис. 7.5 дано сравнение момента  $M$ , рассчитанного по формуле Максвелла (4.24) для

Рис. 7.5. Зависимость электромагнитного момента, действующего на область паза с током электрической машины, от магнитной проницаемости сердечника  $\mu_{zr}$

1 — расчет по формуле Максвелла (4.24); 2 — расчет по формуле Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27); 3 — расчет по формуле Львова (6.15);  $\Delta$  — эксперимент на установке по рис. 7.4



натяжений, с моментом, рассчитанным по ошибочным формулам для натяжений, при варьировании относительной магнитной проницаемости  $\mu_{2r}$  зубцов сердечника ротора. Видно, что эти моменты совпадают только при  $\mu_{2r} = 1$ . Наибольшая ошибка при расчете по формулам Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.27) и другим наблюдается при  $\mu_{2r} \cong 5$ , когда расчет по (6.27) меньше расчета по (4.24) примерно в 3 раза. При больших  $\mu_{2r} \rightarrow \infty$  расчет по (6.27) совпадает с расчетом по (4.24). Наоборот, ошибка в расчете по формуле Львова (6.15) возрастает с ростом  $\mu_{2r}$ . И при  $\mu_{2r} \rightarrow \infty$  расчет по (6.15) превышает расчет по (4.24) и эксперимент в 24 раза.

#### 7.4. Силы электромагнитного взаимодействия между линейным током и магнитным цилиндром

Силы электромагнитного взаимодействия в такой магнитной системе (см. рис. 5.13) найдены расчетным путем в § 5.3.2. С помощью формул Максвелла (4.24), (4.33), (4.46) для натяжений и плотностей ЭМС получено выражение (5.37) для взаимно уравновешенных сил  $F_i$  и  $F$ , первая из которых приложена к току  $i$ , а вторая — магнитному цилиндру:

$$F = F_i = \frac{i^2 \mu_0 \mu_{1r} (\mu_{2r} - \mu_{1r}) k^2 l}{2\pi r_A (\mu_{2r} + \mu_{1r}) (1 - k^2)},$$

где  $\mu_{1r}$ ,  $\mu_{2r}$  — относительные магнитные проницаемости окружающей среды 1 и цилиндра 2;  $k = r_1/r_A$ ,  $r_1$  — радиус магнитного цилиндра 2 (см. рис. 5.13 или 7.6);  $r_A$  — расстояние между осью цилиндра и током  $i$ ;  $l$  — длина элемента цилиндра.

При  $\mu_{1r} = 1$ , т. е. в случае, когда магнитный цилиндр и ток  $i$  располагаются в немагнитной среде 1, такое же выражение для сил  $F_i$  и  $F$  можно получить с помощью некоторых ошибочных формул для натяжений или плотностей ЭМС (см. гл. 6). Объясняется это тем, что при  $\mu_{1r} = 1$  ( $\mu_1 = \mu_0$ ) натяжения и плотности ЭМС, рассчитанные с помощью любой из

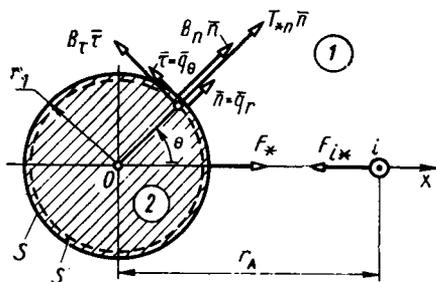


Рис. 7.6. Силы электромагнитного взаимодействия между током  $i$  и магнитным цилиндром

этих ошибочных формул, за исключением формулы Синельниковых (6.35), совпадают с натяжениями и плотностями ЭМС, рассчитанными по формулам Максвелла (4.24), (4.33), (4.46).

Для определения силы  $F_*$ , действующей на магнитный цилиндр, по формуле Синельниковых (6.35) для натяжений, нужно, как рекомендовано в [33], проинтегрировать элементарные силы  $T_{*n} \bar{n} dS$  по по-

верхности  $S^-$ , расположенной внутри цилиндра 2 на бесконечно малом расстоянии от его наружной поверхности  $S$  ( $r = r_1 = \text{const}$ ):

$$F_* = \left| \int_{S^-} T_{*n} \bar{n} dS \right|,$$

где  $\bar{n} = \bar{q}_r$  — внешняя нормаль к поверхности  $S^-$ .

Имея в виду, что индукция  $B_2$  на поверхности  $S^-$  (рис. 7.6) значительно меньше индукции насыщения  $B_0$ , выразим натяжение по первой из формул (6.35)  $T_{*n} = B^2/(2\mu_0) = (B_{2r}^2 + B_{2\theta}^2)/(2\mu_0)$ .

Для определения компонент индукции  $B_{2r}$  и  $B_{2\theta}$  воспользуемся приведенными в § 5.3.2 результатами расчета магнитного поля тока  $i$  в присутствии цилиндра 2. Там были найдены компоненты индукции поля тока  $i$  на поверхности  $S^+(r = r_1 = \text{const})$  в среде 1:

$$B_{1r} = -ic_r r_A \sin \theta / b^2; \quad B_{1\theta} = ic_\theta (r_1 - r_A \cos \theta) / b^2,$$

где  $c_r = \mu_0 \mu_{1r} \mu_{2r} / (\pi (\mu_{2r} + \mu_{1r}))$ ;  $b^2 = 2kr_A^2 (p - \cos \theta)$ ;  $k = r_1 / r_A$ ;  $p = (1 + k^2) / (2k)$ ;  $c_\theta = \mu_0 \mu_{1r}^2 / (\pi (\mu_{2r} + \mu_{1r}))$ .

Используя граничные условия на поверхности  $S$ , отделяющей среду 2 от среды 1, нетрудно выразить компоненты индукции в среде 2, через компоненты индукции в среде 1:  $B_{2r} = B_{1r} = -ic_r \times r_A \sin \theta / b^2$ ;  $B_{2\theta} = (\mu_{2r} / \mu_{1r}) B_{1\theta} = ic_r (r_1 - r_A \cos \theta) / b^2$ .

Вводя в выражение для  $F_*$  натяжение  $T_{*n}$  по (6.35) и выражая последнее через компоненты индукции  $B_{2r}$  и  $B_{2\theta}$ , получим

$$\begin{aligned} F_* &= \int_0^{2\pi} T_{*n} \cos \theta (lr_1 d\theta) = 2 \int_0^\pi T_{*n} \cos \theta (lr_1 d\theta) = \\ &= \frac{i^2 c_r^2 lr_1}{4\mu_0 k^2 r_A^2} \int_0^\pi \frac{((1+k^2) \cos \theta - 2k \cos^2 \theta) d\theta}{(p - \cos \theta)^2}. \end{aligned}$$

Теперь можно ввести другие переменные:

$$\begin{aligned} (p - \cos \theta) &= x; \quad d\theta = dx / \sin \theta; \quad \cos \theta = p - x; \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \\ &= \sqrt{X}; \quad (X = a_1 x^2 + b_1 x + c_1); \quad a_1 = -1; \quad b_1 = 2p; \\ c_1 &= 1 - p^2 = -(1 - k^2)^2 / (4k^2) < 0. \end{aligned}$$

После введения этих переменных имеем

$$F_* = \frac{i^2 c_r^2 lr_1}{4\mu_0 k^2 r_A^2} \left( \int_{p-1}^{p+1} \frac{(4kp - 1 - k^2) dx}{x \sqrt{X}} - \int_{p-1}^{p+1} \frac{2k dx}{\sqrt{X}} \right).$$

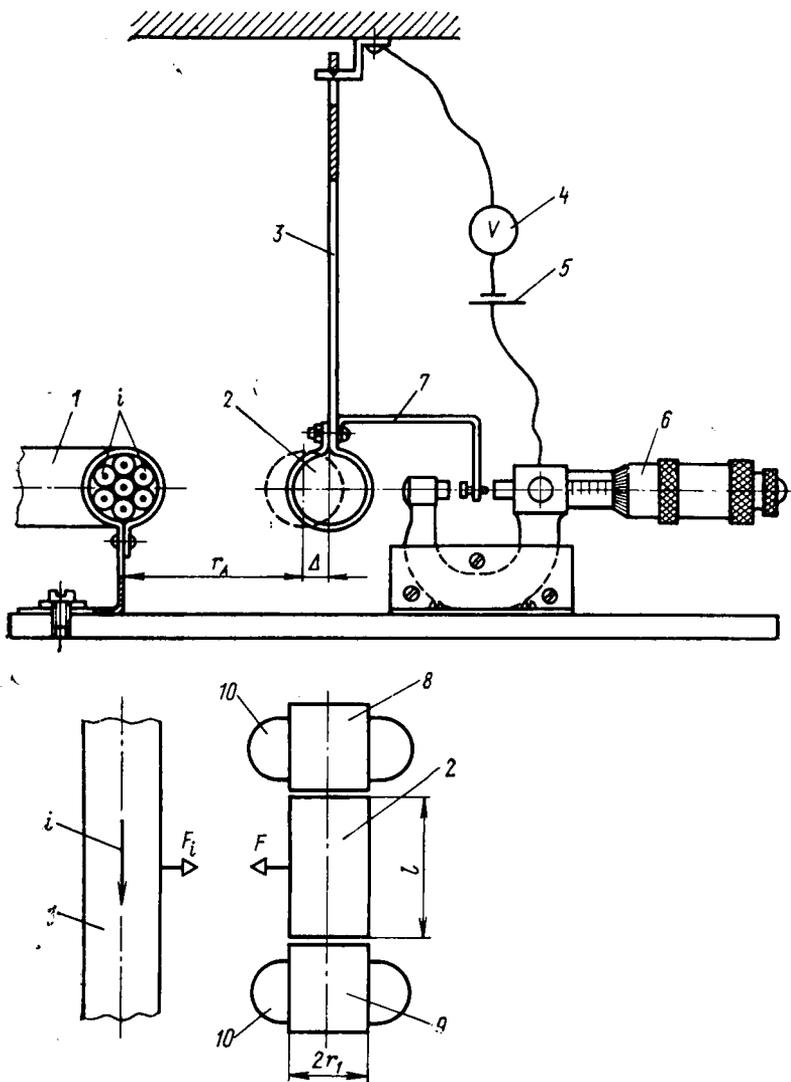


Рис. 7.7. Экспериментальная установка для измерения силы электромагнитного взаимодействия  $F$  между током  $i$  и магнитным цилиндром

Согласно [22, с. 99, № 241, 258], найдем

$$\int_{\rho-1}^{\rho+1} \frac{dx}{\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{-a_1}} \arcsin \frac{2a_1 x + b_1}{\sqrt{-\Delta}} \Big|_{\rho-1}^{\rho+1} = \pi;$$

$$\int_{\rho-1}^{\rho+1} \frac{dx}{x \sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-c_1}} \arcsin \frac{b_1 x + 2c_1}{\sqrt{-\Delta}} \Big|_{\rho-1}^{\rho+1} = \frac{2k\pi}{1-k^2}.$$

После этого получим следующую формулу для силы  $F_*$ , выраженной через натяжения по ошибочной формуле Синельниковых (6.35):

$$F_* = \frac{i^2 \mu_0 \mu_{1r}^2 \mu_{2r}^2 l k^2}{\pi r_A (\mu_{2r} + \mu_{1r})^2 (1-k^2)}.$$

где  $k = r_1/r_A$ .

Сила  $F_*$ , рассчитанная по этой формуле, существенно отличается от силы  $F$  [см. (5.37)], полученной исходя из формулы Максвелла (4.26) для натяжений.

С целью подтверждения правильности формулы Максвелла (4.24) для натяжений и ошибочности формулы Синельниковых (6.35) на кафедре электромеханики МЭИ была изготовлена специальная установка для измерения силы  $F$ , действующей на ферромагнитный цилиндр 2 (рис. 7.7).

Установка включает катушку 1 с полным током  $i$  и ферромагнитный цилиндр 2 из стали 20, подвешенный на немагнитной пластине 3. Расстояние  $r_A$  между осью цилиндра 2 и осью рабочей стороны катушки 1 может быть изменено в необходимых пределах. О значении силы  $F$ , действующей на цилиндр, представляется возможным судить по его отклонению  $\Delta$  от положения на вертикали после включения тока  $i$ .

Для измерения отклонения  $\Delta$  используется микрометр 6, соприкосновение перемещаемой части которого с цилиндром фиксируется по показанию вольтметра 4 в электрической цепи батарей 5. Для обеспечения двумерности магнитного

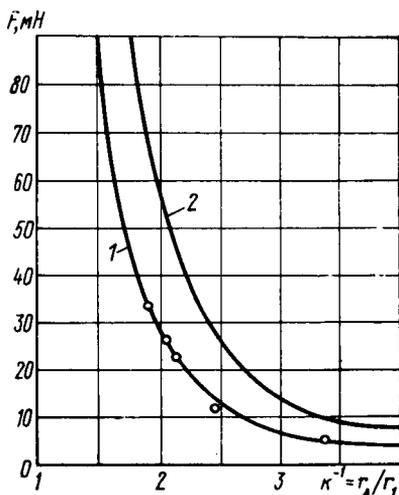


Рис. 7.8. Зависимость силы  $F$ , действующей на магнитный цилиндр, от расстояния  $r$  между током и цилиндром:

1 — расчет по формуле Максвелла (4.24);  
2 — расчет по формуле Синельниковых (6.35);  $\Delta$  — эксперимент на установке по рис. 7.7

поля на протяжении всей длины  $l$  цилиндра 2 служат дополнительные экранирующие цилиндры 9 и 8, отделенные от цилиндра 2 небольшим зазором.

Цилиндры 9 и 8 закреплены на основании с помощью пластилина. Перед измерением отклонения цилиндра 2 оси цилиндров 9 и 8 совмещаются с осями цилиндра 2. Радиусы цилиндров 2, 9, 8  $r_1 = 0,011$  м; длина цилиндра 2  $l = 0,15$  м; относительная магнитная проницаемость соответственно цилиндра 2 в слабых полях  $\mu_{2r} \approx 1000$  и окружающего пространства  $\mu_{1r} = 1$ ; полный ток катушки  $i = 250$  А. Результаты расчета силы  $F(F_*)$  и ее экспериментального определения при различных расстояниях  $r_A$  приведены в табл. 7.5 и на рис. 7.8. Из таблицы и рисунка следует, что сила  $F$  (кривая 1), рассчитанная с помощью формулы Максвелла (4.26) для натяжения, совпадает с экспериментальными данными, в то время как сила  $F_*$  (кривая 2), рассчитанная с помощью ошибочной формулы Синельниковых (6.35), резко отличается от данных эксперимента. О недопустимости использования формулы (6.35) для расчета электромагнитных сил говорит и тот факт, что в частном случае при  $\mu_{1r} = \mu_{2r}$ ,

Таблица 7.5

Способ определения силы $F$		Сила $F$ , мН			
		Расчет по формуле Максвелла (4.24) для натяжений	Расчет по формуле Синельниковых (6.35) для натяжений	Эксперимент	
Формула для силы $F$		$\frac{\mu_0 i^2 l k^2}{2\pi r_A (1-k^2)}$	$\frac{\mu_0 i^2 l k^2}{\pi r_A (1-k^2)}$	—	
Результаты расчетов и эксперимента	$\frac{r_A \text{ (м)}}{k-1}$	$\frac{0,0165}{1,50}$	90,9	181,8	—
		$\frac{0,0188}{1,707}$	52,1	104,2	—
		$\frac{0,0210}{1,91}$	33,7	67,4	33,5
		$\frac{0,0225}{2,05}$	26,2	52,4	26,5
		$\frac{0,0234}{2,13}$	22,7	45,4	22,6
		$\frac{0,027}{2,45}$	13,8	27,6	11,9
		$\frac{0,037}{3,37}$	4,91	9,82	5,39

когда сила  $F$ , определенная по формуле Максвелла (4.26), как и следовало ожидать, обращается в нуль, сила  $F_*$ , определенная по формуле (6.35), имеет конечное значение

$$F_* = \frac{\mu_0 i^2 \mu_r^2 l k^2}{4\pi r_A (1 - k^2)}.$$

### 7.5. Электромагнитные силы и упругие деформации в униполярной машине постоянного тока

Рассмотрим магнитное поле и электромагнитные силы (ЭМС) в простейшей униполярной машине постоянного тока, показанной на рис. 7.9 [42]. В представленной конструкции не только якорь 4, но и другие активные части с целью упрощения анализа выполнены в виде тел вращения. Это относится и к магнитопроводу индуктора 1, и к токопроводам 3, 6, выполненным в виде труб, и к контактным щеткам 5, 7, имеющим форму колец.

Возбуждение машины осуществляется полным током  $i_j = \omega_j i_j'$  в обмотке возбуждения 2. К якорю с помощью токоподводов 3, 6 и контактных щеток 5, 7 подводится ток  $i_a$ . Ток возбуждения образует в машине униполярный поток возбуждения  $\Phi_j$ , которому соответствует индукция радиального направления на поверхностях с радиусом  $r_a$  (в зоне верхнего зазора) и с радиусом  $r_\beta$  (в зоне нижнего зазора):

$$\begin{aligned} B_{f\alpha} &= \Phi_j / (2\pi r_a l_\alpha); \\ B_{f\beta} &= \Phi_j / (2\pi r_\beta l_\beta). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Ток якоря  $i_a$  образует внутри магнитопровода индуктора (на тех же поверхностях) магнитные поля с индукциями тангенциального направления

$$\begin{aligned} B_{a\alpha} &= \mu_0 \mu_r H_{a\alpha}; \\ B_{a\beta} &= \mu_0 \mu_r H_{a\beta}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где

$$\begin{aligned} H_{a\alpha} &= i_a / (2\pi r_a); \\ H_{a\beta} &= i_a / (2\pi r_\beta) \end{aligned} \quad (7.3)$$

— напряженности поля на поверхностях с индексами  $\alpha$  и  $\beta$ .

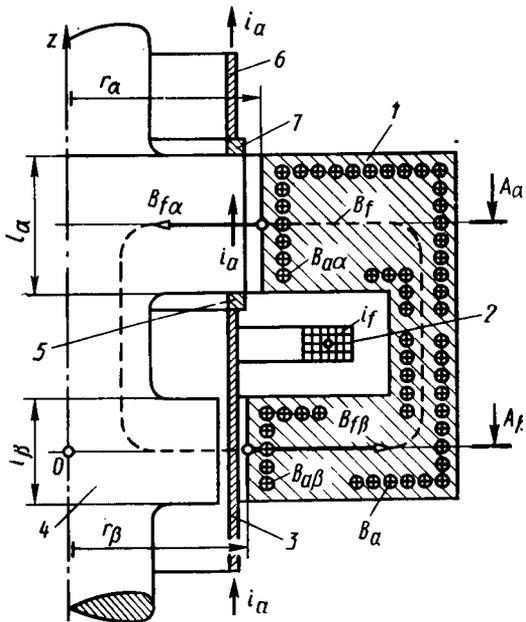


Рис. 7.9. Продольный разрез униполярной машины постоянного тока

Этих данных достаточно, для вычисления электромагнитных моментов, действующих на отдельные части машины. Электромагнитный момент относительно оси  $z$ , действующий на токовый слой якоря униполярной машины, можно найти по общеизвестной формуле

$$M_a = -i_a \Phi_j / (2\pi). \quad (7.4)$$

По этой формуле можно вычислить момент, который будет действовать на токоподвод  $\mathcal{Z}$  с тем же током  $i_a$ , что и в якоре. В силу того, что индукция в зоне  $\beta$  направлена в противоположную сторону по отношению к зоне  $\alpha$ , этот момент будет равен

$$M_b = i_a \Phi_j / (2\pi). \quad (7.5)$$

Как и в разноименно-полюсной электрической машине, моменты  $M_a$  и  $M_b$ , действующие соответственно на вращающиеся и неподвижные части машины, взаимно уравновешены и их сумма равна нулю:

$$M_a + M_b = 0.$$

Общий электромагнитный момент (относительно оси  $z$ ), действующий на магнитопровод индуктора  $I$ ,

$$M_j = \bar{q}_z \int_V [\bar{r} \times \bar{f}] dV + \bar{q}_z \int_S [\bar{r} \times \bar{f}_S] dS, \quad (7.6)$$

где  $\bar{f}$  — объемная плотность ЭМС;  $\bar{f}_S$  — поверхностная плотность ЭМС на поверхности разрыва магнитной проницаемости;  $V$  — объем магнитопровода;  $S$  — поверхность, охватывающая объем  $V$ .

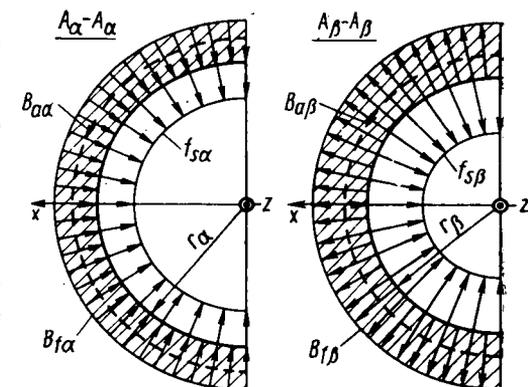
Сначала вычислим момент по (7.6) с помощью единственно правильной формулы Максвелла для объемной плотности ЭМС  $\bar{f}$  (4.46) и вытекающей из нее формулы для поверхностной плотности ЭМС  $\bar{f}_S$  (4.33).

Так как магнитопровод индуктора обладает практически постоянной магнитной проницаемостью ( $\mu_r = \cos nt$ ) и токи проводимости в магнитопроводе отсутствуют ( $\bar{J} = 0$ ), то объемная плотность ЭМС в объеме  $V$  по (4.46) равна нулю ( $\bar{f} = 0$ ). Кроме того, из (4.33) следует, что поверхностные плотности ЭМС  $\bar{f}_S$ , которые действуют на границу между магнитопроводом индуктора, обладающего магнитной проницаемостью  $\mu_a = \mu_0 \mu_r$ , и окружающей немагнитной средой, имеющей  $\mu_b = \mu_0$ , всегда направлены по нормали  $\bar{n}_b$  к этой границе. Иными словами, плотности  $\bar{f}_S$  имеют либо радиальное ( $\bar{f}_S = \pm \bar{q}_r f_S$ ), как на рис. 7.10, либо осевое ( $\bar{f}_S = \pm \bar{q}_z f_S$ ) направление.

Заметим также, что  $\bar{r} = r \bar{q}_r$ . Из сказанного следует, что момент, действующий на магнитопровод индуктора по (7.6), равен нулю

Рис. 7.10. Поверхностные плотности ЭМС, рассчитанные по формуле Максвелла (4.33)

( $M_f = 0$ ). Формально это связано с тем, что в первом интеграле правой части (7.6)  $\vec{f} = 0$ , а во втором — или  $\vec{q}_z[\vec{q}_r \times \vec{q}_z] = 0$ , или  $[\vec{q}_r \times \vec{q}_r] = 0$ . Более того, равен нулю не только полный момент  $M_f$ , приложенный к магнитопроводу индуктора, но равны нулю и моменты, действующие на все участки его границы, в частности,  $M_\alpha$ , действующий на верхнюю часть магнитопровода индуктора, и  $M_\beta$ , действующий на его нижнюю часть:



Совершенно иные значения моментов  $M_\alpha$  и  $M_\beta$ , действующих на нижнюю и верхнюю части магнитопровода индуктора, получим по формулам Е. Л. Львова для объемной  $\vec{j}_*$  [см. (6.14)] и поверхностной  $\vec{j}_{*s}$  [см. (6.21)] плотностей ЭМС, выведенным с помощью модели магнетика по Амперу.

$$M_\alpha = M_\beta = 0. \quad (7.7)$$

В объеме магнитопровода индуктора  $\vec{J} = 0$  и  $\mu_r = \text{const}$ ;  $\vec{j}_{*M} = \text{rot} \vec{M} = (\mu_r - 1) \text{rot} \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{J} = 0$ , откуда следует, что объемная плотность ЭМС в объеме  $V$  равна нулю ( $f_* = 0$ ). Поэтому при определении моментов, действующих на магнитопровод индуктора, нужно учитывать только поверхностные плотности ЭМС по (6.21), связанные с плотностями поверхностных токов  $\vec{j}_{*M}$  на граничной поверхности индуктора  $S$ . Рассчитаем эти токи по (6.6), присваивая индуктору индекс  $a$ , а немагнитной окружающей среде индекс  $b$ .

Поверхностные токи с плотностью

$$\vec{j}_{*Mf} = [\vec{M}_f \times \vec{n}_b] = [\vec{B}_f \times \vec{n}_b] (\mu_r - 1) / (\mu_0 \mu_r) \quad (7.8)$$

воспроизводят в модели индуктора по Амперу такие же индукции  $\vec{B}_f$ , как в оригинале. Поверхностные токи с плотностью

$$\vec{j}_{*Ma} = [\vec{M}_a \times \vec{n}_b] = [\vec{B}_a \times \vec{n}_b] (\mu_r - 1) / (\mu_0 \mu_r) \quad (7.9)$$

воспроизводят в модели индуктора такие же индукции  $\vec{B}_a$ , как в оригинале.

Поверхностные токи с плотностью  $\bar{j}_{*Ma}$  охватывают в модели Ампера продольное сечение магнитопровода индуктора и на поверхностях  $r = r_a$  и  $r = r_b$  направлены по оси  $z$  (рис. 7.11):

$$\left. \begin{aligned} \bar{j}_{*Ma\alpha} &= [(\bar{q}_\theta B_{a\alpha}) \times (-\bar{q}_r)] (\mu_r - 1) / (\mu_0 \mu_r) = \bar{q}_z i_a (\mu_r - 1) / (2\pi r_\alpha); \\ \bar{j}_{*Ma\beta} &= [(\bar{q}_\theta B_{a\beta}) \times (-\bar{q}_r)] (\mu_r - 1) / (\mu_0 \mu_r) = \bar{q}_z i_a (\mu_r - 1) / (2\pi r_\beta). \end{aligned} \right\} (7.10)$$

Суммы поверхностных токов с плотностью  $\bar{j}_{*Ma\alpha}$  и  $\bar{j}_{*Ma\beta}$  соответственно через сечения  $A_\alpha - A_\alpha$  и  $A_\beta - A_\beta$  получаются одинаковыми:

$$i_{*Ma} = j_{Ma\alpha} (2\pi r_\alpha) = j_{Ma\beta} (2\pi r_\beta) = i_q (\mu_r - 1). \quad (7.11)$$

При суммировании с током якоря  $i_a$  ток  $i_{*Ma}$  образует в модели индуктора по Амперу увеличенные в  $\mu_r$  раз напряженности поля:

$$\left. \begin{aligned} H_{*a\alpha} &= (i_a + i_a (\mu_r - 1)) / (2\pi r_\alpha) = i_a \mu_r / (2\pi r_\alpha) = \mu_r H_{a\alpha}; \\ H_{*a\beta} &= (i_a + i_a (\mu_r - 1)) / (2\pi r_\beta) = i_a \mu_r / (2\pi r_\beta) = \mu_r H_{a\beta} \end{aligned} \right\} (7.12)$$

и такую же индукцию, как в оригинале:

$$\begin{aligned} B_{*a\alpha} &= \mu_0 H_{*a\alpha} = \mu_0 \mu_r H_{a\alpha} = B_{a\alpha}; \\ B_{*a\beta} &= \mu_0 H_{*a\beta} = \mu_0 \mu_r H_{a\beta} = B_{a\beta}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Чтобы рассчитать электромагнитный момент, действующий на элементы границы  $S$  магнитопровода индуктора, определим по (6.21) поверхностные плотности ЭМС на этих элементах.

На наружном цилиндрическом участке поверхности  $S$ , где  $\bar{n}_b = -\bar{q}_r$  и  $(\bar{B}_b \bar{n}_b) = ((\bar{B}_f + \bar{B}_a) \bar{n}_b) = 0$ , плотность  $\bar{f}_{*s}$  по (6.21) направлена радиально по  $\bar{q}_r$ . На торцевых участках поверхности  $S$ , где

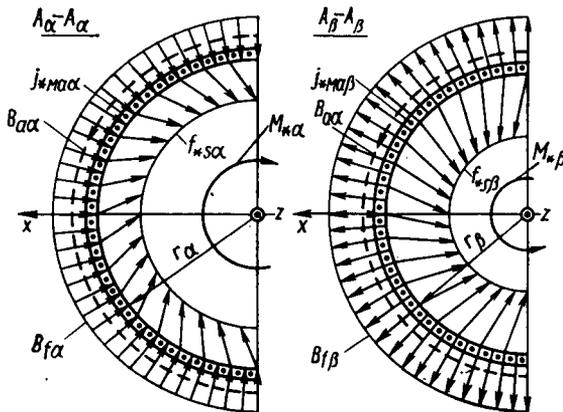


Рис. 7.11. Поверхностные плотности ЭМС, рассчитанные по формуле Львова (6.21)

$\bar{n}_b = \pm \bar{q}_z$  и  $(\bar{B}_b \bar{n}_b) = ((\bar{B}_f + \bar{B}_a) \bar{n}_b) = 0$ , плотность  $\bar{f}_{*S}$  по (6.21) направлена по оси  $z$  (по  $\pm \bar{q}_z$ ). Следовательно, как видно из (7.6), на эти участки поверхности  $S$  в модели Ампера (так же как в оригинале) электромагнитный момент не действует. Однако на внутренний верхний цилиндрический участок границы индуктора, имеющий  $r = r_\alpha$  и расположенный напротив якоря, действует в модели Ампера весьма значительный электромагнитный момент. Имея в виду, что на этом участке  $\bar{n}_b = -\bar{q}_r$ ;  $\mu_{ar} = \mu_r$ ;  $\mu_{br} = 1$ ;  $H_\tau = H_{a\alpha}$  по (7.3);  $\bar{v} = \bar{q}_\theta$ ;  $\bar{B}_b = -B_{f\alpha} \bar{q}_r + H_{a\alpha} \mu_0 \bar{q}_\theta$ ;  $(\bar{B}_b \bar{n}_b) = B_{f\alpha}$  по (7.1), найдем по (6.21) поверхностную плотность ЭМС

$$\bar{f}_{*S\alpha} = -\bar{q}_r \mu_0 H_{a\alpha}^2 (\mu_r^2 - 1) + \bar{q}_\theta B_{f\alpha} H_{a\alpha} (\mu_r - 1). \quad (7.14)$$

Поскольку кроме радиальной составляющей плотность  $\bar{f}_{*S\alpha}$  содержит и тангенциальную составляющую по  $\bar{q}_\theta$  (рис. 7.11), то на верхний цилиндрический участок границы индуктора с индексом  $\alpha$  будет действовать момент по (7.6):

$$\begin{aligned} M_{*\alpha} &= \bar{q}_z \int_0^{2\pi} [(r_\alpha \bar{q}_r) \times \bar{f}_{*S\alpha}] l_\alpha r_\alpha d\theta = \\ &= -i_\alpha (\mu_r - 1) \Phi_f / (2\pi) = -i_{*M\alpha} \Phi_f / (2\pi). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Такой же по абсолютной величине, но направленной в противоположную сторону момент действует на нижний цилиндрический участок границы индуктора, имеющий  $r = r_\beta$ :

$$\begin{aligned} M_{*\beta} &= \bar{q}_z \int_0^{2\pi} [(r_\beta \bar{q}_r) \times \bar{f}_{*S\beta}] l_\beta r_\beta d\theta = i_\alpha (\mu_r - 1) \Phi_f / (2\pi) = \\ &= i_{*M\alpha} \Phi_f / (2\pi), \end{aligned} \quad (7.16)$$

где

$$\bar{f}_{*S\beta} = -\bar{q}_r \mu_0 H_{a\beta}^2 (\mu_r^2 - 1) - \bar{q}_\theta B_{f\beta} H_{a\beta} (\mu_r - 1). \quad (7.17)$$

Полный момент, действующий на индуктор в модели Ампера, складывающийся из моментов  $M_{*\alpha}$  по (7.15) и  $M_{*\beta}$  по (7.16), так же как в оригинале, равен нулю:

$$M_{*f} = M_{*\alpha} + M_{*\beta} = M_f = 0. \quad (7.18)$$

Однако, как видно из (7.15) и (7.16), на верхнюю и нижнюю половины магнитопровода индуктора в модели Ампера действуют моменты, направленные в противоположные стороны:  $M_{*\alpha} = -M_{*\beta} = -i_\alpha \Phi_f (\mu_r - 1) / (2\pi) = M_\alpha (\mu_r - 1)$ , которые в  $(\mu_r - 1)$  раз превышают по абсолютной величине момент  $M_\alpha$  по (7.4), действующий на якорь машины.

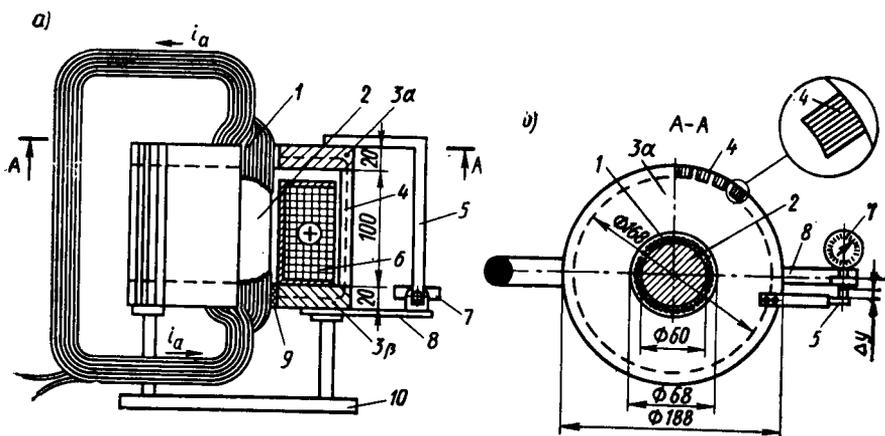


Рис. 7.12. Физическая модель заторможенной униполярной машины по рис. 7.9:

*a* — продольный разрез; *б* — вид сверху

Не считаясь с неполнотой модели Ампера в отношении воспроизведения электромагнитных сил, Львов распространяет результаты, полученные для модели, на оригинал. Он считает, что моменты  $M_{*a}$  и  $M_{*b}$  по (7.15), (7.16) действуют и в оригинале, в то время как в оригинале эти моменты по (7.7) равны нулю.

С целью экспериментального выявления недопустимости распространения на оригинал формул Львова для объемной плотности ЭМС [32, форм. (1), (3), (5)] для поверхностной плотности ЭМС [32, форм. (24)] или (6.21) и для натяжения [32, форм. (22)], выведенных с помощью модели Ампера, на кафедре электромеханики МЭИ создана специальная установка. Данная установка (рис. 7.12, *a*, *б*) представляет собой физическую модель униполярной машины (см. рис. 7.9) в заторможенном состоянии. В установке отсутствуют щетки, и полный ток в якоре и токоподводах, равный  $i_a$ , воспроизводится токами  $i'_a$  в многовитковой катушке 1 с числом витков  $w_a = i_a/i'_a$ , провода которой приклеены к сердечнику якоря 2 и располагаются в зазоре между этим сердечником и магнитопроводом индуктора. Магнитопровод индуктора состоит из верхнего массивного диска 3а, нижнего массивного диска 3б и ярма 4. Ярмо 4 образовано из большого количества пластин, изготовленных из электротехнической стали толщиной 0,35 мм. Пакеты пластин закреплены в прямоугольных пазах, равномерно распределенных по периферии дисков 3а и 3б.

В такой конструкции индуктора обеспечивается малая жесткость под воздействием крутящего момента  $M_a$ , стремящегося повернуть диск 3а относительно диска 3б, установленного на фундаментной плите 10.

Малая жесткость системы при воздействии такого момента объясняется тем, что в пластинах ярма 4 возникают упругие деформации изгиба. Причем деформации эти получаются достаточно большими из-за того, что они определяются минимальным моментом инерции пластин, соответствующим их изгибу на плоскую сторону. Для обеспечения равномерного немагнитного зазора между диском 3а и сердечником ярма 2 последний с помощью немагнитной прокладки 9 закреплен на диске 3б.

Поле возбуждения с потоком  $\Phi_f$  создается в модели с помощью обмотки возбуждения 6, питаемой током  $i_f$  и обладающей числом витков  $w_f$ . Для измерения потока  $\Phi_f$  служит дополнительная катушка, намотанная поверх обмотки возбуждения, к которой подключается миллиамперметр.

Действующий на диск 3а момент  $M_a$  пропорционален углу поворота диска  $\Delta\alpha$ . Поэтому о величине момента  $M_a$  можно судить по окружному перемещению  $\Delta y$  кронштейна 5, прикрепленного к диску 3а, относительно неподвижной пластины 8:

$$M_a = k_M (\Delta y), \quad (7.19)$$

где  $k_M = M_a / \Delta y$  — коэффициент жесткости установки.

Перемещение  $\Delta y$  кронштейна 5 после включения токов ярма  $i'_a$  и возбуждения  $i_f$  измеряется с помощью механического индикатора 7 с ценой деления 10 мкм. Перед проведением основного опыта установка тарировалась путем приложения внешнего момента. В результате тарирования найден коэффициент жесткости установки в (7.19):  $k_M = 2,5 \cdot 10^{-3}$  Дж/мкм.

Характерные размеры модели в принятых ранее обозначениях:  $r_a = r_b = 0,034$  м;  $l_a = l_b = 0,02$  м.

Диски 3а и 3б изготовлены из Ст20. Характеристики намагничивания Ст20 взяты из [35]. Опыт измерения упругих деформаций в модели проводился при полном токе ярма  $i_a = i'_a w_f = 700$  А и потоке возбуждения  $\Phi_f = 2,37 \cdot 10^{-3}$  Вб.

При этом напряженность поля ярма магнитопровода индуктора (в дисках 3а и 3б) на радиусе  $r = r_a = r_b$

$$H_{a\alpha} = H_{a\beta} = i_a / (2\pi r_a) = 3280 \text{ А/м},$$

индукция поля возбуждения

$$B_{f\alpha} = B_{f\beta} = \Phi_f / (2\pi r_a l_a) = 0,555 \text{ Тл}.$$

С помощью характеристики намагничивания стали Ст20 путем итераций найдем, что этим значениям  $H_{a\alpha}$  и  $B_{f\alpha}$  соответствует результирующая индукция  $B_1 = 1,6$  Тл, результирующая напряженность  $H_1 = 3500$  А/м и относительная магнитная проницаемость  $\mu_r = B_1 / (H_1 \mu_0) = 364$ .

Таблица 7.6

Способ определения $M_a$ и $\Delta y$	$M_a$ , Дж	$\Delta y$ , мкм
По формуле (7.7), полученной исходя из формулы Максвелла для $\bar{f}_s$ (4.33)	0	0
По формуле (7.15), полученной исходя из формулы Львова для $\bar{f}_s$ (6.21)	103	40 000
Эксперимент на установке по рис. 7.9	$0 \pm 0,02$	$0 \pm 10$

*Примечание.* Так как установка нагревается симметрично, то температурные погрешности в ней отсутствуют. Погрешность в измерении  $\Delta y$ , связанная с радиальным магнитным тяжением при возможном относительном эксцентриситете зазора 0,25 не превышает  $\pm 2$  мкм.

Результаты расчета и экспериментального определения момента  $M_a$ , приложенного к верхнему диску установки, и перемещения под действием этого момента приводятся в табл. 7.6.

Результаты эксперимента подтверждают справедливость формул Максвелла [16, с. 117, форм. (2), с. 124, форм. (12)] и (4.33) и недопустимость применения формул Львова [32, форм. (1), (3), (5), (22), (24)], выведенных с помощью модели Ампера для расчета электромагнитных сил, действующих на магнетики в оригинале.

#### КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. Результаты расчета электромагнитных сил по формулам Максвелла для объемной плотности ЭМС и для натяжений (4.46) и (4.24) во всех рассмотренных магнитных системах совпадают с экспериментальными данными.

2. Результаты расчетов электромагнитных сил по ошибочным формулам, не совпадающим с формулами Максвелла (4.46) и (4.24), во всех рассмотренных магнитных системах существенно отличаются от экспериментальных данных.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема расчета электромагнитных сил в электромеханических преобразователях и других нелинейных магнитных системах привлекала к себе внимание ученых на всех стадиях развития теории и практики электромагнетизма. Единственно правильные формулы для определения электромагнитных сил в магнитном поле (4.24), (4.47) были найдены основоположником учения об электричестве и магнетизме Дж. К. Максвеллом в 1862 г. в его ранней работе «О физических силовых линиях» [16]. В книге приводится строгое доказательство этих формул для объемной плотности и натяжений электромагнитных сил в магнитном поле. В основу доказательств положен закон сохранения энергии в применении к электромеханическому преобразованию энергии при малом перемещении выделенного объема нелинейной магнитной системы. Показано, что приращение энергии магнитного поля при перемещении выделенного объема необходимо определять не в самой нелинейной системе, а в ее линейной модели, сохраняя магнитные проницаемости во всех элементах системы постоянными. Дано экспериментальное подтверждение формул Максвелла.

Несмотря на то что в основном труде Максвелла «Трактат об электричестве и магнетизме», вышедшем в свет в 1873 г., были предложены иные формулы (6.25), (6.27) для определения электромагнитных сил в магнитном поле, авторы большинства работ по теории электромагнетизма (Л. Больцман, Г. Гельмгольц, Е. Кон, М. Абрагам, И. Е. Тамм, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Дж. Стреттон, К. Шимони и др.) называют формулами Максвелла формулы (4.24), (4.47), найденные в 1862 г. Во многих работах приводятся дополнительные разъяснения к обоснованию формул Максвелла (4.24) и (4.47) или новые их выводы. Эти формулы рекомендуются для практического употребления, в то время как формулы (6.25), (6.27), предложенные Максвеллом в 1873 г. и совпадающие с формулами А. Эйнштейна и И. Лауба [31], считаются недостаточно обоснованными и часто вообще не упоминаются.

Вместе с тем в достаточно многочисленных публикациях формулы Максвелла (4.24), (4.47) для объемной плотности и натяжений электромагнитных сил подвергаются сомнению и их предлагается заменить либо формулами Максвелла, Эйнштейна, Лауба (6.25), (6.27), ошибочность которых доказана в книге, либо другими, по мнению авторов, более правильными формулами для этих величин. К сожалению, приходится констатировать, что количество таких публикаций, в которых содержатся попытки ревизии формул Максвелла (4.24), (4.47), в последние годы даже увеличилось [12, 13, 23, 32, 33, 34 и др.]. Анализ этих работ показывает, что появление ошибочных формул для объемной плотности и натяжений электромагнитных сил почти всегда связано с применением для их вывода математической модели магнитного поля по Амперу (модели Ампера), в которой правильно воспроизводится только индукция магнитного поля  $B$ , а напряженность  $H$  и объемная плотность энергии магнитного поля  $\omega = BH/2$  не воспроизводятся.

Применяя к определению сил, действующих в модели Ампера, энергетические методы, в которых силы выражаются через приращение энергии при малом перемещении, можно прийти к заключению, что в модели Ампера не воспроизводятся электромагнитные силы, а также объемная плотность и натяжения электромагнитных сил.

Однако авторы упомянутых работ игнорируют различие между электромагнитными силами в модели Ампера и в оригинале и распространяют на оригинал формулы для электромагнитных сил, полученные для модели.

В книге дается подробный разбор различных ошибочных формул для объемной плотности и натяжений электромагнитных сил. Указываются причины появления ошибок. Приводится экспериментальное подтверждение ошибочности этих формул.

Применительно к нелинейным магнитным системам и их наиболее сложным представителям — электрическим машинам — сопоставляются три известных способа определения электромагнитных сил в магнитном поле: 1) по изменению энергии магнитного поля при малом перемещении выделенного объема поля; 2) по объемной плотности электромагнитных сил; 3) по натяжениям в магнитном поле. Показано, что при замене нелинейной магнитной системы ее линейной моделью (в первом способе) и использовании формул Максвелла (4.24), (4.47) (во втором и третьем способах) результаты расчетов электромагнитных сил в пределах достижимой точности всегда совпадают.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П1. Выражение объемной плотности макроток $\vec{j}$ через поверхностную плотность микротоков $\vec{j}$

Представим напряженность магнитного поля в точке  $x, y, z$  линейной модели в виде суммы составляющих по осям координат:

$$\vec{H} = \vec{H}_x + \vec{H}_y + \vec{H}_z = \vec{q}_x H_x + \vec{q}_y H_y + \vec{q}_z H_z.$$

Тогда можно считать, что каждая из этих составляющих будет возбуждаться своей системой поверхностных токов, охватывающих элементарные ветви поля составляющих и имеющих поверхностные плотности:

$$\vec{j} = [\vec{H}_x \vec{n}]; \quad \vec{j} = [\vec{H}_y \vec{n}]; \quad \vec{j} = [\vec{H}_z \vec{n}].$$

С целью определения составляющей плотности макроток  $\vec{j}_x$ , направленной по оси  $x$ , рассмотрим элементарные объемы  $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \Delta V_4$  в виде параллелепипедов, примыкающих к точке  $x, y, z$  (рис. П.1). Грани этих параллелепипедов в плоскости  $yz$  имеют размеры  $\Delta y \cdot \Delta z$ . Центры граней (1, 2, 3, 4) смещены относительно точки  $x, y, z$  на малые расстояния  $\pm \Delta y/2$  и  $\pm \Delta z/2$ .

Компоненты напряженностей поля в центрах объемов  $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3$  и  $\Delta V_4$  выражаются через соответствующие приращения и считаются в пределах этих объемов постоянными:

$$\begin{aligned} H_{1y} &= H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} \left( \frac{\Delta z}{2} \right) + \frac{\partial H_y}{\partial y} \left( -\frac{\Delta y}{2} \right); \\ H_{2y} &= H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} \left( \frac{\Delta z}{2} \right) + \frac{\partial H_y}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right); \\ H_{3y} &= H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} \left( -\frac{\Delta z}{2} \right) + \frac{\partial H_y}{\partial y} \left( -\frac{\Delta y}{2} \right); \\ H_{4y} &= H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} \left( -\frac{\Delta z}{2} \right) + \frac{\partial H_y}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right); \\ H_{1z} &= H_z + \frac{\partial H_z}{\partial z} \left( \frac{\Delta z}{2} \right) + \frac{\partial H_z}{\partial y} \left( -\frac{\Delta y}{2} \right); \\ H_{3z} &= H_z + \frac{\partial H_z}{\partial z} \left( -\frac{\Delta z}{2} \right) + \frac{\partial H_z}{\partial y} \left( -\frac{\Delta y}{2} \right); \\ H_{2z} &= H_z + \frac{\partial H_z}{\partial z} \left( \frac{\Delta z}{2} \right) + \frac{\partial H_z}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right); \\ H_{4z} &= H_z + \frac{\partial H_z}{\partial z} \left( -\frac{\Delta z}{2} \right) + \frac{\partial H_z}{\partial y} \left( \frac{\Delta y}{2} \right). \end{aligned}$$

Каждая из этих напряженностей образуется своей системой микротоков, охватывающих соответствующий объем и обладающих определенной поверхностной плотностью  $\vec{j}$ .

Рассмотрим только компоненты этих поверхностных плотностей токов по оси  $x$  на гранях  $y = \text{const}$  и  $x = \text{const}$ .

Обозначим  $\bar{j}_{3x}(z)$  — компоненту поверхностной плотности микротока  $j$  по оси  $x$  на грани объема  $\Delta V_3$  с внешней нормалью  $\bar{n} = \bar{q}_z$ , направленной по

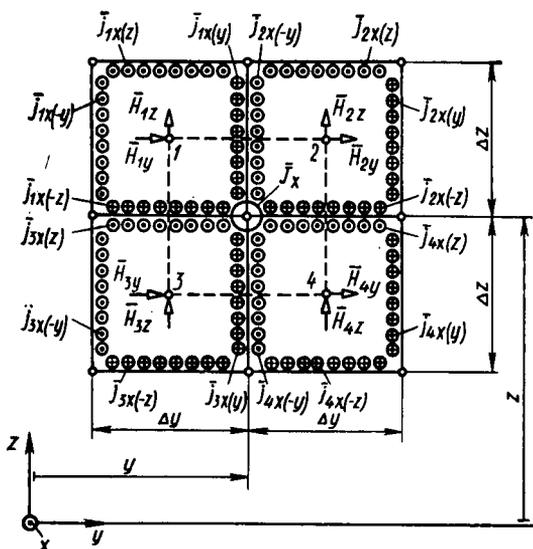


Рис. П.1. Составляющие поверхностных и объемных плотностей тока по оси  $x$  в элементарном объеме магнитного поля

оси  $z$ ;  $j_{1x}(-z)$  — компоненту поверхностной плотности микротока  $j$  по оси  $x$  на грани объема  $\Delta V_1$  с внешней нормалью  $\bar{n} = -\bar{q}_z$ , направленной по оси  $-z$ . Тогда

$$\bar{j}_{1x}(-z) = \bar{q}_x j_{1x}(-z) = [\bar{H}_{1y}(-\bar{q}_z)] = -\bar{q}_x H_{1y};$$

$$\bar{j}_{2x}(-z) = \bar{q}_x j_{2x}(-z) = [\bar{H}_{2y}(-\bar{q}_z)] = -\bar{q}_x H_{2y};$$

$$\bar{j}_{3x}(z) = \bar{q}_x j_{3x}(z) = [\bar{H}_{3y} \bar{q}_z] = \bar{q}_x H_{3y};$$

$$\bar{j}_{4x}(z) = \bar{q}_x j_{4x}(z) = [\bar{H}_{4y} \bar{q}_z] = \bar{q}_x H_{4y};$$

$$\bar{j}_{1x}(y) = \bar{q}_x j_{1x}(y) = [\bar{H}_{1z} \bar{q}_y] = -\bar{q}_x H_{1z};$$

$$\bar{j}_{3x}(y) = \bar{q}_x j_{3x}(y) = [\bar{H}_{3z} \bar{q}_y] = -\bar{q}_x H_{3z};$$

$$\bar{j}_{2x}(-y) = \bar{q}_x j_{2x}(-y) = [\bar{H}_{2z}(-\bar{q}_y)] = \bar{q}_x H_{2z};$$

$$\bar{j}_{4x}(-y) = \bar{q}_x j_{4x}(-y) = [\bar{H}_{4z}(-\bar{q}_y)] = \bar{q}_x H_{4z}.$$

Макроток  $i_x$  в трубке тока 1234 складывается из микротоков в пределах прямоугольного сечения  $\Delta y \cdot \Delta z$ :

$$i_x = (j_{1x}(-z) + j_{3z}(z)) \frac{\Delta y}{2} + (j_{2x}(-z) + j_{4x}(z)) \frac{\Delta y}{2} + (j_{1x}(y) + j_{2x}(-y)) \frac{\Delta z}{2} + (j_{3x}(y) + j_{4x}(-y)) \frac{\Delta z}{2} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \Delta y \cdot \Delta z,$$

откуда средняя объемная плотность макротoka  $i_x$  по сечению  $\Delta y \cdot \Delta z$  составит

$$J_x = \frac{i_x}{\Delta y \cdot \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \text{rot}_x \bar{H}.$$

Рассуждая аналогичным образом, для компонент плотностей токов по осям  $y$  и  $z$  получим  $\bar{J}_y = \text{rot}_y \bar{H}$ ;  $\bar{J}_z = \text{rot}_z \bar{H}$  и, следовательно,  $\bar{J} = \text{rot} \bar{H}$ . А это означает, что средняя объемная плотность суммы микротоков  $\bar{j}$  равна объемной плотности макротoka  $\bar{J}$ , образующего поле с напряженностью  $\bar{H}$ .

## П2. Запись уравнений магнитной цепи в матричной форме

В матричной форме система независимых первых уравнений Кирхгофа для главных сечений магнитной цепи записывается в виде

$$\| A \| \bar{\Phi}_B = 0, \quad (\text{П.1})$$

где

$$\| A \| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,Q} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{D,1} & \dots & a_{D,j} & \dots & a_{D,Q} \end{array} \right\|$$

— матрица главных сечений;  $\Phi_B = \|\Phi_{B1}, \dots, \Phi_{BQ}\|^T$  — вектор потоков ветвей.

Матрица главных сечений содержит  $D$  строк и  $Q$  столбцов. Строки соответствуют главным сечениям и имеют индексы  $i$ , совпадающие с индексами главных сечений (от 1 до  $D$ ); столбцы соответствуют ветвям цепи и имеют индексы  $j$ , совпадающие с индексами ветвей (от 1 до  $Q$ ). Элемент матрицы  $a_{i,j}$  указывает, содержится ли поток  $\Phi_{Bj}$  в сечении  $i$  и как он направлен.

При выбранном положительном направлении потока главного сечения:  $a_{i,j} = 1$ , если ветвь  $j$  содержится в сечении  $i$ , а ее поток совпадает с положительным направлением;

$a_{i,j} = -1$ , если ветвь  $j$  содержится в сечении  $i$ , а ее поток отрицателен;

$a_{ij} = 0$ , если ветвь не содержится в сечении  $i$ .

Матрица главных сечений (см. рис. 1.15), в которой заполнены только строки при  $i = 1$ ;  $i = 2$ ;  $i = D = 9$ , имеет вид

$$\| A \| = \left\| \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 9 \end{array}$$

Система независимых вторых уравнений Кирхгофа для главных контуров магнитной цепи записывается в виде

$$\| M \| \bar{i} = \| B \| \bar{u}_B, \quad (\text{П.2})$$

где  $\|M\|$  — матрица МДС главных контуров;  $\bar{i} = \|i_1, \dots, i_N\|^T$  — вектор токов электрических контуров;  $\|B\|$  — матрица главных контуров;  $\bar{u}_B = \|u_{B1}, \dots, u_{BQ}\|^T$  — вектор магнитных напряжений ветвей.

Матрица главных контуров  $\|B\|$  содержит  $k$  строк и  $Q$  столбцов. Строки матрицы  $\|B\|$  соответствуют главным контурам и имеют индексы  $i$ , совпадающие с индексами главных контуров (от  $D + 1$  до  $Q$ ). Столбцы матрицы соответствуют ветвям цепи и имеют индексы  $j$ , совпадающие с индексами ветвей. Элемент матрицы  $b_{i,j}$  указывает, содержится ли напряжение  $u_{Bj}$  в контуре  $i$  и как оно направлено.

При выбранном положительном направлении обхода главного контура:  $b_{i,j} = 1$ , если ветвь  $j$  содержится в контуре  $i$ , а ее напряжение положительно;

$b_{i,j} = -1$ , если ветвь  $j$  содержится в контуре  $i$ , а ее напряжение отрицательно;

$b_{i,j} = 0$ , если ветвь  $j$  не содержится в контуре  $i$ .

Матрица главных контуров (см. рис. 1.15), в которой заполнены только строки при  $i = D + 1 = 10$ ,  $i = 11$  и  $i = Q = 17$ , имеет вид

$$\|B\| = \begin{array}{cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ \begin{array}{l} 10 \\ 11 \\ 17 \end{array} & \left\| \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

Матрица МДС главных контуров  $\|M\|$  содержит  $k$  строк и  $N$  столбцов. Строки матрицы  $\|M\|$  соответствуют главным магнитным контурам и имеют индексы  $i$ , совпадающие с индексами главных контуров (от  $D + 1$  до  $Q$ ). Столбцы матрицы соответствуют электрическим контурам и имеют индексы  $j$ , совпадающие с индексами электрических контуров (от 1 до  $N$ ).

При выбранном положительном направлении МДС главного магнитного контура:

$m_{i,j} = 1$ , если ток электрического контура  $j$  сцеплен с магнитным контуром  $i$  и создает положительную МДС;

$m_{i,j} = -1$ , если ток электрического контура  $j$  сцеплен с контуром  $i$  и создает отрицательную МДС;

$m_{i,j} = 0$ , если ток электрического контура  $j$  не сцеплен с контуром  $i$ .

Матрица МДС главных контуров (см. рис. 1.15), в которой заполнены только строки при  $i = D + 1 = 10$ ,  $i = 11$  и  $i = Q = 17$ , имеет вид

$$\|M\| = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{l} 10 \\ 11 \\ 17 \end{array} & \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Уравнения намагничивания ветвей в виде уравнений связи между магнитными напряжениями  $u_{Bj}$  и потоками ветвей  $\Phi_{Bj}$  записываются в матричной форме в виде

$$\bar{i}_B = \bar{u}_B = \|R_B\| \bar{\Phi}_B, \quad (\text{П.3})$$

где  $\bar{i}_B = \|i_{B1}, \dots, i_{B-Q}\|^T$  — вектор МДС ветвей;  $\|R_B\|$  — диагональная квадратная матрица магнитных сопротивлений ветвей.

Число строк и столбцов матрицы  $\|R\|$  равны числу ветвей цепи  $Q$ . Элементы матрицы  $r_{i,j}$ , в которых  $i = j$  (иными словами, ее диагональные элементы), равны сопротивлениям ветви  $i$ , т. е.  $r_{i,j} = R_{Bi}$ ; остальные элементы матрицы, в которых  $i \neq j$ , равны нулю.

Система уравнений для потоков электрических контуров имеет вид

$$\bar{\Phi} = \| P \| \bar{\Phi}_B, \quad (\text{П.4})$$

где  $\bar{\Phi} = \| \Phi_1, \dots, \Phi_N \|^\top$  — вектор потоков, сцепленных с электрическими контурами;

$$\| P \| = \begin{vmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,j} & \dots & P_{1,Q} \\ P_{i,1} & \dots & P_{i,j} & \dots & P_{i,Q} \\ P_{N,1} & \dots & P_{N,j} & \dots & P_{N,Q} \end{vmatrix}$$

— матрица потоков электрических контуров.

Матрица потоков электрических контуров  $[P]$  содержит  $N$  строк и  $Q$  столбцов. Строки матрицы соответствуют электрическим контурам и имеют индексы  $i$ , совпадающие с индексами этих контуров (от 1 до  $N$ ). Столбцы матрицы соответствуют ветвям магнитной цепи и имеют индексы  $j$ , совпадающие с индексами ветвей (от 1 до  $Q$ ). Элементы матрицы  $P_{i,j}$  указывают, сцеплен ли поток  $\Phi_{Bj}$  с электрическим контуром  $i$  и как он направлен.

При выбранном положительном направлении потока электрического контура:

$P_{i,j} = 1$ , если поток ветви  $j$  сцеплен с электрическим контуром  $i$  и направлен положительно;

$P_{i,j} = -1$ , если поток ветви  $j$  сцеплен с электрическим контуром  $i$  и направлен отрицательно;

$P_{i,j} = 0$ , если поток ветви  $j$  не сцеплен с электрическим контуром  $i$ .  
Для примера эта матрица (см. рис. 1.15) имеет вид

$$\| P \| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

### П.3 Определение масштабных коэффициентов $m_H$ и $m_B$ аппроксимирующих функций

Функция  $H = (\text{tg}(m_B B)) / m_H$  (или  $B = (\text{arctg}(m_H H)) / m_B$ ) должна аппроксимировать заданную в табличной форме характеристику намагничивания (см. рис. 2.3) на участке от точки  $\alpha$  с координатами  $H_\alpha, B_\alpha$  до точки  $\beta$  с координатами  $H_\beta, B_\beta$ . Коэффициенты  $m_B$  и  $m_H$  этой функции можно найти из решения системы двух нелинейных уравнений

$$H_\alpha m_H = \text{tg}(m_B B_\alpha); \quad H_\beta m_H = \text{tg}(m_B B_\beta),$$

а путем исключения  $m_H$  определение  $m_B$  сводится к решению одного нелинейного уравнения

$$f(x) = f(m_B) = H_\beta \text{tg}(m_B B_\alpha) - H_\alpha \text{tg}(m_B B_\beta) = 0.$$

Вычисление корня  $x = m_B$  этого нелинейного уравнения может быть осуществлено методом половинного деления по программе 33/34, приведенной в [15, с. 159]. В этой программе необходимо заранее задаться интервалом  $\Delta_0$  значений  $x = m_B$ , в котором лежит искомым корень уравнения, т. е. нижней границей этого интервала  $x = x_n = 0,1$ ; длиной интервала  $\Delta_0 = 0,9$ ; чис-

лом  $\varepsilon = \Delta_n = 1 (-0,5)$ , определяющим точность полученного решения, где  $\Delta_n = \Delta_0/2^n$  длина интервала после  $n$  итераций.

После этого можно определить требуемое число итераций по формуле  $n \geq (\ln(\Delta_0/\varepsilon))/\ln 2 = 17$ . Кроме того, в программу вводится значение левой части уравнения  $f(x_n)$  при  $x = x_n$  либо любое число, совпадающее по знаку со значением функции при  $x = x_n$ .

Учитывая принятое в программе 33/34 распределение памяти ( $x_n = P7$ ;  $\Delta_0 = P8$ ;  $f(x_n) = P4$ ;  $n = P0$ ;  $x = P7$ ), используем во фрагменте программы вычисления левой части уравнения следующие ячейки памяти:  $H_\alpha = P1$ ;  $H_\beta = P2$ ;  $B_\alpha = Pa$ ;  $B_\beta = Pb$ . Вводя этот фрагмент, состоящий из 16 шагов, вместо многоточия в начало программы 33/34 и увеличивая адрес условного перехода на число, на единицу меньше числа шагов в этом фрагменте  $10 + (16 - 1) = 25$ , получим следующую программу для определения  $x = m_B$  с помощью микрокалькуляторов «Электроника» МК-54; МК-56; МК-61 или БЗ-34:

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	$\Pi x7$	$\Pi xa$	$\times$	$tg$	$\Pi x2$	$\times$	$\Pi c$	$\Pi x7$	$\Pi xb$	$\times$
10	$tg$	$\Pi x1$	$\times$	$  -  $	$\Pi xc$	$+$	$\Pi x4$	$\leftrightarrow$	$\Pi x4$	$\times$
20	$\times < 0$	25	$\Pi x8$	$  -  $	$\Pi x8$	$\Pi x8$	2	$\div$	$\Pi x8$	$\Pi x7$
30	$+$	$\Pi x7$	L0	00	c/П					

При определении коэффициентов  $m_{B1} = x$  и  $m_{H1}$  аппроксимирующей функции для характеристики намагничивания (см. рис. 2.3, б) материала полукоец в программу вводятся:

$$H_{\alpha 1} = 0,6150 \cdot 10^4 \text{ А/м} = P1; H_{\beta 1} = 1,0775 \cdot 10^4 \text{ А/м} = P2; P_{\alpha 1} = 2,4 \text{ Тл} = Pa; B_{\beta 1} = 2,65 \text{ Тл} = Pb; x_n = 0,1 = P7;$$

$$\Delta_0 = 0,9 = P8; n = 17 = P0; 1 = P4 \text{ (так как } f(x_n) > 0 \text{)}.$$

Результаты расчета (время счета около 3 мин):

$$P7 = PX = m_{B1} = 0,5235 \text{ Тл}^{-1}; m_{H1} = (tg(m_{B1} B_{\alpha 1}))/H_{\alpha 1} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{А}^{-1}.$$

При определении  $m_{B2} = x$  и  $m_{H2}$  аппроксимирующей функции для характеристики намагничивания (по рис. 2.3, б) для среды, заполняющей зазор, вводятся:

$$H_{\alpha 2} = 1,3563 \cdot 10^5 \text{ А/м} = P1; H_{\beta 2} = 2,5931 \cdot 10^5 \text{ А/м} = P2; B_{\alpha 2} = 2,4 \text{ Тл} = Pa; B_{\beta 2} = 2,65 \text{ Тл} = Pb.$$

$$\text{Результаты расчета } P7 = PX = m_{B2} = 0,5350 \text{ Тл}^{-1}; m_{H2} = (tg(m_{B2} B_{\alpha 2}))/H_{\alpha 2} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ м} \cdot \text{А}^{-1}.$$

#### П4. Численное решение нелинейного уравнения для определения магнитного потока

Магнитный поток  $\Phi$  представляет собой корень нелинейного уравнения (см. пример 2.1)

$$f(x) = f(\Phi) = -l_1 (tg(a_1 \Phi))/m_{H1} - l_2 / (tg(a_2 \Phi))/m_{H2} + i = 0.$$

Корень этого уравнения  $x = \Phi$  найдем методом половинного деления по программе 33/34 [15, с. 159]. Зададимся интервалом значений  $x = \Phi$ , в котором лежит искомый корень уравнения (нижней границей этого интервала  $x = x_n = 0,90 \cdot 10^{-3}$  В6 и длиной самого интервала  $\Delta_0 = 0,2 \cdot 10^{-3}$  В6); числом  $\varepsilon = 10^{-4}$   $\Delta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ , определяющим точность полученного решения. После этого определим требуемое число итераций  $n \geq (\ln(\Delta_0/\varepsilon))/\ln 2 = 15$ .

Введем в программу значение левой части уравнения  $f(x_n)$  при  $x = x_n$  либо любое число, совпадающее по знаку со значением функции при  $x = x_n$ . Учитывая принятое в программе 33/34 распределение памяти ( $x_n = P7$ ;  $\Delta_0 = P8$ ;  $f(x_n) = P4$ ;  $n = P0$ ;  $x = P7$ ), используем в фрагменте программы вычисления левой части уравнения следующие ячейки памяти:  $i = P1$ ;  $l_2 = P2$ ;  $m_{H1} = P3$ ;  $i = P6$ ;  $m_{H2} = P5$ ;  $a_1 = P6$ ;  $x = \Phi = P7$ ;  $a_2 = P9$ .

Вводя этот фрагмент, состоящий из 22 шагов, вместо многоточия в начале программы 33/34 и увеличивая адрес условного перехода на число, на единицу меньшее числа шагов в данном фрагменте  $10 + (22 - 1) = 31$ , получим следующую программу для определения  $x = \Phi$  с помощью программируемых микрокалькуляторов «Электроника» МК-54 и др.:

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	Пх7	Пх6	×	tg	Пх1	×	Пх3	÷	хПа	Пх7
10	Пх9	×	tg	Пх2	×	Пх5	÷	Пха	+	—
20	Пхb	+	Пх4	↔	хП4	×	х<0	31	Пх8	—
30	хП8	Пх8	2	÷	хП8	Пх7	+	хП7	LO	00
40	с/П									

При определении потока  $x = \Phi$  при МДС  $i = 9067,7$  А в исходном положении в программу вводятся:

$$l_1 = 0,9415 \text{ м} = P1; \quad l_2 = 10^{-3} \text{ м} = P2; \quad m_{H1} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{А}^{-1} = P3;$$

$$l = P4 \text{ (т. к. } f(x_n) > 0); \quad m_{H2} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ м} \cdot \text{А}^{-1} = P5; \quad a_1 = 1308,7 \text{ Тл}^{-1} \text{ м}^{-2} = P6; \quad x_n = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ В6} = P7;$$

$$\Delta_0 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ В6} = P8; \quad a_2 = 1337,5 \text{ Тл}^{-1} \text{ м}^{-2} = P9; \quad n = 15 = P0; \quad i = 9067,7 \text{ А} = P6.$$

Результаты расчета (время счета около 3 мин):  $PX = P7 = \Phi = 1,04 \cdot 10^{-3}$  В6.

#### П5. Программа для расчета функций по табличным исходным данным и численного интегрирования этой функции по формуле трапеций

Вычислим функцию  $f(x)$  в пределах от  $x_i = x_0$  до  $x_n$  по табличным исходным данным, а затем ее интеграл методом трапеций в тех же пределах.

$$I_i = \int_{x_0}^{x_i} f(x) dx \text{ в виде суммы}$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta i = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}).$$



да, которые воспроизводят в модели составляющие индукции  $\mu_0 \bar{M}_x$ ,  $\mu_0 \bar{M}_y$ ,  $\mu_0 \bar{M}_z$ , обусловленные средней намагниченностью среды  $\bar{M}$  в объеме  $\Delta V$  оригинала. Используя общую формулу, найдем, что составляющая индукции  $\mu_0 \bar{M}_x = \mu_0 \bar{q}_z M_x$  воспроизводится [см. (6.11)] поверхностными плотностями токов, направленными по оси  $z$  на грани  $(y + \Delta y) = \text{const}$  с нормалью  $\bar{n} = \bar{q}_y$ :

$$\begin{aligned} \bar{j}_{Mz}(y) &= \bar{q}_z j_{Mz}(y) = [\bar{M}_x \bar{q}_y] = \\ &= M_x \bar{q}_z, \text{ или } j_{Mz}(y) = M_x; \end{aligned}$$

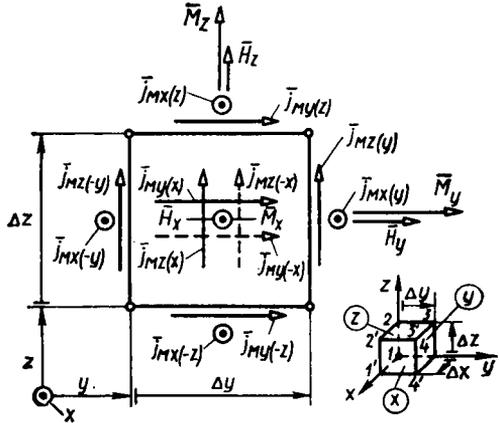


Рис. П.2. Составляющие плотностей поверхностных токов  $\bar{j}_M$

поверхностными плотностями токов, направленными по оси  $z$  на грани  $y = \text{const}$  с нормалью  $\bar{n} = -\bar{q}_y$ :

$$\bar{j}_{Mz}(-y) = \bar{q}_z j_{Mz}(-y) = [\bar{M}_x (-\bar{q}_y)] = -M_x \bar{q}_z, \text{ или } j_{Mz}(-y) = -M_x;$$

поверхностными плотностями токов, направленными по оси  $y$ , на грани  $z + \Delta z = \text{const}$  с нормалью  $\bar{n} = \bar{q}_z$ :

$$\bar{j}_{My}(z) = \bar{q}_y j_{My}(z) = [\bar{M}_x \bar{q}_z] = -M_x \bar{q}_y, \text{ или } j_{My}(z) = -M_x;$$

поверхностными плотностями токов, направленными по оси  $y$  на грани  $z = \text{const}$  с нормалью  $\bar{n} = -\bar{q}_z$ :

$$\bar{j}_{My}(-z) = \bar{q}_y j_{My}(-z) = [\bar{M}_x (-\bar{q}_z)] = M_x \bar{q}_y, \text{ или } j_{My}(-z) = M_x.$$

Применяя круговую замену индексов, можно найти, что составляющая индукции  $\mu_0 \bar{M}_y = \mu_0 \bar{q}_y M_y$  воспроизводится поверхностными плотностями токов на гранях  $x + \Delta x = \text{const}$ ,  $x = \text{const}$ ,  $z + \Delta z = \text{const}$  и  $z = \text{const}$ .

$$j_{Mx}(z) = j_{Mz}(-x) = M_y \text{ и } j_{Mx}(-z) = j_{Mz}(x) = -M_y;$$

а составляющая индукции  $\mu_0 \bar{M}_z = \mu_0 \bar{q}_z M_z$  — поверхностными плотностями токов на гранях  $x + \Delta x = \text{const}$ ,  $x = \text{const}$ ,  $y + \Delta y = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ :

$$j_{My}(x) = j_{Mx}(-y) = M_z \text{ и } j_{My}(-x) = j_{Mx}(y) = -M_z.$$

Согласно [16, с. 514], сила  $\bar{F}$ , действующая в оригинале на элемент объема  $\Delta V$  магнетика с намагниченностью  $\bar{M}$ , не отличается от силы, действующей в модели на микроток  $\bar{j}_M$ , воспроизводящие в этом элементе объема поле с индукцией  $\mu_0 \bar{M}$ . При расчете силы  $\bar{F}$  учитывается взаимодействие токов  $\bar{j}_M$  только с индукцией «внешнего» поля  $\bar{B}_H = \mu_0 \bar{H}$ . Силы от взаимодействия токов  $\bar{j}_M$  с индукцией собственного поля  $\bar{B}_M = \mu_0 \bar{M}$  не учитываются. Они предполагаются взаимно скомпенсированными при интегрировании по

объему намагниченного тела. Поэтому компоненту  $F_z$  рассматриваемой силы  $\vec{F}$  можно выразить по аналогии с компонентой  $f_z$  объемной плотности ЭМС  $f_z = [\vec{J}\vec{B}]_z = J_x B_y - J_y B_x$  и записать в виде следующих сумм сил:

$$F_z = \sum_k i_{Mx(k)} \Delta x (\mu_0 H_y(k)) - \sum_m i_{My(m)} \Delta y (\mu_0 H_x(m)).$$

Здесь  $\sum_k$  распространяется на грани параллелепипеда с индексом  $k$ , на которых имеются направленные по оси  $x$  поверхностные токи  $i_{Mx(k)} = i_{Mx(k)} b_k$ ;  $i_{Mx(k)}$  — плотность этих токов на  $k$ -й грани;  $b_k$  — размер  $k$ -й грани в направлении, ортогональном  $\vec{i}_{Mx(k)}$ ;

$$H_y(k) = H_y(x, y, z) + \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x_k + \frac{\partial H_y}{\partial y} \Delta y_k + \frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta z_k$$

— напряженность поля в центре  $k$ -й грани, имеющем координаты  $(x + \Delta x_k, y + \Delta y_k, z + \Delta z_k)$ .

Соответственно,  $\sum_m$  распространяется на грани параллелепипеда с индексом  $m$ , на которых имеются направленные по оси  $y$  поверхностные токи  $i_{My(m)} = i_{My(m)} b_m$ ;  $i_{My(m)}$  — плотность этих токов на  $m$ -й грани;  $b_m$  — размер  $m$ -й грани в направлении, ортогональном  $\vec{i}_{My(m)}$ ;

$$H_x(m) = H_x(x, y, z) + \frac{\partial H_x}{\partial x} \Delta x_m + \frac{\partial H_y}{\partial y} \Delta y_m + \frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta z_m$$

— напряженность поля в центре  $m$ -й грани, имеющем координаты  $(x + \Delta x_m, y + \Delta y_m, z + \Delta z_m)$ .

Средняя плотность силы  $F_z$  в объеме  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  имеет смысл соответствующей компоненты объемной плотности ЭМС, приложенной к элементам магнитной среды (магнетика) [16]:

$$\begin{aligned} f_z = F_z / \Delta V = \frac{\mu_0}{\Delta V} & \left[ i_{Mx(z)} \Delta y \Delta x \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial H_y}{\partial z} \Delta z \right) + \right. \\ & + i_{Mx(-z)} \Delta y \Delta x \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial H_y}{\partial z} 0 \right) + \\ & + i_{Mx(y)} \Delta z \Delta x \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial H_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) + \\ & + i_{Mx(-y)} \Delta z \Delta x \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial H_y}{\partial y} 0 + \frac{\partial H_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) - \\ & - i_{My(x)} \Delta z \Delta y \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) - \\ & - i_{My(-x)} \Delta z \Delta y \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} 0 + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) - \\ & - i_{My(z)} \Delta x \Delta y \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \Delta z \right) - \\ & \left. - i_{My(-z)} \Delta x \Delta y \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial H_x}{\partial z} 0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Выражая поверхностные плотности тока на гранях параллелепипеда через соответствующие компоненты  $\overline{M}$ , после приведения подобных членов получим

$$f_z = \mu_0 \left( M_y \frac{\partial H_y}{\partial z} - M_z \frac{\partial H_y}{\partial y} - M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_x \frac{\partial H_x}{\partial z} \right).$$

Приняв во внимание, что  $\operatorname{div} \overline{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$ ,

окончательно имеем  $f_z = \mu_0 \left( M_x \frac{\partial H_x}{\partial z} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial z} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \right)$  и т. д.,

что совпадает со вторым членом в (6.25).

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>Введение</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Глава 1. Электромеханическое преобразование энергии в нелинейных магнитных системах</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1. Математические модели магнитного поля нелинейной системы . . . . .	8
1.2. Уравнения напряжений и электромеханического преобразования энергии в нелинейной магнитной системе . . . . .	13
1.3. Выражение энергии магнитного поля нелинейной системы через величины электрических цепей (токи и потокосцепления контуров) . . . . .	20
1.4. Выражение энергии магнитного поля нелинейной системы через величины поля (напряженность, индукцию и объемную плотность энергии) . . . . .	23
1.5. Микромодель магнитного поля нелинейной системы. Выражение магнитной энергии через величины ее элементарных ветвей. . . . .	28
1.6. Магнитная цепь, эквивалентирующая поле нелинейной системы . . . . .	32
1.7. Энергия магнитного поля в линейной модели нелинейной системы . . . . .	40
<i>Краткие выводы</i> . . . . .	43
<b>Глава 2. Определение электромагнитных сил по изменению магнитной энергии или коэнергии при малом перемещении в условиях постоянства токов или потоков возбуждающих контуров</b> . . . . .	<b>44</b>
2.1. Электромеханическое преобразование энергии при перемещении выделенного объема нелинейной системы в условиях постоянства потоков или токов возбуждающих контуров . . . . .	44
2.2. Определение электромагнитных сил по изменению магнитной энергии при перемещении в условиях постоянства потоков, сцепленных с возбуждающими контурами . . . . .	46
2.3. Определение электромагнитных сил по изменению магнитной коэнергии при перемещении в условиях постоянства токов возбуждающих контуров . . . . .	49
2.4. Практическое применение энергетического метода определения электромагнитных сил по изменениям энергии или коэнергии возбуждающих контуров при перемещении . . . . .	52
2.5. Появление ошибочных результатов при определении ЭМС по приращениям магнитной энергии или коэнергии, найденным с учетом нелинейности системы (без перехода к линейной модели) . . . . .	61
<i>Краткие выводы</i> . . . . .	71
<b>Глава 3. Определение электромагнитных сил по изменению магнитной энергии или коэнергии при малом перемещении в условиях постоянства потоков или токов ветвей магнитной цепи</b> . . . . .	<b>72</b>
3.1. Определение электромагнитных сил по изменению магнитной энергии при перемещении в условиях постоянства потоков ветвей магнитной цепи . . . . .	72

3.2. Определение электромагнитных сил по изменению магнитной коэнергии при перемещении в условиях постоянства токов ветвей магнитной цепи . . . . .	76
3.3. О тождественности приращений магнитной энергии, найденных через приращения энергии возбуждающих контуров и ветвей магнитной цепи . . . . .	83
3.4. Появление ошибочных результатов при определении электромагнитных сил по приращениям магнитной энергии или коэнергии ветвей магнитной цепи, найденным с учетом нелинейности характеристик намагничивания (без перехода к линейной модели)	93
3.5. Выражение приращений магнитной энергии и электромагнитных сил через приращения проводимостей ветвей магнитной цепи . . . . .	100
3.6. Выражение приращения магнитной энергии при перемещении выделенного объема через величины магнитного поля при исходном положении объема . . . . .	112
<i>Краткие выводы</i> . . . . .	122
<b>Глава 4. Определение электромагнитных сил и моментов через объемные плотности электромагнитных сил и натяжения . . . . .</b>	<b>123</b>
4.1. Выражение электромагнитных сил и моментов через объемные плотности ЭМС и натяжения . . . . .	123
4.2. Соотношение между компонентами плотности объемных сил и компонентами тензора натяжений . . . . .	127
4.3. Натяжения в магнитном поле . . . . .	135
4.4. Поверхностная плотность электромагнитных сил в магнитном поле . . . . .	153
4.5. Объемная плотность электромагнитных сил в магнитном поле	155
4.6. Развитие методов доказательства формул для натяжения и объемной плотности электромагнитных сил в магнитном поле . . . . .	169
<i>Краткие выводы</i> . . . . .	174
<b>Глава 5. Примеры расчетов электромагнитных сил через их объемную плотность или натяжения . . . . .</b>	<b>175</b>
5.1. Практические рекомендации к расчетам электромагнитных сил через их объемную плотность или через натяжения . . . . .	175
5.2. Электромагнитные силы, действующие на токи в магнитном поле	180
5.3. Электромагнитные силы, действующие на токи и магнитные тела в магнитном поле . . . . .	193
5.4. Электромагнитные силы в области зубцов и пазов электрической машины . . . . .	222
<i>Краткие выводы</i> . . . . .	246
<b>Глава 6. Анализ ошибочных формул для расчета плотностей электромагнитных сил и натяжений в магнитном поле . . . . .</b>	<b>247</b>
6.1. Общие сведения . . . . .	247
6.2. Неполная линейная макромоделль магнитного поля . . . . .	249
6.3. Неполная линейная микромоделль магнитного поля . . . . .	251
6.4. Формулы Львова для расчета натяжений и плотностей ЭМС, полученные с помощью неполной линейной макромоделли магнитного поля . . . . .	253
6.5. О расчете электромагнитной силы, действующей на магнитное тело или его часть, по ошибочным формулам для натяжения и плотностей . . . . .	257
6.6. Формулы Максвелла, Эйнштейна, Лауба для расчета натяжений и плотностей ЭМС, полученные с помощью неполной линейной микромоделли магнитного поля . . . . .	259

6.7. Некоторые другие формулы для натяжения и плотностей электромагнитной силы, полученные с помощью неполной модели магнитного поля . . . . .	264
6.8. Сопоставление формул Максвелла с ошибочными формулами для натяжений и плотностей электромагнитных сил . . . . .	269
<i>Краткие выводы</i> . . . . .	273
<b>Глава 7. Сопоставление экспериментальных и расчетных данных</b>	274
7.1. Электромагнитные силы в зубчатом кольцеобразном сердечнике, охваченном тороидальной обмоткой с током . . . . .	274
7.2. Радиальная электромагнитная сила, действующая на зубец сердечника электрической машины . . . . .	278
7.3. Электромагнитный момент, действующий на область паза с током в электрической машине . . . . .	281
7.4. Силы электромагнитного взаимодействия между линейным током и магнитным цилиндром . . . . .	284
7.5. Электромагнитные силы и упругие деформации в униполярной машине постоянного тока . . . . .	289
<i>Краткие выводы</i> . . . . .	296
<b>Заключение</b> . . . . .	297
<b>Приложения</b> . . . . .	299
<b>Список литературы</b> . . . . .	310

*Учебное издание*

**Иванов-Смоленский Алексей Владимирович**

## **Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах**

Зав. редакцией Н. И. Хрусталева. Редактор И. Е. Якушина. Мл. редакторы Н. Е. Овченко, Г. Г. Бучина, Е. В. Судьенкова. Технический редактор Л. А. Муравьева. Художник В. В. Гарбузов. Художественный редактор В. И. Мешалкин. Корректор Г. А. Четкина

ИБ № 8003

Изд. № СТД-626. Сдано в набор 16.02.89. Подп. в печать 05.10.89. Т-13997  
 Формат 60×88<sup>1/16</sup>. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная.  
 Объем 19,11 усл. п. л.+0,12 усл. п. л. форз. 19,23 усл. кр.-отт. 18,61 уч.-изд. л.+  
 +0,18 уч.-изд. л. форз. Тираж 7000 экз. Зак. № 1938. Цена 95 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 4 Госкомпечати СССР. 129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46